

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JÚLIO RAFAEL DA SILVA LEITE

VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ  
NO REGIME DE TEMPERATURA FINITA

Maceió  
2012

JÚLIO RAFAEL DA SILVA LEITE

VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ  
NO REGIME DE TEMPERATURA FINITA

Dissertação apresentada no Instituto  
de Física da Universidade Federal de  
Alagoas, como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Mestre em Física.  
Orientador: Prof. Dr. Tiago Homero  
Mariz do Nascimento

Maceió  
2012

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos**

L533v Leite, Júlio Rafael da Silva.  
Violação da invariância de Lorentz no regime de temperatura finita / Júlio Rafael da Silva Leite. – 2012.  
59 f. : il.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 50-54.  
Apêndices: f. 55-59.

1. Violação da invariância de Lorentz. 2. Teoria de campos à temperatura finita. 3. Operadores de derivada superior. I. Título.

CDU: 53.01



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“Violação da invariância de Lorentz no regime de  
temperatura finita.”**

por

*Júlio Rafael da Silva Leite*

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alexandre Manoel de Morais Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e José Roberto Soares do Nascimento, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba consideram o candidato aprovado com grau **A – Com louvor**.

Maceió, 27 de julho de 2012

  
Prof. Tiago Homero Mariz do Nascimento

  
Prof. Alexandre Manoel de Morais Carvalho

  
Prof. José Roberto Soares do Nascimento

## DEDICATÓRIA

À Ana Lúcia e Sarah Leite.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares que sempre me apoiaram nesta minha trajetória com incentivo e amor. Em especial, minha mãe (Ana Lúcia), meus avós (Maria Dolores e Cordeiro) e minha esposa (Sarah Leite).

Ao meu professor e orientador Tiago Mariz.

Aos professores do IF que me deram aulas no mestrado e graduação, assim como, alguns deles que me ajudaram e me incentivaram, criando um vínculo além da relação professor-aluno, em especial: Carlos Jacinto, Eduardo, Evandro, Fidélis, Heber, Iram, Ítalo, Marcos Vermelho e Tereza.

Não poderia me esquecer de outros dois professores que me influenciaram de forma muito positiva a dar os meus primeiros passos rumo a este caminho que hoje sigo, Hécio Beserra e Sandro Guedes.

Aos diversos colegas e amigos, Álvaro, Carlos, Jéssica, Job, Messias, Moniellen, Paulo, Pedro Heades, Rosa, Rubens, Tamires, Tássius, Thiago, Zé Maria, entre outros.

Aos funcionários do IF que, em geral, são ótimas pessoas, sempre dispostas a ajudar.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Nesta dissertação, estudamos a possibilidade de violação da invariância de Lorentz levando em conta alguns termos do modelo padrão estendido, mais especificamente, da parte deste modelo que trata da eletrodinâmica quântica estendida. Realizamos correções quânticas no setor fermiônico da eletrodinâmica quântica usual adicionada de termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT em duas configurações diferentes. Primeiramente, adicionando operadores governados pelo coeficiente  $g_{\kappa\lambda\mu}$  e, em um momento posterior, adicionando operadores governados pelo coeficiente  $b_\mu$ . Para a teoria com o coeficiente  $g_{\kappa\lambda\mu}$ , realizamos correções quânticas com a intenção de induzir, no setor bosônico da teoria, os termos de Chern-Simons convencional e o de derivada superior, e analisar o comportamento de ambos os termos no regime de temperatura finita, fazendo o uso do método da expansão derivativa e do formalismo de Matsubara. Já para o modelo com o coeficiente  $b_\mu$ , realizamos correções quânticas a fim de induzir, no setor bosônico, o termo de Chern-Simons de derivada superior, usando o método da expansão derivativa e, posteriormente, analisar o comportamento deste termo no regime de temperatura finita, ao utilizarmos novamente o formalismo de Matsubara. Assim, para o primeiro caso, notamos que o termo de Chern-Simons convencional é diferente de zero apenas à temperatura finita, enquanto que, o termo de derivada superior é finito em temperatura zero, porém, tal termo vai a zero quando a temperatura cresce infinitamente. Na segunda parte do nosso estudo, mostramos que o termo de Chern-Simons de derivada superior é induzido no regime de temperatura zero, contudo, tal termo vai a zero quando a temperatura cresce muito.

**Palavras-chave:** Violação da invariância de Lorentz. Teoria de campos à temperatura finita. Operadores de derivada superior.

## ABSTRACT

In this master's thesis, we have studied the possibility of Lorentz invariance violation by considering some terms of the standard-model extension (SME), specifically, those terms which refer to the quantum electrodynamics extension. We have performed quantum corrections in the fermionic sector of the usual quantum electrodynamics with added terms which violate the Lorentz and CPT symmetries in two different configurations. Firstly, adding operators governed by the coefficient  $g_{\kappa\lambda\mu}$  and, in a later time, adding operators governed by the coefficient  $b_\mu$ . In the theory with the coefficient  $g_{\kappa\lambda\mu}$ , we have performed quantum corrections in order to induce, in the bosonic sector of the theory, the conventional Chern-Simons and the higher-derivative terms, and analyze the behavior of both terms in the finite temperature regime, by using the method of derivative expansion and the Matsubara formalism. On the other hand, in the model with the coefficient  $b_\mu$ , we have performed quantum corrections in order to induce, in the bosonic sector, the higher-derivative Chern-Simons term, by using the method of derivative expansion and, subsequently, analyze the behavior of this term in the finite temperature regime, where we have used the Matsubara formalism again. Thus, for the first case, we have observed that the conventional Chern-Simons term is nonzero only at finite temperature, whereas the higher-derivative term is finite at zero temperature, however, this term goes to zero when the temperature increases infinitely. In the second part of our study, we have shown that the higher-derivative Chern-Simons term is induced at zero temperature, nevertheless, this term goes to zero when the temperature increases too much.

**Keywords:** Lorentz invariance violation. Finite temperature field theory. Higher-derivative operators.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	TL passiva: descrição de uma rotação por um ângulo $\phi$ . . . . .	15
2.2	TL ativa: descrição de uma rotação por um ângulo $-\phi$ . . . . .	16
2.3	TL de observador: rotação em um campo de fundo constante . . . . .	16
2.4	TL de partícula: rotação em um campo de fundo constante . . . . .	17
2.5	$S'$ se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação ao capacitor (S) . . . . .	18
2.6	Trajetórias: (1) velocidade inicial $\vec{u}$ ; (2) velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$ . . . . .	20
4.1	Diagramas de Feynman para contribuições de um laço . . . . .	31
4.2	Comportamento da função $F(\xi)$ . . . . .	35
4.3	Comportamento da função $G(\xi)$ . . . . .	38
4.4	Comportamento da função $H_1(\xi)$ . . . . .	39
4.5	Comportamento da função $H_2(\xi)$ . . . . .	39
4.6	Comportamento da função $J(\xi)$ . . . . .	46
4.7	Comportamento da função $K_1(\xi)$ . . . . .	47
4.8	Comportamento da função $K_2(\xi)$ . . . . .	47

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ</b>	<b>11</b>
2.1	As transformações de Lorentz . . . . .	12
2.1.1	As TL's passivas e ativas . . . . .	12
2.1.2	As TL's de observador e de partícula . . . . .	13
2.2	A VIL e exemplos . . . . .	13
2.2.1	Elétron em um campo elétrico de fundo constante . . . . .	14
<b>3</b>	<b>O MODELO TEÓRICO - EDQ ESTENDIDA</b>	<b>21</b>
3.1	Uma visão geral sobre o MPE . . . . .	21
3.1.1	Indícios para VIL . . . . .	22
3.2	A EDQ estendida . . . . .	23
3.2.1	Operadores com dimensão de massa $d \geq 5$ . . . . .	26
<b>4</b>	<b>VIL NO REGIME DE TEMPERATURA FINITA</b>	<b>29</b>
4.1	Parte I - modelo com $g_{\kappa\lambda\mu}$ . . . . .	29
4.1.1	O termo de Chern-Simons . . . . .	30
4.1.2	O termo de derivada superior . . . . .	35
4.2	Parte II - modelo com $b_\mu$ . . . . .	40
4.2.1	O termo de Chern-Simons de derivada superior . . . . .	41
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC</b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>INTEGRAIS DE LAÇO</b>	<b>58</b>
<b>C</b>	<b>FORMALISMO DE MATSUBARA</b>	<b>59</b>

# 1

## INTRODUÇÃO

A natureza, talvez por pura beleza e simplicidade, costuma se expressar através de simetrias. Por tal motivo, é de extrema importância, ao desejarmos entender os processos físicos no universo, aprender a identificar e buscar compreender as simetrias presentes na natureza. Porém, é fundamental deixarmos nossas mentes abertas, pois, com o passar do tempo é comum o surgimento de novas teorias e dados experimentais e/ou observacionais que podem invalidar uma simetria que outrora era aceita como própria da natureza.

Dentro deste contexto, após passar por vários testes ao longo do último século, a simetria de Lorentz se tornou uma propriedade essencial das teorias físicas atuais. Como prova disto, ela está presente no modelo padrão que é o modelo mais bem aceito na descrição das partículas elementares e suas interações, pois, revela grande concordância com os dados experimentais obtidos. Contudo, acredita-se que o modelo padrão fornece apenas o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Por sua vez, uma teoria mais fundamental fornecerá um melhor entendimento da formação e evolução do universo e, conseqüentemente, trará uma descrição quântica para a gravitação, que até hoje não é bem entendida. Para isso, tal teoria deve ser elaborada em uma escala de energia muito maior do que aquela em que trabalhamos atualmente, conhecida como escala de Planck, que é a escala onde os efeitos quânticos da gravitação começariam a influenciar a natureza de forma importante.

Assim, na busca por teorias mais fundamentais da natureza, existem vários exemplos onde o surgimento da violação da invariância de Lorentz (ou simplesmente VIL) ocorre, e então, a validade da simetria de Lorentz entra em questão. Por exemplo, em teorias de cordas [1, 2], onde este processo de quebra de simetria pode ocorrer de forma espontânea e também em teoria de campos não-comutativas [3, 4].

Apesar do estudo de modelos com violação de Lorentz ter começado muitos anos atrás, tendo como um de seus precursores um trabalho sobre eletrodinâmica com violação de Lorentz [5], atualmente uma das teorias mais bem sucedidas no estudo de VIL é o modelo padrão estendido (MPE), formulado por Kostelecky *et al.* e apresentado inicial-

mente em [6, 7]. Tal teoria apresenta correções ao modelo padrão, devido a VIL que viria de teorias mais fundamentais. Desta forma, além dos termos convencionais encontrados no modelo padrão, o MPE contém um conjunto de operadores governados por tensores constantes que apresentam uma direção preferencial no espaço-tempo e assim, violam um tipo especial das transformações de Lorentz, conhecida como transformação de Lorentz de partícula, como mostraremos mais adiante. Embora, o MPE viole a invariância de Lorentz e, em alguns casos, a simetria de CPT (que engloba as simetrias discretas de conjugação de carga C, paridade P e reversão temporal T) também seja violada, o modelo padrão estendido obedece basicamente a todas as outras simetrias do modelo padrão, como  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , conservando várias propriedades importantes.

Em geral, podemos dividir o MPE em duas partes principais, uma conhecida como MPE mínimo e outra como MPE não-mínimo. O MPE mínimo apresenta termos renormalizáveis com operadores de dimensão de massa  $d = 3$  ou  $d = 4$ . Já o MPE não-mínimo apresenta termos não renormalizáveis com operadores de dimensão de massa  $d \geq 5$ . Como a parte mínima do modelo padrão estendido é renormalizável, já foram publicados muitos trabalhos acerca dela, os quais, em geral, apresentam limites muito severos para os coeficientes de violação de Lorentz. Por outro lado, o MPE não-mínimo apresenta limites mais aceitáveis, pois, os termos presentes nesta parte do MPE são naturalmente suprimidos pela massa de Planck ( $M_{Planck}$ ), ou seja, eles são, no mínimo, da ordem de  $1/M_{Planck}$ , enquanto que, os termos do MPE mínimo não tem um ordem de grandeza bem definida. Somado a isso, outra forte motivação para estudar violação de Lorentz por operadores com dimensão de massa  $d \geq 5$  é que, como foi mostrado em [8], a menor dimensão para tais operadores no contexto de teorias supersimétricas com invariância de calibre é  $d = 5$ . Além disso, os operadores com dimensão de massa  $d \geq 5$ , apesar de muito pequenos, parecem ser especialmente relevantes em estudos envolvendo altíssimas energias, contribuindo com novas correções. Desta forma, novos estudos sobre estes operadores que aqui serão chamados também de operadores de derivadas superiores, por apresentar mais derivadas que o usual, são necessários. Em especial, vamos nos basear em [9], que trata de operadores com dimensão de massa arbitrária no setor bosônico da eletrodinâmica quântica com violação de Lorentz, para a realização deste trabalho.

Desta maneira, nesta dissertação temos como objetivo o estudo da indução e compreensão, principalmente no regime de temperatura finita, de termos no setor bosônico da eletrodinâmica quântica (EDQ) estendida, associados com operadores de dimensão de massa  $d = 3$  e especialmente  $d = 5$ , a partir de dois diferentes termos que violam CPT e a simetria de Lorentz, oriundos do setor fermiônico da mesma teoria.

No próximo capítulo, apresentaremos os tipos de transformações de Lorentz (ou TL's). Então, focaremos nas TL's de partícula e como elas podem ser violadas. Por fim, apresentaremos alguns exemplos simples onde a VIL ocorre.

No capítulo 3, apresentaremos a EDQ estendida contida no modelo padrão esten-

---

dido que é a parte mais importante para esta dissertação e então, mostraremos algumas possíveis formas de obtermos indícios experimentais e observacionais a favor da violação de Lorentz. Em seguida, introduziremos os possíveis operadores de altas dimensões de massa presentes no setor bosônico da EDQ estendida e apresentaremos o tipo específico de operador que estamos interessados em estudar.

Mais adiante, no capítulo 4, escolheremos os termos da EDQ estendida que queremos estudar. E então, apresentaremos nossos cálculos e resultados obtidos ao tentarmos induzir, através de correções quânticas, operadores que violam a simetria de Lorentz. Estas análises serão feitas principalmente no regime de temperatura finita, usando o formalismo do tempo imaginário ou formalismo de Matsubara.

Finalmente, apresentaremos nossas principais conclusões acerca do estudo realizado.

Durante toda esta dissertação, utilizaremos as unidades naturais, ou seja, consideraremos  $\hbar = c = k_B = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $k_B$  é a constante de Boltzmann. Além disso, a métrica adotada apresenta os seguintes elementos diagonais  $(+1, -1, -1, -1)$ .

## 2

# A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ

No início do século passado, mais precisamente em 1905, o físico Albert Einstein publicou vários trabalhos importantes que revolucionaram a forma como olhamos o universo. Dentre estes trabalhos revolucionários, Einstein apresentou a teoria da relatividade especial (ou restrita) que, baseada em dois postulados básicos, previu que a natureza pode se comportar de uma maneira bem diferente do que podemos imaginar ao observar o mundo cotidiano.

A partir dos postulados da nova teoria de Einstein, foi observado que as transformações realizadas para relacionar diferentes referenciais inerciais deveriam ser diferentes daquelas de Galileu, as quais eram aceitas na época. Pois, a partir daquele momento, notou-se que tais transformações, além de continuar respeitando o primeiro postulado da teoria: i) as leis da física são idênticas em quaisquer referenciais inerciais; deveriam obedecer ao segundo dos postulados: ii) a velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial inercial. Desta forma, Einstein notou que as transformações que estavam amplamente de acordo com sua teoria eram as já conhecidas transformações de Lorentz (TL's).

Portanto, após o desenvolvimento da teoria da relatividade especial, as novas teorias físicas foram aos poucos englobando as TL's como simetrias a serem respeitadas e, assim, elas obtiveram grande êxito ao descrever os fenômenos físicos. Como é o caso, por exemplo, do modelo padrão das partículas elementares, ou simplesmente modelo padrão. Contudo, como comentamos no capítulo anterior, existem indicações para acreditarmos que a simetria de Lorentz pode ser violada em algum momento na natureza, principalmente em regimes com altíssimas energias, os quais ainda não podemos estudar a fundo devido, principalmente, a impossibilidades tecnológicas. Conseqüentemente, devido a esta possibilidade de quebra da simetria de Lorentz, surgiram vários trabalhos explorando o tema e suas possíveis conseqüências, como em [5, 7, 10] entre vários outros.

Nas próximas seções deste capítulo, apresentaremos os tipos diferentes de transformações de Lorentz e, então, explicaremos qual o tipo de VIL que estamos interessados. Por fim, forneceremos alguns exemplos simples.

## 2.1 As transformações de Lorentz

No âmbito da relatividade especial, as transformações de Lorentz<sup>1</sup> indicam as maneiras como rotações ou mudanças de velocidade (empurrões, boosts), que ocorrem em um dado sistema físico, relacionam-se a partir do ponto de vista de diferentes observadores inerciais, de forma que respeitem os dois postulados da teoria de Einstein. As rotações podem ser realizadas em relação a cada um dos eixos espaciais do sistema de referência adotado, no caso do espaço-tempo  $4D$ , temos rotações com relação aos três eixos espaciais. Da mesma forma, os boosts podem ser divididos em três tipos, cada um sendo uma mudança de velocidade com relação a um dos eixos espaciais.

No entanto, não existe apenas uma forma de realizarmos estas transformações. Na verdade, podemos classificar vários diferentes tipos de TL's. Na literatura respectiva a este assunto, os nomes das transformações acabam variando de autor para autor, não chegando a um consenso sobre como denominá-las. Para explicar os tipos de TL's, vamos seguir as denominações usadas em [13]. Portanto, usando tal denominação, podemos dividir as transformações de Lorentz em transformações passivas, ativas, de observador e de partícula.

Neste primeiro momento, vamos apenas descrever como estas transformações são realizadas e, posteriormente na seção de exemplos, veremos esquematicamente como elas realmente ocorrem.

### 2.1.1 As TL's passivas e ativas

As transformações de Lorentz passivas são aquelas que relacionam, através de rotações ou boosts, dois referenciais inerciais, de forma que os pontos do espaço-tempo permanecem fixos. De uma forma geral, este tipo de TL's é o mais comum e o primeiro a ser estudado em um curso sobre relatividade espacial.

Já as transformações ativas, são basicamente as transformações inversas das passivas. Neste caso, ao invés de relacionarmos dois sistemas de referência inerciais e mantermos o sistema físico fixo, aplicamos a transformação diretamente na partícula ou campo de interesse (ou seja, nos pontos do espaço-tempo) e relacionamos as mudanças ocorridas

---

<sup>1</sup>Como livros-texto sobre relatividade restrita e, por conseguinte, transformações de Lorentz, veja [11, 12].

sem alterar o referencial.

Portanto, estes dois tipos de transformações estão relacionados de maneira muito simples, por exemplo, descrever uma rotação de um dado sistema, por um ângulo qualquer  $\phi$  usando uma transformação passiva, é equivalente a descrever uma rotação de um ângulo  $-\phi$  através de uma transformação ativa, como veremos mais adiante ainda neste capítulo. Assim, tanto faz visualizarmos uma rotação por meio de uma TL passiva ou ativa, pois, independente do tipo de transformação usada, vamos observar a mesma física acontecendo (é importante ressaltar que na presença de um campo de fundo estas descrições podem mudar, como veremos mais adiante). Ao fazermos uma análise semelhante para os boosts de Lorentz, chegamos a mesma conclusão, a física descrita é a mesma se a escolhermos um ou outro tipo de transformação.

### 2.1.2 As TL's de observador e de partícula

Diferentemente das TL's passiva e ativa, as transformações de observador e de partícula são realizadas quando o sistema apresenta um campo de fundo, ou seja, quando o sistema se apresenta imerso em um campo qualquer onde não temos acesso às suas fontes.

De uma forma geral, podemos definir as TL's de observador como TL's passivas na presença de um campo de fundo e, assim, a interpretação é bastante similar ao caso sem a presença do campo de fundo. No entanto, as transformações de partícula, além de serem uma generalização para as transformações ativas na presença de um campo de fundo, apresentam uma característica de fundamental importância: o fato de que tais transformações são realizadas diretamente em partículas ou campos localizados e não alteram os valores esperados dos campos de fundo presentes [7]. Sendo assim, bastante diferente do que ocorre com as transformações de observador, onde os campos de fundo “sentem” as transformações de observador, como veremos nos exemplos mais adiante.

Com estas definições, é fácil observar que as transformações de Lorentz ativas e passivas, são casos especiais das transformações de observador e de partícula, respectivamente. Portanto, quando o campo de fundo é nulo, as transformações de observador e partícula representam a mesma coisa que as TL's passiva e ativa, respectivamente.

## 2.2 A VIL e exemplos

Compreendendo os tipos de TL's e suas diferenças, estamos prontos para visualizar o que se passa quando dizemos que houve uma VIL e, então, analisar alguns exemplos básicos.



Se por um lado, em situações onde temos um campo de fundo, suponhamos um campo vetorial, ao realizarmos TL's de observador, o campo de fundo se transforma perfeitamente como um campo vetorial. Por outro lado, quando realizamos TL's de partícula, o campo de fundo acaba se transformando como um campo escalar, pois, como já citamos, as TL's deixam inalterados os valores dos campos de fundo. Assim, depois destas transformações, notamos duas situações físicas diferentes, logo, estas transformações não podem ser mais consideradas como invariantes. Então, devido à este efeito atípico relacionado com as transformações de partícula, concluímos que neste caso há uma quebra de simetria de Lorentz sob a transformação de partícula. Neste trabalho, estamos interessados exatamente nesse tipo de violação, portanto, toda vez que citarmos uma VIL, estamos nos referindo a uma quebra de simetria, ou violação de invariância, relacionada com as TL's de partícula.

Desta maneira, ao saber do que se trata a VIL ou quebra de simetria de partícula, vale a pena explicitar que a teoria estudada nesta dissertação mantém a invariância sob as TL's de observador. Consequentemente, ao manter a invariância sob as TL's de observador, a teoria mantém uma característica muito importante: a garantia de que a física descrita é independente da escolha do sistema de referência.

Para mostrar como a VIL ocorre na prática, vamos analisar alguns exemplos.

### 2.2.1 Elétron em um campo elétrico de fundo constante

Nos exemplos seguintes, vamos supor um elétron imerso em um campo elétrico de fundo constante, gerado por uma capacitor de placas paralelas, da mesma forma que em [13].

#### Análise de uma rotação

Inicialmente, vamos assumir que o campo de fundo é nulo. Então, suponhamos que o elétron imerso neste sistema sofra uma rotação por um ângulo  $\phi$ , à princípio, podemos descrever esta rotação através de uma TL passiva ou uma ativa, pois, o campo de fundo é nulo.

No caso de uma rotação passiva, de acordo com a Fig. 2.1, rotacionamos o referencial  $S$  por um ângulo  $\phi$ , de forma que, após a rotação teremos um novo referencial  $S'$ .

Assim, podemos relacionar matematicamente estes dois referencias que descrevem

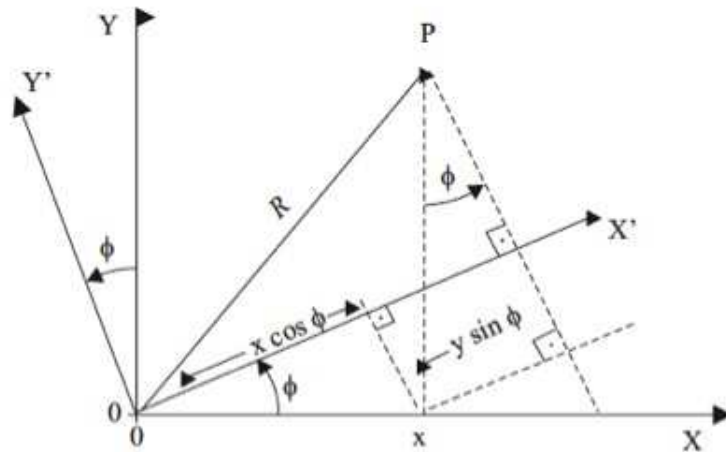
uma rotação do ponto de vista passivo, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

ou ainda, podemos escrever a expressão matricial acima em sua forma infinitesimal, levando em conta apenas a primeira ordem na expansão de  $\phi$ , como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

**Figura 2.1: TL passiva: descrição de uma rotação por um ângulo  $\phi$**



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Já no caso de uma rotação ativa, rotacionamos os pontos do espaço-tempo por um ângulo  $-\phi$  (Fig. 2.2).

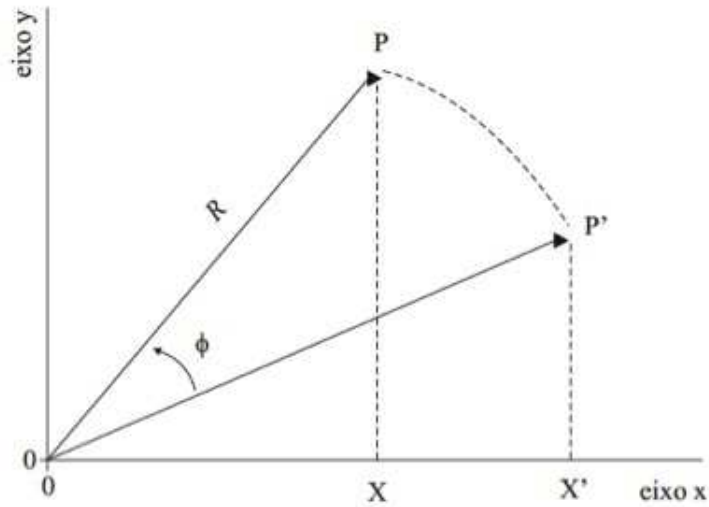
Então, podemos representar esta transformação ativa usando a seguinte expressão,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

ou ainda, usando a sua versão infinitesimal,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Logo, independente de qual tipo de transformação queremos levar em conta, passiva ou ativa, notamos que uma rotação passiva por um ângulo  $\phi$  tem o mesmo efeito de uma rotação ativa por um ângulo  $-\phi$ . Portanto, fica a nosso critério qual das transformações

Figura 2.2: TL ativa: descrição de uma rotação por um ângulo  $-\phi$ Fonte: Belich *et al.*, 2007

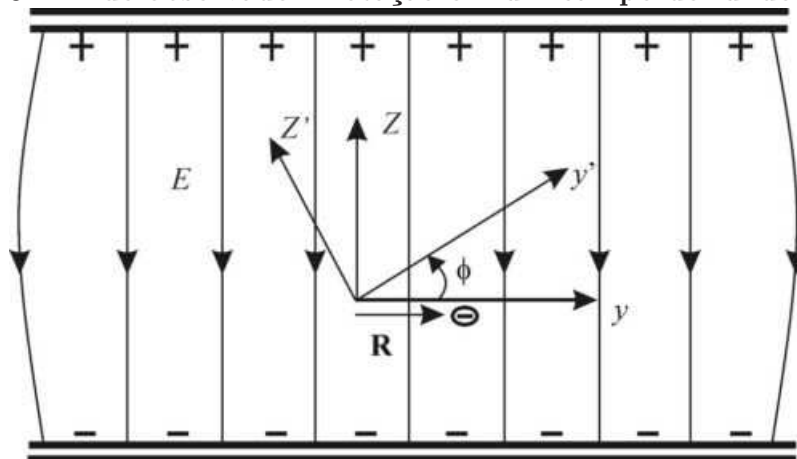
usar para descrever o sistema físico, sem nenhum tipo de ônus nos resultados físicos.

Por outro lado, as coisas começam a ficar mais interessantes quando temos a presença de um campo de fundo interagindo com o sistema e é isso que vamos estudar agora.

Supondo então, que o campo de fundo gerado por um capacitor de placas paralelas é “ligado”, vamos realizar transformações semelhantes as que fizemos quando não havia campo de fundo e analisar se escolha arbitrária do tipo de transformação influencia ou não nos resultados físicos.

Neste exemplo, vamos observar uma rotação por um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  em meio a um campo elétrico de fundo constante na direção  $z$ , especificando a posição inicial do elétron pelo vetor posição  $\vec{R} = (0, a, 0)$ . A esquematização para a transformação de observador é mostrada na Fig. 2.3.

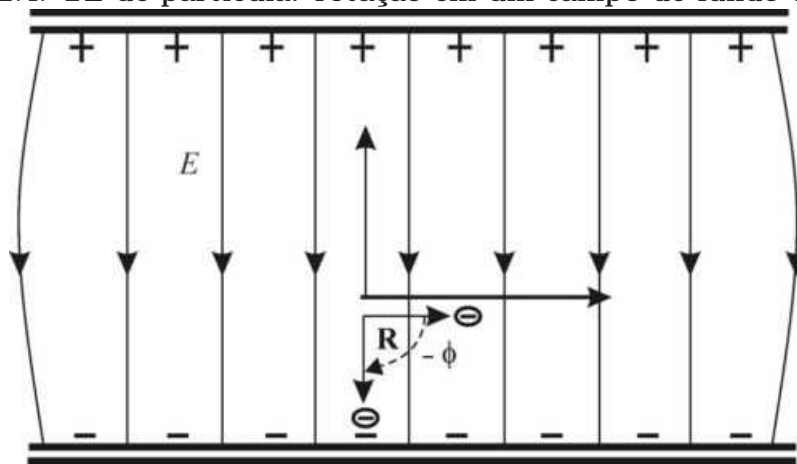
Figura 2.3: TL de observador: rotação em um campo de fundo constante

Fonte: Belich *et al.*, 2007

Logo, usando transformações de observador para descrever a transformação, é fácil notar que após a rotação por um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianos, o vetor posição segue perpendicular ao campo elétrico de fundo, ou seja, após a rotação ( $\vec{R} \perp \vec{E}$ ).

Já na rotação de partícula, somos induzidos a realizar uma rotação de  $-\frac{\pi}{2}$  radianos, pois, como vimos no exemplo onde o campo de fundo era nulo, uma rotação passiva por um ângulo  $\phi$  corresponde a uma rotação ativa por um ângulo  $-\phi$ . Generalizando isto para sistemas com campo de fundo, poderíamos esperar que uma rotação de observador por um dado ângulo fosse fisicamente equivalente a uma rotação de partícula pelo inverso deste ângulo. Essa nova rotação é mostrada pela Fig. 2.4.

**Figura 2.4: TL de partícula: rotação em um campo de fundo constante**



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Diferente do que aconteceu no exemplo anterior, notamos que na presença de um campo de fundo ocorre uma violação da invariância de Lorentz, pois, como podemos observar, após uma rotação de partícula de  $-\frac{\pi}{2}$  radianos, o vetor posição se torna paralelo ao campo de fundo ( $\vec{R} \parallel \vec{E}$ ). Portanto, descreve uma situação física diferente daquela observada ao efetuarmos uma rotação ativa por um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianos onde no fim da rotação  $\vec{R} \perp \vec{E}$ .

### Análise de um boost

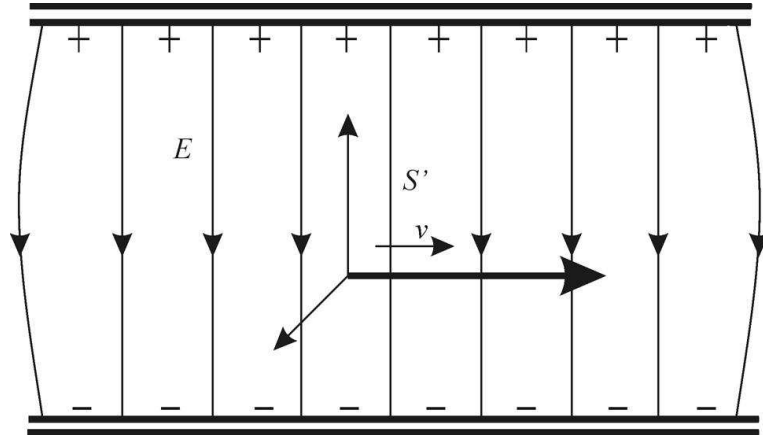
Além de rotações, outros tipos de transformações de Lorentz que devemos levar em conta são os boosts.

Vamos agora, analisar a quebra de invariância de Lorentz ao se descrever um boost em um sistema dado por um elétron localizado em um campo elétrico de fundo constante, usando um capacitor de placas paralelas como no caso da rotação.

Para estudar este exemplo, vamos estabelecer dois referenciais, o referencial  $S$  onde o capacitor se encontra em repouso e o referencial  $S'$  que se move com velocidade  $\vec{v}$

paralela ao capacitor<sup>2</sup>, como podemos observar na Fig. 2.5.

Figura 2.5:  $S'$  se movendo com velocidade  $\vec{v}$  em relação ao capacitor ( $S$ )



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Efetuada uma transformação de observador para analisar um boost, podemos relacionar os campos observados pelos dois referenciais da seguinte maneira,

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.5)$$

$$\vec{B}' = -\frac{\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2} \quad (2.6)$$

Desta forma, notamos a presença de um “novo” campo elétrico  $\vec{E}'$ , devido a presença do fator  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  e, além disso, notamos a presença de um campo magnético  $\vec{B}'$ , que é perpendicular a velocidade e ao campo elétrico.

Por outro lado, se observarmos este sistema por uma transformação de partícula, vemos que o elétron recebe um boost, enquanto que, as placas do capacitor permanecem imóveis. Então, durante este processo o campo de fundo não está variando, isto é,

$$E'(x') = E(x). \quad (2.7)$$

Nesta situação, levando em conta a transformação de partícula, somente o elétron está se movendo com velocidade  $-\vec{v}$ , pois, as placas permanecem fixas fazendo com que o campo elétrico de fundo não se modifique. Assim, o campo elétrico se comporta como um escalar e, mais uma vez, notamos que a física descrita num sistema com violação nas TL's de partícula pode apresentar características diferentes daquelas esperadas.

<sup>2</sup>Para entender como campos eletromagnéticos se transformam (TL's de observador) devido a boosts, dentro do contexto relativístico, ver [14].

Adicionalmente, é interessante analisar o movimento do elétron de acordo com estes dois tipos de transformações. Para isso, vamos supor um elétron, com carga elétrica  $e$ , movendo-se com velocidade  $\vec{u}$  paralelamente às placas do capacitor. Neste caso, a força que o elétron sente é  $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ . Como a força é a variação do momento linear com relação ao tempo ( $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ), e como em  $t = 0$ , temos  $p_y = 0$ , podemos escrever:

$$p = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2}} = Ft. \quad (2.8)$$

Com isso, podemos isolar a função que descreve a velocidade na direção  $y$ , ou seja,

$$u_y = \frac{\left(\frac{F}{m}\right)t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \quad (2.9)$$

Seguindo nossa análise, podemos, a partir da expressão anterior (2.9), realizar uma integração temporal e obter a função que descreve a posição vertical do elétron em função do tempo, isto é,

$$y(t) = \frac{mc^2}{F} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right), \quad (2.10)$$

que apresenta uma forma hiperbólica. Diferente do caso não-relativístico, onde naturalmente encontraríamos um movimento descrevendo uma parábola.

Por outro lado, o observador  $S'$ , em movimento, verá o elétron submetido a uma força

$$\vec{F}' = e \frac{\vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.11)$$

Portanto, a partir desta expressão, podemos obter a trajetória do elétron, que é descrita por

$$y'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} y(t). \quad (2.12)$$

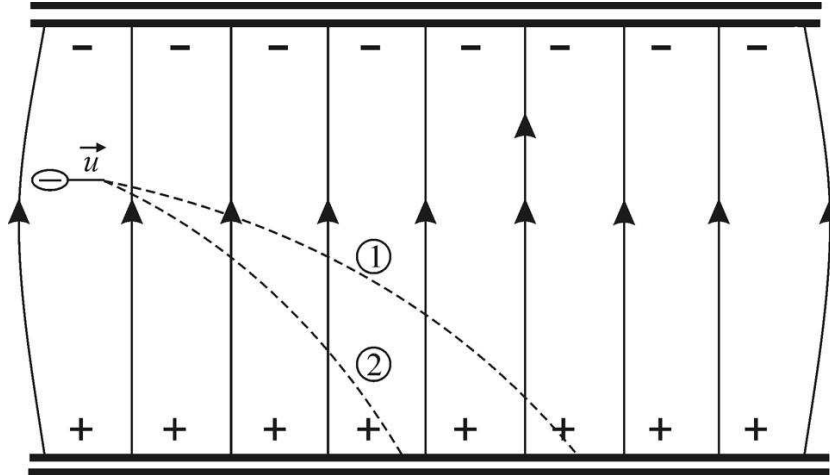
Da forma semelhante obtemos o alcance do elétron ( $x(t)$ ),

$$x'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x(t). \quad (2.13)$$

Sob o ponto de vista da transformação de partícula, o campo de fundo fica inalterado e aplicamos um “boost” na partícula de  $-\vec{v}$ . Desta forma, o observador S verá o

elétron cair em queda livre apresentando como alcance  $A = (u - v)t_q$ , onde  $t_q$  é o tempo de queda. No caso anterior tínhamos o elétron se movendo com velocidade  $\vec{u}$ , portanto, o alcance no caso da transformação de observador é maior como podemos ver em Fig. 2.6.

Figura 2.6: Trajetórias: (1) velocidade inicial  $\vec{u}$  ; (2) velocidade inicial  $\vec{u} - \vec{v}$



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Portanto, através destes simples exemplos, podemos ter uma noção básica de como um campo de fundo pode gerar uma quebra na transformação de Lorentz de partícula, ou seja, contribuindo para o que chamamos de violação da invariância de Lorentz. Contudo, neste nosso trabalho, esperamos que estes campos de fundo constantes surjam de uma quebra espontânea de simetria em teorias mais fundamentais e não da forma “manipulada” como vimos nos exemplos. Logo, a VIL seria algo próprio da natureza.

# 3

## O MODELO TEÓRICO - EDQ ESTENDIDA

Neste capítulo, vamos falar de forma geral e breve sobre o modelo padrão estendido (MPE) e, então, focar na parte deste modelo que é tomada como base nesta dissertação, a eletrodinâmica quântica com violação de Lorentz ou, ainda, EDQ estendida.

Inicialmente, apresentaremos algumas das motivações para a formulação e estudo deste modelo teórico, e citaremos algumas possibilidades experimentais e observacionais que podem ser usadas para detectar algum indício da violação da invariância de Lorentz, de acordo com as previsões teóricas do MPE. Em seguida, mostraremos a lagrangiana que descreve a extensão da eletrodinâmica quântica usual, analisando algumas características importantes dos novos termos. Concluiremos o capítulo apresentando os operadores de dimensão de massa  $d \geq 5$  que podem ser adicionados nos setores bosônico e fermiônico da teoria, pois a indução e compreensão do comportamento destes operadores, em especial no regime de temperatura finita, é de fundamental importância nesta dissertação.

### 3.1 Uma visão geral sobre o MPE

O modelo padrão usual juntamente com a teoria da relatividade geral, ao que tudo indica, formam o que consideramos como o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Desta forma, esperamos que ao encontrarmos esta teoria mais fundamental, ela nos ajude a solucionar várias questões ainda em aberto como, por exemplo, prover uma descrição consistente para a gravitação quântica.

Como é esperado atualmente, a gravitação quântica deve apresentar efeitos relevantes numa escala de altas energias, conhecida como escala de Planck. Nesta escala a massa de referência é conhecida como massa de Planck,  $M_{Planck} \approx 10^{19} GeV$ . Por outro



lado, o modelo padrão apresenta resultados eficazes numa escala de energia muito menor, conhecida como escala eletrofraca, onde a massa de referência é  $m_W \approx 10^2 GeV$ . Isto sugere que os sinais experimentais observáveis a partir de uma teoria fundamental são possivelmente suprimidos por alguma potência da razão  $r \approx m_W/m_P \approx 10^{-17}$  [7]. Logo, ao considerarmos que a violação da invariância de Lorentz surja a partir de teorias mais fundamentais, como em teorias de cordas, é natural esperarmos que os efeitos físicos desta violação sejam bastante pequenos e então, a possibilidade de observarmos indícios desta violação só existiria através de experimentos que apresentem altíssima sensibilidade.

Portanto, é neste cenário de busca por efeitos de violações de Lorentz oriundos de teorias mais fundamentais que surge o modelo padrão estendido [6, 7]. O MPE apresenta a estrutura do modelo padrão usual acrescida de termos que apresentam explicitamente VIL. Este modelo teórico surgiria de uma teoria mais fundamental, na qual sua lagrangiana pode ser invariante sob ambas transformações de Lorentz, de observador e de partícula, e mesmo assim, existir a possibilidade de algumas de suas interações causarem quebra espontânea da simetria de Lorentz.

Como já ressaltamos na introdução, podemos separar o MPE em duas partes principais: o MPE mínimo e o não mínimo. Enquanto que o MPE mínimo apresenta apenas operadores renormalizáveis de dimensão de massa  $d = 3$  ou  $d = 4$ , a parte não mínima apresenta todos os outros operadores com dimensão de massa  $d \geq 5$ , ou seja, operadores não renormalizáveis.

Porém, apesar do MPE mínimo ter recebido a maior parte da atenção no começo do desenvolvimento da teoria, ultimamente, os operadores de dimensão de massa  $d \geq 5$  têm sido bastante estudados devido a fortes motivações como, por exemplo, estudos realizados com teorias supersimétricas e também devido ao melhor entendimento da origem da ordem de grandeza destes operadores que são naturalmente suprimidos pela massa de Planck, como citamos anteriormente. Portanto, levando em conta estas motivações e a necessidade de aprofundarmos nossos conhecimentos neste grupo de operadores menos explorados, vamos neste trabalho estudar operadores pertencentes ao MPE não mínimo, mais especificamente pertencentes à parte do MPE não mínimo que trata da eletrodinâmica quântica, considerando principalmente aqueles operadores com dimensão de massa  $d = 5$  no regime de temperatura finita.

### 3.1.1 Indícios para VIL

Assim como todas teorias físicas, o MPE necessita de dados obtidos por meios experimentais e/ou observacionais para comprovar sua validade. Apesar desta tarefa ser um pouco complicada, pois esperamos que as correções devido a VIL sejam muito pequenas, caso contrário já teríamos detectado-as, podemos obter estes dados através de

uma gama muito grande de experimentos e, também, através de observações astrofísicas. Alguns desses indícios para a comprovação da VIL na natureza, podem ser obtidos das seguintes maneiras:

Oscilações de neutrinos [15, 16, 17];

Oscilações de kaons [18, 19];

Experimentos com comparação de relógios [20, 21, 22];

Dados do setor bosônico [23, 24, 25, 26];

Dados do setor gravitacional [27, 28], entre outros;

Como no capítulo seguinte, apresentaremos como um de nossos resultados uma estimativa para um coeficiente ( $b_\mu$ ) que viola Lorentz a partir de observações relacionadas a birrefringência no vácuo, fenômeno esse que deve ocorrer no setor bosônico da nossa teoria com violação de Lorentz, então, vamos agora explicar de forma simples e concisa como se dá a birrefringência no vácuo.

Sendo um efeito interessante e importante na nossa teoria, a birrefringência no vácuo é uma das assinaturas da violação de Lorentz, pois a partir de soluções de ondas-planas obtidas no setor bosônico da EDQ estendida, notamos que, devido a violação de Lorentz, a propagação da luz no vácuo pode ser vista como uma superposição de dois modos que diferem na polarização e na velocidade. A diferença na velocidade de fase entre os modos causa um desvio na fase relativa entre eles durante a propagação, o que altera a superposição e, assim, produz a birrefringência cósmica [9]. Tal efeito pode ser testado a partir de radiação emitida por fontes pontuais, assim como, da luz proveniente da radiação cósmica de fundo.

## 3.2 A EDQ estendida

Após termos comentado de forma geral acerca do MPE, vamos entrar em detalhes na parte desta teoria que trata da eletrodinâmica quântica.

A EDQ usual<sup>1</sup>, que é a teoria quântica de campos para a eletrodinâmica (de Maxwell), estuda como a luz e a matéria se comportam e interagem. Tal teoria foi uma das primeiras a obedecer os postulados da relatividade especial e da teoria quântica simultaneamente. Além disso, a EDQ é uma das teorias mais bem-sucedidas da física, pois apresenta ótima precisão quando comparamos suas previsões teóricas com os dados experimentais obtidos. Devido a tamanha importância para o entendimento da natureza, ela é parte integrante do modelo padrão das partículas elementares.

---

<sup>1</sup>como livros-textos de EDQ veja, por exemplo [29, 30]

Contudo, apesar das características positivas presentes na EDQ usual, sabemos da possibilidade da quebra da simetria de Lorentz, proveniente de teorias mais fundamentais, como já citamos algumas vezes. Portanto, é extremamente válido e interessante o estudo de um modelo mais geral para a EDQ, que englobe os sucessos da teoria atual e que abra a possibilidade de visualizarmos os efeitos de uma possível VIL. Logo, com este intuito, temos dentro do MPE uma parte voltada para o estudo da EDQ com violação de Lorentz, conhecida simplesmente como EDQ estendida.

Porém, antes da formulação do MPE já haviam sido realizados alguns estudos sobre EDQ com violação de Lorentz. Um dos trabalhos pioneiros sobre o assunto foi publicado em 1990, por Jackiw *et al.* [5], onde os autores adicionam um termo de Chern-Simons, governado por um tensor constante, à lagrangiana de Maxwell quebrando a simetria de Lorentz. No fim do trabalho, através de dados colhidos em testes astrofísicos, os autores encontram limites numéricos para este termo e para a massa que o fóton deveria apresentar na teoria. No entanto, os limites encontrados foram muito pequenos, de forma que, não foram observadas correções importantes à EDQ usual na escala de energia investigada. Ainda assim, mesmo após deste primeiro resultado negativo, surgiram novos modelos que apresentaram melhores limites para a violação de Lorentz na EDQ, como é o caso da EDQ estendida.

Desta forma, vamos voltar nossa atenção para a EDQ estendida, em especial, vamos agora analisar a EDQ estendida mínima, ou seja, a formulação da EDQ estendida que apresenta apenas operadores renormalizáveis com dimensão de massa  $d = 3$  ou  $d = 4$ . A densidade de lagrangiana (ou simplesmente, lagrangiana) desta teoria, é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$  e  $M = m + M_1$ , com

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= c^{\nu\mu}\gamma_\nu + d^{\nu\mu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda\mu}\sigma_{\kappa\lambda}, \\ M_1 &= a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nas expressões acima, adotamos a definição usual de derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ , assim como, a definição convencional do tensor intensidade do campo eletromagnético  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

Da lagrangiana (3.1), a seguinte parte:  $\mathcal{L}_{EDQ} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}m\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  representa a lagrangiana da eletrodinâmica quântica usual, enquanto que, os outros termos adicionados são responsáveis pela violação da invariância de Lorentz. Consequentemente, os vários novos termos que violam a invariância de Lorentz, são governados pelos seguintes tensores constantes:  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_{\nu\mu}$ ,  $d_{\nu\mu}$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_{\kappa\lambda\mu}$  e  $H_{\mu\nu}$ , no setor fermiônico, enquanto que no setor bosônico, temos  $(k_{AF})_\mu$  e  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ . Além da VIL, os termos que possuem

coeficientes com uma quantidade ímpar de índices também apresentam violação de CPT, são eles:  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_{\kappa\lambda\mu}$  e  $(k_F)_\mu$ , como podemos ver na tabela 1 que além disso, mostra detalhadamente as simetrias discretas violadas e conservadas pelos operadores contraídos com as componentes dos coeficientes que governam a violação de Lorentz. Vale lembrar que os coeficientes que governam os termos com violação de Lorentz e de CPT estão relacionados com valores esperados no vácuo de campos tensoriais de alguma teoria subjacente.

Além disso, através de uma simples análise dimensional na lagrangiana (3.1), podemos concluir que os coeficientes  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $H_{\mu\nu}$  e  $(k_{AF})_\mu$  tem dimesão de massa, enquanto os outros são adimensionais. Também é importante ressaltar que devido ao fato da lagrangiana ser hermitiana, todos os coeficientes apresentados acima devem ser reais. Podemos ainda citar algumas características importantes destes coeficientes, como por exemplo, o fato dos coeficientes  $c_{\nu\mu}$  e  $d_{\nu\mu}$  poderem ser tratados como tendo traço nulo, o coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$  ser antissimétrico nos seus dois primeiros índices e  $H_{\mu\nu}$  ser antissimétrico. Já o coeficiente  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  apresenta as propriedades de simetria do tensor de Riemann e é duplamente sem traço:

$$\begin{aligned} (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} &= (k_F)_{\mu\nu\kappa\lambda} = -(k_F)_{\lambda\kappa\mu\nu}, \\ (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} + (k_F)_{\kappa\mu\nu\lambda} + (k_F)_{\kappa\nu\lambda\mu} &= 0, \\ (k_F)_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Tabela 1: Coeficientes e simetrias discretas**

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, (k_F)_{0j0k},$ $c_{jk}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
$a_0, e_0, f_j$	-	+	+	-	-	+	-
$H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}$	-	+	-	-	+	-	+
$H_{0j}, d_{00}, d_{jk}$	-	-	+	+	-	-	+
$a_j, e_j, f_0$	-	-	-	+	+	+	-

Fonte: Kostelecky *et al.*, 2002

Como podemos observar pela lagrangiana (3.1), todos os índices aparecem devidamente contraídos, de forma que os termos da lagrangiana são, de fato, escalares de Lorentz. Desta maneira, podemos considerar que esta teoria independe da escolha do sistema de coordenadas, portanto ela respeita a simetria de Lorentz do ponto de vista das transformações de observador. Por outro lado, as transformações de Lorentz de partícula

deixam os coeficientes,  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $c_{\nu\mu}$ ,  $d_{\nu\mu}$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$ ,  $g_{\kappa\lambda\mu}$ ,  $H_{\mu\nu}$ ,  $(k_F)_\mu$  e  $(k_{AF})_{\kappa\lambda\mu\nu}$ , invariantes, de forma que podemos ter uma interpretação física diferente daquela obtida após uma transformação de observador, apresentando assim, uma quebra nas transformações de Lorentz de partícula, ou simplesmente, uma VIL.

Ao longo do últimos anos, após a apresentação dessa extensão do modelo padrão em [6, 7], muitos trabalhos foram desenvolvidos tomando como base a EDQ estendida e de forma mais geral, o MPE. Muitos destes trabalhos apresentam importantes conceitos e resultados teóricos e outros, além disso, apresentam maneiras de detectar consequências da VIL na natureza através de experimentos e observações e, conseqüentemente, as estimativas numéricas obtidas pelas análises dos dados experimentais e observacionais para os termos com violação de Lorentz presentes na teoria. Podemos citar como alguns dos muitos trabalhos realizados acerca do MPE, as referências [31, 32, 33, 34, 35, 36, 9, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

### 3.2.1 Operadores com dimensão de massa $d \geq 5$

Vamos agora concentrarmo-nos nos operadores da EDQ estendida presentes na parte não mínima da teoria. Desta maneira, tais operadores têm dimensão de massa  $d \geq 5$  e aparecem contraídos com coeficientes de dimensão de massa  $d \leq -1$ , causando violação de Lorentz e em alguns casos violação da simetria CPT também.

Dentro deste contexto, o trabalho [9] apresenta um interessante estudo no setor bosônico da EDQ estendida, classificando todos os operadores com duas contribuições do campo bosônico ( $A^\mu$ ) e com dimensão de massa arbitrária que, apesar de manterem a simetria de calibre  $U(1)$  e a invariância sob as translações espaço-temporais, conservando assim a carga, energia e momento do sistema, violam a simetria de Lorentz e alguns deles violam a CPT também.

Como é apresentado em [9], a forma geral destes operadores, é dada por

$$S_{(d)} = \int d^4x \mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d} A_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3} \cdots \partial_{\alpha_d} A_{\alpha_2}, \quad (3.4)$$

onde  $d$  é a dimensão do operador tensorial e os coeficientes  $\mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d}$  têm dimensão de massa  $4 - d$ .

Por um lado, para termos que não apresentam violação de CPT, os primeiros quatro índices do coeficiente  $\mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d}$  têm as simetrias do tensor de Riemann e apresentam simetria total nos  $d - 4$  índices restantes. Por outro lado, para termos com violação de CPT, o coeficiente  $\mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d}$  é antissimétrico nos três primeiros índices e simétrico nos últimos  $d - 3$  índices.

Assim, englobando estes operadores, podemos escrever a lagrangiana do setor

bosônico de forma semelhante ao escrito em (3.1) para a parte mínima da teoria, ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(\hat{k}_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\hat{k}_{AF})^\kappa\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

só que agora, os coeficientes  $(\hat{k}_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  e  $(\hat{k}_{AF})^\kappa$  são dados pelas seguintes expansões:

$$(\hat{k}_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d \text{ par}} (k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{(d-4)}}\partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_{(d-4)}}, \quad (3.6)$$

$$(\hat{k}_{AF})^\kappa = \sum_{d \text{ impar}} (k_{AF}^{(d)})^{\alpha_1\dots\alpha_{(d-3)}}\partial_{\alpha_1}\dots\partial_{\alpha_{(d-3)}}, \quad (3.7)$$

onde os somatórios começam para valores  $d \geq 3$ . Os coeficientes  $(\hat{k}_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  são definidos como

$$(k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{(d-4)}} \equiv \mathcal{K}_{(d)}^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\dots\alpha_{(d-4)}} \quad (3.8)$$

e apresentam  $N_F^{(d)} = (d+1)d(d-3)$  componentes independentes. Enquanto que, os coeficientes  $(k_{AF}^{(d)})^{\alpha_1\dots\alpha_{(d-3)}}$  são definidos por

$$(k_{AF}^{(d)})^{\alpha_1\dots\alpha_{(d-3)}} \equiv \frac{1}{3!}\epsilon_{\kappa\mu\nu\rho}\mathcal{K}_{(d)}^{\mu\nu\rho\alpha_1\dots\alpha_{(d-4)}}, \quad (3.9)$$

com  $N_{AF}^{(d)} = \frac{1}{2}(d+1)(d-1)(d-2)$  componentes independentes.

Como nesta dissertação estamos interessados principalmente em operadores de dimensão de massa  $d = 5$ , então, de acordo com (3.4) se  $d = 5$ , a forma mais geral dos operadores é

$$S_{(5)} = \int d^4x \mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} A_\mu \partial_\rho \partial_\alpha \partial_\beta A_\nu. \quad (3.10)$$

Como veremos mais adiante, vamos trabalhar com operadores que, além de violarem a invariância de Lorentz, também violam a simetria CPT. Portanto, para o caso de violação de CPT, os três primeiros índices do coeficiente  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta}$  são totalmente antissimétricos, enquanto que os dois últimos são totalmente simétricos.

Analisando os operadores dados por (3.10), notamos que, devido a dimensão do operador ser  $d = 5$ , o coeficiente  $\mathcal{K}$  apresenta dimensão de massa  $d = -1$ . Portanto, o operador é suprimido por uma dimensão de massa, a qual pode ser relacionada com a massa de Planck (tal que  $\mathcal{K} \sim M_{Planck}^{-1}$ ). Relacionamos esta massa de supressão com a massa de Planck, pois como já vimos, o MPE vem de teorias mais fundamentais que englobam o modelo padrão com uma descrição quântica da gravitação e isso deve ocorrer na escala de Planck, escala na qual os efeitos da gravitação quântica são relevantes.

Portanto, devido a tal supressão, esperamos que os dados experimentais e observacionais revelem um valor muito pequeno para  $\mathcal{K}$ .

# 4

## VIL NO REGIME DE TEMPERATURA FINITA

Neste capítulo, após as motivações e o embasamento teórico apresentados nos capítulos anteriores, apresentaremos nossos cálculos, análises e resultados. Escolheremos, em momentos distintos, dois diferentes tipos de termos para adicionar ao setor fermiônico da EDQ convencional, termos estes presentes na EDQ estendida (3.1) e, a partir dessas duas configurações, vamos investigar a possibilidade de indução, através de correções quânticas, de operadores com dimensão de massa  $d = 3$  e, em especial,  $d = 5$  como (3.10), no setor bosônico da EDQ estendida. Em geral, vamos dar mais atenção ao comportamento desses termos no regime de temperatura finita, devido a falta deste tipo de tratamento para tais operadores na literatura. Na seção (4.1), vamos estudar o modelo da EDQ usual adicionada pelos termos que causam VIL, governados pelo coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ . Já no segundo momento, na seção (4.2), vamos trabalhar com a EDQ usual adicionada pelo termo governado por  $b_\mu$ .

### 4.1 Parte I - modelo com $g_{\kappa\lambda\mu}$

Até pouco tempo atrás, os únicos termos fermiônicos estudados que geram correções quânticas no setor bosônico da teoria eram aqueles associados aos coeficientes  $c_{\nu\mu}$  e  $b_\mu$ . Mais recentemente, foi mostrado em um trabalho realizado no regime de temperatura zero, [43], que o operador contraído com o coeficiente  $g_{\kappa\lambda\mu}$  também apresenta essa possibilidade, contudo, induzindo apenas termos com derivadas superiores.

Seguindo este estudo com o termo governado pelo coeficiente  $g_{\kappa\lambda\mu}$ , vamos dividir esta seção em duas partes principais. Na primeira, vamos realizar correções radiativas a fim de induzir e estudar os efeitos de temperatura finita sobre o termo de Chern-Simons



convencional. Já na segunda parte, vamos estender o estudo feito em [43], analisando os efeitos de temperatura finita no termo de derivada superior da forma (3.10), [44].

Portanto, vamos começar nossas análises apresentando a lagrangiana relevante ao sistema em questão, que é dada por

$$\mathcal{L}_g = \bar{\psi} \left( i\not{\partial} + \frac{i}{2} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} \partial_\mu - m - \not{A} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} A_\mu \right) \psi, \quad (4.1)$$

onde  $\sigma_{\kappa\lambda} = \frac{i}{2} [\gamma_\kappa, \gamma_\lambda]$ .

Como vimos na seção (3.1) do capítulo anterior, os termos governados por  $g^{\kappa\lambda\mu}$  além de violarem as transformações de Lorentz de partícula, também violam a simetria CPT. Adicionalmente, é importante lembrar que o coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$  apresenta antissimetria nos dois primeiros índices.

### 4.1.1 O termo de Chern-Simons

O termo de Chern-Simons é aquele governado pelo coeficiente  $(k_{AF})^\kappa$  na lagrangiana (3.1), que também pode ser escrito como

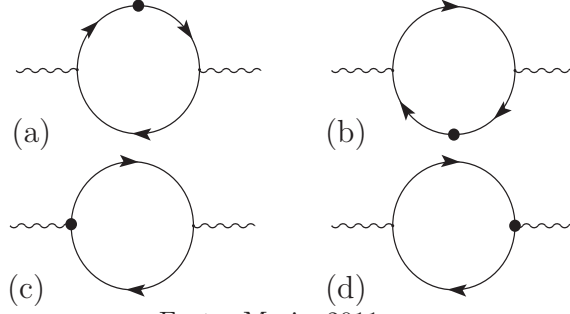
$$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{K}^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\rho A_\nu, \quad (4.2)$$

onde  $\mathcal{K}^{\mu\nu\rho}$  é totalmente antissimétrico e sua dimensão de massa é  $d = 1$ . Logo, o operador associado com este coeficiente apresenta dimensão de massa  $d = 3$  e, portanto, o termo de Chern-Simons convencional não é um termo de derivada superior, diferente dos outros que estudaremos aqui. Além disso, é fácil ver, comparando o termo de Chern-Simons em (3.1) e (4.2) que  $\mathcal{K}^{\mu\nu\rho} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k_{AF})_\sigma$ , onde  $(k_{AF})_\sigma$  é o coeficiente para o termo de Chern-Simons com violação de Lorentz. Tal termo foi bastante estudado [5, 45, 46, 31, 47, 48, 49, 50] e até mesmo no regime de temperatura finita [51, 52, 53, 54]. Contudo, ele nunca foi induzido a partir do termo governado por  $g^{\kappa\lambda\mu}$  no regime de temperatura finita, como estamos nos propondo a fazer.

Para este caso, vamos realizar nossos cálculos partindo das contribuições relevantes dadas pelos diagramas de Feynman. Tais contribuições estão representadas na figura (4.1). As regras de Feynman que geram estes diagramas são as seguintes. O propagador fermiônico é descrito por

$$\longrightarrow = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (4.3)$$

Figura 4.1: Diagramas de Feynman para contribuições de um laço



Fonte: Mariz, 2011

e o vértice férmion-fóton é o usual,

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \longrightarrow \end{array} = -i\gamma^\mu. \quad (4.4)$$

O coeficiente para violação de Lorentz gera uma inserção no propagador fermiônico, representada por

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{2}g^{\kappa\lambda\mu}\sigma_{\kappa\lambda}p_\mu, \quad (4.5)$$

e um vértice adicional,

$$\begin{array}{c} \text{wavy line} \\ | \\ \bullet \\ | \\ \longrightarrow \end{array} = -\frac{i}{2}g^{\kappa\lambda\mu}\sigma_{\kappa\lambda}. \quad (4.6)$$

Desta forma, a partir dos diagramas de Feynman apresentados, podemos escrever as seguintes expressões

$$i\Pi_{(a)}^{\mu\nu} = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}(-i)\gamma^\mu iS(p) \frac{i}{2}g^{\kappa\lambda\rho}\sigma_{\kappa\lambda}p_\rho iS(p) (-i)\gamma^\nu iS(p-k), \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} i\Pi_{(b)}^{\mu\nu} &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [\text{tr}(-i)\gamma^\mu iS(p) (-i)\gamma^\nu iS(p-k) \\ &\quad \times \frac{i}{2}g^{\kappa\lambda\rho}\sigma_{\kappa\lambda}(p_\rho - k_\rho) iS(p-k)], \end{aligned} \quad (4.7b)$$

$$i\Pi_{(c)}^{\mu\nu} = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}\left(-\frac{i}{2}\right) g^{\kappa\lambda\mu}\sigma_{\kappa\lambda} iS(p) (-i)\gamma^\nu iS(p-k), \quad (4.7c)$$

$$i\Pi_{(d)}^{\mu\nu} = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}(-i)\gamma^\mu iS(p) \left(-\frac{i}{2}\right) g^{\kappa\lambda\nu}\sigma_{\kappa\lambda} iS(p-k), \quad (4.7d)$$

com  $S(p) = (\not{p} - m)^{-1}$  e  $\text{tr}$  representando o traço sobre as matrizes de Dirac.

O cálculo das integrais nas expressões (4.7), no regime de temperatura zero, foi realizado em [43] usando parametrização de Feynman, onde o único termo gerado é aquele de derivada superior. Contudo, no regime de temperatura finita é mais apropriado usar-

mos o método da expansão derivativa [55, 56, 57, 58, 59] e, então, a seguinte expansão no propagador fermiônico,

$$S(p - k) = S(p) + S(p)\not{k}S(p) + S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p) + S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p) + \dots \quad (4.8)$$

e, retringirmos nossas escolhas a termos lineares, os quais são suficientes para gerar o termo de Chern-Simons. Assim, as expressões (4.7) se tornam

$$\Pi_{(1)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr } \gamma^\mu S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p), \quad (4.9a)$$

$$\Pi_{(2)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr } \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p), \quad (4.9b)$$

$$\Pi_{(3)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr } \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} k_\rho S(p), \quad (4.9c)$$

$$\Pi_{(4)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr } \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p) \not{k} S(p), \quad (4.9d)$$

$$\Pi_{(5)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr } g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p), \quad (4.9e)$$

$$\Pi_{(6)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr } \gamma^\mu S(p) g^{\kappa\lambda\nu} \sigma_{\kappa\lambda} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.9f)$$

com  $\Pi_{(a,c,d)}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{(1,5,6)}^{\mu\nu}$ , respectivamente, e  $\Pi_{(b)}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{(2)}^{\mu\nu} + \Pi_{(3)}^{\mu\nu} + \Pi_{(4)}^{\mu\nu}$ .

Antes de assumirmos que o sistema está em equilíbrio térmico com uma temperatura  $T = \beta^{-1}$ , vamos calcular o traço sobre as matrizes de Dirac de acordo com as regras expostas no Apêndice A. Fazendo isto, podemos reagrupar as expressões (4.9) como

$$\Pi_\kappa^{\mu\nu} = 8m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_\rho \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^3} - 4m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho} k_\rho \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (4.10)$$

onde  $\Pi_\kappa^{\mu\nu} = \Pi_{(1)}^{\mu\nu} + \Pi_{(2)}^{\mu\nu} + \Pi_{(3)}^{\mu\nu} + \Pi_{(4)}^{\mu\nu} + \Pi_{(5)}^{\mu\nu} + \Pi_{(6)}^{\mu\nu}$ ,

$$\mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} = g^{\mu\nu\alpha} g^{\beta\rho} + g^{\mu\nu\beta} g^{\alpha\rho} + g^{\nu\rho\alpha} g^{\beta\mu} + g^{\nu\rho\beta} g^{\alpha\mu} + g^{\rho\mu\alpha} g^{\beta\nu} + g^{\rho\mu\beta} g^{\alpha\nu}, \quad (4.11)$$

e

$$\mathcal{G}^{\mu\nu\rho} = g^{\mu\nu\rho} + g^{\nu\rho\mu} + g^{\rho\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Para chegarmos a expressão (4.10), precisamos simplificar o propagador escalar  $G(p) = (p^2 - m^2)^{-1}$  em todas expressões, fazendo as seguintes substituições  $p^2 = G^{-1}(p) + m^2$  e  $p^4 = G^{-2}(p) + 2G^{-1}(p)m^2 + m^4$ .

Neste momento, para facilitar os cálculos de temperatura finita que pretendemos fazer, é adequado mudar do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano efetuando a rotação de Wick, isto é,  $p_0 \rightarrow ip_0$  ( $g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu}$ ), então,  $d^4p \rightarrow id^4p_E = idp_0 dp_1 dp_2 dp_3$ ,  $p^2 \rightarrow -\delta^{\mu\nu} p_E^\mu p_E^\nu = -p_E^2$ ,  $p \cdot k \rightarrow -p_E \cdot k_E$ ,  $g^{\mu\nu\alpha} g_{\alpha\beta} p^\beta \rightarrow -g_E^{\mu\nu\alpha} \delta^{\alpha\beta} p_E^\beta = -g_E^{\mu\nu\alpha} p_E^\alpha$ , e

$g^{\mu\nu\rho}k_\rho \rightarrow -g_E^{\mu\nu\rho}k_E^\rho$ . Portanto, a expressão anterior escrita no espaço euclidiano tem a seguinte forma

$$\Pi_\kappa^{\mu\nu} = -8im\mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho\alpha\beta}k_E^\rho \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^3} + 4im\mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho}k_E^\rho \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^2}, \quad (4.13)$$

com

$$\mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho\alpha\beta} = g_E^{\mu\nu\alpha}\delta^{\beta\rho} + g_E^{\mu\nu\beta}\delta^{\alpha\rho} + g_E^{\nu\rho\alpha}\delta^{\beta\mu} + g_E^{\nu\rho\beta}\delta^{\alpha\mu} + g_E^{\rho\mu\alpha}\delta^{\beta\nu} + g_E^{\rho\mu\beta}\delta^{\alpha\nu} \quad (4.14)$$

e

$$\mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho} = g_E^{\mu\nu\rho} + g_E^{\nu\rho\mu} + g_E^{\rho\mu\nu}. \quad (4.15)$$

A fim de calcularmos as integrais espaciais da equação acima, primeiramente decomponemos  $p_E^\alpha = (p_0, p_i)$ , como segue

$$p_E^\alpha = \hat{p}^\alpha + p_0\delta^{\alpha 0}, \quad (4.16)$$

logo, por consequência  $\hat{p}^\alpha = (0, \vec{p})$ . Fazendo uma simples contagem de potências, notamos que as integrais em (4.13) parecem ser logaritmicamente divergentes, por este motivo, vamos usar o método da regularização dimensional para calcularmos as integrais. Então, promovemos a integral espacial em 3 dimensões para  $d$  dimensões, assim como introduzimos um parâmetro arbitrário  $\mu$  para manter a dimensão de massa fixa, e por fim, devido a simetria da integral sob rotações espaciais, substituímos

$$\hat{p}^\alpha \hat{p}^\beta \rightarrow \frac{\hat{p}^2}{d}(\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0}\delta^{\beta 0}). \quad (4.17)$$

Assim, após estes procedimentos e usando as soluções para as integrais apresentadas no Apêndice B, ficamos com o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Pi_\kappa^{\mu\nu} &= i2^{1-d}m\pi^{-d/2}(\mu^2)^{\frac{3-d}{2}}\mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho 00}k_E^\rho \\ &\times \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{(d-3)}{(p_0^2 + m^2)^{2-\frac{d}{2}}} - \frac{(d-4)m^2}{(p_0^2 + m^2)^{3-\frac{d}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Se calcularmos a integral em  $p_0$ , encontraremos  $\Pi_\kappa^{\mu\nu} = 0$ , ou seja, não há indução do termo de Chern-Simons convencional à temperatura zero, como esperado.

A partir de agora, começamos efetivamente a calcular os efeitos de temperatura finita, para isto usaremos o formalismo de Matsubara<sup>1</sup>. Supondo que o sistema encontra-se em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura  $T = \beta^{-1}$ , a energia é discretizada  $p_0 = (n + 1/2)2\pi/\beta$  e então,  $(1/2\pi) \int dp_0 \rightarrow 1/\beta \sum_n$ . Para calcular os somatórios, não podemos tomar o limite  $d \rightarrow 3$  diretamente na Eq. (4.18), pois o somatório do primeiro

<sup>1</sup>Para detalhes sobre este formalismo, veja o Apêndice C.

termo exibe singularidades. Assim, com a intenção de isolar estas singularidades, vamos usar uma representação explícita para os somatórios sobre as frequências de Matsubara [60], dada por

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda)(a^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(a, b) \quad (4.19)$$

onde

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right), \quad (4.20)$$

que é válida para  $\operatorname{Re} \lambda < 1$ , a menos dos pólos em  $\lambda = 1/2, -1/2, -3/2, \dots$ .

Então, usando as expressões acima, para o primeiro termo de Eq. (4.18), temos  $\lambda \rightarrow 1/2$  (quando  $d \rightarrow 3$ ); contudo, para o segundo,  $\lambda \rightarrow 3/2$ , que está claramente fora do intervalo de validade. Entretanto, para nossa sorte, podemos fazer o uso de uma relação de recorrência para deixar o valor de  $\lambda$  dentro do intervalo de validade e, então, usar as expressões (4.19) e (4.20) para resolver os somatórios. A relação de recorrência de nosso interesse é

$$f_\lambda(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} f_{\lambda-1}(a, b) - \frac{1}{4a^2} \frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(a, b). \quad (4.21)$$

Logo, no segundo somatório da Eq. (4.18), ficamos com  $\lambda - 1 \rightarrow 1/2$  e  $\lambda - 2 \rightarrow -1/2$ , perfeitamente dentro dos limites estabelecidos.

Finalmente, após termos resolvido os somatórios, obtemos a seguinte expressão:

$$\Pi_\kappa^{\mu\nu} = \frac{im}{2} \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} k^\rho F(\xi), \quad (4.22)$$

com  $\mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} = 2g^{\mu\nu 0} g^{0\rho} + 2g^{\nu\rho 0} g^{0\mu} + 2g^{\rho\mu 0} g^{0\nu}$  e

$$F(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} \operatorname{sech}^2(\pi\xi) \tanh(\pi\xi), \quad (4.23)$$

onde  $\xi = \beta m/2\pi$ . Ou podemos escrever a seguinte lagrangiana

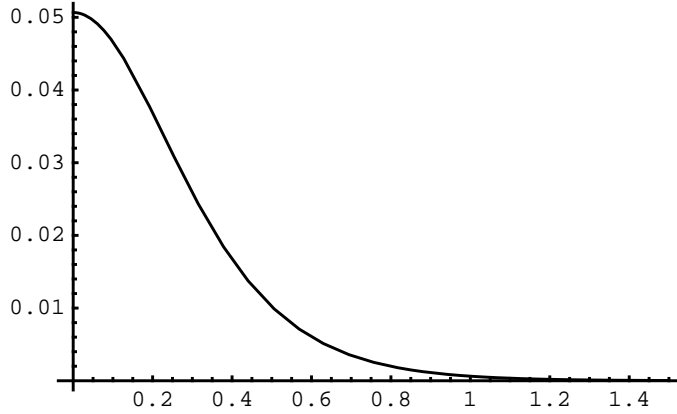
$$\mathcal{L}_\kappa = \frac{m}{2} F(\xi) \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} A_\mu \partial_\rho A_\nu. \quad (4.24)$$

Portanto, comparando (4.24) com (4.2), encontramos  $\mathcal{K}^{\mu\nu\rho} = \frac{m}{2} F(\xi) \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00}$ , e o comportamento da função  $F(\xi)$  está apresentado na Fig. 4.2.

O resultado (4.24) se assemelha aquele obtido anteriormente em [51], quando os férmions são integrados com o termo  $\bar{\psi} \not{b} \gamma_5 \psi$  incluso, desde que o operador contraído com o coeficiente  $g^{ij0}$  viola a simetria de reversão-temporal, assim como o operador contraído com o coeficiente  $b_i$ . Vale a pena ressaltar que, apesar do coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$  ter uma estrutura

tensorial diferente e estar associado com um operador diferente daquele do coeficiente  $b_\mu$ , ele também é responsável pela indução do termo de Chern-Simons que viola a invariância de Lorentz. Observamos também que a formulação perturbativa para  $g^{\kappa\lambda\mu}$  parece ser livre de ambiguidades, ao menos à temperatura zero, desde que em Ref. [43] o mesmo resultado para  $\mathcal{K}^{\mu\nu\rho}$  foi obtido através de outro procedimento.

**Figura 4.2: Comportamento da função  $F(\xi)$**



Fonte: Autor, 2012

## 4.1.2 O termo de derivada superior

Vamos agora estudar o efeito de um banho térmico no termo de derivada superior (3.10). Para isto, devemos expandir o propagador fermiônico  $S(p - k)$  como em (4.8). E, tomando os termos até a terceira ordem em  $k$  nas expressões (4.7), obtemos as seguintes contribuições

$$\Pi_{(i)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.25a)$$

$$\Pi_{(ii)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p), \quad (4.25b)$$

$$\Pi_{(iii)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p) \not{k} S(p), \quad (4.25c)$$

$$\Pi_{(iv)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.25d)$$

$$\Pi_{(v)}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} p_\rho S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.25e)$$

e

$$\Pi_{(vi)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} k_\rho S(p), \quad (4.26a)$$

$$\Pi_{(vii)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} k_\rho S(p) \not{k} S(p), \quad (4.26b)$$

$$\Pi_{(viii)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) \gamma^\nu S(p) g^{\kappa\lambda\rho} \sigma_{\kappa\lambda} k_\rho S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.26c)$$

$$\Pi_{(ix)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} S(p) \gamma^\nu S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.26d)$$

$$\Pi_{(x)}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \gamma^\mu S(p) g^{\kappa\lambda\nu} \sigma_{\kappa\lambda} S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p) \not{k} S(p), \quad (4.26e)$$

onde  $\Pi_{(a,c,d)}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{(i,ix,x)}^{\mu\nu}$ , respectivamente, e  $\Pi_{(b)}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{(ii)}^{\mu\nu} + \Pi_{(iii)}^{\mu\nu} + \Pi_{(iv)}^{\mu\nu} + \Pi_{(v)}^{\mu\nu} + \Pi_{(vi)}^{\mu\nu} + \Pi_{(vii)}^{\mu\nu} + \Pi_{(viii)}^{\mu\nu}$ .

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, ou seja, calculando o traço e simplificando o propagador escalar em todas as expressões (4.25) e (4.26), com a ajuda também da substituição  $p^6 = G^{-3}(p) + 3G^{-2}(p)m^2 + 3G^{-1}(p)m^4 + m^6$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_k^{\mu\nu} &= 64m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k^\gamma k^\delta k_\rho \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta}{(p^2 - m^2)^5} - 32m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k^\gamma k_\beta k_\rho \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\gamma}{(p^2 - m^2)^4} \\ &\quad - (12m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k^2 k_\rho + 16m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho} k^\alpha k^\beta k_\rho) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\ &\quad + (4m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_\alpha k_\beta k_\rho + 4m \mathcal{G}^{\mu\nu\rho} k^2 k_\rho) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

ou ainda, mudando do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano, encontramos

$$\begin{aligned} \Pi_k^{\mu\nu} &= -64im \mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_E^\gamma k_E^\delta k_E^\rho \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta p_E^\gamma p_E^\delta}{(p_E^2 + m^2)^5} \\ &\quad + 32im \mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_E^\gamma k_E^\beta k_E^\rho \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\gamma}{(p_E^2 + m^2)^4} \\ &\quad + (12im \mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_E^2 k_E^\rho + 16im \mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho} k_E^\alpha k_E^\beta k_E^\rho) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\ &\quad - (4im \mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_E^\alpha k_E^\beta k_E^\rho + 4im \mathcal{G}_E^{\mu\nu\rho} k_E^2 k_E^\rho) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Nas expressões acima, vamos primeiramente calcular as integrais espaciais usando a decomposição (4.16), assim como usando (4.17) e

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \hat{p}^\lambda \hat{p}^\rho &\rightarrow \frac{\hat{p}^4}{d(d+2)} [(\delta^{\mu\nu} - \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0})(\delta^{\lambda\rho} - \delta^{\lambda 0} \delta^{\rho 0}) + (\delta^{\mu\lambda} - \delta^{\mu 0} \delta^{\lambda 0})(\delta^{\nu\rho} - \delta^{\nu 0} \delta^{\rho 0}) \\ &\quad + (\delta^{\mu\rho} - \delta^{\mu 0} \delta^{\rho 0})(\delta^{\lambda\nu} - \delta^{\lambda 0} \delta^{\nu 0})], \end{aligned} \quad (4.29)$$

de forma que temos

$$\begin{aligned}\Pi_k^{\mu\nu} &= -\frac{i}{m} \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} k_\alpha k_\beta k_\rho G(m) + \frac{i}{2m} \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} k^2 k_\rho H_1(m) \\ &\quad + \frac{i}{2m} \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} k_0^2 k_\rho H_2(m),\end{aligned}\quad (4.30)$$

ou, de outra maneira,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k &= -\frac{1}{m} G(m) \mathcal{G}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} A_\mu \partial_\rho \partial_\alpha \partial_\beta A_\nu + \frac{1}{2m} H_1(m) \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} A_\mu \partial_\rho \square A_\nu \\ &\quad + \frac{1}{2m} H_2(m) \mathcal{G}^{\mu\nu\rho 00} A_\mu \partial_\rho \partial_0^2 A_\nu,\end{aligned}\quad (4.31)$$

onde

$$G(m) = \mu' \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{m^2}{(p_0^2 + m^2)^{3-\frac{d}{2}}}, \quad (4.32a)$$

$$H_1(m) = -\mu' \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{(d-5)m^2}{(p_0^2 + m^2)^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{(d-6)m^4}{(p_0^2 + m^2)^{4-\frac{d}{2}}} \right], \quad (4.32b)$$

$$\begin{aligned}H_2(m) &= -2\mu' \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{(d-3)(d-5)m^2}{(p_0^2 + m^2)^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{2(d-5)(d-6)m^4}{(p_0^2 + m^2)^{4-\frac{d}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d-6)(d-8)m^6}{(p_0^2 + m^2)^{5-\frac{d}{2}}} \right]\end{aligned}\quad (4.32c)$$

com  $\mu' = \frac{1}{3} 2^{1-d} \pi^{-d/2} (\mu^2)^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \Gamma(3-\frac{d}{2})$ . Como esperado, calculando a integral temporal, achamos  $G(m) = 1/24\pi^2$ , enquanto que  $H_1(m)$  e  $H_2(m)$  se anulam, que é o resultado obtido previamente em Ref. [43], à temperatura zero.

Agora, para aplicar o formalismo de Matsubara nas expressões (4.32), como usual, nós tomamos  $p_0 = (n + 1/2)2\pi/\beta$  e mudamos  $(1/2\pi) \int dp_0 \rightarrow 1/\beta \sum_n$ , tal que  $G(m) \rightarrow G(\xi)$ , e assim por diante. Como os somatórios resultantes de (4.32) são todos convergentes, usaremos a Eq. (4.19) para obter as expressões correspondentes que variam com a temperatura  $T = \beta^{-1}$ . Os mesmos resultados podem ser obtidos através de cálculos numéricos destes somatórios resultantes, como veremos.

Todavia, notamos que todos os expoentes de (4.32) estão fora do intervalo de validade, desde que temos  $\lambda \rightarrow 3/2$ ,  $\lambda \rightarrow 5/2$ , e  $\lambda \rightarrow 7/2$ , quando fazemos  $d \rightarrow 3$  nos somatórios. Como vimos no cálculo de termo de Chern-Simons convencional, para somatórios com  $\lambda \rightarrow 3/2$ , devemos usar a relação de recorrência (4.21) para colocá-los dentro do intervalo de validade, isto é, com  $\lambda - 1 \rightarrow 1/2$  e  $\lambda - 2 \rightarrow -1/2$ . Agora, para o caso  $\lambda \rightarrow 5/2$ , inserimos a expansão

$$f_{\lambda-1}(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda-5}{\lambda-2} f_{\lambda-2}(a, b) - \frac{1}{4a^2} \frac{1}{(\lambda-3)(\lambda-2)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-3}(a, b) \quad (4.33)$$



no primeiro termo de (4.21), de forma que tenhamos  $\lambda - 2 \rightarrow 1/2$  e  $\lambda - 3 \rightarrow -1/2$ . Finalmente, para os somatórios com  $\lambda \rightarrow 7/2$ , inserimos

$$f_{\lambda-2}(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda - 7}{\lambda - 3} f_{\lambda-3}(a, b) - \frac{1}{4a^2} \frac{1}{(\lambda - 4)(\lambda - 3)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-4}(a, b) \quad (4.34)$$

no primeiro termo de (4.33), e então estas Eq. (4.33) e (4.34) dentro do primeiro e do segundo termos de (4.21), respectivamente, tal que agora temos  $\lambda - 3 \rightarrow 1/2$  e  $\lambda - 4 \rightarrow -1/2$ .

Após estes procedimentos, encontramos

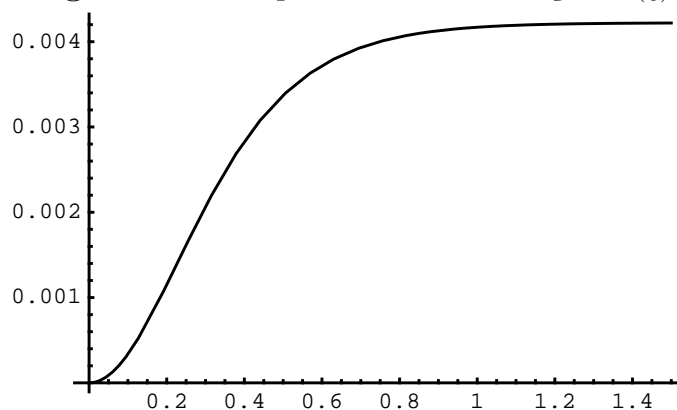
$$G(\xi) = \frac{1}{24\pi^2} - \frac{1}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} \operatorname{sech}^2(\pi\xi) \tanh(\pi\xi), \quad (4.35a)$$

$$H_1(\xi) = \frac{1}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{-1/2} \xi^2 \operatorname{sech}^2(\pi\xi) \tanh(\pi\xi), \quad (4.35b)$$

$$H_2(\xi) = \frac{\pi^2}{6} \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} \xi^2 \operatorname{sech}^5(\pi\xi) [\sinh(3\pi\xi) - 11 \sinh(\pi\xi)]. \quad (4.35c)$$

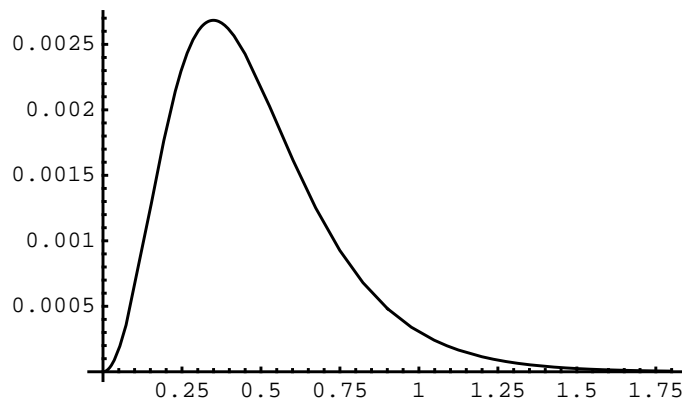
Estas funções são mostrados nas Figs. 4.3, 4.4, e 4.5, respectivamente. Como podemos ver, no limite de temperatura zero, isto é  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $G(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 1/24\pi^2$ ,  $H_1(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , e  $H_2(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , como esperado. Enquanto que no limite de altas temperaturas ( $\xi \rightarrow 0$ ) todas as expressões (4.35) se anulam. Observamos que isso acontece, pois, ao analisarmos as eqs.(4.32), todos os somatórios são suprimidos pela temperatura. Ainda mais, notamos que os limites assintóticos de (4.35a) são opostos aos de (4.23): à temperatura zero apenas o termo de derivada superior é induzido, enquanto que à alta temperatura apenas o termo de Chern-Simons aparece.

**Figura 4.3: Comportamento da função  $G(\xi)$**

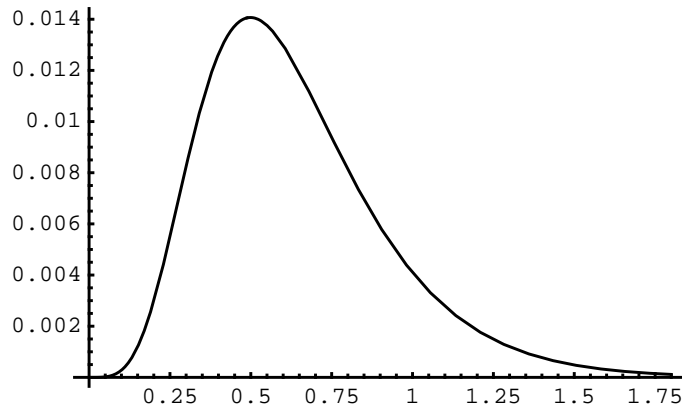


Fonte: Autor, 2012

Como tínhamos mencionado anteriormente, os mesmos gráficos das funções (4.35) (apresentados nas Figs. 4.3, 4.4, e 4.5) também podem ser calculados numericamente a

Figura 4.4: Comportamento da função  $H_1(\xi)$ 

Fonte: Autor, 2012

Figura 4.5: Comportamento da função  $H_2(\xi)$ 

Fonte: Autor, 2012

partir das expressões alternativas

$$G(\xi) = \sum_n \frac{\xi^2}{48\pi^2} [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-3/2}, \quad (4.36a)$$

$$H_1(\xi) = \sum_n \frac{\xi^2}{24\pi^2} [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-3/2} - \sum_n \frac{\xi^4}{16\pi^2} [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2}, \quad (4.36b)$$

$$H_2(\xi) = \sum_n \frac{\xi^4}{2\pi^2} [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2} - \sum_n \frac{5\xi^6}{8\pi^2} [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-7/2}, \quad (4.36c)$$

que são obtidas quando simplesmente tomamos  $d = 3$  nas expressões (4.32). A desvantagem deste tratamento é o procedimento para calcular os limites assintóticos, ou seja, com a temperatura tendendo a zero e com a temperatura tendendo a infinito, os quais, por outro lado, são facilmente calculados a partir de Eqs. (4.35).

Finalmente, gostaríamos de fazer um comentário sobre os dois últimos termos da Eq. (4.31), controlados pelas funções  $H_1(\xi)$  e  $H_2(\xi)$ , respectivamente, que são responsáveis

pela indução de termos de Chern-Simons de derivada superior não covariantes. Analisando os gráficos destas funções, observamos que  $H_1(\xi)$  e  $H_2(\xi)$  crescem até uma certa temperatura, e então decrescem enquanto que a temperatura cresce para infinito. Esta geração de termos de derivadas superiores não covariantes está consistente com a geração do termo de Chern-Simons induzido previamente em (4.24), desde que eles violam a simetria de reversão temporal. Contudo, estes termos de derivadas superiores se anulam nos limites de baixas e altas temperaturas.

## 4.2 Parte II - modelo com $b_\mu$

Nesta seção, vamos nos restringir a EDQ convencional adicionada do termo do modelo padrão estendido  $\bar{\psi}\gamma_5 b\psi$ . A lagrangiana desse sistema é descrita por

$$\mathcal{L}_b = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - \cancel{A} - \gamma_5 b)\psi, \quad (4.37)$$

onde o coeficiente  $b^\mu$  tem dimensão de massa e, como já citamos, o termo adicional além de apresentar VIL também viola a simetria CPT.

Embora, já existam alguns trabalhos que tratem de correções quânticas no sistema descrito pela lagrangiana acima, em geral, tais trabalhos se interessam em correções que gerem termos pertencentes ao MPE mínimo. Nesta seção, estamos principalmente interessados na indução do operador de derivada superior com dimensão de massa  $d = 5$  e, sobretudo, em seu comportamento à temperatura finita [61].

Como já sabemos de estudos anteriores, a partir da lagrangiana acima, podemos induzir através de correções radiativas, à temperatura zero, o termo de Chern-Simons de derivada superior dado por (3.10), com  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_\sigma g^{\alpha\beta}$ , como podemos ver na expansão de resultados em [7, 31] ou diretamente em [48, 62]. Porém aqui, vamos induzir este termo usando o método da expansão derivativa [55, 56, 57, 58, 59] como uma preparação para a análise de temperatura finita que nunca foi realizada e será feita usando o formalismo de Matsubara. Posteriormente, vamos analisar as relações de dispersão e obter estimativas numéricas para o coeficiente  $b$  que surgem a partir de dados observacionais, levando em conta os resultados à temperatura zero.

É interessante mencionar que o termo (3.10) surge quando o termo bosônico de Myers-Pospelov [10] é induzido radiativamente a partir do setor fermiônico [62]. Assim, os efeitos de temperatura finita no termo de Chern-Simons de derivada superior estão de certa forma relacionados com o termo de Myers-Pospelov. Portanto, estudos desta natureza merecem ser considerados com a intenção de melhor caracterizar os modelos com derivadas superiores que violam a simetria de Lorentz.

### 4.2.1 O termo de Chern-Simons de derivada superior

Para induzir o termo de derivada superior, vamos mais uma vez utilizar os diagramas de Feynman. Porém, para este sistema os diagramas importantes são apenas aqueles representados pelas figuras (a) e (b) da Fig.4.1, pois, não temos inserções nos vértices que gerariam os diagramas (c) e (d). Para este caso, o propagador fermiônico e o vértice férmion-fóton são os mesmos descritos anteriormente, ou seja, aqueles expressos nas regras de Feynman dadas por (4.3) e (4.4), respectivamente. Além dessas, devemos levar em conta uma outra regra para representar as inserções no propagador fermiônico por causa do coeficiente para violação de Lorentz  $b^\mu$ . Tal regra pode ser vista como

$$\rightarrow \bullet \rightarrow = -i\gamma_5 \not{b}. \quad (4.38)$$

Usando, então, as regras de Feynman descritas acima, podemos interpretar os diagramas referentes a este contexto, como

$$i\Pi_{(I)}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} (-i)\gamma^\nu iS(p)(-i)\gamma_5 \not{b} iS(p)(-i)\gamma^\mu iS(p-k), \quad (4.39a)$$

$$i\Pi_{(II)}^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} (-i)\gamma^\nu iS(p)(-i)\gamma^\mu iS(p-k)(-i)\gamma_5 \not{b} iS(p-k), \quad (4.39b)$$

onde  $S(p) = (\not{p} - m)^{-1}$ . Vale a pena enfatizar que o termo de Chern-Simons de derivada superior (e o termo de Myers-Pospelov [10]) é também induzido quando nós consideramos contribuições de terceira ordem em  $b_\mu$ , como foi mostrado em [62].

Agora, juntamos as contribuições (4.39a) e (4.39b) de cada diagrama em um termo só, fazendo  $\Pi_{(I)}^{\mu\nu} + \Pi_{(II)}^{\mu\nu} = \Pi_b^{\mu\nu}$ . Em seguida, usamos novamente o método da expansão derivativa, expandindo o propagador até terceira ordem em  $k_\mu$ , como em (4.8), e obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} = & i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma^\nu S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p) \\ & + \gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p) \\ & + \gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\not{k}S(p) \\ & + \gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)\gamma_5 \not{b} S(p) \\ & + \gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)\not{k}S(p)] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Antes de calcular as integrais em (4.40), calculamos o traço sobre as matrizes de

Dirac, ficando com

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu} = & -4\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} + 16\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^\alpha k^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\
& -24m^2\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} - 24\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_\rho b^\beta k^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\
& -32\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_\rho (b \cdot k) k^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\
& +128\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^\alpha k^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^5} \\
& +128\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_\rho b^\beta k^\delta k^\gamma \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta p_\delta p_\gamma}{(p^2 - m^2)^5}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Seguindo o processo de indução, com o intuito principal de obtermos a contribuição no regime de temperatura finita, tomamos a Eq. (4.41) e mudamos do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano, fazendo a rotação de Wick como no caso anterior do coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ . Com isso, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu} = & -4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^3} + 16i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^\alpha k_E^\beta \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& +24im^2\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^4} - 24i\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_E^\rho b_E^\beta k_E^2 \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& -32i\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_E^\rho (b_E \cdot k_E) k_E^\beta \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& -128i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^\alpha k_E^\beta \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^5} \\
& +128i\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_E^\rho b_E^\beta k_E^\delta k_E^\gamma \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta p_E^\delta p_E^\gamma}{(p_E^2 + m^2)^5}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Para atacar efetivamente a questão do comportamento à temperatura finita, separamos as componentes espaciais e temporais do quadri-momento  $p_E^\alpha = (p_0, \vec{p})$  como em (4.16), de forma que  $\hat{p}^\sigma = (0, \vec{p})$ . Desta maneira, da mesma forma que fizemos nos cálculos de temperatura finita anteriores, podemos usar as seguintes relações (4.17) e (4.29).

Após efetuarmos estas mudanças em (4.42), encontramos sete estruturas tensoriais diferentes. As duas primeiras estruturas,  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}k_E^\sigma k_E^\rho b_E^0 k_E^0$  e  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}k_E^\sigma k_E^\rho (b_E \cdot k_E)$ , são nulas, devido à antissimetria nos dois últimos índices de  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  contraídos com  $k_E^\sigma k_E^\rho$ , que são simétricos. A terceira contribuição,  $\epsilon^{\mu\nu\sigma 0}k_E^0 k_E^\sigma (b_E \cdot k_E)$ , vai a zero após a integração nas componentes espaciais de  $p_E^\alpha$ . Portanto, ficamos com apenas quatro estruturas diferentes, que podem ser escritas como  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 k_E^2$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho (k_E^0)^2$  e  $\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 (k_E^0)^2$ .

De agora em diante, vamos olhar cada uma das quatro contribuições separadamente. Usando os passos acima descritos para separar as componentes espaciais e tem-

porais de  $p_E^\alpha$ , encontramos as seguintes expressões para as quatro estruturas tensoriais:

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu} &= -4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{32}{15}I_1(p_0, m) + \frac{32m^2}{3}I_2(p_0, m) \right. \\ &\quad \left. - \frac{10}{3}I_4(p_0, m) - 6m^2I_5(p_0, m) + I_6(p_0, m) \right]; \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^{\mu\nu} &= -8i\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 k_E^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{16}{15}I_1(p_0, m) - \frac{16}{3}p_0^2 I_2(p_0, m) \right. \\ &\quad \left. - I_4(p_0, m) + 3p_0^2 I_5(p_0, m) \right]; \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(3)}^{\mu\nu} &= -16i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho (k_E^0)^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ -\frac{8}{15}I_1(p_0, m) + \frac{8}{3}(p_0^2 - m^2)I_2(p_0, m) \right. \\ &\quad \left. + 8p_0^2 m^2 I_3(p_0, m) + \frac{1}{3}I_4(p_0, m) - p_0^2 I_5(p_0, m) \right]; \end{aligned} \quad (4.45)$$

e, por último,

$$\Pi_{(4)}^{\mu\nu} = 128i\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 (k_E^0)^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{5}I_1(p_0, m) - 2p_0^2 I_2(p_0, m) + p_0^4 I_3(p_0, m) \right], \quad (4.46)$$

onde as integrais  $I_{1,2,3,4,5,6}(p_0, m)$  são dadas por

$$I_{1,2,3}(p_0, m) = \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_{1,2,3}}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^5}, \quad (4.47)$$

$$I_{4,5}(p_0, m) = \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_{4,5}}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^4}, \quad (4.48)$$

$$I_6(p_0, m) = \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^3}, \quad (4.49)$$

com  $\alpha_1 = \vec{p}^4$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = \vec{p}^2$  and  $\alpha_3 = \alpha_5 = 1$ .

Contudo, antes de procedermos nossa indução da contribuição relativa ao regime de temperatura finita, vamos obter a contribuição para o sistema à temperatura zero. Para isto, basta-nos resolver todas as integrações em (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46). Analisando tais integrais, após uma simples contagem de potências, notamos que não precisaremos usar esquemas de regularização, pois, todas elas são convergentes. Diferente do que aconteceu na seção anterior quando apareceram integrais divergentes nos cálculos com o coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ . Desta forma, podemos resolvê-las diretamente usando as soluções do apêndice B e obtemos o seguinte termo de Chern-Simons de derivada superior:  $\Pi_b^{\mu\nu} = -i\frac{\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^2}{12m^2\pi^2}$ . Ou ainda podemos representá-lo pela seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{12m^2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_\sigma A_\mu \partial_\rho \square A_\nu, \quad (4.50)$$

com  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} = \frac{1}{12m^2\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}b_\sigma g^{\alpha\beta}$ .

Após mostrarmos a indução do termo de Chern-Simons de derivada superior no regime de temperatura zero, vamos induzir e analisar seu comportamento no regime de temperatura finita. Para isso, calculamos as integrais apenas sobre as componentes espaciais  $\vec{p}$  em (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46). Após estas integrações, ficamos com

$$\Pi_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{im^2}{8\pi}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad (4.51)$$

$$\Pi_{(2)}^{\mu\nu} = \frac{i}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 k_E^2 \left[ \frac{m^2}{2} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (4.52)$$

$$\Pi_{(3)}^{\mu\nu} = \frac{im^2}{\pi}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho (k_E^0)^2 \left[ \frac{5m^2}{4} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{7}{2}} - \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} \right], \quad (4.53)$$

$$\Pi_{(4)}^{\mu\nu} = \frac{im^2}{\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 (k_E^0)^2 \left[ \frac{5m^2}{4} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{7}{2}} - \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} \right]. \quad (4.54)$$

Analisando tais expressões, notamos que podemos juntar  $\Pi_{(3)}^{\mu\nu}$  and  $\Pi_{(4)}^{\mu\nu}$  numa mesma estrutura tensorial, devido ao fato que as componentes temporais de  $b_E^\sigma$  se cancelam. Então, fazendo isto e juntando todos as contribuições em uma única expressão,  $\Pi_b^{\mu\nu} = \Pi_{(1)}^{\mu\nu} + \Pi_{(2)}^{\mu\nu} + \Pi_{(3)}^{\mu\nu} + \Pi_{(4)}^{\mu\nu}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} &= \frac{i}{m^2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 B(m) + \frac{i}{m^2}\epsilon^{\mu\nu\rho 0}k_E^\rho b_E^0 k_E^2 C_1(m) \\ &\quad + \frac{i}{m^2}\epsilon^{\mu\nu j\rho}b_E^j k_E^\rho (k_E^0)^2 C_2(m), \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde

$$B(m) = \frac{m^4}{8\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad (4.56)$$

$$C_1(m) = \frac{m^4}{8\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{m^2}{12\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.57)$$

$$C_2(m) = \frac{5m^6}{4\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{7}{2}} - \frac{m^4}{\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi}(p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad (4.58)$$

com  $j = 1, 2, 3$ .

Após todos estes procedimentos de preparação para realmente obter o comportamento dos termos acima no regime de temperatura finita, usamos o formalismo de Matsubara. Portanto, como das outras vezes em (4.1.1) e (4.1.2), escrevemos  $p_0 = (n + 1/2)\frac{2\pi}{\beta}$ , que são as frequências de Matsubara, e trocamos a integração sobre  $p_0$  por um somatório,  $\frac{1}{2\pi} \int dp_0 \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n$ , onde  $T = \beta^{-1}$  é a temperatura de equilíbrio do sistema. Assumindo que  $\xi = \frac{\beta m}{2\pi}$ , podemos escrever  $B(m) \rightarrow B(\xi)$ ,  $C_1(m) \rightarrow C_1(\xi)$ , and  $C_2(m) \rightarrow C_2(\xi)$ , como

segue

$$B(\xi) = \frac{\xi^4}{16\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2}, \quad (4.59)$$

$$C_1(\xi) = \frac{\xi^4}{16\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2} - \frac{\xi^2}{24\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-3/2}, \quad (4.60)$$

$$C_2(\xi) = \frac{5\xi^6}{8\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-7/2} - \frac{\xi^4}{2\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2}. \quad (4.61)$$

Agora, para resolver os somatórios usamos as expressões (4.19) e (4.20). Contudo, analisando as equações (4.59), (4.60) e (4.61) temos os valores  $\lambda = 3/2$ ,  $\lambda = 5/2$  and  $\lambda = 7/2$ , que, portanto, estão fora do limite de validade. Em compensação, podemos usar a relação de recorrência (4.21), para baixar os valores de  $\lambda$ . Desta forma, para  $\lambda = 3/2$ , devemos usar a relação de recorrência uma vez, para  $\lambda = 5/2$  duas vezes e para  $\lambda = 7/2$  três vezes. Também devemos escrever  $\lambda = 3/2 \rightarrow (D-1)/2$ ,  $\lambda = 5/2 \rightarrow (D+1)/2$ , e  $\lambda = 7/2 \rightarrow (D+3)/2$ , para evitar os pólos  $\lambda = 1/2, -1/2$  na solução geral (4.19), de forma que as expressões (4.59), (4.60), e (4.61) se tornam

$$B(\xi) = \frac{\xi^D}{16\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D+1}{2}}, \quad (4.62)$$

$$C_1(\xi) = \frac{\xi^D}{16\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D+1}{2}} - \frac{\xi^{D-2}}{24\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D-1}{2}}, \quad (4.63)$$

$$C_2(\xi) = \frac{5\xi^{D+2}}{8\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D+3}{2}} - \frac{\xi^D}{2\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D+1}{2}}. \quad (4.64)$$

Então, usamos a relação de recorrência (4.21) e consideramos a soma (4.19), e depois tomamos o limite  $D \rightarrow 4$ , para obtermos

$$B(\xi) = \frac{1}{12\pi^2} - \frac{1}{6} \int_{|\xi|}^{\infty} \sqrt{z^2 - \xi^2} \tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z) dz - \frac{\xi^2}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z)}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} dz, \quad (4.65)$$

$$C_1(\xi) = -\frac{\xi^2}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z)}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} dz, \quad (4.66)$$

$$C_2(\xi) = \frac{\pi^2 \xi^2}{6} \int_{|\xi|}^{\infty} \sqrt{z^2 - \xi^2} \operatorname{sech}^5(\pi z) [11 \sinh(\pi z) - \sinh(3\pi z)] dz. \quad (4.67)$$

Note que as componentes temporais de  $b_E^\sigma$ , associadas com as contribuições  $C_1(\xi)$  e  $B(\xi)$ ,



cancelam-se mutuamente. Finalmente, após retornarmos para o espaço de Minkowski, achamos que

$$\Pi_b^{\mu\nu} = \frac{i}{m^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_\sigma k_\rho k^2 J(\xi) + \frac{i}{m^2} \epsilon^{\mu\nu j\rho} b_j k_\rho k^2 K_1(\xi) + \frac{i}{m^2} \epsilon^{\mu\nu j\rho} b_j k_\rho k_0^2 K_2(\xi). \quad (4.68)$$

onde

$$J(\xi) = \frac{1}{6} \int_{|\xi|}^{\infty} \sqrt{z^2 - \xi^2} \tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z) dz - \frac{1}{12\pi^2}, \quad (4.69)$$

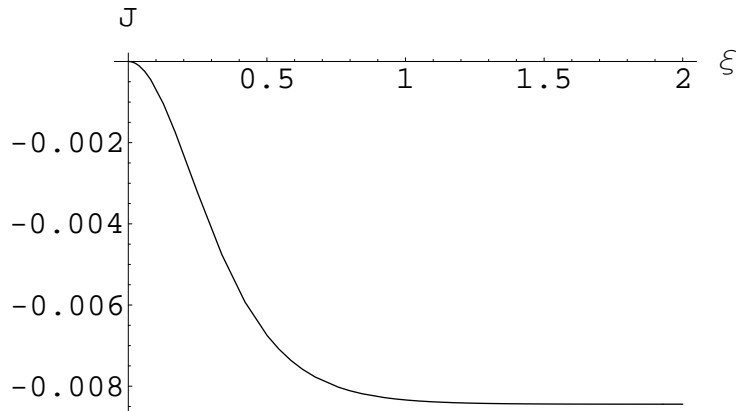
$$K_1(\xi) = \frac{\xi^2}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z)}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} dz, \quad (4.70)$$

$$K_2(\xi) = \frac{\pi^2 \xi^2}{6} \int_{|\xi|}^{\infty} \sqrt{z^2 - \xi^2} \operatorname{sech}^5(\pi z) [\sinh(3\pi z) - 11 \sinh(\pi z)] dz. \quad (4.71)$$

Analisando as equações acima, observamos que quando  $T \rightarrow 0$ , isto é,  $\xi \rightarrow \infty$ , todas as integrais vão a zero, de forma que  $\Pi_b^{\mu\nu}$  vai para  $-\frac{1}{12\pi^2 m^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_\sigma k_\rho k^2$ . Este é, de fato, o resultado de temperatura zero, obtido anteriormente em (4.50).

Por outro lado, quando  $T \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow 0$ ) a expressão (4.69) se anula, assim como as expressões (4.70) e (4.71). Este comportamento já era esperado, pois todos os somatórios em (4.59), (4.60), e (4.61) são fortemente suprimidos pela temperatura.

**Figura 4.6: Comportamento da função  $J(\xi)$**

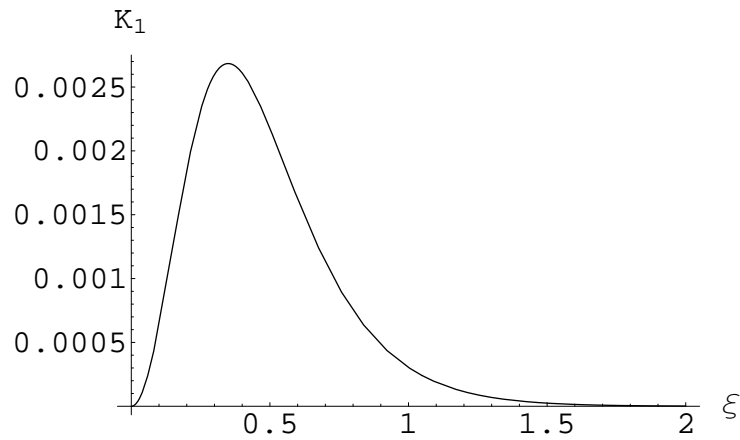


Fonte: Autor, 2012

O gráfico das funções  $J(\xi)$ ,  $K_1(\xi)$ , e  $K_2(\xi)$  estão apresentados nas Figs. 4.6, 4.7, e 4.8, respectivamente. É interessante notar, que estas funções são basicamente as mesmas obtidas no contexto do coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ . Isto é devido ao fato que sob uma certa redefinição de campos fermiônicos a componente totalmente antissimétrica de  $g^{\kappa\lambda\mu}$  é absorvida em

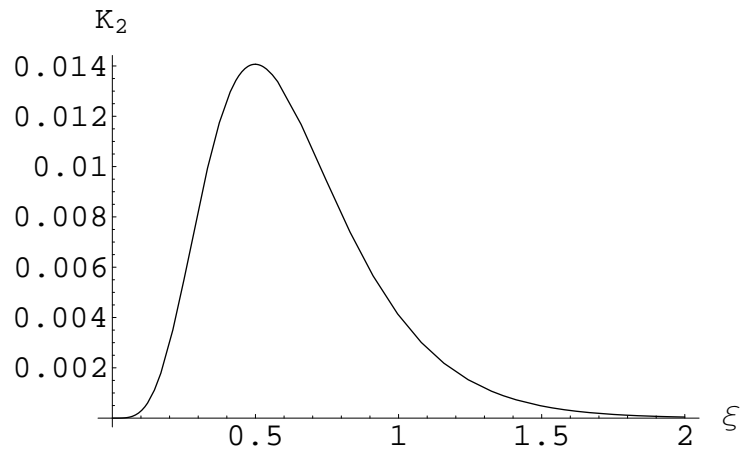
$b^\mu$  [7, 63].

**Figura 4.7: Comportamento da função  $K_1(\xi)$**



Fonte: Autor, 2012

**Figura 4.8: Comportamento da função  $K_2(\xi)$**



Fonte: Autor, 2012

### Relações de dispersão e estimativas numéricas

Após termos realizado as correções radiativas nos regimes de temperatura zero e finita, vamos agora analisar as relações de dispersão à temperatura zero da teoria de Maxwell convencional adicionada do termo de Chern-Simons de derivada superior (4.50). Em geral, a relação de dispersão é dada por [35]:

$$k^4 + 4(\hat{k}_{AF})^2 k^2 - 4(\hat{k}_{AF} \cdot k)^2 = 0 \quad (4.72)$$

onde, em nosso caso,  $(\hat{k}_{AF})_\lambda = \frac{1}{24m^2\pi^2}k^2b_\lambda$ , com  $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ , onde levamos em conta o fator de multiplicidade  $1/2$  em (4.50).

Primeiramente, vamos estudar a relação de dispersão quando assumimos que o coeficiente é puramente tipo-tempo, isto é,  $b^\mu = (b_0, 0)$  e  $(\hat{k}_{AF})_0 = \frac{1}{24m^2\pi^2}k^2b_0$ . Fazendo esta escolha e substituindo  $(\hat{k}_{AF})_0$  em (4.72), obtemos apenas a relação de dispersão usual,  $k_0^2 = \vec{k}^2$ . Neste caso, a relação de dispersão é bem-comportada e assim, não temos problemas com analiticidade, unitariedade, causalidade e positividade [9, 64]. Então, ela parece ser fisicamente consistente.

Em segundo lugar, escolhemos um coeficiente puramente tipo-espaço, ou seja,  $b^\mu = (0, b^i)$ , e portanto  $(\hat{k}_{AF})_i = \frac{1}{24m^2\pi^2}k^2b_i$ , com  $i$  variando sobre 1, 2, 3. Desta vez, obtemos uma relação de dispersão usual  $k_0^2 = \vec{k}^2$  e outra não-usual:

$$k_0^2 = \vec{k}^2 + \frac{1}{\vec{b}^2}[144m^4\pi^4 - (\vec{b} \cdot \vec{k})^2]. \quad (4.73)$$

A partir da expressão acima (4.73), vemos que no limite  $\vec{b} \rightarrow 0$  a energia diverge, o que não é algo esperado, pois na ausência do campo de fundo  $b$ , temos um sistema que representa a EDQ usual, portanto deveríamos ter a relação de dispersão usual neste limite. Portanto, devido a este comportamento, esta solução é não-analítica e assim, devemos focar no coeficiente puramente tipo-tempo. Comparando com o coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ , observamos um comportamento oposto, pois apenas o coeficiente tipo-espaço  $(\hat{k}_{AF})_i \propto \epsilon_{i0jk}(g^{0jl}g^{km} + g^{k0l}g^{jm})k_l k_m$  leva a uma relação de dispersão consistente [43].

Estimativas numéricas para o coeficiente  $b_\mu$  do termo de Chern-Simons de derivada superior podem ser obtidas a partir de limites sobre o coeficiente  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta}$  do setor bosônico. A partir de dados observacionais relacionados com a polarização da radiação cósmica de fundo, podemos estimar  $b \sim 10^{-25}$ . Além disso, de sistemas relacionados com birrefringência astrofísica, estimamos que nosso coeficiente é  $\sim 10^{-37}$ . Nestas estimativas, consideramos  $m$  como sendo a massa do elétron e os dados presentes em [34]. Desta maneira, observamos que os minúsculos valores encontrados para o coeficiente  $b_\mu$  são compatíveis com aqueles obtidos anteriormente.

# 5

## CONCLUSÕES

Nesta dissertação, exploramos um tema que vem sendo muito discutido ultimamente e que parece ser de fundamental importância para o entendimento de teorias mais fundamentais: a violação da invariância de Lorentz e suas consequências.

Inicialmente, no capítulo 1, apresentamos algumas motivações e fornecemos algumas informações introdutórias, ajudando o leitor a identificar os objetivos principais desta dissertação. Em seguida, no capítulo 2, apresentamos os diferentes tipos de transformações de Lorentz e, então, explicamos como esta violação ou quebra de simetria pode ocorrer na natureza, apresentando alguns exemplos simples. Posteriormente, já no capítulo 3, apresentamos a eletrodinâmica quântica estendida, teoria proveniente de teorias mais fundamentais e que tem como característica fundamental a presença de campos de fundo constantes, capazes de violarem a invariância de Lorentz. Já no último e mais importante capítulo deste trabalho, apresentamos nossos cálculos, análises e resultados. Vamos agora, revisar tais resultados e nossas conclusões.

Ao trabalharmos com diferentes termos adicionados a eletrodinâmica quântica convencional, induzimos através de correções radiativas no setor fermiônico da teoria, contribuições para o setor bosônico da mesma. Em especial, termos com operadores de dimensão de massa  $d = 5$ , e estudamos seus comportamentos focando principalmente no comportamento à temperatura finita.

No primeiro modelo, descrito pela lagrangiana (4.1), onde adicionamos à EDQ usual termos governados pelo coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ , estudamos, primeiramente, a indução do termo de Chern-Simons convencional (4.22) no regime de temperatura finita. Posteriormente, induzimos neste mesmo regime de temperatura finita um outro termo, agora representado por um operador de dimensão de massa  $d = 5$  (4.31).

Para o termo de Chern-Simons convencional, observamos que ele é nulo para temperatura zero, porém, quando a temperatura aumenta ele também cresce. Contudo, tende a um valor constante quando a temperatura tende ao infinito, como vemos em Fig. 4.2. E, portanto, mostramos que apesar de estar relacionado com uma estrutura tensorial diferente

daquela relacionada ao coeficiente  $b^\mu$ , tal coeficiente é também responsável pela indução do termo de Chern-Simons convencional.

No que diz respeito ao termo de derivada superior, encontramos um termo que é finito à temperatura zero, porém, vai a zero quando a temperatura vai ao infinito, vejamos Fig. 4.3, Fig. 4.4 e Fig. 4.5. Ainda dentro da análise deste termo, encontramos também um termo de Chern-Simons de derivada superior, apenas à temperatura finita, consistente com o termo convencional, já que ele viola a simetria de reversão temporal, porém, ele se anula a altas temperaturas. Por fim, gostaríamos de ressaltar que estas análises e resultados envolvendo a teoria com o coeficiente  $g_{\kappa\lambda\mu}$  estão compilados em [44] que foi recentemente aceito para publicação.

Enquanto que, no restante do capítulo tratamos o segundo modelo que é descrito pela lagrangiana (4.37), que mostra a adição do termo governado pelo coeficiente  $b^\mu$  à EDQ usual. Para este modelo, analisamos a indução do termo de Chern-Simons de derivada superior nos regimes de temperatura finita, assim como, no regime de temperatura zero.

No regime de temperatura zero, induzimos o termo de Chern-Simons de derivada superior (4.50), e mostramos que caso o coeficiente seja puramente tipo-tempo, obtemos a relação de dispersão usual da eletrodinâmica sem violação de Lorentz. Enquanto que, para o coeficiente tipo-espaço, mostramos que parte das soluções parecem não ter significados físicos, já que são não-analíticas. E então, fornecemos estimativas numéricas para o coeficiente  $b$  baseadas em dados observacionais e observamos que o coeficiente é tão pequeno quanto esperávamos.

Então, consideramos o comportamento do termo de derivada superior no regime de temperatura finita usando o formalismo de Matsubara e, vimos que através de Fig. 4.6, Fig. 4.7 e Fig. 4.8 este termo vai a zero a medida que a temperatura aumenta infinitamente. Podemos ainda ressaltar que, dentro de uma certa redefinição nos campos fermiônicos, a componente totalmente antissimétrica de  $g_{\kappa\lambda\mu}$  pode ser completamente absorvida em  $b_\mu$  [7, 63], justificando assim a semelhança nos resultados obtidos para os dois coeficientes. Tais análises e resultados para o estudo feito com o modelo com  $b_\mu$  estão apresentados em [61], recentemente submetido para publicação.

Finalmente, percebendo que nos dois modelos os termos de derivada superior foram fortemente suprimidos pelas altas temperaturas, achamos que este é um comportamento inerente aos termos de derivada superior. Desta maneira, acreditamos que apenas operadores com dimensão de massa  $d \leq 4$  sobrevivem no limite  $T \rightarrow \infty$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39** (1989) 683.
- [2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Gravitational Phenomenology in Higher Dimensional Theories and Strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989).
- [3] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Non-commutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001) [hep-th/0105082].
- [4] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” *Phys. Lett. B* **517**, 450 (2001) [hep-th/0106044].
- [5] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41** (1990) 1231.
- [6] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55** (1997) 6760 [arXiv:hep-ph/9703464].
- [7] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 116002 [arXiv:hep-ph/9809521].
- [8] S. Groot Nibbelink and M. Pospelov, “Lorentz violation in supersymmetric field theories,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081601 (2005) [hep-ph/0404271].
- [9] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 015020 [arXiv:0905.0031 [hep-ph]].
- [10] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003) [hep-ph/0301124].
- [11] H. M. Nussenzweig, “Curso de Física Básica Vol.4,” *São Paulo, Brasil: Edgard Blücher (1998) 437 p.*
- [12] S. T. Thornton, J. B. Marion, “Classical Dynamics of Particles and Systems,” *5 Ed. Belmont, EUA: Books/Cole Thomson Learning, Inc. (2004) 656 p.*
- [13] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos e M. T. D. Orlando, “Violação da Simetria de Lorentz,” *Rev. Bras. de Ens. de Fis.*, v. 29, n. 1, p. 57-64 (2007).
- [14] D. J. Griffiths “Introduction to Electrodynamics,” *3 Ed. New Jersey, EUA: Prentice Hall, Inc. (1999) 576 p.*

- [15] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 151601 (2008) [arXiv:0806.4945 [hep-ex]].
- [16] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151601 (2010) [arXiv:1007.2791 [hep-ex]].
- [17] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE Collaboration], “Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses,” arXiv:1109.3480 [hep-ex].
- [18] P. Massarotti [KLOE Collaboration], “Recent results from KLOE,” *Nuovo Cim. B* **123**, 840 (2008).
- [19] A. Di Domenico *et al.* [KLOE Collaboration], “Search for CPT violation and decoherence effects in the neutral kaon system,” *J. Phys. Conf. Ser.* **171**, 012008 (2009).
- [20] D. Bear, R. E. Stoner, R. L. Walsworth, V. A. Kostelecky and C. D. Lane, “Limit on Lorentz and CPT violation of the neutron using a two species noble gas maser,” *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000) [Erratum-ibid. **89**, 209902 (2002)] [physics/0007049].
- [21] I. Altarev, C. A. Baker, G. Ban, G. Bison, K. Bodek, M. Daum, P. Fierlinger and P. Geltenbort *et al.*, “Test of Lorentz invariance with spin precession of ultracold neutrons,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, 081602 (2009) [arXiv:0905.3221 [nucl-ex]].
- [22] M. Smiciklas, J. M. Brown, L. W. Cheuk and M. V. Romalis, “A new test of local Lorentz invariance using  $^{21}\text{Ne}$ -Rb-K comagnetometer,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 171604 (2011) [arXiv:1106.0738 [physics.atom-ph]].
- [23] H. Muller, P. L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger and E. Kovalchuk *et al.*, “Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments,” *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007) [arXiv:0706.2031 [physics.class-ph]].
- [24] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk and C. Novotny *et al.*, “Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities,” *Nature Phys.* **3**, 861 (2007).
- [25] S. R. Parker, M. Mewes, P. L. Stanwix and M. E. Tobar, “Cavity Bounds on Higher-Order Lorentz-Violating Coefficients,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180401 (2011) [arXiv:1102.0081 [hep-ph]].
- [26] F. Baynes, A. Luiten and M. Tobar, “Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator,” *Phys. Rev. D* **84**, 081101 (2011) [arXiv:1108.5414 [gr-qc]].
- [27] H. Muller, S. -w. Chiow, S. Herrmann, S. Chu and K. -Y. Chung, “Atom Interferometry tests of the isotropy of post-Newtonian gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 031101 (2008) [arXiv:0710.3768 [gr-qc]].
- [28] M. A. Hohensee, S. Chu, A. Peters and H. Muller, “Equivalence Principle and Gravitational Redshift,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 151102 (2011) [arXiv:1102.4362 [gr-qc]].

- [29] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii “Quantum Electrodynamics,” 2 Ed. Oxford, U.K.: Pergamon Press Ltd. (1982) 652 p
- [30] W. Greiner, J. Reinhart “Quantum Electrodynamics,” 3 Ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag (2003) 475 p
- [31] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 3572 [hep-ph/9901358].
- [32] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” Phys. Rev. D **63** (2001) 065008 [hep-th/0012060].
- [33] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, “One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics,” Phys. Rev. D **65** (2002) 056006 [hep-th/0111123].
- [34] M. S. Berger and V. A. Kostelecky, “Supersymmetry and Lorentz violation,” Phys. Rev. D **65** (2002) 091701 [hep-th/0112243].
- [35] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, “Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 031801 [hep-ph/0212382].
- [36] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” Phys. Rev. D **69** (2004) 105009 [hep-th/0312310].
- [37] V. A. Kostelecky and C. D. Lane, “Constraints on Lorentz violation from clock comparison experiments,” Phys. Rev. D **60** (1999) 116010 [hep-ph/9908504].
- [38] R. Bluhm, V. A. Kostelecky and C. D. Lane, “CPT and Lorentz tests with muons,” Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1098 [hep-ph/9912451].
- [39] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 251304 [hep-ph/0111026].
- [40] R. Bluhm, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and N. Russell, “Clock comparison tests of Lorentz and CPT symmetry in space,” Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 090801 [hep-ph/0111141].
- [41] V. A. Kostelecky, N. Russell and J. Tasson, “New Constraints on Torsion from Lorentz Violation,” Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 111102 [arXiv:0712.4393 [gr-qc]].
- [42] V. A. Kostelecky and N. Russell, “Data Tables for Lorentz and CPT Violation,” Rev. Mod. Phys. **83** (2011) 11 [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [43] T. Mariz, “Radiatively induced Lorentz-violating operator of mass dimension five in QED,” Phys. Rev. D **83** (2011) 045018 [arXiv:1010.5013 [hep-th]].
- [44] J. Leite and T. Mariz, “Induced Lorentz-violating terms at finite temperature,” aceito para publicação no Europhys. Lett. arXiv:1110.2127 [hep-th].
- [45] S. R. Coleman and S. L. Glashow, “High-energy tests of Lorentz invariance,” Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999) [hep-ph/9812418].



- [46] J. M. Chung and P. Oh, “Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the derivative expansion of QED,” Phys. Rev. D **60**, 067702 (1999) [hep-th/9812132].
- [47] M. Perez-Victoria, “Exact calculation of the radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED,” Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999) [hep-th/9905061].
- [48] G. Bonneau, “Regularization: Many recipes, but a unique principle, Ward identities and normalization conditions: The Case of CPT violation in QED,” Nucl. Phys. B **593**, 398 (2001) [hep-th/0008210].
- [49] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term,” Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001) [hep-ph/0101087].
- [50] A. A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, “Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED,” JHEP **0202**, 030 (2002) [hep-th/0110279].
- [51] L. Cervi, L. Griguolo and D. Seminara, “The Structure of radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature,” Phys. Rev. D **64**, 105003 (2001) [hep-th/0104022].
- [52] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro and F. A. Brito, “A Remark on Lorentz violation at finite temperature,” JHEP **0510**, 019 (2005) [hep-th/0509008].
- [53] M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the induction of the four-dimensional Lorentz-breaking non-Abelian Chern-Simons action,” Phys. Rev. D **76**, 047701 (2007) [arXiv:0704.1104 [hep-th]].
- [54] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr. and J. S. Rodrigues, “Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy,” Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008) [arXiv:0810.0306 [hep-th]].
- [55] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, “Derivative Expansions of Fermion Determinants: Anomaly Induced Vertices, Goldstone-Wilczek Currents and Skyrme Terms,” Phys. Rev. D **31**, 2605 (1985).
- [56] C. M. Fraser, “Calculation of Higher Derivative Terms in the One Loop Effective Lagrangian,” Z. Phys. C **28**, 101 (1985).
- [57] A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novikov and M. A. Shifman, “Calculations In External Fields In Qcd: An Operator Method. (in Russian),” Sov. J. Nucl. Phys. **39**, 77 (1984) [Yad. Fiz. **39**, 124 (1984)].
- [58] K. S. Babu, A. K. Das and P. Panigrahi, “Derivative Expansion And The Induced Chern-simons Term At Finite Temperature In (2+1)-dimensions,” Phys. Rev. D **36**, 3725 (1987).
- [59] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, “Lorentz and CPT symmetries in commutative and noncommutative space-time,” J. Phys. A **36**, 4937 (2003) [hep-th/0303122].
- [60] L. H. Ford, “Vacuum Polarization In A Nonsimply Connected Space-time,” Phys. Rev. D **21**, 933 (1980).

- 
- [61] J. Leite and T. Mariz, “Temperature effects on the higher-derivative Lorentz-violating Chern-Simons term,” submetido para publicação no J. Phys. A
- [62] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms,” arXiv:1111.0198 [hep-th].
- [63] D. Colladay and P. McDonald, “Redefining spinors in Lorentz violating QED,” J. Math. Phys. **43**, 3554 (2002) [hep-ph/0202066].
- [64] R. Lehnert, “Threshold analyses and Lorentz violation,” Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003) [gr-qc/0304013].
- [65] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction To Quantum Field Theory,” *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p*
- [66] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p*
- [67] A. K. Das “Finite Temperature Field Theory,” *Singapore: World Cingapore Scientific Publisinhg Co. Pre. Ltd. (1997) 404p*

## APÊNDICE A

### ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC

Neste apêndice, vamos mostrar algumas características das matrizes de Dirac<sup>1</sup> e apresentar as regras necessárias para efetuar o traço delas.

Em 4-D, as matrizes de Dirac podem ser definidas escrevendo-as em blocos  $2 \times 2$  da seguinte maneira,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{0}$  é a matriz nula,  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade e  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli, definidas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

De tal forma que  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , é dada por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Além disso, tais matrizes obedecem as seguintes relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.4})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.5})$$

Dadas estas definições, podemos calcular o traço nas matrizes  $\gamma$  em 4-D usando as

---

<sup>1</sup>Outros detalhes sobre as matrizes de Dirac, como construção, representações e mais propriedades podem ser vistos em [65, 66], por exemplo.

seguintes regras

$$\text{tr}(\mathbf{1}) = 4; \quad (\text{A.6})$$

$$\text{tr}(\text{quantidade ímpar de } \gamma\text{'s}) = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}; \quad (\text{A.8})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}); \quad (\text{A.9})$$

$$\text{tr}(\gamma^5) = 0; \quad (\text{A.10})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0; \quad (\text{A.11})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{A.12})$$

## APÊNDICE B

### INTEGRAIS DE LAÇO

O objetivo deste apêndice é mostrar as soluções das integrais de laço usadas nos cálculos desta dissertação.

Como no cálculo à temperatura finita passamos do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano, vamos resolver as integrais no espaço euclidiano. A forma geral das integrais e suas soluções usadas aqui, são dadas por

$$\int \frac{d^n p_E}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_E^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)(\Delta^2)^{\alpha - n/2}} \quad (\text{B.1})$$

$$\int \frac{d^n p_E}{(2\pi)^n} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - n/2)}{\Gamma(\alpha)(\Delta^2)^{\alpha - 1 - n/2}} \quad (\text{B.2})$$

$$\int \frac{d^n p_E}{(2\pi)^n} \frac{p_E^4}{(p_E^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - 2 - n/2)}{\Gamma(\alpha)(\Delta^2)^{\alpha - 2 - n/2}} \quad (\text{B.3})$$

## APÊNDICE C

### FORMALISMO DE MATSUBARA

Neste apêndice, vamos apresentar de forma bastante sucinta o formalismo que usamos nos casos em que tínhamos um sistema físico em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura  $T = \beta^{-1}$ , conhecido como formalismo do tempo imaginário ou, simplesmente, formalismo de Matsubara<sup>1</sup>. Vamos nos deter a formulação relacionada com integrais de trajetória, pois é a que utilizamos nesta dissertação.

Como sabemos da teoria quântica de campos à temperatura zero, a amplitude de transição tem sua representação funcional, para um campo escalar  $\phi(\vec{x}, t)$ , dada por

$$\langle \phi(\vec{x}_1, t_1) | \phi(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle \phi_1 | e^{-iH(t_1-t_2)} | \phi_2 \rangle = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\phi e^{iS}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\mathcal{N}'$  é uma constante relacionada com a renormalização e  $S$  é a ação definida da maneira usual, como  $S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}$ , com  $\mathcal{L}$  sendo a densidade de lagrangiana do sistema em questão. Neste caso, a integração funcional é definida sobre trajetórias que satisfazem:  $\phi(\vec{x}_1, t_1) = \phi_1$  e  $\phi(\vec{x}_2, t_2) = \phi_2$ , e os pontos extremos são fixos.

Desta forma, olhando para (C.1), fazendo  $t_1 - t_2 = -i\beta$  e recordando o conceito de função de partição da mecânica estatística, podemos escrever a seguinte função de partição para o sistema

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int d\phi_1 \langle \phi_1 | e^{-\beta H} | \phi_1 \rangle = \mathcal{N}' \int \mathcal{D}\phi e^{-S'_E}, \quad (\text{C.2})$$

onde  $S'_E$  é simplesmente a ação euclidiana para o caso de potencial químico nulo.

Além disso, os campos devem assumir condições de periodicidade ou antiperiodicidade ( $\phi(\vec{x}, \beta) = \pm \phi(\vec{x}, 0)$ ), caso sejam campos bosônicos ou fermiônicos, respectivamente. Tais condições de periodicidade levam a teoria a assumir apenas valores discretos de ener-

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre formalismo de Matsubara ou, de forma mais geral, sobre teoria de campos à temperatura finita, indicamos [67].

---

gia, que são representados pelas frequências de Matsubara

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}, \text{ para bósons} \quad (\text{C.3})$$

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \text{ para férmions.} \quad (\text{C.4})$$

É válido ressaltar que o formalismo de Matsubara é totalmente desenvolvido dentro do contexto de um sistema em equilíbrio, pois trocamos a variável relacionada com o tempo, em favor da temperatura.

Portanto, no formalismo de Matsubara, representamos a função de partição do sistema através de integrais de trajetória, onde a ação para a integral de trajetória corresponde a ação euclidiana do sistema original com a integração temporal sob um intervalo finito. Devido a sua formulação, as regras de Feynmann para o sistema à temperatura finita podem ser obtidas diretamente da integral de trajetória, de forma análoga ao fazemos ao tratar sistemas à temperatura zero.