

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
TESE DE DOUTORADO

Expoente de Hurst e Diagrama de Fase para  
Persistência Induzida Amnesticamente em Processos  
não-Markovianos

Arlan da Silva Ferreira

MACEIÓ  
2009

**ARLAN DA SILVA FERREIRA**

**Expoente de Hurst e Diagrama de Fase para  
Persistência Induzida Amnesticamente em Processos  
não-Markovianos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física, da Universidade Federal de Alagoas, como pré-requisito para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cressoni

Co-Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

MACEIÓ, ALAGOAS  
AGOSTO – 2009



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX : 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**TESE DE DOUTORADO**

***“Expoente de Hurst e Diagrama de Fase para Persistência Induzida***  
***Amnesticamente em Processos não-Markovianos”***

**por**

*Arlan da Silva Ferreira*

A Banca Examinadora composta pelos professores José Carlos Cressoni (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Iram Marcelo Gléria, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Crisógono Rodrigues da Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Luciano Rodrigues da Silva, do Departamento de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e Marco Antonio Alves da Silva, do Departamento de Física e Química da Faculdade de Ciências Farmacêuticas de Ribeirão Preto/USP, consideram o candidato aprovado com grau “ *A* ”.

Maceió, 07 de agosto de 2009

  
Prof. José Carlos Cressoni

  
Prof. Iram Marcelo Gléria

  
Prof. Crisógono Rodrigues da Silva

  
Prof. Luciano Rodrigues da Silva

  
Prof. Marco Antonio Alves da Silva

Dedico este trabalho aos meus pais, José Ferreira do Monte e Alaide da Silva Ferreira pela educação recebida. Aos meus irmãos, Maria José, Alcione e Hélio.

A meu orientador José Carlos Cressoni, pelo incentivo, paciência e confiança.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e disposição. A minha família pelo apoio incondicional. Agradeço a meu Orientador Prof. Dr. José Carlos Cressoni, pela paciência, confiança incentivo e dedicação. Agradeço ao Prof. Dr. Marco Antônio Alves da Silva (USP-Ribeirão Preto) pela confiança e dedicação depositada em mim. Agradeço também ao meu Co-Orientador Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan pelo estímulo e incentivo. Agradeço a todos os meus professores com quem tive a honra de estudar e a todos os professores que tive a honra de conhecer. Agradeço a todos meus amigos e alunos do curso de Graduação e Pós-Graduação do Instituto de Física da UFAL. Agradeço ao pessoal da administração, principalmente a secretária Ester. Agradeço também ao pessoal da limpeza. Foram anos maravilhosos que permanecerão na minha memória para sempre. Enfim, ao Instituto de Física e a todos aqueles que possibilitaram a minha formação. Também agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro concedido.

Deixo aqui meus sinceros e eternos agradecimentos para todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a minha formação.

## RESUMO

Atualmente tem crescido o interesse por processos de difusão anômala, i.e., os super difusivos e sub-difusivos. O problema voltado para difusão normal já é bem conhecido, enquanto para difusões anômalas ainda existem vários problemas em aberto. Várias técnicas computacionais e modelos matemáticos têm sido desenvolvidos para modelar tais processos. Estudamos neste trabalho uma caminhada aleatória, não Markoviana em uma dimensão, em que o desenvolvimento do processo é regido por decisões tomadas em relação ao passado distante. Utilizamos como ferramenta de análise uma abordagem analítica e numérica (via método de Monte Carlo). Nesse problema, o caminhante toma suas decisões (entre ir para a direita ou para a esquerda), num determinado tempo  $t$ , com base nas decisões tomadas no passado, numa fração  $f$  do tempo transcorrido. Quando  $f < 1$  o passado recente é esquecido e apenas o passado distante é considerado. Essa perda de memória recente induz a função densidade de probabilidade da posição a passar de um regime Gaussiano para não Gaussiano e leva ao surgimento de oscilações log-periódicas na posição, além de produzir uma mudança no comportamento, de não persistente para persistente, ocasionando difusão anômala. Essa mudança é caracterizada pelo expoente de Hurst e ocorre também, surpreendentemente, numa região de feedback negativo. O diagrama de fases em função dos parâmetros  $f$  e  $p$  (fração de memória antiga e feedback), mostra as seguintes regiões: não persistência clássica; persistência clássica; não persistência log-periódica e persistência log-periódica; região Gaussiana e não Gaussiana da posição.

**Palavras Chaves:** Caminhada aleatória, expoente de Hurst, log-periodicidade, não Markoviano.

## ABSTRACT

Nowadays there has been a growing interest in anomalous diffusion: the super diffusive and sub-difusive processes. The problem about normal diffusion already well established whereas many problems still exist in anomalous diffusion. Several mathematical models and computational techniques have been developed to model such processes. In this work we studied a non-Markovian Random Walk (RW), in one dimension in which the development of the process is governed by decisions taken in the distant past. We used as tool of analysis, analytical and numerical procedures (Monte Carlo method). In this problem, the walker takes its decisions (go right or left) at a given time  $t$ , based on the decisions taken in the past, namely in a fraction  $f$  of the total time. As far as the decision making process is considered only the distant past is taken into account. This loss of recent memory leads the probability density function of the position to change from Gaussian to non-Gaussian and leads to the emergence of log-periodic oscillations in position, besides producing a change in the behavior of non-persistent to persistent, causing anomalous diffusion. This change is characterized by the Hurst exponent, and is found, surprisingly, in a region where there is negative feedback. The diagram of phases depending on the parameters  $f$  and  $p$  (fraction of old memory and feedback), shows the following phases: classical non persistence, classical persistence, log-periodic non persistence, log-periodic persistence, Gaussian and non Gaussian with respect to the position of the walker.

**Key Words:** Random walk, Hurst exponent, log-periodic, non Markovian.

# SUMÁRIO

1	Introdução Geral e Objetivos .....	1
1.1	Estrutura da Tese .....	2
1.2	Física Estatística e Movimento Browniano .....	4
1.3	Processos Markovianos e não Markovianos.....	6
1.4	Equações de Difusão, Fokker-Planck e Mestra .....	12
1.4.1	Equação Clássica da difusão.....	12
1.4.2	Equação de Fokker-Planck.....	14
1.4.3	Equação mestra.....	17
1.5	Perda de memória distante, perda de memória recente e persistência induzida amnesticamente (PIA) .....	18
2	Teorema do Limite Central e Distribuições Estáveis .....	21
2.1	Definições estatísticas.....	21
2.1.1	Momentos.....	22
2.1.2	Função característica.....	23
2.1.3	Convolução.....	25
2.2	Teorema do Limite Central Clássico .....	25
2.3	Distribuição Gaussiana.....	27
2.3.1	Obliquidade e Curtose .....	29
2.3.2	Convolução de duas Gaussianas.....	31
2.4	Generalização do TLC por Paul Lévy .....	32
2.5	Distribuições alfa-estáveis de Lévy.....	34
3	Expoente de Hurst, Difusão Normal e Anômala.....	37
3.1	Caminhada aleatória e Random Walk.....	38
3.2	Lévy Walks .....	44
3.3	Movimento Browniano Fracionário.....	49

3.4	Oscilações log-periódicas e invariância discreta de escala .....	52
4	Resultados numéricos e exatos: Diagrama de Fase para PIA .....	58
4.1	Estimativa numérica via caminhadas simuladas.....	58
4.1.1	Modelo computacional para memória total .....	59
4.1.2	Solução analítica para memória total.....	60
4.1.3	Modelo computacional para memória parcial.....	64
4.1.4	Expoente de Hurst e Persistência induzida por amnésia (perda de memória).....	66
4.1.5	Oscilações log-periódicas na posição média para $\alpha < 0 (p < 1/2)$ .....	69
4.1.6	Cálculo da frequência de oscilação log-periódica.....	72
4.1.7	Comportamento da posição média para $\alpha > 0 (p > 1/2)$ .....	74
4.1.8	Densidade de probabilidade da posição .....	76
4.2	Estimativa Exata via Equações Transcendentais.....	81
4.2.1	Expoente de Hurst para $\alpha > 0 (p > 1/2)$ .....	89
4.2.2	Expoente de Hurst e frequência de oscilação para $\alpha < 0 (p < 1/2)$ .....	90
4.2.3	Caracterização da posição média.....	90
4.3	Diagrama de Fase para log-periodicidade.....	91
4.4	Diagrama de Fase para super difusão e persistência.....	94
4.5	Comportamento da posição média.....	96
4.5.1	Amplitude da posição média para $\alpha < 0 (p < 1/2)$ correspondente a região de log-periodicidade.....	97
4.5.2	Posição média para a região onde não existe log-periodicidade .....	99
4.6	Comparação entre teoria analítica e simulação numérica.....	101
4.6.1	Expoente de Hurst e posição quadrática média.....	101
4.6.2	Oscilações log-periódicas para $\alpha < 0 (p < 1/2)$ .....	102
4.6.3	Comportamento da posição média para $\alpha > 0 (p > 1/2)$ .....	103
5	Conclusões .....	106
5.1	Relevância dos resultados.....	108
5.2	Discussão e perspectivas para o futuro .....	109
6	Referências .....	110

Apêndice A – Definições Estatísticas Básicas .....	115
Apêndice B – Demonstração do Teorema do Limite Central e Momentos da Distribuição Gaussiana .....	120
Apêndice C – Movimento Browniano como Solução de uma Equação Diferencial Ordinária Estocástica .....	127
Artigos relacionados à Tese.....	129

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Na distribuição Gaussiana, a probabilidade favorece apenas a ocorrência de eventos próximos ao valor médio.....	28
Figura 2.2 – $N$ fig.(a), à medida que $\sigma$ aumenta, os dados tornam-se mais dispersos e a distribuição se alarga cada vez mais. Na fig.(b), variando a média é equivalente a transladar a distribuição em torno da média, a largura da distribuição é preservada. ....	29
Figura 2.3 – Exemplo de assimetria. Quando $\alpha_3 > 0$ a assimetria é para esquerda, fig.(a). Para $\alpha_3 < 0$ , tem-se assimetria para direita, fig.(b). Quando $\alpha_3 = 0$ a distribuição de probabilidade é simétrica. ....	30
Figura 2.4 – Exemplo de aplicação do coeficiente de curtose. A curva $P_1$ atinge a convergência Gaussiana ( $\alpha_4=3$ ) em $N_1$ , mais rápido que a curva $P_2$ , que necessita de $N_2$ passos ou iterações computacionais.....	31
Figura 2.5 - Comparativo das PDF's estáveis; Gaussiana, Cauchy e Lévy (ver legendas). Como se pode observar na fig.(a) e fig.(b), a distribuição de Lévy oferece uma probabilidade maior de ocorrência dos eventos afastados da média, se comparado com outras distribuições, principalmente a Gaussiana. Esse comparativo é relativo às caudas das distribuições .....	36
Figura 2.6 – O parâmetro $\beta$ define a assimetria da distribuição de probabilidade, semelhante ao coeficiente de obliquidade. Para $\beta > 0$ a assimetria é para esquerda, fig. (a), caso contrário, a assimetria é para direita, fig.(b). Quando $\beta=0$ a distribuição é simétrica. ....	36
Figura 3.1- Na fig.(a), a variância cresce linearmente com o tempo para quaisquer valores de $p$ , exceto para $p=0$ e $p=1$ , em que a variância vale zero. Na fig.(b) o expoente da posição quadrática média apresenta uma descontinuidade em $p=1/2$ . Em fig.(c) temos o expoente de Hurst, que vale $H=0.5$ , devido à independência dos passos. ....	42
Figura 3.2 – Dependência do coeficiente de difusão em função de $p$ . Esse coeficiente é máximo para $p=1/2$ , estado com maior desordem possível. ....	43
Figura 3.3 – Na fig.(a), na escala log-log, exibimos a proporcionalidade da probabilidade de ocorrência de passos de tamanho $l_i$ para diferentes valores de $\mu$ . Para $\mu=1.1$ a probabilidade de ocorrência de passos grandes é bem alta e esta diminui à medida que aumentamos $\mu$ (por exemplo, $\mu=2.9$ ). A figura (b) representa essa probabilidade projetada no plano $\mu$ versus $l_i$ . A partir desta, é possível perceber que a probabilidade decai rapidamente à medida que aumentamos os valores de $l_i$ e $\mu$ . ....	45
Figura 3.4 – Caminhada aleatória em 2D, para o random walk convencional (com $\mu=3$ ) para diferentes números de passos $N$ , fig.(a) e fig.(b). Em fig.(c) e fig.(d) temos Lévy Walk com $\mu=2$ também com diferentes números de passos $N$ (ver legenda em cada figura). Podemos observar que ambas as caminhadas possuem invariância de escala. ....	47
Figura 3.5 – Difusão para o movimento Browniano correspondente a $\mu=3$ fig(a) e difusão tipo Lévy walk, com $\mu=2$ , fig.(b). Nesta figura, as setas indicam as partículas que mais se distanciaram do aglomerado principal. A barra no inset em fig.(b) corresponde a $1.5e6$ , esse inset mostra a região central ampliada para melhor visualização. Total de 2000 partículas e $N=100000$ passos. ....	48

Figura 3.6 – Exemplo do Movimento Browniano Fracionário para $H=0.2$ fig.(a) e $H=0.8$ fig.(b). O movimento Browniano padrão corresponde a $H=0.5$ (não mostrado aqui). Para menor valor de $H$ , mais rugosa é a “caminhada”.	50
Figura 3.7 – A correlação é sempre positiva para $H>1/2$ em fig.(a) e sempre negativa para $H<1/2$ fig.(b). Na fig.(a) foi usado $H=0.6$ e na fig.(b) $H=0.4$ . Para $H=0.5$ a correlação vale zero.	52
Figura 3.8 – Exemplo de invariância discreta de escala para o conjunto de Cantor.	55
Figura 3.9 – A dimensão fractal diminui entre os valores intermediários de potência inteira de três.	55
Figura 3.10 – Para mesma frequência de oscilação, quando cruzada duas realizações, tem-se uma reta fig.(a). Para pequenas variações $\Delta b=0.01$ , se obtêm uma curva em forma de espiral, fig.(b). Essa curva se torna mais acentuada à medida que a frequência difere uma da outra $\Delta b=0.2$ , fig.(c).	56
Figura 3.11 – Em fig.(a), quando a amplitude de oscilação é inversamente proporcional ao número de passos, a curvatura converge para o ponto zero, o início pode ser qualquer ponto. Já em fig.(b), quando a amplitude é constante, não existe convergência nem divergência para nenhum ponto.	57
Figura 4.1 – Posição média versus $p$ e $t$ . Para $p<1/2$ a posição média tende para zero a medida que $t$ cresce, enquanto que para $p>1/2$ a posição média cresce proporcional ao tempo. A barra de cor ao lado da figura representa o valor numérico da posição média.	61
Figura 4.2 – Expoente de Hurst versus $p$ . Só há persistência para $p>0.75$ (região de persistência clássica corresponde a $p>0.5$ ).	62
Figura 4.3 – Coeficiente de difusão versus $p$ . Esse coeficiente diverge para $p>0.75$ (característico do regime super difusivo) esse coeficiente vale meio para $p=1/2$ , semelhante ao do random walk, como era de se esperar.	63
Figura 4.4 – Densidade de probabilidade da posição versus $p$ e $x$ , para um tempo de $t=10^6$ . A figura (b) representa a projeção da figura (a) no plano $p$ versus $x$ . A barra de cor ao lado de cada figura representa o valor numérico dessa probabilidade.	63
Figura 4.5 – A posição quadrática média e a variância escalam com o tempo da forma $\sim t^{2H}$ , sendo que ambas possuem a mesma inclinação, embora haja maiores oscilações na amplitude para a posição quadrática média do que para a variância, para pequenos valores de $f$ e de $p$ .	66
Figura 4.6 – Para grande valores de $f$ e de $p$ as retas coincidem, mesma amplitude.	66
Figura 4.7 - Expoente de Hurst versus $p$ , para vários valores fixos de $f$ . Pequenos valores de $f$ induzem à persistência mesmo na região de feedback negativo ( $p<1/2$ ). Essa persistência desaparece à medida que aumentamos $f$ (à medida que a memória é restaurada). Valores obtidos utilizando um tempo máximo de $6.0 \cdot 10^6$ e $1000$ realizações.	68
Figura 4.8 – Diagrama completo do expoente de Hurst em função dos parâmetros $f$ e $p$ . Na região do plano $H=0.5$ situa-se a fase de não persistência (região em vermelho). Os resultados foram obtidos para um tempo máximo de $6.0 \cdot 10^6$ e $1000$ realizações.	68
Figura 4.9 – A forma espiral, quando cruzada duas realizações, confirma que a posição oscila log- periodicamente. Caminhada produzida com $4 \cdot 10^6$ passos. Os sinais (positivo ou negativo) não são importantes, estamos interessados apenas na forma da curva (nesse caso, em espiral).	69
Figura 4.10 – Oscilações log-periódicas na posição média. Maiores são as amplitudes para baixos valores de $p$ , com $f$ fixo.	71
Figura 4.11 – As oscilações vão desaparecendo para valores elevados de $f$ .	71

Figura 4.12 – Neste exemplo, as oscilações começam a desaparecer para $p > 0.5$ , para quaisquer valores de $f$ .	72
Figura 4.13 – Fitting (ou ajuste) realizado para medir a frequência de oscilação, fig.(a) e fig.(b). A linha contínua representa o ajuste, enquanto os símbolos em círculos representam os dados numéricos.	73
Figura 4.14 – Comparação entre os ajustes usando as equações (4.8) e (4.9).	74
Figura 4.15 – Variação da frequência de oscilação $B$ em função dos parâmetros $f$ com $p$ fixo, fig.(a) e $p$ com $f$ fixo, fig.(b). Ver legenda em cada figura.	74
Figura 4.16 – O expoente temporal da posição média (inclinação) é maior para menores valores de $f$ , mantendo $p$ fixo, figura (a) ou (b), ver legendas. Para um $f$ fixo, o expoente é maior para maiores valores de $p$ , figura (a) e (b). Para um $p$ próximo de meio os expoentes são extremamente pequenos.	75
Figura 4.17 – Para valores de $p$ próximos a 1.0 (b), a variação dos expoentes temporais da posição média (inclinação) em função de $f$ é bem pequena. Isso mostra que para grandes valores de $p$ , o efeito de memória não altera significativamente a posição média.	76
Figura 4.18- Exemplo do método Probability plot. Na fig.(a), os pontos $P_1$ e $P_3$ correspondem ao primeiro e ao terceiro quartil, respectivamente. Na fig.(b), quando construída uma reta com esse dois pontos, se a correspondência for linear entre os dados analisados e a distribuição escolhida para o teste, significa que o ajuste é apropriado. Neste exemplo, usamos uma distribuição Gaussiana (ou normal) e o método passa a ser chamado <i>normal probability plot</i> .	77
Figura 4.19 – Para valores de $f$ e de $p$ intermediários, a PDF da posição é Gaussiana. Esta é evidenciada pelo “normal probability plot” devido à correspondência linear entre os dados e a reta em vermelho na fig.(a) e também pela forma de sino do histograma na fig.(b).	78
Figura 4.20 – Mesmo para um $f$ pequeno e um $p$ intermediários (ver legendas em fig.(a)), a distribuição ainda é Gaussiana. A forma da distribuição é fortemente dependente do parâmetro $p$ .	79
Figura 4.21 – Para baixos valores de $f$ , principalmente de $p$ , a distribuição já não é mais Gaussiana. Na fig.(a) a correspondência não é mais linear entre os dados e a reta em vermelho tracejada. Pelo histograma na fig.(b) é possível perceber que a distribuição possui uma obliquidade positiva.	79
Figura 4.22 – Na fig.(a), para grandes valores de $p$ (ver legendas), a distribuição não é mais Gaussiana (devido a curvatura dos dados, em azul, com a reta tracejada em vermelho). Pelo histograma na fig.(b) percebe-se que a distribuição possui uma obliquidade negativa.	79
Figura 4.23 – Na fig.(a) coeficiente de curtose transladado para o plano zero. Esse plano corresponde ao regime Gaussiano. Na fig.(b) para pequenos valores de $f$ e de $p$ a dist. Gaussiana ocorre para valores discretos de $f$ . Essa fig.(b) representa a ampliação do quadrado da fig.(a). Na fig.(c) coeficiente de obliquidade está de acordo com a figura (a) para o regime Gaussiano. A fig.(d) representa o coeficiente de obliquidade para baixos valores de $f$ e de $p$ , o que também concorda com a figura (b). Na fig.(b) e (d) a interseção da superfície com o plano zero corresponde ao regime Gaussiano.	80
Figura 4.24 – Projeção da probabilidade efetiva de passos efetuados para direita na fig.(a) e passos dados para esquerda na fig.(b), no plano $t_r$ versus $p$ . A barra de cor ao lado de cada figura representa o valor numérico da probabilidade efetiva.	82

Figura 4.25 – Velocidade efetiva em função dos parâmetros $t_r$ e $p$ . Na fig.(b) temos essa velocidade projetada no plano formado pelos parâmetros $t_r$ e $p$ (ver valores numéricos na barra de cor ao lado de cada figura). .....	83
Figura 4.26 – Frequência de oscilação $B$ em função dos parâmetros $f$ e $p$ . Na Figura (b) tem-se a projeção no plano $B=0$ , para melhor visualização da figura (a). Na seção 4.6.2 fazemos um comparativo entre os resultados analíticos e numéricos para alguns valores de $f$ e de $p$ . .....	92
Figura 4.27 – Diagrama de fase para as regiões onde há oscilações log-periódicas $B \neq 0$ (em azul) e não log-periódicas $B=0$ (região em branco). Para $p_c=0$ , temos $f_c=0.7569$ . .....	94
Figura 4.28 – Expoente de Hurst em função de $f$ e de $p$ . Figura (b) representa a projeção da figura (a) no plano $2H-1=0$ . A barra de cor ao lado de cada figura representa o valor numérico de $2H-1$ . Comparamos os resultados analíticos e numéricos na seção 4.6.1. ....	95
Figura 4.29 – Diagrama de fase para as regiões onde há persistência ( $H > 1/2$ , em azul) e não persistência ( $H = 1/2$ , região em branco). Para $p_c=0.0$ corresponde a um $f_c=0.3284$ . ....	96
Figura 4.30 – Expoente temporal da amplitude da posição média compreendida na região de log-periodicidade (em cores). Para $\delta > 0$ , tem-se a região onde a amplitude cresce proporcionalmente com o tempo com expoente máximo igual a um (regime de “escape”). Quando $\delta < 0$ , a amplitude é inversamente proporcional ao tempo e com expoente que pode chegar a $\delta = -2.92$ (ver barra de cor ao lado da figura). No primeiro caso, a amplitude diverge para no limite assintótico de $t$ , e no segundo caso, essa amplitude vai para zero. A linha preta corresponde a $\delta = 0$ (amplitude constante). ....	98
Figura 4.31 – Comprovação da validade do expoente temporal da amplitude da posição média dado pela equação (4.52). Na fig.(a), $p=0.1$ e $f=0.6$ corresponde a um expoente $\delta = -1.144$ . Na fig.(b), multiplicamos a posição média da equação (4.65) pelo inverso da amplitude, cujo expoente está exposto na fig.(a), e a curva resultante é apenas a parte oscilante com amplitude constante no tempo. ....	98
Figura 4.32 - Exemplo de como oscilações log-periódicas podem estar camufladas devido a grandes (ou pequenas) amplitudes. ....	99
Figura 4.33 – Na fig.(a,b) temos o expoente temporal da posição média no regime em que não existem oscilações log-periódicas (em cores). Na fig.(b) apresentamos esse expoente projetado no plano formado pelos parâmetros $f$ versus $p$ . Para $p > 1/2$ o expoente é sempre positivo, já pra $p < 1/2$ o expoente é sempre negativo, independentemente do valor de $f$ . Quando $p = 1/2$ o expoente é zero. A barra de cor ao lado de ambas as figuras representa o valor numérico de $\delta$ . ....	100
Figura 4.34 – Comparação entre o expoente obtido pela expressão (4.68) fig.(a), e a inclinação da equação analítica (4.65) na escala log-log, fig.(b). ....	101
Figura 4.35 – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos. Os símbolos representam os resultados numéricos e as linhas contínuas os resultados analíticos. ....	102
Figura 4.36- Comparação para o expoente de Hurst entre os resultados analíticos (superfície em cores) e os resultados numéricos (bolas pretas). Obtemos uma boa concordância entre ambas as abordagens. ....	102
Figura 4.37 - Comparação entre os resultados analíticos (linhas contínuas) e numéricos (símbolos) para a frequência de oscilação log-periódica $B$ . Podemos observar também uma boa concordância entre ambas as abordagens. ....	103
Figura 4.38 – Posição média versus tempo, para vários valores de $f$ , com $p$ fixo. A reta formada na escala $\log_e(\langle x \rangle)$ vs $\log_e(t)$ , para um $f$ fixo, indica que a posição média obedece a uma lei de	

potência. Maior é a inclinação para menores valores de $f$ . Em fig.(a), foi utilizado um $p=0.55$ e em fig.(b) $p=0.6$ .....	104
Figura 4.39 – Para altos valores de $p$ , por exemplo $p=0.9$ em fig.(b) as inclinações das curvas formadas por $\log_e(\langle x \rangle)$ vs $\log_e(t)$ , não dependem significativamente de $f$ . Já para valores menores, por exemplo, $p=0.7$ em fig.(a), essas inclinações são bem dependentes de $f$ .....	104
Figura 4.40 – Comparativo do expoente da posição média ( $p > 1/2$ ) para o caso analítico (linhas contínuas) e numéricos via simulações computacionais (símbolos, ver legendas no lado direito da figura). Resultados analíticos e numéricos estão em plena concordância.....	105
Figura 5.1 – Diagrama de fases.....	107

## ***CAPÍTULO 1***

# **1 Introdução Geral e Objetivos**

Na natureza, são encontrados muitos fenômenos em que algumas grandezas variam com o tempo de forma bastante irregular, por exemplo, a posição de uma partícula descrevendo um movimento aleatório. Não existe uma forma precisa de calcular essa variação em detalhes, embora uma média temporal possa revelar certa regularidade que pode ser descrita, matematicamente e fisicamente, de maneira simples.

A comunidade científica tem demonstrado grande interesse em trabalhar com processos que não possuem memória. Uma das principais vantagens de se trabalhar com esse tipo de processo se deve ao fato de sempre ser possível trabalhar com variáveis estocásticas e atribuir a estas um valor médio bem definido. Quando o processo guarda algum tipo de memória, os modelos matemáticos se tornam difíceis de serem resolvidos analiticamente, restando o uso de modelos numéricos ou as simulações computacionais. Problemas relacionados a sistemas físicos reais são na maioria das vezes não Markovianos ou com memória (eventos do passado remoto exercem influências significativas nos eventos futuros). Essa dependência temporal acaba gerando correlações de longo alcance e pode resultar em difusão anômala.

Abordamos neste trabalho uma caminhada aleatória unidimensional não Markoviana em que o desenvolvimento do processo é regido pelas decisões tomadas no passado distante. Apenas uma fração do passado distante é considerada e o passado recente é esquecido. Medimos essa fração de memória antiga lembrada, através de um parâmetro  $f$ . Temos também outro parâmetro  $p$ , que representa a probabilidade de repetir uma mesma ação tomada no passado distante. Esses dois parâmetros definem uma rica variedade de

mudanças no comportamento do sistema, desde difusão anômala, medida através do expoente de Hurst, a oscilações log-periódicas e não log-periódicas na posição média, e também a uma mudança na densidade de probabilidade da posição, que passa de um regime Gaussiano para não Gaussiano. Resolvemos o problema utilizando simulações computacionais e também aplicando um tratamento analítico-estocástico. Apesar da aparente simplicidade do modelo em estudo neste trabalho, este problema conduz a equações matemáticas que em alguns casos ainda não dispõem de soluções analíticas exatas, tornando necessário o uso de simulações computacionais.

Para melhor compreensão do leitor, antes da definição formal do modelo, faremos uma revisão dos conceitos básicos dos processos Markovianos e não Markovianos juntamente com sua definição, difusão normal e anômala, problemas relacionados com perda de memória, definições estatísticas, caminhada aleatória, distribuição Gaussiana e de Lévy, invariância discreta de escala e log-periodicidade. Em seguida, apresentaremos formalmente o modelo e seguiremos com a apresentação dos principais resultados. A estrutura da tese é apresentada a seguir.

## **1.1 Estrutura da Tese**

No capítulo 1 expomos um pouco da história da descoberta do movimento Browniano e seu idealizador. Fazemos uma ligação desse movimento com a física estatística. Em seguida, definimos o processo Markoviano e não Markoviano, evitando, por simplicidade, parte do rigor matemático. Definimos a equação da Difusão, muito importante em processos difusivos, também apresentamos a equação de Fokker-Planck que é uma forma estendida e que engloba também a equação da difusão e a equação Mestra que representa o caso mais geral que reúne todas as duas anteriores. Por fim, falamos sobre perda de memória distante e perda de memória recente relacionada à amnésia e estabilidade de sistemas dinâmicos governados por feedback.

No capítulo 2 apresentamos noções básicas de probabilidade e estatística. Enunciamos o teorema do limite central, um dos mais importantes na Física Estatística. Como complemento, discutimos distribuições Gaussianas e não Gaussianas e apresentamos a generalização do teorema do limite central desenvolvido por Lévy, que obteve uma nova

classe de distribuições, denominadas alfa-estáveis, que se ajusta bem a uma larga variedade de fenômenos. Terminamos este capítulo mostrando algumas funções densidade de probabilidade pertencentes à classe alfa-estáveis de Lévy que possuem soluções analíticas fechadas.

No capítulo 3 discutimos processos difusivos, iniciando pelo problema clássico de uma caminhada aleatória, acompanhada do seu caso particular, o “*random walk*”. Nesta mesma seção, determinamos algumas quantidades de interesse, por exemplo, o expoente de Hurst, usado para fins comparativos com o nosso modelo. Dando continuidade aos processos de Lévy, apresentamos uma outra classe de caminhada aleatória, chamada “Lévy Walk”, bem diferente do caso clássico. Nesse caso, longos passos são estatisticamente permitidos. Neste mesmo capítulo apresentamos também o “Movimento Browniano Fracionário”, o qual possui correlações de longo alcance, ao contrário do movimento Browniano padrão. Para terminar, revisamos o conceito de invariância discreta e contínua de escala e oscilações log-periódicas.

No capítulo 4 apresentamos o modelo computacional e os principais resultados. Iniciamos apresentando o modelo que deu origem a este trabalho e seus resultados. A seguir, definimos o modelo desta tese e os resultados obtidos via simulações computacionais. Em seguida, discutimos a abordagem analítico-estocástica, onde recaímos em um sistema de equações transcendentais para frequência de oscilação (relacionada com a posição média) e o expoente de Hurst (relacionado com a posição quadrática média). A solução desse sistema definiu quatro fases, em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ , fração de memória antiga e probabilidade de aceitar uma decisão passada, respectivamente. Continuando com os resultados analíticos, apresentamos o diagrama de fases para log-periodicidade e para persistência (medida através do expoente de Hurst). Também calculamos os expoentes temporais para a posição média. Por último, fazemos um comparativo entre os resultados numéricos (simulações computacionais) e os resultados analíticos.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as conclusões deste trabalho seguidas das discussões e relevâncias dos resultados obtidos e perspectivas para trabalhos futuros.

## 1.2 Física Estatística e Movimento Browniano

A Física Estatística estabelece uma relação matemática entre a descrição microscópica da natureza e as teorias macroscópicas, tão úteis em muitas das áreas clássicas da ciência e da tecnologia. A Física Estatística é muitas vezes descrita como o estudo de como partimos da dinâmica microscópica ou da interação de várias partículas de um sistema físico e descobrimos como essa dinâmica pode ser traduzida macroscopicamente no limite termodinâmico, ou seja, no limite de muitos graus de liberdade. É impossível falar de física estatística sem falar da termodinâmica. A temperatura de um corpo, por exemplo, que é uma quantidade macroscópica, é resultante das agitações vibracionais moleculares, que é uma quantidade microscópica. As constantes colisões dessas moléculas no recipiente acabam resultando na pressão, que pode ser facilmente medida, o que contrasta com a dificuldade em calcular as velocidades de cada uma das moléculas que geram as colisões. E mesmo que conseguíssemos medir todas essas velocidades, não saberíamos como interpretar tanta informação. Em resumo, a física estatística procura quantificar comportamentos microscópicos ou a interação de várias partículas, em variáveis macroscópicas com valores médios bem definidos.

O botânico Robert Brown, em 1827, foi o pioneiro no estudo do movimento, chamado Browniano, o qual recebeu seu sobrenome como homenagem. Ele observou, ao estudar as células masculinas de fecundação das plantas, o pólen, que o movimento desses grãos em uma célula fluida descrevia um comportamento altamente irregular. Ele observou também que havia uma dependência com a temperatura: mais intensos eram os movimentos para maiores temperaturas. Albert Einstein, no ano de 1905, em sua tese de doutorado, apresentou a teoria cinética para esse tipo de movimento mostrando que o fenômeno era ocasionado por colisões das moléculas do solvente nos grãos de pólen, que faziam com que este descrevesse um movimento aleatório. Einstein descreveu o comportamento individual das partículas utilizando a estatística de Boltzmann-Gibbs, já bem consolidada naquela época, mostrando que as propriedades da difusão seguem uma distribuição Gaussiana. Einstein também provou que o movimento devia ser mais intenso para partículas menores e estudou como outros fatores contribuem para o movimento, por exemplo, a viscosidade do solvente.

Movimentos brownianos são caminhos formados por sucessivos passos com direções randômicas. Eles surgem como a soma de quantidades que flutuam, por exemplo, a velocidade de uma partícula submetida a colisões. Neste tipo de movimento, são emergentes dois principais comportamentos: após um grande número de passos a forma da caminhada torna-se fractal ou invariante sob uma mudança de escala de observação; a sua distribuição de probabilidade obedece a uma simples lei: a equação da difusão. Ambos os comportamentos são independentes dos detalhes microscópicos, eles são universais.

O estudo da teoria do movimento Browniano também contribuiu para evidenciar o mundo microscópico das partículas (átomos e moléculas) e também para calcular o número de Avogadro. Mas tarde, os trabalhos teóricos de Einstein influenciaram de forma decisiva os trabalhos experimentais de Perrin (PERRIN, 1913). Este último conseguiu medir o número médio de moléculas em uma massa de água e seus resultados foram coincidentes com os resultados obtidos anteriormente por Einstein. Os trabalhos da teoria do movimento Browniano desses dois autores foram os precursores na aceitação do atomismo. Movimento Browniano e Random Walk são equivalentes, a única diferença é que este último é empregado com variáveis discretas e o primeiro em processos contínuos. Ambos não possuem direção privilegiada. Problemas relacionados ao movimento Browniano também aparecem em economia, exposto primeiramente pelo trabalho do matemático Bachelier (BACHELIER, 1900) que analisou esse tipo de movimento cinco anos antes do famoso trabalho de Albert Einstein (EINSTEIN, 1905). O trabalho de Bachelier não recebeu muita atenção na época, visto este ser voltado para a teoria de especulação e flutuações no mercado financeiro. Bachelier foi o primeiro a introduzir o que hoje é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov. Bachelier também apresentou uma equação de difusão para processos estocásticos, mostrando que a probabilidade pode se difundir de forma análoga ao calor (VAINSTEIN, 2007). Embora para alguns casos particulares se obtenha uma solução analítica para as equações diferenciais que descrevem o fenômeno da difusão, às vezes a falta de linearidade ou outros fatores tornam impossíveis as soluções em forma analítica, restando os métodos numéricos ou as simulações computacionais como uma alternativa de solução.

O movimento Browniano é um processo tipicamente difusivo, regido pela equação da difusão e apresenta um regime Gaussiano para a posição. É caracterizado pelo fato da variância da distribuição crescer de forma linear com o tempo e conseqüentemente é um processo de difusão normal. O MB também é chamado *processo Wiener* (ver apêndice C).

Este processo é caracterizado por três axiomas (SHONKWILER, 2009, p.171) e vamos considerar  $W(t)$  como a localização de uma partícula no tempo contínuo  $t$ :

$$1 - W(0) = 0,$$

2 - para  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , as diferenças  $W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  são independentes,

3 - e  $s < t$ ,  $(W(t) - W(s))$  é normalmente distribuído com média zero e variância  $\sigma^2 \sim (t - s)$ .

Um grande número de observações experimentais mostra que existe uma grande variedade de sistemas complexos em que a variância não cresce mais linearmente proporcional ao tempo. Como exemplo desses processos de difusão anômala, podemos citar: rotação de fluido em 2D (SOLOMOM, 1993), vidros porosos (STAPF *et al.*, 1995), também em transporte intracelular (CASPI *et al.*, 2000).

### 1.3 Processos Markovianos e não Markovianos

Um modelo pode ser definido como uma idealização matemática, empregado para descrever alguns fenômenos observados. De posse do modelo e a sua solução, o passo seguinte é verificar a sua validade por meio de observações experimentais. Teoria e experimentos devem estar em plena concordância ou o modelo deve ser reformulado ou até mesmo descartado.

Um modelo estocástico é a representação matemática de um processo aleatório que é simplificado por valores médios. Por exemplo, a posição em função do tempo de uma simples partícula descrevendo um movimento irregular, com mudança de direção a cada instante de tempo, não pode ser descrita por uma equação analítica, mas por uma equação estocástica sim. Também, uma das partes mais importantes da modelagem estocástica é encontrar a distribuição de probabilidade de ocorrência dos eventos. Não é nossa intenção abordar vários tipos de processos estocásticos, mas analisar com alguns detalhes uma pequena fração desses processos, bastante relevantes, que são comumente aplicados em modelagem de sistemas dinâmicos devido à sua facilidade de tratamento.

Os processos estocásticos podem ser classificados como:

- Em relação ao estado:

- Estado discreto ou cadeia,  $X(t)$  é definido como um conjunto ou enumerável ou contável.
  - Estado contínuo:  $X(t)$  é definido entre um intervalo de valores desse estado.
- Em relação ao tempo ou parâmetro indexador  $t$ :
- Discreto:  $t$  é finito ou infinito enumerável.
  - Contínuo: os valores de  $t$  se encontram em um intervalo de interesse.

O russo Andrei Andreyevitch Markov (1856-1922) foi o pioneiro a investigar uma rica classe de modelos estocásticos. Esses modelos, que receberam a denominação, como homenagem ao seu idealizador, de processos Markovianos ou de Markov, são também conhecidos como processos sem memória. Não é nosso objetivo falar profundamente de processos Markovianos, mas sim, apresentar resumidamente os principais aspectos desse processo. Iremos apenas considerar tempo e estados discretos. Vamos supor que estamos observando uma cadeia, partindo do tempo  $t_0$  até o tempo  $t_k$ , do conjunto  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k$ . Sejam os valores observáveis  $x_k$  em  $t_k$ , como sendo o estado no tempo presente da cadeia formada por  $X = \{x_0(t_0), x_1(t_1), \dots, x_{k-1}(t_{k-1})\}$ , onde  $X$  é o espaço de estado e também representa a história do passado. Então, os estados  $\{x_{k+1}(t_{k+1}), x_{k+2}(t_{k+2}), \dots\}$  representam um futuro desconhecido. De uma forma mais geral, o princípio de Markov declara que o estado atual depende de um número finito de estados anteriores. Quando tomamos o limite assintótico (um número muito grande de estados), essa dependência finita com os estados anteriores torna-se desprezível e o modelo retorna a condição de processo sem memória. Esse fato é freqüentemente referido como processo sem memória. Desde que é necessário apenas o presente para probabilisticamente prever o futuro, o passado não tem importância, ou seja

$$\begin{aligned} &P[x_0(t_0), x_1(t_1), \dots, x_k(t_k) | x_{k+1}(t_{k+1})], \\ &= P[x_k(t_k) | x_{k+1}(t_{k+1})]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

A probabilidade condicional  $P[x_k(t_k) | x_{k+1}(t_{k+1})] = P[x_k(t_k) \cap x_{k+1}(t_{k+1})] / P[x_k(t_k)]$  é válida para  $P[x_k(t_k)] > 0$ . Onde  $P[x_k(t_k) | x_{k+1}(t_{k+1})]$  representa a probabilidade condicional de ocorrência da variável  $x_{k+1}$  no tempo  $t_{k+1}$ , tal que já tenha ocorrido o evento  $x_k$  em  $t_k$ . O termo  $P[x_k(t_k) \cap x_{k+1}(t_{k+1})]$  representa a probabilidade conjunta de ocorrência da variável  $x_{k+1}$  em  $t_{k+1}$  e  $x_k$  em  $t_k$ . E  $P[x_k(t_k)]$  é a probabilidade de ocorrência do evento  $x_k$  em  $t_k$ .

A equação (1.1) nos informa que dada a ocorrência do estado  $x_k$ , o valor do próximo estado  $x_{k+1}$  depende somente de  $x_k$  e não de qualquer outro estado passado. Essa propriedade é conhecida como Markoviana ou processo sem memória. Qualquer processo que seja estacionário pode ser considerado um processo Markoviano. Dizemos que um processo é estacionário quando seu comportamento estocástico não depende do tempo, ou seja, é invariante sob uma translação temporal.

### Probabilidades de transição

Uma cadeia de Markov é descrita em termos da probabilidade condicional, denominada probabilidade de transição  $p_{ij}$ . Seu comportamento estocástico é definido

$$p_{i,j}(k) = P[x_k(t_k) = i | x_{k+1}(t_{k+1}) = j], \quad (1.2)$$

para quaisquer estados  $i, j$  e  $t_k \leq t_{k+1}$ . Chama-se probabilidade de transição devido ao fato do estado passar de  $i$  (no tempo  $t_k$ ) para  $j$  (no instante  $t_{k+1}$ ). Dada essa probabilidade de transição e a distribuição para o estado inicial, é possível determinar a probabilidade de estar em qualquer estado, qualquer que seja o instante de tempo. Claramente  $0 \leq p_{i,j}(k) \leq 1$  e para qualquer estado  $i$  no instante  $k$ , devemos ter

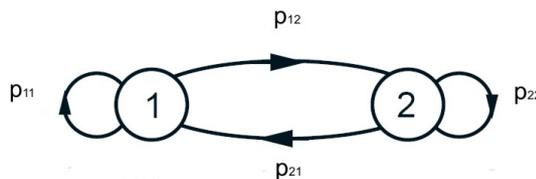
$$\sum_j p_{i,j}(k) = 1, \quad (1.3)$$

o que implica, em notação matricial, que a soma de uma linha deve ser sempre igual a um. Todos os elementos de um modelo constituído por uma Cadeia de Markov podem ser agrupados em uma matriz quadrada com números de linhas e colunas iguais ao número de estados que o modelo pode assumir. A matriz de transição, para apenas um passo, é escrita

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

tal que  $P = [p_{ij}]$ , onde cada linha  $i$  representa o estado atual e cada coluna  $j$  representa o estado futuro. Outra forma bastante ilustrativa de representar essa probabilidade de transição é via método gráfico, chamado de diagrama de transições. Como exemplo, considere o caso de um sistema contendo apenas dois estados, denominados 1 e 2. Para este caso, a matriz e o diagrama de transições, respectivamente são:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$



Na forma de representação pelo diagrama de transições, cada vértice é constituído por um estado, e cada arco orientado ligando dois vértices representa uma transição possível entre esses estados. O coeficiente ao lado de cada arco simboliza a respectiva taxa de transição. Como exemplo, o termo  $p_{12}$  indica a probabilidade de passar do estado 1 para o estado 2. Já o termo  $p_{11}$  representa a probabilidade de permanecer no mesmo estado 1.

### Equação de Chapman-Kolmogorov

Anteriormente definimos a matriz de transição para apenas um passo, agora vamos definir a probabilidade de transição para  $n$  passos. A probabilidade  $p_{ij}^n$  para a qual o processo, estando no estado  $i$ , estará no estado  $j$  após  $n$  transições adicionais, será

$$p_{ij}^n = P[x_m(t_m) = i | x_{n+m}(t_{n+m}) = j], \quad n, i, j \geq 1. \quad (1.5)$$

Essa probabilidade pode ser calculada pela equação conhecida como Chapman-Kolmogorov

$$P^{r+s} = \sum_{k=1}^s P^r P_{kj}^s, \quad \text{para todo } r, s \geq 1. \quad (1.6)$$

Tomando como exemplo, considere a seguinte situação: vamos considerar apenas dois estados, digamos 1 e 2, a pergunta é: qual é a probabilidade de após 3 passos, partindo do estado 1, terminar no estado 2? As possíveis configurações ou as possíveis trajetórias (simbolizadas pelas letras A, B, C e D) para se chegar ao estado 2 partindo de 1, em três passos, juntamente com suas probabilidades, respectivamente, são:

$$\begin{aligned} A: & P[1 \rightarrow 1] \quad P[1 \rightarrow 1] \quad P[1 \rightarrow 2] = p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{12} \\ B: & P[1 \rightarrow 1] \quad P[1 \rightarrow 2] \quad P[2 \rightarrow 2] = p_{11} \cdot p_{12} \cdot p_{22} \\ C: & P[1 \rightarrow 2] \quad P[2 \rightarrow 1] \quad P[1 \rightarrow 2] = p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} \\ D: & P[1 \rightarrow 2] \quad P[2 \rightarrow 2] \quad P[2 \rightarrow 2] = p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{22}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

ou seja, existem quatro possíveis caminhos para se passar do estado 1 para 2 em 3 transições. Em (1.7) usamos o fato que  $P[X \cap Y] = P[X]P[Y]$ , quando os eventos  $X$  e  $Y$  são independentes. Portanto, a probabilidade total em (1.7) é a composição de todas as probabilidades composta por todas as possíveis trajetórias formadas pelos caminhos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Usando outra identidade,  $P[X \cup Y] = P[X] + P[Y]$ , a probabilidade total esperada é simplesmente a soma de todas as probabilidades de cada caminho, ou seja,

$$\begin{aligned} & P[A] + P[B] + P[C] + P[D] \\ &= p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{12} + p_{11} \cdot p_{12} \cdot p_{22} + p_{12} \cdot p_{21} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \cdot p_{22}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Resolvendo o mesmo problema utilizando a equação de Chapman-Kolmogorov (1.6), fazendo  $r=2$  e  $s=1$ , obtemos novamente (1.8). Note que, em termos da matriz de transição (1.4), temos que

$$P^3 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = p_{11}(p_{11}^2 + p_{12}p_{21}) + p_{21}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) \\ x_{12} = p_{12}(p_{11}^2 + p_{12}p_{21}) + p_{22}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) \\ x_{21} = p_{11}(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) + p_{21}(p_{21}p_{12} + p_{22}^2) \\ x_{22} = p_{12}(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) + p_{22}(p_{21}p_{12} + p_{22}^2). \end{cases} \quad (1.9)$$

Então, a probabilidade para passar do estado 1 para o estado 2 utilizando 3 passos, é dada pelo elemento  $x_{12}$  da matriz (1.9), que se comparado com o resultado obtido em (1.8) são idênticos. A equação de Chapman-Kolmogorov leva em conta todas as possíveis trajetórias, ou todas as probabilidades, para transitar de um estado para outro em  $n$  passos. Percebemos que a simplicidade do processo é devido à independência dos eventos ou das probabilidades, quando isso não ocorre, recaímos no processo não Markoviano. Este processo não apresenta uma viabilidade de solução matemática tão simples, pois agora recaímos em probabilidades condicionais dependentes de todo o histórico. Quando as probabilidades de transição já não mais se alteram no tempo ou em função do número de passos, é dito que o processo atingiu o regime estacionário.

### Classificação dos estados

O caminho tomado do estado  $i$  para o estado  $j$  representa uma seqüência de eventos com probabilidades positivas que conectam dois estados. Não há nenhuma restrição quanto ao tamanho do caminho para ir de um estado para outro, este pode ser o mais curto, o mais longo ou intermediário. Dizemos que o estado  $j$  é alcançado a partir do estado  $i$  se houver pelo menos um caminho que os conecte. Neste caso, os estados  $i$  e  $j$  são comunicantes se

houver pelo menos um caminho que conecte os estados  $i$  para  $j$  e vice versa. Uma cadeia de Markov é dita irredutível se todos os estados são comunicantes entre eles. Um estado  $j$  é chamado transiente se existe um estado  $k$  que seja comunicante com  $j$ , mas não sendo  $j$  atingível a partir de  $k$ , ou seja,  $p_{jk} \neq 0$  e  $p_{kj} = 0$ . Caso contrário, um estado  $j$  é considerado recorrente se este não for transiente. Um estado  $j$  é considerado absorvente se entrando nele não existem caminhos para sair de lá, ou seja,  $p_{jj} = 1$ .

### Cadeia de markov irredutível e aperiódica

A irredutibilidade e a aperiodicidade são condições de importância central em teoria markoviana, em geral elas são consideradas a chave principal para o estudo de distribuição estacionária. A irredutibilidade é a propriedade que todos estados da cadeia de Markov são acessíveis. Dependendo da forma dos modelos de transição e observação juntamente com os tipos das variáveis aleatórias, modelos específicos podem ser usados para o processo de inferência temporal, são eles: Hidden Markov Modelos (HMM), que é largamente aplicado em bioinformática (KOSKI, 2001) e reconhecimento de voz (RAFTERY; TAVARES, 1995); Redes Bayesianas Dinâmicas, etc.

Como exemplo geral, considere uma partícula movendo-se randomicamente ao longo do eixo- $x$ , começando na origem e que pode assumir os seguintes valores  $x = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  com coordenadas inteiras. Admitindo que a partícula estando na posição  $i$ , podendo se mover para a posição  $i+1$ , ou para  $i-1$  com probabilidade  $p$  ou  $1-p$ , respectivamente. Cada passo dado é considerado um evento independente dos anteriores, a partícula não se “lembra” do seu passado. Seja  $S(n)$  a posição da partícula após  $n$  passos, portanto, a seqüência  $S(0) \rightarrow S(1) \rightarrow S(2)$  é considerada uma cadeia de Markov com as seguintes probabilidades de transições

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1, \\ q & \text{se } j = i - 1, \\ 0 & \text{outros valores.} \end{cases} \quad (1.10)$$

O conjunto  $S(n)$  representa uma coleção de variáveis aleatórias, que é usada em varias áreas, dentre elas: física, ciência da computação, teoria da informação, matemática financeira, teoria dos jogos, etc.. Em teoria dos jogos, citamos o seguinte exemplo: considere um jogador que ganha ou perde um montante com probabilidade  $p$  ou  $1-p$ , respectivamente. Seu capital inicial é  $X$  e ele joga contra um adversário com capital inicial

$C-X$ , tal que a soma do montante do apostador e do seu adversário é  $C$ . Eles jogam até o capital do apostador atingir  $C$ , ou reduzir a zero, ou seja, até a ruína de algum deles. Através da abordagem Markoviana, é possível obter a distribuição de probabilidade, por exemplo, da duração do jogo. Também é possível encontrar a probabilidade do apostador, começando com um capital inicial  $X$ , ganhar a fortuna  $C$  ou chegar à ruína. A solução desse problema pode ser encontrada em Shonkwiler (2009, p.181-185). Neste último exemplo, estatisticamente cada evento é considerado independente dos anteriores, mas o fator psicológico do apostador que está perdendo vai influenciar muito no seu desempenho futuro. Para uma descrição mais completa de processos Markovianos recomendamos os livros dos seguintes autores (BERTSEKAS *et al.*, 2000) e (PRIMAK *et al.*, 2004).

## **1.4 Equações de Difusão, Fokker-Planck e Mestra**

### **1.4.1 Equação Clássica da difusão**

Sempre tem sido de grande interesse procurar estudar mudanças de variáveis macroscópicas em sistemas pertencentes a várias disciplinas, tais com: Física, Química, Engenharia Elétrica, entre outras. Quando a transição de um estado para outro ocorre, flutuações ou processos randômicos regem de forma decisiva o desenvolvimento desse processo.

Em um processo difusivo, um conjunto de variáveis, sejam elas moléculas, átomos, energia, etc, cada uma dessas variáveis descrevem um movimento individual altamente irregular. Em contraste, o comportamento coletivo dessas variáveis apresenta grande regularidade que pode ser descrita por leis dinâmicas bem simples, dentre elas: a equação da difusão. A difusão é um processo relacionado ao fenômeno de transporte, que pode ser exemplificado como as moléculas de um soluto se espalhando por uma solução. Nesse exemplo a difusão ocorre da região de mais alta concentração para a mais baixa concentração, tal que as partículas tendem a ocupar de forma uniforme toda a solução, maximizando, assim, o coeficiente de difusão. De forma análoga, em um processo termodinâmico, o calor flui de uma fonte de mais alta temperatura para uma região de mais baixa temperatura a fim de alcançar o equilíbrio termodinâmico, ou seja, maximizar a

entropia do sistema. Processos governados por difusão também aparecem em fenômenos de interesses tecnológicos e econômicos, como o escoamento de petróleo em meios porosos. A seguir, discutimos o caso particular para a equação da difusão sem forças externas.

A difusão é relacionada a partir de dois princípios básicos, são eles:

1. O montante de matéria que atravessa uma superfície unitária é proporcional ao gradiente da concentração do material na direção perpendicular a área, conhecida também como a lei de Fick (FICK, 1855). Podemos expressar matematicamente essa lei da forma

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = -D\vec{\nabla}\rho(\vec{x}, t). \quad (1.11)$$

$\vec{J}(\vec{x}, t)$  é a densidade de corrente de partículas definida em termos da velocidade local  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , dada por  $\vec{J}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)$ . O sinal negativo em (1.11) é para informar que a difusão ocorre da região de maior concentração para a região de mais baixa concentração. Temos também que  $\rho(\vec{x}, t)$  é densidade de soluto por unidade de volume e  $D$  é o coeficiente de difusão ou dispersão, que pode variar em função de  $\vec{x}$  e de  $\rho(\vec{x}, t)$ .

2. A matéria é conservada no espaço e no tempo, de modo que estas não são criadas nem destruídas durante o movimento. Matematicamente essa lei de conservação pode ser expressa como

$$\frac{\partial\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.12)$$

De forma ilustrativa e simplificada, a equação (1.12) pode ser obtida da forma que se segue. Considere  $\rho(x, t)$  uma densidade de alguma substância conservada (quantidade de moléculas, massa, energia, etc) variando apenas na dimensão  $x$ , no sistema de coordenadas cartesiano. Seja  $J(x)$  a taxa líquida da quantidade conservada, passando da esquerda para direita através de um ponto  $x$  e atravessando uma distancia  $\Delta x$ , da forma

$$J(x) \rightarrow \underbrace{\rho(x)\Delta x}_{\Delta x} \rightarrow J(x + \Delta x).$$

A quantidade de matéria em uma pequena região  $(x, x + \Delta x)$  é  $n = \rho(x)\Delta x$ . O fluxo de partículas na região  $x$  é  $J(x)$  e na região  $x + \Delta x$  é  $J(x + \Delta x)$ . Logo,  $n$  pode ser escrito da forma:

$\frac{\partial n}{\partial t} = J(x) - J(x + \Delta x) \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x$ , o que implica na conservação da corrente de probabilidade

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{J(x + \Delta x) - J(x)}{\Delta x} = -\frac{\partial J}{\partial x}$ . Este resultado pode ser estendido de forma similar para

três dimensões. Substituindo (1.11) em (1.12) e já assumindo que  $D$  seja independente de qualquer termo que contenha a posição, chegamos à famosa equação da difusão

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \rho(\vec{x}, t). \quad (1.13)$$

A equação da difusão pode ser resolvida analiticamente e, como exemplo, vamos ilustrar seu resultado apenas para a direção  $x$ , no sistema de coordenadas cartesianas. A

equação (1.13) apenas para a variável  $x$ , fica:  $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}$ . Considerando aqui

$\rho(x, t)$  como uma densidade de probabilidade da forma  $p(x, t)$ , a solução da equação da difusão ou a função densidade de probabilidade (PDF, sigla em inglês) para a posição,

torna-se  $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2Dt}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-x_0}{\sqrt{2Dt}} \right)^2}$ . Usando o fato que  $\sigma^2 = 2tD$  e então substituindo

nessa última equação, essa agora pode ser escrita como

$$p_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.14)$$

A equação (1.14) é a famosa distribuição Gaussiana, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Retornaremos a discussão da distribuição Gaussiana na seção 2.3.

Apesar do estudo da difusão ser bastante abrangente, ainda existem vários problemas em aberto, principalmente os sistemas considerados fora do equilíbrio, sistemas de difusão anômala, alguns exemplificados no capítulo 3.

## 1.4.2 Equação de Fokker-Planck

A equação de Fokker-Planck (FP) foi primeiramente aplicada ao problema do movimento Browniano. Era impossível prever a posição exata de um grão de pólen. Ao invés disso, havia uma certa probabilidade de encontrar esse grão em uma determinada

posição e instante de tempo, e com a equação de Fokker-Planck, essa densidade de probabilidade poderia ser calculada (RISKEN, 1996). Como discutido no movimento Browniano, a solução de um sistema macroscópico consiste em conhecer todos os movimentos microscópicos do sistema. Geralmente não é possível ter conhecimento dos movimentos microscópicos, ao invés disso, o sistema pode ser completamente descrito por variáveis macroscópicas que flutuam de forma estocástica.

A equação de Fokker-Planck fornece a evolução temporal da densidade de probabilidade da variável medida. Essa equação tem se mostrado uma poderosa ferramenta para sistemas cujos efeitos de flutuações próximos a pontos de transições o método pode fornecer resultados superiores em relação a outras abordagens, ex: equações de Langevin. Flutuações são comuns em um largo número de sistemas. Estes estão sujeitos a uma complicada influência de forças externas e internas. A forma geral, em uma dimensão, para a equação de FP pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [D^{(1)}(x,t)p(x,t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D^{(2)}(x,t)p(x,t)]. \quad (1.15)$$

Em (1.15)  $D^{(1)}(x,t)$  é o coeficiente de arrasto (ou “drift”, em inglês) o qual também é conhecido como termo de transporte e  $D^{(2)}(x,t)$  é o coeficiente de difusão ( $D^{(2)}(x,t) > 0$ , é a única restrição para a equação (1.15)). Ambos os coeficientes também podem ser constantes ou depender apenas da variável  $x$  ou  $t$ . Se o coeficiente de difusão for constante espacialmente, o meio é homogêneo; caso contrário o meio é considerado heterogêneo. Quando há dependência temporal do coeficiente de difusão, significa que o processo guarda memória. Essa seria umas das formas de caracterizar um processo como Markoviano ou não Markoviano. A equação de Fokker-Planck é uma equação de movimento para  $P(x,t)$ . Matematicamente, esta representa uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo parabólica. Também podemos dizer que é uma equação de difusão com um termo adicional de derivada de primeira ordem com respeito à  $x$ . A expressão (1.15) também é conhecida como equação de Kolmogorov. Qualquer processo que satisfaça a equação de Fokker-Planck é considerado um processo difusivo. Quando  $D^{(1)}(x,t) = 0$  e  $D^{(2)}(x,t) = D$  a equação (1.15) torna-se a equação da difusão (1.13) obtida por Fick (1855). Portanto, podemos dizer que a equação da difusão é um caso particular da equação de Fokker-Planck. A equação de Fokker-Planck também pode ser escrita através da lei de conservação

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) = 0, \quad (1.16)$$

com a corrente de probabilidade é igual a  $J(x,t) = D^{(1)}(x,t)p(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} (D^{(2)}(x,t)p(x,t))$ .

Essa lei de conservação é uma consequência direta da conservação global da probabilidade, ou pela condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t) dx = 1. \quad (1.17)$$

É possível também generalizar a equação (1.15) para  $N$  variáveis  $x_1, \dots, x_N$  da forma

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (D_i^{(1)}(\{x\}, t) p(\{x\}, t)) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij}^{(2)}(\{x\}, t) p(\{x\}, t)). \quad (1.18)$$

O vetor de arrasto  $D^{(1)}$  e o tensor de difusão  $D^{(2)}$  normalmente dependem das  $N$  variáveis  $x_1, \dots, x_N = \{x\}$ . Uma possibilidade de generalizar a equação (1.15) consiste em levar em conta a memória do processo, então:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^t \left[ - \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t-\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t-\tau) \right] p(x, \tau) d\tau. \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é determinada por todas as distribuições dos tempos anteriores (processo não Markoviano). Quando os coeficientes de memória em (1.19) decrescem rapidamente com o tempo, recaímos na equação (1.15). De uma forma mais resumida, a equação se escreve

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^t K(x, t-\tau) p(x, \tau) d\tau \quad (1.20)$$

onde  $K(x, t-\tau) = - \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t-\tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t-\tau)$  representa o Kernel de memória do processo.

### 1.4.3 Equação mestra

Uma forma mais geral para a equação de Fokker-Planck para a função densidade de probabilidade é a equação mestra. Quando a variável  $n$  (índice do estado da variável) toma apenas valores inteiros, a equação mestra assume a forma

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = \sum_m [w(m \rightarrow n)p_m - w(n \rightarrow m)p_n]. \quad (1.21)$$

Em (1.21),  $p_n$  representa a probabilidade de encontrar o valor  $n$  e  $w(m \rightarrow n)$  representa a taxa de transição para que o sistema mude do estado  $m$  para  $n$  e  $w(n \rightarrow m)$  representa o caminho inverso. Normalmente, a maior dificuldade reside em calcular a taxa de transição de probabilidade (SALINAS, 2005). Para o caso da variável ser contínua, devemos substituir a soma por uma integral e a nova equação se escreve

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int [w(x' \rightarrow x)p(x',t) - w(x \rightarrow x')p(x,t)]dx'. \quad (1.22)$$

O processo descrito pela equação (1.21) é chamado de Markoviano, pois a probabilidade num tempo  $t$  é independente das anteriores. A equação (1.15) é um caso particular da equação mestra, com as taxas de transições dadas por

$$w(x' \rightarrow x) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] \delta(x - x'), \quad (1.23)$$

$$w(x \rightarrow x') = \left[ -\frac{\partial}{\partial x'} D^{(1)}(x') + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} D^{(2)}(x') \right] \delta(x' - x). \quad (1.24)$$

Substituindo (1.23) e (1.24) em (1.22) chega-se na equação (1.15). A expressão (1.24) fará com que o segundo termo do lado direito da equação (1.22) seja zero devido a  $\partial / \partial x'$  (RISKEN, 1996). Existe também a forma não Markoviana com o termo de memória, na equação mestra, que representa a forma mais geral e esta é escrita como

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^t \left[ \sum_{x'} w(x \rightarrow x', t-\tau)p(x', \tau) - \sum_{x'} w(x' \rightarrow x, t-\tau)p(x, \tau) \right] d\tau. \quad (1.25)$$

Em (1.25) a mudança da probabilidade num tempo  $t$  depende de todos os eventos acontecidos anteriormente, esses eventos são ponderados pelas taxas de transições  $w$ .

## **1.5 Perda de memória distante, perda de memória recente e persistência induzida amnesticamente (PIA)**

Memória é a habilidade de armazenar informações e evocá-las quando necessário. Todo sistema natural possui sua capacidade limitada, seja ela na produção de energia, capacidade de armazenamento de dados, informação, crescimento populacional, produção de alimentos, etc. O essencial é que o sistema saiba administrar bem seus recursos de modo que o mesmo possa com sabedoria se desfazer, quando necessário, de alguns deles.

O esquecimento é considerado como um algo fundamental e indispensável para qualquer sistema provido de memória. Portanto, não deve ser considerado como uma falha. Esse esquecimento tem por finalidade promover uma desocupação de lembranças inúteis e evitar a sobrecarga da memória. Dessa forma, processo de esquecimento possibilita o armazenamento de novas memórias, viabilizando assim, novos aprendizados. O importante é saber qual porção de memória que deve ser descartada e qual a que deve ser mantida. Quando ocorre uma falha no processo de esquecimento em excesso, ocorre o surgimento da chamada amnésia. A retenção de excesso de memória acarreta a hiperamnésia, caso oposto da amnésia.

### **Perda de memória relacionada a humanos**

A memória pode ser dividida em dois grupos: a memória de curta duração (MCD) e a memória de longa duração (MLD). A informação que chegar até o sistema sensorial é processada e armazenada na MCD, para que ela se consolide como memória de longa duração essa informação deve ser exercitada e repetida a fim de facilitar a transferência para esse último sistema. A amnésia consiste na incapacidade de se processar e armazenar fatos principalmente na MCD. Conseqüentemente a memória de longa duração fica sem receber novas lembranças para serem armazenadas a longo prazo e suas vítimas estacionam em suas lembranças antigas remanescentes. Não iremos entrar em detalhes biológicos ou técnicos, estamos apenas analisando superficialmente as enfermidades relacionadas à perda de memória em humanos.

Amnésia normalmente representa uma lacuna na memória de suas vítimas, que conseguem se lembrar de fatos ocorridos há muitos anos atrás, mas têm dificuldades de se lembrar de ações que ocorreram minutos antes. A esse sintoma, damos o nome de perda de

memória recente. Uma doença que acomete os humanos que provoca essa perda de memória recente é o mal de Alzheimer, descrita pela primeira vez em 1907 pelo neurologista alemão Alois Alzheimer. As suas vítimas têm como principal característica repetir as mesmas perguntas (ou ações) várias vezes devido ao esquecimento de já ter executado a ação anteriormente. A essa repetição damos o nome de persistência. Outra doença comum em humanos é a Síndrome de Korsakoff. Essa síndrome foi descrita pela primeira vez pelo médico russo Sergei Korsakoff no início do século XIX. A principal característica dessa doença também é a perda de memória, que é acompanhada em certos casos de alcoolismo crônico e o abuso de drogas, etc.

### **Sistemas dinâmicos governados por Feedback**

Os sistemas dinâmicos podem ser governados por feedback positivos ou uma mistura deste com o feedback negativo. O termo “*feedback negativo*” se popularizou na década de 1930 em teoria de circuitos eletrônicos para indicar ganho ou perda de amplificação. Atualmente esse termo é usado em uma larga variedade de áreas da ciência e tecnologia. O feedback positivo atua de forma a seguir tendência ou repetir as mesmas ações anteriores, e com isso contribuir para a “desestabilização” de um sistema qualquer. Em oposição ao feedback positivo, o feedback negativo atua como um mediador ou regulador responsável pela manutenção do equilíbrio de um sistema. O feedback negativo atua de forma a sempre se opor a seguir tendência ou preferivelmente tomar decisões contrárias as anteriores. Um sistema dinâmico equilibrado é guiado por feedback negativo.

Muitos sistemas sociais, econômicos, ecológicos, físicos, químicos, biológicos, conseguem manter o seu equilíbrio interno sempre se opondo a qualquer mudança efetuada pelo ambiente externo. Sistemas complexos necessitam dos mecanismos de feedback negativos para poderem sobreviver. Um bom exemplo em sistemas biológicos, aplicado a mamíferos, é a regulação do nível de glicose no sangue, impedindo assim, o surgimento de diabetes. Outro exemplo é a regulação hormonal. Podemos citar também a regulação da temperatura corporal, evitando uma hipotermia ou hipertermia, etc. Temos também outro exemplo, que é aplicado em Economia: para que um mercado de ações se mantenha “saudável” é necessário que o mesmo número de negócios entre venda e compra de títulos esteja equilibrado. Quando um negociante ou agente decide vender seus títulos, talvez outros agentes resolvam tomar a mesma atitude. Se essa tendência se mantiver, todos os negócios serão voltados apenas para a venda de títulos, havendo assim, uma grande

desvalorização devido à grande oferta. O mesmo se aplica se a ação fosse a compra de títulos, só que agora haveria uma supervalorização. Mas, quando o número de agentes que decidem vender seus títulos é aproximadamente o mesmo número de agentes que decidem comprar títulos, ou vice-versa, o mercado se mantém estável ou equilibrado. Quando ocorre um desbalanceamento entre feedbacks os mercados de ações tendem a desmoronar. Esse exemplo é só para elucidar que feedback negativo não ocorre só em sistemas naturais, mas também em processos artificiais. Normalmente os investidores tomam suas decisões, quando vão negociar seus títulos, baseadas em tendência de mercado. Mas, surge uma pergunta: é melhor analisar essa tendência em relação a uma semana ou a um ano atrás? É melhor recorrer ao passado recente ou ao passado antigo? Perguntas desse tipo ainda necessitam de respostas satisfatórias. Outros exemplos de feedback podem ser encontrados em (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008).

No problema em estudo nesta tese, iremos mostrar, no que diz respeito à tomada de decisão, que a perda da memória de curto alcance (ou memória recente) conduz a resultados totalmente diferentes se comparados aos resultados relativos à perda de memória de longo alcance, ou memória antiga. Estaremos aptos a quantificar essa perda de memória e os fenômenos que surgem, principalmente na região guiada por feedback negativo, pois com a introdução de memória, o feedback negativo pode não gerar o efeito esperado. O mais impressionante é que a perda de memória recente (amnésia) pode gerar persistência, mesmo na região de feedback negativo. Isso mostra o quanto são complexos os processos com memória.

## CAPÍTULO 2

# 2 Teorema do Limite Central e Distribuições Estáveis

Neste capítulo resumimos definições estatísticas básicas (algumas deixadas no apêndice A), relevantes para o entendimento das seções seguintes. Apresentamos, também, o teorema do limite central e sua demonstração no apêndice B. Dando continuidade à seção anterior, discutimos as distribuições Gaussianas e encerramos o capítulo apresentando uma nova classe de distribuições obtidas por Lévy. Este generalizou o teorema do limite central desconsiderando a condição de segundo momento finito.

### 2.1 Definições estatísticas

Uma variável aleatória é determinada pelo conjunto de valores que essa pode assumir. A ocorrência de cada valor está associada a uma probabilidade. Baseado no tipo de valores que uma variável aleatória sob consideração pode assumir, é possível distinguir três classes:

- a) variável discreta,
- b) variável contínua,
- c) mistura entre o caso discreto e contínuo.

Existe um grande número de características que nos permitem fazer uma completa descrição de uma variável randômica  $x$ . Começamos pela função de distribuição cumulativa  $P_x(x_i)$  (CDF, sigla em inglês), a função densidade de probabilidade  $p(x)$  (PDF, sigla em inglês) e a função característica  $\phi_\omega(\omega)$ . Essas são as funções mais importantes que nos fornecem uma descrição completa das propriedades da variável em questão. Por questão de completeza, deixamos no apêndice A algumas definições básicas de estatística, como: média, desvio padrão, covariância, variância, etc.

## 2.1.1 Momentos

Os momentos de uma variável randômica podem ou não divergirem a depender do quão rápido sua distribuição decai no infinito. O  $i$ -ésimo momento de uma variável randômica  $X$ , quando esse existe, em torno do seu valor médio  $\langle x \rangle$  é definido para o caso discreto e contínuo, respectivamente, como

$$m_i = \langle (X - \langle X \rangle)^i \rangle = \begin{cases} \sum_{j=1}^n (x_j - \langle X \rangle)^i p(X = x_j), \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^i p(x) dx. \end{cases} \quad (2.1)$$

Costuma-se também obter os momentos em torno da origem ao invés do valor médio, neste caso é só fazer  $\langle X \rangle = 0$  e a expressão (2.1) torna-se

$$m_i = \langle (X)^i \rangle = \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j^i p(X = x_j), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^i p(x) dx. \end{cases} \quad (2.2)$$

Usamos aqui a mesma notação para o momento em torno da origem e do valor médio apenas por simplificação de notação. A função geradora dos momentos de um conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  é definida pela expressão, para o caso discreto e contínuo, respectivamente, da forma

$$M_X(t) = \langle e^{tX} \rangle = \begin{cases} \sum_{j=1}^n e^{tx_j} p(X = x_j), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x) dx. \end{cases} \quad (2.3)$$

Expandindo em série de Taylor a expressão (2.3), ficamos com

$$\begin{aligned} M_X(t) = \langle e^{tX} \rangle &= \left\langle 1 + (Xt) + \frac{(Xt)^2}{2} + \dots + \frac{(Xt)^n}{n!} \right\rangle \\ &= 1 + t \langle X \rangle + \frac{t^2 \langle X^2 \rangle}{2!} + \dots + \frac{t^n \langle X^n \rangle}{n!}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

É possível mostrar que, se conhecendo a função geradora dos momentos, o momento de ordem  $r$  pode ser obtido da seguinte forma

$$m_r = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \Big|_{t=0}. \quad (2.5)$$

O parâmetro  $t$  também pode ser complexo. Um caso particular para  $t = i\omega$  em (2.3) dá surgimento a função característica, definida a seguir.

## 2.1.2 Função característica

Outra definição de extrema importância é a função característica  $\phi$ , que é definida de forma quase similar a função geradora dos momentos, só que agora trocamos o parâmetro  $t$  por  $i\omega$ , onde  $i$  é o número imaginário e  $\omega$  é a variável de integração. Então substituindo  $t = i\omega$  em (2.3), ficamos com a expressão final para o caso discreto e contínuo, respectivamente

$$\phi_X(\omega) = \langle e^{i\omega X} \rangle = \begin{cases} \sum_{j=1}^n e^{i\omega x_j} p(X = x_j), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p(x) dx. \end{cases} \quad (2.6)$$

Duas ou mais variáveis aleatórias que possuem a mesma função característica são chamadas identicamente distribuídas. Expandindo novamente (2.6) em série de Taylor

$$\phi_X(\omega) = \langle e^{i\omega X} \rangle = \left\langle 1 + (i\omega X) + \frac{(i\omega X)^2}{2!} + \frac{(i\omega X)^3}{3!} + \frac{(i\omega X)^4}{4!} + \dots + \frac{(i\omega X)^n}{n!} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + i\omega \langle X \rangle - \frac{\omega^2 \langle X^2 \rangle}{2!} - i \frac{\omega^3 \langle X^3 \rangle}{3!} + \dots + \frac{(i\omega)^n \langle X^n \rangle}{n!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} i^j \frac{m_j \omega^j}{j!},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

o momento  $m_i$  é dado em (2.2). Também podemos obter o  $r$ -ésimo momento a partir da função característica mediante a sua derivação de ordem  $r$ ,

$$m_r = (-1)^r i^r \left. \frac{d^r}{d\omega^r} \phi_X(\omega) \right|_{\omega=0}. \tag{2.8}$$

Se todos os momentos em (2.7) são finitos e a série converge absolutamente, então a série garante a unicidade da distribuição (o que nem sempre é verdade para uma distribuição arbitrária, como por exemplo, a log-normal, que não é unicamente definida pelos seus momentos). A não unicidade acontece quando os momentos aumentam rapidamente com os índices, não permitindo a convergência da série. Tais problemas são freqüentemente encontrados em distribuições com caudas altas<sup>1</sup> para o regime assintótico, que nem sempre o segundo momento em diante é finito.

As funções características são de extrema importância, pois a partir delas é possível conhecer todos os momentos desejados, mesmo sem conhecer a função densidade de probabilidade. Para obtermos a PDF devemos somar ou integrar

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n e^{-i\omega x_j} \phi_X(\omega), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \phi_X(\omega) d\omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

Na expressão (2.6), a função característica nada mais é do que a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade PDF. Enquanto que na expressão (2.9), a PDF representa a transformada inversa de Fourier da função característica. Utilizamos essa notação para a transformada de Fourier ao longo desta tese. Uma das principais razões para se usar a função característica é que esta sempre existe, pois sua convergência é garantida, enquanto que a função geradora dos momentos pode não existir. Também nem sempre é possível obter uma solução analítica fechada para a função densidade de probabilidade, pelo fato de nem sempre ser possível resolver a soma ou a integral em (2.9).

---

<sup>1</sup> Chamamos distribuições com “caudas altas” as que decaem, no limite assintótico, de forma mais lenta que a distribuição Gaussiana.

### 2.1.3 Convolução

Nesta sub-seção vamos considerar apenas para o caso contínuo, como se comporta a soma de duas variáveis randômicas. A esse processo de soma, damos o nome de convolução.

Definição 1- Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis contínuas e aleatórias com funções densidades de probabilidades dadas por  $f(x)$  e  $g(y)$ , respectivamente. Vamos assumir que estas funções são definidas para todos os números reais. Então, a convolução  $(f \circ g)$  de  $f$  e  $g$  é uma função dada por

$$\begin{aligned} (f \circ g)(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z-x)f(x)dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Quando  $X$  e  $Y$  são independentes, então a soma  $Z=X+Y$  ou uma combinação linear também é uma variável randômica com função densidade  $f_z(z)$ , sendo que esta é a convolução de  $f_x$  e  $f_y$ . Esse resultado não implica necessariamente que a nova função, formada pela convolução das funções  $f_x$  e  $f_y$ , obedeça à mesma distribuição de algumas destas. Quando isso acontece, dizemos que essas funções pertencem a um grupo especial de distribuições chamadas “estáveis”, conceito este que será definido na seção 2.4.

## 2.2 Teorema do Limite Central Clássico

O teorema do limite central (TLC) para a soma de variáveis aleatórias independentes é um dos mais importantes enunciados da física estatística. Foi desenvolvido por Carl Gauss. O teorema fornece todos os subsídios matemáticos de como uma dada distribuição pode, ou não, convergir para uma Gaussiana. O TLC aplica-se a qualquer processo que resulta de um grande número de pequenas contribuições. Esse teorema é essencial para a construção do equilíbrio da mecânica estatística, a descrição do movimento Browniano ou qualquer processo de natureza aleatória ou difusivo. De acordo com o TLC a função densidade de probabilidade (PDF, sigla em inglês) da soma de variáveis randômicas é Gaussiana quando cada PDF das variáveis possui segundo

momento finito. Podemos resumir da seguinte forma: qualquer processo com variância finita irá tender para uma distribuição Gaussiana. Um exemplo bem simples consiste no lançamento de um dado onde a probabilidade para a observação de cada evento é uniforme, ou seja,  $1/6$ . Já a PDF da soma dos valores obtidos a partir do lançamento de vários dados simultaneamente, tendem para uma Gaussiana. Em termos matemáticos, podemos descrever o teorema da seguinte forma: a partir de um conjunto  $Y$  de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*), já assumindo variância finita, onde o conjunto  $Y$  é representado por  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , tal que  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  e seu desvio em torno da média como sendo  $X$ , da forma  $x_n = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - \bar{Y}$ . A partir do TLC pode-se afirmar que a PDF,  $p_{X_n}(x_n)$ , se aproxima de uma distribuição Gaussiana quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{X_n}(x_n) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{nx_n^2}{2\sigma_Y^2}\right). \quad (2.11)$$

A aproximação para a distribuição Gaussiana se torna cada vez melhor à medida que o tamanho amostral aumenta (ver demonstração no apêndice B). Uma das grandes importâncias dessa convergência Gaussiana é que nos permite conduzir alguns procedimentos de inferência sem qualquer conhecimento da distribuição da população. A forma geral para a distribuição Gaussiana, para a variável  $x$  (ver apêndice B) pode ser escrita como

$$p_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.12)$$

A expressão (2.12) representa uma densidade de probabilidade centrada em  $\mu$  e com desvio padrão  $\sigma$ . Para os processos de difusão normal, onde a variância da distribuição cresce de forma linear com o tempo, o teorema do limite central garante a convergência da densidade de probabilidade para uma distribuição Gaussiana.

A condição de que as variáveis sejam *iid* é apenas um requerimento matemático. É uma condição suficiente, mas não necessária. Muitas variáveis mesmo não sendo *iid* ainda assim convergem para a distribuição Gaussiana. Mostraremos no capítulo 4 o caso em que

a variável posição em um tempo  $t$  depende condicionalmente de todas as posições dos tempos anteriores e ainda assim a convergência para a distribuição Gaussiana ocorre.

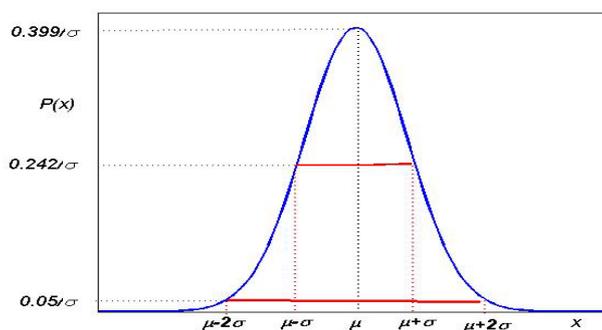
## 2.3 Distribuição Gaussiana

A distribuição Gaussiana é uma das mais importantes entre todas as áreas da ciência. Sua presença ocorre em uma larga variedade de sistemas físicos, biológicos, químicos, econômicos, etc. Como foi mostrado na seção anterior, as distribuições Gaussianas são equivalentes a um “atrator” de distribuições à medida que o número de experimentos tende para um valor bem grande. Quanto à estrutura da distribuição, podemos dizer que ela é simétrica em torno do valor médio e possui a forma de sino. Uma das suas características mais marcantes pode-se dizer que seja a sua simetria. É dependente apenas de dois parâmetros de ajustes: a média e o desvio padrão, este último mede a dispersão em torno da média, é também conhecido como a largura da distribuição. A média representa o local onde a distribuição se encontra centrada ou ponto de simetria. Devido à sua simetria, a distribuição Gaussiana é unimodal, ou seja, possui apenas um ponto de máximo ou simetria, a sua média, que coincide com mediana, e a moda. A dependência da distribuição Gaussiana é apenas em relação à média dada por  $\mu$  e por  $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \mu^2}$  (desvio padrão). Por isso, a única exigência do TLC para que um conjunto de variáveis aleatórias identicamente distribuídas convirja para a Gaussiana é que a sua variância seja finita, que diretamente implica que o primeiro e segundo momento também são finitos. Uma característica especial da distribuição Gaussiana é que esta é completamente caracterizada pelo primeiro e segundo momento. Na verdade, todos os momentos pares em torno da média podem ser escritos em função do segundo momento (ou da variância), enquanto que os momentos ímpares são todos nulos. Os momentos da distribuição Gaussiana podem ser escritos como (ver final do apêndice B para maiores detalhes):

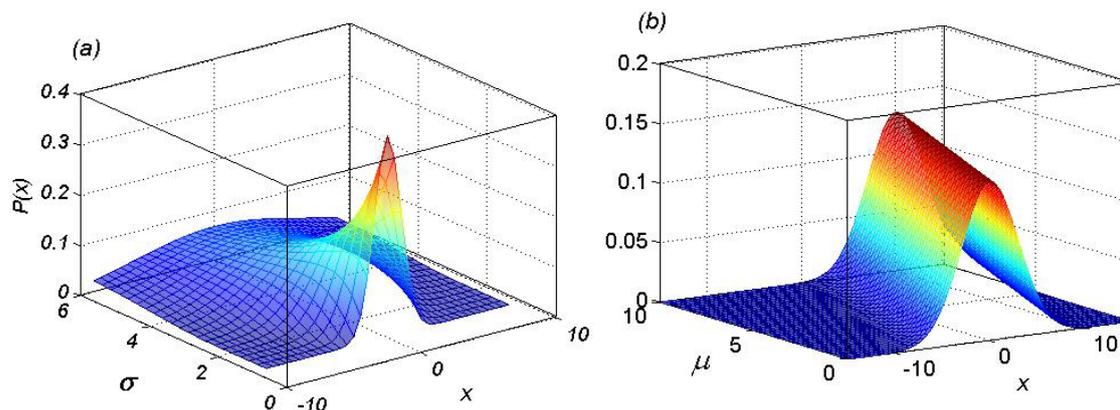
$$\langle (x - \mu)^m \rangle = \begin{cases} (\sigma^2)^{\frac{m}{2}} \cdot (m-1)!!, & \text{para } m = 2, 4, 6, \dots, \\ 0, & \text{para } m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $(m-1)!! = (m-1) \cdot (m-3) \cdot \dots \cdot 1$  e  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \mu^2$  (variância da distribuição).

Apesar de muitos fenômenos da natureza convergirem para a distribuição Gaussiana, esta não consegue cobrir uma grande variedade de acontecimentos que permitem que eventos raros (muito afastados do valor médio) ocorram freqüentemente. Esses fenômenos não podem ser descritos pela Gaussiana, pois as suas “caudas” decaem para um valor extremamente pequeno muito rapidamente, a partir da média. Para efeito de ilustração, apresentamos nas figuras seguintes, exemplos Gaussianos, juntamente com algumas identidades, como, por exemplo, o valor de pico da distribuição em função do desvio padrão. Esse valor de pico é inversamente proporcional ao desvio padrão e para um caso limite desse parâmetro tendendo a zero, a função fica localizada no ponto representado pelo valor médio, semelhante à função delta de Dirac, ou seja,  $\delta(x-\mu)$ . A Figura 2.1 mostra como esse desvio padrão, que nada mais é do que a largura da distribuição, afeta o valor de máximo de  $P(x)$ . Nessa mesma figura, podemos ver que para valores bem afastados da média, a probabilidade de ocorrência desses eventos torna-se extremamente pequena. Valores afastados duas unidades de desvio padrão, possui uma probabilidade de ocorrência em torno de 5%, quando essa distância é três unidades, a probabilidade decai para 0.18% o que torna o evento probabilisticamente muito raro de ocorrer (tomamos nesse exemplo, o desvio padrão unitário). Esse fato decorre do teorema do limite central, como o nome mesmo já diz, a distribuição Gaussiana é uma curva de tendência central, central em torno da média. Na Figura 2.2(a,b) mostramos como variando, por exemplo, o desvio padrão a largura da distribuição também sofre essa variação fig.(a), enquanto uma variação na média é equivalente a um translado em torno dessa variação (ou seja, em torno da média), mas a largura da distribuição não se altera fig.(b).



**Figura 2.1** – Na distribuição Gaussiana, a probabilidade favorece apenas a ocorrência de eventos próximos ao valor médio.



**Figura 2.2** – N fig.(a), à medida que  $\sigma$  aumenta, os dados tornam-se mais dispersos e a distribuição se alarga cada vez mais. Na fig.(b), variando a média é equivalente a transladar a distribuição em torno da média, a largura da distribuição é preservada.

Temos também distribuição Normal, que é um caso particular da Gaussiana. A distribuição Normal possui média zero e variância unitária, que se reduz a  $N_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ . Assim como a distribuição Gaussiana, a distribuição Normal também é simétrica. Medimos a simetria de uma distribuição através do coeficiente “skewness” o qual iremos chamar de obliquidade. Já o coeficiente de Curtose quantifica a altura (ou pico) de uma distribuição. Esses dois coeficientes são definidos a seguir.

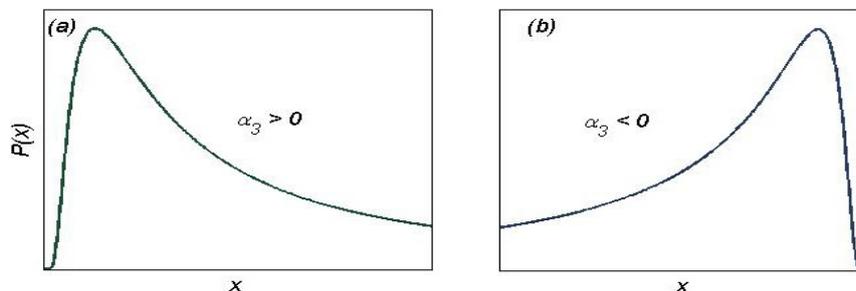
### 2.3.1 Obliquidade e Curtose

O coeficiente de obliquidade é uma medida de dispersão que pode ser utilizado para quantificar a assimetria de uma distribuição qualquer. Uma distribuição que possui uma obliquidade zero é considerada simétrica, caso contrário a distribuição é assimétrica. Sua definição matemática para o caso contínuo (para o caso discreto é só trocar a integral por um somatório) é

$$\alpha_3 = \frac{\langle (X - \mu)^3 \rangle}{\langle (X - \mu)^2 \rangle^{3/2}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 p(x) dx}{[\sigma^2]^{3/2}}, \quad (2.14)$$

tal que  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$ . Para distribuições simétricas  $\alpha_3 = 0$ , que ocorre quando o integrando, em (2.14), é uma função ímpar. Para a distribuição Gaussiana podemos usar

(2.13) no numerador de (2.14) para  $m$  ímpar. Quando a função possui assimetria para esquerda corresponde a uma obliquidade  $\alpha_3 > 0$  e a assimetria para direita ocorre para  $\alpha_3 < 0$ , como ilustrado na Figura 2.3(a) e (b), respectivamente.



**Figura 2.3** – Exemplo de assimetria. Quando  $\alpha_3 > 0$  a assimetria é para esquerda, fig.(a). Para  $\alpha_3 < 0$ , tem-se assimetria para direita, fig.(b). Quando  $\alpha_3 = 0$  a distribuição de probabilidade é simétrica.

Outra medida de dispersão que pode quantificar quando uma distribuição qualquer é Gaussiana é o coeficiente de curtose. Este também indica o grau de achatamento da distribuição. Também pode indicar como um dado conjunto de variáveis converge (ou não) para uma Gaussiana e com isso fornecer o número de interações necessárias para essa convergência. Esse coeficiente é definido, para o caso contínuo (para o caso discreto trocamos a integral por um somatório) como

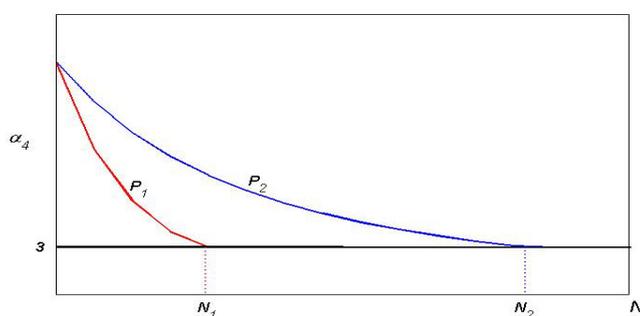
$$\alpha_4 = \frac{\langle (X - \mu)^4 \rangle}{\langle (X - \mu)^2 \rangle^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 p(x) dx}{[\sigma^2]^2}, \quad (2.15)$$

onde  $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$ . Para a distribuição Gaussiana ou Normal o coeficiente de curtose vale

$$\alpha_4 = \frac{\langle (X - \mu)^4 \rangle}{\langle (X - \mu)^2 \rangle^2} = \frac{3 \cdot (\sigma^2)^2}{(\sigma^2)^2} = 3. \quad (2.16)$$

No numerador em (2.16) usamos a identidade dada em (2.13) para  $m=4$ . Na Figura 2.4, exemplificamos como podemos usar o coeficiente de curtose para indicar a convergência de uma série de dados para a Gaussiana. Por exemplo, a curva  $P_1$  necessita de menos tempo ou número de passos para atingir a convergência Gaussiana do que a curva  $P_2$ . Em

simulações computacionais é de extrema importância sabermos como otimizar o tempo computacional. Então, se a curva  $P_1$  atinge a convergência em  $N_1$ , perde-se tempo computacional indo além deste valor. O coeficiente de curtose também pode nos indicar como uma dada distribuição converge ou oscila em torno da Gaussiana. Essa convergência pode ocorrer de cima para baixo ( $\alpha_4 \geq 3$ , como mostrado na figura), ou de baixo para cima ( $\alpha_4 \leq 3$ ) do valor da curtose da distribuição Gaussiana ( $\alpha_4 = 3$ ). Como exposto, podemos saber de forma exata, se um conjunto de dados é normalmente distribuído ou não, mesmo que não se conheça a função densidade de probabilidade. Mas, para isso, é necessário que os quatro primeiros momentos sejam conhecidos.



**Figura 2.4** – Exemplo de aplicação do coeficiente de curtose. A curva  $P_1$  atinge a convergência Gaussiana ( $\alpha_4=3$ ) em  $N_1$ , mais rápido que a curva  $P_2$ , que necessita de  $N_2$  passos ou iterações computacionais.

## 2.3.2 Convolução de duas Gaussianas

Vamos supor que temos duas variáveis independentes  $X$  e  $Y$ , cada uma sendo normalmente distribuída e queremos conhecer a distribuição de  $Z=X+Y$ . Um fato muito importante sobre as distribuições Gaussianas acontece quando tomamos a convolução de duas Gaussianas com médias  $\mu_X$  e  $\mu_Y$ , com variâncias  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$ , o resultado final também é uma Gaussiana, com média  $\mu_X+\mu_Y$  e variância  $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ . Por simplificação, iremos mostrar o caso especial para a distribuição Normal. Para o caso geral, pode ser feito de mesma maneira, mas com um pouco mais de álgebra. Esse resultado também é imediato via função característica, que para a distribuição Gaussiana é representada, para a variável  $X$ , como  $\phi_X(\omega) = \exp(-\omega^2 \sigma_X^2 / 2 + i\omega \mu_X)$  e a função característica da soma de duas variáveis ( $X+Y$ ) é dada por  $\phi_{X+Y}(\omega) = \phi_X(\omega) \cdot \phi_Y(\omega) = \exp(-\omega^2 (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) / 2 + i\omega (\mu_X + \mu_Y))$ , que também pode ser generalizado para  $N$  variáveis.

A distribuição das variáveis  $X$  e  $Y$  é representada por

$$f_X(x) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (2.17)$$

Então, a convolução de  $f_X$  e  $f_Y$ , utilizando (2.10), é escrita da forma

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= (f_X \circ f_Y)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-z^2 + 2zy - y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 + zy) dy. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Completando quadrado na última integral em (2.18), tal que podemos usar a identidade para o argumento da exponencial, da forma  $(-y^2 + zy) = -(y - z/2)^2 + z^2/4$ , assim temos

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= (f_X \circ f_Y)(z) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \exp\left(\frac{z^2}{4}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(y - z/2)^2) dy}_{\sqrt{\pi}}, \\ f_Z(z) &= (f_X \circ f_Y)(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Em (2.19), a nova distribuição  $f_Z$  é também uma Gaussiana com média zero e variância 2. Essa é uma forte propriedade das distribuições Gaussianas, chamada de “estabilidade”. Essa estabilidade nos permite, conhecendo a densidade de probabilidade de apenas uma variável, conhecer a densidade de probabilidade de um somatório de variáveis aleatória independentes.

## 2.4 Generalização do TLC<sup>2</sup> por Paul Lévy

Como acabamos de ver anteriormente, a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*) segue uma distribuição Gaussiana à medida que o número de termos dessa soma tende para um valor infinito, desde que a variância ou segundo momento seja finito. Esse tipo de distribuição possui uma característica bem definida, ela é simétrica e suas caudas decaem rapidamente para os eventos afastados da

---

<sup>2</sup> Teorema do Limite Central

média. Entretanto, muitas distribuições na natureza apresentam comportamento assimétrico e que também levam em conta os eventos de ocorrência extrema. Paul Lévy, em 1925, generalizou o teorema do limite central desconsiderando a condição de segundo momento finito das variáveis. Nesse caso, a PDF que melhor descreve o limite assintótico da soma das variáveis é conhecida como distribuições alfa-estáveis de Lévy. Essas distribuições correspondem a uma rica classe de propriedades matemáticas que as tornam mais gerais. Essas distribuições normalmente não possuem soluções analíticas fechadas para a PDF, sendo expressa apenas por sua função característica e dependem de um grande número de parâmetros que caracterizam a distribuição:  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ . Discutimos mais adiante a extensão válida de cada um desses parâmetros. Atualmente, existem várias formas de parametrização da função característica, iremos mostrar, por simplificação, apenas a mais usual. A PDF é obtida tomando a transformada inversa de Fourier da função característica, como mostrada abaixo

$$f_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \phi_{\omega}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) d\omega, \quad (2.20)$$

tal que a função característica  $\phi_{\omega}$  é definida como:

$$\phi_{\omega}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} \exp \left\{ -\gamma |\omega|^{\alpha} \left[ 1 - i\beta \left( \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \text{sign}(\omega) \right] + i\delta\omega \right\} & \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ -\gamma |\omega| \left[ 1 - i\beta \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(\omega) \ln |\omega| \right] + i\delta\omega \right\} & \alpha = 1 \end{cases}, \quad (2.21)$$

$\omega$  é constante de integração e a função sinal ( $\text{sign}$ ) possui a seguinte propriedade:

$$\text{sign}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -1 & \omega < 0. \end{cases}$$

Se desejássemos encontrar a PDF da distribuição teríamos que tomar a transformada inversa de Fourier da função característica  $\phi$ , que não é uma tarefa fácil, pois a depender dos parâmetros  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  nem sempre é possível obter soluções analíticas ou mesmo garantir a convergência. Para alguns valores especiais de  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  é possível obter soluções analíticas fechadas. A seguir, discutimos os parâmetros da distribuição e as condições necessárias para se ter uma estabilidade, definida pelo parâmetro  $\alpha$ . A palavra *estável* é usada para indicar que a “forma” da distribuição de  $X$  não é afetada por uma

soma, por exemplo, do tipo  $aX_1 + bX_2 = cX + d$ , onde  $X_1$  e  $X_2$  representa uma cópia independente de  $X$  para quaisquer constantes positivas  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{R}$ . Duas variáveis  $X$  e  $Y$  são ditas do mesmo tipo se existem  $A > 0$  e  $B \in \mathbb{R}$  tal que  $X = AY + B$ , a definição de estabilidade pode ser verificada se  $aX_1 + bX_2$  possui o mesmo tipo de  $X$ .

O intervalo de validade de cada parâmetro da função característica é:  $\alpha \in ]0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\gamma \geq 0$  e  $\delta \in \mathbb{R}$ . O parâmetro de locação  $\delta$  corresponde à expectativa da média da distribuição para  $\alpha > 1$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são os mais importantes, pois eles determinam a forma da distribuição;  $\alpha$  é o parâmetro de estabilidade ou expoente característico, quando  $\alpha = 2$  recaímos em uma distribuição Gaussiana com desvio padrão  $\sigma = \sqrt{2} \gamma$ . O parâmetro  $\alpha$  também determina a altura das caudas e a curtose em  $\delta$ . Quanto menor o valor de  $\alpha$ , mais altas as caudas se apresentam. Para  $\alpha < 2$  as distribuições apresentam uma cauda, ou ambas, que tendem assintoticamente a uma lei de potência com caudas altas. A variância finita só existe para  $\alpha = 2$  (regime Gaussiano) e média finita só ocorre para  $1 < \alpha \leq 2$ . O parâmetro  $\beta$  é o responsável pela simetria ou assimetria da distribuição. Esse parâmetro é equivalente ao coeficiente de obliquidade, definido em 2.3.1. Quando  $\beta = 0$  a distribuição é simétrica, caso contrário, assimétrica (ver Figura 2.6). A distribuição apresentada aqui é freqüentemente aplicada, em estudos voltados para Econofísica, em mercados financeiros (RIBEIRO; LEAL, 2002). De uma forma geral, as distribuições alfa-estáveis de Lévy têm sido empregadas como modelos em diversas áreas da ciência onde a distribuição Gaussiana falha, principalmente em Econofísica, em Ecologia, etc. Em geral, nos eventos onde as distribuições de probabilidades possuem “caudas altas” tal que os eventos raros (muito afastados do valor médio) ocorrem freqüentemente.

## 2.5 Distribuições alfa-estáveis de Lévy

Citamos a seguir, as três distribuições estáveis de Lévy que possuem soluções analíticas para a sua densidade de probabilidade (NOLAN, 2008), são elas:

- Distribuição Gaussiana,  $X \sim N(\gamma, \delta)$ , com a PDF

$$f_{\gamma,\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \gamma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\delta}{\sqrt{2}\gamma} \right)^2} \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.22)$$

Essa distribuição é estável com parâmetros  $\alpha=2$  e  $\beta=0$ . O desvio padrão corresponde a  $\sqrt{2} \gamma$ . Conclui-se que para  $\alpha=2$ ,  $\gamma$  é análogo a largura da distribuição e  $\delta$  o ponto de simetria, média ou mediana.

- Distribuição de Cauchy,  $X \sim Cauchy(\gamma, \delta)$

$$f_{\gamma,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2} \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.23)$$

Sua estabilidade corresponde a  $\alpha=1$  e  $\beta=0$  (forma simétrica centrada em  $\delta$ ).

- Distribuição de Lévy,  $X \sim Lévy(\gamma, \delta)$

$$f_{\gamma,\delta}(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} e^{\left( \frac{-\gamma}{2(x-\delta)} \right)} \quad \delta < x < \infty. \quad (2.24)$$

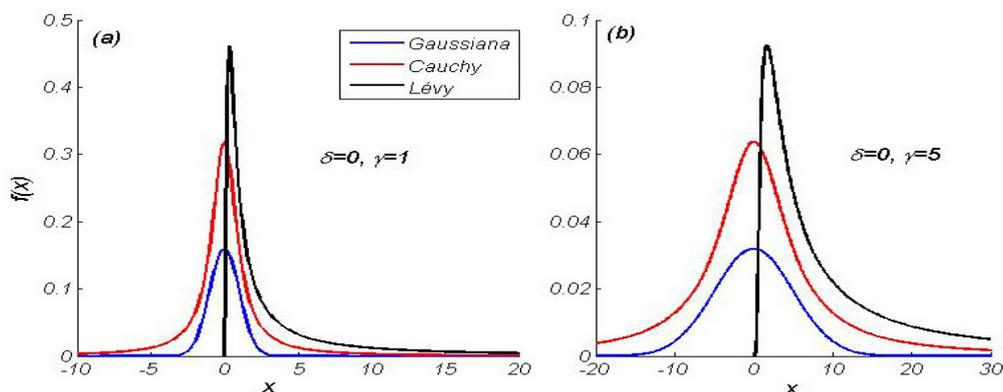
A distribuição de Lévy é estável para  $\alpha=1/2$  e  $\beta=1$ .

Ilustramos a seguir, na Figura 2.5(a,b), a representação gráfica das três distribuições estáveis, variando apenas o parâmetro  $\gamma$  ( $\gamma=1$  na fig.(a) e  $\gamma=5$  na fig.(b)) com média fixa  $\delta=0$  (Cauchy, Lévy e Gaussiana). É importante ressaltar que a cauda da distribuição de Lévy decai de forma mais lenta que a Gaussiana, e isso permite a ocorrência de eventos muito afastados da média. As distribuições estáveis de Lévy possuem como principal característica o decaimento das caudas (ou apenas uma) seguindo uma lei de potência para  $0 < \alpha < 2$  e  $-1 \leq \beta \leq 1$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . A função PDF para as caudas da distribuição no limite assintótico de  $x$  (NOLAN, 2008) pode ser escrita como

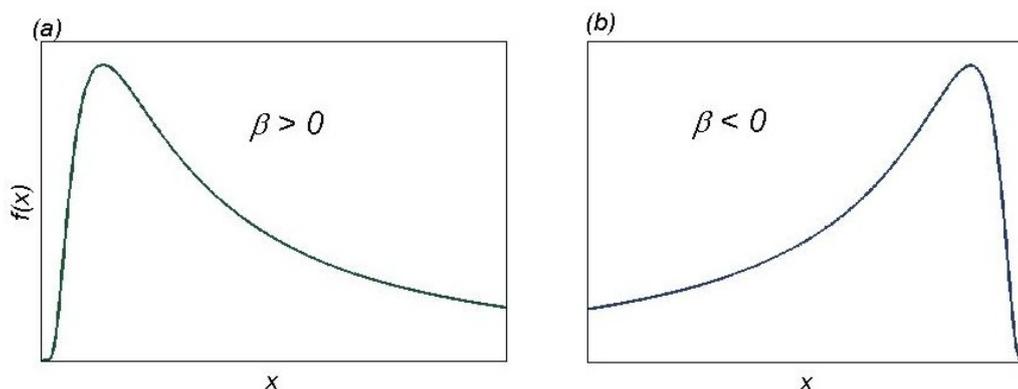
$$f(|x|) \sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}, \quad (2.25)$$

com  $c_\alpha = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha) / \pi$ . Quando  $\beta=-1$  a cauda do lado direito da distribuição não é assintoticamente lei de potência, somente a cauda do lado esquerdo. Já para  $\beta=1$  corresponde ao não decaimento tipo lei de potencia para a cauda do lado esquerdo (esse caso está ilustrado na Figura 2.5(a,b) representado pela linha preta, observa-se que existe

somente a cauda direita). Para que ambas as caudas da distribuição decaiam seguindo uma lei de potencia é necessário que  $-1 < \beta < 1$  e  $0 < \alpha < 2$ . Na Figura 2.6 exemplificamos qualitativamente a assimetria da distribuição, definida pelo parâmetro  $\beta$ , como as regiões (direita/esquerda) onde ocorre decaimento tipo lei de potência com caudas altas. Observe-se, na Figura 2.6(a), para  $\beta=1$  a cauda esquerda tende a ser vertical, portanto o seu decaimento não é lei de potência, o mesmo ocorre quando  $\beta=-1$  para a cauda direita, Figura 2.6(b).



**Figura 2.5** - Comparativo das PDF's estáveis; Gaussiana, Cauchy e Lévy (ver legendas). Como se pode observar na fig.(a) e fig.(b), a distribuição de Lévy oferece uma probabilidade maior de ocorrência dos eventos afastados da média, se comparado com outras distribuições, principalmente a Gaussiana. Esse comparativo é relativo às caudas das distribuições



**Figura 2.6** – O parâmetro  $\beta$  define a assimetria da distribuição de probabilidade, semelhante ao coeficiente de obliquidade. Para  $\beta > 0$  a assimetria é para esquerda, fig. (a), caso contrário, a assimetria é para direita, fig.(b). Quando  $\beta=0$  a distribuição é simétrica.

## CAPÍTULO 3

# 3 Expoente de Hurst, Difusão Normal e Anômala

O expoente de Hurst é um parâmetro capaz de fornecer informações sobre correlação e persistência em uma série temporal. Harold Edwin Hurst (HURST, 1951) desenvolveu o método como hoje é conhecido como *R/S* ao estudar projetos de dimensionamento de represas. Por vários anos ele registrou períodos de cheias e secas, com o intuito de resolver o problema da construção do reservatório ideal. Ele observou que havia uma correlação temporal nos dados e, a partir dos seus estudos, chegou-se ao conhecido método *R/S* que fornece, em sua homenagem, o expoente de Hurst. O intervalo válido para esse expoente corresponde  $0 < H < 1$ . Quando  $H = 1/2$  é indício que não há correlação de longo alcance e os eventos podem ser considerados independentes. Para valores  $1/2 < H < 1$ , o processo é persistente (as correlações temporais são de longo alcance), ou seja, existe uma alta probabilidade que uma ação ocorrida no passado venha a se repetir no futuro; dizemos que passado e futuro estão correlacionados positivamente. O caso em que  $0 < H < 1/2$  é também conhecido como regime anti-persistente (as correlações temporais também são de longo alcance). Agora, para uma ação ocorrida no passado, possui uma pequena chance que essa venha a se repetir no tempo futuro e dizemos que o passado e o futuro estão correlacionados negativamente.

Existem atualmente diversos métodos para se calcular o expoente de Hurst. O método a ser escolhido deve ser aquele que se apresente mais conveniente no trabalho

desenvolvido. Como neste estudo estamos utilizando uma “caminhada”, o método aqui escolhido para obtenção do expoente de Hurst foi através do expoente temporal da variância da distribuição, que é representada pela relação  $\sigma_x^2 = (\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2) \sim t^{2H}$ . Como estamos tomando o comportamento assintótico de  $t$ , o expoente da média elevado ao quadrado não irá interferir no expoente do segundo momento. Por isso, podemos obter  $H$  através da inclinação da curva  $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{2H}$ , na escala log-log. No capítulo 4 apresentamos algumas justificativas numéricas para mostrarmos que realmente não faz diferença em utilizar a variância ou o segundo momento para obtenção do expoente de Hurst, ambos conduzem ao mesmo resultado. Também vamos mostrar, no início deste capítulo, a exceção em que a afirmação anterior não é correta.

É possível também relacionar o expoente de Hurst com a dimensão fractal do processo (MALDELBROT, 1982), através da relação

$$D + H = n + 1, \quad (3.1)$$

onde  $D$  é a dimensão fractal,  $H$  o expoente de Hurst e  $n$  é a dimensão Euclidiana. Em princípio, dimensão fractal é uma propriedade local, enquanto memória de longo alcance é uma propriedade global (medida através do expoente de Hurst). Um fractal é um conjunto que possui sua dimensão de Hausdorff maior que sua dimensão topológica (MALDELBROT, 1982).

### 3.1 Caminhada aleatória e Random Walk

Caminhada aleatória é um dos exemplos mais ilustrativos sobre processos difusivos e estocásticos Markovianos, que pode ser resolvido de forma simples, analiticamente. Para efeito de suporte nas seções seguintes, na qual será introduzido um novo modelo de caminhada aleatória, vamos primeiramente ilustrar esse modelo clássico.

Considerando o exemplo em 1D, de um caminhante partindo da origem, tal que a cada instante de tempo o caminhante sorteia um sentido a ser seguido. Ele vai para direita com probabilidade  $p$  ou para esquerda com probabilidade  $q=1-p$ . Para  $p=1/2$  temos o clássico *random walk* ou (movimento Browniano), quando  $p \neq 1/2$  dizemos que a caminhada possui uma certa tendência, na qual priorizamos um determinado sentido ao

invés do outro. Seja  $N$  o número de total de passos e  $n_+$  o número de passos dados para direita e  $n_-$  o número de passos efetuados para esquerda, sob a condição  $n_+ + n_- = N$ . Ao longo de  $N$  passos, o caminhante pode ser encontrado na posição relativa à origem dada por  $x = (n_+ - n_-)l$ , onde  $l$  é o tamanho do passo, que pode ser constante ou variável. Vamos assumir que o tamanho dos passos seja constante e unitário ( $l=1$ ). A posição média após  $N$  passos é dada pela seguinte expressão

$$\langle x_N \rangle = \langle (n_+ - n_-) \rangle. \quad (3.2)$$

Usando o fato que  $n_+ + n_- = N$ , podemos escrever  $n_- = N - n_+$ , e substituindo em (3.2), a posição média pode ser escrita como

$$\langle x_N \rangle = 2 \langle n_+ \rangle - N, \quad (3.3)$$

e a posição quadrática média  $\langle x^2 \rangle = \langle (2n_+ - N)^2 \rangle$ , se reduz a

$$\langle x_N^2 \rangle = 4 \langle n_+^2 \rangle - 4 \langle n_+ \rangle N + N^2. \quad (3.4)$$

Então, se conhecermos  $\langle n_+ \rangle$  e  $\langle n_+^2 \rangle$  temos a solução que aqui procuramos para a posição média e a posição quadrática média, relativas à origem. Seguindo na busca da solução, devemos conhecer a distribuição de probabilidade para  $n_+$ . A probabilidade de executar  $n_+$  passos para direita, levando-se em consideração que ao fazermos isso, também são efetuados  $n_-$  passos para esquerda, a probabilidade procurada é  $p^{n_+} q^{n_-}$ , com  $p+q=1$ . O número de maneiras possíveis de efetuar  $N$  passos com  $n_+$  passos para direita é dado por  $\frac{N!}{n_+! n_-!}$  (devido à independência dos passos), e dessa forma, a probabilidade total, já substituindo  $n_- = N - n_+$ , é dada por

$$P(n_+) = \frac{N!}{n_+! (N - n_+)!} p^{n_+} q^{N - n_+}, \quad (3.5)$$

que nada mais é do que a distribuição binomial ou de Bernoulli. Portanto, já conhecemos o peso estatístico da variável  $n_+$ , podemos agora calcular a média, que é dada por

$$\langle n_+ \rangle = \frac{\sum_{n_+=0}^N n_+ P(n_+)}{\sum_{n_+=0}^N P(n_+)}. \quad (3.6)$$

Por analogia, a expansão binomial é escrita como  $(X + Y)^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} X^n Y^{N-n}$ , onde temos  $X=p$ ,  $Y=q=(1-p)$  e  $X+Y=p+1-p=1$  e com isso, comprovamos que nossa distribuição de probabilidade já está devidamente normalizada. Logo a equação (3.6) pode ser escrita de forma mais resumida por

$$\langle n_+ \rangle = \sum_{n_+=0}^N n_+ \frac{N!}{n_+!(N-n_+)!} p^{n_+} q^{N-n_+}. \quad (3.7)$$

Existe um artifício matemático pelo qual o somatório acima pode ser resolvido de forma bem simplificada, basta fazermos

$$\langle n_+ \rangle = \left( p \frac{d}{dp} \right) \sum_{n_+=0}^N \frac{N!}{n_+!(N-n_+)!} p^{n_+} q^{N-n_+}, \quad (3.8)$$

que pode ser generalizado para todos os momentos de ordem  $m$ ,

$$\langle n_+^m \rangle = \left( p \frac{d}{dp} \cdot p \frac{d}{dp} \cdot \dots \cdot p \frac{d}{dp} \right) \sum_{n_+=0}^N \frac{N!}{n_+!(N-n_+)!} p^{n_+} q^{N-n_+}. \quad (3.9)$$

Em (3.9) já podemos substituir o valor do somatório por  $(p+q)^N$ , onde  $N$  pode ser qualquer número natural, temos então

$$\langle n_+^m \rangle = \left( p \frac{d}{dp} \cdot p \frac{d}{dp} \cdot \dots \cdot p \frac{d}{dp} \right) (p+q)^N, \quad (3.10)$$

e após efetuar a derivada de ordem  $m$ , faz-se  $(p+q)=1$ . Para  $m=1$ , temos  $\langle n_+ \rangle = p \frac{d}{dp} (p+q)^N = pN(p+q)^{N-1}$  agora fazendo  $(p+q)=1$ , ficamos com a solução para a média do número de passos dados para direita, i.e.,

$$\langle n_+ \rangle = pN. \quad (3.11)$$

Para  $m=2$ , equivalente a média calculada anteriormente,

$$\begin{aligned} \langle n_+^2 \rangle &= \left( p \frac{d}{dp} \right) \left( p \frac{d}{dp} \right) (p+q)^N = \left( p \frac{d}{dp} \right) pN(p+q)^{N-1} \\ &= Np \left[ (p+q)^{N-1} + p(N-1)(p+q)^{N-2} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Fazendo  $(p + q) = 1$  na segunda linha de (3.12) chegamos à solução desejada

$$\langle n_+^2 \rangle = pN + p^2N^2 - Np^2. \quad (3.13)$$

Os valores de  $\langle n_+ \rangle$  e  $\langle n_+^2 \rangle$  representados por (3.11) e (3.13) quando substituídos em (3.3) e (3.4), respectivamente, e após alguns rearranjos, fornecem a fórmula para a posição média e para a posição quadrática média. Agora podemos trocar  $N$  por  $t$ , pois vamos assumir que os passos são unitários e, portanto, é equivalente a um instante de tempo, que também é unitário. A posição média e quadrática média são

$$\begin{aligned} \langle x_t \rangle &= t(2p - 1), \\ \langle x_t^2 \rangle &= t^2(2p - 1)^2 + t(4p(1 - p)). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos notar que para  $p=1/2$  (*random walk*) as equações em (3.14) se reduzem a  $\langle x_t \rangle = 0$  e  $\langle x_t^2 \rangle = t$ . O expoente da posição quadrática média possui uma descontinuidade em  $p=1/2$ . Esse expoente vale dois, para quaisquer valores de  $p$ , exceto para  $p=1/2$ , onde esse vale um, como exposto a seguir (para  $t$  muito grande)

$$\langle x_t^2 \rangle \sim \begin{cases} t^2, & \text{para } p \neq 1/2 \\ t, & \text{para } p = 1/2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Podemos também calcular a variância, que é dada por  $\sigma_t^2 = \langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2$ . Substituindo os valores de (3.14), chegamos à equação da variância ou desvio quadrático médio

$$\sigma_t^2 = t[4p(1 - p)]. \quad (3.16)$$

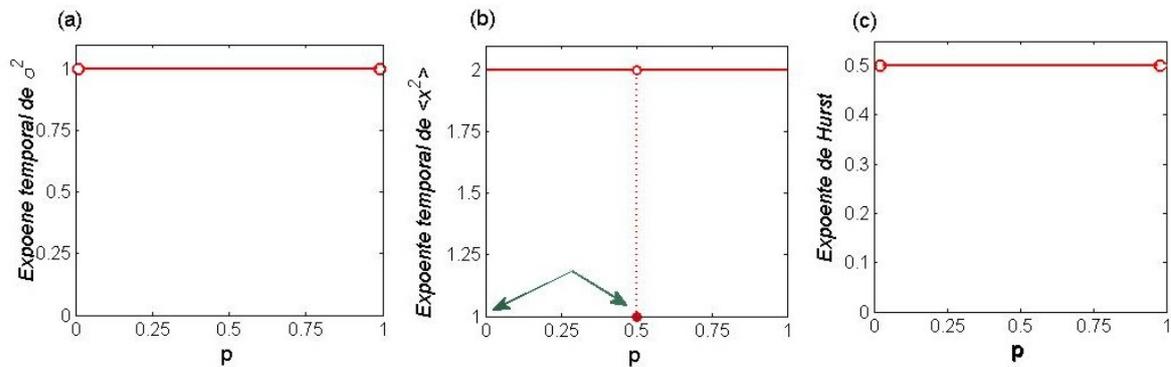
Agora vamos fazer uma simples análise da dependência da variância com o tempo, considerando  $\sigma^2 \sim t^{2H}$ , o expoente de Hurst fica

$$\sigma_t^2 \sim \begin{cases} t^{2H} & \Rightarrow H = 1/2 \text{ para } 0 < p < 1, \\ 0, & \text{para } p = 1 \text{ ou } p = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

O mais importante desse resultado é o crescimento linear da variância com o tempo. Os casos em que  $H=1/2$  são chamados processos de difusão normal, onde não existem correlações de longo alcance entre as variáveis. E para  $0 < p < 1$  os eventos podem ser considerados independentes, exceto quando  $p=0$  ou  $p=1$ , onde se tem o caso determinístico. Nesse regime, correspondente a  $H=1/2$ , o Teorema do Limite Central garante a convergência da distribuição de probabilidade da posição (que é uma binomial)

para a Gaussiana, no limite assintótico, quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $N \rightarrow \infty$ . Para  $H \neq 1/2$  os processos são chamados de difusão anômala, alguns serão vistos na próxima seção.

Resumimos, através da Figura 3.1, a análise do expoente temporal da variância e da posição quadrática média, em função de  $p$  (probabilidade de ir para direita). Queremos mostrar que os expoentes são completamente diferentes. Nesse caso em particular, o expoente de Hurst deve ser calculado utilizando o expoente da variância. Na Figura 3.1(a) temos o expoente da variância que vale um para quaisquer valores de  $p$ , exceto para o caso determinístico. A Figura 3.1(b) representa o expoente da posição quadrática média que vale dois para quaisquer valores de  $p$ , exceto quando  $p=1/2$  que resulta no expoente igual a um. Já na Figura 3.1(c) temos o expoente de Hurst que é obtido pela divisão do expoente da variância pelo fator dois.



**Figura 3.1-** Na fig.(a), a variância cresce linearmente com o tempo para quaisquer valores de  $p$ , exceto para  $p=0$  e  $p=1$ , em que a variância vale zero. Na fig.(b) o expoente da posição quadrática média apresenta uma descontinuidade em  $p=1/2$ . Em fig.(c) temos o expoente de Hurst, que vale  $H=0.5$ , devido à independência dos passos.

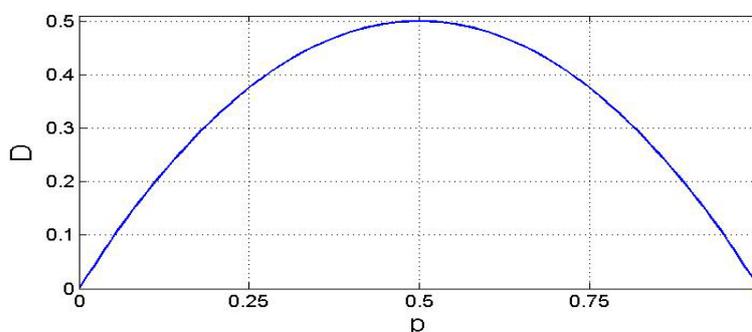
Podemos agora calcular o coeficiente de difusão ( $D$ ), que pode ser encontrado por  $\sigma_t^2 = 2tD$ , a partir da solução da equação da difusão  $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$ , onde  $p(x,t)$  representa a função densidade de probabilidade de encontrar a partícula na posição  $x$  no instante de tempo  $t$ . Então, substituindo o valor de  $\sigma_t^2$  dado em (3.16) e isolando  $D$ , temos

$$D = \frac{\sigma^2}{2t} = \frac{t4p(1-p)}{2t} = 2p(1-p). \quad (3.18)$$

A independência do coeficiente de difusão com o tempo indica que a caminhada não possui “efeito de memória”, que ocorre quando  $H=1/2$ , como já esperado. A difusão é um

processo natural e espontâneo e se dá de uma região de mais alta concentração para baixa concentração, como consequência da segunda Lei da Termodinâmica, assim como o calor flui de uma fonte de mais alta temperatura para uma região de baixa temperatura a fim de alcançar o equilíbrio termodinâmico, ou seja, maximizar a entropia do sistema. Também podemos interpretar a difusão como a taxa de variação da variância com o tempo, veja que  $\frac{\sigma^2}{t} \sim D$ . Para altos valores de  $D$  indica que as partículas estão se afastando da média, caso contrário, se aproximando. Quando  $D=0$  tem-se o caso determinístico, não há nenhuma flutuação em torno da média. Também, a independência de  $D$  com o tempo faz com que o coeficiente de difusão se mantenha finito à medida que  $t \rightarrow \infty$ , satisfazendo o teorema do limite central.

Através do gráfico de  $D$  versus  $p$  (Figura 3.2) podemos ver que o máximo valor de  $D$  ocorre para  $p=1/2$  (*random walk*). Observa-se que para  $p=1/2$ , em média, metade dos passos são efetuados para direita e metade para esquerda, sem nenhum sentido privilegiado, o sistema está no estado mais desordenado possível. Já para valores de  $p$  diferentes de meio o coeficiente de difusão já é menor, indicando um ordenamento ou um sentido privilegiado no sistema. Esse coeficiente de difusão revela muita coisa a respeito do movimento das partículas. Considere o exemplo citado anteriormente: para o coeficiente de difusão máximo as partículas estão se difundindo de forma homogênea em todo o espaço permitido. Quando o valor de  $D$  é menor ( $p \neq 1/2$ ), as partículas tendem a ter um sentido preferencial, ocasionando a não ocupação do espaço de forma homogênea. É possível relacionar o coeficiente de difusão com a entropia do sistema, pois estes indicam o grau de desordem. Quando maior a desordem, maior é a entropia e o coeficiente de difusão.



**Figura 3.2** – Dependência do coeficiente de difusão em função de  $p$ . Esse coeficiente é máximo para  $p=1/2$ , estado com maior desordem possível.

## 3.2 Lévy Walks

O processo Lévy Walks (LW) é largamente aplicado tanto a sistemas conservativos ou dissipativos que exibem comportamentos caóticos. Processos de Lévy são problemas típicos de alta complexidade, em particular no caso de sistemas biológicos. Foi mostrado (WISWANATHAN *et al.*, 2002; WISWANATHAN *et al.*, 2001) que esse processo aparenta ser mais eficiente que o movimento Browniano como estratégia de busca de alimentos ou até mesmo fêmeas para procriação e entre outros exemplos. Em processos difusivos reais, é possível a ocorrência de eventos que fogem à média estabelecida pela distribuição Gaussiana. O processo LW é puramente super difusivo, ou seja,  $H > 1/2$ , sempre. Nesse processo não existe comprimento de escala característico, enquanto que no movimento Browniano (MB) esse comprimento é associado ao desvio padrão.

No movimento Browniano ou random walk convencional os tamanhos dos passos seguem uma distribuição Gaussiana e tendem a estarem centrados em torno de um valor médio bem definido. No processo (LW) os tamanhos dos passos seguem uma distribuição de probabilidade, tipo lei de potência, da forma

$$P(|l_i|) \sim \frac{1}{|l_i|^\mu}, \quad (3.19)$$

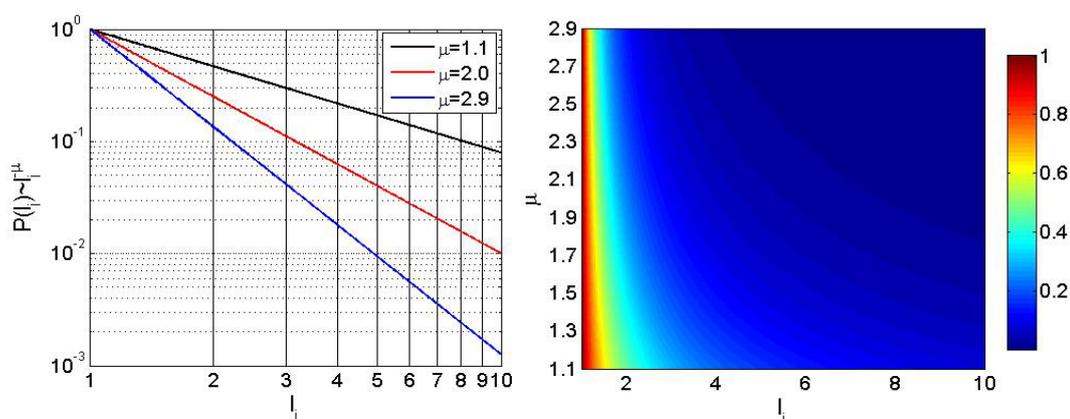
onde  $l_i$  é a largura do passo dado no intervalo de tempo  $\Delta t_i$  e  $1 < \mu < 3$  é o expoente que caracteriza o movimento. Esse expoente é o mesmo que  $\mu = \alpha + 1$  em (2.25). A expressão (3.19) representa o limite assintótico de  $l$  em

$$P(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega l} e^{-|\gamma\omega|^\alpha} d\omega, \quad (3.20)$$

para  $0 < \alpha < 2$ . Essa expressão representa a transformada inversa de Fourier da função característica  $\phi = e^{-|\gamma\omega|^\alpha}$  para a forma simétrica ( $\beta=0$ ) e centrada em zero ( $\delta=0$ ), conforme a equação (2.21). Quando  $\alpha=1$  ( $\mu=2$ ) recaímos na distribuição de Cauchy e quando  $\alpha=2$  ( $\mu=3$ ) se obtém a distribuição Gaussiana.

No processo LW os passos podem ser pequenos, muito grandes ou até mesmo infinitos, embora este último seja evento muito raro. Quando  $\mu \geq 3$  a variância da distribuição cresce linearmente com o tempo e o movimento é equivalente ao Browniano,

pois agora passos muito grandes são estatisticamente eventos raros de ocorrência. Para  $\mu=2$  a dependência da variância torna-se quadrática com o tempo, devido ao fato de  $\mu$  proporcionar uma probabilidade maior de ocorrência de passos grandes (ver Figura 3.3(a,b)). Nesta figura também podemos constatar que para menores valores de  $\mu$ , por exemplo,  $\mu=1.1$  a probabilidade de ocorrência de passos pequenos é bem alta e esta se mantém relativamente grande para tamanho de passos maiores (Figura 3.3a). À medida que aumentamos  $\mu$ , por exemplo,  $\mu=2.9$  a probabilidade favorece apenas a ocorrência de passos pequenos e os passos grandes se tornam eventos raros (Figura 3.3a). Para valores de  $\mu \leq 1$  não é mais possível normalizar a função densidade de probabilidade (WEEKS *et al.*, 1996).



**Figura 3.3** – Na fig.(a), na escala log-log, exibimos a proporcionalidade da probabilidade de ocorrência de passos de tamanho  $l_i$  para diferentes valores de  $\mu$ . Para  $\mu=1.1$  a probabilidade de ocorrência de passos grandes é bem alta e esta diminui à medida que aumentamos  $\mu$  (por exemplo,  $\mu=2.9$ ). A figura (b) representa essa probabilidade projetada no plano  $\mu$  versus  $l_i$ . A partir desta, é possível perceber que a probabilidade decai rapidamente à medida que aumentamos os valores de  $l_i$  e  $\mu$ .

A posição da partícula é calculada pela soma dos passos individuais, definida como

$$\vec{X}_N = \vec{X}_0 + \sum_{i=1}^N \vec{l}_i, \quad (3.21)$$

onde  $N$  representa o número de passos,  $\vec{X}_0$  a posição inicial e  $\vec{l}_i$  é a variável estocástica distribuída de acordo com a equação (3.19). No processo LW a variância  $\sigma_i^2 \sim t^\lambda$ , com  $\lambda > 1$ , já não cresce mais linearmente com o tempo, fazendo com que o coeficiente de

difusão ( $D \sim t^{\lambda-1}$ ) seja infinito quando  $t \rightarrow \infty$  (processo super difusivo). O teorema do limite central mostra que o coeficiente de difusão é dado por

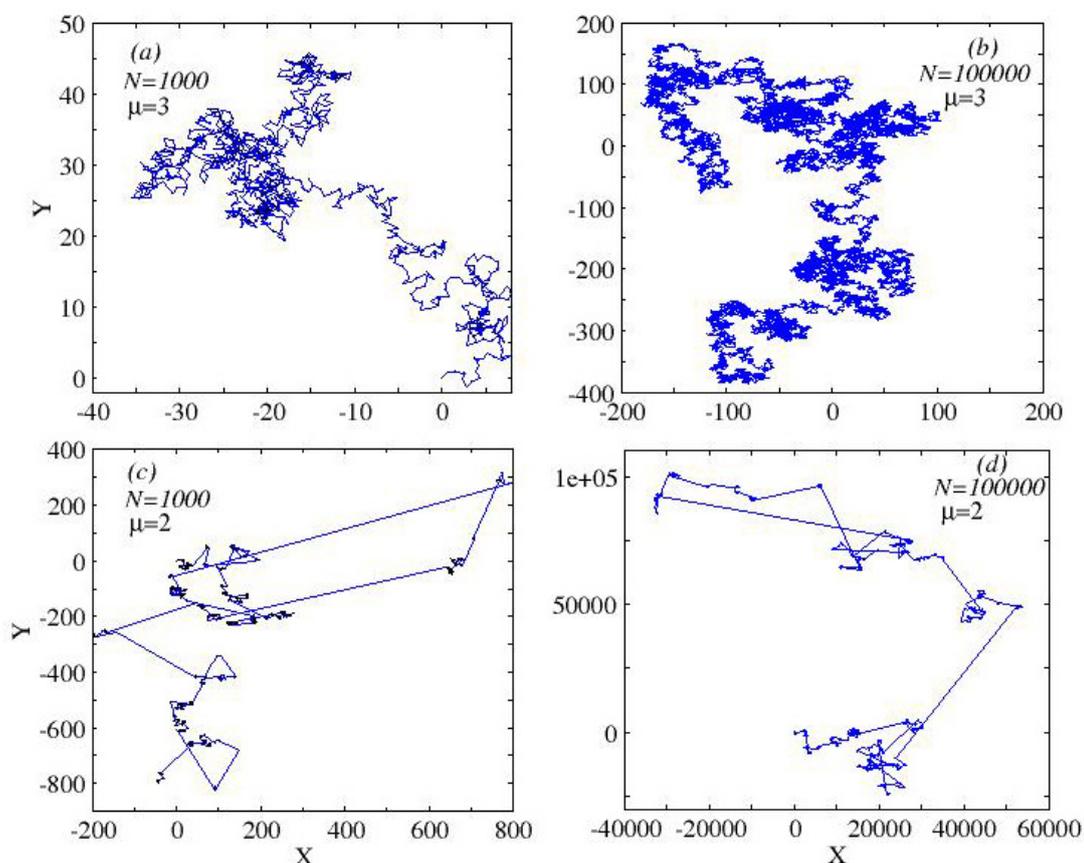
$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2}{2t}, \quad (3.22)$$

onde os momentos de  $l$  são dados por  $\langle l^m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} l^m P(l) dl$ . Geralmente o segundo momento  $\langle l^2 \rangle = \infty$  (no teorema do limite central generalizado) que ocasiona a ausência de um comprimento de escala característico e na indeterminação do coeficiente de difusão.

Normalmente os compiladores atuais possuem geradores de número aleatórios uniformemente distribuídos. Quando se deseja variáveis randômicas que obedecem a outro tipo de distribuição, é necessário se fazer uma transformação que irá converter a variável uniformemente distribuída na distribuição desejada. No nosso exemplo, a transformação para se obter uma distribuição tipo lei de potência a partir de uma distribuição uniforme é dada por  $l_i = l_0 x_i^{1/(1-\mu)}$ , onde  $l_i$  é o tamanho do passo distribuído seguindo uma lei de potência,  $l_0$  é uma constante,  $x_i$  uma variável uniformemente distribuída no intervalo  $[0,1]$  e  $1 < \mu < 3$ . É intrínseco nesse modelo que não existe uma orientação preferencial, ou seja, todas as possíveis orientações são eventos igualmente prováveis.

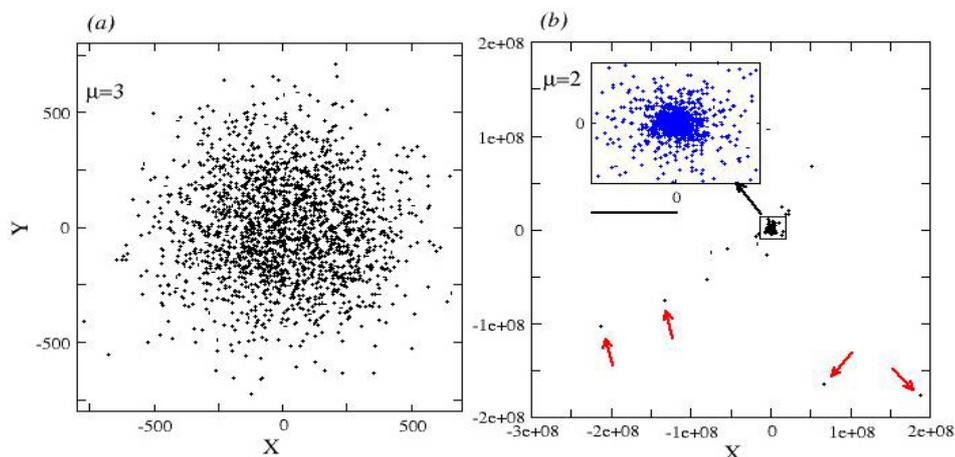
Para efeito de ilustração, produzimos algumas caminhadas em 2-D para exemplificar a diferença entre um passeio Browniano e um passeio de Lévy. Nessa ilustração mostramos o que ambos os passeios possuem em comum: a auto-similaridade. Inicia-se o passeio partindo na origem e com  $l_0 = 1$  e diferentes valores de  $\mu$ . Na Figura 3.4(a,b) temos o típico movimento Browniano com  $\mu=3$  e  $N=1000$  passos em fig.(a) e em fig.(b) uma caminhada com  $N=100000$  passos. Podemos ver também que os tamanhos dos passos são aproximadamente igualmente espaçados, passos longos não existem. Em contraste com esse tipo de caminhada, nas Figura 3.4(c) e (d), com  $\mu=2$ , podemos ver a ocorrência de saltos longos, pois estes agora são estatisticamente mais favoráveis, devido à distribuição de passo ser uma lei de potência e não uma Gaussiana. Esse é o grande diferencial da distribuição tipo lei de potência (para  $\mu < 3$ ), que permite a ocorrência de passos ou saltos longos. Isso possibilita que, por exemplo, para um animal em busca de alimentos em ambientes escassos, esse cubra uma área de busca maior se comparada com o movimento Browniano. Podemos ver que em ambos os casos, com  $\mu=3$  fig.(a,b) e  $\mu=2$

fig.(c,d), as figuras possuem a mesma forma, independente do número de passos  $N$ , o que torna a caminhada invariante sob uma mudança de escala de observação. Isso sugere que a posição média seja uma lei de potência (discutimos melhor invariância de escala e lei de potência na seção 3.4).



**Figura 3.4** – Caminhada aleatória em 2D, para o random walk convencional (com  $\mu=3$ ) para diferentes números de passos  $N$ , fig.(a) e fig.(b). Em fig.(c) e fig.(d) temos Lévy Walk com  $\mu=2$  também com diferentes números de passos  $N$  (ver legenda em cada figura). Podemos observar que ambas as caminhadas possuem invariância de escala.

Vamos agora discutir a difusão das partículas para um tempo fixo e suficientemente grande. Na Figura 3.5 mostramos como ocorre a difusão das partículas no espaço, para um típico movimento Browniano (MB) e para Lévy Walk (LW), utilizando também a equação (3.21) para  $\mu=3$  e  $\mu=2$ , respectivamente. Podemos notar que as partículas se difundem de forma homogênea em todo o espaço no MB, figura (a). Já para o movimento LW (figura b), algumas partículas aparecem bem dispersas do aglomerado principal (apontadas pelas setas em vermelho), como mostrado no *inset* em fig.(b). Essas grandes dispersões ocasionam a divergência do segundo momento.



**Figura 3.5** – Difusão para o movimento Browniano correspondente a  $\mu=3$  fig.(a) e difusão tipo Lévy walk, com  $\mu=2$ , fig.(b). Nesta figura, as setas indicam as partículas que mais se distanciaram do aglomerado principal. A barra no *inset* em fig.(b) corresponde a  $1.5e6$ , esse *inset* mostra a região central ampliada para melhor visualização. Total de 2000 partículas e  $N=100000$  passos.

É comum na natureza encontrar processos que seguem a distribuição desenvolvida por Lévy. Peng e colaboradores (PENG *et al.*, 1993) descobriram que o intervalo entre batidas do coração de um paciente saudável o expoente  $\mu$  em (3.19) situa-se próximo de 2.7. Enquanto que para um paciente com problemas cardíacos esse expoente se aproxima de 3, caso Gaussiano. Thadeu Penna e colaboradores (PENNA *et al.*, 1995) utilizaram métodos experimentais e numéricos para estudar uma torneira gotejante e descobriram que o intervalo entre uma gota e outra também segue uma distribuição de Lévy com expoente entre 2.66-2.85. Intervalo este que engloba o expoente proveniente do ritmo cardíaco ( $\mu=2.7$ ), o que fez o pesquisador Penna a especular “é o coração batendo uma torneira pingando?”

Alguns autores usam o termo Lévy Walks para movimentos com velocidade constante e Lévy Flights para movimentos com saltos instantâneos. No processo Lévy Walks, assume-se que um certo tempo é necessário para completar um salto (*tempo de espera*). Nesse aspecto, o processo torna-se mais realístico que o Lévy flights. Comumente o processo Lévy Walk é o mais utilizado e largamente aplicado em sistemas reais.

### 3.3 Movimento Browniano Fracionário

Uma característica particular do MB é que este independe do incremento da caminhada. Geralmente se  $\{X_t\}$  é um processo estacionário com variância finita e  $\lambda_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k})$  que representa a covariância no intervalo temporal  $k$ , então  $\{X_t\}$  é dito possuir uma dependência de curto alcance (SRD, sigla em inglês) ou dependência de longo alcance (LRD) de acordo com o somatório  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$  converge ou diverge, respectivamente (DAÍ; HEYDE, 1996).

Movimento Browniano Fracionário (FBM, sigla em inglês) foi desenvolvido por Mandelbrot e Van Ness (MALDELBROT; NESS, 1968), embora tenha sido originalmente proposto por Kolmogorov, ainda em 1940 (KOLMOGOROV, 1940). O interesse inicial de Kolmogorov era modelar problemas relacionados à turbulência. Inicialmente foi chamado de processo “*Wiener spiral*”. Posteriormente com Maldelbrot, FBM surgiu como uma adaptação do processo Gaussiano com objetivo de reproduzir correlações de longo alcance em séries temporais. Essas correlações podem ser verificadas em séries financeiras, Hidrológicas, etc. Malbelbrot definiu o FBM em termos do expoente de Hurst no intervalo  $0 < H < 1$ , usando a convolução do Movimento Browniano  $B(t)$ .

O Movimento Browniano Fracionário  $B_H(t)_{t \geq 0}$  é um processo contínuo, Gaussiano e centrado, com covariância dada por

$$\langle B_H(\tau) \cdot B_H(t) \rangle = \frac{1}{2} \left( |\tau|^{2H} + |t|^{2H} - |t - \tau|^{2H} \right). \quad (3.23)$$

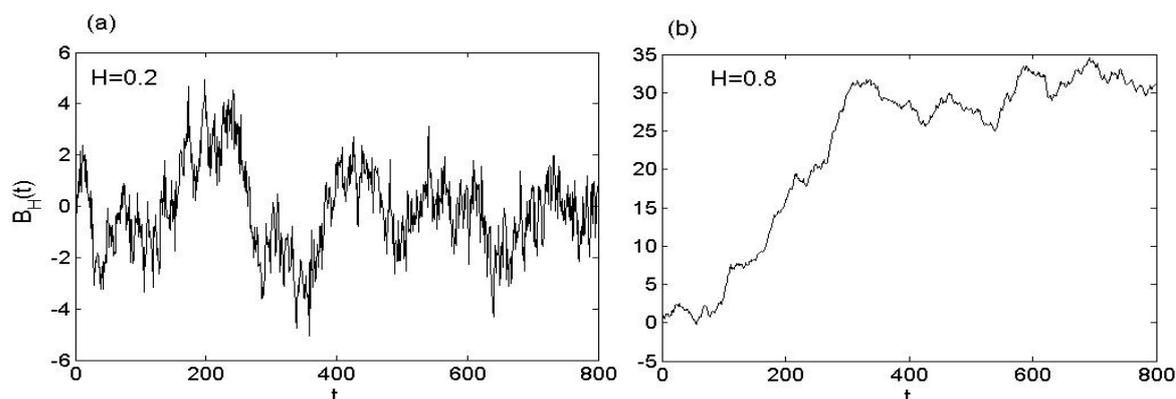
Quando  $\tau = t$  a equação (3.23) se reduz a  $\langle B_H(t)^2 \rangle = t^{2H}$ , que é uma das propriedades do Movimento Browniano Fracionário, definida a seguir. Por definição,  $B_H(t)$  possui as seguintes propriedades (BIAGINI *et al.*, 2008):

- 1 –  $B_H(0) = 0$  e  $\langle B_H(t) \rangle = 0$ , para todo  $t \geq 0$ ,
- 2 –  $B_H(t)$  possui incrementos homogêneos, i.e.,  $B_H(t + \tau) - B_H(\tau)$  possui a mesma lei de  $B_H(t)$  para  $\tau, t \geq 0$ ,
- 3 –  $B_H(t)$  é um processo Gaussiano com variância  $\langle B_H(t)^2 \rangle = t^{2H}$ ,  $t \geq 0$ ,
- 4 –  $B_H(t)$  possui trajetórias contínuas.

A representação da integral estocástica para  $B_H(t)_{t>0}$  é definida, de acordo com Sornette (2006, p. 153-155), como

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \left[ \int_{-\infty}^0 ((t-\tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2}) d\tau \eta(\tau) + \int_0^t (t-\tau)^{H-1/2} d\tau \eta(\tau) \right], \quad (3.24)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  representa a função gamma e  $d\tau \eta(\tau) = dW_\tau$  é geralmente tomado como incrementos do movimento Browniano padrão com espectro de ruído branco e distribuição Gaussiana (*processo Wiener* quando  $H=1/2$ , ver apêndice C para maiores detalhes). Quando  $B_H(0) = 0$  e  $H=1/2$ , recai-se no típico movimento Browniano. Para outros valores de  $H$ ,  $B_H(t)$  é também chamado de derivada fracional ou integral de  $B(t)$ . Quando  $H < 1/2$  o passado possui uma correlação negativa com o futuro. Quando  $H > 1/2$  há correlações positivas entre o passado e o futuro. Nesse regime, o FMB exibe uma dependência de longo alcance quando  $H \neq 1/2$ , que significa que as correlações entre passado e futuro não decaem rápidas o bastante para garantir a convergência. Na Figura 3.6(a,b) exemplificamos o Movimento Browniano Fracionário para o expoente de Hurst ( $H=0.2$ ) em fig.(a) e na fig.(b) utilizamos  $H=0.8$ . Esta figura foi produzida utilizando a função “*wfbm*” do software MATLAB (versão 7.6), que usou a referência (ABRY; SELLAN, 1996) para a produção do algoritmo.



**Figura 3.6** – Exemplo do Movimento Browniano Fracionário para  $H=0.2$  fig.(a) e  $H=0.8$  fig.(b). O movimento Browniano padrão corresponde a  $H=0.5$  (não mostrado aqui). Para menor valor de  $H$ , mais rugosa é a “caminhada”.

O movimento Browniano Fracionário também exibe invariância contínua de escala, ou seja, para qualquer  $\kappa \geq 0$ , tem-se

$$B_H(\kappa t) \sim \kappa^H B_H(t), \quad t \geq 0. \quad (3.25)$$

No artigo de Mandelbrot e Ness (1968) é mostrado o cálculo da correlação entre dois incrementos de  $B_H(t)$ . Com  $T, T_1$  e  $T_2$  fixos e não negativos, a covariância entre  $B_H(t)$  entre o seguinte intervalo de tempo:  $T/2$  a  $T_1$  e  $-T/2$  a  $T_2$ , é dada por:

$$\begin{aligned} & 2 \langle (B_H(T/2 + T_1) - B_H(T/2)) \cdot (B_H(-T/2) - B_H(-T/2 - T_2)) \rangle \\ & = \langle (B_H(T/2 + T_1) - B_H(-T/2 - T_2))^2 \rangle + \langle B_H(T/2) - B_H(-T/2) \rangle^2 \\ & \quad - \langle B_H(T/2 + T_1) - B_H(-T/2) \rangle^2 - \langle B_H(T/2) - B_H(-T/2 - T_2) \rangle^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

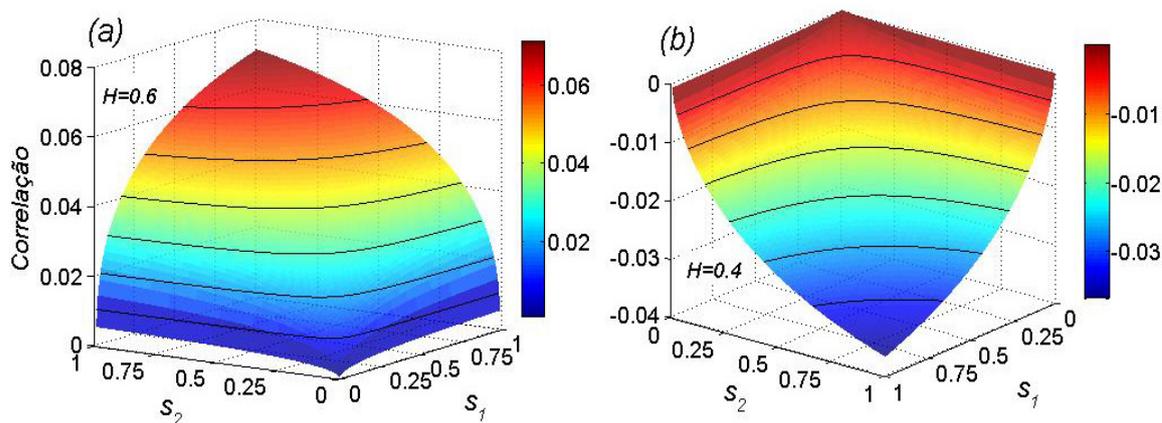
chegando-se a correlação

$$C(T_1, T_2) = \frac{1}{2} \frac{(T + T_1 + T_2)^{2H} + T^{2H} - (T + T_1)^{2H} - (T + T_2)^{2H}}{T_1^H T_2^H}, \quad (3.27)$$

que pode ser escrita de outra forma, fazendo  $S_1 = T_1/T$  e  $S_2 = T_2/T$ , e substituindo em (3.27), tal que  $S_1 \in ]0, 1[$  e  $S_2 \in ]0, 1[$ , tem-se

$$C(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \frac{(1 + S_1 + S_2)^{2H} + 1 - (1 + S_1)^{2H} - (1 + S_2)^{2H}}{S_1^H S_2^H}. \quad (3.28)$$

A partir da expressão (3.28) Mandelbrot fez as seguintes observações: para  $1/2 < H < 1$  existem correlações positivas entre o passado e o futuro do processo. As correlações negativas ocorrem para  $0 < H < 1/2$  e para  $H = 1/2$  não existem correlações temporais entre dois incrementos. Para efeito de ilustração das correlações, exibimos, a seguir, a figura contendo o caso onde se têm correlações sempre positivas ( $H > 1/2$ ) e o caso em que se têm sempre correlações negativas ( $H < 1/2$ ), Figura 3.7(a) e (b), respectivamente.



**Figura 3.7** – A correlação é sempre positiva para  $H > 1/2$  em fig.(a) e sempre negativa para  $H < 1/2$  fig.(b). Na fig.(a) foi usado  $H=0.6$  e na fig.(b)  $H=0.4$ . Para  $H=0.5$  a correlação vale zero.

### 3.4 Oscilações log-periódicas e invariância discreta de escala

Normalmente oscilações log-periódicas estão relacionadas com eventos catastróficos. Observações de ruptura de vários materiais heterogêneos também mostram um comportamento oscilante imposto por uma lei de potência. Essa frequência é chamada de log-periódica, sendo proporcional a  $\log(t_c - t)$ , ou seja, do logaritmo do tempo antes da ruptura, representado por  $t_c$ . Geralmente essa ruptura está relacionada com a não linearidade dos materiais e é encontrada em uma larga variedade de sistemas naturais. Pralong e colaboradores (PRALONG *et al.*, 2005) também descobriram essas oscilações que antecederam deslizamentos em geleiras. Esses eventos passaram a ser observados em erupções vulcânicas (VOIGHT, 1988), em terremotos (BOWMAN *et al.*, 1998), ruptura de geleiras (FLOTRON, 1977; LUTHI, 2003) e também em dinâmica de população e mercado financeiro (IDE *et al.*, 2002).

Um objeto possui invariância contínua de escala (ICE) se este permanece o mesmo quando mudamos a escala de observação. Matematicamente um observável  $\Theta$  dependente de um parâmetro  $x$  é (ICE) sobre uma transformação  $x \rightarrow vx$  se existe um número  $\mu$  tal que seja verdadeira a seguinte afirmação

$$\Theta(x) = \mu\Theta(vx). \quad (3.29)$$

A solução que atende a equação (3.29) é uma função tipo lei de potência da forma

$$\Theta(x) = Cx^\alpha. \quad (3.30)$$

onde  $C$  é uma constante e  $\alpha$  é o expoente de escala. Com as equações (3.29) e (3.30) é possível mostrar que o expoente  $\alpha$  pode ser escrito como uma combinação entre o fator de “zoom” do fator de escala que é escrito como

$$\alpha = -\ln(\mu) / \ln(\nu). \quad (3.31)$$

A taxa  $\Theta(\nu x) / \Theta(x) = \nu^\alpha$  não depende de  $x$ . Essa é uma característica de invariância contínua de escala (SORNETTE, 2006, p. 157-159), o valor relativo do observável em duas escalas diferentes depende somente da taxa entre eles. Também essa é uma das principais características que associa lei de potência a invariância de escala, auto-similaridade. Vamos agora generalizar o conceito de (ICE) tomando o expoente  $\alpha$  como um número complexo, da forma  $\alpha = a + ib$ , tal que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Substituindo este expoente na expressão (3.30) temos

$$\Theta(x) = Cx^{a+ib}, \quad (3.32)$$

que podemos reescrever de outra forma, como

$$\Theta(x) = Cx^{a+ib} = Cx^a [x^{ib}] = Cx^a [e^{ib \ln(x)}] = Cx^a [\cos(b \ln(x)) + i \sin(b \ln(x))], \quad (3.33)$$

onde usamos em (3.33) a relação de Euler,  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ . A parte real de (3.33) é:

$$\Theta(x) = Cx^a \cos(b \ln(x)). \quad (3.34)$$

Vemos que a constante  $b$  em (3.34) representa a frequência de oscilação. Agora a taxa

$$\frac{\Theta(\nu x)}{\Theta(x)} = \frac{Cx^a \nu^a \cos(b \ln(\nu x))}{Cx^a \cos(b \ln(x))} = \nu^a \left[ \cos(b \ln(\nu)) - \frac{\sin(b \ln(x)) \sin(b \ln(\nu))}{\cos(b \ln(x))} \right] \quad (3.35)$$

é dependente de  $x$ . No numerador em (3.35), usamos a identidade trigonométrica  $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ , com  $A = b \cdot \ln(\nu)$  e  $B = b \cdot \ln(x)$ . Reaímos em uma nova classe de correção de escala, chamada log-periódica, que conduz a invariância discreta de escala (IDE). Quando  $b=0$  a equação (3.35) se reduz a  $\Theta(\nu x) / \Theta(x) = \nu^\alpha$ . Para  $b>0$  o fator de magnitude  $\nu$  em (3.35) deve satisfazer as seguintes condições para se observar a auto-similaridade

$$\begin{cases} \sin(b \ln(\nu)) = 0, \\ \cos(b \ln(\nu)) = 1, \end{cases} \Rightarrow b \ln(\nu) = 2n\pi \Rightarrow \nu_n = e^{\frac{2n\pi}{b}}, \quad (3.36)$$

com  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Nesse caso, o fator de magnitude  $\nu_n$  agora é discreto. Quando  $n>0$  ( $n<0$ ) observa-se uma ampliação (redução) na escala original. Uma oscilação log-

periódica superposta a uma lei de potência é considerada uma manifestação de uma invariância discreta de escala na vizinhança de um ponto crítico (TANAKA, 2002). Já não é para qualquer fator de “zoom” que se observa a auto-similaridade, o fator de multiplicação assume valores discretos, embora possam haver infinitos deles, mas estes são contáveis.

Com as expressões (3.29) e (3.30), já assumindo que o expoente  $\alpha$  seja complexo, utilizando a identidade  $I = \exp(i2\pi m)$  com  $m=0,1,2,\dots$ , e, a partir da relação  $\mu(\nu) = 1/\nu^\alpha$ , é possível mostrar que o expoente pode ser escrito com

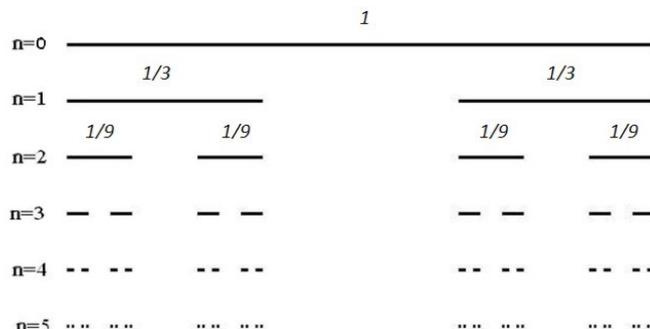
$$\alpha = -\frac{\ln \mu}{\ln \nu} + i \frac{2\pi}{\ln \nu} \cdot m, \quad (3.37)$$

onde recaímos em uma ICE para  $m=0$ , que representa o expoente  $\alpha$  real. A equação (3.37) é mais geral que (3.31). A solução torna-se complexa para  $m \neq 0$ , implicando em um fator de escala característico  $\nu$  expresso como uma correção log-periódica para uma lei de potência (JONKERS, 2007).

Invariância discreta de escala também é uma propriedade dos fractais. Normalmente se atribui aos fractais como sendo invariantes sob uma mudança na escala de observação e sempre associamos essa invariância como sendo contínua. Muitos desses fractais obedecem a uma invariância de escala somente por alguns fatores específicos de magnitude. Para um exemplo de invariância discreta de escala, podemos citar o conjunto de Cantor. Sua construção ocorre da seguinte forma: considere uma linha de tamanho unitário, no primeiro passo dividimos essa linha em três partes iguais, ou seja,  $1/3$  cada parte, e jogamos fora a parte central (ver Figura 3.8, em  $n=1$ ). Em seguida, dividindo novamente cada sub-intervalo, e agora ficamos com intervalos de comprimento  $1/9$  (mesma figura com  $n=2$ ) e, novamente, jogamos fora a parte central seguindo a mesma regra do intervalo anterior. O processo é repetido  $n$  vezes. Podemos ver que o número de intervalos cresce com  $2^n$  enquanto seu comprimento diminui por  $3^n$ . O número de intervalos também pode ser quantificado simplesmente chamando  $N_x(n)$  o número de intervalos gerados em  $n$  iterações e  $x$  o fator de ampliação. Por definição, o intervalo unitário original corresponde a um fator de ampliação igual a um. Quando o fator de ampliação aumenta por um fator três, o número de intervalos aumenta por um fator dois, independente do índice de iteração. A dimensão fractal (SORNETTE, 1998) é definida

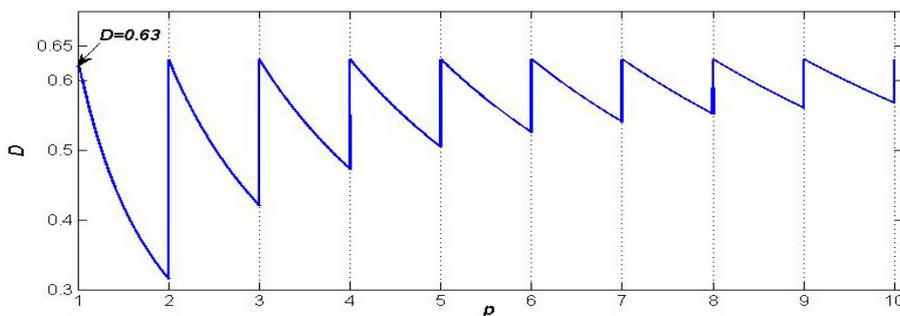
$$D = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\ln(N_x(n))}{\ln(x)} \right| = \left| \frac{\ln 2^n}{\ln 3^{-n}} \right| = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63. \quad (3.38)$$

Esse fractal só apresenta auto similaridade para um fator de escala  $\lambda_p = 3^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , ou seja, para qualquer potência arbitrária de três. Esse é um exemplo típico de invariância discreta de escala.



**Figura 3.8** – Exemplo de invariância discreta de escala para o conjunto de Cantor.

Se aumentarmos continuamente o fator de zoom, por exemplo, de  $x_p = 3^p$  até  $x_p = 3^{p+1}$ , o número de intervalos salta por um fator dois em  $x_p = 3^p$ , mas permanece inalterado até  $x_p = 3^{p+1}$  em que nesse ponto o número de intervalos salta novamente por um fator dois. Dessa forma, a dimensão fractal  $D$  decresce entre os valores intermediários pertencentes ao intervalo  $]3^p, 3^{p+1}[$ . Quando  $p \rightarrow \infty$ , as oscilações desaparecem e a dimensão é exatamente  $0.63$ , como mostrado na Figura 3.9.

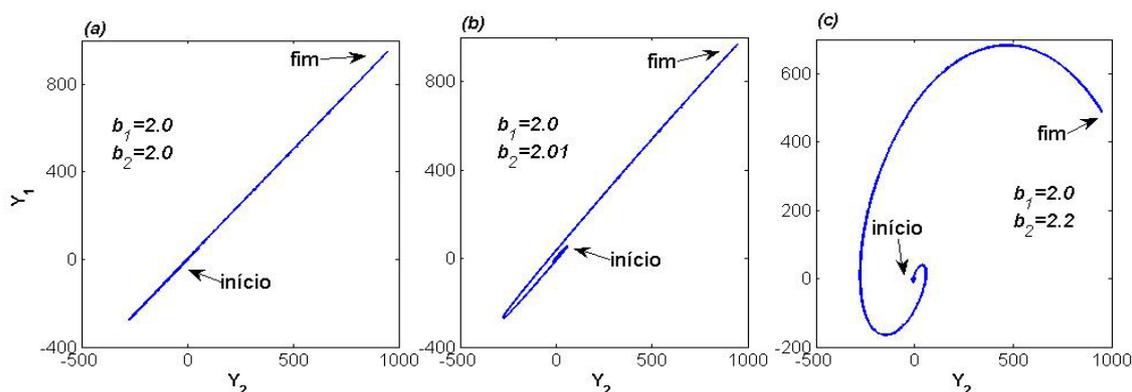


**Figura 3.9** – A dimensão fractal diminui entre os valores intermediários de potência inteira de três.

Faremos aqui uma breve revisão de como podemos detectar oscilações log-periódicas e mostraremos uma analogia com um processo estocástico. Para tal finalidade, iremos usar uma simples função analítica para explicar. Considere a função que representa a posição de uma caminhada (ou qualquer processo) iniciando próximo à origem que oscila log-periodicamente da forma

$$Y_i(x) = x \cdot \sin(b_i \cdot \ln(x)), \quad \forall x > 0. \quad (3.39)$$

Faremos duas realizações, simulando uma caminhada, onde a imagem da função  $Y_i$  representa a posição da caminhada. Plotamos a imagem da função (ou os valores de  $Y_i$ ) para um  $b_i$  versus outra imagem correspondente a outro  $b_j$  diferente do anterior. A partir desse experimento, podemos extrair algumas informações úteis a respeito do movimento. Em (3.39) o sub-índice  $i$  rotula cada freqüência de oscilação  $b_i$ . Quando as freqüências são iguais ( $\Delta b = |b_1 - b_2| = 0$ ) cruzando cada realização ( $Y_1$  versus  $Y_2$ ) observamos uma reta, Figura 3.10(a). Agora, quando há uma pequena variação entre as freqüências ( $\Delta b = 0.01$ ), já é possível observar uma curva em forma de espiral (Figura 3.10(b)). Essa curvatura torna-se cada vez mais acentuada à medida que aumentamos a diferença entre as freqüências ( $\Delta b = 0.2$ ), como mostrado a Figura 3.10(c). Em um processo estocástico, a curvatura em forma de espiral de duas realizações cruzadas indica que o sistema oscila de forma log-periódica. A curvatura da espiral é um indicador da flutuação da freqüência de oscilação log-periódica, quanto maior a curvatura, maior é essa flutuação da freqüência entre uma realização e outra.



**Figura 3.10** –Para mesma freqüência de oscilação, quando cruzada duas realizações, tem-se uma reta fig.(a). Para pequenas variações  $\Delta b = 0.01$ , se obtêm uma curva em forma de espiral, fig.(b). Essa curva se torna mais acentuada à medida que a freqüência difere uma da outra  $\Delta b = 0.2$ , fig.(c).

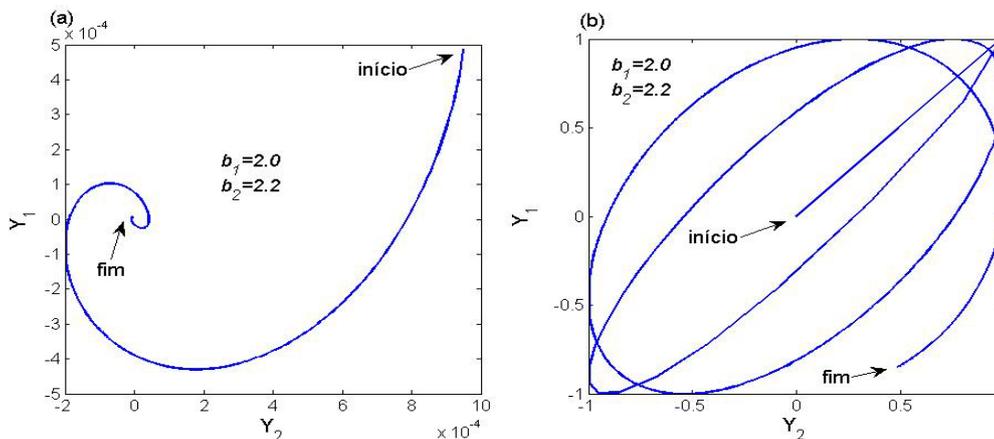
Procedendo de forma análoga ao experimento discutido anteriormente, agora vamos usar amplitude inversamente proporcional a variável independente  $x$  e amplitude constante. As equações, respectivamente, são

$$Y_i(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(b_i \cdot \ln(x)), \quad (3.40)$$

$$Y_i(x) = \sin(b_i \cdot \ln(x)).$$

Quando a amplitude é inversamente proporcional ao número de passos, a curva converge para o ponto zero, não importando o local de partida (Figura 3.11a). Neste exemplo, o

ponto de partida foi escolhido longe da origem apenas para evidenciar a convergência para a origem. Para o caso em que a amplitude é unitária (Figura 3.11b) a curva fica aprisionada em um quadrado de coordenadas entre menos um e um (ou do modulo da magnitude da amplitude). Neste último caso, não há mais convergência nem divergência.



**Figura 3.11** – Em fig.(a), quando a amplitude de oscilação é inversamente proporcional ao número de passos, a curvatura converge para o ponto zero, o início pode ser qualquer ponto. Já em fig.(b), quando a amplitude é constante, não existe convergência nem divergência para nenhum ponto.

Encerramos aqui a fundamentação teórica desta tese. Porém, a riqueza de informações, de abrangência e aplicabilidade dos processos difusivos entre outros apresentados vão além dos tópicos discutidos até este capítulo.

## CAPÍTULO 4

# 4 Resultados numéricos e exatos: Diagrama de Fase para PIA<sup>3</sup>

Neste capítulo será apresentado o modelo utilizado neste trabalho de caminhada aleatória não Markoviana e os principais resultados obtidos via simulações computacionais (pelo método de Monte Carlo). Também apresentaremos os resultados analítico-estocásticos. Inicialmente, vamos apresentar o modelo desenvolvido por Schutz e Trimper (SCHUTZ; TRIMPER, 2004) que deu origem a este trabalho e em seguida vamos descrever/reproduzir os seus resultados obtidos mediante uma abordagem numérica e analítica.

### 4.1 Estimativa numérica via caminhadas simuladas

Nesta abordagem, vamos simular uma caminhada não Markoviana na qual o caminhante toma suas decisões no presente baseadas nas decisões tomadas no passado. A partir de um modelo computacional, existe uma grande flexibilidade em se modelar qualquer processo de natureza aleatória, até mesmo com memória. O mesmo não ocorre para os modelos analíticos, que nem sempre podem ser resolvidos de forma exata. Porém, quando se tem essa solução, os valores de interesses são exatos, o que não ocorre num modelo numérico, onde esses são, na maioria das vezes, aproximados e o tempo computacional e a precisão numérica nem sempre são favoráveis. Também devemos

---

<sup>3</sup> Persistência Induzida Amnesticamente.

mencionar, nesse último caso, que o sistema está sujeito a efeitos de tamanho finito (espacial ou temporal).

### 4.1.1 Modelo computacional para memória total

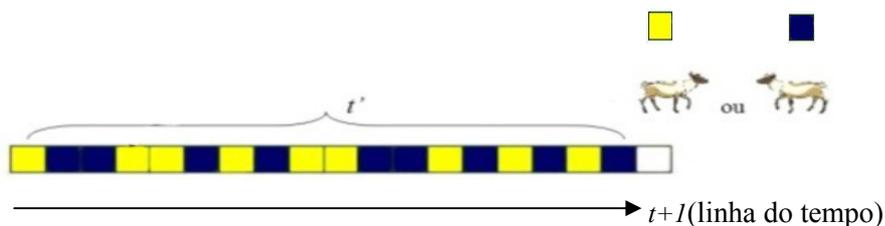
Schutz e Trimper (2004) foram pioneiros numa nova classe de caminhada aleatória com memória. Os autores desenvolveram um modelo no qual o caminhante toma suas decisões no tempo presente baseadas nas decisões tomadas no passado. Todo o histórico do processo é considerado e igualmente provável. A regra é a seguinte: o caminhante começa em algum ponto  $x_0$  em  $t_0$  e possui completa lembrança de todo seu histórico. Em cada instante de tempo discreto, o caminhante se move para direita ou esquerda, tal que a evolução estocástica é dada pela equação

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1}, \quad (4.1)$$

onde  $v_{t+1} = \pm 1$  é a variável randômica. No tempo  $t+1$  a memória do caminhante é representada pelo conjunto de variáveis  $v = \{v(1), v(2), \dots, v(t)\}$  tomadas no tempo passado. A evolução da caminhada se dá da seguinte forma:

- Inicialmente, no instante  $t=1$ , o caminhante move-se para direita com probabilidade  $q$  ( $v(1) = 1$ ) ou para esquerda com probabilidade  $1-q$  ( $v(1) = -1$ ).
- no tempo  $t+1$  é escolhido de forma randômica e uniformemente distribuído um tempo passado  $t'$ , compreendido entre  $1 \leq t' \leq t$ . Observa-se então o estado correspondente a  $v(t')$  (que pode ser um passo dado para direita ou esquerda) nesse instante de tempo sorteado. Então, determina-se  $v_{t+1} = v(t+1)$  da seguinte maneira

$$v_{t+1} = \begin{cases} v(t') & \text{com probabilidade } p \text{ (repetição da ação em } t'), \\ -v(t') & \text{com probabilidade } (1-p) \text{ (executa ação contrária àquela em } t'). \end{cases}$$



$+1$  } decisões possíveis.  
  $-1$  }

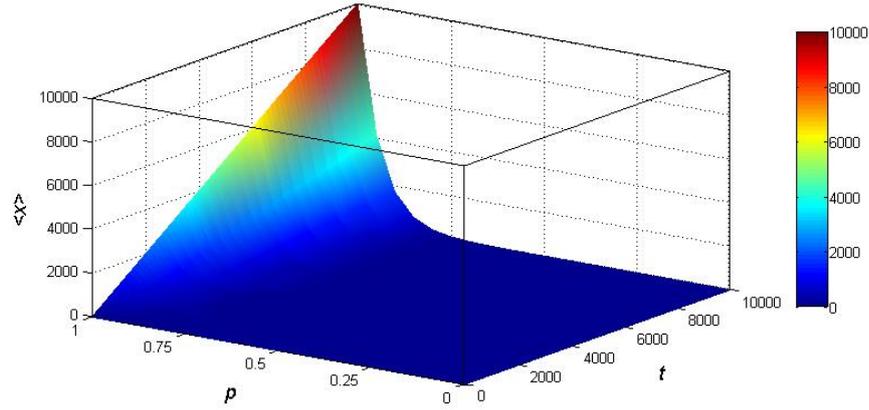
A posição no tempo  $t$  é dada por  $x_t = \sum_{t'=1}^t v_{t'}$ . O parâmetro  $p$  representa a probabilidade de repetir uma ação tomada no passado  $t'$ . Para  $p < 1/2$  (*região de feedback negativo*), o caminhante comporta-se com reformador, em cada passo ele irá preferir fazer sempre o oposto do que foi feito no tempo passado. Já quando  $p > 1/2$  o caminhante é tido como tradicionalista, preferindo sempre repetir a ação passada (*região de feedback positivo*). Quando  $p = 1/2$  toda a estatística da caminhada é semelhante ao do random walk convencional, discutida no capítulo 3. Quando  $p = 1$ , temos o movimento balístico, que corresponde também ao caso determinístico. O mesmo não ocorre para  $p = 0$ , pois neste caso o caminhante permanece sempre alternando seu movimento entre aceitar e recusar uma ação no passado.

### 4.1.2 Solução analítica para memória total

O modelo de memória total é aquele no qual o caminhante se recorda de todas as decisões tomadas no passado. Schutz e Trimper (2004) resolveram o problema analiticamente, encontrando a solução para o primeiro e segundo momento, juntamente com a função densidade de probabilidade da posição do caminhante. A posição média está representada pela equação definida abaixo

$$\langle x_t \rangle = \langle v_1 \rangle \frac{\Gamma(t+2p-1)}{\Gamma(2p)\Gamma(t)} \sim \frac{\beta}{\Gamma(2p)} t^{2p-1}. \quad (4.2)$$

Para a posição média, existe um regime de “escape” assim chamado pelo próprio autor, tal que para  $p > 1/2$  a posição média diverge quando  $t \rightarrow \infty$  (devido ao expoente do tempo ser positivo) enquanto para  $p < 1/2$  o expoente temporal é negativo e a posição vai para zero nesse limite, conforme equação (4.2). Nesta equação  $\beta = 2q - 1$ , onde  $q$  representa a probabilidade de começar o primeiro passo para a direita ( $v_1 = 1$ ) e com probabilidade  $1 - q$  o primeiro passo é efetuado para a esquerda ( $v_1 = -1$ ). Quando  $q = 1/2$  ( $\beta = 0$ ) a posição média é sempre zero, conforme a equação (4.2). Para a posição quadrática média não há dependência do parâmetro  $\beta$ , pois  $v_1^2 = 1$ , sempre. Vamos assumir que todos os passos iniciais são efetuados para a direita, ou seja,  $q = 1$  ( $\beta = 1$ ). Na Figura 4.1 apresentamos os resultados obtidos por Schutz de uma forma mais didática mediante ilustração gráfica. A barra de cor ao lado da figura representa o valor numérico da posição média.



**Figura 4.1** – Posição média versus  $p$  e  $t$ . Para  $p < 1/2$  a posição média tende para zero a medida que  $t$  cresce, enquanto que para  $p > 1/2$  a posição média cresce proporcional ao tempo. A barra de cor ao lado da figura representa o valor numérico da posição média.

A solução analítica obtida para a posição quadrática média, no limite assintótico de  $t$ , foi

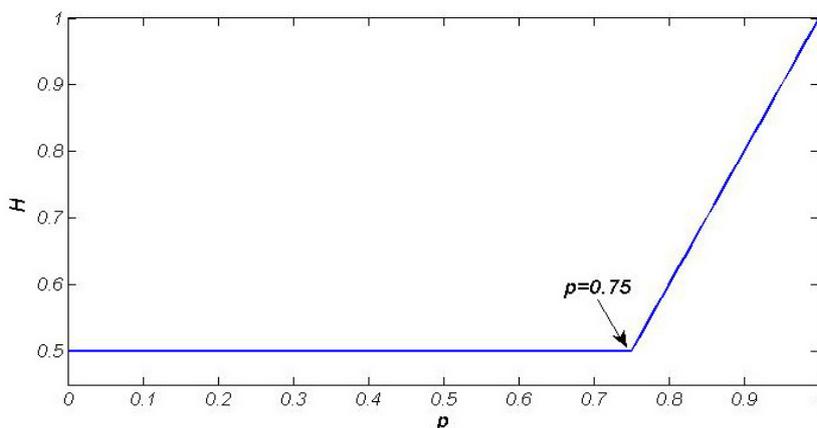
$$\langle x_t^2 \rangle = \begin{cases} \frac{1}{3-4p} \cdot t & p < 3/4, \\ t \ln t & p = 3/4, \\ \frac{1}{(4p-3)\Gamma(4p-2)} \cdot t^{4p-2} & p > 3/4. \end{cases} \quad (4.3)$$

Analisando as equações em (4.3), podemos fazer as seguintes afirmações: para  $p < 3/4$  a posição quadrática média escala linearmente com o tempo e conseqüentemente a variância também, pois a posição média neste intervalo possui o expoente temporal menor que um. Nesse regime, temos um movimento de difusão normal. Já para  $p > 3/4$  a posição quadrática média cresce com expoente maior que um e, portanto, a variância também. Nessa região temos o regime super difusivo. Em resumo, podemos expor a variância juntamente no limite assintótico para  $t$  (estamos analisando apenas a parte temporal juntamente com o seu expoente, as constantes multiplicativas foram omitidas)

$$\sigma_t^2 = \langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2 \sim \begin{cases} t - (t^{2p-1})^2, & p < 3/4 \\ t^{4p-2} - (t^{2p-1})^2, & p > 3/4 \end{cases} \sim \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} t, & p < 3/4, \\ t^{4p-2}, & p > 3/4. \end{cases} \quad (4.4)$$

No exemplo exposto, conforme as equações em (4.4), o expoente de Hurst pode ser obtido utilizando a proporcionalidade da variância com o tempo ou a posição quadrática média (4.3), pois ambas as abordagens conduzem ao mesmo resultado. Considerando a aproximação  $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{2H}$ , para memória completa, o expoente de Hurst versus  $p$  apresenta persistência apenas para  $3/4 < p \leq 1$  (regime super difusivo) que corresponde à região de

persistência clássica para  $p > 1/2$  e difusão normal quando  $p < 3/4$  (regime não persistente). A representação gráfica para o expoente de Hurst em função de  $p$  é mostrada na Figura 4.2.



**Figura 4.2** – Expoente de Hurst versus  $p$ . Só há persistência para  $p > 0.75$  (região de persistência clássica corresponde a  $p > 0.5$ ).

Schutz e Trimper (2004) também encontraram a função densidade de probabilidade da posição, juntamente com o coeficiente de difusão, encontrando uma PDF Gaussiana para quaisquer valores de  $p$ , como mostrada abaixo

$$P(x, t, p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t D(t, p)}} \exp \left\{ -\frac{[x - \langle x \rangle]^2}{4t D(t, p)} \right\}, \quad (4.5)$$

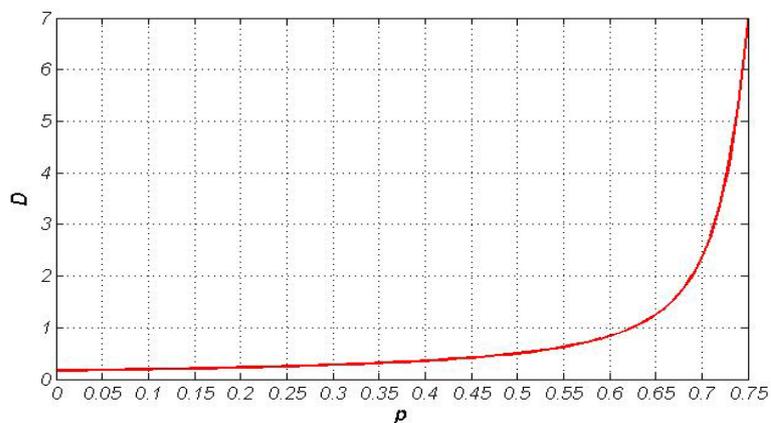
$$D(t, p) = \frac{1}{8p-6} \left[ \left( \frac{t}{t_0} \right)^{4p-3} - 1 \right], \quad (4.6)$$

quando  $p=3/4$  em (4.6) deve-se tomar o limite.

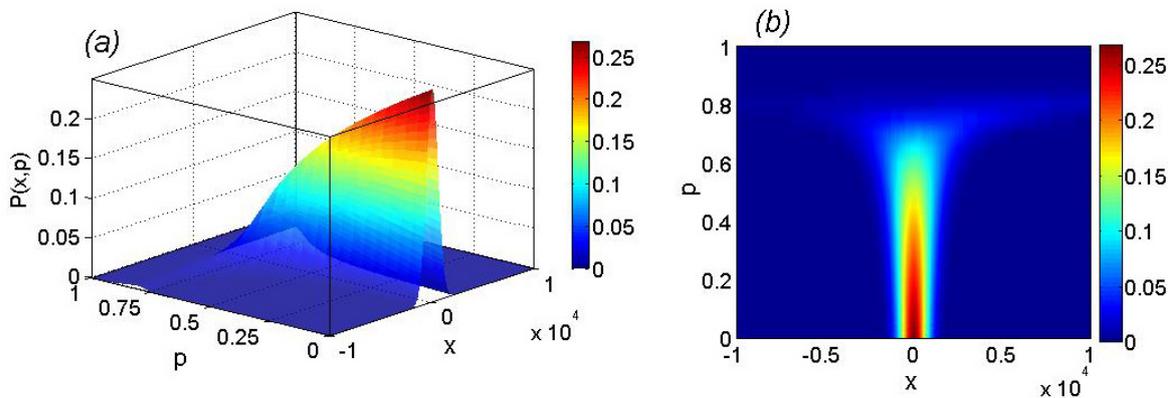
Como podemos observar no que foi exposto anteriormente, a posição do caminhante evolui, de certa forma, de maneira bastante complexa, pois em cada instante de tempo a posição no tempo futuro representa uma soma de posições aleatórias passadas. Esse resultado só reforça ainda mais o poder atrativo da distribuição Gaussiana e o conceito de “estabilidade” que esta distribuição possui. A distribuição Gaussiana é comum também em regimes super difusivos, mesmo onde o coeficiente de difusão cresce proporcional ao tempo. Essa proporcionalidade é expressa pelo expoente do tempo na equação (4.6), em função do parâmetro  $p$ . Quando  $p > 3/4$ , no limite assintótico de  $t$ , o coeficiente de difusão diverge (Figura 4.3).

Analisando a representação gráfica da equação (4.5) podemos ver que a probabilidade para a ocorrência de eventos afastados da média decai muito rapidamente

para valores próximos a zero, típico das distribuições Gaussianas (Figura 4.4a). Nessa figura também é possível observar que a probabilidade se mantém com valores estatisticamente altos na região em torno do seu valor médio, Figura 4.4b (este valor médio na figura apresenta-se em forma de “T”). Todas essas figuras foram produzidas por nós, com o objetivo de melhor ilustrar os resultados.



**Figura 4.3** – Coeficiente de difusão versus  $p$ . Esse coeficiente diverge para  $p > 0.75$  (característico do regime super difusivo) esse coeficiente vale meio para  $p = 1/2$ , semelhante ao do random walk, como era de se esperar.



**Figura 4.4** – Densidade de probabilidade da posição versus  $p$  e  $x$ , para um tempo de  $t = 10^6$ . A figura (b) representa a projeção da figura (a) no plano  $p$  versus  $x$ . A barra de cor ao lado de cada figura representa o valor numérico dessa probabilidade.

### 4.1.3 Modelo computacional para memória parcial

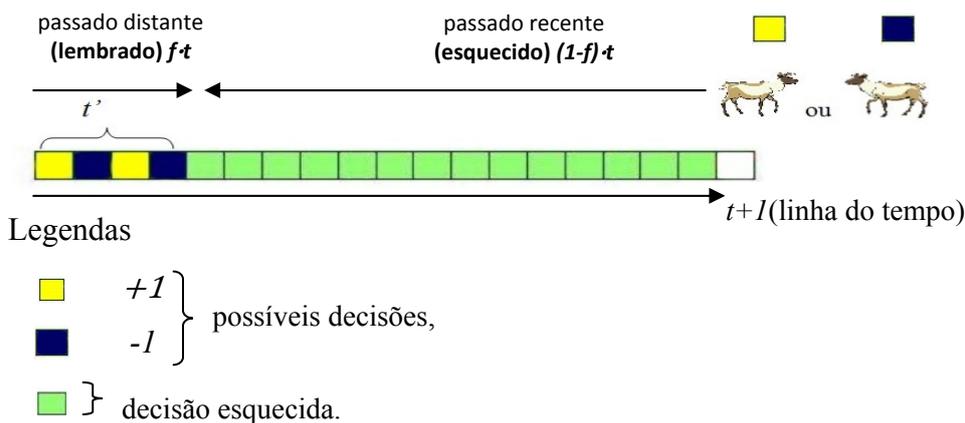
Cressoni e colaboradores (CRESSONI; DA SILVA; WISWANATHAN, 2007), adaptaram o modelo de Schutz e Trimper, agora impondo a condição de que o caminhante lembre apenas uma fração  $f$  da memória do seu passado distante. Essa simples restrição da memória fez surgir uma rica variedade de fenômenos no comportamento da caminhada. Seis fases foram constatadas devido a essa perda da memória recente. Para o caso de perda de memória passada, ver (DA SILVA; WISWANATHAN; CRESSONI, 2006).

De forma análoga ao modelo explicado anteriormente para memória total, agora o caminhante só lembra uma fração  $f$  do seu passado distante e a fração  $1-f$  do seu passado recente é completamente esquecida (veja ilustração na página seguinte). A evolução temporal da caminhada é regida pela seguinte equação estocástica:

$$x_{t+1} = x_t + \nu_{t+1}, \quad (4.7)$$

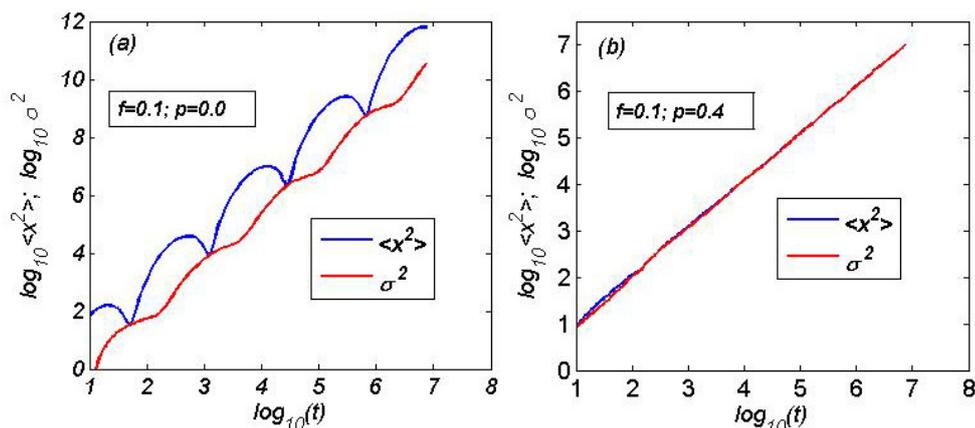
onde  $\nu_1 = \nu(1) = 1$  é escolhido de forma determinística em  $t=1$  e  $x_0 = 0$ . O caminhante, no instante de tempo  $t+1$ , lembra apenas uma fração  $ft$  ( $0 < f \leq 1$ ) do seu passado distante, quando  $f=1$  temos o caso de memória completa e quando  $f \rightarrow 0$  recaímos no processo sem memória, que é equivalente ao problema da caminhada aleatória discutido na seção (3.1). Queremos chamar atenção para o fato que a memória antiga lembrada aumenta proporcionalmente com o tempo atual ( $t+1$ ) da forma  $\sim ft$ .

Como no caso anterior de memória total, no tempo  $t+1$  é escolhido de forma aleatória um instante de tempo do passado distante  $1 \leq t' \leq ft$  (só que agora o passado é restrito a uma fração  $f$  do tempo atual) no qual o caminhante executa a ação ( $\nu_{t+1} = \pm \nu(t')$ ) tomada em  $t'$ , ou seja, ( $\nu_{t+1} = \nu(t')$ ) com probabilidade  $p$  ou faz o oposto ( $\nu_{t+1} = -\nu(t')$ ) com probabilidade  $(1-p)$ . Para o caso em que  $p=1$  temos o caso determinístico, mas não para  $p=0$ . Esse parâmetro  $p$  representa a probabilidade de repetir uma decisão tomada no passado; quando  $p=0$  o caminhante sempre rejeita as ações tomadas no passado, de modo que ele está sempre alternando seu movimento. Nesse último caso, o feedback negativo atua com probabilidade de 100%. A seguir, ilustramos as regras da simulação. Essas regras são análogas ao caso de memória total discutida anteriormente, a única diferença é a restrição do passado para tomada de decisões. A forma ilustrativa é a seguinte

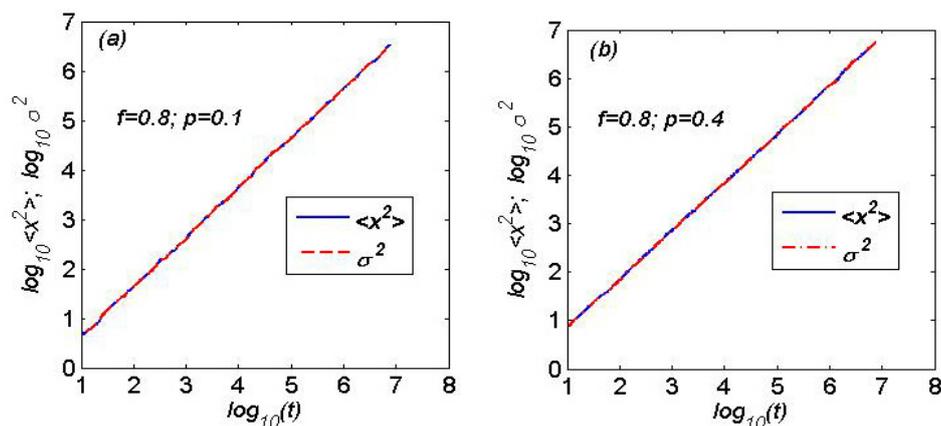


Quando  $p > 1/2$  (*região de feedback positivo*) o caminhante é tido como persistente ou tradicionalista, estatisticamente, no futuro, ele irá repetir as mesmas ações do passado. Já para  $p < 1/2$  (*região de feedback negativo*) o caminhante é chamado de anti-persistente ou reformador, fazendo preferencialmente a ação oposta àquela realizada no passado. Quando  $p = 1/2$  temos o movimento “*random walk*”, para quaisquer valores de  $f$  e recobrimos novamente toda a estatística mostrada na seção 3.1. Medimos a persistência através do valor do expoente de Hurst ( $H$ ). Esse valor é calculado através da relação  $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{2H}$ , onde  $0 < H < 1$ . Para  $H = 1/2$  temos um regime não persistente de difusão normal e para  $H > 1/2$  processo super difusivo ou persistente, onde a variância cresce de forma não linear com o tempo com expoente ( $2H > 1$ ).

Agora vamos analisar a difusão da caminhada, e para isso, vamos observar como se comporta o expoente de Hurst ( $H$ ) em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ . Iremos mostrar alguns exemplos, em que usando  $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{2H}$  ao invés de  $\sigma^2 \sim t^{2H}$ , não afeta o resultado da medida do expoente  $H$ , ambos os métodos conduzem ao mesmo resultado. Os expoentes da posição quadrática média e da variância diferem quando  $f = 0,0$ , que é o caso markoviano já discutido no capítulo 3, seção 3.1. Na região de pequenos valores de  $f$  e de  $p$ , é possível perceber que a amplitude da variância sofre menos oscilação que a amplitude da posição quadrática média (Figura 4.5a), mas ambas as retas possuem a mesma inclinação quando ajustadas a uma reta, na escala log-log. Já na região de maiores valores de  $f$  ou  $p$ , ambas as retas coincidem sem nenhum tipo de oscilação na amplitude (Figura 4.5b) e Figura 4.6(a,b).



**Figura 4.5** – A posição quadrática média e a variância escalam com o tempo da forma  $\sim t^{2H}$ , sendo que ambas possuem a mesma inclinação, embora haja maiores oscilações na amplitude para a posição quadrática média do que para a variância, para pequenos valores de  $f$  e de  $p$ .



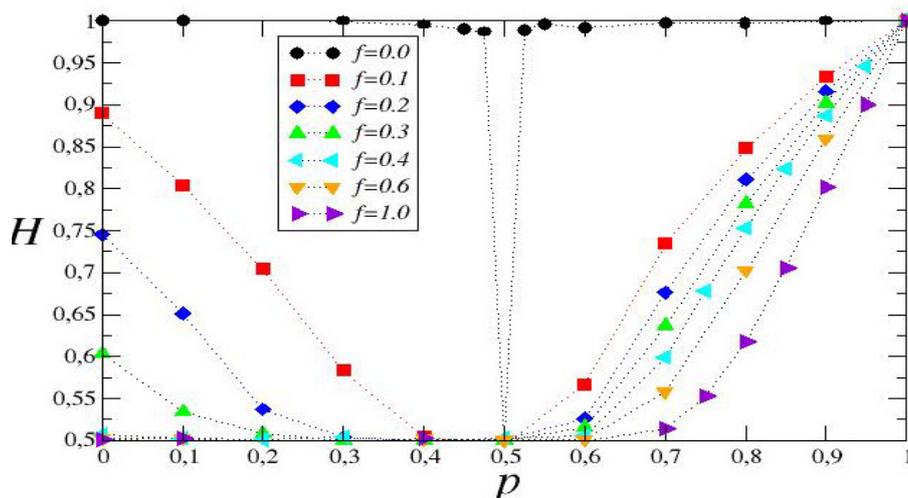
**Figura 4.6** – Para grande valores de  $f$  e de  $p$  as retas coincidem, mesma amplitude.

#### 4.1.4 Expoente de Hurst e Persistência induzida por amnésia (perda de memória)

Através do expoente de Hurst podemos conhecer o tipo de difusão que um processo exhibe. Associamos persistência às correlações positivas entre passado e futuro, significando que as ações tomadas no passado influenciam positivamente as decisões no futuro. Para o regime anti-persistente, ocorre o contrário: o passado influencia negativamente o futuro, ou seja, uma ação ocorrida no passado possui uma probabilidade menor de se repetir no futuro. Com a imposição da perda parcial de memória recente, a afirmação anterior já não é mais atendida. Pelo simples fato da memória do caminhante ser restrita a uma pequena fração do passado distante (para alguns valores especiais de  $f$  e de

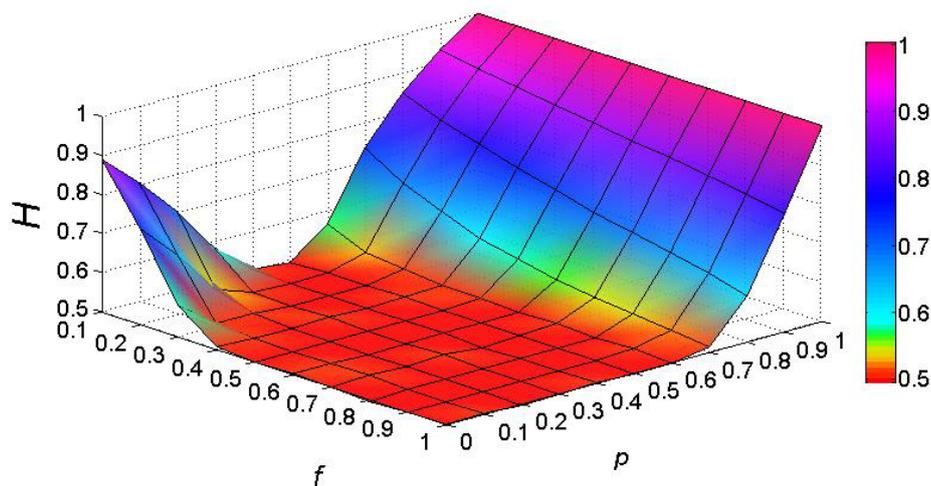
$p$ ) faz com que surjam persistência mesmo na região de feedback negativo. Essa persistência é atribuída à imposição da perda parcial de memória referente ao passado recente. Atribuímos, também, essa persistência a uma competição entre estocacidade e feedback. Estocacidade é o ato de sortear uma ação no passado compreendida no intervalo  $[1, ft]$ . Feedback representa o ato de aceitar ou rejeitar a ação nesse passado sorteado (feedback é definido pelo parâmetro  $p$ ). Os resultados numéricos indicam que quanto menor  $f$  (fração de memória antiga lembrada), maior é a persistência para  $p < 1/2$ . À medida que  $f$  aumenta, a persistência vai desaparecendo, comprovando o quanto a perda de memória recente provoca persistência (repetição de ações). Quando a memória é restaurada (aumentando  $f$ ) a persistência desaparece. Através da Figura 4.7, podemos ver que para  $f > 0.4$  já não há mais persistência para  $p < 1/2$ . Portanto, nessa região, deve existir um  $f$  crítico que separa as regiões de persistência ( $H > 1/2$ , difusão anômala) e não persistência ( $H = 1/2$ , difusão normal). Esse valor crítico é muito difícil de calcular, através de simulação computacional, com boa precisão. No tratamento analítico, discutido na seção 4.2, estaremos aptos a conhecermos com exatidão a fase de persistência e não persistência, juntamente como os valores críticos para  $f$  e  $p$  (referente à linha divisória que separa as duas fases).

Para  $p > 1/2$ , correspondente à região de persistência clássica, não é novidade o surgimento de persistência (Figura 4.7). O que podemos notar é que pequenos valores de  $f$  conduzem a maior persistência (para  $p > 1/2$  e também  $p < 1/2$ ). Podemos explicar esse fator da seguinte forma: quando as decisões tomadas no futuro são restritas a uma pequena fração de memória antiga, isso faz com que o passado distante e o futuro estejam fortemente correlacionados (maior valor do expoente  $H$ ). Mas, à medida que aumentamos  $f$ , as correlações tendem a diminuir, pois agora passado e presente podem igualmente influenciar as decisões no futuro, portanto, é esperado o surgimento de um valor para  $H$  menor. No caso limite, em que  $H$  se aproxima de  $1/2$  o passado já não exerce influência significativa no futuro e as correlações temporais tornam-se de curto alcance quando  $H = 1/2$ .



**Figura 4.7** - Expoente de Hurst versus  $p$ , para vários valores fixos de  $f$ . Pequenos valores de  $f$  induzem à persistência mesmo na região de feedback negativo ( $p < 1/2$ ). Essa persistência desaparece à medida que aumentamos  $f$  (à medida que a memória é restaurada). Valores obtidos utilizando um tempo máximo de  $6.0 \cdot 10^6$  e 1000 realizações.

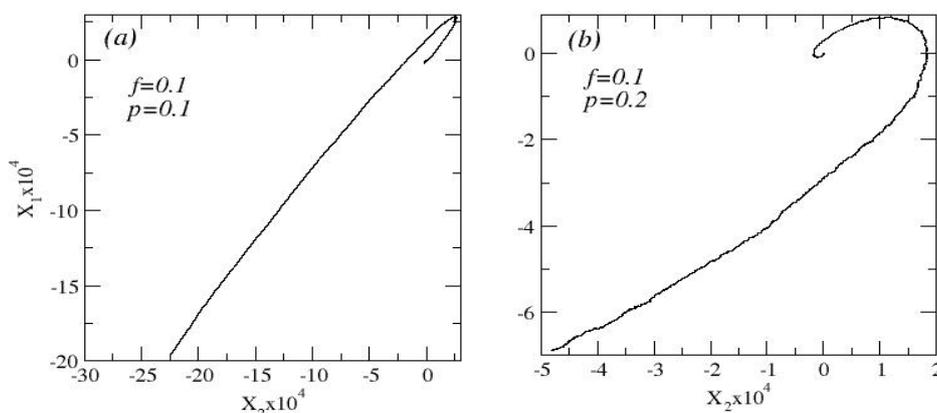
Para uma visualização mais completa da Figura 4.7, vamos mostrar essa mesma figura em três dimensões, com  $f$  variando de 0.1 até 1.0 e  $p$  variando de 0.0 até 1.0, ambos com incremento de 0.1, Figura 4.8. Como podemos ver, apenas para pequenos valores de  $f$  é que se obtém persistência na região correspondente a  $p < 1/2$ . É possível visualizar, também, o plano de não persistência, onde  $H=0.5$  (em vermelho) e a região de persistência para  $H > 0.5$ . Percebemos nesta figura, portanto, que existem duas fases bem definidas pelos parâmetros  $f$  e  $p$  (Figura 4.8).



**Figura 4.8** – Diagrama completo do expoente de Hurst em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ . Na região do plano  $H=0.5$  situa-se a fase de não persistência (região em vermelho). Os resultados foram obtidos para um tempo máximo de  $6.0 \cdot 10^6$  e 1000 realizações.

### 4.1.5 Oscilações log-periódicas na posição média para $\alpha < 0$ ( $p < 1/2$ )

A seguir, iremos comentar as oscilações log-periódicas na posição média. Como já discutido na seção 3.4, oscilações log-periódicas levam à invariância discreta de escala e está relacionada com o expoente complexo. Vamos fazer um comparativo com a Figura 3.10 (seção 3.4), na qual mostramos que usando uma função que oscila log-periodicamente e quando cruzada duas realizações (ou as duas imagens das funções) com frequências diferentes, seu gráfico corresponde a uma forma em espiral. Na Figura 4.9 mostramos esse mesmo padrão de forma espiral, similar à Figura 3.10. Portanto, a posição deve oscilar de forma log-periódica também.



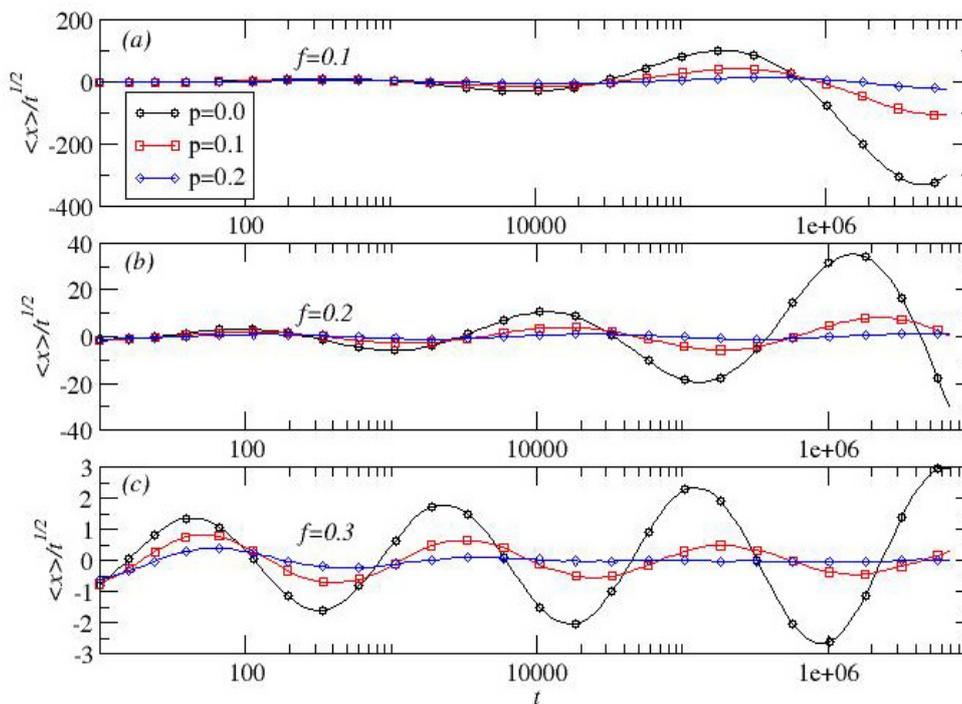
**Figura 4.9** – A forma espiral, quando cruzada duas realizações, confirma que a posição oscila log-periodicamente. Caminhada produzida com  $4 \cdot 10^6$  passos. Os sinais (positivo ou negativo) não são importantes, estamos interessados apenas na forma da curva (nesse caso, em espiral).

Sabemos que a posição oscila de forma log-periódica, vamos agora analisar como essas oscilações se comportam em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ . A seguir, mostramos uma seqüência de figuras com oscilações log-periódicas da posição média. Essas figuras têm por objetivos mostrar os possíveis valores de  $f$  e de  $p$  onde devam ocorrer mudanças de regimes de log-periodicidade e não log-periodicidade, assim como no caso mostrado anteriormente, da fase de persistência e não persistência.

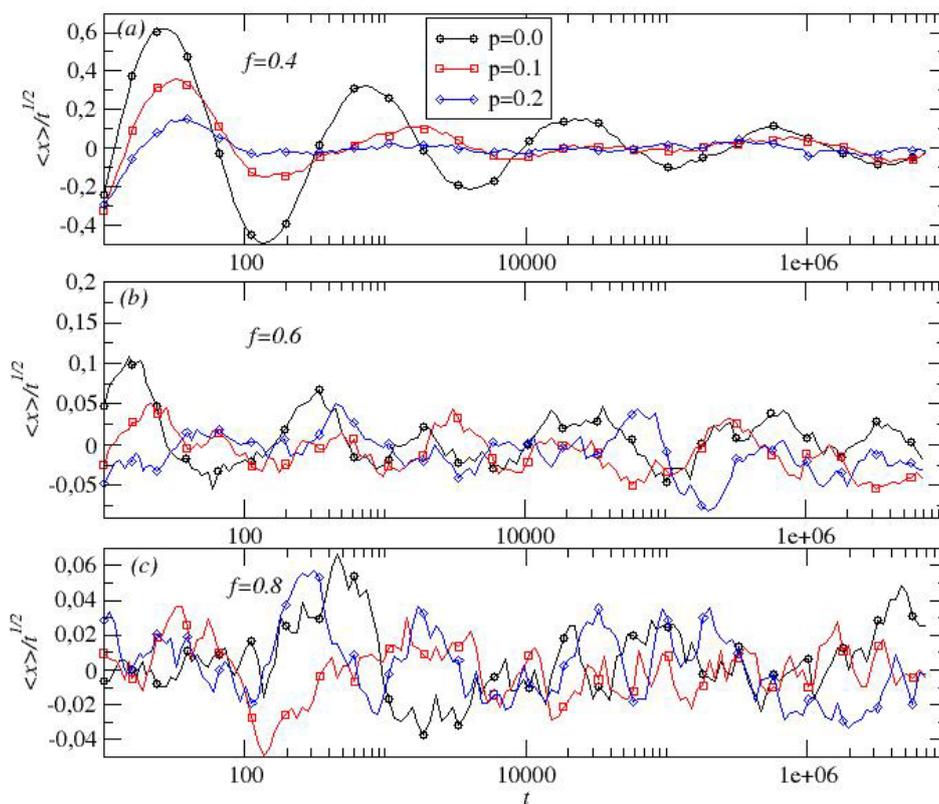
Na Figura 4.10(a) usamos  $f=0.1$  com valores de  $p=0.0$ ,  $0.1$  e  $0.2$  para mostrarmos que à medida que aumentamos os valores de  $p$ , as amplitudes de oscilações aumentam. Na Figura 4.10(b,c) podemos ver que as amplitudes começam a diminuir à medida que aumentamos a fração de memória antiga lembrada  $f$ . Plotamos a posição média dividida por  $\sqrt{t}$  para reduzir as amplitudes e tornar mais visíveis as oscilações. Na Figura 4.11,

aumentamos os valores de  $f$  para  $f=0.4$  na fig.(a),  $f=0.6$  na fig.(b) e  $f=0.8$  em fig.(c). Podemos ver que à medida que aumentamos  $f$ , as oscilações deixam de se apresentarem bem definidas e começam a desaparecer. Por exemplo, em  $f=0.8$  (Figura 4.11(c)) as oscilações são bem diferentes em relação ao caso correspondendo a  $f=0.4$  (Figura 4.11(a)). Isso sugere que o parâmetro  $f$  delimita uma região onde existe log-periodicidade de outra onde não existe log-periodicidade. Quanto ao parâmetro  $p$ , qual será sua extensão de log-periodicidade? Para responder essa pergunta, vamos fixar novamente os  $f$ 's e prolongarmos os  $p$ 's. Na Figura 4.12(a,b,c) estendemos os valores de  $p$ , começando por  $p=0.3$ ,  $0.4$ ,  $0.5$  e  $0.6$ . Neste caso, vamos mostrar resultados apenas para  $f=0.1$  fig.(a),  $f=0.2$  fig.(b) e  $f=0.3$  fig.(c), pois é suficiente para evidenciar que as oscilações desaparecem para  $p \geq 0.5$ , não importando os valores de  $f$ . Isso indica também que  $p$  delimita duas fases: oscilações log-periódicas e não log-periódicas. Portanto, o par de parâmetros  $(f,p)$  além de delimitar as regiões de persistência e não persistência, também delimita duas fases contendo oscilações log-periódicas na posição média, que leva conseqüentemente a uma invariância discreta de escala, e outra fase de não log-periodicidade, onde se tem o caso clássico de invariância contínua de escala. Na região de log-periodicidade ( $p < 1/2$ ) e também na região de persistência ( $H > 1/2$ ) as amplitudes das oscilações aumentam com o tempo elevado a um expoente entre meio e um, enquanto que na região de não persistência ( $H = 1/2$ ) esses expoentes situam-se abaixo de meio. Na linha critica que separa as duas fases, esse expoente é exatamente meio. Devido à amplitude da posição média na região de não persistência crescer de forma mais lenta que na fase de persistência, isso impossibilita visualizarmos melhor essas oscilações log-periódicas.

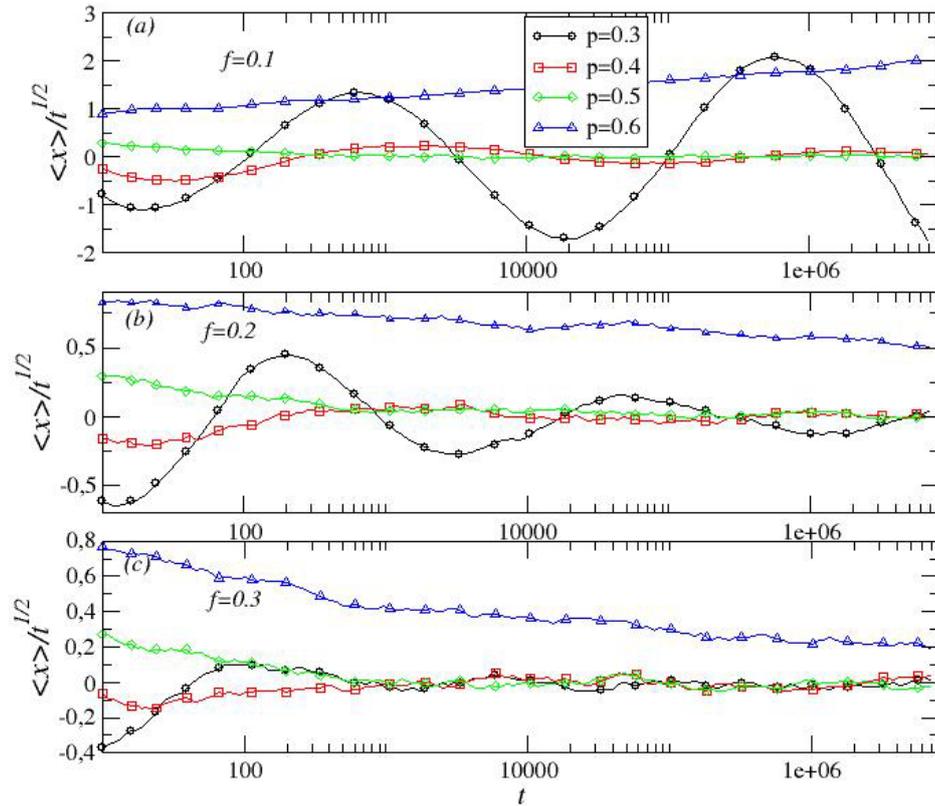
Na região de não log-periodicidade ( $p > 1/2$ ) a posição média é uma função sempre monotônica, tipo lei de potência, em relação ao tempo com expoente maior que zero e menor ou igual a um. A determinação numérica dos valores críticos de  $f$  e de  $p$  que separam as regiões de log-periodicidade e não log-periodicidade é muito trabalhosa e pouco precisa. Ao invés disso, será utilizada uma abordagem analítica que nos permitirá calcular esses valores e as fases de log-periodicidade a não log-periodicidade de forma exata.



**Figura 4.10** – Oscilações log-periódicas na posição média. Maiores são as amplitudes para baixos valores de  $p$ , com  $f$  fixo.



**Figura 4.11** – As oscilações vão desaparecendo para valores elevados de  $f$ .



**Figura 4.12** – Neste exemplo, as oscilações começam a desaparecer para  $p > 0.5$ , para quaisquer valores de  $f$ .

### 4.1.6 Cálculo da frequência de oscilação log-periódica

Na região onde as oscilações são bem definidas, é simples fazer um ajuste para calcular a frequência de oscilação. Na região de persistência as amplitudes de oscilações crescem com o tempo elevado a um expoente maior que meio. Já na região de não-persistência as amplitudes crescem com o tempo elevado a um expoente menor que meio. O principal objetivo aqui é apenas calcular as frequências com boa precisão, não havendo interesse de nossa parte a determinação da equação da posição média. Dentre várias curvas testadas a que melhor se ajustou aos dados (ver Figura 4.13), tem a forma

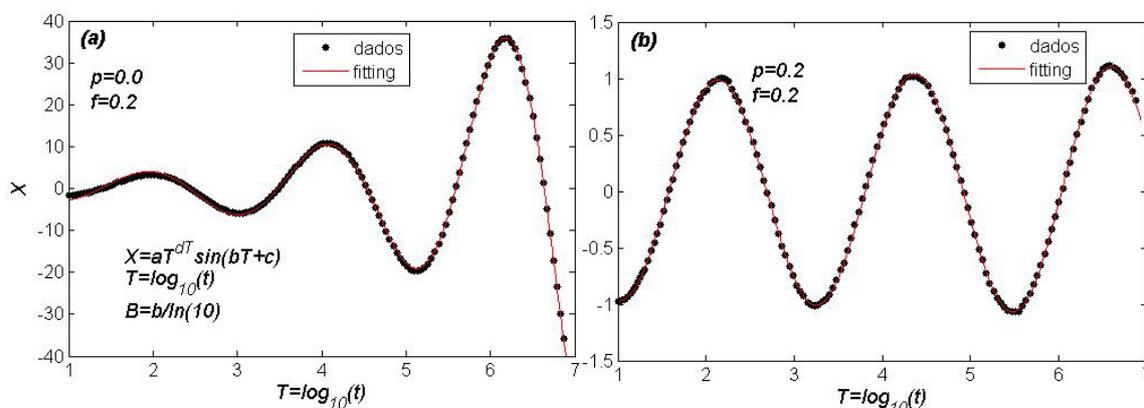
$$X = a \cdot T^{d \cdot T} \sin(b \cdot T + c) \quad (4.8)$$

onde  $X = \langle x \rangle / t^{1/2}$ ,  $T = \log_{10}(t)$  e  $B = b / \ln(10)$ . Este último ( $B$ ) é o parâmetro que queremos medir, enquanto que as constantes  $a$ ,  $c$  e  $d$  são apenas parâmetros de ajustes. Essa equação se ajustou bem na maioria dos casos, exceto na região de não-persistência. A equação alternativa usada para a região de não persistência foi

$$X = a \cdot T^d \sin(b \cdot T + c), \quad (4.9)$$

por proporcionar um melhor resultado. Na Figura 4.14 mostramos uma comparação entre as duas equações para mostrar que a segunda equação (4.9) melhor acompanha as amplitudes, sem decair tão rápido como ocorre com a primeira equação (4.8).

Após um ajuste podemos analisar o comportamento da frequência de oscilação em função dos parâmetros do modelo. Na Figura 4.15(a) mostramos como essa frequência é sensível à variação da fração de memória  $f$ . Para pequenos valores de  $p$ , por exemplo,  $p=0.0$  (ver legendas) o crescimento é quase linear com  $f$ , mas à medida que aumentamos  $p$  ( $p=0.3$ ) a inclinação torna-se cada vez menor e a linearidade desaparece. Por isso, deve existir um  $p$ , para o qual essa frequência desapareça. Podemos constatar esse fato, analisando a Figura 4.15(b), onde  $B$  diminui à medida que  $p$  cresce, para todos os valores de  $f$  (ver legenda). Para valores mais altos de  $f$  e de  $p$ , apresentados na Figura 4.15, o ajuste não foi possível. Quando apresentarmos o modelo analítico, iremos mostrar que o crescimento de  $B$  com  $f$ , para um  $p$  fixo possui um ponto de máximo e a partir daí o  $B$  começa a diminuir com o aumento de  $f$ . A fração de memória antiga  $f$  é a responsável pelo surgimento de  $B$ , que por sua vez aparece na região compreendida por  $p$ . Por exemplo, quando  $f$  é igual a zero, isso implica que  $B$  também é zero, para qualquer  $p$ , então talvez possa existir um  $p$  crítico que faz com que  $B$  seja zero para qualquer  $f$ .



**Figura 4.13** – Fitting (ou ajuste) realizado para medir a frequência de oscilação, fig.(a) e fig.(b). A linha contínua representa o ajuste, enquanto os símbolos em círculos representam os dados numéricos.

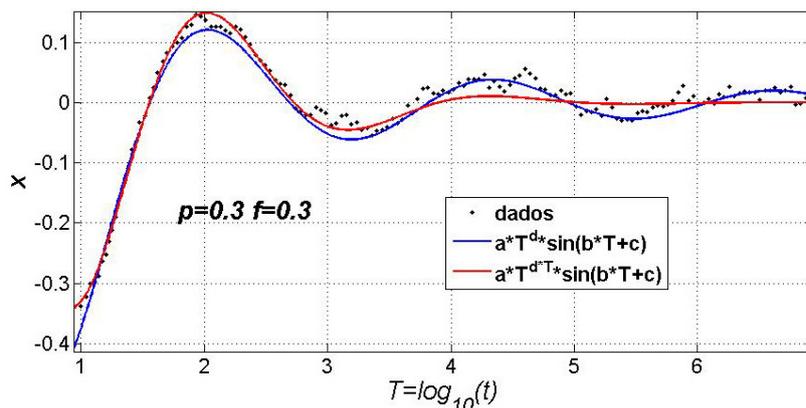


Figura 4.14 – Comparação entre os ajustes usando as equações (4.8) e (4.9).

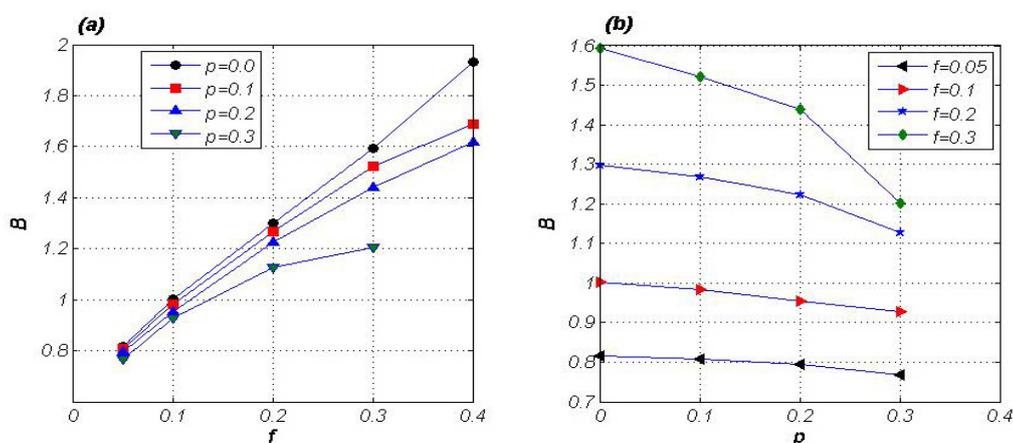


Figura 4.15 – Variação da frequência de oscilação  $B$  em função dos parâmetros  $f$  com  $p$  fixo, fig.(a) e  $p$  com  $f$  fixo, fig.(b). Ver legenda em cada figura.

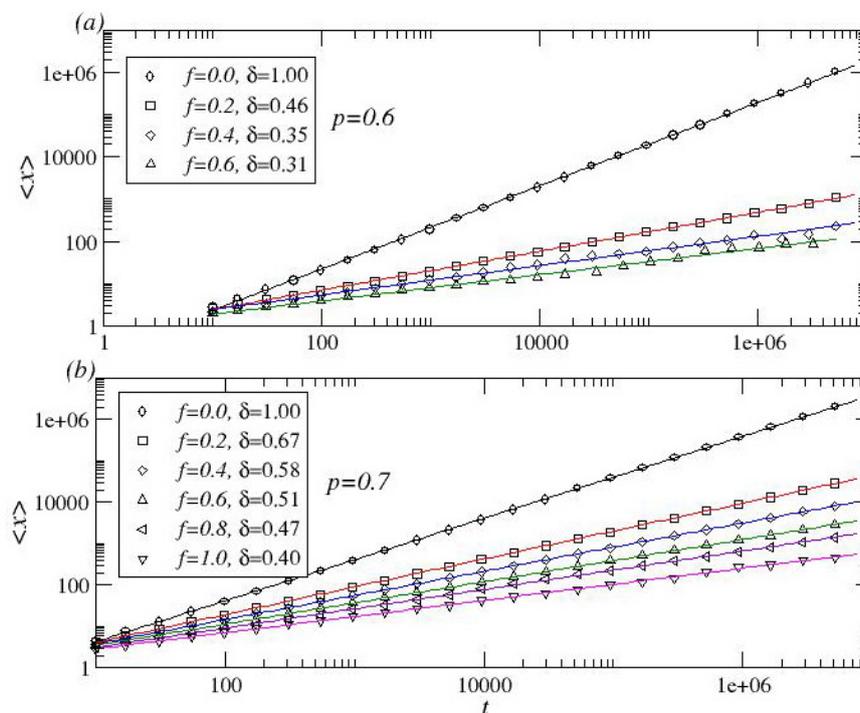
#### 4.1.7 Comportamento da posição média para $\alpha > 0 (p > 1/2)$

Como acabamos de mostrar, na região em que  $p < 1/2$  ocorrem oscilações log-periódicas na posição média. Em contraste com esse regime, para a região correspondente a  $p > 1/2$ , a posição média é uma função monotônica do tempo, que satisfaz a equação

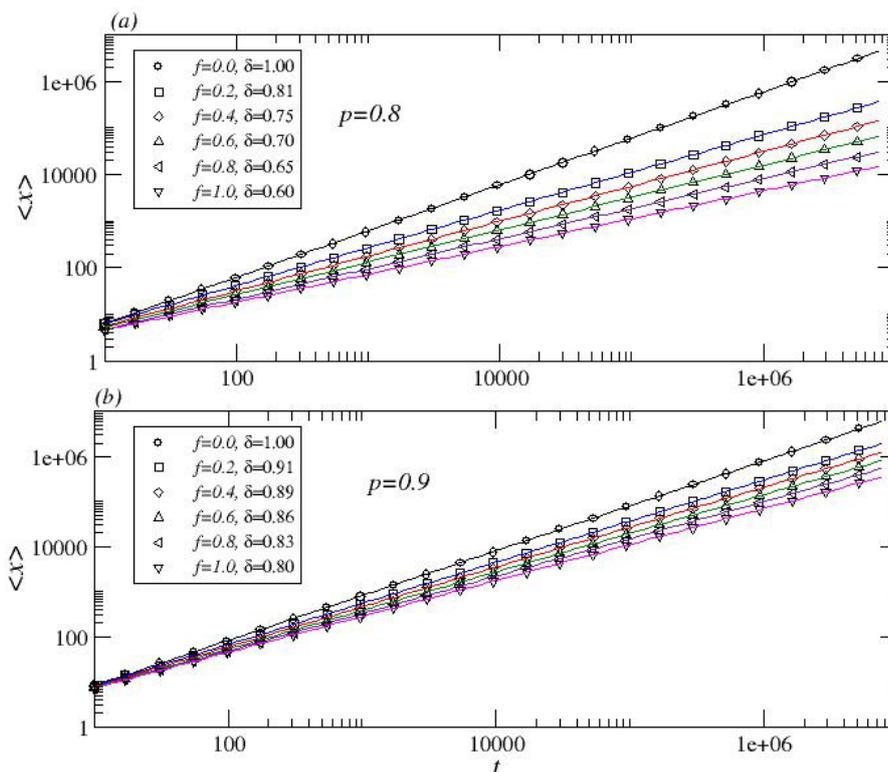
$$\langle x_t \rangle \sim t^\delta, \quad (4.10)$$

onde o expoente  $\delta$  depende de  $f$  e de  $p$ . Agora vamos analisar como ocorre essa variação em função dos parâmetros mencionados. Para valores de  $p$  próximos de  $1/2$  as flutuações na posição dificultam os cálculos desses expoentes (para  $p = 1/2$  a posição média é zero). Mas, para valores maiores de  $p = 0.6$ , é possível obter os expoentes via simulações. Percebemos que os expoentes para a memória parcial ( $f < 1$ ) situam-se em um intervalo

intermediário entre o caso sem memória ( $f=0$ ) e memória total ( $f=1$ ). Isso significa que quando não existem decisões a serem tomadas, o caminhante “vai mais longe”. Quando ele tem que tomar decisões, a caminhada é atrasada e esse atraso é maior de acordo com o número de opções de escolha, nesse caso, o tamanho da memória. Nas Figura 4.16(a,b) e Figura 4.17(a,b), exemplificamos esse fato. Na Figura 4.16(a) para o caso em que  $p=0.6$  (fixo) quando se tem  $f=0$ , a posição média escala com o tempo elevado a um expoente  $\delta=1$  (semelhante ao caso Markoviano, discutido na seção 3.1). À medida que o caminhante começa a lembrar uma pequena fração de memória antiga  $f$  o expoente começa a diminuir, essa diminuição torna-se mais acentuada à medida que o tamanho da memória é aumentado (ver legendas). Nessa mesma figura, em fig.(b), que corresponde a um  $p=0.7$  o expoente para uma mesma fração de memória antiga é maior em relação ao parâmetro anterior,  $p=0.6$ . Esse aumento torna-se cada vez mais acentuado, à medida que aumentamos o parâmetro  $p$ , como mostra a Figura 4.17(a,b) para o caso correspondente a  $p=0.8$  fig.(a) e  $p=0.9$  fig.(b). Isso significa que o aumento no fator de memória lembrada  $f$  atua de forma a atrasar a caminhada, enquanto que o aumento de  $p$  atua de forma contrária. No final da seção 4.2 apresentamos a expressão analítica para a dependência de  $\delta$  com os parâmetros  $f$  e  $p$ .



**Figura 4.16** – O expoente temporal da posição média (inclinação) é maior para menores valores de  $f$ , mantendo  $p$  fixo, figura (a) ou (b), ver legendas. Para um  $f$  fixo, o expoente é maior para maiores valores de  $p$ , figura (a) e (b). Para um  $p$  próximo de meio os expoentes são extremamente pequenos.



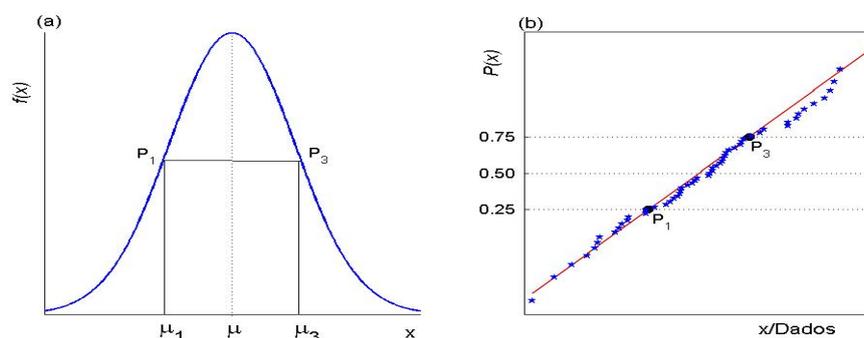
**Figura 4.17** – Para valores de  $p$  próximos a 1.0 (b), a variação dos expoentes temporais da posição média (inclinação) em função de  $f$  é bem pequena. Isso mostra que para grandes valores de  $p$ , o efeito de memória não altera significativamente a posição média.

## 4.1.8 Densidade de probabilidade da posição

Apesar de ainda não possuímos a solução analítica para a densidade de probabilidade da posição (ou a solução da equação de Fokker-Planck), podemos visualizar, através das simulações computacionais, a forma da distribuição. Assim como no modelo de Schutz, para o caso de memória total, a função densidade de probabilidade da posição obtida foi uma Gaussiana para quaisquer valores de  $p$  (com  $f=1$ ). No modelo com memória parcial ( $f < 1$ ), também obtivemos uma distribuição Gaussiana, mas não para quaisquer valores de  $f$  ou  $p$ .

Usamos aqui uma ferramenta estatística muito precisa para determinar se uma dada distribuição segue uma certa densidade de probabilidade. Este método é chamado de “probability plot”. O método consiste em selecionar dois pontos correspondentes ao primeiro ( $\mu_1$ ) e ao terceiro quartil ( $\mu_3$ ) da distribuição de probabilidade selecionada, esta pode ser Gaussiana, log-normal, gamma, ou qualquer tipo de distribuição. Relembrando,  $\mu_1$

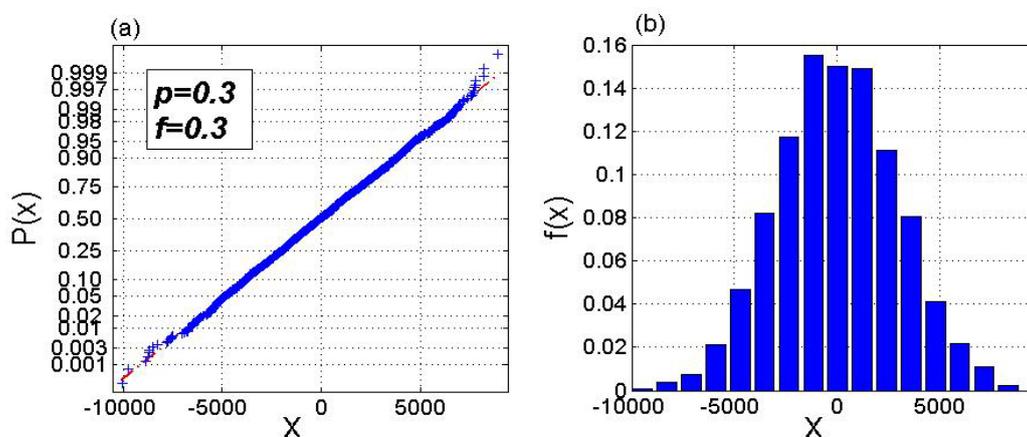
calcula-se da seguinte forma:  $0.25 = \int_{-\infty}^{\mu_1} P(x)dx$  e para  $\mu_3$ :  $0.75 = \int_{-\infty}^{\mu_3} P(x)dx$ , onde  $P(x)$  pode ser qualquer densidade de probabilidade, como já mencionado. Com esses dois pontos é construída uma reta. Em seguida, calcula-se o primeiro e o terceiro quartil do conjunto de dados a serem analisados, de acordo como a distribuição que foi escolhida para o teste. Da mesma forma, é feita outra reta com esse dois pontos. Se a correspondência for linear entre a reta da distribuição de probabilidade a ser testada e a reta do conjunto de dados, significa que a distribuição escolhida é uma forte candidata a ser a solução procurada (ver exemplo na Figura 4.18). Essa metodologia foi extraída da documentação do MATLAB versão 7.6. Outra metodologia pode ser encontrada em (MONTGOMERY; RUNGER, 2003). De uma forma geral, o método “probability plot” consiste em linearizar a distribuição de probabilidade. Também podemos fazer uma análise visual a partir do histograma da distribuição. Se o histograma se apresentar em forma de sino, é sinal que a distribuição pode ser Gaussiana. Outra forma de quantificar quando uma distribuição é Gaussiana consiste em calcular a curtose da distribuição, pois como exposto na seção 2.3.1, a curtose de uma Gaussiana vale exatamente três.



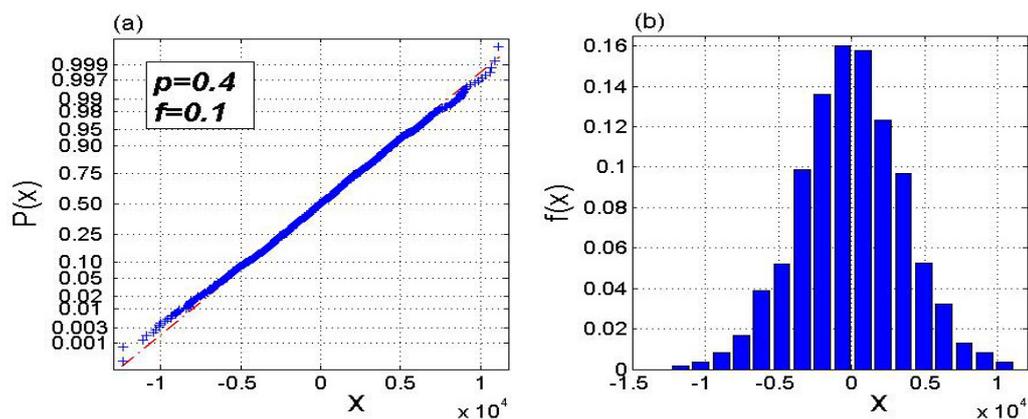
**Figura 4.18-** Exemplo do método Probability plot. Na fig.(a), os pontos  $P_1$  e  $P_3$  correspondem ao primeiro e ao terceiro quartil, respectivamente. Na fig.(b), quando construída uma reta com esse dois pontos, se a correspondência for linear entre os dados analisados e a distribuição escolhida para o teste, significa que o ajuste é apropriado. Neste exemplo, usamos uma distribuição Gaussiana (ou normal) e o método passa a ser chamado *normal probability plot*.

Vamos agora buscar as regiões correspondentes as distribuições Gaussianas e as possíveis regiões não Gaussianas. Para valores intermediários de  $f$  e de  $p$ , a distribuição é sempre Gaussiana, podemos comprovar esse fato, usando o método “*normal probability plot*” exibido na fig.(a) ou analisando o histograma, exposto na fig.(b), do conjunto de dados conforme mostrado na Figura 4.19(a,b) e Figura 4.20(a,b). Podemos constatar, nesse caso, que as distribuições são perfeitamente Gaussianas devido à correspondência linear

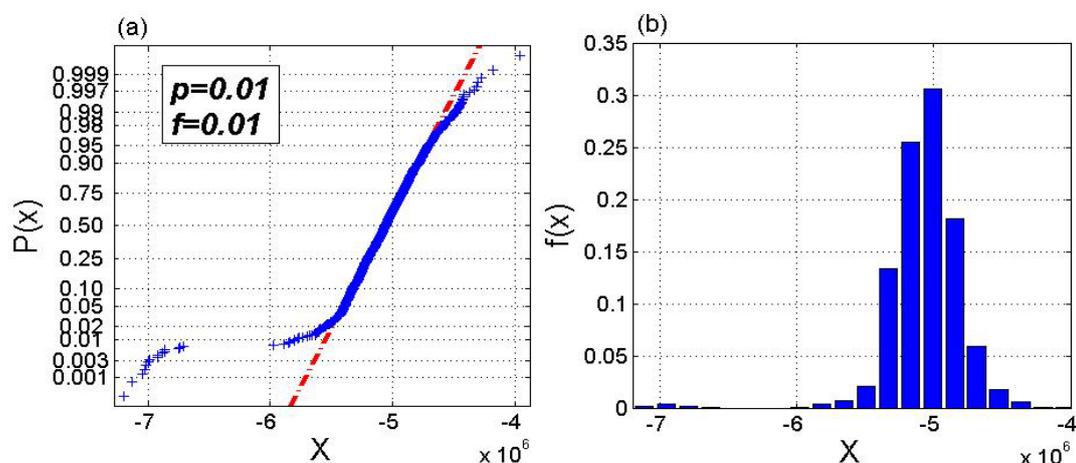
dos dados no *normal probability plot* na fig.(a) e também pelo histograma em forma de sino mostrado na fig.(b). Para valores extremos de  $p$ , principalmente (valores pequenos e grandes) a distribuição já não é mais Gaussiana e sua forma agora é assimétrica (ver Figura 4.21(a,b) e Figura 4.22(a,b)). A partir do cálculo da curtose, podemos quantificar quando a distribuição é Gaussiana ou não, pois já sabemos que a curtose para uma Gaussiana vale três ( $\alpha_4=3$ ). Também podemos usar o coeficiente de obliquidade para medir a assimetria de uma distribuição. O coeficiente de obliquidade sozinho nada revela sobre uma distribuição, apenas se ela é simétrica ou não. Junto com o coeficiente de curtose, o coeficiente de obliquidade torna-se um reforço a mais. Isso indica que onde o coeficiente de curtose vale três, a obliquidade deve ser zero. Na Figura 4.23(a) mostramos o coeficiente de curtose para toda a extensão de  $f$  e de  $p$ . A região planar (projetada no plano  $\alpha_4/3-1=0$ ) corresponde à distribuição Gaussiana. Já na Figura 4.23(b) mostramos apenas para pequenos valores desses parâmetros e podemos perceber que nessa região a distribuição Gaussiana também ocorre (interseção do plano  $\alpha_4/3-1$  com o plano *zero*), e tudo indica que apenas para valores discretos de  $f$ . Na Figura 4.23(c,d) mostramos o coeficiente de obliquidade. Na fig(c) a região delimitada para a distribuição simétrica concorda com a Figura 4.23(a) para o regime Gaussiano. Também a Figura 4.23(d) concorda com a Figura 4.23(b) para o regime simétrico e Gaussiano, respectivamente. Na região correspondente a  $p < 1/2$ , Figura 4.23(b,d), o parâmetro  $f$  determina a forma da distribuição entre Gaussiana ou não, enquanto que para  $p > 1/2$  o parâmetro  $f$  exerce pouca influência. A partir da obliquidade, Figura 4.23(c), podemos observar que para  $p > 0.75$  a distribuição possui uma obliquidade sempre negativa (na região de regime não Gaussiano), enquanto para baixos valores de  $f$  e  $p$ , temos uma alternância, Figura 4.23(d).



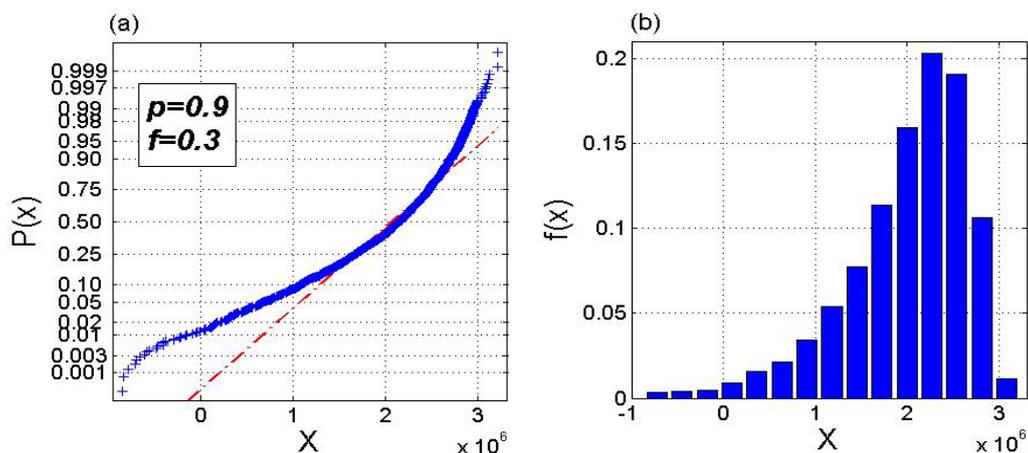
**Figura 4.19** – Para valores de  $f$  e de  $p$  intermediários, a PDF da posição é Gaussiana. Esta é evidenciada pelo “normal probability plot” devido à correspondência linear entre os dados e a reta em vermelho na fig.(a) e também pela forma de sino do histograma na fig.(b).



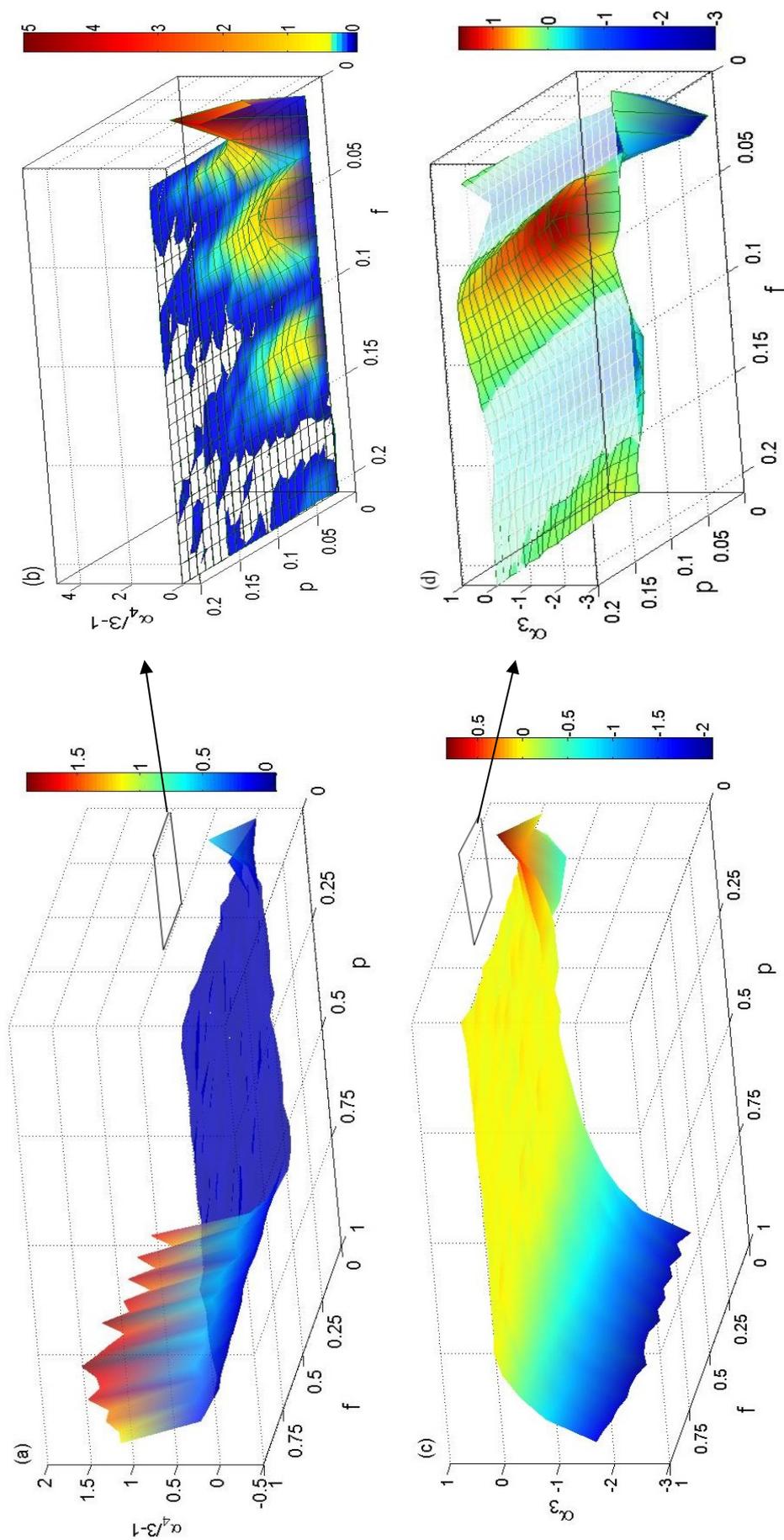
**Figura 4.20** – Mesmo para um  $f$  pequeno e um  $p$  intermediários (ver legendas em fig.(a)), a distribuição ainda é Gaussiana. A forma da distribuição é fortemente dependente do parâmetro  $p$ .



**Figura 4.21** – Para baixos valores de  $f$ , principalmente de  $p$ , a distribuição já não é mais Gaussiana. Na fig.(a) a correspondência não é mais linear entre os dados e a reta em vermelho tracejada. Pelo histograma na fig.(b) é possível perceber que a distribuição possui uma obliquidade positiva.



**Figura 4.22** – Na fig.(a), para grandes valores de  $p$  (ver legendas), a distribuição não é mais Gaussiana (devido a curvatura dos dados, em azul, com a reta tracejada em vermelho). Pelo histograma na fig.(b) percebe-se que a distribuição possui uma obliquidade negativa.



**Figura 4.23** – Na fig.(a) coeficiente de curtose translado para o plano zero. Esse plano corresponde ao regime Gaussiano. Na fig.(b) para pequenos valores de  $f$  e de  $p$  a dist. Gaussiana ocorre para valores discretos de  $f$ . Essa fig.(b) representa a ampliação do quadrado da fig.(a). Na fig.(c) coeficiente de obliquidade está de acordo com a figura (a) para o regime Gaussiano. A fig.(d) representa o coeficiente de obliquidade para baixos valores de  $f$  e de  $p$ , o que também concorda com a figura (b). Na fig (b) e (d) a interseção da superfície com o plano zero corresponde ao regime Gaussiano.

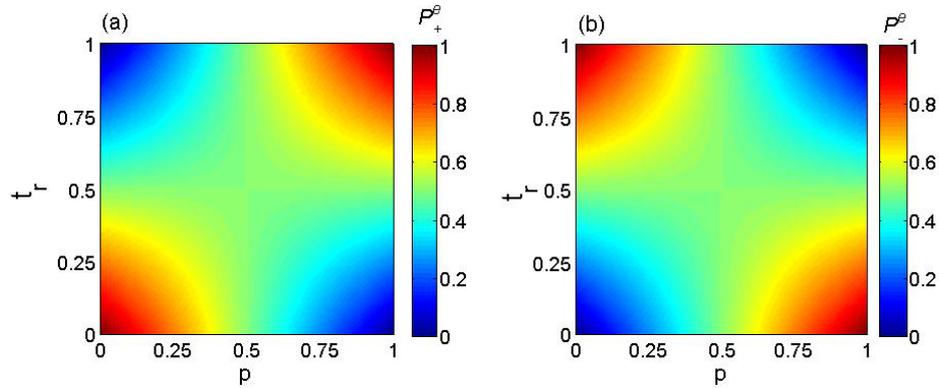
## 4.2 Estimativa Exata via Equações Transcendentais

Nesta seção vamos apresentar o tratamento analítico para o expoente de Hurst ( $H$ ) e a frequência de oscilação ( $B$ ), resolvido por Marco Antônio Alves da Silva (DA SILVA; WISWANATHAN; FERREIRA; CRESSONI, 2008) diferente do modelo usado por Schutz e Trimper (2004). Também vamos caracterizar completamente a posição média. Primeiramente vamos definir  $n_+(ft)$  como sendo o número de passos dados para direita e  $n_-(ft)$  o número de passos para esquerda no tempo  $ft$ , onde  $f$  é a fração de tempo considerado. Vamos impor a condição que  $n_+(ft) + n_-(ft) = ft$ . A probabilidade efetiva de tomar um passo para direita e para esquerda, respectivamente, no tempo  $t+1$  para  $t \gg 1$ , é

$$\begin{aligned} P_+^e &= \frac{n_+(ft)}{ft} p + \frac{n_-(ft)}{ft} (1-p), \\ P_-^e &= \frac{n_-(ft)}{ft} p + \frac{n_+(ft)}{ft} (1-p), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $p$  representa a probabilidade de repetir uma ação tomada no passado compreendido entre  $ft$ . Podemos também escrever o número de passos dados para esquerda em função dos números de passos dados para direita, da forma  $n_-(ft) = ft - n_+(ft)$ , como consequência disso, também podemos escrever  $P_-^e = 1 - P_+^e$ . Agora vamos definir uma taxa relativa de passos dados para direita no instante de tempo  $ft$  como  $t_r = n_+(ft)/ft$  e para os passos dados para esquerda como  $n_-(ft)/ft = 1 - t_r$ . Essa taxa carrega toda a informação da memória do processo. Vamos mostrar como são auto-consistentes as expressões (4.11). Considere o caso em que  $t_r = 1$ , isso significa que todos os passos até o momento passado  $ft$  foram tomados para direita, sendo  $p$  a probabilidade de repetir a ação nesse passado, temos que para  $p=0$  (tomar uma ação contrária) a probabilidade de ocorrência de um passo para direita é nula o que significa que o passo será dado para esquerda. Para  $p=1$ , significa que há 100% de certeza que o passo será dado para direita, pois todos os anteriores assim o foram. Quando  $t_r = 1/2$ , o movimento é equivalente ao *Random Walk*, independente de  $p$ . O mesmo é verdade para  $p=1/2$ , para quaisquer valores de  $t_r$ . Podemos agora visualizar a representação gráfica (Figura 4.24(a,b)) da probabilidade efetiva para direita e para esquerda (equações (4.11), com  $n_+(ft)/ft = t_r$  e  $n_-(ft)/ft = 1 - t_r$ ), respectivamente, projetada no plano formado pelos parâmetros da taxa relativa ( $t_r$ ) e também em função de

$p$ . A região dentro da figura cobre todas as possibilidades válidas para a probabilidade efetiva (direita e esquerda). Para valores maiores e constantes de  $t_r$  são priorizados os movimentos para direita, caso contrário, os movimentos para esquerda.



**Figura 4.24** – Projeção da probabilidade efetiva de passos efetuados para direita na fig.(a) e passos dados para esquerda na fig.(b), no plano  $t_r$  versus  $p$ . A barra de cor ao lado de cada figura representa o valor numérico da probabilidade efetiva.

A velocidade efetiva no tempo  $t+1$  é definida como  $v_{t+1}^e = P_+^e - P_-^e$ . Considerando a posição do caminhante, na fração de tempo  $ft$ , como sendo  $x(ft) = n_+(ft) - n_-(ft) + x_0$  (vamos assumir  $x_0 = 0$ ), podemos resolver para  $v_{t+1}^e$  da seguinte maneira

$$v_{t+1}^e = P_+^e - P_-^e = \left( \frac{n_+(ft)}{ft} p + \frac{n_-(ft)}{ft} (1-p) \right) - \left( \frac{n_-(ft)}{ft} p + \frac{n_+(ft)}{ft} (1-p) \right). \quad (4.12)$$

Agrupando os termos, chegamos a

$$v_{t+1}^e = P_+^e - P_-^e = \frac{(2p-1)}{ft} (n_+(ft) - n_-(ft)). \quad (4.13)$$

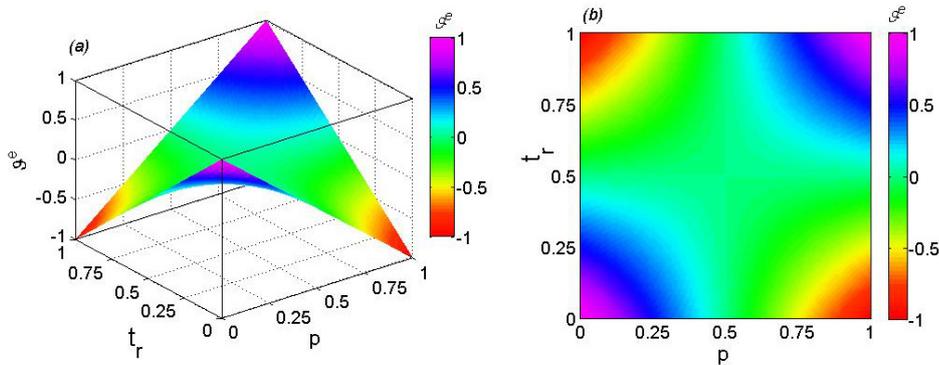
Que também pode ser escrita, em função de  $t_r = n_+(ft)/ft$ , como

$$v_{t+1}^e = 2P_+^e - 1 = (2p-1)(2t_r - 1). \quad (4.14)$$

Fazendo uma análise para a velocidade relativa, esta assume os seguintes valores, seguindo dos respectivos valores constantes de  $t_r$ .

$$v_{t+1}^e = \begin{cases} (2p-1), \Rightarrow t_r = 1, \text{ e quando } p > 1/2 \text{ (passos para direita),} \\ 0, \Rightarrow t_r = 1/2 \text{ ou } p = 1/2 \text{ (random walk),} \\ -(2p-1), \Rightarrow t_r = 0, \text{ e quando } p < 1/2 \text{ (passos para esquerda).} \end{cases} \quad (4.15)$$

Em (4.15) quando  $t_r = 0$ , temos uma reversão do movimento. Podemos também visualizar a representação gráfica (Figura 4.25(a)) dessa velocidade efetiva e sua projeção no plano (Figura 4.25(b)), em função da taxa relativa de passos dados para direita ( $t_r$ ) e em função de  $p$ , como na figura anterior. Essa velocidade efetiva situa-se ente  $[-1, 1]$ , devido à normalização da probabilidade. Esta figura representa o caso geral, ou seja, todos os valores possíveis. A combinação desses valores é que faz surgir uma rica variedade no comportamento da caminhada.



**Figura 4.25** – Velocidade efetiva em função dos parâmetros  $t_r$  e  $p$ . Na fig.(b) temos essa velocidade projetada no plano formado pelos parâmetros  $t_r$  e  $p$  (ver valores numéricos na barra de cor ao lado de cada figura).

Continuando com a solução do modelo proposto, levando-se em conta a perda de memória recente do sistema, vamos substituir  $x(ft) = n_+(ft) - n_-(ft)$  em (4.13), com isso chegamos a uma nova representação para a velocidade efetiva em função do deslocamento  $x$  no tempo passado  $ft$

$$v_{t+1}^e = \frac{\alpha}{ft} x(ft), \quad (4.16)$$

onde  $\alpha = 2p - 1$ , pertencente ao intervalo  $[-1, 1]$  devido a  $p \in [0, 1]$ . Mais adiante iremos usar  $x(ft) = x_{ft}$  apenas por simplificação de notação. Podemos observar que  $x(ft) = x(t - \tau)$ , tal que  $\tau = t(1 - f)$ . A posição do caminhante no tempo  $t+1$  agora pode ser escrita em função da velocidade efetiva, como:

$$x_{t+1} = x_t + v_{t+1}^e. \quad (4.17)$$

Considerando a expansão binomial do tipo  $(X+Y)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} X^n Y^{N-n}$ , onde

$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ , podemos expandir  $x_{t+1}$  dado pela equação (4.17), da forma

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (v_{t+1}^e)^n x_t^{N-n}. \quad (4.18)$$

Vamos considerar para um expoente  $m$  par  $(v_{t+1}^e)^m = I$  e para  $m$  ímpar  $(v_{t+1}^e)^m = v^e$ . Também será desmembrado o somatório em termos onde os expoentes são pares e ímpares. Com isso, a expansão total é a soma da expansão contendo os termos elevados a um expoente par mais a soma da expansão contendo os termos elevados a um expoente ímpar. Antes de fazermos isso, devemos analisar, em (4.18), também a ordem da expansão para os casos em que  $N$  é um número par e quando este é ímpar.

Caso 1: ( $N$  par)

Para os termos do somatório elevados a um expoente par, devemos fazer uma mudança de variável da forma  $n=2i$ , tal que  $i=\{0,1,2,\dots,N/2\}$ . Para os termos do somatório elevados a um expoente ímpar, vamos também fazer uma mudança de variável da seguinte maneira:  $n=2i+1$ , onde  $i=\{0,1,2,\dots,N/2-1\}$ . Dessa forma, ficamos com a expressão para os termos elevados aos expoentes pares e ímpares, respectivamente

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = \sum_{i=0}^{N/2} \binom{N}{2i} x_t^{N-2i}, \quad (4.19)$$

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = \sum_{i=0}^{N/2-1} \binom{N}{2i+1} v^e x_t^{N-(2i+1)}, \quad (4.20)$$

em (4.19) já consideramos  $v_{t+1}^e = I$ . Na equação (4.20), fizemos  $v_{t+1}^e = v^e$  devido esse termo estar elevado a um expoente ímpar. Utilizando  $\binom{N}{0} = I$  na expressão (4.19), vamos isolar o primeiro termo em  $i=0$ , dessa forma ficamos com a nova série em que o somatório começa a partir de  $i=1$ ,

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = x_t^N + \sum_{i=1}^{N/2} \binom{N}{2i} x_t^{N-2i}. \quad (4.21)$$

Na expressão (4.20) vamos usar a identidade  $\binom{N}{1} = N$  e procedendo de forma análoga a (4.19), ou seja, somamos apenas o primeiro termo correspondente a  $i=0$ , chegamos a

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = N v_{t+1}^e x_t^{N-1} + \sum_{i=1}^{N/2-1} \binom{N}{2i+1} v_{t+1}^e x_t^{N-(2i+1)}. \quad (4.22)$$

Caso 2: ( $N$  ímpar)

Procedendo de forma análoga ao caso para  $N$  par, só que agora há uma pequena diferença nos limites superiores dos índices de mudança de variáveis. Para os termos do somatório elevados a um número par, temos  $n=2 \cdot i$ , tal que  $i=\{0,1,2,\dots,(N-1)/2\}$ . Para os termos do somatório elevados a um expoente ímpar, fazemos  $n=2 \cdot i+1$ , onde  $i=\{0,1,2,\dots,(N-1)/2\}$ . Novamente, para o somatório total, devemos somar os termos da expansão elevados aos expoentes pares mais os termos elevados aos expoentes ímpares. Dessa forma, ficamos com a expressão para os termos elevados aos expoentes pares e ímpares, respectivamente

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = \sum_{i=0}^{(N-1)/2} \binom{N}{2i} x_t^{N-2i}, \quad (4.23)$$

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = \sum_{i=0}^{(N-1)/2} \binom{N}{2i+1} v_{t+1}^e x_t^{N-(2i+1)}. \quad (4.24)$$

Procedendo de forma análoga ao que foi feito para  $N$  par, vamos abrir o somatório em (4.23) e (4.24) para  $i=0$  e ficamos com uma nova expressão em que o somatório começa a partir de  $i=1$ , então (4.23) e (4.24) tornam-se, respectivamente

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = x_t^N + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \binom{N}{2i} x_t^{N-2i}, \quad (4.25)$$

$$x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = N v_{t+1}^e x_t^{N-1} + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \binom{N}{2i+1} v_{t+1}^e x_t^{N-(2i+1)}. \quad (4.26)$$

Vamos agora escrever de forma resumida uma expressão geral, que englobe os dois casos em que  $N$  tanto pode ser um número par quanto ímpar. Para isso, serão explicitados

somente os limites inferiores e superiores dos somatórios e o desmembramento que será feito na expressão (4.21), exibido em (4.27). Esse desmembramento, para os termos elevados a um expoente par, vai possibilitar que o limite superior do somatório seja escrito de forma similar ao limite superior do somatório dos termos elevados a um expoente ímpar

$$N(par) \begin{cases} \text{expoente par} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N/2} = \sum_{i=1}^{N/2-1} + \sum_{i=N/2}, \\ \text{expoente ímpar} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N/2-1}, \end{cases} \quad (4.27)$$

$$N(impar) \begin{cases} \text{expoente par} \Rightarrow \sum_{i=1}^{(N-1)/2}, \\ \text{expoente ímpar} \Rightarrow \sum_{i=1}^{(N-1)/2}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Em (4.27), para o expoente par, vamos usar a identidade binomial  $\binom{N/2}{N/2} = 1$ , também

$x_t^{N-(2N/2)} = 1$  e aplicar em (4.21). Para resumir melhor, vamos repetir os somatórios:

$$\begin{aligned} N(par) \\ x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = 1 + x_t^N + \sum_{i=1}^{N/2-1} \binom{N}{2i} x_t^{N-2i} (\text{expoentes pares}), \\ + N v^e x_t^{N-1} + \sum_{i=1}^{N/2-1} \binom{N}{2i+1} v^e x_t^{N-(2i+1)} (\text{expoentes ímpares}); \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} N(impar) \\ x_{t+1}^N = (x_t + v_{t+1}^e)^N = x_t^N + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \binom{N}{2i} x_t^{N-2i} (\text{expoentes pares}), \\ + N v^e x_t^{N-1} + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \binom{N}{2i+1} v^e x_t^{N-(2i+1)} (\text{expoentes ímpares}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Comparando a expressão (4.29) para  $N$  par com a expressão (4.30) para  $N$  ímpar, percebemos que existem apenas duas diferenças, são elas: o termo 1 que aparece em (4.29) e não em (4.30); a segunda diferença ocorre nos limites superiores dos somatórios em (4.29) que são ligeiramente diferentes dos limites superiores em (4.30). Podemos condensar essas duas expressões em apenas uma, definindo uma variável  $\Delta = (1 + (-1)^N) / 2$ . Veja que  $\Delta=1$  para  $N$  par e  $\Delta=0$  quando  $N$  é ímpar. E para os limites superiores dos somatórios fazemos  $S(N) = (N - \Delta - 1) / 2$ . Quando  $\Delta=1$  para  $N$  par, implica que  $S(N) = N / 2 - 1$  (veja a

expressão (4.29)). E para  $N$  ímpar temos que  $\Delta=0$  e  $S(N) = (N-1)/2$ , exatamente igual ao da expressão (4.30). Portanto, a combinação das expressões para  $N$  par e ímpar (4.29) e (4.30) respectivamente, se resume a

$$x_{t+1}^N = x_t^N + \Delta + N v^e x_t^{N-1} + \sum_{i=1}^{S(N)} \left[ \binom{N}{2i} x_t^{N-2i} + \binom{N}{2i+1} v^e x_t^{N-(2i+1)} \right]. \quad (4.31)$$

O somatório em (4.31) desaparece para  $S(N) \leq 0$ , ou seja, para  $N \leq 2$ . Tomando a média da expressão (4.31), ficamos com

$$\langle x_{t+1}^N \rangle = \langle x_t^N \rangle + \Delta + N \langle v^e x_t^{N-1} \rangle + \sum_{i=1}^{S(N)} \left[ \binom{N}{2i} \langle x_t^{N-2i} \rangle + \binom{N}{2i+1} \langle v^e x_t^{N-(2i+1)} \rangle \right]. \quad (4.32)$$

No limite assintótico, quando  $t \rightarrow \infty$ , vamos assumir que

$$\frac{d}{dt} \langle x_t^N \rangle = \frac{\langle x_{t+1}^N \rangle - \langle x_t^N \rangle}{\Delta t} \quad (\Delta t = 1), \quad (4.33)$$

fazendo aqui analogia com a derivada de uma função que representa o limite de

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4.34)$$

Assim, ficamos com a forma diferencial para (4.32)

$$\frac{d}{dt} \langle x_t^N \rangle = \Delta + N \langle v^e x_t^{N-1} \rangle + \sum_{i=1}^{S(N)} \left[ \binom{N}{2i} \langle x_t^{N-2i} \rangle + \binom{N}{2i+1} \langle v^e x_t^{N-(2i+1)} \rangle \right]. \quad (4.35)$$

Substituindo o valor da velocidade efetiva  $v^e = \frac{\alpha}{ft} x_{ft}$  (de acordo com a equação (4.16)) em

(4.35), temos a solução geral para a derivada da posição  $N$ -ésima média

$$\frac{d}{dt} \langle x_t^N \rangle = \Delta + N \frac{\alpha}{ft} \langle x_{ft} x_t^{N-1} \rangle + \sum_{i=1}^{S(N)} \left[ \binom{N}{2i} \langle x_t^{N-2i} \rangle + \binom{N}{2i+1} \frac{\alpha}{ft} \langle x_{ft} x_t^{N-(2i+1)} \rangle \right]. \quad (4.36)$$

A partir de (4.36) vamos exibir apenas a forma diferencial para os dois primeiros momentos ( $N=1$  e  $N=2$ ), que são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \langle x_t \rangle = \frac{\alpha}{ft} \langle x_{ft} \rangle, \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dt} \langle x_t^2 \rangle = 1 + 2 \frac{\alpha}{ft} \langle x_{ft} x_t \rangle. \quad (4.38)$$

Essas duas equações foram resolvidas analiticamente por Schutz e Trimper (2004) para  $f=1$ , discutidas na seção 4.1.2. Para  $f < 1$ , Kenkre (KENKRE, 2007) obteve também a solução analítica para o primeiro momento.

Com a expressão diferencial para o primeiro momento (4.37), vamos assumir que a posição média possa ser escrita em forma de expansão, do tipo

$$\langle x_t \rangle = \sum_i A_i t^{\delta_i} \cos(B_i \ln(t) + C_i), \quad (4.39)$$

(pode-se chegar ao mesmo resultado, se utilizado a função seno) (DA SILVA; WISWANATHAN; FERREIRA; CRESSONI, 2008). Temos, então, para sua primeira derivada:

$$\frac{d}{dt} \langle x_t \rangle = \sum_i A_i t^{\delta_i - 1} [\delta_i \cos(B_i \ln(t) + C_i) - B_i \sin(B_i \ln(t) + C_i)]. \quad (4.40)$$

Para  $\langle x_{ft} \rangle$  basta substituímos  $t$  por  $ft$  em (4.39), e assim ficamos com a expansão para a posição que representa o deslocamento no tempo passado  $ft$ , que é dada por

$$\langle x_{ft} \rangle = \sum_i A_i f^{\delta_i} t^{\delta_i} \cos(B_i \ln(t) + B_i \ln(f) + C_i). \quad (4.41)$$

Usando a identidade para a função cosseno:  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ , onde podemos fazer uma mudança de variável da forma:  $\alpha = B_i \ln(t) + C_i$  e  $\beta = B_i \ln(f)$ , então substituindo as identidades, a equação (4.41) torna-se

$$\langle x_{ft} \rangle = \sum_i A_i f^{\delta_i} t^{\delta_i} [\cos(B_i \ln(t) + C_i) \cos(B_i \ln(f)) - \sin(B_i \ln(t) + C_i) \sin(B_i \ln(f))]. \quad (4.42)$$

Substituindo (4.40) e (4.42) em (4.37), chegamos à expressão final

$$\begin{aligned} & \sum_i A_i t^{\delta_i - 1} [\delta_i \cos(B_i \ln(t) + C_i) - B_i \sin(B_i \ln(t) + C_i)] = \\ & \sum_i A_i \alpha f^{\delta_i - 1} t^{\delta_i - 1} [\cos(B_i \ln(t) + C_i) \cos(B_i \ln(f)) - \sin(B_i \ln(t) + C_i) \sin(B_i \ln(f))]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Igualando os termos que multiplicam  $\sin(B_i \ln(t) + C_i)$  e  $\cos(B_i \ln(t) + C_i)$  do lado esquerdo e direito da igualdade em (4.43) (superior e inferior) e considerando apenas o termo

dominante na expansão, chegamos a um sistema de equações transcendentais para o qual iremos resolver para as variáveis frequência de oscilação  $B$  e para o expoente  $\delta$ ,

$$\delta = \alpha f^{\delta-1} \cos(B \ln(f)), \quad (4.44)$$

$$B = \alpha f^{\delta-1} \sin(B \ln(f)). \quad (4.45)$$

Matematicamente  $\delta$  e  $B$  podem assumir quaisquer valores, até mesmo negativos, mas para nossa solução, só nos interessa os valores positivos para  $B$  (pois este representa uma frequência). A extensão válida de cada variável é discutida nas seções seguintes. Vamos agora resolver o sistema de equações transcendentais. Para a solução, vamos dividir (4.44) por (4.45), então isolamos o valor de  $\delta$  e em seguida substituímos em (4.45). Dessa forma, chegamos à equação para a frequência de oscilação

$$B = \alpha f^{\frac{B}{\ln(f)}} \sin(B \ln(f)). \quad (4.46)$$

Para  $\delta$ , primeiramente vamos isolar a função cosseno em (4.44) e seno em (4.45) e em seguida, elevamos ao quadrado ambas as expressões e usamos a identidade trigonométrica  $\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1$ . Com isso ficamos com

$$\delta^2 + B^2 = (\alpha f^{\delta-1})^2. \quad (4.47)$$

Isolando  $B$  em (4.47) temos

$$B = \sqrt{(\alpha f^{\delta-1})^2 - \delta^2}, \quad (4.48)$$

substituindo (4.48) em (4.44), chegamos ao resultado final para o expoente  $\delta$

$$\delta = \alpha f^{\delta-1} \cos\left(\ln(f) \sqrt{(\alpha f^{\delta-1})^2 - \delta^2}\right). \quad (4.49)$$

### 4.2.1 Expoente de Hurst para $\alpha > 0 (p > 1/2)$

Podemos observar que para  $B=0$  (ver equação (4.48)) substituindo em (4.49) esta equação torna-se  $\delta = \alpha f^{\delta-1}$ . Para a obtenção do expoente de Hurst, estamos interessados apenas nos valores positivos de  $\delta$  o que implica que devemos ter  $\alpha > 0$ , correspondendo a  $p > 1/2$  sempre que  $B=0$ . Concluimos que não pode haver oscilação log-periódica para

$p > 1/2$ . Para os valores de  $1/2 \leq \delta < 1$ , fazemos  $H = \delta$ . O conjunto de soluções para o expoente de Hurst e para a frequência de oscilação log-periódica correspondente as regiões em que  $\alpha > 0 (p > 1/2, \alpha = 2p - 1)$  e  $0 < f \leq 1$ , é dado por

$$\begin{aligned} H &= \alpha f^{H-1}, \\ B &= 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

O expoente de Hurst nesta região restaura a invariância contínua de escala.

## 4.2.2 Expoente de Hurst e frequência de oscilação para $\alpha < 0 (p < 1/2)$

Para  $\alpha < 0 (p < 1/2, \alpha = 2p - 1)$  a solução para  $B$  e  $\delta$  corresponde às equações (4.46) e (4.49). O expoente de Hurst  $H$  (relativo à posição quadrática média) é obtido a partir da expressão (4.49) assumindo a solução  $H = \delta$  quando  $1/2 \leq \delta < 1$ , sempre. Esta equação não pode ser obtida de forma direta, apenas via métodos numéricos. O conjunto de soluções válido no intervalo  $0 < f \leq 1$  é escrito como

$$\begin{aligned} H &= \alpha f^{H-1} \cos\left(\ln(f) \sqrt{(\alpha f^{H-1})^2 - H^2}\right), \\ B &= \alpha f^{\frac{B}{\lg[B \ln(f)]} - 1} \sin(B \ln(f)). \end{aligned} \quad (4.51)$$

## 4.2.3 Caracterização da posição média

Para o caso geral, a posição média é completamente caracterizada por uma equação tipo lei de potência, com expoente  $\delta$ , seguida de uma correção de escala log-periódica, como definida a seguir

$$\begin{aligned} \langle x_t \rangle &\sim t^\delta \cos(B \log(t)), \\ \delta &= \alpha f^{\delta-1} \cos\left(\ln(f) \sqrt{(\alpha f^{\delta-1})^2 - \delta^2}\right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde  $B$  é obtido através da equação (4.46). Na região de log-periodicidade ( $B \neq 0$ ), que corresponde a região para  $\alpha < 0 (p < 1/2, \alpha = 2p - 1)$ , o expoente  $\delta$  em (4.52) pode assumir

valores positivos e negativos, a depender do sinal da função cosseno. Um caso especial ocorre quando  $\delta=0$  (as amplitudes são constantes no tempo), que corresponde a

$$p = \frac{f}{\ln(f)} \left( \frac{2n+1}{4} \right) \pi + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.53)$$

$n=0$  em (4.53) é a única solução válida (ver Figura 4.30, linha preta). Nesse caso, a posição média é completamente estabilizada, sem convergência nem divergência para quaisquer valores de  $t$ . Para o caso em que  $B=0$  (comparando também com a equação (4.48)) as expressões em (4.52) são simplesmente escritas

$$\begin{aligned} \langle x_t \rangle &\sim t^\delta \\ \delta &= \alpha f^{\delta-1}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

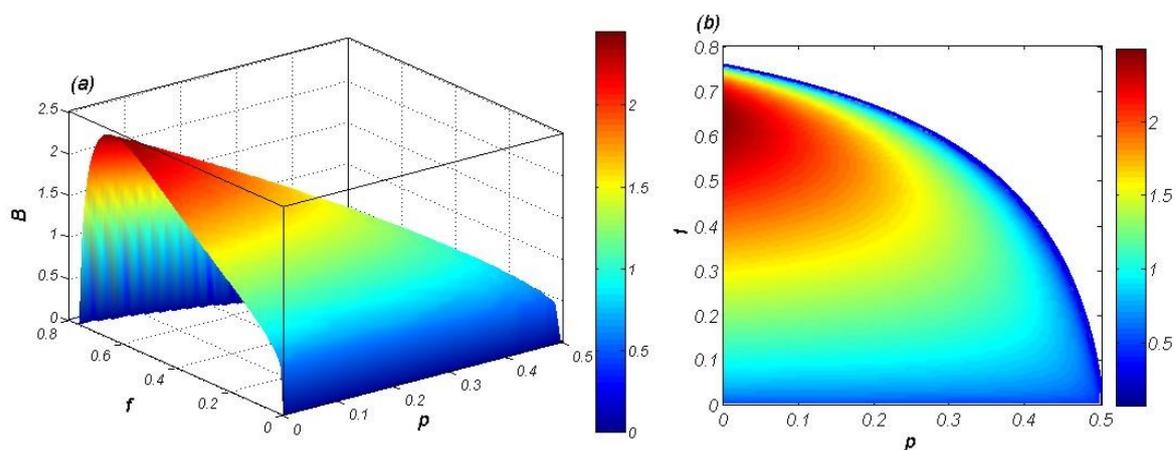
Para  $\alpha>0$  ( $p>1/2$ ,  $\alpha=2p-1$ ) o expoente em (4.54) é sempre positivo, “regime de escape”, a posição média diverge no limite assintótico de  $t$ . Já para  $\alpha<0$  ( $p<1/2$ ), o expoente é sempre negativo, indicando que a posição média vai para zero para tempos suficientemente grandes. Concluimos que no regime em que  $B=0$ , a posição média é uma função sempre monotônica em relação ao tempo dada pela expressão (4.54). Quando  $f=1$ , recaímos no resultado obtido por Schutz para o expoente do tempo da posição média, ver expressão (4.2). Para  $f<1$ , devemos resolver a equação (4.54) numericamente. Esta equação só é válida para a região de não log-periodicidade. Para  $\alpha=0$  ( $p=1/2$ ) o expoente é zero e a posição média também. Um fato importante em todos os casos citados, é que o parâmetro de memória  $f$  não influencia o sinal de  $\delta$ , apenas o atenua.

### 4.3 Diagrama de Fase para log-periodicidade

Vamos apresentar a solução gráfica da equação  $B = \alpha f^{\frac{B}{\lg[B \ln(f)]} - 1} \sin(B \ln(f))$  juntamente com sua projeção no plano  $B=0$ . Essa projeção deixa bem delimitada a região onde existe log periodicidade e onde não, em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ . Resolver uma equação transcendental não é tarefa difícil, basta utilizar um bom método numérico que o resultado é imediato. O problema torna-se mais difícil quando se têm, nessas equações transcendentais, funções trigonométricas. O especial dessas funções trigonométricas é que elas são oscilantes e a depender do intervalo de análise, essas oscilações podem fazer com

que o sistema possua varias raízes que são soluções do problema. Então, como decidir qual a raiz é a solução procurada? Para responder esta pergunta, comparamos os resultados analíticos com os resultados numéricos via simulações computacionais. Essa comparação entre os resultados será mostrada na seção 4.6.

Na Figura 4.26(a) temos a representação gráfica da equação analítica para a frequência de oscilação log-periódica  $B$  (resolvida numericamente), em função dos parâmetros  $f$  (fração de memória antiga) e  $p$  (probabilidade de aceitar uma decisão tomada no passado). Como já exposto durante a solução, log-periodicidade só pode existir para  $p < 1/2$ . Na região em que  $p > 1/2$ , tem-se  $B=0$  e a posição média é uma função monotônica do tempo, esse assunto será discutido na seção 4.5.2. Na região de log-periodicidade ( $p < 1/2$ ), o parâmetro  $f$  também delimita uma sub-região em que  $B=0$  (região em branco, nessa região a posição média segue uma lei de potência), Figura 4.26(b). Nesta mesma figura, podemos ver que para pequenos valores de  $p$ , o  $f$  encontra-se compreendido em uma vasta extensão de valores possíveis onde  $B \neq 0$ . Mas, à medida que aumentamos  $p$ , os valores de  $f$  começam a diminuir e o efeito de memória passa a ser irrelevante. O valor máximo dessa frequência ocorre para  $p=0$ , para um  $f \sim 0.65$ . Na seção 4.6.2 fazemos um comparativo entre os resultados analíticos e numéricos (mostrados na seção 4.1.6) para a frequência de oscilação log-periódica.



**Figura 4.26** – Frequência de oscilação  $B$  em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ . Na Figura (b) tem-se a projeção no plano  $B=0$ , para melhor visualização da figura (a). Na seção 4.6.2 fazemos um comparativo entre os resultados analíticos e numéricos para alguns valores de  $f$  e de  $p$ .

Vamos agora obter a linha divisória da região de log-periodicidade ( $B \neq 0$ ) e não log-periodicidade ( $B=0$ ). Devemos tomar o limite da expressão (4.46) fazendo  $B \rightarrow 0$ . Para isso, vamos dividi-la primeiramente por  $\sin(B \ln(f))$ , então ficamos com

$$\frac{B}{\sin(B \ln(f))} = \alpha f^{\frac{B}{\operatorname{tg}[B \ln(f)]} - 1}. \quad (4.55)$$

Para o lado esquerdo de (4.55) usando a regra de L'Hôpital, que é válida quando se tem  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ . Essa regra diz que quando temos as condições indeterminadas citadas anteriormente, o limite de uma fração pode ser tomado como o limite da derivada do termo no numerador e a derivada do termo no denominador. Aplicando essa regra temos

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{B}{\sin(B \ln(f))} = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dB}(B)}{\frac{d}{dB}(\sin(B \ln(f)))} = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(f) \cos(B)} = \frac{1}{\ln(f)}. \quad (4.56)$$

Para o lado direito de (4.55), vamos tomar o logaritmo natural e tomar o limite desse valor

$$\lim_{B \rightarrow 0} \ln \left( \alpha f^{\frac{B}{\operatorname{tg}[B \ln(f)]} - 1} \right) = \lim_{B \rightarrow 0} \left( \ln(\alpha) + \left( \frac{B}{\operatorname{tg}[B \ln(f)]} - 1 \right) \ln(f) \right). \quad (4.57)$$

Usando novamente a regra de L'Hôpital do lado direito da equação (4.57), apenas na variável  $B$ , ficamos com

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{B}{\operatorname{tg}[B \ln(f)]} = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dB}(B)}{\frac{d}{dB}(\tan(B \ln(f)))} = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2(B \ln(f)) \ln(f)} = \frac{1}{\ln(f)}. \quad (4.58)$$

Então, vamos agora substituir o resultado do limite da equação (4.58) em (4.57)

$$\lim_{B \rightarrow 0} \ln \left( \alpha f^{\frac{B}{\operatorname{tg}[B \ln(f)]} - 1} \right) = \left( \ln(\alpha) + \left( \frac{1}{\ln(f)} - 1 \right) \ln(f) \right) = \ln \left( \frac{\alpha}{f} \right) + 1. \quad (4.59)$$

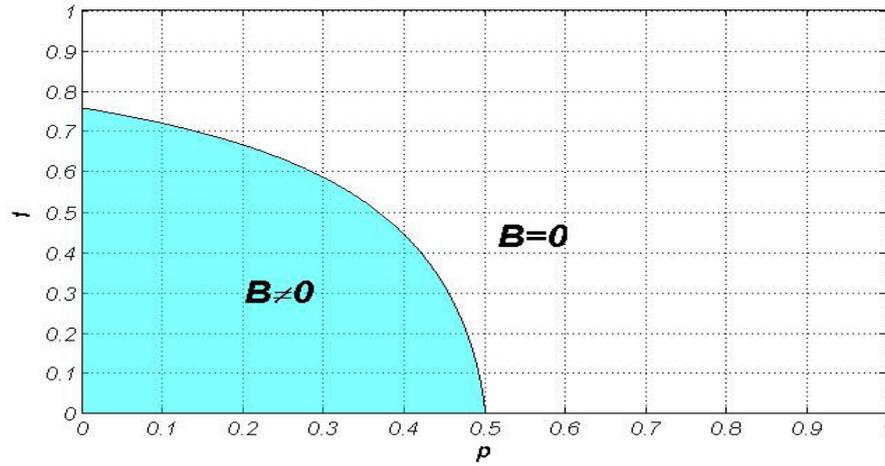
Elevando a exponencial a igualdade em (4.59) para retirarmos o logaritmo natural, obtemos

$$e^{\ln \left( \frac{\alpha}{f} \right) + 1} = \frac{\alpha}{f} e^1. \quad (4.60)$$

Igualando o limite de (4.56) com (4.60) chegamos ao resultado final para a linha crítica que divide a região de log-periodicidade  $B \neq 0$  e não log-periodicidade  $B = 0$ ,

$$\frac{1}{\ln(f_c)} = \frac{\alpha_c}{f_c} e^1. \quad (4.61)$$

A linha formada por  $(\alpha_c, f_c)$  separa as duas fases, esta também é uma equação transcendental que não pode ser resolvida analiticamente. Então, vamos resolver (4.61) numericamente e obtermos o diagrama de fase log-periodicidade (região em cor) e não log-periodicidade (região em branco), em função dos parâmetros  $f$  e  $p$  (Figura 4.27).



**Figura 4.27** – Diagrama de fase para as regiões onde há oscilações log-periódicas  $B \neq 0$  (em azul) e não log-periódicas  $B = 0$  (região em branco). Para  $p_c = 0$ , temos  $f_c = 0.7569$ .

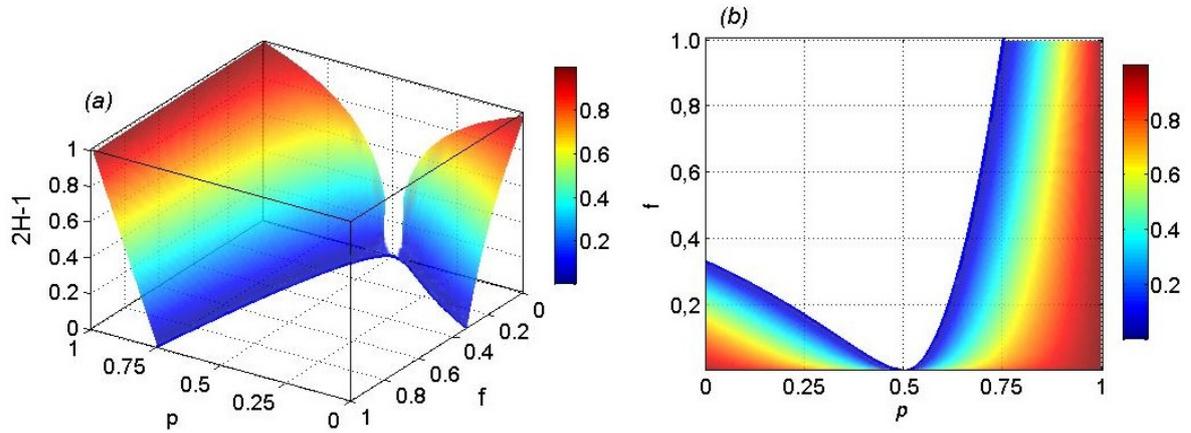
## 4.4 Diagrama de Fase para super difusão e persistência

A expressão (4.49) também pode ser escrita de outra forma, usando a identidade trigonométrica  $1 / \cos^2(\Theta) = \tan^2(\Theta) + 1$ , pode-se chegar à:

$$H = \frac{\sqrt{(\alpha f^{H-1})^2 - H^2}}{\tan \left[ \ln(f) \sqrt{(\alpha f^{H-1})^2 - H^2} \right]}, \quad (4.62)$$

onde  $1/2 \leq H < 1$ ,  $0 < f \leq 1$  e  $-1 \leq \alpha < 0$  ( $0 \leq p < 1/2$ ,  $\alpha = 2p - 1$ ). Podemos agora visualizar a representação gráfica da equação (4.62), onde fizemos um translado da forma  $2H-1$  no parâmetro de ordem  $H$ , para estender a região  $[1/2, 1]$  para  $[0, 1]$ . Portanto, onde  $2H-1$  vale zero, corresponde à região de não persistência ( $H=1/2$ ), caso contrário, temos a região de persistência, caracterizada pelo expoente de Hurst maior que meio. A equação

(4.62), válida na região onde  $p < 1/2$ , foi superposta com a equação (4.50) válida para  $p > 1/2$ , com isso, chegamos ao diagrama completo para  $2H-1$  em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ , ambos variando entre zero e um (Figura 4.28). Na seção 4.6.1 comparamos os resultados analíticos com os numéricos, que foram mostrados na seção 4.1.4.



**Figura 4.28** – Expoente de Hurst em função de  $f$  e de  $p$ . Figura (b) representa a projeção da figura (a) no plano  $2H-1=0$ . A barra de cor ao lado de cada figura representa o valor numérico de  $2H-1$ . Comparamos os resultados analíticos e numéricos na seção 4.6.1.

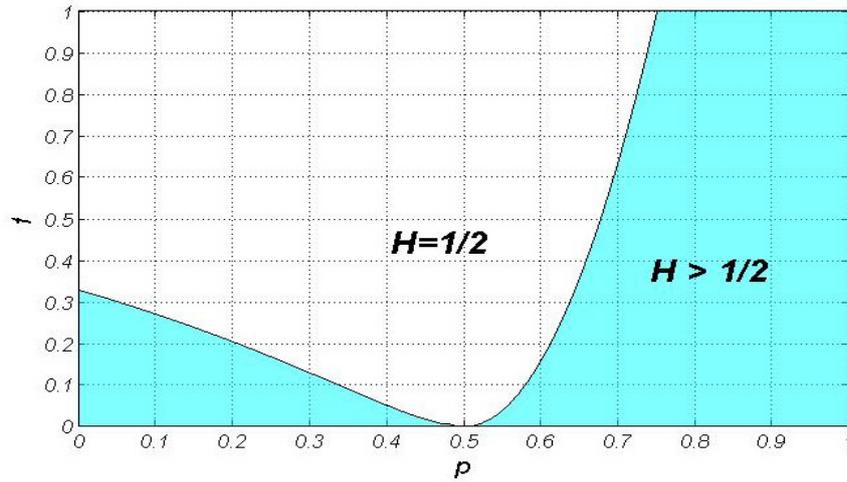
Para determinarmos a linha que separa a região de persistência e não persistência, levando em consideração a extensão válida para os parâmetros  $0 < f \leq 1$  e  $0 \leq p < 1/2$ , devemos fazer  $H=1/2$  na expressão (4.62) e com isso obtemos a linha separatória entre as duas fases

$$2\sqrt{\frac{\alpha_c^2}{f_c} - \frac{1}{4}} = \tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{\frac{\alpha_c^2}{f_c} - \frac{1}{4}} \right]. \quad (4.63)$$

Também obtemos a linha que separa a região de persistência e não persistência para  $p > 1/2$ , basta fazermos  $H=1/2$  em (4.50), e com isso chegamos ao resultado

$$1/2 = \alpha_c f_c^{-1/2}. \quad (4.64)$$

Resolvendo (4.63) e (4.64) numericamente e juntando todas as extensões válidas dos parâmetros, temos o completo diagrama de fase em função de  $f$  e  $\alpha = 2p-1$ . Na Figura 4.29, a região em azul representa a fase de persistência e a região em branco representa a fase de não persistência onde o efeito de memória ou correlação pode ser desprezado.



**Figura 4.29** – Diagrama de fase para as regiões onde há persistência ( $H > 1/2$ , em azul) e não persistência ( $H = 1/2$ , região em branco). Para  $p_c = 0.0$  corresponde a um  $f_c = 0.3284$ .

## 4.5 Comportamento da posição média

Nesta seção vamos analisar graficamente como se comporta a posição média na região de log-periodicidade e não log-periodicidade. Na região de log-periodicidade, vamos analisar com as amplitudes variam com o tempo. Kenkre (2007) obteve a solução analítica para o primeiro momento válida para  $0 < f \leq 1$  e  $0 \leq p \leq 1$  ( $-1 \leq \alpha \leq 1$ )

$$\langle x_t \rangle = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \left( \frac{\alpha}{f} (\ln(t/t_0) + n \cdot \ln(f)) \right)^n \Theta \left( t - t_0 (1/f)^n \right) \right],$$

$$\Theta(X) = \begin{cases} 1 \Rightarrow X > 0 \\ 1/2 \Rightarrow X = 0 \\ 0 \Rightarrow X < 0, \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\alpha = 2p - 1,$$

onde  $\Theta$  é a função *step* definida abaixo da equação e  $x_0$  representa a constante multiplicativa que depende exclusivamente de  $f$  e de  $p$  (essa dependência não é conhecida). Para  $\alpha < 0$ , essa expressão reproduz as oscilações log-periódicas e para  $\alpha > 0$  a equação também reproduz o comportamento monotônico da posição média em relação ao tempo. Quando  $f = 1$  a expressão (4.65) se reduz a

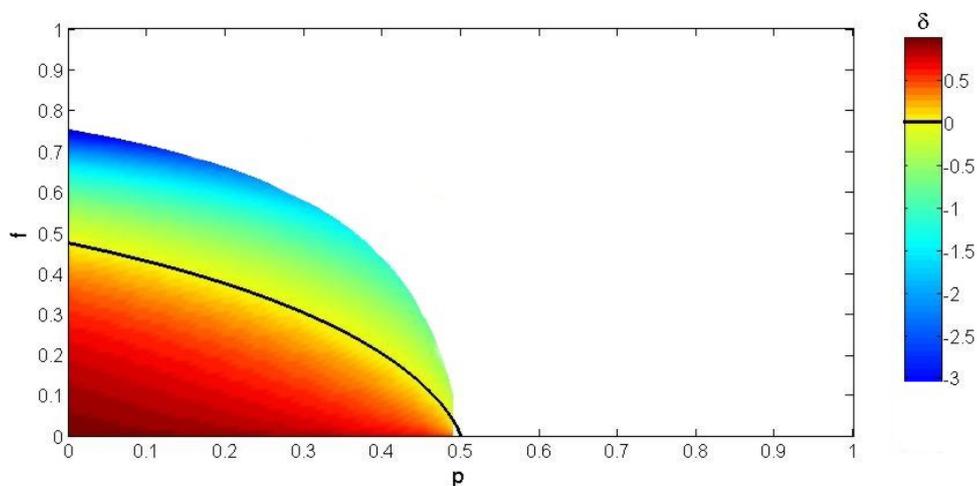
$$\langle x_t \rangle = x_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^\alpha, \quad (4.66)$$

idêntica a expressão obtida por Schutz e Trimper (2004), a menos de uma constante multiplicativa. Para chegarmos à expressão (4.66) usamos a função exponencial em forma de expansão em séries de potências.

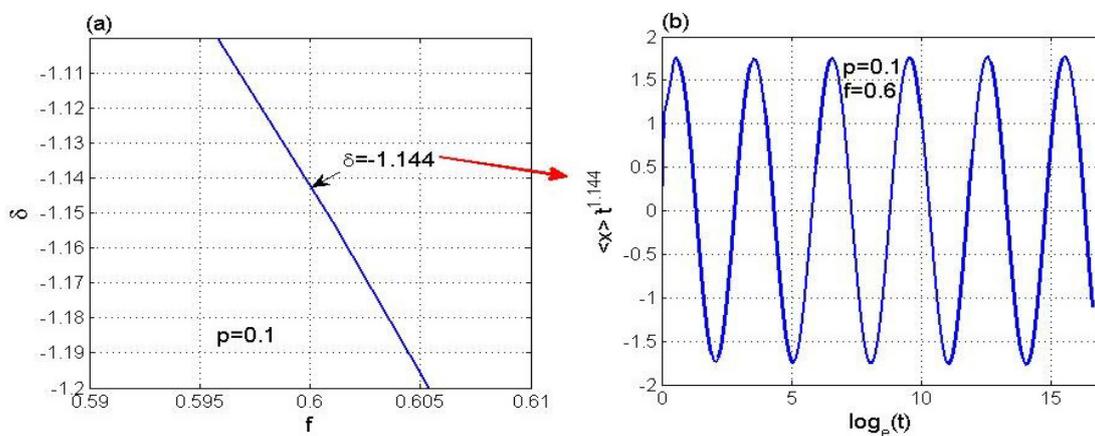
### 4.5.1 Amplitude da posição média para $\alpha < 0$ ( $p < 1/2$ ) correspondente a região de log-periodicidade

Na região correspondente a  $p < 1/2$  foi mostrado que, para alguns valores de  $f$ , a posição média oscila de forma log-periódica com frequência  $B$ . A amplitude dessa posição escala com tempo elevado ao expoente  $\delta$ , representado pela equação (4.49), que agora pode também assumir valores negativos ( $-2.92 \leq \delta \leq 1$ ). Na representação gráfica (Figura 4.30) projetada no plano  $f$  vs  $p$ , podemos observar a existência de regimes em que a amplitude cresce proporcional ao tempo ( $0 < \delta \leq 1$ ), regimes em que essa amplitude é constante no tempo ( $\delta = 0$ , linha preta, conforme equação (4.53)) e regimes em que esta é inversamente proporcional ao tempo ( $\delta < 0$ ). Neste último regime, que já corresponde à região de não persistência, as amplitudes decaem muito rapidamente para valores próximos a zero quando  $t \rightarrow \infty$  (é necessário uma escala menor de observação para que essas oscilações sejam visíveis), isso nos impossibilitou de fazermos uma melhor análise quando discutimos os resultados via simulações computacionais. Note que para  $p = 0.0$  e  $f = 0.7569$  (linha crítica,  $B = 0$ ) corresponde aproximadamente a um expoente ( $\delta = -2.92$ ) e para um tempo de um milhão a amplitude vai estar reduzida a:  $A(t) \sim 1/1.000.000^{2.92}$ . Esse expoente foi obtido resolvendo numericamente  $\delta$ , fazendo  $B \rightarrow 0$ , conforme equação (4.44). Na Figura 4.30, a região em branco representa o local onde não existem oscilações log-periódicas. Comparamos os expoentes resolvendo numericamente a equação (4.65) (nesse exemplo,  $f = 0.6$  e  $p = 0.1$ ) e em seguida multiplicamos essa posição média pelo inverso da amplitude correspondente. O expoente dessa amplitude é obtido resolvendo  $\delta$  na equação (4.52), Figura 4.31(a). Dessa forma, a figura resultante, da equação (4.65), é apenas uma curva oscilante com amplitude constante no tempo, Figura 4.31(b). E assim, comprovamos a

validade da equação (4.52), que fizemos para vários casos não mostrados aqui por economia de espaço.



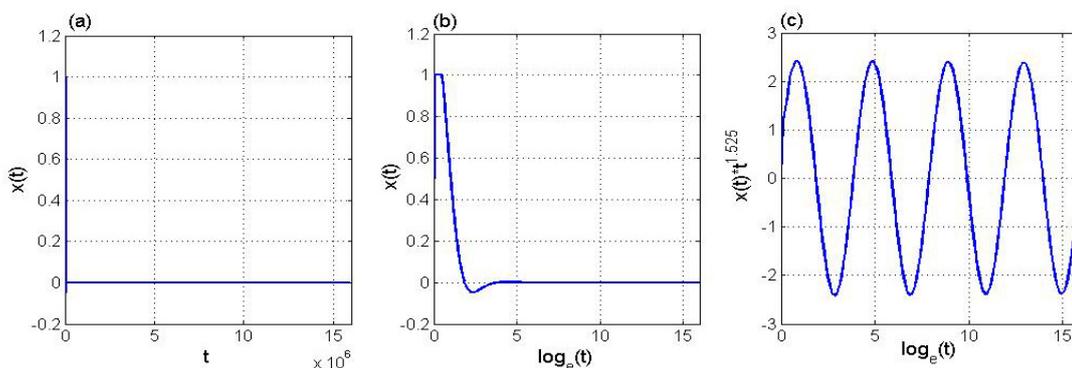
**Figura 4.30** – Expoente temporal da amplitude da posição média compreendida na região de log-periodicidade (em cores). Para  $\delta > 0$ , tem-se a região onde a amplitude cresce proporcionalmente com o tempo com expoente máximo igual a um (regime de “escape”). Quando  $\delta < 0$ , a amplitude é inversamente proporcional ao tempo e com expoente que pode chegar a  $\delta = -2.92$  (ver barra de cor ao lado da figura). No primeiro caso, a amplitude diverge para no limite assintótico de  $t$ , e no segundo caso, essa amplitude vai para zero. A linha preta corresponde a  $\delta = 0$  (amplitude constante).



**Figura 4.31** – Comprovação da validade do expoente temporal da amplitude da posição média dado pela equação (4.52). Na fig.(a),  $p=0.1$  e  $f=0.6$  corresponde a um expoente  $\delta = -1.144$ . Na fig.(b), multiplicamos a posição média da equação (4.65) pelo inverso da amplitude, cujo expoente está exposto na fig.(a), e a curva resultante é apenas a parte oscilante com amplitude constante no tempo.

É relativamente simples constatar quando uma série temporal segue uma lei de potência ou uma exponencial. Para as séries temporais que oscilam de forma log-

periódicas, essa análise é mais difícil. Normalmente elas costumam passar despercebidas de acordo com a escala de observação. No exemplo seguinte, extraído do modelo em estudo neste trabalho, na Figura 4.32(a) exibimos na escala linear  $x(t)$  vs  $t$  e não percebemos nada a respeito da forma da curva. Na Figura 4.32(b) quando exibimos  $x(t)$  vs  $\log(t)$  ainda não é possível notar qualquer indício de oscilação, mas na fig.(c), quando eliminamos as amplitudes temporais, as oscilações se revelam em uma perfeita curva senoidal. É quase impossível de acreditar que as curvas, fig.(a) e fig.(c), são as mesmas; apenas mudamos a escala de observação, eliminando as pequenas amplitudes.



**Figura 4.32** - Exemplo de como oscilações log-periódicas podem estar camufladas devido a grandes (ou pequenas) amplitudes.

## 4.5.2 Posição média para a região onde não existe log-periodicidade

A variação temporal da posição média para o regime em que não existem oscilações log-periódicas é simplesmente uma função tipo lei de potência, da forma

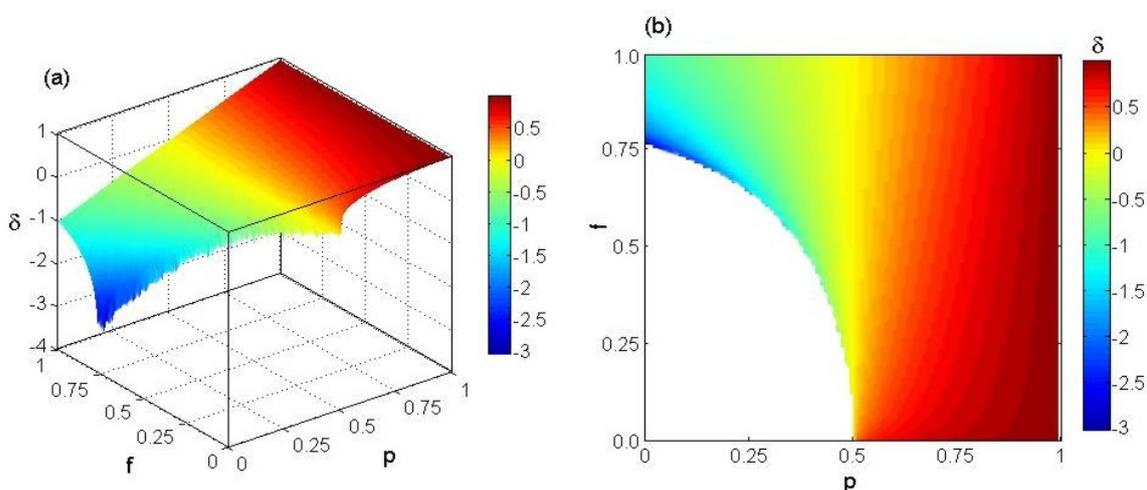
$$\langle x_t \rangle \sim t^\delta, \quad (4.67)$$

cujos expoente  $\delta$  é obtido pela equação transcendental

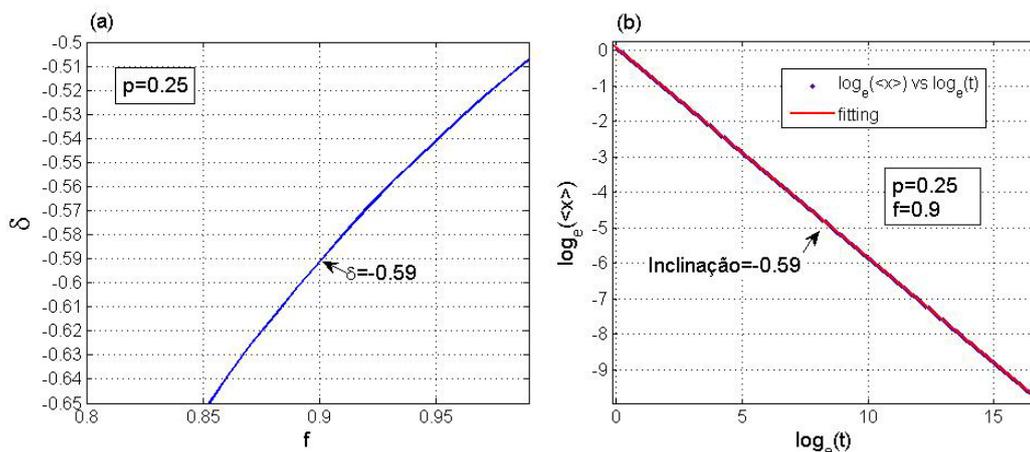
$$\delta = \alpha f^{\delta-1}, \quad (4.68)$$

e a variação dos parâmetros:  $-1 \leq \alpha \leq 1$  ( $0 \leq p \leq 1, \alpha = 2p - 1$ ),  $0 < f \leq 1$ . O expoente situa-se compreendido entre  $-2.92 \leq \delta \leq 1$ . É possível observar que para  $f=1$ , o expoente em (4.68) é exatamente o expoente em (4.66). Para melhor visualização da variação desse expoente com os parâmetros  $f$  e  $p$ , mostramos na Figura 4.33(a,b) o seu comportamento.

Podemos observar que na região correspondente a  $p > 1/2$ , para um  $p$  fixo, pequenos valores de  $f$  conduzem a um expoente maior, de acordo com os resultados obtidos via simulações computacionais. Para grandes valores de  $p$ , por exemplo,  $p > 0.9$ , já não se observa variação significativa com  $f$  e a caminhada torna-se independente deste parâmetro, ou seja, o efeito de memória torna-se irrelevante e o parâmetro  $p$  se sobressai sobre  $f$ . Nessa mesma região, o valor máximo desse expoente é um. Já na região que corresponde a  $p < 1/2$ , o valor mínimo chega a  $\delta = -2.92$ . Testamos a validade da expressão (4.67) juntamente com seu expoente (4.68), fazendo um ajuste linear na escala log-log da equação obtida por Kenkre (4.65) e comparamos os expoentes. Foram feitos testes para vários valores de  $f$  e de  $p$ , por economia de espaço, estamos mostrando para apenas um caso ( $p = 0.25$  e  $f = 0.9$ ), conforme mostrado na Figura 4.34(a,b).



**Figura 4.33** – Na fig.(a,b) temos o expoente temporal da posição média no regime em que não existem oscilações log-periódicas (em cores). Na fig.(b) apresentamos esse expoente projetado no plano formado pelos parâmetros  $f$  versus  $p$ . Para  $p > 1/2$  o expoente é sempre positivo, já pra  $p < 1/2$  o expoente é sempre negativo, independentemente do valor de  $f$ . Quando  $p = 1/2$  o expoente é zero. A barra de cor ao lado de ambas as figuras representa o valor numérico de  $\delta$ .



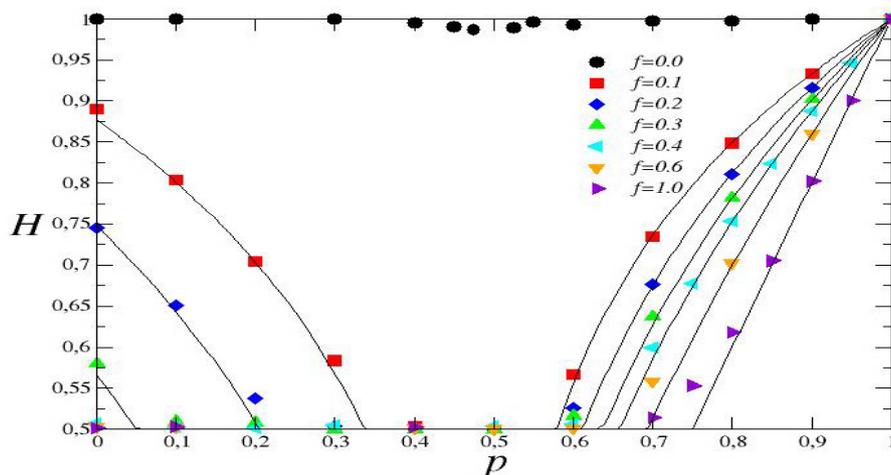
**Figura 4.34** – Comparação entre o expoente obtido pela expressão (4.68) fig.(a), e a inclinação da equação analítica (4.65) na escala log-log, fig.(b).

## 4.6 Comparação entre teoria analítica e simulação numérica

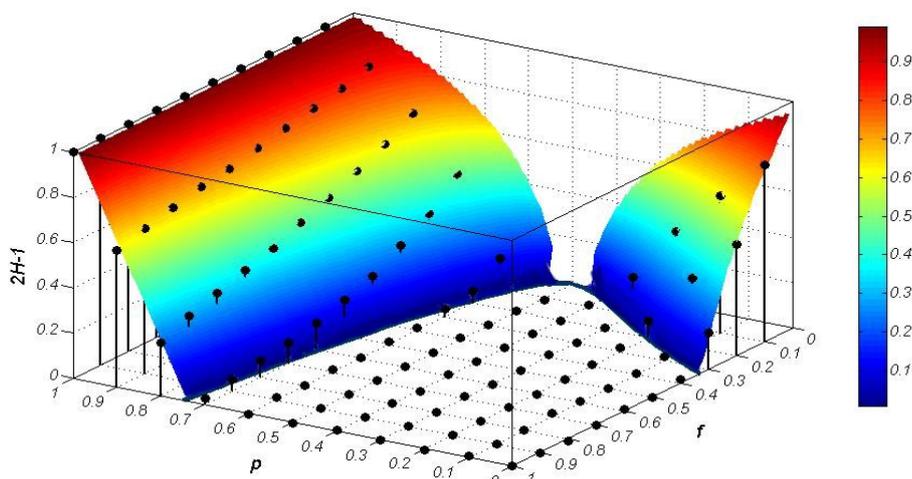
Nesta seção, fazemos uma comparação entre os resultados analíticos e numéricos, via simulações computacionais e mostraremos que há uma boa concordância entre ambas as abordagens.

### 4.6.1 Expoente de Hurst e posição quadrática média

Nesta seção, vamos exibir o comparativo entre os resultados numéricos e analíticos para o expoente de Hurst. Primeiramente vamos analisar o caso bidimensional e em seguida o caso tridimensional. Começando com  $H$  versus  $p$ , para vários valores fixo de  $f$ . Na Figura 4.35 as linhas contínuas representam o caso analítico e os símbolos os resultados numéricos (ver legenda para os valores fixos de  $f$ ). Os resultados praticamente coincidem. Estendendo a figura anterior, para uma melhor visualização, exibimos também o gráfico tridimensional (Figura 4.36) de  $2H-1$  versus  $f$  e  $p$ , onde a superfície em cores representa a equação analítica e as bolas pretas os dados numéricos. Nesse caso, o plano *zero* corresponde à região de não persistência  $H=1/2$ . É muito importante essa comparação entre os modelos, pois se só tivéssemos os resultados analíticos, teríamos dúvidas sobre a validade da solução exata, pois a equação analítica para  $H$  possui várias raízes.



**Figura 4.35** – Comparação entre os resultados analíticos e numéricos. Os símbolos representam os resultados numéricos e as linhas contínuas os resultados analíticos.

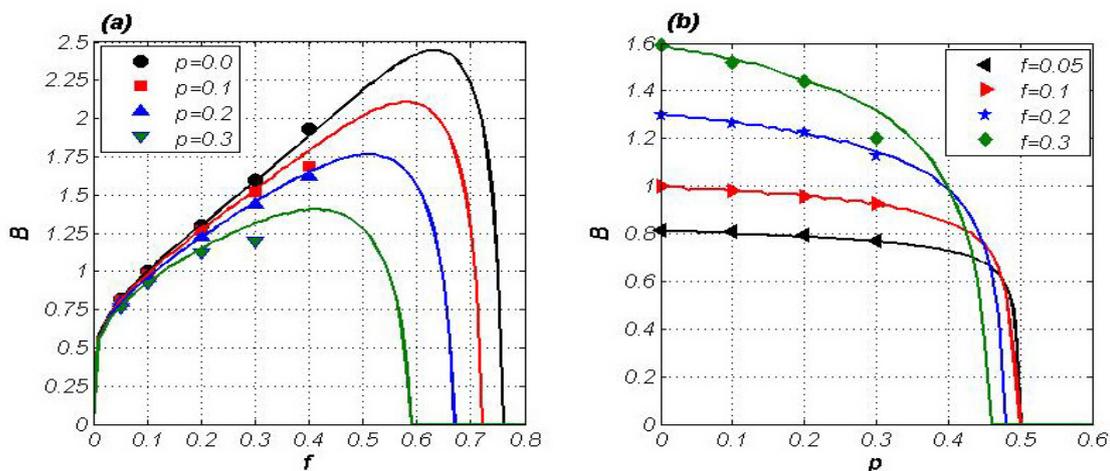


**Figura 4.36**- Comparação para o expoente de Hurst entre os resultados analíticos (superfície em cores) e os resultados numéricos (bolas pretas). Obtemos uma boa concordância entre ambas as abordagens.

## 4.6.2 Oscilações log-periódicas para $\alpha < 0 (p < 1/2)$

Como discutido anteriormente, na região em que  $p < 1/2$  ocorrem oscilações log-periódicas na posição média. Essa frequência de oscilação está representada na (Figura 4.37(a,b)), em função dos parâmetros  $f$  e  $p$ . Na fig.(a), mantemos  $p$  fixo e variamos  $f$ . Já na fig.(b), fixamos o  $f$  e variamos o  $p$ . Através da fig.(a) podemos notar que  $B$  cresce com  $f$ , atinge um valor de máximo e começa a decair. Para  $f$  fixo, fig.(b), a variação de  $B$  com  $p$  é

sempre decrescente. Como expomos na seção 4.1.6, utilizamos alguns ajustes de curva para a obtenção da frequência de oscilação log-periódica e agora vamos comparar esses valores com a equação analítica. Na Figura 4.37(a,b), as linhas contínuas representam os resultados analíticos e os símbolos os resultados numéricos que foram *ajustados*. Também obtivemos uma boa concordância entre as abordagens. Ressaltamos que a função analítica para  $B$  possui também várias raízes e a raiz selecionada para ser a solução realmente é a correta.



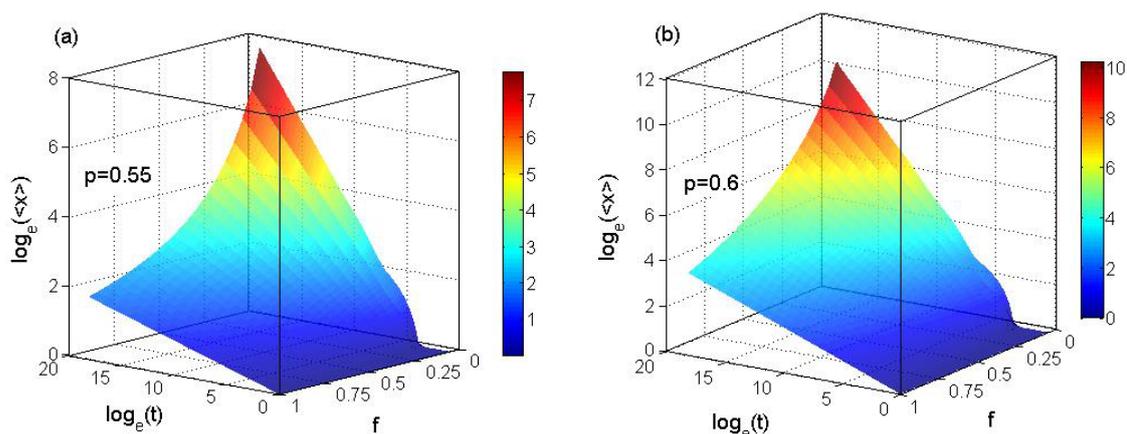
**Figura 4.37** - Comparação entre os resultados analíticos (linhas contínuas) e numéricos (símbolos) para a frequência de oscilação log-periódica  $B$ . Podemos observar também uma boa concordância entre ambas as abordagens.

### 4.6.3 Comportamento da posição média para $\alpha > 0$ ( $p > 1/2$ )

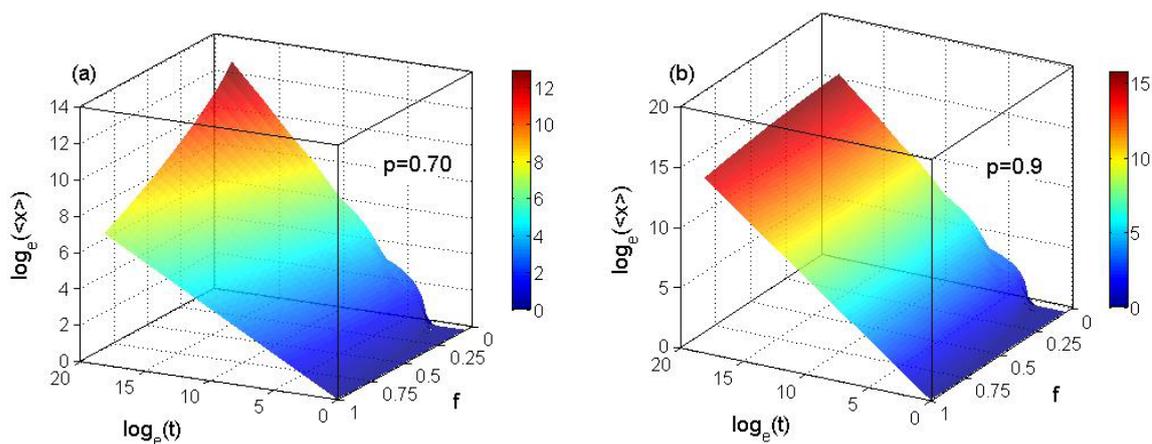
Para a posição média no regime correspondente a  $p > 1/2$ , mostramos na seção 4.1 que a esta descreve uma lei de potência com expoente dado por (4.68). Vamos também utilizar a equação analítica (4.65) obtida por Kenkre (KENKRE, 2007) para reforçar melhor esse comportamento monotônico da posição média. Nesta equação, truncamos o somatório em apenas 150 termos, devido estes estarem relacionado com fatorial e também devido à rápida convergência da série.

Na Figura 4.38(a,b) e Figura 4.39(a,b) plotamos a equação (4.65) na escala  $\log_e(\langle x \rangle)$  vs  $\log_e(t)$ , para um  $p$  fixo (ver legendas) e  $f$  variando próximo de zero até um. Podemos perceber na Figura 4.38(a,b) que para pequenos valores de  $p$ , a inclinação da curva é bem sensível a variação de  $f$  (maiores valores deste parâmetro conduzem a um expoente menor, ou seja, o tamanho da memória atrasa a caminhada). Já para grandes

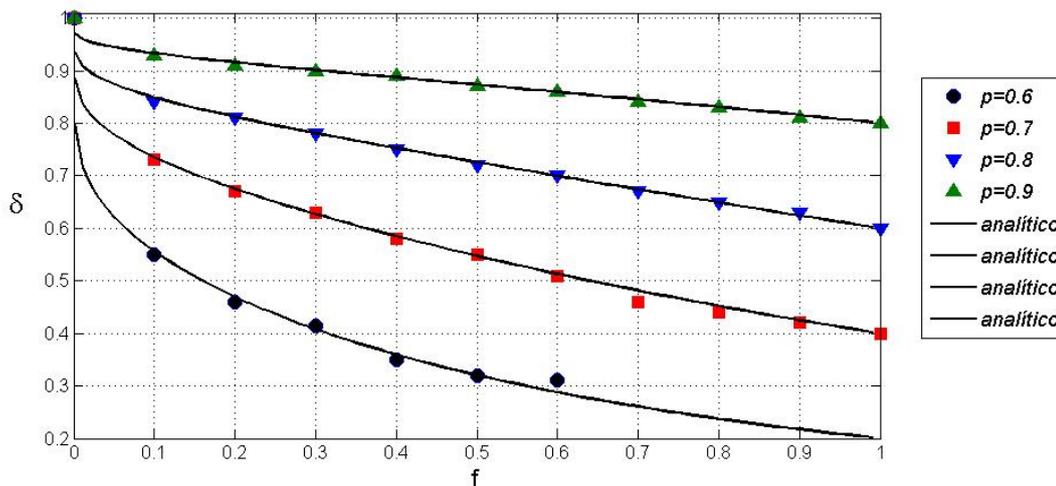
valores de  $p$  (Figura 4.39(b)) essa dependência torna-se desprezível e o efeito de memória é irrelevante. Na Figura 4.40, mostramos o comparativo entre expoente analítico da equação (4.68) para  $p > 1/2$ , e os resultados numéricos via caminhada simulada. Mostramos que realmente a posição média é uma função monotônica do tempo. O valor positivo ou negativo depende do primeiro passo determinístico: se o primeiro passo escolhido for para direita, a posição média é sempre positiva, caso contrário, ela será negativa.



**Figura 4.38** – Posição média versus tempo, para vários valores de  $f$ , com  $p$  fixo. A reta formada na escala  $\log_e(\langle x \rangle)$  vs  $\log_e(t)$ , para um  $f$  fixo, indica que a posição média obedece a uma lei de potência. Maior é a inclinação para menores valores de  $f$ . Em fig.(a), foi utilizado um  $p=0.55$  e em fig.(b)  $p=0.6$ .



**Figura 4.39** – Para altos valores de  $p$ , por exemplo  $p=0.9$  em fig.(b) as inclinações das curvas formadas por  $\log_e(\langle x \rangle)$  vs  $\log_e(t)$ , não dependem significativamente de  $f$ . Já para valores menores, por exemplo,  $p=0.7$  em fig.(a), essas inclinações são bem dependentes de  $f$ .



**Figura 4.40** – Comparativo do expoente da posição média ( $p > 1/2$ ) para o caso analítico (linhas contínuas) e numéricos via simulações computacionais (símbolos, ver legendas no lado direito da figura). Resultados analíticos e numéricos estão em plena concordância.

Para a região correspondente a  $p < 1/2$ , no regime puramente monotônico, sem oscilações, não foi possível determinar, via simulações, os expoentes temporais da posição média, devido a estes serem negativos e também devido ao surgimento de grandes flutuações, fazendo com que a posição média alterne de valor entre positivo e negativo. Fizemos um comparativo utilizando a equação (4.65), obtida por Kenkre (2007), como discutido na seção 4.5.2.

## CAPÍTULO 5

# 5 Conclusões

Concluimos este trabalho, no qual apresentamos uma nova classe de caminhadas aleatórias não Markovianas caracterizadas pela perda de memória recente (amnésia induzida). Estudamos o problema mediante simulações computacionais e métodos analíticos, seguidas de uma análise comparativa entre as abordagens. Recordamos os resultados correspondentes ao caso clássico, equivalente a uma caminhada sem memória (seção 3.1) e o caso de memória total, desenvolvido por Schutz e Trimper (2004), tanto para a posição média, a posição quadrática média (medido pelo expoente de Hurst) e também a função densidade de probabilidade da posição.

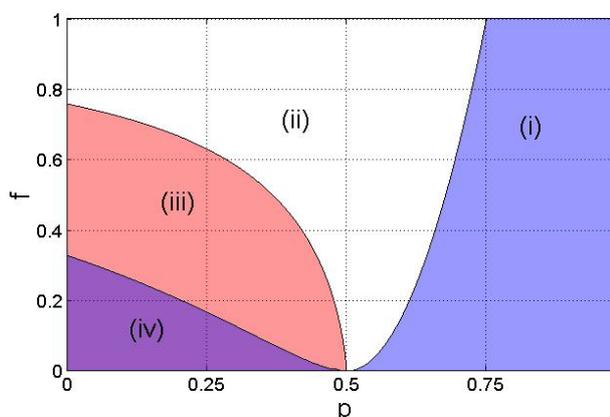
Mostramos que a perda da memória recente induz a uma rica variedade de comportamentos da caminhada, em contraste com a perda de memória distante (DA SILVA; VISWANATHAN; CRESSONI, 2006). Esses diferentes comportamentos podem ser descritos pelo surgimento de persistência (regime super difusivo, medido pelo expoente de Hurst), por oscilações log-periódicas na posição média (caracterizando uma invariância discreta de escala) correspondente à região de feedback negativo ( $p < 1/2$ ) e também pela função densidade de probabilidade da posição que passa de um regime Gaussiano para não Gaussiano. Mediante uma abordagem analítico-estocástica, recaímos em um sistema de equações transcendentais desacopladas para o expoente de Hurst ( $H$ ) e a frequência de oscilação ( $B$ ), que forneceu as seguintes soluções, respectivamente

$$H = \alpha f^{H-1} \cos\left(\ln(f) \sqrt{(\alpha f^{H-1})^2 - H^2}\right),$$

$$B = \alpha f^{\frac{B}{\lg[B \ln(f)]} - 1} \sin(B \ln(f)),$$
(5.1)

tal que  $\alpha < 0$  (i.e.,  $p < 1/2$ ,  $\alpha = 2p - 1$ ) e  $(0 < f \leq 1)$ . Resolvemos essas equações numericamente e comparamos com os resultados via caminhada simulada, pois cada equação possui várias raízes na região para  $p < 1/2$ . Mostramos o completo diagrama de fase, em função dos parâmetros  $f$  e  $p$  (fração de memória antiga lembrada e probabilidade de aceitar uma decisão tomada no passado lembrado, respectivamente), contendo quatro fases, conforme mostradas na Figura 5.1, que representa a superposição da Figura 4.27 com a Figura 4.29:

- i. persistência clássica;
- ii. não persistência clássica;
- iii. não persistência log-periódica;
- iv. persistência log-periódica.



**Figura 5.1** – Diagrama de fases.

Também mostramos o diagrama de fase da região correspondente a um regime Gaussiano e não Gaussiano da posição (mostrado na Figura 4.23, esse regime não Gaussiano surgiu apenas em partes das áreas (i) e (iv), que corresponde a  $H > 1/2$  na Figura 5.1), quantificado pelo coeficiente de curtose e obliquidade. Suspeitamos que a densidade de probabilidade da posição pertença às classes das distribuições de Lévy, já que estas são mais gerais e que englobam também as distribuições gaussianas, assim como descrito nas seções 2.4 e 2.5. Para a região em que não existem oscilações, a posição média é uma simples função monotônica, tipo lei de potência, em relação ao tempo. Esse expoente foi calculado e mostramos que é sempre positivo para  $p > 1/2$ , sempre negativo para  $p < 1/2$  e vale zero quando  $p = 1/2$ . A posição média e seu respectivo expoente temporal são dados por

$$\langle x_t \rangle \sim t^\delta,$$

$$\delta = \alpha f^{\delta-1} \quad (-2.92 \leq \delta \leq 1), \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (0 \leq p \leq 1) \text{ e } 0 < f \leq 1.$$
(5.2)

Em contraste, na região para  $p < 1/2$  onde existem oscilações log-periódicas, estas são seguidas de grandes e pequenas amplitudes (a depender dos parâmetros  $f$  e  $p$ ). Os

expoentes temporais da amplitude também foram calculados e constatamos que estes podem assumir valores negativos e positivos. Esses expoentes negativos geram as pequenas amplitudes para tempos muito grandes. A posição média e o expoente da amplitude estão representados a seguir

$$\begin{aligned} \langle x_t \rangle &\sim t^\delta \cos(B \log(t)), \\ \delta &= \alpha f^{\delta-1} \cos\left(\ln(f) \sqrt{(\alpha f^{\delta-1})^2 - \delta^2}\right) \quad (-2.92 \leq \delta \leq 1), \quad \alpha < 0 (p < 1/2), \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $B$  é dado em (5.1).

A aparente simplicidade do modelo de memória parcial, proposto nesta tese, esconde uma enorme complexidade matemática com soluções analíticas não muito amigáveis, tal qual a obtida por Kenkre (2007) para a posição média

$$\langle x_t \rangle = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!} \left( \frac{\alpha}{f} (\ln(t/t_0) + n \cdot \ln(f)) \right)^n \Theta(t - t_0 (1/f)^n) \right]. \quad (5.4)$$

Os resultados mostraram que os efeitos da limitação de memória lembrada levam a diversas mudanças radicais no comportamento da caminhada.

## 5.1 Relevância dos resultados

Sabemos que processos Markovianos, sem memória, são exceções ou simplificações matemáticas e que os processos naturais são em grande parte não Markovianos. Soluções analíticas dos processos com memória são bastantes difíceis de serem encontradas de forma exata. Podemos dizer também que a questão da memória é de extrema importância para qualquer processo evolutivo. A capacidade de reter e descartar fragmentos de memória é uma questão de sobrevivência para que aprendamos com experiências vividas e que possamos selecionar o que é melhor para o nosso desenvolvimento. Esquecer também é importante, pois dá espaço para novos aprendizados e assim possamos nos aperfeiçoar cada vez mais. Esse aperfeiçoamento pode ocorrer também na indústria, na tecnologia, etc. Também é interessante conhecer as conseqüências de possíveis perdas de uma fração dessa memória e até que ponto essa perda pode causar danos irreversíveis ao sistema em estudo. Com os avanços da tecnologia da informação,

principalmente os voltados para área da informática, tal como as mídias de armazenamentos, os HD's, que já possuem capacidade maior que um Terabyte (1.000GB) é de extrema importância que métodos teóricos sobre as conseqüências de perda de memória/informação sejam desenvolvidos.

## 5.2 Discussão e perspectivas para o futuro

No futuro, é interessante obter a solução analítica para a equação de Fokker-Planck da posição, pois esta de imediato fornece as soluções para todos os momentos. Em baixas dimensões, muitos sistemas não exibem transições de fases, onde podemos citar: modelo de Ising (fase magnética e não-magnética); condensado de Bose-Einstein (fase condensada e não-condensada), etc. Seria interessante desenvolver o modelo em dimensões maiores e verificar se permanecem as mesmas mudanças no comportamento da caminhada e se há surgimento de novos fenômenos.

É importante testar a aplicação do modelo em sistemas reais, principalmente em processos biológicos, como por exemplo, a doença de Alzheimer, que é relacionada à perda de memória recente e representa um grave problema de saúde pública. Esse estudo pode ser realizado a partir do eletroencefalogramas (EEG) como uma possível ferramenta para diagnóstico dessa doença. Estes resultados também podem ser úteis em problemas voltados à econofísica, principalmente no mercado de ações, já que antes e após um “crash”, a bolsa de ações há exibição de log-periodicidade. Acreditamos que o modelo também possa ser aplicado em ecologia, em problemas voltados a situações críticas, como escassez de alimentos para verificar como as densidades de presa e predador se comportam em relação ao tempo nessas situações extremas. Outra aplicação pode ser na análise de ondas sísmicas, com o objetivo de desenvolver previsões de terremotos com maior margem de segurança. O surgimento de log-periodicidade nas séries citadas poderia ser um sinal de alerta. É de grande interesse do próprio autor o estudo principalmente dessas séries temporais voltadas para sistemas biológicos.

Esperamos que o presente trabalho possa abrir novas fronteiras e perspectivas no conceito e uso de caminhadas aleatórias com perda de memória.

## 6 Referências

Abry, P.; Sellan, F. **The wavelet-based synthesis for the fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation.** Appl. and Comp. Harmonic Anal., 3(4), p. 377-383, 1996.

Bachelier, L. Ann. Sci. Ec. Norm. Super,17,21, 1900.

Bertsekas, D. P.; Tsitsikles, J. N. **Introdução to Probabilidade**, Lecture Notes, Course 6.041-6.431, M.I.T., 2000.

Biagini, F.; Hu, Y.; Oksendal, B.; Zhang, T. **Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications.** Springer, p. 5-11, 2008.

Bowman, D.; Ouillon, G.; Sammis, C.; Sornette, A.; Sornette, D. **An observational test of the critical earthquake concept.** J. Geophys. Res., 103(B10), 24, p. 359–372, 1998.

Cassandras, C. G.; Lafontaine, S. **Introduction to Discrete Event Systems.** Springer, 2 ed, 22-25, 2008.

Caspi, A.; Granek, R.; Elbaum, M. **Enhanced Diffusion in Active Intracellular Transport.** Physical Review Letters, 85, 5655, 2000.

Cressoni, J. C.; Da Silva, M. A. A.; Viswanathan, G. M. **Amnestically Induced Persistence in Random Walk.** Physical Review Letters., 98, 070603, 2007.

Dai, W.; Heyde, C. C. **Ito's formula with respect to fractional Brownian motion and its application.** Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 9, Number 4, p. 439-448, 1996.

Da Silva, M. A. A.; Viswanathan, G. M.; Ferreira, A. S.; Cressoni, J. C. **Spontaneous symmetry breaking in amnestically induced persistence.** Physical Review E, 77, 040101(R), 2008.

Da Silva, M. A. A.; Viswanathan, G. M.; Cressoni, J. C. **Discrete-time non-Markovian random walks: The effect of memory limitations on scaling.** Physica A, 364, 2006.

Denisov, S.; Urbakh, M. **Some new aspects of Lévy walks and flights: directed transport, manipulation through flights and populations exchange.** Physica D, 187, 2004.

Duncan, T. E. **Prediction for some processes related to a fractional Brownian motion.** Statistics & Probability Letters, 76, 2006.

Faillietaz, J.; Pralonga, A.; Funk, M.; Deichmann, N. **Evidence of log-periodic oscillations and increasing icequake activity during the breaking-off of large ice masses.** Journal of Glaciology, Vol. 54, No. 187, 2008

Fick, A. **Annalen der Physik.** vol. 170, p. 59–86, 1855.

Flotron, A. **Movement studies on a hanging glacier in relation with an ice avalanche.** J. Glaciol, 19(81), p. 671–672, 1977.

Havlin, S.; Luz, M. G. E.; Lyra, M. L.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E. **Lévy flight random searches in biological phenomena.** Physica A, 314, 2002.

Hurst, H. E. **Long Term Storage Capacity of Reservoirs.** Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116(1), 770, 1951.

Jonkers, A. R. T. **Discrete scale invariance connects geodynamo timescales.** Geophys. J. Int. 171, p. 581–593, 2007.

Luthi, M. P. **Instability in glacial systems.** Mitt. VAW/ETH 180, p. 63–70, 2003.

Kendall, M.; Stuart, A. **The Advanced Theory of Statistics**. 4 ed., Macmillan, 1977–1983.

Kenkre, V. M. **Analytic Formulation, Exact Solutions, and Generalizations of the Elephant and the Alzheimer Random Walks**. arXiv, 0708.0034v2, 2007.

Kolmogorov, A. N. **Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum**. Comptes Rendus (Doklady) Acad.Sci. USSR (N.S.) 26, p. 115–118, 1940.

Koski, T. **Hidden Markov Models for Bioinformatics**. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2001.

Mandelbrot, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**, W. H. Freeman, New York, 1982.

Mandelbrot, B. B.; Ness, V. J. W. **Fractional Brownian motions, fractional noises and applications**. SIAM Rev. 10, p. 121-140, 1968.

Montgomery, D. C.; Runger, G. C. **Applied Statistics and Probability for Engineers**. John Wiley & Sons, Inc, 3 ed., p. 213-215, 2003.

Nolan, J. P. **An introduction to stable distributions**. Disponível em: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>. Acesso em 20 Nov. 2008.

Penna, T. J.; Oliveira P. M. C.; Sartorelli, J. C.; Gonçalves, W. M.; Pinto, R. D. **Long Range Anticorrelations and Non-Gaussian Behavior of a Leaky Faucet**. arXiv, 9507005v1, 1995.

Peng, C. K.; Mietus, J.; Hausdorff, J. M.; Havlin, S.; Stanley, H. E.; Goldberger, A. L. **Long-range anticorrelations and non-gaussian behavior of the heartbeat**, Physical Review Letters, 70(9), p. 1343-1346, 1993.

Perrin, J. **Les Atomes** (Flammarion, Paris, 1991). Publicado a partir do texto original de 1913, com uma introdução de Pierre-Gilles de Gennes.

Pralong, A.; Birrer, C.; Stahel, W. A.; Funk, M. **On the predictability of ice avalanches**. *Nonlinear Proc. Geophys*, 12(6), p. 849–861, 2005.

Primak, S.; Kontorovich, V.; Lyandres, V. **Stochastic Methods and Their Applications to Communications: Stochastic Differential Equations Approach**. John Wiley & Sons, 2004.

Raftery, A.; Tavaré, S. **Estimation and Modelling Repeated Patterns in High Order Markov Chains with the Mixture Transition Distribution Model**. *Journal of Applied Statistics*, 43, p. 179–199, 1995.

Ribeiro, T. S.; Leal, R. P. C. **Estrutura Fractal em Mercados Emergentes**. *RAC*, v.6, n.3, 2002.

Risken, H. **The Fokker-Planck Equations**. Springer, p. 6-12, 1996.

Salinas, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**, Edusp, 2 ed, p. 409-410, 2005.

Schutz, G. M.; Trimper, S. **Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk**. *Physical Review E*, 70, 045101(R), 2004.

Shonkwiler, W. R.; Mendivil, F. **Explorations in Monte Carlo methods**, Springer, 2009.

Solomon, T. H.; Weeks, E. R.; Swinney. **Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow**. *Physical Review Letters*, 71, p. 3975-3978, 1993.

Sornette, D. **Discrete scale invariance and complex dimensions**. arXiv:cond-mat/9707012v2 [cond-mat.stat-mech], *Physics Reports* 297, 239-270, 2008.

Sornette, D. **Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools**. Springer, 2 ed., 2006.

Sornette, D; Johansen, A. **Significance of log-periodic precursors to financial crashes**. *Quant. Finance*, 1(4), p. 452–471, 2001.

Soterroni, A. C.; Domingues, M. O.; Ramos, F. M. **Estimativa do expoente de Hurst de séries temporais caóticas por meio da transformada Wevelet discreta**. 2008.

Stapf, S.; Kimmich, R.; Seitter, R. O. **Proton and Deuteron Field-Cycling NMR Relaxometry of Liquids in Porous Glasses: Evidence for Lévy-Walk Statistics.** Physical Review Letters, 75, p. 2855-2858, 1995.

Tanaka, H. **Log-periodic modulation to power law of change in the geoelectric potential difference observed on Niijima Island prior to volcanic and seismic activation in the Izu island region, Japan 2000.** Proc. Japan Acad., 78, Ser. B, 2002.

Vainstein, M. H. **Processos estocásticos não-Markovianos.** [tese], Brasília, UnB, 2007.

Viswanathan, G. M.; Afanasyev, V.; Sergey, V.; Buldyrev, S. V.; Catalan, J.; Fulco, U. L.; Havlin, S.; Luz, M. G. E.; Lyra, M. L.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E. **Lévy flight random searches in biological phenomena.** Physica A, 314, 2002.

Viswanathan, G. M.; Bartumeus, F.; Sergey, V.; Buldyrev, V.; Havlin, S.; Luz, M. G. E.; Raposo, E. P.; Stanley, H. E. **Statistical Physics of Random Searches.** Brazilian Journal of Physics, 31, 2001.

Voight, B. **A method for prediction of volcanic eruptions.** Nature, 332(6160), p. 125–130, 1988.

Weeks, E. R.; Urbach, J. S.; Swinney, H. L. **Anomalous diffusion in asymmetric random walks with a quase-geostrophic flow example.** Physica D, 97, p. 291-310, 1996.

Weisstein, E. W. **Central Limit Theorem.** A Wolfram Web Resource: Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/CentralLimitTheorem.html>. Acesso em 12 Dez.2008.

# Apêndice A – Definições Estatísticas Básicas

## Função de distribuição cumulativa

A função de distribuição cumulativa  $P_X(x_i)$  (CDF, sigla em inglês) é definida como a probabilidade de ocorrência de um certo evento da variável aleatória pertencente ao conjunto  $X=\{x_1, x_2, \dots\}$  não exceder um certo limiar, isto é, para o caso discreto e contínuo, respectivamente, devemos ter

$$P_X(x) = \sum_{i=-\infty}^n p_i(X = x_i), \tag{A.1}$$
$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(s) ds.$$

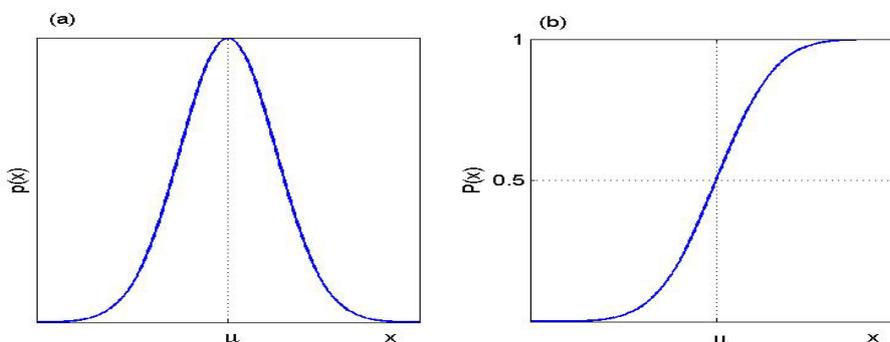
Como toda probabilidade deve ser não negativa, a função de distribuição cumulativa é sempre crescente. Essa deve satisfazer as condições de contorno:  $P_X(-\infty) = 0$ ,  $P_X(\infty) = 1$ . A função  $p_X$ , nos somatórios em (A.1), é a densidade de probabilidade (PDF, sigla em inglês), que será definida a seguir.

## Função densidade de probabilidade

Para uma descrição completa da variável randômica  $x$  que pode assumir o conjunto de valores  $x_i, i = 0, 1, \dots$  é necessário conhecer a função de distribuição de probabilidade (PDF), pois, a partir dela, é possível caracterizar completamente a variável aleatória em questão. Sua definição é

$$p_i = \text{Prob}\{X = x_i\}, \quad (\text{A.2})$$

considerando que:  $p_i \geq 0$  e  $\sum_i p_i = 1$ . Essa representa todos os possíveis valores de ocorrência dos eventos medidos. Para uma variável randômica contínua, esta pode ser descrita pela função de distribuição cumulativa (CDF), através da relação  $p_X(x) = \frac{d}{dx} P_X(x)$  e para uma variável discreta, sua PDF pode ser definida como a soma funções deltas ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada evento, isto é,  $p_X(x) = \sum_i P_i \cdot \delta(X - x_i)$ . Todas devem atender as condições de positividade e normalização. Na Figura A.1(a) representamos uma função densidade de probabilidade que pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente a curva da função de distribuição cumulativa, figura (b).



**Figura A.1** - Em fig.(a) função densidade de probabilidade, na fig.(b) função distribuição cumulativa. Para uma variável contínua, a função densidade de probabilidade representa a inclinação da reta tangente à curva da função de distribuição cumulativa. Em fig.(a) e fig.(b),  $\mu$  representa o valor médio da variável aleatória

## Média, mediana, variância, desvio padrão e covariância

Nesta seção, vamos fazer uma breve revisão de probabilidade e estatística. Primeiramente vamos falar de média, ou valor esperado, que nada mais é do que o valor

médio de um dado conjunto de dados. Para o caso discreto e contínuo, o valor médio, respectivamente é

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(X = x_i), \\ \langle X \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Tal que  $p(X = x_i)$  significa a probabilidade de ocorrência da variável  $x_i$ . Expressamos neste trabalho " $\langle \dots \rangle$ " como uma média em um ensemble. Quando os eventos são igualmente prováveis, exemplo tomado para o caso discreto, temos que  $p(X = x_i) = 1/n$  ( $n$  representa o tamanho da amostra) e conseqüentemente  $\langle X \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . A mediana  $\delta$  é o valor que divide a área da PDF em duas partes iguais, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\delta} f(x) dx = \int_{\delta}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.4})$$

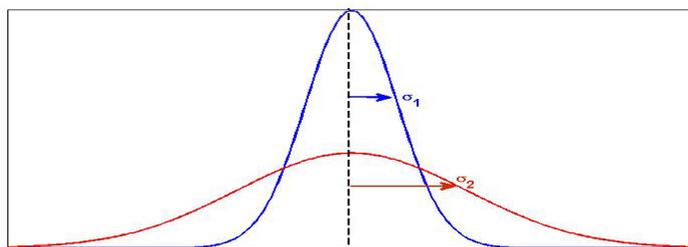
e para o caso discreto, talvez possa existir mais de uma mediana.

Outra quantidade de extrema importância em probabilidade e estatística é a chamada variância, que aqui denotamos por  $\sigma_X^2$ , onde o sub-índice rotula o conjunto ao qual foi efetuada a medida. Sua representação matemática para um conjunto de variáveis discretas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e contínua, respectivamente, é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i - \langle X \rangle)^2 p(X = x_i), \\ \sigma_X^2 &= \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^2 \cdot p(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Pelas equações (A.5) é fácil ver que a variância possui dimensão quadrada da variável; e  $\sigma_X^2 \geq 0$ , sendo zero para o caso determinístico. Também definimos o desvio padrão  $\sigma_X$  como a raiz quadrada da variância  $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ . Uma das principais importâncias do desvio padrão é que este possui a mesma unidade do conjunto  $X$ . A variância ou desvio padrão é um indicador de dispersão ou difusão, mede o grau de quanto os dados estão dispersos em torno da média. É por isso que comumente costuma-se dizer que o desvio padrão quantifica a largura da distribuição, quanto menor for este valor, mais os dados estão

centralizados em torno do valor médio, caso contrário, os dados apresentam-se afastados. A Figura A.2 exibe um exemplo ilustrativo de dispersão.



**Figura A.2** – Exemplo de dispersão: quanto maior o valor numérico de sigma, maior a largura da distribuição (em vermelho). Já para baixos valores de sigma, os dados tendem a situar-se em torno da média (linha tracejada). Usamos neste exemplo uma distribuição Gaussiana.

Os valores em (A.5) são válidos desde que a “soma” seja finita. Foi mostrado na seção 2.2, que toda variável que segue uma distribuição Gaussiana, a variância é sempre bem definida. E ainda mostramos na seção 2.4 e 3.2 alguns tipos de distribuições em que a variância diverge em consequência da divergência do segundo momento.

Estendendo o resultado anterior para mais de uma variável, por exemplo, sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis contínuas (para o caso discreto pode ser feito de forma similar) tendo a função densidade de probabilidade conjunta representada por  $p(x, y)$ , então a média de cada variável é dada por

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, y) dx dy, \\ \langle Y \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

e a variância calcula-se da forma

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \langle (x - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)^2 \cdot p(x, y) dx dy, \\ \sigma_Y^2 &= \langle (y - \langle Y \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \langle Y \rangle)^2 \cdot p(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Outra quantidade de grande interesse para o caso de duas variáveis, nesse caso  $X$  e  $Y$ , é a covariância, definida como

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} = \text{Cov}[X, Y] &= \langle (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) \cdot p(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

fazendo  $Y=X$  e  $X=Y$  a covariância se reduz a variância, dada pela equação (A.7) para a variável  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Da primeira linha de (A.8) a covariância pode ser representada como

$$\sigma_{XY} = \langle X \cdot Y \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle, \quad (\text{A.9})$$

e quando as variáveis  $X$  e  $Y$  são independentes ( $\langle X \cdot Y \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$ ) a covariância em (A.9) torna-se zero, ou seja, a covariância mede o grau de correlação linear entre duas variáveis aleatórias. Essa correlação linear entre duas variáveis também pode ser medida pelo coeficiente de correlação, que é definido como

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2} \sqrt{\sigma_Y^2}}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Para  $\rho < 0$  a correlação entre as variáveis é negativa que corresponde, de acordo com a equação (A.9), a  $\langle X \cdot Y \rangle < \langle X \rangle \langle Y \rangle$ . Já para  $\rho > 0$ , a correlação é positiva, que corresponde a  $\langle X \cdot Y \rangle > \langle X \rangle \langle Y \rangle$ . Por último, quando  $\rho = 0$ , implica que as variáveis são independentes, pois  $\langle X \cdot Y \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$ . Pode-se também medir a correlação da mesma variável, digamos  $X$ , defasada ou adiantada uma da outra por  $k$ , nesse caso, a correlação agora calcula-se da seguinte forma

$$\rho(k) = \frac{\sigma_{XX_k}}{\sqrt{\sigma_X^2} \sqrt{\sigma_{X_k}^2}} = \frac{\langle (x - \langle X \rangle) \cdot (x_k - \langle X_k \rangle) \rangle}{\sqrt{\sigma_X^2} \sqrt{\sigma_{X_k}^2}}, \quad (\text{A.11})$$

e  $\rho(k=0) = 1$ . Se as variáveis possuem correlações de curto alcance, então a soma  $\sum_k \rho(k)$  ou  $\int_0^\infty \rho(k) dk$  converge para algum valor finito. Caso contrário, se a soma diverge, atribui-se a correlações de longo alcance entre as variáveis.

## Apêndice B – Demonstração do Teorema do Limite Central e Momentos da Distribuição Gaussiana

A demonstração do teorema pode ser feita da seguinte forma: seja  $X_1, \dots, X_N$  um conjunto de  $N$  variáveis randômicas em que cada  $X_j$  possui sua arbitrária distribuição de probabilidade  $p(x_1, \dots, x_N)$  com média  $\mu_j$  e variância  $\sigma_j^2$ . A variável  $X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  é normalmente distribuída com média  $\mu_X = \mu_x$  e desvio padrão  $\sigma_X = \sigma_x / \sqrt{N}$ . Tomando a transformada de Fourier de  $p_X(x)$  obtemos a função característica, definida como

$$\begin{aligned}
 \phi(\omega) &= \mathfrak{F}_\omega [p_X(X)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega X} p(X) dX \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega X)^n}{n!} p(X) dX \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} X^n p(X) dX \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \langle X^n \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Na segunda linha em (B.1) foi usada a expansão em série de Taylor da função exponencial. Reescrevendo agora o valor médio da última linha da expressão (B.1) como

$$\begin{aligned}
\langle X^n \rangle &= \left\langle \left[ \frac{1}{N} (x_1 + \dots + x_N) \right]^n \right\rangle \\
&= \langle N^{-n} (x_1 + \dots + x_N)^n \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} N^{-n} (x_1 + \dots + x_N)^n p(x_1) \dots p(x_N) dx_1 \dots dx_N,
\end{aligned} \tag{B.2}$$

e substituindo o valor de  $\langle X^n \rangle$  da expressão (B.2) em (B.1), tem-se uma nova equação para a transformada de Fourier de  $p_X(X)$ , dada por

$$\phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} N^{-n} (x_1 + \dots + x_N)^n p(x_1) \dots p(x_N) dx_1 \dots dx_N. \tag{B.3}$$

Esta última equação pode ser reagrupada em uma forma mais conveniente

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{i\omega(x_1 + \dots + x_N)}{N} \right)^n p(x_1) \dots p(x_N) dx_1 \dots dx_N. \tag{B.4}$$

Vamos utilizar novamente a expansão em séries de potências para a função exponencial

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = e^X$  em (B.4), e assim temos

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x_1 + \dots + x_N)/N} p(x_1) \dots p(x_N) dx_1 \dots dx_N. \tag{B.5}$$

A expressão (B.5) pode agora ser fatorada e os termos reagrupados, como mostrado a seguir

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_1/N} p(x_1) dx_1 \dots e^{i\omega x_N/N} p(x_N) dx_N = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x/N} p(x) dx \right)^N. \tag{B.6}$$

Expandindo novamente a exponencial, no integrando em (B.6), em série de Taylor, ficamos

$$\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \frac{i\omega x}{N} + \frac{(i\omega x/N)^2}{2} + \dots \right] p(x) dx \right)^N \\
&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \frac{i\omega x}{N} - \frac{(\omega x)^2}{N^2} + \dots \right] p(x) dx \right)^N \\
&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{i\omega}{N} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \frac{(\omega)^2}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx + \dots + O(N^{-3}) \right)^N \\
&= \left( 1 + \frac{i\omega}{N} \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{N^2} \langle x^2 \rangle + \dots + O(N^{-3}) \right)^N.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Em (B.7) assumimos  $p(x)$  já devidamente normalizada e também que os momentos sejam dados por  $\langle x^m \rangle = \int x^m p(x) dx$ . Tomando o logarítmico natural em (B.7) e em seguida elevando a exponencial ( $e^{\ln(X)} = X$ ), temos

$$\phi(\omega) = \exp \left[ N \cdot \ln \left( 1 + \frac{i\omega}{N} \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{N^2} \langle x^2 \rangle + \dots + O(N^{-3}) \right) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Usando a expansão para o logaritmo natural da forma:  $\ln(1+Y) \approx Y - \frac{1}{2}Y^2 + \dots$  ( $Y \ll 1$ ), e substituindo essa expansão em (B.8), (observe que  $Y = \frac{i\omega}{N} \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{N^2} \langle x^2 \rangle + \dots + O(N^{-3})$  que é válido para  $N \rightarrow \infty$ , para que seja verdade  $Y \ll 1$ ), temos

$$\phi(\omega) = \exp \left\{ \begin{array}{l} N \cdot \left[ \frac{i\omega}{N} \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{N^2} \langle x^2 \rangle + \dots + O(N^{-3}) \right] \\ - \frac{N}{2} \left[ \frac{i\omega}{N} \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{N^2} \langle x^2 \rangle + \dots + O(N^{-3}) \right]^2 \end{array} \right\}. \quad (\text{B.9})$$

Agora vamos abrir os termos dentro do argumento da exponencial em (B.9) e em seguida vamos colocar em evidência os termos que multiplicam o valor médio, o valor quadrático médio e os termos cruzados. Assim, ficamos com a equação

$$\phi(\omega) = \exp \left\{ \begin{array}{l} i\omega \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{2N} \langle x^2 \rangle + \frac{(\omega)^2}{2N} \langle x \rangle^2 \\ + i \frac{(\omega)^3}{2N^2} \langle x \rangle \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \frac{(\omega)^4}{4N^3} \langle x^2 \rangle^2 + O(N^{-4}) \end{array} \right\}. \quad (\text{B.10})$$

Em (B.10) vamos desprezar os termos de ordem  $N^{-2}$ , pois estamos assumindo  $N \rightarrow \infty$ , portanto escrevemos a equação mais compacta

$$\phi(\omega) = \exp \left\{ i\omega \langle x \rangle - \frac{(\omega)^2}{2N} \langle x^2 \rangle + \frac{(\omega)^2}{2N} \langle x \rangle^2 + O(N^{-2}) \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Identificando em (B.11)  $\langle x \rangle = \mu_x$  e  $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , então substituindo estes valores em (B.11) chegamos ao último passo para a transformada de Fourier, ou para função característica,

$$\phi(\omega) = \exp\left\{i\omega\mu_x - \frac{\omega^2}{2N}\sigma_x^2\right\}. \quad (\text{B.12})$$

Seguindo com a demonstração, devemos fazer agora o caminho inverso, vamos tomar agora a transformada inversa de Fourier, assim recuperamos a função original  $P_X(x)$ ,

$$p_X(x) = \mathfrak{F}_X^{-1}[\phi(\omega)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) \phi(\omega) d\omega. \quad (\text{B.13})$$

Agora, substituindo (B.12) em (B.13), chegamos a

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega x) \exp(i\omega\mu_x - \omega^2\sigma_x^2 / (2N)) d\omega. \quad (\text{B.14})$$

A integral em (B.14) pode ser resolvida de forma bem simples, basta apenas completar quadrado para o argumento da função exponencial e transformar esse argumento elevado à potência dois. Observamos que  $\exp(-i\omega x + i\omega\mu_x - \omega^2\sigma_x^2 / 2N)$  pode ser escrito como  $\exp(-\omega^2 A + \omega B)$ , onde  $A = \sigma_x^2 / 2N$  e  $B = i(\mu_x - x)$ , que por sua vez pode se representado como:  $\exp(-\omega^2 A + \omega B) = \exp\left(-\left[\omega\sqrt{A} - B / (2\sqrt{A})\right]^2 + B^2 / (4A)\right)$ . A integral em (B.14) torna-se:

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(B^2 / (4A)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left[\omega\sqrt{A} - B / (2\sqrt{A})\right]^2\right) d\omega \quad (\text{B.15})$$

Fazendo uma mudança de variável em (B.15), chamando  $u = \omega\sqrt{A} - B / (2\sqrt{A})$  e  $du = d\omega\sqrt{A}$  (os índices de integração continuam os mesmos), temos

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \exp(B^2 / (4A)) \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du, \\ p_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \exp(B^2 / (4A)) \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Substituindo os valores de  $A = \sigma_x^2 / 2N$  e  $B = i(\mu_x - x)$  em (B.16) esta equação torna-se

$$p_X(x) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2 N}{2\sigma_x^2}\right). \quad (\text{B.17})$$

Substituindo em (B.17) os valores  $\sigma_x = \sigma_x / \sqrt{N}$  e  $\mu_x = \mu_x$ , chega-se ao resultado final

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right). \quad (\text{B.18})$$

Devemos chamar atenção, novamente, para as considerações que garantem a validade do teorema: as variáveis devem ser independentes e identicamente distribuídas, pois assumimos que  $p(x_1, x_2, \dots, x_N) = p(x_1)p(x_2)\dots p(x_N)$  na expressão em (B.2) e também que  $N \rightarrow \infty$ , a partir de (B.9), devido aos termos de ordem inferiores a  $N^{-2}$  terem sido desprezados nas expansões. A demonstração feita neste apêndice pode ser encontrada em (WEISSTEIN, 2008).

## Momentos da Distribuição Gaussiana

Vamos considerar a distribuição centrada em  $\mu$  e com desvio padrão  $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \mu^2}$  onde  $\mu = \langle x \rangle$ . Os momentos em torno da média da distribuição são

$$\begin{aligned} \langle (x - \mu)^m \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m p(x) dx, \\ \langle (x - \mu)^m \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Vamos fazer uma mudança de variável da forma  $u = (x - \mu) / (2^{\frac{1}{2}}\sigma)$ , portanto  $(x - \mu) = (2^{\frac{1}{2}}\sigma)u \Rightarrow dx = (2^{\frac{1}{2}}\sigma) du$ . Os limites de integração continuam os mesmos. Substituindo a nova variável  $u$  no lado direito de (B.19), chega-se a

$$\begin{aligned} \langle (x - \mu)^m \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (2^{\frac{1}{2}}\sigma \cdot u)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-u^2) (2^{\frac{1}{2}}\sigma) du, \\ \langle (x - \mu)^m \rangle &= \frac{2^{\frac{m}{2}}\sigma^m (2^{\frac{1}{2}}\sigma)}{\sqrt{\pi} 2^{\frac{1}{2}}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} u^m \exp(-u^2) du. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

O integrando em (B.20)  $F(u) = u^m \exp(-u^2)$  é uma função ímpar para  $m$  ímpar, veja que  $F(-u) = -F(u)$ , portanto a integral vale zero sempre que o momento for de ordem ímpar, ou seja, todos os momentos de ordem ímpar são zeros. Para os momentos de ordem par ( $m$  par), podemos reescrever a equação (B.20) da forma

$$\langle (x - \mu)^m \rangle = \frac{(2^{\frac{1}{2}} \sigma)^m}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{d}{da} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-au^2) du, \quad (\text{B.21})$$

e após a derivada de ordem  $m/2$ , fazemos  $a=1$  (que é o seu verdadeiro valor). A integral em (B.21) possui a solução  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-au^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\pi} a^{-\frac{1}{2}}$ , substituindo este valor em (B.21), tem-se

$$\begin{aligned} \langle (x - \mu)^m \rangle &= \frac{\left(2^{\frac{1}{2}} \sigma\right)^m}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \left(-\frac{d}{da}\right)^{\frac{m}{2}} \cancel{\sqrt{\pi}} a^{-\frac{1}{2}}, \\ \langle (x - \mu)^m \rangle &= 2^{\frac{m}{2}} \sigma^m \left[ \left(-\frac{d}{da}\right)^{\frac{m}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Analisando apenas a derivada de (B.22) temos os seguintes valores numéricos:

para  $m=2$ ;

$$\left(-\frac{d}{da}\right) a^{-\frac{1}{2}} = -\left(-\frac{1}{2}\right) a^{-\frac{3}{2}} \Big|_{a=1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}},$$

para  $m=4$ ;

$$\left(-\frac{d}{da}\right)^2 a^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{d}{da}\right) \left(-\frac{d}{da}\right) a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{da}\right) a^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) a^{-\frac{5}{2}} \Big|_{a=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2^{\frac{4}{2}}},$$

para  $m=6$ ;

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{da}\right)^3 a^{-\frac{1}{2}} &= \left(-\frac{d}{da}\right) \left(-\frac{d}{da}\right) \left(-\frac{d}{da}\right) a^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{da}\right) \left(-\frac{d}{da}\right) a^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{d}{da}\right) a^{-\frac{5}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) a^{-\frac{7}{2}} \Big|_{a=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^{\frac{6}{2}}}. \end{aligned}$$

Por indução matemática, pode-se mostrar que a derivada de ordem  $m/2$  é dada por

$$\left(-\frac{d}{da}\right)^{\frac{m}{2}} a^{-\frac{1}{2}} = \frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot a^{-\frac{(m+1)}{2}} \Big|_{a=1} = \frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}}, \quad (\text{B.23})$$

onde  $(m-1)!! = (m-1) \cdot (m-3) \cdot (m-5) \cdot \dots \cdot 1$ . Substituindo (B.23) em (B.22), chega-se a

$$\begin{aligned} \langle (x-\mu)^m \rangle &= 2^{\frac{m}{2}} \sigma^m \left[ \left( -\frac{d}{da} \right)^{\frac{m}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \right], \\ \langle (x-\mu)^m \rangle &= \cancel{2^{\frac{m}{2}}} \sigma^m \left[ \frac{(m-1)!!}{\cancel{2^{\frac{m}{2}}}} \right]. \end{aligned} \tag{B.24}$$

O resultado final fica

$$\begin{aligned} \langle (x-\mu)^m \rangle &= \begin{cases} \sigma^m (m-1)!! & \text{para } m = 2, 4, 6, \dots \\ 0, & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ \sigma &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \mu^2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \langle (x-\mu)^m \rangle &= \begin{cases} (\sigma^2)^{\frac{m}{2}} (m-1)!! & \text{para } m = 2, 4, 6, \dots \\ 0, & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \mu^2 \end{aligned} \tag{B.25}$$

$$(m-1)!! = (m-1) \cdot (m-3) \cdot (m-5) \cdot \dots \cdot 1.$$

## Apêndice C – Movimento Browniano como Solução de uma Equação Diferencial Ordinária Estocástica

A descrição geral de um processo estocástico contínuo é baseada no movimento Browniano  $W(t)$ , escrito matematicamente, de acordo com Sornette (2006, p.35-36), como

$$W(t) = \int_0^t d_u W(u), \quad (\text{C.1})$$

com as propriedades:

$$\begin{aligned} \langle d_t W(t) \rangle &= 0, \quad (\text{média}) \\ \langle d_t W(t)^2 \rangle &= dt, \quad (\text{Variância}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$W(t)$  é chamado Processo *Wiener*. Também  $W(t)$  pode ser escrito como a solução da equação diferencial estocástica

$$\frac{dW(t)}{dt} = \eta(t), \quad (\text{C.3})$$

tal que  $\eta(t)$  representa um ruído Gaussiano caracterizado pela seguinte covariância

$$\langle \eta(t) \cdot \eta(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (\text{C.4})$$

onde  $\delta$  representa a função delta de Dirac. Observa-se que os ruídos são totalmente descorrelacionados. A equação (C.3) mostra que  $dt \eta(t)$  é equivalente a  $d_t W(t)$ . Essa equação descreve uma partícula na posição  $W$ , a qual varia randomicamente com o tempo de acordo com  $\eta(t)$ . O seu significado matemático aparece somente na representação integral

$$W(t) = \int_0^t \eta(v) dv. \quad (\text{C.5})$$

Utilizando (C.4) e (C.5) a covariância de  $W$  pode se calculada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle W(t) \cdot W(t') \rangle &= \int_0^t dv \int_0^{t'} dv' \langle \eta(v) \cdot \eta(v') \rangle \\ &= \int_0^t dv \int_0^{t'} dv' \delta(v - v') = \text{Min}(t, t'). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

De acordo com a referência citada acima, a correlação ente  $W(t)$  e  $W(t')$  é devido à contribuição do conjunto do ruído  $\{\eta\}$  que são comuns entre eles.

## Artigos relacionados à Tese

### Publicado

- Da Silva, M. A. A.; Viswanathan, G. M.; Ferreira, A. S.; Cressoni, J. C. **Spontaneous symmetry breaking in amnestically induced persistence.** Physical Review E, 77, 040101(R), 2008.

### Submetidos

- Ferreira, A.S.; Cressoni, J.C.; Viswanathan. G.M.; Da Silva, M.A.A. **Anomalous diffusions in non Markovian walks having amnestically induced persistence.** Physical Review E.
- Felisberto, M.L.; Passos, F.S.; Ferreira, A.S.; Da Silva, M.A.A.; Cressoni, J.C.; Viswanathan. G.M. **Sudden onset of Log-periodicity and superdiffusion in non-Markovian random walks with amnestically induced persistence: exact results.** EPJB.