

**Universidade Federal de Alagoas**

**Centro de Ciências da Natureza**

**Instituto de Física**

**Estruturas de Bandas e Propriedades de  
Simetria dos Modos Eletromagnéticos em um  
Cristal Fotônico Unidimensional**

**Adelino de Sousa Lima**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

**Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Solange Bessa Cavalcanti**

Maceió – AL  
Março de 2007



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Física  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL. Brasil

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

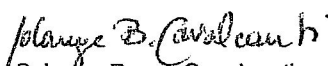
*“Estruturas de Bandas e Propriedades de Simetria dos Modos  
Eletromagnéticos em um Cristal Fotônico Unidimensional”*

por

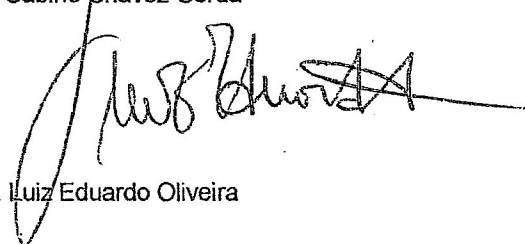
*Adelino de Sousa Lima*

A Banca Examinadora composta pelos professores Solange Bessa Cavalcanti (Orientadora), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Sabino Chávez-Cerda, do INAOE/México e Luiz Eduardo Oliveira, do Departamento de Física da UNICAMP, consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 05 de março de 2007

  
Profa. Solange Bessa Cavalcanti

  
Prof. Sabino Chávez-Cerda

  
Prof. Luiz Eduardo Oliveira

Dedico este trabalho aos meus pais e irmãos, Pedro e Ana Maria, Dilermando e Alex.

## Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Aos meus familiares, em especial pais por estarem sempre presentes na minha vida, de uma forma ou de outra.

Aos amigos de curso e aos professores.

A todos os amigos que encontrei aqui em Maceió.

A Laís e a Nathaly, e suas famílias que sempre me acolheram como um filho.

Gostaria de agradecer à minha orientadora Prof<sup>ª</sup>. Solange pelo conhecimento que me foi passado e pelo acompanhamento prestado durante todo o curso de Mestrado.

Ao Prof. Sabino, por suas valiosíssimas contribuições, pela paciência, pelas conversas amigáveis e dedicação. Muito obrigado por tudo; obrigado professor amigo.

Gostaria de agradecer à CAPES e ao estado de Alagoas pelo apoio financeiro.

## Resumo

Investigamos neste trabalho, através das técnicas de matriz de transferência, a estrutura de banda fotônica e as densidades de estados de um cristal fotônico unidimensional (1D) consistindo de uma super-rede composta de duas camadas alternadas de ar e GaAs, de espessuras  $a$  e  $b$ , respectivamente. Encontramos *band gaps* fotônicos, como esperado, e ainda pontos de *gap* nulo. Estudamos a reflectividade e a transmissividade do campo eletromagnético. Analisamos ainda as propriedades de simetria das soluções de campo eletromagnético e constatamos que em geral estas soluções tem paridade bem definida, exceto nos pontos de *gap* nulo, onde há degenerescência. Nesses pontos, mostra-se que as diferenças de fase entre as ondas que são refletidas em todas as interfaces produzem interferência destrutiva de tal maneira que a reflectividade é nula e a transmissividade é a unidade, em contraste com os conhecidos espelhos de Bragg.

## Abstract

We perform in this work, through the techniques of transfer matrix, an analytical study of the photonic band structure and the density of states of a one dimensional photonic crystal consisting of a super-lattice composed by two alternating layers of air and GaAs of thicknesses  $a$  and the  $b$ , respectively. We find photonic band gaps, as expected, and also null gap points. We study the reflectivity and the transmissivity of the electromagnetic field through the structure. We further analyze the symmetry properties of the solutions for the electromagnetic field and find that, in general, these solutions have a well defined parity except at the null gap points where there are degeneracies. At these points we show that the phase difference between the various waves, reflected at all interfaces, interfere destructively so that, in contrast with the Bragg mirrors, the incident wave is efficiently transmitted through the structure.

# Índice

<b>Introdução</b> .....	1
<b>2- Teoria Básica</b> .....	6
2.1- Equações de Maxwell.....	6
2.2- Problema de Autovalor do Campo Elétrico.....	8
2.3- Propriedades de Modos Harmônicos.....	9
2.4- Energia Eletromagnética e o Princípio variacional.....	10
2.5- Propriedades de Escala das Equações de Maxwell.....	11
2.6- Simetrias.....	12
2.6.1. Simetria de Inversão.....	13
2.6.2- Simetria Translacional Contínua.....	14
2.6.3- Simetria Translacional Contínua.....	15
2.6.4- Simetria de Rotação.....	16
2.6.5- Simetria de Reflexão.....	17
2.6.6- Invariância Sob Inversão Temporal.....	18
2.7- Aplicando o Formalismo à Super-Rede.....	18
2.8- Cálculo das Funções que Definem o Campo Elétrico $\mathbf{E}(z)$ .....	27
<b>3- Resultados</b> .....	30
3.1- Relação de Dispersão.....	30
3.2- Pontos de <i>Gap</i> Nulo.....	31
3.3- Campo Elétrico.....	34
<b>4- Reflexão e Transmissão</b> .....	38
4.1- Refletores de Bragg.....	38
4.2- Reflexão e Transmissão.....	42
<b>5- Conclusão</b> .....	44
<b>6- Referência Bibliográfica</b> .....	46

## Introdução

Em 1956, surgiu o primeiro computador a utilizar transistores. Com os *chips*, circuitos integrados contendo milhões de transistores em menos de uma polegada quadrada, muitos sistemas puderam ser miniaturizados. Desde então temos utilizado a tecnologia de semicondutores em muitas atividades.

Quanto mais se tenta melhorar e diminuir o tamanho dos circuitos eletrônicos, somos tomados de dificuldades tais como a elevação da resistência e o aumento da potência dissipada por esses dispositivos, além do crescente problema de “crosstalk” que é uma interferência prejudicial entre os diferentes componentes do dispositivo eletrônico. Para tentar solucionar esses problemas, muitos pesquisadores tentam usar materiais que utilizem a luz ao invés de elétrons.

Qual a classe de materiais que podem nos permitir um controle sobre a propagação da luz? A resposta desta questão está na analogia com os nossos bem sucedidos materiais eletrônicos. Um cristal é um arranjo periódico de átomos ou moléculas; isto é, uma rede cristalina resulta de pequenos blocos básicos formados de átomos ou moléculas que são repetidos no espaço. Um cristal, portanto apresenta um potencial periódico para um elétron propagando-se através dele, e a geometria do cristal prescreve muitas propriedades de condução do mesmo. Da mesma maneira que a periodicidade de cristais de estado sólido determinam as bandas de energia e as propriedades de condução dos elétrons, a estruturação periódica de materiais ópticos em escalas de comprimentos de ondas eletromagnéticas tem se revelado como a melhor abordagem em direção ao controle das energias e dos fluxos de fótons que ocorrem neste material.



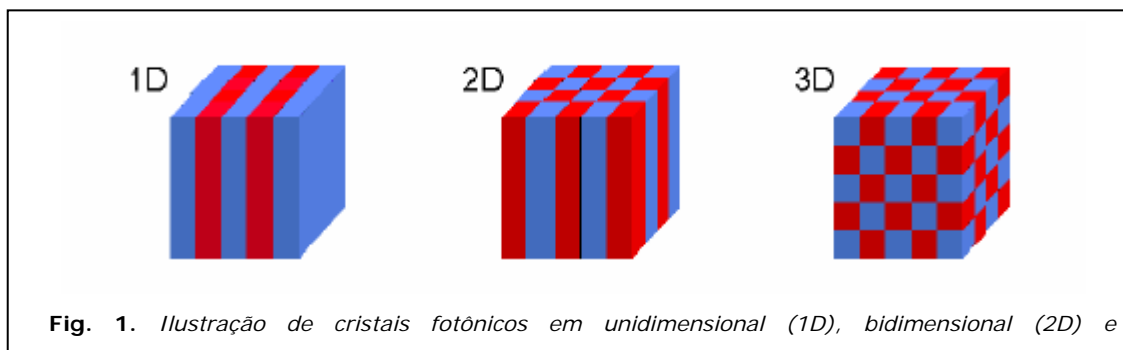
Uma solução para o problema do controle e manipulação ótica é dessa maneira um Cristal Fotônico, um meio dielétrico periódico com baixas perdas. Em particular, nós podemos projetar e construir Cristais Fotônicos com *band gap* fotônico, evitando que a luz se propague em certas direções com determinadas energias<sup>1</sup>. Os semicondutores de luz podem levar à revolução da informação e telecomunicações, ainda mais por possibilitarem alta capacidade das fibras óticas, lasers nanoscópicos e circuitos integrados fotônicos que devem um dia substituir os *micro-chips* de hoje<sup>2</sup>.

A propagação da luz através de um meio periódico tem sido intensamente investigada desde os Cristais Fotônicos (PC), materiais engenhosamente construídos e propostos por Yablonovitch<sup>3</sup> e John<sup>4</sup>. Muitos trabalhos experimentais e teóricos têm sido desenvolvidos no estudo das propriedades físicas dos Cristais Fotônicos (PCs). Esse interesse nos PCs é motivado pela nova perspectiva que tais estruturas podem proporcionar para evoluirmos em nossa capacidade de manipular as propriedades da luz, levando-nos a uma nova era de dispositivos óticos. O rápido desenvolvimento no campo dos PCs, contudo, abunda com desafios experimental e teórico, e a maior parte desses são derivados do fato que esses sistemas compostos artificialmente exibem o *band gap* fotônico (PBG)<sup>5,6</sup>. Dentre os efeitos que mais chamam a atenção como consequência da existência dos PBGs podemos citar a inibição<sup>7</sup> e a intensificação da emissão espontânea para sistemas atômicos inseridos em PCs, como consequência dos estados entrelaçados do tipo átomo-fóton que são originados quando a frequência atômica é sintonizada na vizinhança do *band gap*, conduzindo a efeitos não Markovianos<sup>8</sup>. Uma outra aplicação muito interessante dos PCs está associada ao fato de atualmente eles poderem ser construídos apresentando índice de refração negativo. A idéia teórica acerca de parâmetros negativos para representar a permissividade dielétrica  $\varepsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$ , proposta primeiro por

Veselago<sup>9</sup>, tem sido realizada via construção bem sucedida de materiais artificiais cuja unidade celular consiste de uma combinação de um fio elétrico com um sistema conhecido como *split-ring resonator* (SRR) o qual, apesar de não ser magnético, exibe permeabilidade magnética negativa<sup>10,11</sup>. A idéia de materiais com índice de refração negativo,<sup>12</sup> abre novos paradigmas conceituais em fotônica tal como a idéia de uma lente perfeita que vai além da resolução do limite da difração<sup>13</sup>. Até aqui, existem muito poucas demonstrações experimentais de refração negativa em PCs na região de frequência próxima do IR. A substituição dos SRR por um par de pedaços metálicos separados por um meio dielétrico, além de ser um arranjo simples, pode levar ao desenvolvimento de materiais com índice de refração negativo adequado para comprimentos de onda óticos<sup>14</sup>. Entretanto, para projetar/propor aplicações tecnológicas eficientes, são necessários intensos trabalhos experimentais para explorar o vasto espaço de parâmetros que está envolvido na fabricação desses materiais compostos.

Como já foi dito anteriormente, os Cristais Fotônicos são arranjos regulares de materiais com diferentes índices de refração. Esta estrutura é construída de um material dielétrico, isolante ou capaz de manter uma determinada carga elétrica por longo tempo com um mínimo de perda. A figura 1 mostra um caso simples no qual dois materiais denotados por *azul* e *vermelho* são alternadamente empilhados. O período espacial da pilha é chamado de *constante de rede*, desde que ela corresponda à constante de rede do cristal ordinário composto de um arranjo regular de átomos. Atualmente, muitas idéias básicas são comuns para ambos os cristais e elas serão utilizadas para a construção fundamental da teoria dos Cristais Fotônicos. Entretanto, uma grande diferença entre eles é a escala da constante de rede. No caso de cristais ordinários, a constante de rede é da ordem de *angstrom*. Por outro lado, para os Cristais Fotônicos a constante de rede deve ser da mesma

ordem de grandeza do comprimento de onda da luz incidente. Por exemplo, aproximadamente 1mm ou menor para a luz visível, e é aproximadamente 1cm para microondas.



Podemos classificar os Cristais Fotônicos em três categorias, que são, cristais unidimensionais (1D), bidimensionais (2D), e tridimensionais (3D) concordando com a dimensionalidade da pilha (Fig.1). Os Cristais fotônicos úteis na região das microondas e do infravermelho são relativamente fáceis de serem fabricados. Aqueles que funcionam na região visível, especialmente alguns 3D são difíceis de se fabricar porque sua constante de rede é pequena. Contudo, várias técnicas têm sido desenvolvidas e aplicadas para sua fabricação nos últimos anos, e muitos bons cristais com uma constante de rede menor que 1mm são agora acessíveis<sup>15</sup>. Como as dificuldades em construir PCs em duas e três dimensões<sup>16</sup> são muitas, deter-nos-emos ao estudo dos PCs unidimensionais, pois estes são encontrados abundantemente na literatura<sup>17</sup>. Para adquirirmos um entendimento teórico mais aprofundado sob a natureza dos PCs, na Seção II apresentaremos a dedução de uma equação geral baseada nas técnicas de matriz transferência, para estudar as estruturas de banda fotônica, e as propriedades de simetria de um campo eletromagnético que se propaga através de um meio periódico composto de duas camadas caracterizadas pelos índices de refração  $n_1$  e  $n_2$ . Na Seção III os resultados acerca da estrutura de banda são apresentados

em particular com atenção especial voltada para as condições necessárias para a existência de pontos de gap nulo. Na seção IV, estuda-se as propriedades de transmissão e de reflexão nos pontos de *gap* nulo. Finalmente, na Seção V apresentamos nossas conclusões e perspectivas para desenvolvimentos futuros.

## 2-TEORIA BÁSICA

Nesta seção, faremos o estudo da propagação de uma onda plana através de um cristal fotônico unidimensional infinito, caracterizado por uma permissividade relativa  $\epsilon(z)$ , real e periódica. Suporemos ainda que os materiais usados não são magnéticos.

### 2.1- Equações Maxwell

Os campos elétrico e magnético satisfazem as seguintes equações de Maxwell

$$\begin{aligned}
 a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\
 b) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 c) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 d) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

As notações para o campo elétrico ( $\mathbf{E}$ ), o campo magnético ( $\mathbf{H}$ ), o deslocamento elétrico ( $\mathbf{D}$ ) e a indução magnética ( $\mathbf{B}$ ), são usadas nestas equações. E em geral, ( $\mathbf{E}$ ) e ( $\mathbf{H}$ ) são funções do tempo e do espaço.

A fim de encontrarmos as equações de propagação originadas das equações de Maxwell, nós precisamos das assim chamadas equações constitutivas que relacionam  $\mathbf{D}$  com  $\mathbf{E}$ , e  $\mathbf{B}$  com  $\mathbf{H}$ . E para meios dielétricos, lineares e isotrópicos, temos,

$$\begin{aligned}
 e) \quad \vec{D} &= \epsilon(\vec{r}) \vec{E} \\
 f) \quad \vec{B} &= \mu(\vec{r}) \vec{H}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde  $\epsilon(\vec{r})$  é a constante dielétrica e  $\mu(\vec{r})$  é a permeabilidade magnética. Notamos, em geral que, ambos  $\epsilon$  e  $\mu$  são funções dependentes da frequência, e que, para simplificar a notação, nós omitimos a dependência explícita.

Introduzindo o vetor potencial  $\mathbf{A}$  e o potencial escalar  $\phi$ ,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.3)$$

no gauge de Coulomb  $\phi = 0$  na ausência de cargas. Em conseqüência temos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \left[ \epsilon(\vec{r}) \vec{E} \right] = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \left[ \epsilon(\vec{r}) \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \left[ \epsilon(\vec{r}) \vec{A} \right] = 0$$

então,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \epsilon(\vec{r}) \vec{A} \right] = 0 \quad (2.4)$$

note que (2.4) é uma generalização de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

Agora obteremos a equação de movimento para o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , aplicando  $\vec{\nabla} \times$  sobre (d) em (1). Obtemos,

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0 \quad (2.5)$$

mas,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \left[ \mu(\vec{r}) \vec{H} \right] = \mu(\vec{r}) \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \mu(\vec{r}) \times \vec{H} = \frac{\mu(\vec{r})}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\nabla} \mu(\vec{r}) \times \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \left[ \mu(\vec{r}) \vec{H} \right] = \frac{\mu(\vec{r}) \epsilon(\vec{r})}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \mu(\vec{r})}{\mu(\vec{r})} \times \vec{B}$$

e em conseqüência,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \frac{\mu(\vec{r}) \epsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\vec{\nabla} \mu(\vec{r})}{\mu(\vec{r})} \times \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\mu(\vec{r}) \epsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\vec{\nabla} \mu(\vec{r})}{\mu(\vec{r})} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \quad (2.6)$$

substituindo (6) em (5) resulta,

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) + \frac{\mu(\vec{r})\epsilon(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\vec{\nabla} \mu(\vec{r})}{\mu(\vec{r})} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Por conveniência matemática usaremos campos complexos para resolver esta equação, lembrando que ao final devemos tomar a parte real dos campos para obtermos campos físicos. Supondo uma luz monocromática, representamos o campo elétrico como,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (2.8)$$

Podemos reescrever (7) de seguinte forma

$$\frac{1}{\mu(\vec{r})\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) - \frac{1}{\mu^2(\vec{r})\epsilon(\vec{r})} \vec{\nabla} \mu(\vec{r}) \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{E} \quad (2.9)$$

esta equação é a Equação de propagação básica para o nosso problema.

## 2.2- Problema de Autovalor do Campo Elétrico

Vamos analisar as propriedades da equação (2.9). O conteúdo desta equação nos permite fazer várias operações na função  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , e se  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  é realmente um modo permitido do campo elétrico, o resultado será justo uma constante vezes a função original  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Esta situação aparece em física matemática, e é conhecida como problema de autovalor. Se o resultado de um operador em uma função é justamente a própria função, multiplicada por uma constante, então a função é chamada de autofunção ou autovetor, e a constante é chamada de autovalor.

Nesse caso, nós identificamos o lado esquerdo da equação básica como um operador  $\Omega$  atuando em  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . A equação básica torna-se:

$$\Omega \vec{E}(\vec{r}) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.10)$$

onde  $\Omega$  é um operador da forma

$$c^2 \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \right) - \frac{c^2}{\mu(\vec{r})} \vec{\nabla} \mu(\vec{r}) \times \left( \vec{\nabla} \times \right) \quad (2.11)$$

As autofunções  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  são modos harmônicos, e os autovalores  $(\omega^2/c)$  são proporcionais ao quadrado da frequência desses modos. É importante notar que o operador  $\Omega$  é um operador linear, isto é, uma combinação linear de soluções é também uma solução.

O operador  $\Omega$  é também um operador *Hermitiano*. E relembremos que para um operador *Hermitiano*, autofunções ortogonais correspondem a autovalores reais. Estas autofunções podem ser obtidas pelo princípio variacional, e elas podem ser classificadas por suas propriedades de simetria. Todas essas mesmas propriedades úteis da equação de Schrödinger permanecem válidas para o nosso formalismo de eletromagnetismo.

### 2.3- Propriedades dos Modos Harmônicos

Tendo estabelecido que  $\Omega$  é *Hermitiano*, nós podemos mostrar que  $\Omega$  deve ter autovalores reais. Como  $\Omega$  é Hermitiano, nós sabemos que  $(\mathbf{E}, \Omega \mathbf{E}) = (\Omega \mathbf{E}, \mathbf{E})$ . Suponhamos que  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  é uma autovetor de  $\Omega$  com autovalores  $(\omega/c)^2$ , temos

$$\begin{aligned} \Omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= (\omega^2/c^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ (\mathbf{E}, \Omega \mathbf{E}) &= (\omega^2/c^2) (\mathbf{E}, \mathbf{E}) \\ (\mathbf{E}, \Omega \mathbf{E})^* &= (\omega^2/c^2)^* (\mathbf{E}, \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da definição de produto interno nós sabemos que  $(\mathbf{E}, \Omega \mathbf{E}) = (\Omega \mathbf{E}, \mathbf{E})^*$ . Usando a condição de hermiticidade e desta definição, obtemos que,

$$\omega^2 = (\omega^2)^*, \quad (2.13)$$

ou seja,  $\omega$  é real.



Por fim, a hermiticidade de  $\Omega$  força dois modos harmônicos quaisquer  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$  com suas respectivas frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  a ter produto interno igual a zero:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 \left( \vec{E}_2, \vec{E}_1 \right) &= c_1^2 \left( \vec{E}_2, \Omega \vec{E}_1 \right) = c_1^2 \left( \Omega \vec{E}_2, \vec{E}_1 \right) = \omega_2^2 \left( \vec{E}_2, \vec{E}_1 \right) \\ \rightarrow \left( \omega_1^2 - \omega_2^2 \right) \left( \vec{E}_2, \vec{E}_1 \right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Portanto, se  $\omega_1 \neq \omega_2$  nós devemos ter  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 0$  e dizemos que  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  são modos ortogonais. Por outro lado, se os modos harmônicos têm frequências iguais, eles são degenerados e não são necessariamente ortogonais.

## 2.4- Energia Eletromagnética e o Princípio Variacional

Apesar dos modos harmônicos em um meio dielétrico poderem ser muito complicados, existe uma forma simples de nós entendermos suas propriedades qualitativas. Aproximadamente, um modo tende a concentrar sua energia deslocada em regiões de maior constante de permeabilidade magnética, enquanto permanece ortogonal aos modos de frequência inferior a ele. Está noção intuitiva encontra expressão na *teoria variacional eletromagnética*, a qual é análoga ao método variacional de mecânica quântica. O modo de frequência mais baixa, por exemplo, é o padrão de campo que minimiza o funcional de energia eletromagnética,

$$W_f \left( \vec{E} \right) = \frac{1}{2} \frac{\left( \vec{E}, \Omega \vec{E} \right)}{\left( \vec{E}, \vec{E} \right)}.\tag{2.15}$$

Nós podemos reescrever este funcional se usarmos as seguintes expressões:

$$\left( \vec{E}, \Omega \vec{E} \right) = \int d\vec{r} \frac{1}{\mu(\vec{r})} \left| \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right|^2\tag{2.16}$$

e que

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{ic}{\omega\mu(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}). \quad (2.17)$$

então temos,

$$W_f(\vec{E}) = \frac{1}{2 \left( \vec{E}, \vec{E} \right)} \int d\vec{r} \frac{1}{\mu(\vec{r})} \left| \frac{\omega}{c} \vec{B} \right|. \quad (2.18)$$

Desta expressão podemos ver que  $W_f$  é minimizado quando o campo  $\mathbf{B}$  é concentrado na região de maior permeabilidade magnética.

## 2.5- Propriedade de Escala das Equações de Maxwell

Temos o raio de Bohr como escala fundamental em física atômica. Para os cristais fotônicos não existe constante fundamental com dimensão de comprimento, tal que existe uma simples relação entre problemas eletromagnéticos que diferem somente por uma contração ou expansão de todas as distâncias.

Suponhamos, por exemplo, que temos um modo eletromagnético  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  de frequência  $\omega$  em uma configuração de permeabilidade magnética  $\mu(\mathbf{r})$ . Retornemos à equação (2.9)

$$c^2 \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right) - \frac{c^2}{\mu(\vec{r})} \vec{\nabla} \mu(\vec{r}) \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{E}(\vec{r}). \quad (2.19)$$

Agora vamos supor que queremos encontrar os modos harmônicos em uma configuração de permeabilidade magnética  $\mu'(\mathbf{r})$  que é justamente uma expansão ou contração de  $\mu(\mathbf{r})$ :  $\mu'(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}/s)$  por um parâmetro de escala. Podemos fazer uma mudança de variável em (2.19), usando  $\mathbf{r}' = s\mathbf{r}$  e  $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}/s$ :

$$sc^2 \vec{\nabla}' \times \left( s \vec{\nabla}' \times \vec{E}(\vec{r}'/s) \right) - \frac{c^2}{\mu(\vec{r}'/s)} s \vec{\nabla}' \mu(\vec{r}'/s) \times \left( s \vec{\nabla}' \times \vec{E}(\vec{r}'/s) \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{E}(\vec{r}'/s) \quad (2.20)$$

mas  $\mu(\vec{r}'/s)$  é igual a  $\mu'(\vec{r}')$ , então

$$c^2 \vec{\nabla}' \times \left( \vec{\nabla}' \times \vec{E}(\vec{r}'/s) \right) - \frac{c^2}{\mu'(\vec{r}')} \vec{\nabla}' \mu'(\vec{r}') \times \left( \vec{\nabla}' \times \vec{E}(\vec{r}'/s) \right) = \left( \frac{\omega}{cs} \right)^2 \vec{E}(\vec{r}'/s) \quad (2.21)$$

Esta equação é na verdade a mesma equação (2.19) com um perfil de modo  $\vec{E}'(\vec{r}') = \vec{E}(\vec{r}'/s)$  e frequência  $\omega' = \frac{\omega}{s}$ . Em outras palavras, se nós quisermos saber o perfil do modo depois de uma mudança na escala de comprimento por um fator  $s$ , nós justamente escalamos o modo antigo e a frequência pelo mesmo fator. A solução do problema em uma escala de comprimento determina as soluções em todas as outras escalas de comprimento.

Este fato simples é de considerável importância prática. Por exemplo, a fabricação de cristais fotônicos em micro escala pode ser bem difícil, mas modelos podem ser feitos e testados no regime de microondas, numa escala de centímetros. Nossas considerações asseguram que o modelo terá as mesmas propriedades eletromagnéticas.

## 2.6- Simetrias

Vamos estudar várias simetrias de um sistema que nos fala a respeito dos modos eletromagnéticos. As simetrias translacionais (ambas discretas ou contínuas) são importantes desde que os cristais fotônicos sejam dielétricos periódicos, e porque elas nos fornecem uma direção natural na discussão dos *band gaps*<sup>18</sup>.

### 2.6.1- Simetria de Inversão

Supondo que desejamos encontrar os modos que são permitidos em uma cavidade metálica bidimensional. Sua forma é arbitrária, podendo ser difícil encontrar uma condição de contorno exata e solucionar o problema explicitamente. Mas a cavidade tem uma simetria importante: se a invertemos em torno de seu centro, obteremos a mesma cavidade. Assim se, de algum maneira, encontrarmos que um padrão particular  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  é um modo com frequência  $\omega$ , então o padrão  $\mathbf{E}(-\mathbf{r})$  deve ser também um modo com a mesma frequência. A cavidade não pode distinguir entre esses dois modos, já que ela não pode fazer distinção de  $\mathbf{r}$  e  $-\mathbf{r}$ .

Relembremos que, se dois modos diferentes tiverem a mesma frequência eles são degenerados. Se  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  não é degenerado, e  $\mathbf{E}(-\mathbf{r})$  tem a mesma frequência, então ele deve ser o mesmo modo. Note que se invertermos o sistema duas vezes, voltaremos ao padrão original, ou seja,  $\mathbf{E}(-\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{E}(\mathbf{r})$  e mais uma vez,  $\alpha^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ , portanto podemos ver que  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = -1$ . Se um dado modo é não degenerado, ele deve ser um dos dois tipos: é um modo par se  $\mathbf{E}(-\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  e é dito um modo ímpar se  $\mathbf{E}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

Podemos definir um operador de inversão  $\Theta_1$  tal que  $[\Theta_1, \Omega] = 0$ , assim, se nós operarmos com esse comutador em um modo  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  do nosso sistema, obtemos

$$\begin{aligned} [\Theta_1, \Omega]\vec{E} &= \Theta_1(\Omega\vec{E}) - \Omega(\Theta_1\vec{E}) = 0 \\ \Omega(\Theta_1\vec{E}) &= \Theta_1(\Omega\vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2}(\Theta_1\vec{E}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Esta equação nos diz que, se  $\mathbf{E}$  é um modo harmônico com frequência  $\omega$ , então  $\Theta_1\mathbf{E}$  também é um modo harmônico com a mesma frequência. Se não há degenerescência, então só pode existir um modo por frequência.

### 2.6.2- Simetria Translacional Contínua

Um sistema com simetria translacional contínua não muda sob uma translação através de um deslocamento  $\mathbf{d}$ . Para cada  $\mathbf{d}$ , nós podemos definir um operador de translação  $T_{\mathbf{d}}$  tal que, quando atua em uma função  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ , muda o argumento de  $\mathbf{d}$ . Supondo nosso sistema sendo invariável sob translação; então temos  $T_{\mathbf{d}}\mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}+\mathbf{d}) = \mu(\mathbf{r})$ , ou equivalente,  $[T_{\mathbf{d}}, \Omega] = 0$ . Os modos de  $\Omega$  agora podem ser classificados de acordo como eles se comportam sob  $T_{\mathbf{d}}$ .

### 2.6.3- Simetria Translacional Discreta

Cristais fotônicos, assim como os cristais atômicos, não têm simetria translacional contínua; em lugar, eles têm simetria translacional discreta. Isto é, eles são invariantes sob translação de alguma distância – somente sob distâncias que são um múltiplo de um pequeno comprimento fixo. Um exemplo simples de um certo sistema é uma estrutura que se repete em uma direção, como a configuração na figura 2.1.

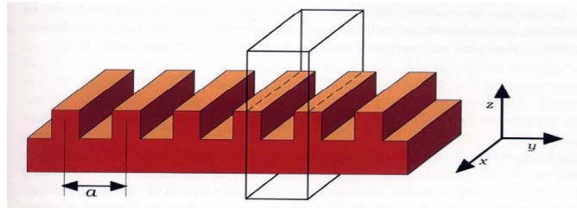


Figura 2.1: configuração dielétrica com simetria translacional discreta.

A constante da rede é  $a$ , e o vetor primitivo da rede pode ser escrito como  $\vec{a} = a\hat{y}$ .

Por simetria,  $\mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}+\mathbf{a})$ . Pela repetição dessa translação nós vemos que  $\mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}+\mathbf{R})$  para qualquer  $\mathbf{R}$  que seja múltiplo inteiro de  $\mathbf{a}$ ; isto é  $\mathbf{R} = m\mathbf{a}$ , onde  $m$  é um inteiro.

Nós podemos identificar os modos de  $\Omega$  como autofunções simultâneas de ambos os operadores translação. Essas autofunções são ondas planas:

$$\begin{aligned}
T_{d\bar{x}} e^{ik_x x} &= e^{ik_x(x+d)} = (e^{ik_x d}) e^{ik_x x} \\
T_{\bar{R}} e^{ik_y y} &= e^{ik_y(y+ma)} = (e^{ik_y ma}) e^{ik_y y}.
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Podemos iniciar classificando os modos especificando  $k_x$  e  $k_y$ . Todavia, nem todos os valores de  $k_y$  produzem diferentes autovetores. Consideremos dois modos, um com vetor de onda  $k_y$  e o outro com vetor de onda  $k_y + 2\pi/a$ . Se inserirmos estes vetores em (2.23) mostramos que eles têm os mesmos autovalores para  $T_{\bar{R}}$ . Portanto, todos os modos com vetores de onda da forma  $k_y + n(2\pi/a)$ , onde  $n$  é um inteiro, formam um conjunto degenerado; eles todos têm o mesmo autovalor  $e^{i(k_y ma)}$ . A quantidade  $b = 2\pi/a$  que adicionamos a  $k_y$ , é o chamado vetor primitivo da rede recíproca <sup>19</sup>.

Como qualquer combinação linear destas autofunções degeneradas é uma autofunção com o mesmo autovalor, nós podemos tomar a combinações dos nossos modos originais e expressá-los da forma:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{k_x, k_y}(\vec{r}) &= e^{ik_x x} \sum_m \vec{C}_{k_y, m} e^{i(k_y + mb)y} \\
\vec{E}_{k_x, k_y}(\vec{r}) &= e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \sum_m \vec{C}_{k_y, m} e^{imby} \\
\vec{E}_{k_x, k_y}(\vec{r}) &= e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot \vec{u}_{k_y}(y),
\end{aligned}
\tag{2.24}$$

onde os  $C$ s são coeficientes da expansão, e  $\vec{u}_{k_y}(y)$  é periódica em  $y$ , ou seja,  $\vec{u}_{k_y}(y + ma) = \vec{u}_{k_y}(y)$ .

A periodicidade discreta na direção  $y$  leva a uma dependência de  $\mathbf{E}$  que é o produto simples de uma onda plana com uma função periódica. Em outras palavras, as autofunções da equação de onda para um potencial periódico são o produto de uma onda plana vezes uma função com a periodicidade da rede. Na física do estado sólido, este fato é conhecido como o teorema do Bloch <sup>18</sup>.

O estado de Bloch com vetor de onda  $k_y$  e o estado de Bloch com vetor  $k_y + mb$  são idênticos, diferindo apenas por um múltiplo inteiro  $b = 2\pi/a$ ; do ponto de vista físico esses estados não diferem. Portanto, as frequências são periódicas em  $k_y$ :  $\omega(k_y) = \omega(k_y + mb)$ . Precisamos apenas considerar  $k_y$  existindo na faixa  $-\pi/a < k_y < \pi/a$ . Esta região importante é chamada de *primeira zona de Brillouin*.

### 2.6.4- Simetria de Rotação

Um cristal também deve ser invariante sob uma rotação. Nós podemos encontrar os modos de um sistema com simetria de rotação.

Supondo um operador  $\mathfrak{R}(\hat{n}, \alpha)$  que gira vetores por um ângulo  $\alpha$  sobre o eixo- $\hat{n}$ . Abreviemos  $\mathfrak{R}(\hat{n}, \alpha)$  por  $\mathfrak{R}$ . Para girar um campo vetorial  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ , nós tomamos o vetor  $\mathbf{f}$  e giramo-lo com  $\mathfrak{R}$  para dá  $\mathbf{f}' = \mathfrak{R}\mathbf{f}$ . Nós também giramos o argumento  $\mathbf{r}$  da função vetorial:  $\mathbf{r}' = \mathfrak{R}^{-1}\mathbf{r}$ . Portanto  $\mathbf{f}'(\mathbf{r}') = \mathfrak{R}\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathfrak{R}\mathbf{f}(\mathfrak{R}^{-1}\mathbf{r})$ . Então, definimos um operador  $O_{\mathfrak{R}}$  como:

$$O_{\mathfrak{R}}\vec{f}(\vec{r}) = \mathfrak{R}\vec{f}(\mathfrak{R}^{-1}\vec{r}). \quad (2.25)$$

Se a rotação por  $\mathfrak{R}$  deixa o sistema invariante, então concluímos que  $[\Omega, \mathfrak{R}] = 0$ .

Portanto, podemos ter

$$\Omega(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\vec{k}n}) = O_{\mathfrak{R}}(\Omega\vec{E}_{\vec{k}n}) = \left(\frac{\omega_n(\vec{k})}{c}\right)^2 (O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\vec{k}n}). \quad (2.26)$$

Vemos que  $O_{\mathfrak{R}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}$  também satisfaz a equação de propagação, com o mesmo autovalor de  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}$ . Isso significa que o modo girado é um modo permitido, com a mesma frequência. Pode-se ainda ver que o estado  $O_{\mathfrak{R}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}$  é um estado de Bloch com vetor de onda  $\mathfrak{R}\mathbf{k}$ . Para isso, mostraremos que  $O_{\mathfrak{R}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}$  é uma autofunção do operador de translação  $T_{\mathbf{R}}$

com autovalor  $\exp(i\mathfrak{R}\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})$ , onde  $\mathbf{R}$  é o vetor da rede. Usando o fato que  $\Omega$  e  $O_{\mathfrak{R}}$  comutam, temos:

$$\begin{aligned}
 T_{\bar{R}}(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}) &= O_{\mathfrak{R}}(T_{\mathfrak{R}^{-1}\bar{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}) \\
 T_{\bar{R}}(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}) &= O_{\mathfrak{R}}(e^{i(\bar{k}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\bar{R})}\vec{E}_{\bar{k}n}) \\
 T_{\bar{R}}(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}) &= e^{i(\bar{k}\cdot\mathfrak{R}^{-1}\bar{R})}(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}) \\
 T_{\bar{R}}(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}) &= e^{i(\mathfrak{R}\bar{k}\cdot\bar{R})}(O_{\mathfrak{R}}\vec{E}_{\bar{k}n}).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Como  $O_{\mathfrak{R}}\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}$  é um estado de Bloch com vetor de onda  $\mathfrak{R}\mathbf{k}$  e tem o mesmo autovalor de  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}n}$ , então temos que  $\omega_n(\mathfrak{R}\mathbf{k}) = \omega_n(\mathbf{k})$ .

Concluimos que quando existe simetria de rotação na rede, as bandas de frequência  $\omega_n(\mathbf{k})$  têm redundância na zona de Brillouin. De maneira análoga, podemos mostrar que sempre que um cristal fotônico tiver uma simetria de rotação, reflexão ou inversão, as funções  $\omega_n(\mathbf{k})$  também as terão.

A pequena região dentro da zona de Brillouin para qual os  $\omega_n(\mathbf{k})$  não relacionados por simetria é chamada *zona irredutível de Brillouin*.

### 2.6.5- Simetria de Reflexão

A simetria de reflexão em um cristal fotônico, sob certas condições permite-nos separar a equação de autovalores para  $\Omega_{\mathbf{k}}$  em duas equações, uma para cada polarização do campo. Em cada caso  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$  é perpendicular ao plano de reflexão, sendo  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  paralelo; enquanto no outro,  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  é perpendicular àquele plano e  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$  é paralelo. Essa simplificação é conveniente, porque ele fornece informação imediata sob os modos simétricos e facilita também o cálculo numérico das frequências.



### 2.6.6- Invariância Sob Inversão Temporal

Vamos tomar o complexo conjugado da equação mestra e usar o fato que os autovalores são reais, para obter:

$$\begin{aligned} (\Omega \vec{E}_{\vec{k}n})^* &= \frac{\omega_n^2(\vec{k})}{c^2} \vec{E}_{\vec{k}n}^* \\ \Omega \vec{E}_{\vec{k}n}^* &= \frac{\omega_n^2(\vec{k})}{c^2} \vec{E}_{\vec{k}n}^* \end{aligned} \quad (2.28)$$

Com isso, vemos que  $\vec{E}_{\vec{k}n}^*$  satisfaz a mesma equação como  $\vec{E}_{\vec{k}n}$ , com os mesmos autovalores. Sendo  $\vec{E}_{\vec{k}n}^*$  um estado de Bloch em  $(-\mathbf{k}, n)$ , temos:  $\omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(-\mathbf{k})$ . Esta relação é válida para qualquer cristal fotônico. As bandas de frequência têm simetria de inversão temporal, mesmo que o cristal não a tenha. Tomar o complexo conjugado de  $\vec{E}_{\vec{k}n}^*$  é equivalente a reverter o sinal do tempo nas equações de Maxwell.

### 2.7- Aplicando o Formalismo à Super Rede Fotônica

Agora nos limitaremos ao caso de um Cristal Fotônico 1D ao longo da direção  $z$ , descrito por uma constante dielétrica periódica  $\varepsilon(z+d) = \varepsilon(z)$  e uma permeabilidade magnética periódica  $\mu(z+d) = \mu(z)$ , onde  $d$  é o período.

Tomamos  $\mu$  dependendo apenas de  $z$ . Então  $E(z, t) = E(z)e^{-i\omega t}$  em (2.7) produz,

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 E + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (2.29)$$

a qual pode-se escrever como,

$$-\frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{1}{\mu^2 \varepsilon} \frac{d\mu}{dz} \frac{dE}{dz} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 E$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{\mu} \frac{d^2 E}{dz^2} - \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{dz} \frac{dE}{dz} \right] = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 E$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu} \frac{dE}{dz} \right) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 E \quad (2.30)$$

Introduzindo o índice de refração e a impedância,

$$n(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} \sqrt{\mu(z)}$$

$$Z(z) = \frac{\sqrt{\mu(z)}}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \quad (2.31)$$

É fácil ver que (10) toma a forma

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{Zn} \frac{dE}{dz} \right) = -\frac{n}{Z} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 E \quad (2.32)$$

Em cada material  $E(z) \approx e^{-ik_i z}$ , e, portanto tendo substituído em (12) resulta,

$$-\frac{k_i^2}{Zn} = \frac{n}{Z} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2$$

$$k_i = \pm \frac{\omega}{c} |n_i| \quad (2.33)$$

Para o nosso problema, em cada meio material, suporemos o campo elétrico representado pela seguinte onda plana:

$$E_i(z) = A_i \cos k_i(z - z_0) + \frac{Zn_i B_i}{k_i} \text{sen} k_i(z - z_0) \quad (2.34)$$

onde  $z_0$  é um ponto arbitrário dentro do material, e

$$E_i(z_0) = A_i \quad (2.35)$$

Além disso,

$$\frac{dE_i}{dz} = -A_i k_i \text{sen} k_i(z - z_0) + Zn_i B_i \cos k_i(z - z_0)$$

$$\frac{1}{Zn_i} \frac{dE_i}{dz} = -\frac{A_i k_i}{Zn_i} \text{sen} k_i(z - z_0) + B_i \cos k_i(z - z_0) \quad (2.36)$$

Onde,

$$\left. \frac{1}{Zn_i} \frac{dE_i}{dz} \right|_{z=z_0} = B_i \quad (2.37)$$

Define-se então uma função contínua

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} E(z) \\ \frac{1}{Zn} \frac{dE(z)}{dz} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Comparando (2.34) e (2.6), escrevemos

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \cos k_i(z - z_0) & \frac{Z_i n_i}{k_i} \text{sen} k_i(z - z_0) \\ -\frac{k_i}{Z_i n_i} \text{sen} k_i(z - z_0) & \cos k_i(z - z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Note que,

$$\Psi(z_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Portanto

$$\Psi(z) = M_i(z - z_0) \Psi(z_0) \quad (2.41)$$

em cada camada da heteroestrutura, onde  $i$  denota o índice da camada,  $z$  e  $z_0$  estão na mesma camada e  $M(z - z_0)$  é chamada Matriz de Transferência do estado  $\Psi(z)$  para o estado  $\Psi(z_0)$ .

Se  $M$  é a matriz transferência de um estado  $\Psi(z)$  para o estado  $\Psi(z_0)$  em um espaço vetorial de dimensão finita  $V$ , então:  $M$  é invertível e  $M^{-1}$  é a matriz transferência de  $\Psi(z_0)$  para  $\Psi(z)$ . Portanto  $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ .

$$M(z - z_0) = \begin{pmatrix} \cos k_i(z - z_0) & \frac{Z_i n_i}{k_i} \operatorname{sen} k_i(z - z_0) \\ -\frac{k_i}{Z_i n_i} \operatorname{sen} k_i(z - z_0) & \cos k_i(z - z_0) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Vemos que

$$\det M(z - z_0) = 1 \quad (2.43)$$

e a matriz inversa de  $M(z - z_0)$  será

$$M^{-1}(z - z_0) = \begin{pmatrix} \cos k_i(z - z_0) & -\frac{Z_i n_i}{k_i} \operatorname{sen} k_i(z - z_0) \\ \frac{k_i}{Z_i n_i} \operatorname{sen} k_i(z - z_0) & \cos k_i(z - z_0) \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

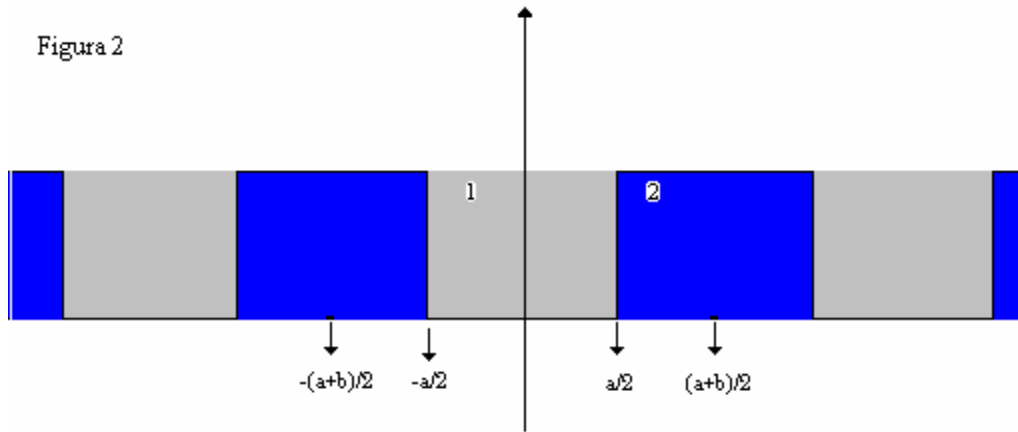
Quando o índice de refração  $n_i$  na camada  $i$  for puramente imaginário (o qual ocorre quando  $\varepsilon_i$  e  $\mu_i$  tem sinais opostos),  $|n_i|$  deve ser substituído por  $i|n_i|$  na Eq. (2.42).

Agora vamos aplicar a técnica de matriz transferência à seguinte rede fotônica, onde escolhemos a origem do sistema de coordenadas no centro da primeira parte da camada de comprimento  $a$ , com constante dielétrica  $\varepsilon_1$  e permeabilidade magnética  $\mu_1$ , e denotamos por  $b$  o comprimento da segunda parte da camada com constante dielétrica  $\varepsilon_2$  e permeabilidade magnética  $\mu_2$ .

Portanto,

$$\frac{a+b}{2} - \left( -\frac{a+b}{2} \right) = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = a+b = d$$

Onde  $d$  é o período da rede. Veja a figura 2:



Aplicando (2.41) e (2.42) à super-rede, temos

- 1) com  $z = a/2$  e  $z_0 = 0$

$$\Psi\left(\frac{a}{2}\right) = M_1\left(\frac{a}{2}\right)\Psi(0) \quad (2.45)$$

- 2) com  $z = (a+b)/2$  e  $z = a/2$

$$\Psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = M_2\left(\frac{b}{2}\right)\Psi\left(\frac{a}{2}\right) \quad (2.46)$$

Então

$$\Psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = M_2\left(\frac{b}{2}\right)M_1\left(\frac{a}{2}\right)\Psi(0) \quad (2.47)$$

Onde

$$M_1\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{k_1 a}{2} & \frac{Z_1 n_1}{k_1} \operatorname{sen} \frac{k_1 a}{2} \\ -k_1 \operatorname{sen} \frac{k_1 a}{2} & \cos \frac{k_1 a}{2} \\ \frac{Z_1 n_1}{k_1} \operatorname{sen} \frac{k_1 a}{2} & \cos \frac{k_1 a}{2} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$M_2\left(\frac{b}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{k_2 b}{2} & \frac{Z_2 n_2}{k_2} \operatorname{sen} \frac{k_2 b}{2} \\ -k_2 \operatorname{sen} \frac{k_2 b}{2} & \cos \frac{k_2 b}{2} \\ \frac{Z_2 n_2}{k_2} \operatorname{sen} \frac{k_2 b}{2} & \cos \frac{k_2 b}{2} \end{pmatrix}$$

Assim

$$\Psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = T(a,b)\Psi(0) \quad (2.49)$$

$$T(a,b) = M_2\left(\frac{b}{2}\right)M_1\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

De (2.48) obtemos

$$\begin{aligned} p &= \cos\frac{k_2b}{2} \cos\frac{k_1a}{2} - \frac{Z_2n_2k_1}{Z_1n_1k_2} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \\ q &= \frac{Z_1n_1}{k_1} \cos\frac{k_2b}{2} \operatorname{sen}\frac{k_1a}{2} - \frac{Z_2n_2}{k_2} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \cos\frac{k_2b}{2} \\ r &= -\frac{k_2}{Z_2n_2} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \cos\frac{k_1a}{2} - \frac{k_1}{Z_1n_1} \cos\frac{k_2b}{2} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \\ s &= \cos\frac{k_2b}{2} \cos\frac{k_1a}{2} - \frac{Z_1n_1k_2}{Z_2n_2k_1} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \operatorname{sen}\frac{k_2b}{2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por outro lado,

1) com  $z = -a/2$  e  $z_0 = 0$

$$\Psi\left(-\frac{a}{2}\right) = M_1\left(-\frac{a}{2}\right)\Psi(0) \quad (2.52)$$

2) com  $z = -(a+b)/2$  e  $z = -a/2$

$$\Psi\left(-\frac{a+b}{2}\right) = M_2\left(-\frac{b}{2}\right)\Psi\left(-\frac{a}{2}\right) \quad (2.53)$$

Então

$$\Psi\left(-\frac{a+b}{2}\right) = M_2\left(-\frac{b}{2}\right)M_1\left(-\frac{a}{2}\right)\Psi(0) = T(-a,-b)\Psi(0) \quad (2.54)$$

onde,

$$T(-a,-b) = M_2\left(-\frac{b}{2}\right)M_1\left(-\frac{a}{2}\right) \quad (2.55)$$

logo

$$T(-a, -b) = \begin{pmatrix} p & -q \\ -r & s \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Como estamos tratando um cristal fotônico com período  $d$ , podemos aplicar o teorema de Bloch,

$$\Psi(z + d) = e^{ikd} \Psi(z) \quad (2.57)$$

onde  $k$  é um vetor de onda da rede.

Por outro lado temos,

$$\Psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{ikd} \Psi\left(-\frac{a+b}{2}\right) \quad (2.58)$$

Usando (2.47) nós podemos escrever (2.58) da forma

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Psi(0) = e^{ikd} \begin{pmatrix} p & -q \\ -r & s \end{pmatrix} \Psi(0) \quad (2.59)$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Psi(0) = \lambda \begin{pmatrix} p & -q \\ -r & s \end{pmatrix} \Psi(0)$$

Onde  $\lambda = e^{ikd}$ .

Assim

$$\begin{pmatrix} p(1-\lambda) & q(1+\lambda) \\ r(1+\lambda) & s(1-\lambda) \end{pmatrix} \Psi(0) = 0 \quad (2.60)$$

Logo o determinante de (2.60) deve ser

$$ps(1-\lambda)^2 - qr(1+\lambda)^2 = 0 \quad (2.61)$$

Para resolvermos (2.61) de uma forma conveniente, necessitamos que,

$$\det \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = 1 \quad (2.62)$$

$$ps - qr = 1$$

ou

$$qr = ps - 1 \quad (2.63. a)$$

$$ps = qr + 1 \quad (2.63. b)$$

Substituindo (2.63. a) em (2.61) resulta,

$$ps = \frac{1 + \cos kd}{2}$$

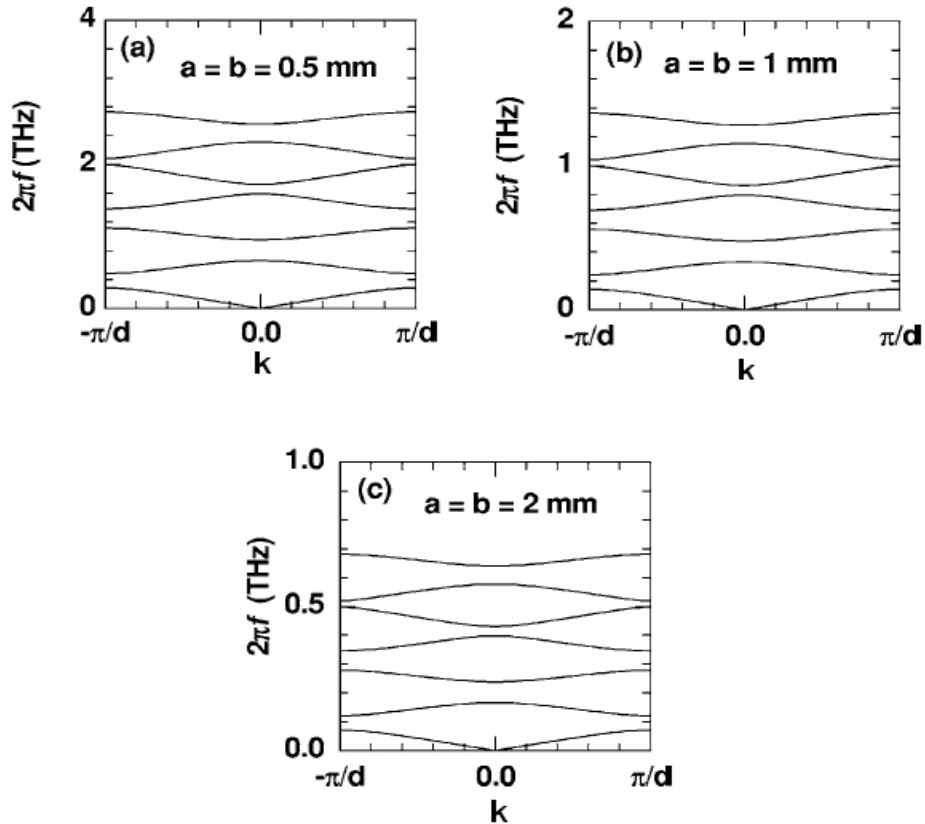
$$ps = \cos^2\left(\frac{kd}{2}\right) \quad (2.64)$$

Substituindo (2.63. b) em (2.61) obtemos,

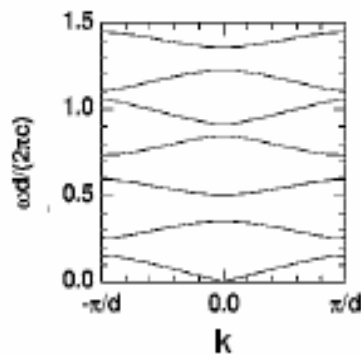
$$qr = -\text{sen}^2\left(\frac{kd}{2}\right) \quad (2.65)$$

Note que as soluções de (2.64) e (2.65) levam-nos a relação de dispersão  $\omega = \omega(k)$  ou estruturas de bandas fotônicas da super-rede periódica. As estruturas de bandas fotônicas de uma super-rede 1D de período  $d$  (com  $a = b = d/2$ ) são apresentadas na Fig.2.1<sup>20</sup> para algumas espessuras-de camadas, ilustrando a presença de *gaps* nas estruturas de bandas.





Para ilustrar a dependência do gap fotônico nas espessuras relativas das camadas, na Fig.2.2<sup>20</sup> ilustra-se:



**Fig. 2.2:** Estrutura de banda fotônica  $\omega$  vs  $k$  de uma super-rede de período  $d$  com camadas alternadas iguais de ar (espessura  $a$ ) e GaAs (com espessura  $b$  e índice de refração  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cong 3,6$ ).

As estruturas de bandas da Fig.2.1 e Fig.2.2 ilustram a presença de *band gap* fotônico, e estão de acordo com a literatura<sup>21</sup>.

## 2.8- Cálculo das Funções que Definem o Campo Elétrico $E(z)$

Soluções na região I ( $-a/2 < z < a/2$ ), usando a eq. (2.41),

$$\Psi(z) = M_1 \Psi(0) = \begin{pmatrix} \cos k_1 z & \frac{Z_1 n_1}{k_1} \text{sen} k_1 z \\ -\frac{k_1}{Z_1 n_1} \text{sen} k_1 z & \cos k_1 z \end{pmatrix} \Psi(0) \quad (2.66)$$

Introduzindo,

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(z) \\ \frac{1}{Zn} \frac{dE}{dz} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

resulta,

$$\Psi_1(z) = \cos(k_1 z) \Psi_1(0) + \frac{Z_1 n_1}{k_1} \text{sen}(k_1 z) \Psi_2(0) \quad (2.68)$$

para (2.60) temos

$$p(1 - \lambda) \Psi_1(0) + q(1 + \lambda) \Psi_2(0) = 0 \quad (2.69. a)$$

$$r(1 + \lambda) \Psi_1(0) + s(1 - \lambda) \Psi_2(0) = 0 \quad (2.69. b)$$

de (2.69. a) obtemos,

$$\Psi_2(0) = \frac{i \text{sen}(kd)}{2qs} \Psi_1(0) \quad (2.70)$$

substituindo (2.70) em (2.68), resulta

$$\Psi_1(z) = \Psi_1(0) \left[ \cos(k_1 z) + \frac{i \text{sen}(kd)}{2qs} \frac{Z_1 n_1}{k_1} \text{sen}(k_1 z) \right] \quad (2.71)$$

Portanto, o campo elétrico na região I, onde  $-a/2 < z < a/2$  é dado por,

$$E(z) = E(0) \left[ \cos(k_1 z) + \frac{i \text{sen}(kd)}{2qs} \frac{Z_1 n_1}{k_1} \text{sen}(k_1 z) \right] \quad (2.72)$$

por outro lado, usando (2.69. b) resulta

$$\Psi_1(0) = \frac{isen(kd)}{2pr} \Psi_2(0) \quad (2.73)$$

e substituindo esta em (2.68), obtém-se

$$\Psi_1(z) = \Psi_2(0) \left[ \frac{Z_1 n_1}{k_1} sen(k_1 z) + \frac{i}{2pr} sen(kd) \cos(k_1 z) \right] \quad (2.74)$$

Portanto, o campo elétrico na região I também pode ser escrito da forma:

$$E(z) = \Psi_2(0) \left[ \frac{Z_1 n_1}{k_1} sen(k_1 z) + \frac{i}{2qs} sen(kd) \cos(k_1 z) \right] \quad (2.75)$$

Expressões similares podem ser obtidas de forma análoga para a região II.

$$E(z) = \Psi_1(0) \left[ \left( p + i \frac{\sin kd}{2s} \right) \cos \frac{\omega |n_2|}{c} \left( z - \frac{d}{2} \right) + \frac{n_2 c Z_2}{|n_2| \omega} \left( r + i \frac{\sin kd}{2q} \right) \sin \frac{\omega |n_2|}{c} \left( z - \frac{d}{2} \right) \right] \quad (2.76a)$$

ou

$$E(z) = \Psi_2(0) \left[ \left( q + i \frac{\sin kd}{2r} \right) \cos \frac{\omega |n_2|}{c} \left( z - \frac{d}{2} \right) + \frac{n_2 c Z_2}{|n_2| \omega} \left( s + i \frac{\sin kd}{2p} \right) \sin \frac{\omega |n_2|}{c} \left( z - \frac{d}{2} \right) \right] \quad (2.76b)$$

para a região  $a/2 < z < a/2 + b$ .

As equações (2.75) e (2.76) produzem os modos eletromagnéticos de uma célula elementar simples do Cristal Fotônico. Usando a condição de Bloch podemos determinar esses modos em outras células elementares. Naturalmente, a expressão (2.72) e (2.76a) são úteis quando  $q(\omega)$  e  $s(\omega)$  são diferentes de zero, enquanto (2.75) e (2.76b) são aproveitáveis quando ambos  $p(\omega)$  e  $r(\omega)$  são diferentes de zero.

Nas equações (2.65) e (2.66) em alguns pontos ocorrem os valores de máximo e mínimo das bandas, no centro e nas extremidades da Zona de Brillouin do Cristal Fotônico. Esses extremos são determinados das equações  $r(\omega)=0$  [ $p(\omega)=0$ ] e  $q(\omega)=0$  [ $s(\omega)=0$ ] no

centro (extremidades) da ZB. Além do mais, as equações (2.65)-(2.66) e (2.72)-(2.75)-(2.76) levam-nos as seguintes propriedades de simetria dos modos eletromagnéticos:

- I) No centro da primeira zona de Brillouin ( $k=0$ ), elas são funções pares de  $z$  quando  $r(\omega)=0$  e  $q(\omega)\neq 0$ , enquanto que elas são funções ímpares quando  $r(\omega)\neq 0$  e  $q(\omega)=0$ ;
- II) Nas extremidades da primeira zona de Brillouin ( $k=\pm\pi/d$ ), esses modos são pares se  $p(\omega)=0$  e  $s(\omega)\neq 0$ , enquanto que eles são ímpares quando  $p(\omega)\neq 0$  e  $s(\omega)=0$ .

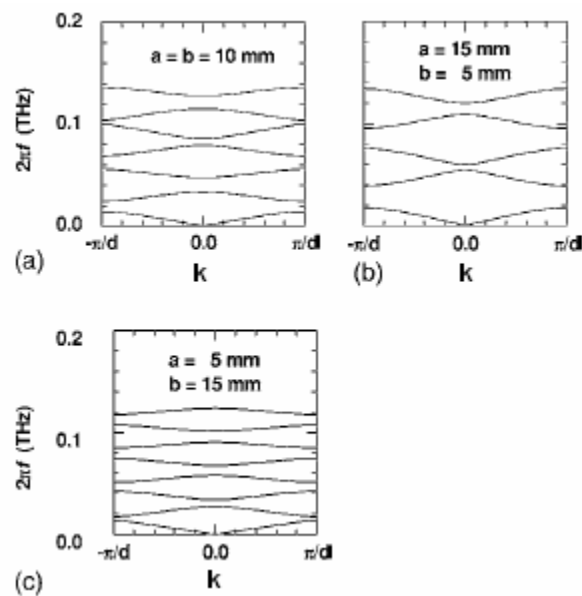
Naturalmente, nesses dois casos, as bandas não se tocam.

- III) O toque das bandas ocorre quando para  $r(\omega)=q(\omega)=0$  no centro da ZB, e para  $p(\omega)=s(\omega)=0$  nas extremidades da ZB, tal que as soluções são degeneradas, e a solução geral não tem paridade definida.

### 3- Resultados

#### 3.1 Relação de Dispersão

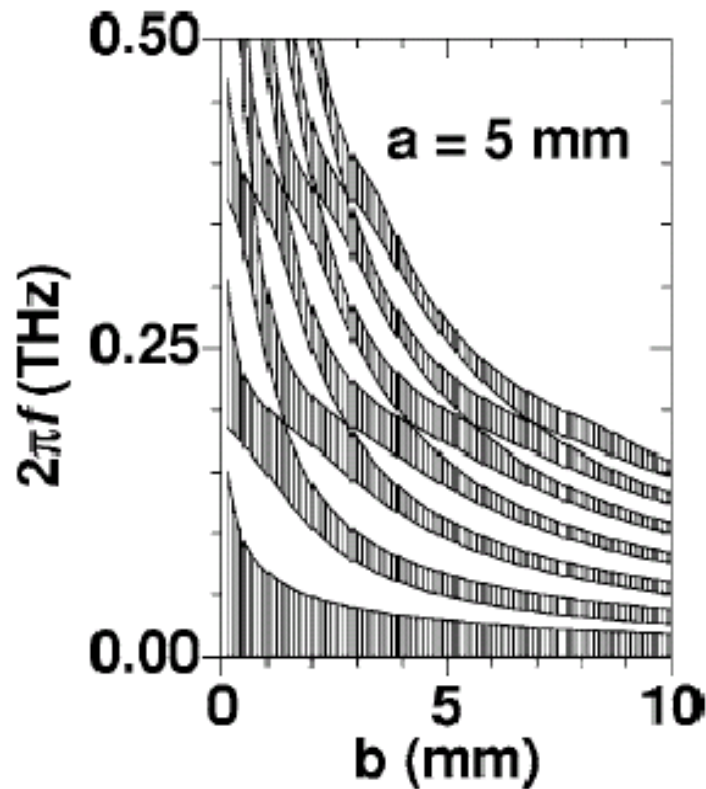
Quando modificamos a espessura das camadas  $a$  e  $b$ , surgem algumas diferenças nas estruturas de bandas, as quais são vistas na Fig.3.1. Vemos que para a camada de ar ( $a = 5\text{mm}$ ) e para GaAs ( $b = 15\text{mm}$ ), as curvas de dispersão  $\omega$  vs  $k$ , e os *band gaps* na extremidade da Zona de Brillouin podem ser mais largos ou mais estreitos dependendo relação  $b/a$ .



**Fig. 3.1**<sup>20</sup>: Estrutura de banda fotônica  $\omega$  vs  $k$  [(a), (b) e (c)] (período  $d$ ) com camadas alternadas iguais de ar (espessura  $a$ ) e GaAs (com espessura  $b$  e índice de refração  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cong 3,6$ ).

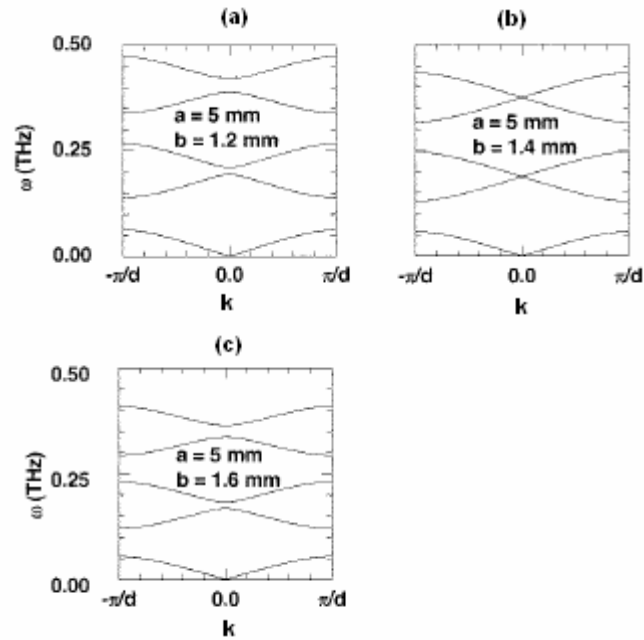
### 3.2 Pontos de Gap Nulo

Ilustramos na Fig.3.2 as bandas fotônica (áreas sombreadas), no caso em que  $a = 5\text{mm}$  da camada de ar, como função da espessura de GaAs, obtendo estruturas, para valores particulares de  $b$ , a qual mostra os correspondentes pontos com *gap* nulo na correspondente estrutura de banda fotônica.



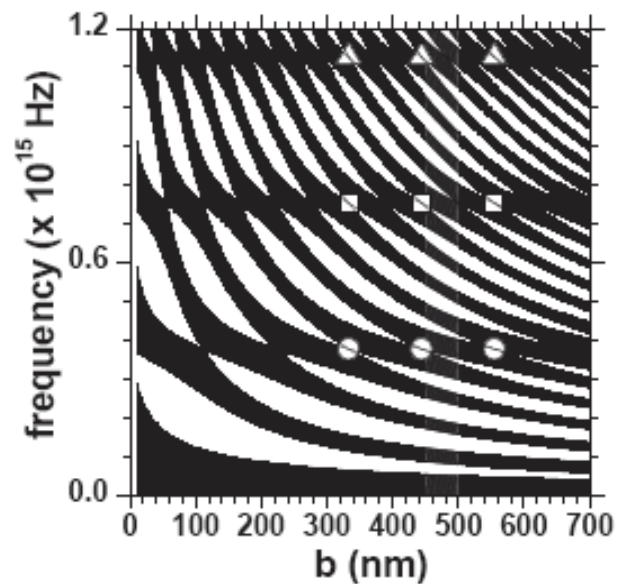
**Fig.3.2** <sup>20</sup>: Bandas fotônicas (áreas sombreadas) de uma super-rede (período  $d$ ) com camadas alternadas iguais de ar (espessura  $a$ ) e GaAs (com espessura  $b$  e índice de refração  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} \cong 3,6$ ).

Na Fig. 3.3(b) nós temos o desaparecimento do *gap*, as bandas tocam-se para  $a = 5\text{mm}$  e  $b = 1,4\text{ mm}$ .



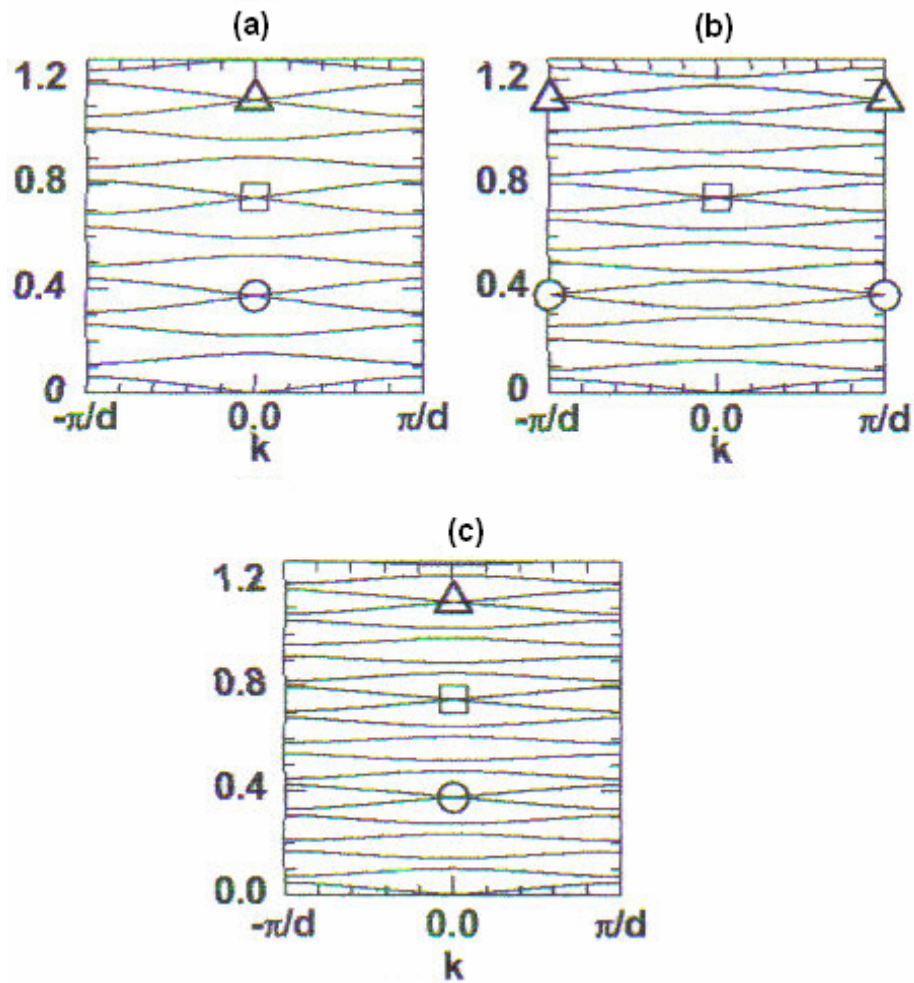
**Fig. 3.3**<sup>20</sup>: estrutura de banda fotônica  $\omega$  vs  $k$  [(a), (b) e (c)] (período  $d$ ) com camadas alternadas iguais de ar (espessura  $a$ ) e GaAs (com espessura  $b$  e índice de refração  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cong 3,6$ ).

Na Fig. 3.4 os resultados são mostrados para  $a = 400\text{nm}$  e variando o comprimento  $b$ , e ilustra a presença de *gap* nulo na estrutura de banda.



**Figura 3.4**<sup>20</sup>: Bandas fotônicas (áreas sombreadas) de uma super-rede (período  $d$ ) com camadas alternadas iguais de ar (espessura  $a$ ) e GaAs (com espessura  $b$  e índice de refração  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cong 3,6$ ).

Na figura 3.5 ilustra as estruturas de bandas com gaps nulos no centro e na extremidade da Zona de Brillouin.

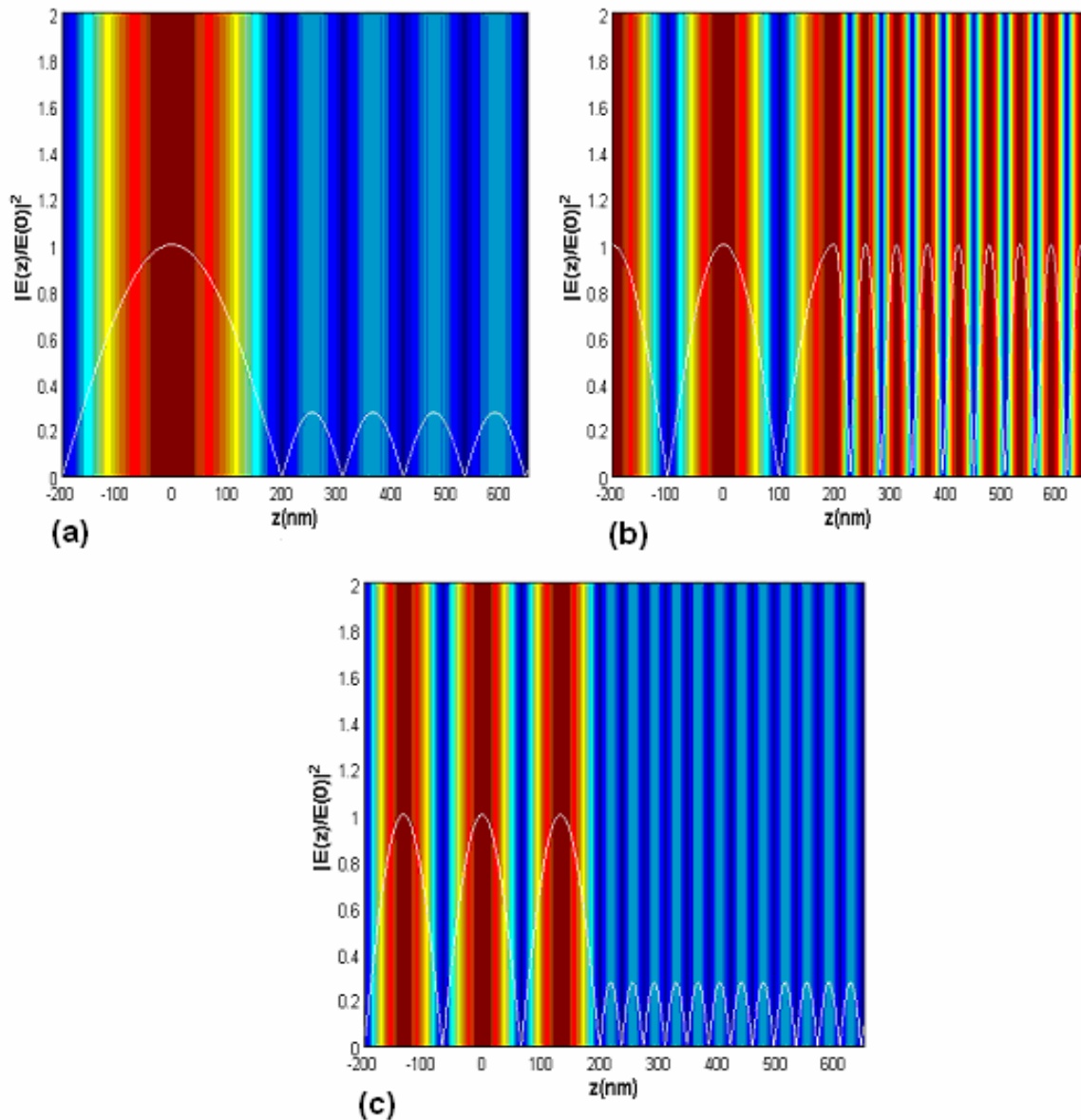


**Figura 3.5**<sup>20</sup>: Curvas de dispersão para espessura  $a = 400\text{nm}$  e valores particular da espessura  $b$  mostrados na Fig.2.6, para os quais os *gaps* são nulos, isto é, (a)  $b = 333\text{nm}$ , (b)  $b = 444\text{nm}$  e (c)  $b = 555\text{nm}$ .

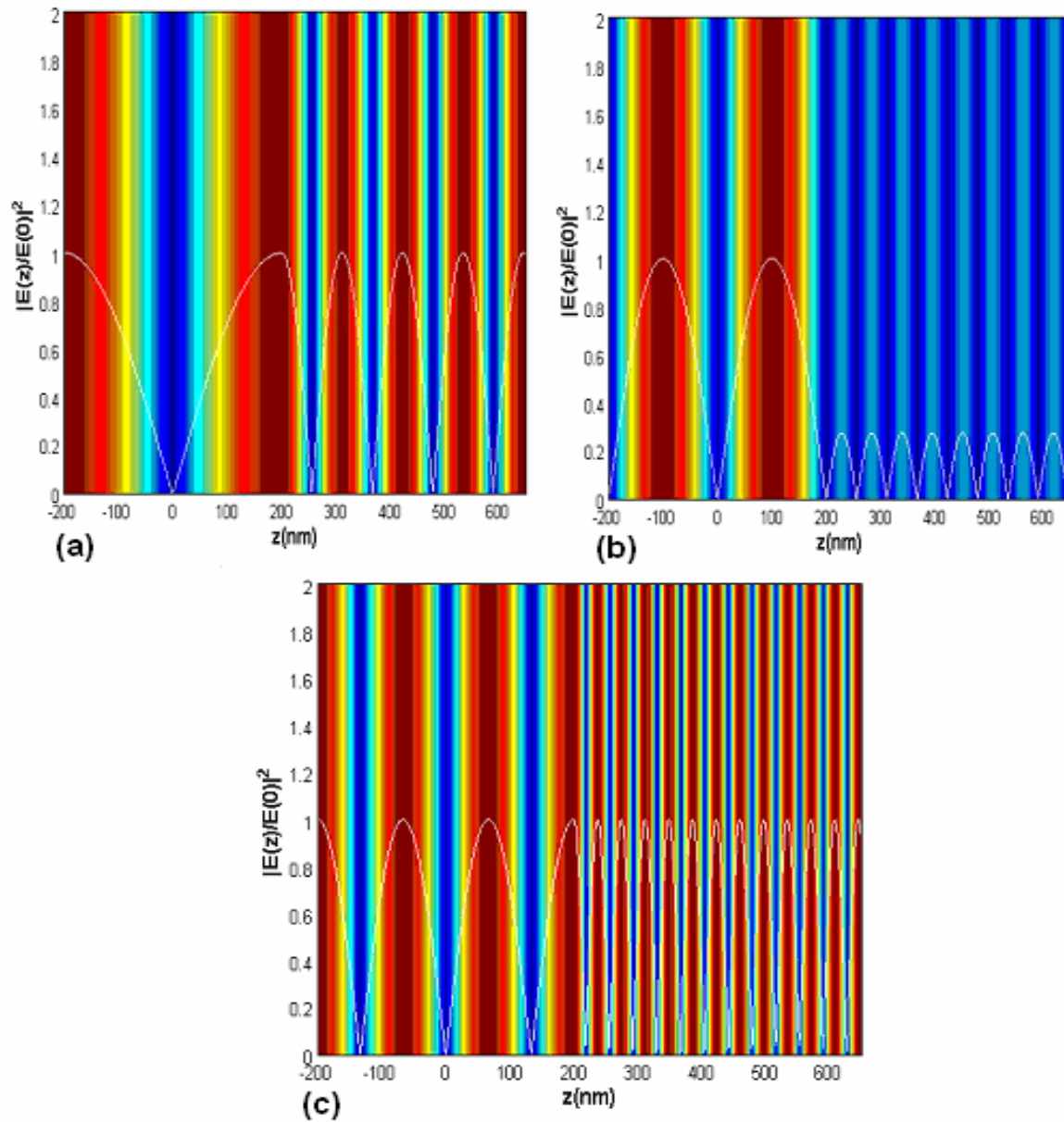


### 3.3- Campo Elétrico

A figura 3.6 mostra a intensidade do campo elétrico  $|E(z)/E(0)|^2$  para soluções pares nos pontos de gap nulo. Note que nas Figs. 3.6(a), 3.6(b) e 3.6(c) correspondem aos valores de *gap* nulo,  $(N_1, N_2) = (1,4), (2,8), (3,12)$ , respectivamente.



**Figura 3.6**<sup>22</sup>: Intensidade do campo elétrico (soluções pares) para  $a = 400\text{nm}$  e  $b = 444\text{nm}$ , correspondendo aos pontos particulares na extremidade (a), centro (b) e extremidade (c) da zona de Brillouin como descrito na Fig. 3.5(b).



**Figura 3.7**<sup>22</sup>: Intensidade do campo elétrico (soluções ímpares) para  $a = 400\text{nm}$  e  $b = 444\text{nm}$ , correspondendo aos pontos particulares na extremidade (a), centro (b) e extremidade (c) da zona de Brillouin como descrito na Fig. 3.5(b).

Vemos que nas figuras 3.6 e 3.7 conforme os valores de  $(N_1, N_2)$  crescem, surgem um número de máximos correspondentes a esses valores.

Notemos que a solução geral é uma combinação das duas soluções, par e ímpar, e notemos também que na solução geral no meio 1 a interferência é destrutiva, enquanto que no meio 2, é construtiva, corroborando a tese da transmissividade total e portanto refletividade nula nos pontos de gap nulo.

Esta degenerescência é uma consequência das seguintes condições de *band-gap* fotônico nulo:

$$ak_1 = \frac{a\omega|n_1|}{c} = N_1\pi \quad (2.77)$$

e

$$bk_2 = \frac{b\omega|n_2|}{c} = N_2\pi \quad (2.78)$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são inteiros. No centro da ZB  $N_1$  e  $N_2$  ambos são pares ou ímpares, enquanto que na extremidade da ZB  $N_1$  e  $N_2$  são de paridade opostas. Uma outra forma de escrever essas condições é:

$$a = \frac{N_1\lambda_1}{2} \quad (2.78)$$

e

$$b = \frac{N_2\lambda_2}{2} \quad (2.79)$$

onde  $\lambda_i = \frac{2c\pi}{\omega|n_i|}$ .

Por fim, temos a densidade de estado, que é uma quantidade fundamental no entendimento de várias propriedades de um cristal fotônico, a qual é obtida pelo cálculo do

número de estados para uma dada frequência  $\omega$ , isto é, integrando sobre a zona de Brillouin e somando sobre todas as bandas  $m$

$$g(\omega) = \sum_m \int_{BZ} dk \delta[\omega - \omega_m(k)] = \sum_{m,i} \frac{1}{\left| \frac{d\omega_m(k)}{dk} \right|_{k=k_m^{(i)}}}, \quad (2.80)$$

onde  $k_m^{(i)}$  são os vetores de onda das soluções da equações

$$\omega - \omega_m(k_m^{(i)}) = 0. \quad (2.91)$$

## 4- Reflexão e Transmissão

### 4.1 Refletores de Bragg

Usando o ferramental matemático desenvolvido no capítulo 2, vamos a partir de agora analisar a reflexão e a transmissão nos pontos de gap nulo.

O campo elétrico dentro de cada camada homogênea por melhor conveniência será expresso como uma soma de ondas planas incidentes e refletidas. As amplitudes complexas destas duas ondas constituem as componentes de um vetor coluna. O campo elétrico na camada  $i(i=1,2)$  da  $n$ -ésima célula unitária pode assim ser representado por um vetor coluna

$$\begin{pmatrix} a_n^{(i)} \\ b_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

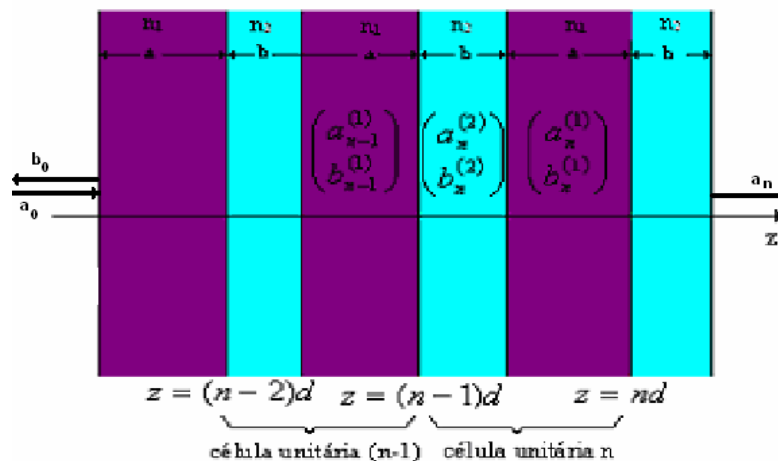
Como resultado, o campo elétrico distribuído na mesma camada pode ser escrito como,

$$E(z) = a_n^{(i)} e^{-ik_i(z-nd)} + b_n^{(i)} e^{ik_i(z-nd)} \quad (3.2)$$

com

$$k_i = \frac{n_i \omega}{c}, \quad i=1,2 \quad (3.3)$$

**Figura 4.1**



Os vetores coluna não são independentes um do outro. Eles estão relacionados através das condições de continuidade nas interfaces. Como uma consequência, somente um vetor (ou duas componentes de diferentes vetores) pode ser escolhido arbitrariamente. Neste caso, impomos a continuidade de  $E$  e  $\partial E / \partial z$  na interface (veja Fig. 3),  $z = (n-1)d$  e  $z = (n-1)d+b$ , leva-nos a

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} + b_{n-1} &= c_n e^{ik_2 d} + d_n e^{-ik_2 d} \\
 ik_1(a_{n-1} - b_{n-1}) &= ik_2(c_n e^{ik_2 d} - d_n e^{-ik_2 d}) \\
 c_n e^{ik_2 a} + d_n e^{-ik_2 a} &= a_n e^{ik_1 a} + b_n e^{-ik_1 a} \\
 ik_2(c_n e^{ik_2 a} - d_n e^{-ik_2 a}) &= ik_1(a_n e^{ik_1 a} - b_n e^{-ik_1 a})
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Estas quatro equações podem ser reescritas como as duas seguintes equações matriciais:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_2 d} & e^{-ik_2 d} \\ \frac{k_2}{k_1} e^{ik_2 d} & -\frac{k_2}{k_1} e^{-ik_2 d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\begin{pmatrix} e^{ik_2 d} & e^{-ik_2 d} \\ e^{ik_2 d} & -e^{-ik_2 d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_1 d} & e^{-ik_1 d} \\ \frac{k_1}{k_2} e^{ik_1 d} & -\frac{k_1}{k_2} e^{-ik_1 d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

onde nós definimos:

$$\begin{aligned}
 a_n &\equiv a_n^{(1)}, \\
 b_n &\equiv b_n^{(1)}, \\
 c_n &\equiv a_n^{(2)}, \\
 d_n &\equiv b_n^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

para eliminar

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix},$$

a equação matricial

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

é obtida. Os elementos de matriz são

$$\begin{aligned} A &= e^{ik_1 a} \left[ \cos k_2 b + \frac{i}{2} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \text{sen} k_2 b \right] \\ B &= e^{-ik_1 a} \left[ \frac{1}{2} i \left( \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \text{sen} k_2 b \right] \\ C &= e^{ik_1 a} \left[ -\frac{1}{2} i \left( \frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2} \right) \text{sen} k_2 b \right] \\ D &= e^{-ik_1 a} \left[ \cos k_2 b - \frac{i}{2} \left( \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} \right) \text{sen} k_2 b \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como a matriz na equação (3.8) diz respeito às amplitudes do campo de duas camadas equivalentes com o mesmo índice de refração, ela é uni-modular, que é,

$$AD - BC = 1 \quad (3.10)$$

É importante notar que a matriz de translação da célula unitária a qual se refere às amplitudes do campo na camada 2 é diferente da matriz na Eq. (3.9). Essas matrizes, contudo, possuem o mesmo traço. O traço de uma matriz de translação de uma célula unitária está diretamente relacionado às estruturas de bandas em um meio periódico.

Como notamos acima, somente um vetor coluna é independente. Nós podemos escolhê-lo, por exemplo, como o vetor coluna da camada 1 na célula unitária zero. Os vetores colunas restantes das camadas equivalentes são relacionados pela célula unitária zero por,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

O vetor coluna para a camada 2 da mesma célula unitária pode ser obtido pela Eq. (3.6).

Na seção 2, vimos que quando uma onda plana monocromática incide em um meio periódico uma onda de Bloch é gerada. Se a frequência desta onda de Bloch estive dentro da faixa de frequências proibidas, tal onda é evanescente e não se propaga através do meio. Portanto espera-se que a energia da luz seja totalmente refletida e desta maneira o meio funciona como um refletor de alta refletividade para a onda incidente. Considere um meio periódico com  $N$  células unitárias. O coeficiente de reflexão é dado por:

$$r_N = \left( \frac{b_0}{a_0} \right)_{b_N=0}, \quad (3.13)$$

isto é, ela é a taxa da amplitude refletida complexa  $b_0$  na entrada pela amplitude incidente  $a_0$ , sujeita à condição de contorno de não haver onda incidente à direita da super-rede (isto é,  $b_N = 0$ ), conforme ilustrado na Fig.(4.1). Da eq.(3.11) chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

A potência  $N$  da matriz uni-modular pode ser simplificada através da identidade de Chebyshev<sup>23</sup>:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} AU_{N-1} - U_{N-2} & BU_{N-1} \\ CU_{N-1} & DU_{N-1} - U_{N-2} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

onde

$$U_N = \frac{\text{sen}(N+1)kd}{\text{sen}kd} \quad (3.16)$$

e  $k$  é dado pela relação de dispersão:  $k = \frac{1}{d} \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2}(A+D) \right]$ .



#### 4.2- Reflexão e Transmissão

Vamos agora considerar a refletividade e a transmissividade da energia eletromagnética através de uma super rede periódica.

O coeficiente de reflexão é obtido das Eqs. (3.13), (3.14) e (3.15) como,

$$r_N = \frac{CU_{N-1}}{AU_{N-1} - U_{N-2}} \quad (3.17)$$

a refletividade é obtida tomando o módulo quadrado de  $r_N$ ,

$$R = |r_N|^2 = \frac{|C|^2}{|C|^2 + \left(\frac{\text{sen}kd}{\text{sen}Nkd}\right)^2} \quad (3.18)$$

Esta é uma expressão analítica para a refletividade de um refletor de multicamadas. O comportamento dos refletores de Bragg pode ser compreendido em termos de múltiplas interferências dentro do arranjo periódico de camadas. Uma onda que vai se propagando sucessivamente através das diferentes camadas, sofrerá reflexões múltiplas nas várias interfaces. Cada reflexão é acompanhada de uma diferença de fase de  $\pi$  quando a onda passa do meio de índice de refração menos refringente para o meio mais refringente, e com diferença de fase nula na situação oposta. Quando a largura de cada camada apresentar a mesma espessura óptica  $\lambda/4$ , a onda refletida na interface 1 estará em fase com as ondas refletidas nas interfaces 3, 5, 7 etc... Consequentemente haverá interferência construtiva, e a refletividade tenderá a unidade com o aumento do número de camadas.

Para calcularmos a transmissão usamos  $R+T=1$ , então obtemos:

$$T = |t_N|^2 = \frac{1}{1 + |C|^2 \frac{\text{sen}^2 Nkd}{\text{sen}^2 kd}} \quad (3.19)$$

Vimos que nos pontos de gap nulo, as condições expressas nas equações (2.77) e (2.78) tem de ser satisfeitas. Para calcular a refletividade e a transmissividade nestes pontos, basta substituir estas equações nas expressões da refletividade e da transmissividade. Note que estas grandezas dependem do elemento de matriz C. Nos pontos de gap nulo, vemos que  $C=0$  e portanto chegamos à conclusão que nestes pontos  $T=1$  e  $R=0$ . Ou seja, neste caso em contraste com os refletores de Bragg, como a espessura óptica em cada camada obedece a

$$a = \frac{N_1 \lambda_1}{2}$$

e

$$b = \frac{N_2 \lambda_2}{2}$$

ocorre interferência destrutiva pois a onda refletida na interface 1 estará fora de fase com as ondas refletidas nas interfaces 3, 5, 7 etc... e então a refletividade tende a zero enquanto a transmissividade tende à unidade, significando que a onda é totalmente transmitida ao longo da estrutura, como se o meio se tornasse transparente. Observa-se que nos pontos de gap nulo, a matriz de transferência se torna a matriz identidade caracterizando a transparência do meio. E para vermos isso, basta substituir as expressões acima na equação (3.9) para encontrarmos a matriz identidade:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

## 5- Conclusões

Nesta dissertação nós desenvolvemos através das técnicas de matriz de transferência um estudo analítico das estruturas de bandas fotônicas e da densidade de estado de um cristal fotônico 1D consistindo de uma super-rede com duas camadas alternadas de ar e GaAs de espessuras  $a$  e  $b$ , respectivamente. Encontramos *band gaps* fotônicos, como esperado. Também, pela escolha certa dos valores das espessuras ópticas dos materiais na super-rede fotônica, nós encontramos estruturas de bandas fotônicas com *gaps* nulos. Mais especificamente, vimos que esses pontos aparecem sempre que os caminhos ópticos em cada camada sejam comensuráveis, i.e.  $n_1a/n_2b=N_1/N_2$  onde  $N_1, N_2 \in \mathbf{Z}$ . Em contraste com os refletores de Bragg, nesses pontos a espessura óptica de cada camada  $i$  deve ser igual a  $\lambda_i/2$  de forma que ao invés de interferência construtiva, as ondas que são refletidas nas camadas 1, 3, ..etc.. devem produzir interferência destrutiva de tal forma que a reflectividade seja zero e a transmissividade a unidade, e assim toda a energia eletromagnética é transmitida eficientemente ao longo da estrutura. A caracterização da transparência do meio nos pontos de *gap* nulo pode ser entendida através da matriz de transferência que nos pontos de *gap* nulo passa ser a matriz identidade. Note que este tipo de efeito pode ser muito útil em aplicações tecnológicas, no sentido em que o cristal fotônico possa ser usado como um filtro eficiente que transmita eficientemente apenas bandas estreitas de frequência muito bem definidas. Analisamos ainda as propriedades de simetria das soluções de campo eletromagnético e constatamos que em geral estas soluções tem paridade bem definida. Entretanto nos pontos de *gap* nulo, os quais aparecem devido a uma degenerescência conseqüente da simetria espaço-temporal rede-campo. As soluções

pares e ímpares são soluções de mesma energia e a solução geral que deve ser uma combinação linear destas duas, não tem paridade bem definida.

Neste trabalho preocupamo-nos apenas com super-redes uni-dimensionais envolvendo apenas índices de refração positivos. Uma extensão natural é substituir o GaAs por um material de índice de refração negativo, que pode ser fabricado através de materiais cujas permissividade dielétrica e permeabilidade magnética são simultaneamente negativas. No futuro poderemos ainda estender esta análise para incluir efeitos não lineares tais como por exemplo, a geração de segundo harmônico dentro dos *gaps* fotônicos, a qual tem-se conhecimento de que é fortalecida devido a presença do *gap*. Além disso os resultados que encontramos poderão ser úteis na investigação de cristais fotônicos bi-dimensionais.

## Referência Bibliográfica

- <sup>1</sup> John D. Joannopoulos, Robert D. Meade and Joshua N. Winn in *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light.*, Copyright 1995 by Princeton University Press.
- <sup>2</sup> Scientific American 47; <http://www.sciam.com>
- <sup>3</sup> E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- <sup>4</sup> S. John, Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
- <sup>5</sup> A. Blanco, E. Chomski, S. Gratchak, M. Ibsate, S. John, S. W. Leonard, C. Lopez, F. Meseguer, J. P. Mondia, G. A. Ozin, O. Toader, and H. M. van Driel, Nature **405**, 437 (2000).
- <sup>6</sup> Yu. A. Vlasov et al., Nature **414**, 289 (2001).
- <sup>7</sup> P. Lodahl, A. Floris van Driel, I. S. Nikolaev, A. Irman, K. Overgaag, D. Vanmaekelbergh, and W. L. Vos, Nature **430**, 654 (2004).
- <sup>8</sup> D. Mogilevtsev, S. Kilin, and S. B. Cavalcanti, Phot. And Nanostruc.: Fund. And Appl., **3** 28 (2005).
- <sup>9</sup> V. G. Veseloga, Sob. Kilin, Phys.-Usp. **10**, 509 (1968).
- <sup>10</sup> J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Steward, and I. Youngs, Phys. Rev. Lett. **76**, 4473 (1996); J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Steward, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47**, 2075 (1999).
- <sup>11</sup> D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000); R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, Science **292**, 77 (2001).
- <sup>12</sup> S. A. Ramakrishna, Rep. Prog. Phys. **68**, 449 (2005).
- <sup>13</sup> J. B. Pendry, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000); J. B. Pendry, Contemp. Phys. **45**, 191 (2004); J. B. Pendry, and D. R. Smith, Phys. Today **57**, 37 (2004).
- <sup>14</sup> C. M. Soukoulis, Optics and Photonics News **17**, 16 (2006).
- <sup>15</sup> K. Sakoda, Optical Properties of Photonic Crystals (February 2001).
- <sup>16</sup> S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos, Photonic crystals: the road from theory to practice (Kluwer, Boston, 2002).
- <sup>17</sup> A. Yariv, P. Yeh: Optical Waves in Crystals (Wiley, New York, 1984), Chap. 6, and references therein.
- <sup>18</sup> John D. Joannopoulos, Robert D. Meade and Joshua N. Winn in *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light.*, Copyright 1995 by Princeton University Press.
- <sup>19</sup> C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, (Wiley, New York, 2005).
- <sup>20</sup> S.B. Cavalcanti, M. de Dios-Leyva, E. Reyes-Gómez, and L.E. Oliveira, Phys. Rev. B **74**, 153102 (2006).
- <sup>21</sup> S. Longhi and D. Janner, Opt. Lett. **29**, 2653 (2004)
- <sup>22</sup> S.B. Cavalcanti, E. Reyes-Gómez, and L.E. Oliveira, unpublished
- <sup>23</sup> P. Yeh in *Optical Waves in Layered Media*, (Wiley, 1998).