

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA**

**JOYCE DOS SANTOS MONTEIRO**

**Superfícies Mínimas e a Representação de  
Weierstrass-Enneper**

Maceió

2021

**JOYCE DOS SANTOS MONTEIRO**

# **Superfícies Mínimas e a Representação de Weierstrass-Enneper**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática - Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharela em Matemática.

Orientador: Gregório Silva Neto

Maceió

2021

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M775s Monteiro, Joyce dos Santos.  
Superfícies mínimas e a representação de Weierstrass-Enneper / Joyce dos Santos Moteiro. - 2021.  
73 f. : il.

Orientador: Gregório Silva Neto.  
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática :  
Bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática.  
Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 73.

1. Geometria diferencial. 2. Superfícies mínimas. 3. Weierstrass-Enneper,  
Representação de. I. Título.

CDU: 514.7

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Joyce dos Santos Monteiro

Instituto de Matemática

Trabalho Final de Graduação apresentado ao curso de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Matemática.

---

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto (Orientador)

### BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva

---

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo

Aos meus pais, Zenilda e Jailson,  
e a minha avó, Alice.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Gregório Silva Neto, por orientar esta monografia e ao professor Hilário Alencar, pelas palavras de incentivo durante a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Cícero Calheiros, Dandara Oliveira, Marcos André, Milena Farias, Rafael de Cerqueira e Victor Lohan, com quem compartilhei o período da graduação. Em especial à Milena, pelo apoio e incentivo durante toda graduação e pelas sugestões que contribuíram na melhoria deste trabalho.

Agradeço ainda ao professor Márcio Cavalcante pelas correções que contribuíram para melhoria desta monografia e aos demais professores do Instituto de Matemática que contribuíram na minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço ao CNPq e a FAPEAL pelo financiamento da bolsa de Iniciação Científica durante o período da graduação.

## RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a Representação de Weierstrass-Enneper um conceito muito importante para Geometria Diferencial. Essa Representação nos mostra um método para obter superfícies de curvatura constante igual a zero. Por meio de funções de uma variável complexa. Dessa forma, apresentamos os principais conceitos necessários para a compreensão deste resultado, entre os quais: superfícies regulares, curvatura média, curvatura Gaussiana e noções de funções de uma variável complexa. Apresentamos ainda alguns exemplos de superfícies mínimas obtidas por meio desta Representação.

**Palavras-chave:** Geometria Diferencial. Superfícies Mínimas. Representação de Weierstrass-Enneper.

## ABSTRACT

The goal of this monograph is to present the Weierstrass-Enneper representation for minimal surfaces, which is a very important concept for Differential Geometry. This representation shows us a method to obtain minimal surfaces, i.e., surfaces with constant mean curvature equal to zero, through functions of one complex variable. Here we also present the main tools for understanding this result, among which: regular surfaces, mean curvature, Gaussian curvature, notions of functions of one complex variable, as well as some examples of minimum surfaces obtained through this representation.

**Keywords:** Differential Geometry. Minimal Surfaces. Weierstrass-Enneper Representation.



## Lista de Figuras

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Superfície . . . . .                                    | 14 |
| 2  | Superfície de Scherk . . . . .                          | 15 |
| 3  | Cilindros . . . . .                                     | 17 |
| 4  | Helicoide . . . . .                                     | 18 |
| 5  | Plano Tangente, $T_p S$ . . . . .                       | 19 |
| 6  | Aplicação Normal de Gauss . . . . .                     | 22 |
| 7  | Região $\mathcal{R}$ . . . . .                          | 29 |
| 8  | Uma variação normal de $\mathbf{x}(\bar{D})$ . . . . .  | 30 |
| 9  | Superfície $C$ . . . . .                                | 47 |
| 10 | Superfícies Helcat . . . . .                            | 49 |
| 11 | Superfícies Helcat - Projetadas no plano $xy$ . . . . . | 50 |
| 12 | Quinta superfície de Scherk . . . . .                   | 52 |
| 13 | Superfície de Enneper . . . . .                         | 53 |
| 14 | Catenária . . . . .                                     | 55 |
| 15 | Catenoide . . . . .                                     | 56 |
| 16 | Superfície de Catalan . . . . .                         | 67 |
| 17 | Superfície de Henneberg . . . . .                       | 68 |
| 18 | Superfície de Richmond . . . . .                        | 69 |

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                     | <b>11</b> |
| <b>2</b> | <b>Resultados Preliminares</b>                        | <b>12</b> |
| 2.1      | Resultados de Cálculo . . . . .                       | 12        |
| 2.2      | Superfícies Regulares . . . . .                       | 13        |
| 2.3      | Primeira Forma Fundamental . . . . .                  | 19        |
| 2.4      | Curvatura de Gauss e Curvatura Média . . . . .        | 21        |
| 2.5      | Minimização de Área . . . . .                         | 28        |
| 2.6      | Funções de uma Variável Complexa . . . . .            | 32        |
| 2.7      | Funções Harmônicas . . . . .                          | 39        |
| <b>3</b> | <b>Representação de Weierstrass-Enneper</b>           | <b>41</b> |
| 3.1      | Primeiras Noções de Superfícies Mínicas . . . . .     | 41        |
| 3.2      | A Representação de Weierstrass-Enneper (WE) . . . . . | 60        |
| <b>4</b> | <b>Considerações finais</b>                           | <b>73</b> |

# 1 Introdução

O presente trabalho encontra-se dividido em duas partes: Resultados Preliminares e Representação de Weierstrass-Enneper. A primeira, como o próprio nome sugere, foi dedicada à apresentação de conceitos fundamentais para a compreensão da segunda parte e nela encontram-se as definições de superfície parametrizada regular, primeira forma fundamental, curvatura média e curvatura Gaussiana, funções harmônicas e noções de variável complexa. Os dois últimos tópicos serão de grande valia ao introduzirmos a Representação de Weierstrass-Enneper na seção seguinte.

Na segunda parte, apresentamos alguns resultados interessantes acerca das Superfícies Mínimas, entre os quais destaca-se o resultado que afirma que toda superfície mínima e regrada em  $\mathbb{R}^3$  é localmente um helicóide ou um plano.

Encerramos o trabalho apresentando uma ponte que conecta o estudo das Superfícies Mínimas com funções de uma variável complexa. Esta conexão é dada pela Representação de Weierstrass-Enneper. Esta Representação é importante do ponto de vista do desenvolvimento da Geometria Diferencial, visto que até o século XVIII, as únicas superfícies mínimas conhecidas, além do plano, eram o helicóide e o catenoide. Heinrich Scherk descobriu em 1835 a terceira superfície mínima chamada de superfície de Scherk, ver [2]. Com a Representação citada, obtemos um método para obter superfícies de curvatura média nula ainda que não sejam de fácil visualização. Para plotar as superfícies utilizamos o software *Geogebra 3D* e para fazer as demais figuras usamos o software *Inkscape*.

## 2 Resultados Preliminares

Esta seção tem como objetivo expor alguns conceitos fundamentais para a compreensão dos resultados principais deste trabalho. Dentre os tópicos abordados nesta seção, encontram-se: superfícies regulares, curvatura gaussiana, primeira forma fundamental, espaço tangente a uma superfície e coordenadas isotérmicas. Dedicamos a primeira subseção para apresentação de resultados de Cálculo diferencial e integral que serão utilizados ao longo do texto.

### 2.1 Resultados de Cálculo

Iniciaremos esta subseção apresentando a definição de curvas diferenciáveis regulares e o Triedro de Frenet. E encerraremos enunciando o Teorema da Aplicação Inversa.

**Definição 2.1.** *Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .*

Dizemos que uma curva está parametrizada pelo *comprimento de arco* quando  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t \in I$ . E usaremos o parâmetro  $s$  para denotar curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, ou seja,  $\alpha(s)$ . A seguir apresentaremos mais algumas definições acerca de curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Para mais informações e resultados acerca destas curvas recomendamos o primeiro capítulo de [2].

**Definição 2.2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $|\alpha''(s)| = k(s)$  chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .*

Nos pontos onde  $k(s) \neq 0$ , fica bem definido pela equação  $\alpha''(s) = k(s)n(s)$  um vetor unitário  $n(s)$  na direção de  $\alpha''(s)$ . O vetor  $n(s)$  é chamado de *vetor normal* em  $s$  uma vez que  $\alpha''(s)$  e  $\alpha'(s)$  são ortogonais.

Indicando o vetor tangente unitário a  $\alpha$  em  $s$  por  $t(s) = \alpha'(s)$ , temos  $t'(s) = k(s)n(s)$ . Nas condições acima apresentamos a definição a seguir.

**Definição 2.3.** *O vetor unitário  $b(s) = t(s) \times n(s)$  será chamado o vetor binormal em  $s$ .*

**Definição 2.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que  $\alpha''(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . O número  $\tau(s)$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é chamado de torção de  $\alpha$  em  $s$ .*

Para uso posterior iremos destacar as equações

$$\begin{aligned}t' &= kn, \\n' &= -kt - \tau b, \\b' &= \tau n,\end{aligned}$$

as equações acima são chamadas de *fórmulas de Frenet*. O Teorema de Green, enunciado a seguir, será utilizado durante a prova do Teorema 3.1. Para mais informações e uma demonstração desse teorema, recomendamos [1].

**Teorema 2.1** (Teorema de Green para Regiões Planas Limitadas por Curvas de Jordan Regulares por Partes). *Sejam  $P$  e  $Q$  campos escalares de classe  $C^1$  em um conjunto aberto  $S$  do plano  $xy$ . Seja  $C$  uma curva de Jordan regular por partes, e representemos por  $R$  a reunião de  $C$  com seu interior. Suponhamos que  $R$  está contida em  $S$ . Então temos a identidade*

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

onde a integral de linha é calculada sobre a curva  $C$  no sentido anti-horário.

O teorema que enunciaremos a seguir será utilizado na prova do Teorema 3.1 e sua demonstração pode ser encontrada na página 115 de [3].

**Teorema 2.2** (Teorema da Aplicação Inversa). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $a \in U$  é tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é invertível, então existe uma bola  $B = B(a, \delta) \subset U$  tal que a restrição  $f|_B$  é um difeomorfismo sobre um aberto  $V \ni f(a)$ .*

## 2.2 Superfícies Regulares

Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$ . Denotamos as derivadas parciais em relação a  $u$  e a  $v$  da aplicação  $\mathbf{x}$  por  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = \mathbf{x}_u$  e  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = \mathbf{x}_v$ . A seguir, definiremos uma superfície parametrizada.

**Definição 2.5.** Uma aplicação  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  é dita regular quando  $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$  para todo ponto em  $U$ . Chamamos de parametrização uma aplicação regular  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$  que é injetiva.

**Definição 2.6.** Uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  é um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  tal que para cada ponto de  $S$  existe uma vizinhança em  $S$  contida na imagem de alguma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

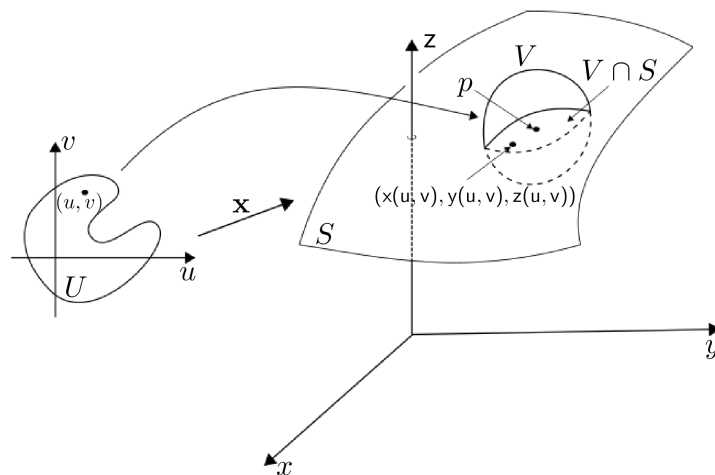


Figura 1: Superfície

Fonte: Autoria Própria

Isto é, dado  $p \in S$  existem  $V \subset S$  com  $p \in V$  e uma parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $V \subset \mathbf{x}(U)$ . Na Figura 1 podemos ver uma representação da definição acima.

**Exemplo 2.1.** A aplicação  $\mathbf{x} : \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) \times \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) \rightarrow \left(u, v, \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos au}{\cos av}\right)\right)$  é uma superfície. Observe que  $\mathbf{x}$  é diferenciável, uma vez que cada uma de suas funções coordenadas é diferenciável. Note ainda que podemos estender  $\mathbf{x}$  para um domínio  $U \subset \mathbb{R}^2$  desde que  $\frac{\cos au}{\cos av} > 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . A superfície  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada de superfície de Scherk, ver Figura 2. Calculando as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$ , obtemos

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, -\operatorname{tg} au \cos av)$$

$$\mathbf{x}_v = \left(0, 1, -\frac{\operatorname{tg} av}{\cos au}\right)$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left( -\operatorname{tg} au \cos av, \frac{\operatorname{tg} av}{\cos au}, 1 \right) \neq (0, 0, 0) \text{ para todo } (u, v) \in U.$$

Com isto, concluímos que a superfície de Scherk é regular.

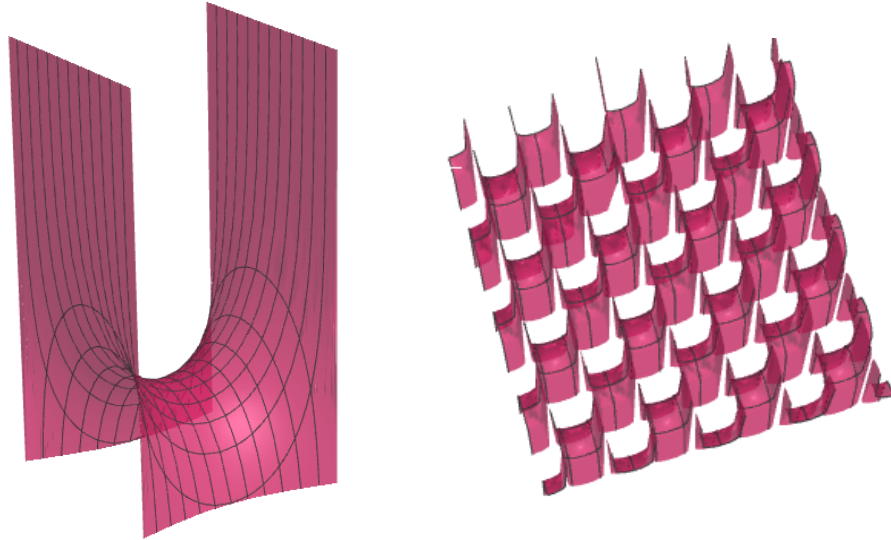


Figura 2: Superfície de Scherk

Fonte: Autoria Própria

**Definição 2.7.** Uma superfície regular  $S$  é dita *regrada* quando existe uma parametrização  $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cobre  $S$  tal que

$$\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + v\delta(u),$$

onde  $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  são curvas diferenciáveis com  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e  $\delta(u) \neq 0$  para todo  $u \in I$ .

**Proposição 2.1.** Seja  $\mathbf{y} : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $\mathbf{y}(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u)$ , uma parametrização de uma superfície regrada. Então,  $\mathbf{y}$ , possui uma reparametrização da forma

$$\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + v\delta(u),$$

onde  $\|\delta(u)\| = 1$  e  $\langle \beta'(u), \delta(u) \rangle = 0$ .

**Prova** Podemos definir a reparametrização  $\tilde{\mathbf{y}}$  de  $\mathbf{y}$ , por

$$\tilde{\mathbf{y}}(u, v) = \mathbf{y} \left( u, \frac{v}{\|\boldsymbol{\gamma}(u)\|} \right) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v \frac{\boldsymbol{\gamma}(u)}{\|\boldsymbol{\gamma}(u)\|},$$

pois, por definição de superfície regrada, temos  $\boldsymbol{\gamma}(v) \neq 0$  para todo  $v \in J$ . Observe que  $\tilde{\mathbf{y}}$  tem o mesmo traço de  $\mathbf{y}$ . Denotando  $\boldsymbol{\delta}(u) = \frac{\boldsymbol{\gamma}(u)}{\|\boldsymbol{\gamma}(u)\|}$ , temos

$$\tilde{\mathbf{y}}(u, v) = \mathbf{y} \left( u, \frac{v}{\|\boldsymbol{\gamma}(u)\|} \right) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\boldsymbol{\delta}(u).$$

Assim, obtemos  $\|\boldsymbol{\delta}(u)\| = 1$  e, conseqüentemente  $\langle \boldsymbol{\delta}(u), \boldsymbol{\delta}'(u) \rangle = 0$ . Seja  $\boldsymbol{\beta}$  uma curva parametrizada dada por

$$\boldsymbol{\beta}(u) = \boldsymbol{\alpha}(u) + s(u)\boldsymbol{\delta}(u),$$

onde  $s$  é uma função diferenciável de valores reais tal que  $\langle \boldsymbol{\beta}'(u), \boldsymbol{\delta}(u) \rangle = 0$ . Derivando  $\boldsymbol{\beta}$  em relação a  $u$ , obtemos

$$\boldsymbol{\beta}'(u) = \boldsymbol{\alpha}'(u) + s'(u)\boldsymbol{\delta}(u) + s(u)\boldsymbol{\delta}'(u).$$

Tomando o produto escalar da equação acima com  $\boldsymbol{\delta}(u)$ , temos

$$0 = \langle \boldsymbol{\beta}'(u), \boldsymbol{\delta}(u) \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}'(u), \boldsymbol{\delta}(u) \rangle + s'(u)\langle \boldsymbol{\delta}(u), \boldsymbol{\delta}(u) \rangle.$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$s(u) = \int \langle \boldsymbol{\alpha}'(u), \boldsymbol{\delta}(u) \rangle du.$$

Desse modo, temos que a parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = \boldsymbol{\beta}(u) + v\boldsymbol{\delta}(u),$$

é a reparametrização requerida. □

Quando existem duas parametrizações regradas distintas  $\mathbf{x}(u, v) = \boldsymbol{\beta}(u) + v\boldsymbol{\delta}(u)$  e  $\mathbf{y}(u, v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + v\boldsymbol{\gamma}(u)$  que cobrem  $S$ , dizemos que  $S$  é uma superfície duplamente regrada. Os exemplos a seguir mostram que os cilindros e os helicoides são superfícies regradas.



**Exemplo 2.2** (Cilindros Generalizados). *Considere uma curva plana  $\alpha : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferenciável e regular no conjunto aberto  $U$ . Seja  $\vec{d}$  um vetor unitário. Chamamos de cilindro generalizado a superfície dada por*

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\vec{d},$$

onde  $\mathbf{x} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ou seja, cilindros generalizados são curvas trasladadas ao longo de uma direção  $\vec{d}$  fixada. Assim, na notação da Definição 2.7 temos que cilindros generalizados são superfícies regradas por  $\delta(u) = \vec{d}$ . Em particular, o cilindro reto de base circular, ver Figura 3, é dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(0, 0, 1).$$

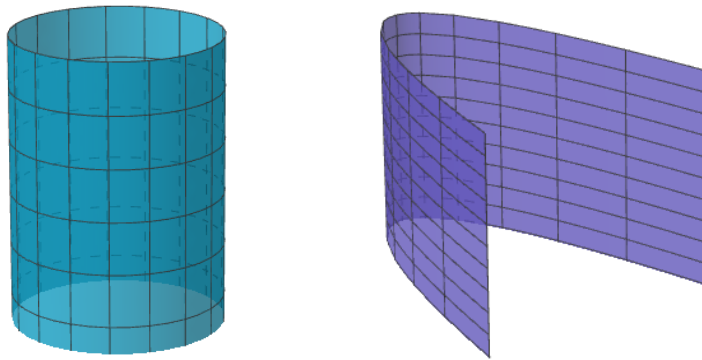


Figura 3: Cilindros

Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 2.3** (Helicoide). *A curva diferenciável parametrizada  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  tem por traço uma hélice de passo  $2\pi b$  sobre o cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ . Traçando por cada ponto desta hélice uma reta paralela ao plano  $xy$  e que intersecta o eixo  $Oz$ , obtemos uma superfície chamada de helicoide. Uma parametrização do helicoide é dada por*

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

onde  $\mathbf{x} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Como

$$\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, au) + v(\cos u, \sin u, 0) = a\beta(u) + v\delta(u)$$

concluimos que o helicoide é uma superfície regrada.

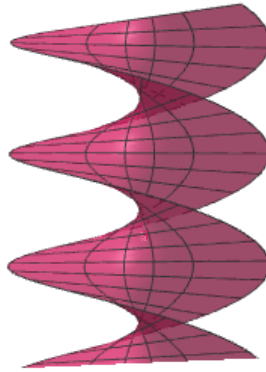


Figura 4: Helicoide

Fonte: Aatoria Própria

De maneira mais geral, uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada uma *hélice* se as retas tangentes  $t$  de  $\alpha$  fazem um ângulo constante com uma direção fixa  $d$ . Isto é, sendo  $t$  o vetor unitário tangente a  $\alpha$  e  $d$  o vetor unitário na direção fixada, então  $\langle t, d \rangle = \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $t$  e  $d$ .

**Proposição 2.2.** *Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco,  $\tau$  e  $k$  a torção e a curvatura de  $\alpha$ , respectivamente. Se  $\tau(s) \neq 0$ ,  $s \in I$  e  $k/\tau$  é constante, então  $\alpha$  é uma hélice.*

**Prova** Como a razão entre  $k$  e  $\tau$  é uma constante igual a  $c$ , temos

$$\frac{k}{\tau} = c = \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}.$$

Tomando a direção  $d = t \cos \theta + b \text{sen } \theta$ , onde  $t$  e  $b$  são, respectivamente, os vetores tangentes e binormal a  $\alpha$ , obtemos

$$\langle t, d \rangle = \langle t, t \cos \theta + b \text{sen } \theta \rangle = \cos \theta.$$

Ou seja, as retas tangentes  $t$  de  $\alpha$  fazem um ângulo constante com a direção  $d$  dada e, portanto,  $\alpha$  é uma hélice.

□

## 2.3 Primeira Forma Fundamental

**Definição 2.8.** Seja  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  uma curva parametrizada diferenciável, com  $\alpha(0) = p$ . Chamamos o vetor tangente  $\alpha'(0)$  de vetor tangente a  $S$ , em um ponto  $p$ .

**Teorema 2.3.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $p$  um ponto de  $S$ . O plano tangente a  $S$  em  $p$ ,  $T_pS$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, sendo  $\mathbf{x}$  uma parametrização de  $S$ ,  $\{\mathbf{x}_u(x_0, y_0), \mathbf{x}_v(x_0, y_0)\}$  é uma base de  $T_pS$ , onde  $p = \mathbf{x}(x_0, y_0)$ .

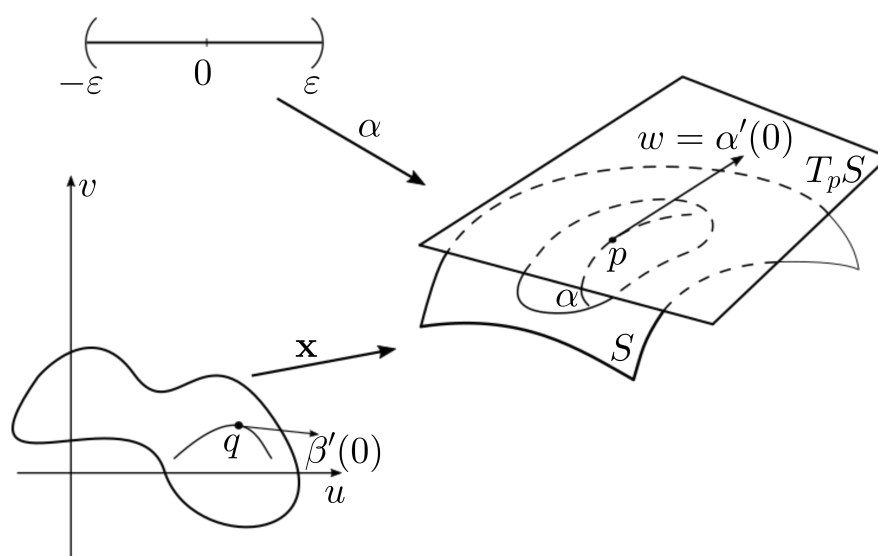


Figura 5: Plano Tangente,  $T_pS$

Fonte: Autoria Própria

Sabemos pelo Teorema 2.3 que o  $T_pS$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ . Assim, podemos considerar em  $T_pS$  produto escalar induzido do  $\mathbb{R}^3$ . Dados  $v, w \in T_pS$  denotaremos o produto escalar entre  $v$  e  $w$  por  $\langle v, w \rangle_p$ .

**Definição 2.9.** A forma quadrática  $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p,$$

é chamada a primeira forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Seja  $w \in T_p S$ . Da definição de  $T_p S$  decorre a existência de uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  tal que  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$  e  $\alpha'(0) = w$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v, u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v \rangle_p \\ &= (u')^2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p + 2u'v' \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p + (v')^2 \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p, \end{aligned}$$

calculados no ponto  $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$ . Denominamos

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \quad F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \quad \text{e} \quad G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

de coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p S$ . Agora, considerando  $\bar{U}$  uma vizinhança de  $(u_0, v_0)$ , vemos que  $E, F, G : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis nesta vizinhança. A definição que apresentaremos a seguir, que trata dos coeficientes da primeira forma fundamental, será de grande valia no decorrer deste texto.

**Definição 2.10.** Dizemos que uma parametrização  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  de uma superfície regular é isotérmica quando  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$  e  $F = 0$ , onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathbf{x}$ .

A partir da primeira forma fundamental, podemos tratar de questões métricas acerca da superfície sem ser necessário fazer menção ao espaço  $\mathbb{R}^3$ . Por exemplo, a partir da primeira forma fundamental de uma superfície  $S$ , pode-se obter informações a respeito do comprimento de arco, do ângulo entre duas curvas contidas em  $S$  e da área de uma região contida em  $S$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, onde  $U$  é um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ . A aplicação  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é uma parametrização do gráfico da função  $f$  que, desta forma, é uma superfície parametrizada regular. Calculando as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$  a fim de calcular seus coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u),$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, f_v),$$

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 + f_u^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = f_u f_v,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1 + f_v^2.$$

**Exemplo 2.5.** Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental do helicóide, na parametrização do Exemplo 3.6, obtemos

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (-av \operatorname{sen}(au), av \operatorname{cos}(au), b),$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (\operatorname{cos}(au), \operatorname{sen}(au), 0),$$

$$E = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle = a^2 v^2 + b^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle = 1.$$

## 2.4 Curvatura de Gauss e Curvatura Média

Nesta seção, definiremos a aplicação de Gauss e exploraremos as suas propriedades fundamentais. Em seguida, faremos uma breve exposição acerca da diferencial da aplicação de Gauss e encerraremos a seção definindo as Curvaturas Média e Gaussiana.

**Definição 2.11.** Se  $V \subset S$  é um conjunto aberto em  $S$  e  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável que associa a cada  $q \in V$  um vetor normal unitário em  $q$ , dizemos que  $N$  é um campo diferenciável de vetores normais unitários em  $V$ .

**Definição 2.12.** Dizemos que uma superfície  $S$  é orientável quando admite um campo de vetores normais unitários definidos em toda superfície. A escolha do campo  $N$  é chamada orientação de  $S$ .

Observe que sendo  $S$  uma superfície regular parametrizada,  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , por definição, temos que a cada ponto  $p \in S$ , podemos escolher, para cada ponto de  $\mathbf{x}(U)$ , um vetor normal unitário de modo que

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}(q), \quad q \in \mathbf{x}(U).$$

Ou seja, dada uma parametrização de  $S$ , conseguimos um campo diferenciável de vetores normais unitários dado por  $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in \mathbf{x}(U)$  um vetor normal unitário  $N(q)$ .

Diante disto, percebemos que toda superfície coberta por um único sistema de coordenadas como, por exemplo, superfícies representadas por gráficos de funções diferenciáveis são orientáveis.

**Definição 2.13.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de  $S$ .

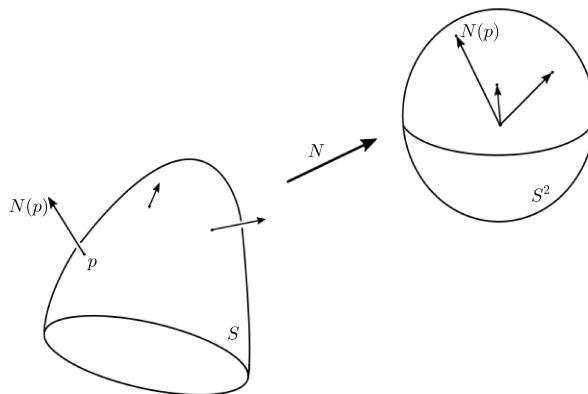


Figura 6: Aplicação Normal de Gauss

Fonte: Autoria Própria

Como, por definição, temos que  $N$  é um campo diferenciável de vetores normais unitários, concluímos que a aplicação de Gauss é diferenciável. A diferencial  $dN_p$  de  $N$  em  $p \in S$  é uma aplicação linear de  $T_pS$  em  $T_N(p)S^2$ . Como  $T_pS$  e  $T_N(p)S^2$  são os mesmos espaços vetoriais,  $dN_p$  pode ser vista como uma aplicação linear em  $T_pS$ .

Agora, descreveremos o funcionamento da aplicação linear  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ . Dada uma curva parametrizada  $\alpha(t)$  em  $S$  com  $\alpha(0) = p$ , consideramos a curva  $N \circ \alpha(t) = N(t) \subset S^2$ , isto é, a aplicação  $N$  restrita à curva  $\alpha(t)$ . Assim, temos  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  é um vetor de

$T_p S$ . Este vetor mede a variação do vetor normal  $N$ , restrito a curva  $\alpha(t)$  em  $t = 0$ . Assim,  $dN_p$  mede quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$ . A seguir apresentaremos um resultado acerca da diferencial  $dN_p$ .

**Proposição 2.3.** *A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

**Prova** Mostraremos apenas que  $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$  para uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_p S$ , pois sabemos que  $dN_p$  linear. Seja  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  a base associada de  $T_p S$ . Se  $\beta(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\beta(0) = p$ , temos

$$\begin{aligned} dN_p(\beta'(0)) &= dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Em particular,  $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$  e  $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ . Observe que sendo o produto escalar uma função bilinear,  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  uma base de  $T_p S$ , dados  $w, v \in T_p S$ , então  $v = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ ,  $w = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$  e temos

$$\begin{aligned} \langle dN_p(v), w \rangle &= \langle dN_p(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v), c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v \rangle \\ &= ac\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + ad\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + bc\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + bd\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle, \\ \langle dN_p(w), v \rangle &= \langle dN_p(c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v), a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \rangle \\ &= ca\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + cb\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + da\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + db\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, para provar que  $dN_p$  é auto-adjunta, isto é, que  $\langle dN_p(v), w \rangle = \langle dN_p(w), v \rangle$  é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle.$$

De fato, derivando  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$  e  $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ , em relação a  $v$  e a  $u$ , respectivamente, obtemos

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle.$$

E, portanto,

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Isto conclui a prova. □

Sendo  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  uma aplicação linear auto-adjunta, podemos associar a  $dN_p$  uma forma quadrática em  $T_p S$  definida a seguir.

**Definição 2.14.** *A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .*

A definição a seguir nomeia esta seção e será de grande importância para o resultado principal do texto.

**Definição 2.15.** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ .*

Agora, caracterizaremos as curvaturas definidas acima em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Para isto, considere  $\beta(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\beta(0) = p$ . A fim de simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções abaixo encontram-se aplicadas no ponto  $p$ . Usando a regra da cadeia, conclui-se que o vetor tangente de  $\beta(t)$  em  $p$  é  $\beta' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  e

$$dN(\beta') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_p S$ , temos

$$N_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v, \tag{1}$$

$$N_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v, \tag{2}$$

e, portanto,

$$dN(\beta') = (a_{11}u' + a_{12}v') \mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v') \mathbf{x}_v.$$



Isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$   $i, j = 1, 2$ .

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\beta') &= -\langle dN(\beta'), \beta' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$  derivando as igualdades em relação a  $u$  e em seguida em relação a  $v$ , obtemos

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Agora, substituindo as equações (1) e (2), nas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ .

Nosso objetivo agora é determinar os valores  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Observe que podemos representar o sistema de equações acima de forma matricial, como se segue.

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Como o determinante da matriz formada pelos coeficientes da primeira forma fundamental é igual a  $EG - F^2 \neq 0$ , temos que esta matriz possui inversa e sua inversa é dada por

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Assim, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

A partir da equação acima obtemos as seguintes expressões para os coeficientes  $(a_{ij})$  da matriz de  $dN$  na base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

As equações (1) e (2) com os valores obtidos acima são chamadas de *equações de Weingarten*. Por meio da Definição 2.15 dos valores de  $a_{ij}$ , obtemos

$$K = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (3)$$

$$H = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4)$$

Encerraremos essa subseção apresentando uma interpretação geométrica da segunda forma quadrática. Para isto, precisamos de algumas definições.

**Definição 2.16.** *Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ .*

A seguir, mostraremos uma relação entre a segunda forma fundamental  $II_p$  e a curvatura normal de uma curva regular  $C$ .

Seja  $C \subset S$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco por  $\alpha(s)$ , com  $\alpha(0) = p$ . Indicando por  $N(s)$  a restrição do vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(s)$ , temos  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ . Derivando este último termo em relação a  $s$ , obtemos

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) = k_n(p). \end{aligned}$$

Ou seja, o valor da segunda forma fundamental  $II_p$  em um vetor unitário  $v \in T_pS$  é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $v$ .

A prova do teorema a seguir encontra-se em [2], página 258. As definições de curvatura normal e linhas de curvatura que apresentaremos logo em seguida estão embasadas no teorema em questão.

**Teorema 2.4.** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ . Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle A(v), v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ .*

Sabemos da Proposição 2.3 que  $dN_p$  é uma aplicação auto-adjunta. Dessa forma, o Teorema 2.4 garante a existência de uma base  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_pS$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ . Além disso,  $k_1$  e  $k_2$  são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental  $II_p$  restrita ao círculo unitário de  $T_pS$ . Chamamos ao máximo da curvatura normal  $k_1$  e ao mínimo da curvatura normal  $k_2$  de *curvaturas principais em  $p$*  e chamamos os autovetores correspondentes, isto é,  $e_1$  e  $e_2$  de *direções principais em  $p$* .

**Definição 2.17.** *Se uma curva regular conexa  $C$  em  $S$  é tal que para todo  $p \in C$  a reta tangente a  $C$  é uma direção principal em  $p$ , então dizemos que  $C$  é uma linha de curvatura de  $S$ .*

Observe que considerando a base  $\beta = \{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  obtida usando o Teorema 2.4, obtemos

$$[dN_p]_\beta = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix},$$

onde  $[dN_p]_\beta$  é a matriz da transformação linear  $dN_p$  na base  $\beta$ . Portanto, a curvatura Gaussiana e a curvatura média são dadas por

$$K = k_1 k_2. \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

## 2.5 Minimização de Área

Antes de definirmos a área de uma superfície, precisamos apresentar alguns conceitos, entre os quais o domínio e região de uma superfície parametrizada regular  $S$ . No decorrer desta seção,  $S$  denotará uma superfície parametrizada regular.

**Definição 2.18.** *Um subconjunto aberto e conexo  $D$  de  $S$  cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (isto é, a sua diferencial não se anula), exceto em um número finito de pontos é chamado domínio de  $S$ .*

**Definição 2.19.** *Uma região  $\mathcal{R}$  de  $S$  é a reunião de um domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . Dizemos que  $\mathcal{R}$  é limitada quando está contida em alguma bola de  $\mathbb{R}^3$ .*

**Definição 2.20.** *Seja  $\mathcal{R} \subset S$  uma região limitada de uma superfície parametrizada regular, contida em uma vizinhança coordenada da parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número*

$$\iint_Q |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| du dv = A(\mathcal{R}), \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(\mathcal{R}),$$

*é chamado de área de  $\mathcal{R}$ .*

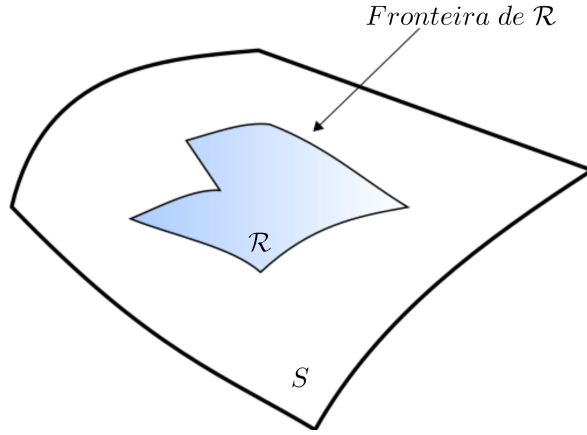


Figura 7: Região  $\mathcal{R}$

Fonte: Autoria Própria

Justificaremos o uso da palavra mínima, usada para definir as superfícies citadas na seção anterior. Para isto, temos a seguinte

**Definição 2.21.** *Sejam  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular,  $D \subset U$  um domínio limitado e  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{D} = D \cup \partial D$ . Chamamos de variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , a aplicação  $\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por*

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixado, a aplicação  $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}^t(u, v) = \varphi(u, v, t),$$

é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u^t &= \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} = \mathbf{x}_u + thN_u + th_uN, \\ \mathbf{x}_v^t &= \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} = \mathbf{x}_v + thN_v + th_vN. \end{aligned}$$

Denotando por  $E^t, F^t, G^t$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathbf{x}^t$ , temos

$$E^t = \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_u^t \rangle = E + th(\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle) + t^2h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2h_uh_u,$$

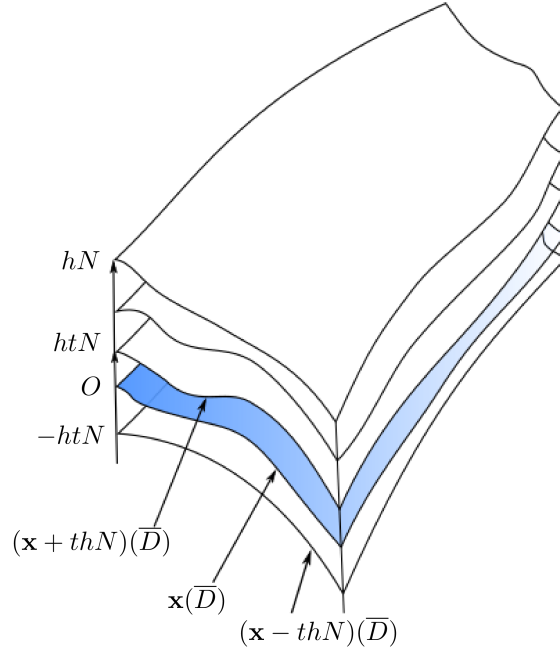


Figura 8: Uma variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$

Fonte: Autoria Própria

$$F^t = \langle \mathbf{x}_u^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = F + th(\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v,$$

$$G^t = \langle \mathbf{x}_v^t, \mathbf{x}_v^t \rangle = G + th(\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v.$$

Usando os coeficientes da segunda forma fundamental e a equação (4), obtemos

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$ , pois  $R = t^2 Q$  (onde  $Q$  é um polinômio de grau 2 em  $t$ ).

Assim, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, temos que  $\mathbf{x}^t$  é uma parametrização regular, isto é,  $E^t G^t - (F^t)^2 \neq 0$ . Usando a definição 2.20, a área  $A(t)$  de  $\mathbf{x}^t(\bar{D})$  é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \end{aligned}$$

onde  $\bar{R} = R/(EG - F^2)$ . Dessa forma, para  $\varepsilon$  pequeno,  $A$  é um função diferenciável. Derivando  $A$  em relação a  $t$ , obtemos

$$A'(t) = \int_{\bar{D}} \frac{-4hH + \bar{R}'}{2\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}}} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Note que  $\bar{R}(t) = t^2\bar{Q}(t)$  e, portanto,  $\bar{R}'(0) = 0$ . Assim, em  $t = 0$ , obtemos

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (5)$$

**Definição 2.22.** Dizemos que uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é mínima quando tem curvatura média nula, isto é, quando  $H = 0$ .

A proposição a seguir justifica o uso da palavra mínima para definir superfícies com curvatura média nula.

**Proposição 2.4.** Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado de  $U$ . Então,  $\mathbf{x}$  é mínima se, e somente, se  $A'(0) = 0$  para todo domínio  $D$  e toda variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ .

**Prova** Se  $\mathbf{x}$  é mínima, então  $H \equiv 0$ . Assim, usando a equação (5), obtemos que a condição é satisfeita. Reciprocamente, suponha que  $A'(0) = 0$  e  $H(q) \neq 0$  para algum  $q \in D$ . Escolha  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(q) = H(q)$  e  $h$  sendo identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de  $q$ , então  $h(q)H(q) > 0$  e teríamos  $A'(0) < 0$  para a variação determinada por essa função  $h$ , o que é uma contradição.

□

A partir da proposição acima, concluímos que  $t = 0$  é um ponto crítico da função área  $A$ , isto é, qualquer região limitada  $\mathbf{x}(\bar{D})$  de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ . Observe que  $t = 0$  não é necessariamente um ponto de mínimo, no entanto, a terminologia já está consagrada pelo tempo e continua sendo utilizada. O primeiro a definir uma superfície mínima foi Lagrange em 1760. E em 1776, Meusnier descobriu o helicóide e o catenoide, ver [2].

## 2.6 Funções de uma Variável Complexa

Para a compreensão da Representação de Weierstrass-Enneper, faz-se necessário um breve comentário sobre funções de uma variável complexa. Diante disto, dedicamos esta seção a este tema.

Denotaremos o conjunto dos números complexos por  $\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ . Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma relação que associa a cada  $z \in \mathbb{C}$  um único  $w \in \mathbb{C}$  chamado a imagem de  $z$  por  $f$ , isto é,  $w = f(z)$ . Temos ainda a seguinte correspondência  $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Assim, podemos escrever  $w = f(z) = f(x, y) = (\varphi(x, y), \psi(x, y)) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ .

**Definição 2.23.** *Sejam  $U$  um conjunto aberto de  $\mathbb{C}$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de  $z$ . Dado um número  $z_0 \in U$ , dizemos que o número  $w_0 \in \mathbb{C}$  é o limite de  $f$  quando  $z \in U$  tende a  $z_0$  se, dado qualquer número  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$  tal que,  $|z - z_0| < \delta$ , então  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ . Se esse for o caso, escrevemos*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

Em outras palavras, a definição afirma que se  $w_0$  é limite de  $f$  quando  $z$  tende a  $z_0$  então  $|f(z) - w_0|$  fica tão pequeno quanto se queira desde que  $z$  esteja suficientemente próximo de  $z_0$ . A partir da definição acima, obtemos algumas propriedades do limite, entre as quais a sua unicidade e a proposição a seguir.

**Proposição 2.5.** *Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , com  $\varphi$  e  $\psi$  funções das variáveis reais  $x$ ,  $y$  e  $U$  um conjunto aberto de  $\mathbb{C}$ . Então existe o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  com  $w_0 = u_0 + iv_0$  se, e somente se, os limites*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (u_0, v_0)} \varphi(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (u_0, v_0)} \psi(x, y)$$

*existem e são iguais a  $u_0$ ,  $v_0$ , respectivamente.*

**Definição 2.24.** *Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dita contínua em  $z_0$  quando  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Dizemos que  $f$  é contínua em um conjunto aberto  $U$  quando  $f$  é contínua em cada  $z_0 \in U$ .*



**Definição 2.25.** Uma função complexa é diferenciável em  $z_0 \in \mathbb{C}$  quando o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Quando o limite existe para todo  $z_0 \in U$ ,  $U$  aberto, dizemos que  $f$  é holomorfa ou analítica em  $U$ .

Agora vamos assumir que o limite acima existe e calculá-lo no caso particular em que  $z = x \rightarrow z_0 = x_0$ . Obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A - B}{(x - x_0)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x, y_0) - \phi(x_0, y_0) + i\psi(x, y_0) - i\psi(x_0, y_0)}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x, y_0) - \phi(x_0, y_0)}{(x - x_0)} + \frac{i\psi(x, y_0) - i\psi(x_0, y_0)}{(x - x_0)} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

onde  $A = \phi(x, y_0) + i\psi(x, y_0)$  e  $B = \phi(x_0, y_0) + i\psi(x_0, y_0)$ .

De modo análogo, para o caso particular em que  $z = iy \rightarrow z_0 = iy_0$ , temos

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\phi(x_0, y) + i\psi(x_0, y) - [\phi(x_0, y_0) + i\psi(x_0, y_0)]}{i(y - y_0)} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Como, por hipótese,  $f$  é diferenciável em  $z_0$ , os limites acima são iguais a  $f'(z_0)$  e, portanto, iguais. Assim,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Estas equações são chamadas de *equações de Cauchy-Riemann*. O comentário acima pode ser formalizado mediante a seguinte proposição:

**Proposição 2.6** (Condições de Cauchy-Riemann). *Se a função  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  tem derivada no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$ , então*

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Uma condição para que valha a recíproca da Proposição 2.6 é dada por

**Proposição 2.7.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  aberto,  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , uma função complexa tal que as derivadas parciais  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  existem em  $U$  e são contínuas no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ . Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em  $z_0$ , então  $f$  é derivável em  $z_0$ .*

Dedicaremos os dois exemplos a seguir para ilustrar o cálculo da derivada usando a definição apresentada acima bem como informar uma função holomorfa e uma função não holomorfa.

**Exemplo 2.6.** *A função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2$  é holomorfa. Com efeito, seja  $z = x + iy$ . Assim, temos  $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ . Denotando  $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$  e  $\psi(x, y) = 2xy$ , obtemos  $f(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ . Agora, derivando  $f$  em relação a  $x$  e a  $y$ , obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 2x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -2y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Com isto, usando a Proposição 2.7, concluímos que  $f$  é holomorfa.

**Exemplo 2.7.** *Dado um número complexo  $z = x + iy$  o conjugado complexo de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = x - iy$ . A função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \bar{z}$  não é holomorfa. Com efeito, Denotando  $\varphi(x, y) = x$  e  $\psi(x, y) = -y$  temos  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ . Calculando as derivadas parciais de  $\varphi$  e  $\psi$ , obtemos*

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Como  $f$  não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, concluímos que  $f$  não é holomorfa.

Agora, apresentaremos uma notação que será de grande valia no decorrer da Seção 3. Sejam  $\mathbf{x}(u, v)$  uma parametrização com coordenadas complexas,  $z = u + iv$  um número complexo e  $\bar{z}$  o seu conjugado, denotamos por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

a derivação parcial complexa. Uma vantagem dessa notação é que ela fornece um teste fácil para  $f$  ser holomorfa.

**Proposição 2.8.**  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $U \subset \mathbb{C}$  aberto, é holomorfa se, e somente se,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

**Prova** Sendo  $f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u, v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial u} + i \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial u} + i \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right).$$

Usando a Proposição 2.6 e a Proposição 2.7, concluímos a demonstração. □

**Proposição 2.9.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , onde  $U \subset \mathbb{C}$ .  $f$  é holomorfa se, e somente se,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

**Prova** Sendo  $f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(u, v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial u} + i \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial u} + i \frac{\partial \phi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right).$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann concluímos que a equação acima é igual a zero. □

**Proposição 2.10.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , onde  $U \subset \mathbb{C}$ . Então

$$\Delta f = f_{uu} + f_{vv} = 4 \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \right).$$

**Prova** Calculando  $4 \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \right)$ , obtemos

$$4 \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \right) = 4 \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) - i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) + i \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) - i \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + i \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Schwarz, concluímos que  $\Delta f = 4 \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \right)$ .

□

Uma outra definição necessária para a compreensão da Representação de Weierstrass-Enneper é a de *função meromorfa*. Antes de enunciá-la, apresentaremos mais alguns conceitos.

Uma grande diferença entre a integração de uma função de uma variável complexa e uma função real é que a integração da primeira pode ser dada no pontos interiores a um disco fechado ao longo de sua fronteira. A seguir, falaremos brevemente sobre a integração de uma função complexa.

**Definição 2.26.** *Um ponto singular de uma função complexa  $f$  (ou singularidade isolada de  $f$ ) é um ponto  $z_0$  tal que existe um disco  $D(z_0, r)$  no qual  $f$  é holomorfa exceto no ponto  $z_0$ .*

Recordemos que um disco  $D(z_0, r)$  aberto é um conjunto de pontos da forma

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}.$$

Isto é, o conjunto dos pontos  $z$  cuja distância a  $z_0$  é menor que  $r$ . Analogamente, podemos definir o disco fechado  $D[z_0, r]$  como o conjunto dos  $z \in \mathbb{C}$  tais que  $|z - z_0| \leq r$ .

**Definição 2.27.** *Sejam  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um domínio. A integral da função  $f$  ao longo do caminho  $\gamma$  é o número complexo*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Observe que escrevendo  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , temos  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ . Por sua vez, sendo  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , obtemos

$$f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)).$$

Usando a definição, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)] dt. \end{aligned}$$

Efetuando o produto, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx.$$

**Definição 2.28.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua, onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um domínio. Uma função  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada uma primitiva de  $f$  se  $F$  é holomorfa em  $U$  e  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in U$ .

Desse modo, vale a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 2.5.** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um domínio,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua,  $F$  uma primitiva de  $f$  em  $U$  e  $\gamma$  um caminho suave por partes em  $U$  unindo o ponto  $z_0$  ao ponto  $z_1$ . Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Uma prova para o teorema acima encontra-se em [5], página 100.

Chamamos de anel  $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$  o conjunto aberto dado por

$$A(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C}; \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\},$$

onde  $\rho_1, \rho_2$  são números reais. De modo análogo, definimos o anel fechado por  $\bar{A}(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C}; \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ .

**Exemplo 2.8.** Sejam  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-i)}$  e  $g(z) = \bar{z}$ .  $1$  e  $i$  são pontos singulares de  $f$ , por outro lado  $g$  não possui pontos singulares, pois, como vimos no Exemplo 2.7, não é derivável em nenhum ponto.

**Teorema 2.6** (Teorema de Laurent). *Seja  $f$  uma função holomorfa no anel  $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$ .*

*Então*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

*sendo que a série  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-z_0)^m}$  converge absolutamente fora do disco fechado  $\bar{D}(z_0, \rho_1)$  e a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$  converge absolutamente no disco  $\bar{D}(z_0, \rho_2)$ . Além disso, essa expansão é única e os coeficientes  $b_m$  e  $a_n$  são dados por*

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) (z-z_0)^{m-1} dz, \quad m \geq 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0,$$

*onde  $\gamma$  é um círculo de centro em  $z_0$ , orientado no sentido anti-horário e contido em  $A(z_0, \rho_1, \rho_2)$ .*

A demonstração do teorema acima encontra-se em [5], página 139. A expansão dada pelo Teorema 2.6 é chamada de *série de Laurent* de  $f$  e nos permite classificar as singularidades isoladas de  $f$ . Para a definição a seguir, suponha que  $f$  é uma função holomorfa no anel  $A(z_0, 0, \rho)$  e considere sua série de Laurent em torno de  $z_0$

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

**Definição 2.29.** *O ponto  $z_0$  é uma singularidade removível de  $f$  se  $b_m = 0$  para  $m \geq 1$ .  $z_0$  é dito um polo de ordem  $k$  de  $f$  se  $b_k \neq 0$  e  $b_m = 0$  para  $m > k$ . Por fim,  $z_0$  é chamado singularidade essencial de  $f$  se  $b_m \neq 0$  para uma infinidade de valores de  $m$ .*

Dizemos que uma função  $g$  é meromorfa quando todas as suas singularidades forem polos. As funções racionais  $g(z) = \frac{\mathcal{P}(z)}{Q(z)}$  para polinômios  $\mathcal{P}$ ,  $Q$  são exemplos importantes de funções meromorfas.

## 2.7 Funções Harmônicas

A equação de Laplace é uma equação diferencial parcial de segunda ordem dada por

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,$$

onde  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes diferenciável.

**Definição 2.30.** Dizemos que  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função harmônica quando suas derivadas de primeira e segunda ordem são contínuas em cada ponto do domínio e satisfazem à equação de Laplace.

**Teorema 2.7.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ , onde  $U \subset \mathbb{C}$  é aberto. Se  $f$  é holomorfa então as funções  $\phi(x, y)$  e  $\psi(x, y)$  são harmônicas.

**Prova** Dada  $f$  holomorfa, usando a Proposição 2.6, sabemos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas, isto é,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x},$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

são verdadeiras. Derivando a primeira equação em relação a  $y$  e a segunda equação em relação a  $x$ , obtemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x},$$

e

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}.$$

Somando as duas equações acima, obtemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = 0.$$

Assim, concluímos que  $\psi$  é harmônica. Analogamente, podemos mostrar que  $\phi$  é harmônica, concluindo a prova.

□

Mostraremos agora uma relação interessante entre superfícies mínimas e funções harmônicas. Essa relação ocorre quando a superfície está parametrizada por coordenadas isotérmicas e é dada pelo teorema a seguir.

**Teorema 2.8.** *Se  $\mathbf{x}$  é um parametrização isotérmica, então*

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)N.$$

**Prova** Sendo  $E = G$  e  $F = 0$  temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= \left( \frac{E_u}{2E} - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_v + eN \right) + \left( -\frac{G_u}{2E} + \frac{G_v}{2G} \mathbf{x}_v + gN \right) \\ &= \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_v + eN - \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_v + gN \\ &= (e + g)N \\ &= 2E \left( \frac{e + g}{2E} \right) N. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a equação (7), temos

$$H = \frac{e + g}{2E}.$$

Assim, concluímos  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)N$ . □

**Corolário 2.1.** *Uma superfície  $M : \mathbf{x}(u, v) = (\mathbf{x}^1(u, v), \mathbf{x}^2(u, v), \mathbf{x}^3(u, v))$  com coordenadas isotérmicas é mínima se, e somente se  $\mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{x}^2$  e  $\mathbf{x}^3$  são funções harmônicas.*

**Prova** Se  $M$  é mínima,  $H = 0$  e, pelo teorema anterior,  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ . Assim,  $\mathbf{x}$  é harmônica. Por outro lado, se  $\mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{x}^2$  e  $\mathbf{x}^3$  são funções harmônicas, então  $\mathbf{x}$  é harmônica com  $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$  e, usando o teorema anterior,  $(2EH)U = 0$ . Assim, como  $U$  é o normal unitário e  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \neq 0$ , então  $H = 0$  e  $M$  é mínima. □

Vale ressaltar que na seção seguinte mostraremos o Teorema 3.1, o qual afirma que toda superfície mínima admite uma parametrização isotérmica.



### 3 Representação de Weierstrass-Enneper

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que envolvem superfícies mínimas e o Teorema de Representação de Weierstrass-Enneper. Além disso, algumas aplicações destes resultados.

#### 3.1 Primeiras Noções de Superfícies Mínimas

**Proposição 3.1.** *Seja  $M$  o gráfico de uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .  $M$  é uma superfície mínima se, e somente se*

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0. \quad (6)$$

*Esta equação diferencial parcial é chamada de equação da superfície mínima.*

**Prova** Sabemos que  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  dada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é uma parametrização de  $M$ . Assim, calculando as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  (de primeira e segunda ordem), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (1, 0, f_u), & \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), & \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, f_{vv}), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 1, f_v), & \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, f_{uv}), \end{aligned}$$

Desse modo, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2.$$

Agora, calculando os coeficientes da segunda forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (-f_u, -f_v, 1), & N &= \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \\ e &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, & f &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, & e & \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, calculando a curvatura média em função dos coeficientes da primeira e segunda formas, obtemos

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} + (1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Com isto, temos  $M$  superfície mínima se, e somente se a equação (6) é satisfeita.

□

**Teorema 3.1.** *Coordenadas isotérmicas existem em qualquer superfície mínima  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ .*

**Prova** Fixe um ponto  $m \in M$ . Escolha um sistema de coordenadas para  $\mathbb{R}^3$  de forma que  $m$  seja a origem, o plano tangente a  $M$ ,  $T_m M$ , seja o plano  $xy$  e, próximo a  $m$ ,  $M$  seja o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ . Além disso, as regras do quociente e da cadeia fornecem

$$\left(\frac{1+f_x^2}{w}\right)_y - \left(\frac{f_x f_y}{w}\right)_x = -\frac{f_y}{w^3} [f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1+f_x^2)]$$

e

$$\left(\frac{1+f_y^2}{w}\right)_x - \left(\frac{f_x f_y}{w}\right)_y = -\frac{f_x}{w^3} [f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1+f_x^2)],$$

onde  $w = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$ . Como é tradicional (e conveniente), denote  $p = f_x$  e  $q = f_y$ . Sendo  $M$  mínima,  $f$  satisfaz a equação da superfície mínima

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0,$$

então,

$$\left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y - \left(\frac{pq}{w}\right)_x = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x - \left(\frac{pq}{w}\right)_y = 0.$$

Defina dois campos de vetores no plano  $xy$  por

$$V = \left(\frac{1+p^2}{w}, \frac{pq}{w}\right) \quad \text{e} \quad W = \left(\frac{pq}{w}, \frac{1+q^2}{w}\right).$$

Aplicando o Teorema de Green a qualquer curva fechada  $C$  contida em uma região  $\mathcal{R}$  simplesmente conexa, obtemos

$$\int_C V = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{1+p^2}{w}\right)_y - \left(\frac{pq}{w}\right)_x dx dy = 0$$

e

$$\int_C W = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{1+q^2}{w}\right)_x - \left(\frac{pq}{w}\right)_y dx dy = 0.$$

Uma vez que as integrais de linha são zero para todas as curvas fechadas em  $\mathcal{R}$ ,  $V$  e  $W$  devem ter funções potenciais. Ou seja, existem  $\mu$  e  $\rho$  com  $\text{grad}(\mu) = V$  e  $\text{grad}(\rho) = W$ . Consideradas em termos de coordenadas, estas equações implicam que  $\mu_x = \frac{1+p^2}{w}$ ,  $\mu_y = \frac{pq}{w}$ ,  $\rho_x = \frac{pq}{w}$  e  $\rho_y = \frac{1+q^2}{w}$ . Defina uma aplicação  $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$T(x, y) = (x + \mu(x, y), y + \rho(x, y)).$$

Calculando a matriz Jacobiana desta aplicação, obtemos

$$J(T) = \begin{pmatrix} 1 + \mu_x & \mu_y \\ \rho_x & 1 + \rho_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & \frac{pq}{w} \\ \frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{pmatrix},$$

e calculando o seu determinante obtemos  $\det J(T) = (1 + w^2)/w > 0$ . O Teorema 2.2 (Teorema da Função Inversa) afirma que próximo a  $m = (0, 0)$  existe uma função inversa suave  $T^{-1}(u, v) = (x, y)$  com

$$\begin{aligned} J(T^{-1}) = J(T)^{-1} &= \frac{1}{\det J(T)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{w} & -\frac{pq}{w} \\ -\frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+p^2}{w} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 + w^2)} \begin{pmatrix} w + 1 + q^2 & -pq \\ -pq & w + 1 + p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que a última matriz é apenas

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix},$$

conforme a definição de matriz Jacobiana. Usando o que foi calculado acima, provaremos que

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$$

é isotérmica. Calculando a derivada parcial de  $\mathbf{x}$  em relação a  $u, v$ , obtemos

$$\mathbf{x}_u = \left( \frac{w+1+q^2}{(1+w)^2}, -\frac{pq}{(1+w)^2}, p \left( \frac{w+1+q^2}{(1+w)^2} \right) + q \left( \frac{-pq}{(1+w)^2} \right) \right),$$

$$\mathbf{x}_v = \left( -\frac{pq}{(1+w)^2}, \frac{w+1+p^2}{(1+w)^2}, p \left( -\frac{pq}{(1+w)^2} \right) + q \left( \frac{w+1+p^2}{(1+w)^2} \right) \right).$$

Por fim, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [(w+1+q^2)^2 + p^2q^2 + p^2(w+1+q^2)^2 - 2p^2q^2(w+1+q^2) + p^2q^4] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [(1+w)^2(1+p^2+q^2)] \\ &= \frac{w^2}{(1+w)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2q^2 + (w+1+p^2)^2 + p^4q^2 - 2p^2q^2(w+1+p^2) + q^2(w+1+p^2)^2] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2q^2 + (w+1+p^2)^2 + p^4q^2 + q^2(w+1+p^2)(1+w-p^2)] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2q^2 + (w+1+p^2)^2 + p^4q^2 + q^2(w+1)^2 - q^2p^4] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2q^2 + (w+1+p^2)^2 + p^4q^2 + q^2(w+1)^2 - q^2p^4] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2q^2 + (w+1)^2 + 2p^2(w+1) + p^4 + q^2(w+1)^2] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2(q^2 + p^2 + 2(w+1)) + (w+1)^2 + q^2(w+1)^2] \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [p^2(1+2w+w^2) + (w+1)^2 + q^2(w+1)^2] \\ &= \frac{w}{(1+w)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle \\ &= \frac{1}{(1+w)^4} [-2pq(w+1) - pq(p^2+q^2) - (w+1)(p^3q+pq^3) - p^3q^3 \\ &\quad + pq((w+1)^2 + (w+1)(p^2+q^2) + p^2q^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+w)^4} [-2pq(w+1) - pq(p^2 + q^2) - p^3q^3 + pq(w+1)^2 + p^3q^3] \\
&= \frac{pq}{(1+w)^4} [-2(w+1) - (p^2 + q^2) + (w+1)^2] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que  $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = E$  e  $F = 0$ , isto é, a parametrização  $\mathbf{x}(u, v)$  é isotérmica.

□

Observe ainda que nas condições da proposição acima, temos

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{e + g}{2E}. \quad (7)$$

**Exemplo 3.1.** A superfície de Scherk  $\mathbf{x} : (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}) \times (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  onde

$$z = f(u, v) = \frac{1}{a} \left( \frac{\cos au}{\cos av} \right),$$

é uma superfície mínima, ver Figura 2. Calculando as derivadas parciais de primeira e segunda ordem (ambas em relação a  $u$  e a  $v$ ) de  $f$ , a fim de mostrarmos que  $\mathbf{x}$  é uma superfície mínima, obtemos

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= \frac{1}{a} \ln \cos au - \frac{1}{a} \ln \cos av, \\
f_u &= \frac{1}{a \cos au} (-\operatorname{sen} au) a = -\frac{\operatorname{sen} au}{\cos au}, \\
f_v &= \frac{1}{a \cos av} (\operatorname{sen} av) a = \frac{\operatorname{sen} av}{\cos av}, \\
f_{uv} &= 0 = f_{vu}, \\
f_{uu} &= -\frac{a \cos^2 au + a \operatorname{sen}^2 au}{\cos^2 au} = -\frac{a}{\cos^2 au}, \\
f_{vv} &= \frac{a \cos^2 av + a \operatorname{sen}^2 av}{\cos^2 av} = \frac{a}{\cos^2 av}.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo na expressão de  $H$ , obtemos

$$H = \frac{(1 + f_v^2) f_{uu} + (1 + f_u^2) f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv}}{\sqrt{2(1 + f_u^2 + f_v^2)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{1}{2}}} \left( \left(1 + \frac{\text{sen}^2 av}{\cos^2 av}\right) \left(-\frac{a}{\cos^2 au}\right) + \left(1 + \frac{\text{sen}^2 au}{\cos^2 au}\right) \left(\frac{a}{\cos^2 av}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{1}{2}}} \left( -\frac{1}{\cos^2 av \cos^2 au} + \frac{1}{\cos^2 av \cos^2 au} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, a superfície de Scherk é uma superfície mínima.

**Exemplo 3.2.** As superfícies dadas pelas parametrizações

$$\mathbf{y}(u, v) = \left( \frac{cu \pm \text{sen} u \cosh v}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{v \pm c \cos u \text{senh} v}{\sqrt{1-c^2}}, \pm \cos u \cosh v \right).$$

são mínimas. Aqui mostraremos o caso da superfície  $C$  (ver Figura) 9 dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( \frac{cu - \text{sen} u \cosh v}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{v - c \cos u \text{senh} v}{\sqrt{1-c^2}}, \cos u \cosh v \right).$$

Derivando  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$ , temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u, v) &= \left( \frac{c - \cos u \cosh v}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{v - c \text{sen} u \text{senh} v}{\sqrt{1-c^2}}, -\text{sen} u \cosh v \right), \\
\mathbf{x}_v(u, v) &= \left( \frac{-\text{sen} u \text{senh} v}{\sqrt{1-c^2}}, \frac{-c \cos u \cosh v}{\sqrt{1-c^2}}, \cos u \text{senh} v \right).
\end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}
E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{(\cosh v - c \cos u)^2}{1-c^2}, \\
F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\
G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{(\cosh v - c \cos u)^2}{1-c^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, a parametrização  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Calculando as derivadas parciais  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{vv}$  e os coeficientes  $e$  e  $g$  da segunda forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (\text{sen} u \cosh v, c \cos u \text{senh} v, -\cos u \cosh v), \\
\mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (-\text{sen} u \cosh v, -c \cos u \text{senh} v, \cos u \cosh v) = -\mathbf{x}_{uu}(u, v). \\
e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = -g.
\end{aligned}$$

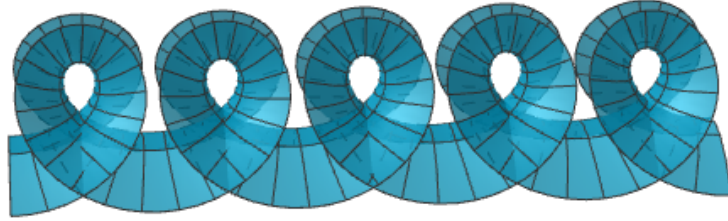


Figura 9: Superfície C

Fonte: Autoria Própria

Assim, usando a equação (7), obtemos

$$H = \frac{e + g}{2E} = 0.$$

Com isto, concluímos que a superfície em questão é mínima.

O exemplo a seguir exhibe mais uma superfície mínima, chamada de *superfície Helcat*, ver Figura 10.

**Exemplo 3.3.** A superfície dada por  $\mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ , onde

$$x^1(u, v) = \cos t \sinh v \sin u + \sin t \cosh v \cos u,$$

$$x^2(u, v) = -\cos t \sinh v \cos u + \sin t \cosh v \sin u,$$

$$x^3(u, v) = u \cos t + v \sin t.$$

para qualquer  $t$  fixado é uma superfície mínima. Com efeito, derivando  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$ , obtemos  $\mathbf{x}_u(u, v) = (x_u^1(u, v), x_u^2(u, v), x_u^3(u, v))$  e  $\mathbf{x}_v(u, v) = (x_v^1(u, v), x_v^2(u, v), x_v^3(u, v))$ , onde

$$x_u^1(u, v) = \cos t \sinh v \cos u - \sin t \cosh v \sin u,$$

$$x_u^2(u, v) = \cos t \sinh v \sin u + \sin t \cosh v \cos u,$$

$$x_u^3(u, v) = \cos t.$$

$$x_v^1(u, v) = \cos t \cosh v \sin u + \sin t \sinh v \cos u,$$

$$x_v^2(u, v) = -\cos t \cosh v \cos u + \sin t \sinh v \sin u,$$

$$x_v^3(u, v) = \sin t.$$

Agora, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}
 E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= (\cos t \sinh v \cos u - \sin t \cosh v \sin u)^2 + \cos^2 u \\
 &\quad + (\cos t \sinh v \sin u + \sin t \cosh v \cos u)^2 \\
 &= \cos^2 t \sinh^2 v + \sin^2 t \cosh^2 v + \cos^2 t \\
 &= \cos^2 t (\sinh^2 v + 1) + \sin^2 t \cosh^2 v \\
 &= \cosh^2 v.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= (\cos t \cosh v \sin u + \sin t \sinh v \cos u)^2 + \sin^2 t \\
 &\quad + (-\cos t \cosh v \cos u + \sin t \sinh v \sin u)^2 \\
 &= \cos^2 t \cosh^2 v + \sin^2 t \cosh^2 v + \sin^2 t \\
 &= \sin^2 t (\sinh^2 v + 1) + \cos^2 t \cosh^2 v \\
 &= \cosh^2 v.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= (\cos t \sinh v \cos u - \sin t \cosh v \sin u)(\cos t \cosh v \sin u + \sin t \sinh v \cos u) \\
 &\quad + (\cos t \sinh v \sin u + \sin t \cosh v \cos u)(-\cos t \cosh v \cos u + \sin t \sinh v \sin u) \\
 &\quad + \cos u \sin u \\
 &= -\sin t \cos t \cosh^2 v + \sin t \cos t \sinh^2 v + \sin t \cos t \\
 &= -\sin t \cos t (\cosh^2 v - \sinh^2 v) + \sin t \cos t \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a parametrização  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Calculando  $\mathbf{x}_{uu}$  e  $\mathbf{x}_{vv}$ , obtemos

$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (x_{uu}^1(u, v), x_{uu}^2(u, v), x_{uu}^3(u, v))$  e  $\mathbf{x}_{vv}(u, v) = (x_{vv}^1(u, v), x_{vv}^2(u, v), x_{vv}^3(u, v))$ , onde

$$x_{uu}^1(u, v) = -\cos t \sinh v \sin u - \sin t \cosh v \cos u,$$

$$x_{uu}^2(u, v) = \cos t \sinh v \cos u + \sin t \cosh v \sin u,$$

$$x_{uu}^3(u, v) = 0,$$

$$x_{vv}^1(u, v) = \cos t \sinh v \sin u + \sin t \cosh v \cos u,$$



$$x_{vv}^2(u, v) = -\cos t \sinh v \cos u + \sin t \cosh v \sin u,$$

$$x_{vv}^3(u, v) = 0.$$

Observe que  $\mathbf{x}_{uu} = -\mathbf{x}_{vv}$ . Desse modo, calculando os coeficientes da segunda forma fundamental, temos

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = -g.$$

Usando a equação (7) para calcular a curvatura média  $H$ , obtemos

$$H = \frac{e+g}{2E} = 0.$$

Finalmente, concluímos que a superfície Helcat é mínima.

As Figuras 10-(a), 10-(b) e 10-(c) exibem a superfície de Helcat nos casos em que  $t = \frac{\pi}{3}$ ,  $t = \frac{\pi}{4}$  e  $t = \frac{\pi}{6}$ , respectivamente. Para plotar a figura, consideramos  $u \in (-3\pi, 3\pi)$  e  $v \in (-2, 2)$ . Por sua vez, a Figura 11 mostra a projeção das Figuras 10-(a), 10-(b) e 10-(c) no plano  $xy$ . Vale ressaltar que nos casos  $t = \frac{\pi}{2}$  e  $t = 0$ , a superfície de Helcat é um Catenóide e um Helicóide, respectivamente (veja os Exemplos 3.6 e 3.8).

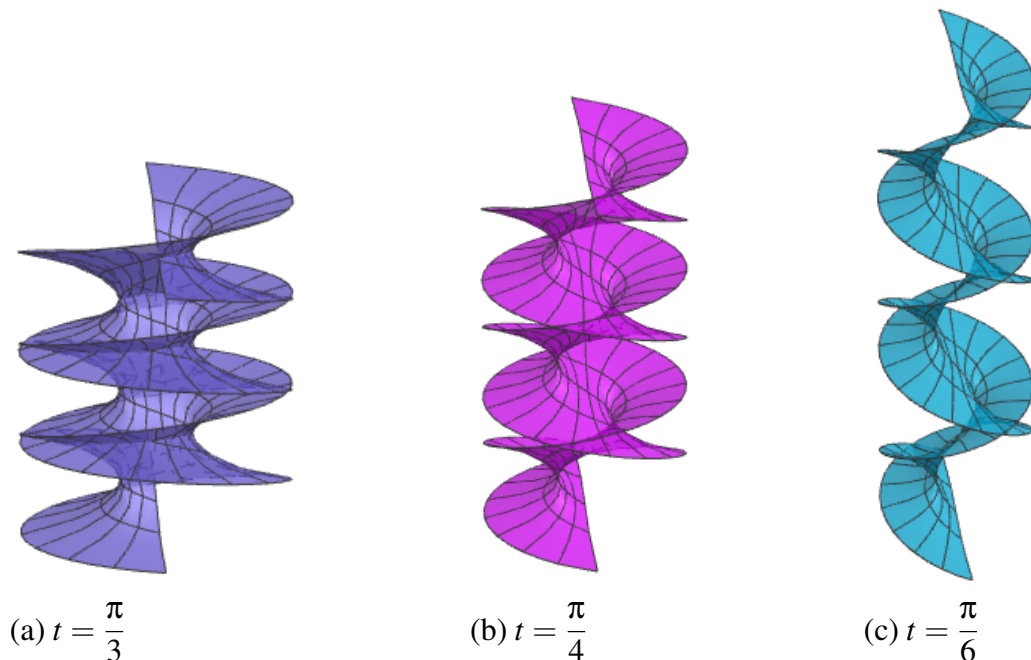


Figura 10: Superfícies Helcat

Fonte: Autoria Própria

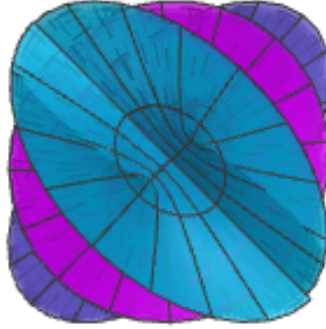


Figura 11: Superfícies Helcat - Projetadas no plano  $xy$

Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.4.** A superfície  $S$  dada por  $\operatorname{sen} z = \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$  tem como parametrização  $\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{arcsen} u, \operatorname{arcsen} v, \operatorname{arcsen} uv)$  e é conhecida na literatura como a *quinta superfície de Scherk*, ver Figura 12. Mostraremos a seguir que  $S$  é uma superfície mínima.

Calculando as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$ , temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= \left( \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, 0, \frac{v}{\sqrt{1-u^2v^2}} \right), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \left( 0, \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \frac{u}{\sqrt{1-u^2v^2}} \right).\end{aligned}$$

Agora, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1+v^2}{(1+u^2)(1-u^2v^2)}, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{1-u^2v^2}, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1+u^2}{(1+v^2)(1-u^2v^2)}.\end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem, segue que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u, v) &= \left( \frac{-u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, \frac{uv^3}{(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= \left( 0, 0, \frac{1}{(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= \left( 0, \frac{-v}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{u^3v}{(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \right).\end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da segunda forma fundamental, obtemos

$$eB = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \frac{uv^3}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{uv}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$fB = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$gB = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \frac{u^3v}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{uv}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{3}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde  $B = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|$ . Sabemos que a curvatura média  $H$  em termos da primeira e segunda formas fundamentais é dada por

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2B^2}.$$

Assim, temos

$$2HB^3 = eBG - 2fBF + gBE.$$

Afirmamos que  $eBG - 2fBF + gBE = 0$ . De fato,

$$eBG = \left[ \frac{uv^3((1-u^2v^2)^{-\frac{3}{2}})}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{uv}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{1+u^2}{(1+v^2)(1-u^2v^2)},$$

$$-2fBF = \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(1-u^2v^2)},$$

$$gBE = \left[ \frac{u^3v}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2v^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{uv((1-u^2v^2)^{-\frac{1}{2}})}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{1+v^2}{(1+u^2)(1-u^2v^2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} eBG - 2fBF + gBE &= C \left[ \frac{v^2(1+u^2)}{(1+v^2)(1-u^2v^2)} + \frac{1}{(1+v^2)} \right] \\ &\quad + C \left[ \frac{-2}{(1+v^2)(1-u^2v^2)} \right] \\ &\quad + C \left[ \frac{u^2(1+v^2)}{(1+u^2)(1-u^2v^2)} + \frac{1}{(1+v^2)} \right] \\ &= \frac{C}{1-u^2v^2} - 2\frac{C}{1-u^2v^2} + \frac{C}{1-u^2v^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde  $C = \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}(\sqrt{1-u^2v^2})^3}$ . Como  $B \neq 0$ , concluímos que  $H = 0$ , portanto  $S$  é uma superfície mínima.

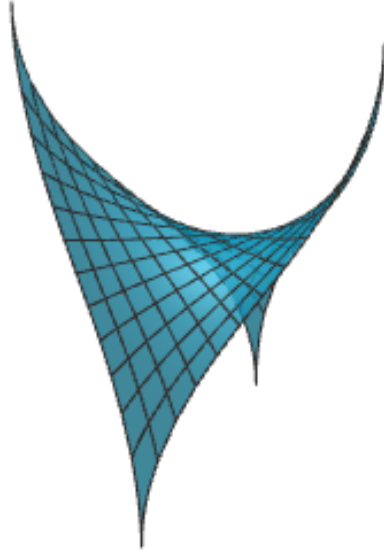


Figura 12: Quinta superfície de Scherk

Fonte: Autorial Própria

**Exemplo 3.5.** A superfície de Enneper, ver Figura 13, dada pela parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, u^2 - v^2 \right)$$

é uma superfície mínima. Com efeito, calculando as derivadas parciais  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$  e em seguida os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u),$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (2uv, -1 - u^2 + v^2, -2v),$$

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = (1 - u^2 + v^2)^2 + (-2uv)^2 + (2u)^2 \\ &= 1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4, \end{aligned}$$

$$F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = (2uv)^2 + (-1 - u^2 + v^2)^2 + (-2v)^2 \\ &= 1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + u^4 + v^4. \end{aligned}$$

Agora, calculando apenas os coeficientes  $e$  e  $g$  da segunda forma fundamental, temos

$$\mathbf{x}_{vv}(u, v) = (2u, 2v, -2) = -\mathbf{x}_{uu}(u, v).$$

Assim,

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle,$$

$$g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = -e.$$

Observe que a parametrização  $\mathbf{x}$  é isotérmica. Assim, usando a equação (7), obtemos

$$H = \frac{e+g}{2E} = 0.$$

Com isto concluímos que a superfície de Enneper é uma superfície mínima.

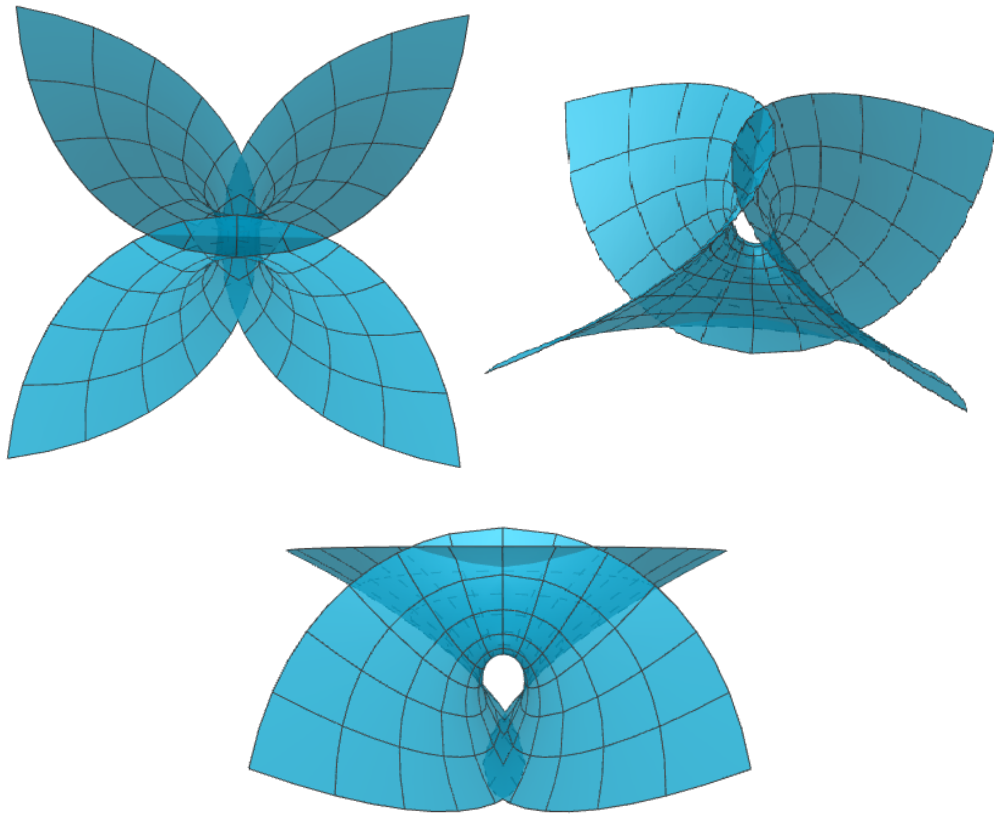


Figura 13: Superfície de Enneper

Fonte: Autoria Própria

As superfícies de revolução configuram uma classe muito importante de superfícies. Dessa forma, destinamos os próximos parágrafos para a definição deste tipo de superfície e a apresentação de uma superfície de revolução chamada *catenoide*. Finalizaremos o tópico

das superfícies de revolução provando um resultado que afirma que o catenoide é a única superfície mínima de revolução.

Seja  $C$  uma curva regular plana e conexa que não intersecta um dos eixos do plano em que está contida. Suponha, por exemplo, que  $C$  está contida no plano  $xz$ , não intersecta o eixo  $Oz$  e sua parametrização é dada por

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad f(v) > 0,$$

onde  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Rotacionando a curva  $C$  em torno do eixo  $Oz$  e denotando por  $u$  o ângulo de rotação, obtemos a aplicação diferenciável

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

onde  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } a < v < b\}$ . Chamamos de *superfície de revolução* o conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  obtido ao girarmos a curva  $C$ , em questão, em torno do eixo  $Oz$ . Observe que o conjunto  $S$  pode ser coberto por duas parametrizações, a saber, a parametrização  $\mathbf{x}$  e, por exemplo, a parametrização

$$\mathbf{y}(u, v) = (f(v) \sin u, f(v) \cos u, g(v)),$$

com  $\mathbf{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } a < v < b\}$  obtida pela rotação da curva  $\overline{C}$  dada por

$$y = f(v), \quad z = g(v), \quad f(v) > 0.$$

A curva  $C$  e o eixo  $Oz$  são chamados de *curva geratriz* de  $S$  e *eixo de rotação* de  $S$ , respectivamente.

**Exemplo 3.6** (Catenoide). *Considere a curva plana  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por*

$$\alpha(v) = (0, a \cosh(v), av),$$

*esta curva é chamada de catenária, ver Figura 14. O catenoide, veja Figura 15, é a su-*

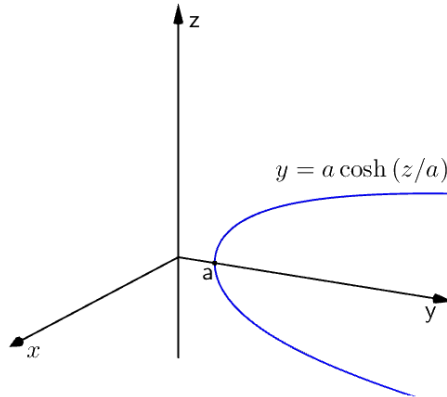


Figura 14: Catenária

Fonte: Autoria Própria

perfície de revolução  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$  obtida pela rotação da catenária em torno do eixo  $Oz$ . Assim,

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, av).$$

Calculando as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  em relação a  $u$  e a  $v$  e os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos

$$\mathbf{x}_u = (a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0),$$

$$\mathbf{x}_v = (a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a),$$

$$E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = a^2 \cosh^2 v,$$

$$F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a^2 \sinh^2 v + a^2 = a^2 \cosh^2 v.$$

Assim, concluímos que  $\mathbf{x}$  é uma parametrização isotérmica do catenoide. Agora, calculando os coeficientes  $e$  e  $g$  da segunda forma fundamental, obtemos

$$\mathbf{x}_{uu}(u, v) = (-a \cosh v \sin u, -a \cosh v \cos u, 0),$$

$$\mathbf{x}_{vv}(u, v) = (a \cosh v \sin u, a \sinh v \cos u, a) = -\mathbf{x}_{uu}(u, v),$$

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle,$$

$$g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = -e.$$

Dessa forma, usando a equação (7) a fim de calcular a curvatura média do catenoide, obtemos

$$H = \frac{e + g}{2E} = 0.$$

Isto mostra que o catenoide é uma superfície mínima.

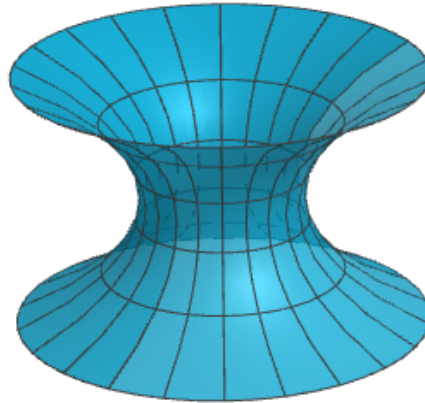


Figura 15: Catenoide

Fonte: Autoria Própria

**Proposição 3.2.** *Se uma superfície de revolução  $S$  é mínima, então  $S$  está contida em um catenoide.*

**Prova** Seja  $\alpha(x) = (x, f(x), 0)$  a curva geratriz de  $S$ , isto é, obtemos  $S$  ao rotacionar  $\alpha$  em torno do eixo  $O_x$ . Como os paralelos e meridianos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura da superfície, temos

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \implies k_1 = -k_2,$$

onde  $k_1$  é a curvatura normal da curva  $\alpha$  e  $k_2$  é a curvatura normal do círculo  $C_x$  de raio  $f(x)$  e centro  $(x, 0, 0)$  (paralelo de  $S$ ). Denotaremos por  $k_\alpha$  e  $n_\alpha$  a curvatura e o vetor normal unitário a curva  $\alpha$ , respectivamente, e  $k_c$  e  $n_c$  curvatura e o vetor normal ao círculo  $C_x$ , respectivamente. Agora, calculando as curvaturas normais  $k_1$  e  $k_2$ , obtemos

$$k_1 = k_\alpha \langle N, n_\alpha \rangle = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \langle N, N \rangle = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k_2 = k_c \langle N, n_c \rangle = \frac{1}{y} \cos \varphi,$$



onde  $y = f(x)$ ,  $y' = \frac{df(x)}{dx}$  e  $\varphi$  é o ângulo entre os vetores  $n_C$  e  $N$  (o vetor normal a superfície). Agora, denotando por  $\theta$  o ângulo entre a reta tangente a curva  $\alpha$  (isto é,  $y = f(x)$ ) e o eixo  $O_x$ , obtemos que  $-\cos \varphi = \cos \theta$ . Como  $y'$  é o coeficiente angular da reta tangente a  $f(x)$ , temos  $y' = \tan \theta$  e, portanto,

$$(y')^2 = \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \implies \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Desse modo, substituindo  $\cos \varphi$  na equação de  $k_2$ , obtemos

$$k_2 = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = -k_1. \quad (8)$$

Assim, concluímos que curva  $\alpha$  deve satisfazer a equação (8). Observe que existe  $d$  tal que  $f'(d) \neq 0$ , caso contrário  $f$  seria uma função constante e a equação (8) não seria satisfeita. Desse modo, pela continuidade da função  $f$  temos que  $f' \neq 0$  em uma vizinhança  $I_d$  do ponto  $d$ . Multiplicando ambos os membros da equação (8) por  $2y'$ , obtemos

$$\frac{2y'y''}{1 + (y')^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Colocando  $z = 1 + (y')^2$ , obtemos

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

integrando o a equação acima, temos

$$\log z = \log y^2 + \log k^2 = \log (ky)^2 \implies z = (ky)^2,$$

onde  $k$  é uma constante. Assim,

$$1 + (y')^2 = k = (ky)^2 \implies k = \frac{ky'}{\sqrt{(ky)^2 - 1}}.$$

Agora, usando novamente integração, obtemos

$$\operatorname{cosh} yk^{-1} = kx + c \implies y = \frac{1}{k} \operatorname{cosh}(kx + c),$$

onde  $c$  é uma constante. Desse modo, concluímos que em uma vizinhança  $I_d$  de um ponto  $d$  onde  $f'(d) \neq 0$ , a curva  $y = f(x)$  é uma catenária. Assim,  $y'$  pode ser zero apenas para  $x = 0$  e, se queremos uma superfície conexa, ela é, por continuidade, um catenoide.

□

Uma outra demonstração da proposição acima pode ser encontrada em [4] na página 132.

**Teorema 3.2.** (Teorema de Catalan) *Toda superfície mínima regradada em  $\mathbb{R}^3$  é parte de um plano ou de um helicóide.*

**Prova** Seja  $M \in \mathbb{R}^3$  uma superfície regradada, isto é, existem curvas parametrizadas  $\delta$  e  $\beta$  tais que  $\mathbf{x}(u, v) = \beta(u) + v\delta(u)$ , onde  $\mathbf{x}$  é uma parametrização de  $M$ . Usando a Proposição 2.1 podemos admitir que as curvas  $\beta$  e  $\delta$  são perpendiculares, isto é,  $\beta' \cdot \delta = 0$  e que  $\delta$  é um campo vetorial unitário, ou seja,  $\delta \cdot \delta = 1$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Feitas tais considerações, podemos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental, obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \beta' + v\delta', & \mathbf{x}_v &= \delta, & \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \beta' \times \delta + v\delta' \times \delta, \\ E &= 1 + 2v\beta' \cdot \delta' + v^2|\delta'|^2, & F &= 0 & e & G = 1. \end{aligned}$$

Agora, calculando os coeficientes da segunda forma, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \beta'' + v\delta'', & \mathbf{x}_{uv} &= \delta', & \mathbf{x}_{vv} &= 0 \\ e &= \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\beta'' \cdot \beta' \times \delta + v\beta'' \cdot \delta' \times \delta + v\delta'' \cdot \beta' \times \delta + v^2\delta'' \cdot \delta' \times \delta}{\sqrt{E}} & e \\ g &= \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que  $M$  é uma superfície mínima, temos  $H = 0$  e, portanto,

$$0 = H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{e}{2E}.$$

Logo,  $e = 0$ . Como o numerador de  $e$  é um polinômio em  $v$

$$\beta'' \cdot (\beta' \times \delta) + v\beta'' \cdot (\delta' \times \delta) + v\delta'' \cdot (\beta' \times \delta) + v^2\delta'' \cdot (\delta' \times \delta),$$

cada um de seus coeficientes deve ser igual a zero. Sendo assim, temos  $\beta'' \cdot (\beta' \times \delta) = 0$ . Ou seja,  $\beta''$  pertence ao plano determinado pelos vetores  $\beta'$  e  $\delta$ , que denotaremos por  $[\beta', \delta]$ .

Usando nossas considerações iniciais temos  $\beta'' \cdot \beta' = 0$ , isto é,  $\beta'$  e  $\beta''$  são perpendiculares. Deste modo, concluímos que  $\beta'' = a\delta$ , ou seja,  $\beta''$  e  $\delta$  são paralelos.

Agora, analisando o coeficiente associado a  $v$ , temos  $\beta'' \cdot \delta' \times \delta + \delta'' \cdot \beta' \times \delta = 0$ . Como  $\beta'' = a\delta$ , da equação anterior concluímos que  $\delta'' \cdot (\beta' \times \delta) = 0$ , isto é,  $\delta''$  pertence ao plano  $[\beta', \delta]$ . Por fim, definindo o coeficiente de  $v^2$  igual a zero, obtemos  $\delta'' \cdot (\delta' \times \delta) = 0$ . Portanto,  $\delta'' \in [\beta', \delta] \cap [\delta', \delta]$ . Agora, existem duas possibilidades: primeiro,  $\delta''$  pode não ser paralelo a  $\delta$  em algum ponto (e, portanto, também em algumas vizinhanças). Isto implica que a interseção  $[\beta', \delta] \cap [\delta', \delta]$  não é uma reta e, portanto, vale a igualdade  $[\beta', \delta] = [\delta', \delta]$ . Deste modo,  $\delta' = b\beta'$ , uma vez que ambos estão no mesmo plano e são perpendiculares a  $\delta$ . Assim, temos que o vetor normal unitário  $N$  é dado por

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \frac{\beta' \times \delta + v\delta' \times \delta}{|\beta' \times \delta + v\delta' \times \delta|} = \frac{(1+av)\beta' \times \delta}{|(1+av)\beta' \times \delta|} = \pm\beta' \times \delta,$$

uma vez que  $|\beta' \times \delta| = 1$ . Calculando a derivada de  $N$  em relação a  $u$ , obtemos

$$N' = \pm\beta'' \times \delta \pm \beta' \times \delta' = \pm a\delta \times \delta \pm \beta' \times b\beta' = 0,$$

pois  $\beta'' = a\delta$  e  $\delta' = b\beta'$ . Assim,  $N$  é constante e, portanto,  $M$  é parte de um plano.

A segunda possibilidade é que  $\delta''$  é paralela a  $\delta$  em todos os pontos. Portanto,  $\delta'' = \beta''/b = (a/b)\delta$  e, conseqüentemente,  $\beta' \cdot \delta'' = 0$ . Mas  $\beta' \cdot \delta = 0$  implica  $k_\beta = k_\beta \delta \cdot \delta = \beta'' \cdot \delta = -\beta'' \cdot \delta'$ , onde  $k_\beta$  é a curvatura de  $\beta$ . Assim, derivando  $k_\beta$  em relação a  $u$ , obtemos

$$\frac{dk_\beta}{du} = -\beta'' \cdot \delta' - \beta' \cdot \delta'' = 0,$$

uma vez que  $\beta''$  e  $\delta''$  são paralelos a  $\delta$  e  $\beta'$  e  $\delta'$  são perpendiculares a  $\delta$ . Assim, a curvatura  $k_\beta$  é constante. Observe que se essa constante for igual a zero, concluiremos que  $\beta$  é uma reta e, portanto, a superfície é parte de um plano.

Agora, considere a torção  $\tau_\beta$  de  $\beta$ . Sabemos, por definição, que  $b' = -\tau_\beta \delta$ , onde  $b'$  é a derivada em relação a  $u$  do vetor binormal de  $\beta$ , isto é,  $b = \beta' \times \delta$ . Desse modo, derivando  $\delta$  em relação a  $u$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_\beta}{du} &= \frac{d(\beta' \times \delta' \cdot \delta)}{du} \\ &= \beta'' \times \delta' \cdot \delta + \beta' \times \delta'' \cdot \delta + \beta' \times \delta' \cdot \delta' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta'' \times \delta' \cdot \delta + \beta' \times \delta'' \cdot \delta \\
&= k_\beta \delta \times \delta' \cdot \delta + \beta' \times (a\delta) \cdot \delta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\tau_\beta$  é uma constante. Usando a Proposição 2.2 sabemos que uma curva com curvatura e torção constantes é uma hélice circular. A menos de um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ , podemos então parametrizar  $\beta$  por

$$\beta(u) = (A \cos u, A \sin u, Bu),$$

com  $A^2 + B^2 = 1$ . Além disso,  $\delta$  é paralelo a  $\beta''$ , então  $\delta(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ , uma vez que  $\delta$  tem velocidade unitária. Seja  $A + v = \bar{v}$ . Obtemos então uma parametrização para o helicóide, a saber,  $\mathbf{x}(u, v) = (\bar{v} \cos u, \bar{v} \sin u, Bu)$ .

□

### 3.2 A Representação de Weierstrass-Enneper (WE)

Nesta seção,  $S$  denotará uma superfície mínima descrita por uma parametrização isotérmica  $\mathbf{x}(u, v)$ . Sejam  $z = u + iv$  um número complexo e  $\bar{z}$  o seu conjugado. Sendo  $u = \frac{z+\bar{z}}{2}$  e  $v = \frac{z-\bar{z}}{2}$ , podemos escrever

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})),$$

onde cada  $x^i(z, \bar{z})$  é uma função de variáveis complexas que assume valores reais. Lembrando que  $\frac{\partial x^i}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u^i - ix_v^i)$ , definimos  $\phi = U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(z, \bar{z}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (x_z^1, x_z^2, x_z^3).$$

Denotamos ainda  $(\phi)^2 = (x_z^1)^2 + (x_z^2)^2 + (x_z^3)^2$  e  $|\phi|^2 = |x_z^1|^2 + |x_z^2|^2 + |x_z^3|^2$ , onde  $|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$  é o módulo de  $z$ . Como

$$(x_z^i)^2 = \frac{1}{4}((x_u^i)^2 - (x_v^i)^2 - 2ix_u^i x_v^i),$$

temos

$$\begin{aligned}
 (\phi)^2 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 x_u^j x_v^j \right) \\
 &= \frac{1}{4} (|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 - 2i \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \\
 &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

pois  $\mathbf{x}(u, v)$  é uma parametrização isotérmica.

Reciprocamente, se  $(\phi)^2 = 0$ , então

$$\begin{aligned}
 0 = (\phi)^2 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 x_u^j x_v^j \right) \\
 &= \frac{1}{4} (|\mathbf{x}_u|^2 - |\mathbf{x}_v|^2 - 2i \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \\
 &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF).
 \end{aligned}$$

Assim,  $E - G = 0$  e  $2iF = 0$  e, portanto,  $E = G$  e  $F = 0$ , ou seja,  $\mathbf{x}$  é isotérmica.

**Proposição 3.3.** *Seja  $\phi : U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por (3.2). Então  $|\phi|^2 = \frac{E}{2} \neq 0$ .*

**Prova** Usando a definição, temos

$$\begin{aligned}
 |\phi|^2 &= |x_z^1|^2 + |x_z^2|^2 + |x_z^3|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{2}(x_u^1 - ix_v^1) \right|^2 + \left| \frac{1}{2}(x_u^2 - ix_v^2) \right|^2 + \left| \frac{1}{2}(x_u^3 - ix_v^3) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} [(x_u^1)^2 + (x_v^1)^2 + (x_u^2)^2 + (x_v^2)^2 + (x_u^3)^2 + (x_v^3)^2] \\
 &= \frac{1}{4} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) \\
 &= \frac{1}{2} E,
 \end{aligned}$$

uma vez que a parametrização  $\mathbf{x}$  é isotérmica.

□

O teorema a seguir estabelece uma conexão entre as superfícies mínimas e as funções de uma variável complexa.

**Teorema 3.3.** *Sejam  $S$  é uma superfície com parametrização  $\mathbf{x}$  e  $\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$  com  $(\phi)^2 = 0$  (i.e.,  $\mathbf{x}$  é isotérmica). Então  $S$  é mínima se, e somente se para cada  $i = 1, 2, 3$ ,  $\phi^i$  é holomorfa.*

**Prova** Se  $S$  é uma superfície mínima, então usando o Corolário 2.1 podemos garantir que  $\mathbf{x}$  é harmônica, isto é,  $\Delta \mathbf{x} = 0$ . Agora, usando a Proposição 2.10, temos

$$0 = \Delta \mathbf{x} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}.$$

Dessa forma, usando a Proposição 2.9, concluímos que  $\phi$  é holomorfa. A recíproca deste teorema é provada usando a recíproca de cada um dos resultados anteriores.

□

**Corolário 3.1.**  $x^j(z, \bar{z}) = c_j + 2Re \int \phi^j dz$ .

**Prova** Como  $z = u + iv$ , podemos escrever  $dz = du + idv$ . Então

$$\begin{aligned} \phi^j dz &= \frac{1}{2} [(x_u^j - ix_v^j)(du + idv)] = \frac{1}{2} [x_u^j du + x_v^j dv + i(x_u^j dv - x_v^j du)], \\ \bar{\phi}^j d\bar{z} &= \frac{1}{2} [(x_u^j + ix_v^j)(du - idv)] = \frac{1}{2} [x_u^j du + x_v^j dv - i(x_u^j dv - x_v^j du)]. \end{aligned}$$

Portanto,  $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial z} dz + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \phi^j dz + \bar{\phi}^j d\bar{z} = 2Re \phi^j dz$  e podemos agora integrar para obter  $x^j$ .

□

Desse modo, o problema de construir superfícies mínimas reduz-se a encontrar uma aplicação holomorfa  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  com  $\phi^2 = 0$ . Uma boa maneira de construir tal  $\phi$  é tomar uma função holomorfa  $f$  e uma função meromorfa  $g$  (com  $fg^2$  holomorfa) e escrever as funções coordenadas de  $\phi$  da seguinte maneira:

$$\phi^1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi^2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi^3 = fg.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
 (\phi)^2 &= (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 \\
 &= \frac{1}{4}f^2(1-g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1+g^2)^2 + f^2g^2 \\
 &= \frac{1}{4}(f^2 - 2f^2g^2 + g^4) - \frac{1}{4}(f^2 + 2f^2g^2 + g^4) + f^2g^2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Além disso,  $g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}$ . Com efeito, calculando  $\phi^1 - i\phi^2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \phi^1 - i\phi^2 &= \frac{1}{2}f(1-g^2) - i\frac{1}{2}f(1+g^2) = \frac{1}{2}f(1-g^2) + \frac{1}{2}f(1+g^2) \\
 &= \frac{1}{2}f(1-g^2+1+g^2) \\
 &= f.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\phi^3 = fg = (\phi^1 - i\phi^2)g \implies g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}.$$

Nas condições do Corolário 3.1 e da discussão acima, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.** (*Representação de Weierstrass-Enneper*) *Se  $f$  é holomorfa no domínio  $D$ ,  $g$  é meromorfa em  $D$  e  $fg^2$  é holomorfa em  $D$ , então uma superfície mínima é definida por  $\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$ , onde*

$$\begin{aligned}
 x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int f(1-g^2) dz, \\
 x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int if(1+g^2) dz, \\
 x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} 2 \int fg dz.
 \end{aligned}$$

Agora, suponha que  $g$  seja holomorfa e inversível em um domínio  $D$ . Suponha ainda que a inversa  $g^{-1}$  é holomorfa em  $D$ . Então, podemos considerar  $g$  como uma nova variável complexa  $\tau = g$  com  $d\tau = g'dz$ . Definindo  $F(\tau) = f/g'$  obtemos  $F(\tau)d\tau = f dz$ . Portanto, se substituirmos  $g$  por  $\tau$  e  $f dz$  por  $F(\tau)d\tau$ , obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 3.5** (II Representação de Weiertrass-Enneper). *Para qualquer função holomorfa  $F(\tau)$ , uma superfície mínima é definida pela parametrização*

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})),$$

onde

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2)F(\tau) d\tau, \\ x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int i(1 + \tau^2)F(\tau) d\tau, \\ x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} 2 \int \tau F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Note que, neste caso,

$$\phi = \left( \frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau), \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau), \tau F(\tau) \right).$$

Esta representação nos assegura que toda função holomorfa  $F(\tau)$  define uma superfície mínima. Mostraremos a seguir que as representações fornecem muitas informações relevantes sobre as superfícies mínimas correspondentes. A fim de examinar algumas superfícies mínimas do ponto de vista da Representação de WE, precisamos lembrar algumas das funções básicas da análise complexa. Para isso, escreva  $z = u + iv$  e defina

$$e^z = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) \quad \text{e} \quad \log z = \ln \sqrt{u^2 + v^2} + i \operatorname{arctg} \frac{v}{u}.$$

Utilizando a expressão para  $e^z$  acima, podemos definir

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \operatorname{cos} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{senh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \operatorname{cosh} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$



**Exemplo 3.7.** (Representação de WE da Catenoide) Seja  $F(\tau) = \frac{1}{2\tau^2}$ . Então, usando a substituição  $\tau = e^z$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 x^1 &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2) \frac{1}{2\tau^2} d\tau & x^2 &= \operatorname{Re} i \int (1 + \tau^2) \frac{1}{2\tau^2} d\tau & x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int \tau \frac{1}{2\tau^2} d\tau \\
 &= \operatorname{Re} \int \frac{1}{2\tau^2} - \frac{1}{2} d\tau d\tau & &= \operatorname{Re} \int i \left( \frac{1}{2\tau^2} + \frac{1}{2} \right) d\tau & &= \operatorname{Re} \int \frac{1}{\tau} d\tau \\
 &= -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\tau} + \frac{\tau}{2} \right) & &= -\operatorname{Re} i \left( \frac{1}{2\tau} - \frac{\tau}{2} \right) & &= \operatorname{Re} \ln \tau = \operatorname{Re} z \\
 &= -\operatorname{Re} \left( \frac{-e^{-z} + e^z}{2} \right) & &= -\operatorname{Re} i \left( \frac{-e^{-z} + e^z}{2} \right) & &= u. \\
 &= -\operatorname{Re}(\cosh z) & &= -\operatorname{Re} i(\sinh z) \\
 &= -\cosh u \cos v. & &= -\cosh u \sin v.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.8.** (Representação de WE da Helicoide) A representação associada a  $F(\tau) = \frac{i}{2\tau^2}$  é um helicoides. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 x^1 &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau & x^2 &= \operatorname{Re} i \int (1 + \tau^2) \frac{i}{2\tau^2} d\tau & x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int \tau \frac{i}{2\tau^2} d\tau \\
 &= \operatorname{Re} \int \frac{i}{2\tau^2} - \frac{i}{2} d\tau & &= -\operatorname{Re} \int \left( \frac{1}{2\tau^2} + \frac{1}{2} \right) d\tau & &= \operatorname{Re} i \int \frac{1}{\tau} d\tau \\
 &= -\operatorname{Re} \left( \frac{i}{2\tau} + \frac{i\tau}{2} \right) & &= -\operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2\tau} + \frac{\tau}{2} \right) & &= \operatorname{Re} i \ln \tau \\
 &= -\operatorname{Re} \left( \frac{i}{2}(e^{-z} + e^z) \right) & &= -\operatorname{Re} \left( \frac{-e^{-z} + e^z}{2} \right) & &= -v. \\
 &= -\operatorname{Re}(i \cosh z) & &= -\frac{1}{2}(e^u \cos v - e^{-u} \cos v) \\
 &= \frac{1}{2}(e^u \sin v - e^{-u} \sin v) & &= -\cos v \sinh u. \\
 &= \sin v \sinh u.
 \end{aligned}$$

Nos exemplos a seguir mostraremos representações do catenoide e do helicoides utilizando a I Representação de Weierstrass-Enneper.

**Exemplo 3.9.** Uma representação do catenoide é dada por  $(f, g) = \left( -\frac{e^{-z}}{2}, -e^z \right)$ . Com efeito, usando o Teorema 3.4, temos

$$\begin{aligned}
x^1 &= \operatorname{Re} \int f(1-g^2) dz & x^2 &= \operatorname{Re} \int if(1+g^2) dz & x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int fg dz \\
&= -\operatorname{Re} \int \frac{e^{-z}}{2} (1-e^{2z}) dz & &= -\operatorname{Re} \int i \frac{e^{-z}}{2} (1+e^{2z}) dz & &= \operatorname{Re} 2 \int \frac{e^{-z}}{2} (e^z) dz \\
&= -\operatorname{Re} \int \frac{e^{-z}}{2} - \frac{e^z}{2} dz & &= -\operatorname{Re} i \left( \frac{e^z}{2} - \frac{e^{-z}}{2} \right) & &= \operatorname{Re} \int 1 dz \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-z}}{2} + \frac{e^z}{2} \right) & &= \operatorname{Re} i \sinh z & &= \operatorname{Re} z \\
&= \operatorname{Re} \cosh z & &= \operatorname{sen} v \cosh u. & &= u. \\
&= \cos v \cosh u.
\end{aligned}$$

Com isto, concluímos que

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z})) = (\cos v \cosh u, \operatorname{sen} v \cosh u, u),$$

ou seja, o par  $(f, g)$  representa um catenoide.

**Exemplo 3.10.** O par  $(f, g) = \left(-i \frac{e^{-z}}{2}, -e^z\right)$  é uma representação do helicóide. De fato, utilizando o Teorema 3.4, obtemos

$$\begin{aligned}
x^1 &= \operatorname{Re} \int f(1-g^2) dz, & x^2 &= \operatorname{Re} \int if(1+g^2) dz, & x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int fg dz \\
&= -\operatorname{Re} \int \frac{-ie^{-z}}{2} (1-e^{2z}) dz & &= \operatorname{Re} \int \frac{e^{-z}}{2} (1+e^{2z}) dz & &= \operatorname{Re} 2 \int i \frac{e^{-z}}{2} (e^z) dz \\
&= -\operatorname{Re} i \int \frac{e^{-z}}{2} - \frac{e^z}{2} dz & &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^z}{2} - \frac{e^{-z}}{2} \right) & &= \operatorname{Re} \int i dz \\
&= -\operatorname{Re} i \left( -\frac{e^{-z}}{2} - \frac{e^z}{2} \right) & &= \operatorname{Re} \operatorname{senh} z & &= \operatorname{Re} iz \\
&= \operatorname{Re} i \cosh z & &= \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u & &= -v. \\
&= -\operatorname{sen} v \operatorname{senh} u
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (-\operatorname{sen} v \operatorname{senh} u, \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u, -v)$$

e, portanto, o par  $(f, g) = \left(-i \frac{e^{-z}}{2}, -e^z\right)$  representa um helicóide.

**Exemplo 3.11** (Representação da superfície de Catalan). *Mostraremos que  $F(\tau) = i\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^3}\right)$ ,*

*onde  $\tau = e^{\frac{z}{2}}$ , é uma representação da superfície de Catalan. Usando o Teorema 3.5, temos*

$$\begin{aligned}
 x^1 &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2)F(\tau)dz & x^2 &= \operatorname{Re} \int i(1 + \tau^2)F(\tau)dz & x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int \tau F(\tau) dz \\
 &= \operatorname{Re} \int i \left( \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\tau^3} - \tau \right) dz & &= -\operatorname{Re} \int \left( \tau - \frac{1}{\tau^3} \tau^2 \right) dz & &= \operatorname{Re} 2i \left( \tau - \frac{1}{\tau} \right) \\
 &= \operatorname{Re} i \left( 2 \ln \tau + \frac{1}{2\tau^2} - \frac{\tau^2}{2} \right) & &= -\operatorname{Re} \left( \frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{2\tau^2} \right) & &= \operatorname{Re} 2i (e^{iz/2} - e^{-iz/2}) \\
 &= \operatorname{Re} i \left( 2 \ln e^{i\frac{z}{2}} + \frac{e^{-iz}}{2} - \frac{e^{iz}}{2} \right) & &= -\operatorname{Re} \left( \frac{e^{iz}}{2} + \frac{e^{-iz}}{2} \right) & &= 4 \operatorname{sen} \left( \frac{u}{2} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{v}{2} \right). \\
 &= \operatorname{Re} (-z - \operatorname{senh} z) & &= -\operatorname{Re} (\operatorname{cosh} z) \\
 &= -u + \operatorname{sen} u \operatorname{cosh} v. & &= -\cos u \operatorname{cosh} v.
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a Representação  $F(\tau)$  fornece uma superfície dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( -u + \operatorname{sen} u \operatorname{cosh} v, -\cos u \operatorname{cosh} v, 4 \operatorname{sen} \left( \frac{u}{2} \right) \operatorname{senh} \left( \frac{v}{2} \right) \right),$$

ou seja, a chamada *superfície de Catalan*, ver Figura 16.

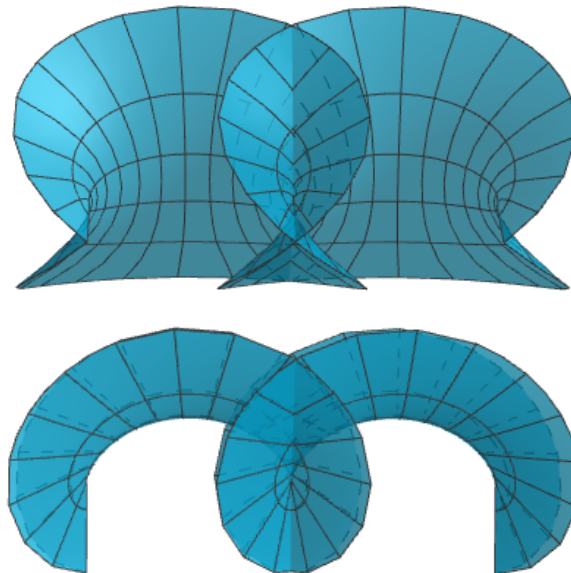


Figura 16: Superfície de Catalan

Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.12.** A Representação de WE associada a função  $F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$ , onde  $\tau = e^z$  é a chamada *superfície de Henneberg*, ver Figura 17. De fato, usando o Teorema 3.5, temos

$$\begin{aligned}
 x^1 &= \operatorname{Re} \int (1 - \tau^2) F(\tau) dz & x^2 &= \operatorname{Re} \int i(1 + \tau^2) F(\tau) dz \\
 &= \operatorname{Re} \int \left( 1 - \frac{1}{\tau^4} + \frac{1}{\tau^2} - \tau^2 \right) dz & &= \operatorname{Re} i \int \left( 1 - \frac{1}{\tau^4} - \frac{1}{\tau^2} + \tau^2 \right) dz \\
 &= \operatorname{Re} \left( \tau - \frac{1}{\tau} + \frac{1}{3\tau^3} - \frac{\tau^3}{3} \right) & &= \operatorname{Re} i \left( \tau + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^3}{3} \frac{1}{2\tau} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( e^z - e^{-z} - \frac{1}{3}(e^{3z} - e^{-z}) \right) & &= \operatorname{Re} \left( 2 \cosh z + \frac{2}{3} \cosh(3z) \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( 2 \sinh z - \frac{2}{3} \sinh(3z) \right) & &= -2 \operatorname{sen} v \operatorname{senh} u - \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3v) \operatorname{senh}(3u). \\
 &= 2 \cos v \operatorname{senh} u - \frac{2}{3} \cos(3v) \operatorname{senh}(3u).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int \tau F(\tau) dz \\
 &= \operatorname{Re} 2 \int \left( \tau - \frac{1}{\tau^3} \right) dz \\
 &= \operatorname{Re}(e^{2z} - e^{-2z}) \\
 &= 2 \cos(2v) \cosh(2u).
 \end{aligned}$$

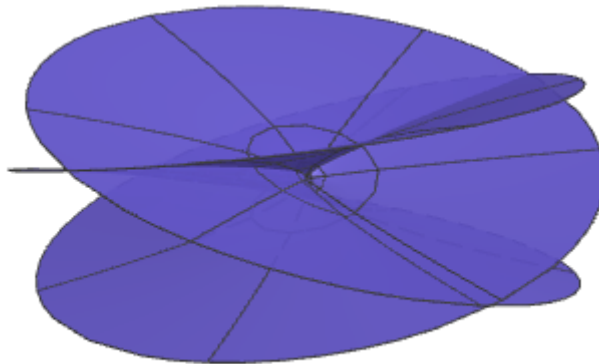


Figura 17: Superfície de Henneberg

Fonte: Autoria Própria

**Exemplo 3.13.** Neste exemplo, exibiremos a superfície  $\mathbf{x}(u, v)$  dada pela Representação de WE associada ao par  $(f, g) = (z^2, \frac{z^2}{2})$ . Utilizando o Teorema 3.4, obtemos

$$\begin{aligned}
 x^1 &= \operatorname{Re} \int f(1 - g^2) dz, & x^2 &= \operatorname{Re} \int if(1 + g^2) dz, & x^3 &= \operatorname{Re} 2 \int fg dz \\
 &= \operatorname{Re} \int z^2 \left(1 - \frac{1}{z^4}\right) dz, & &= \operatorname{Re} \int iz^2 \left(1 + \frac{1}{z^4}\right) dz, & &= \operatorname{Re} 2 \int 1 dz \\
 &= \operatorname{Re} \int \left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) dz, & &= \operatorname{Re} i \left(\frac{z^3}{3} - \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right), & &= \operatorname{Re}(2z) dz \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right), & &= \frac{v^3}{3} - u^2v - \frac{v}{u^2 + v^2}, & &= 2u. \\
 &= \frac{u^3}{3} - uv^2 + \frac{u}{u^2 + v^2}.
 \end{aligned}$$

A superfície dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{u^3}{3} - uv^2 + \frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v^3}{3} - u^2v - \frac{v}{u^2 + v^2}, 2u\right),$$

é chamada de superfície de Richmond, ver Figura 18.

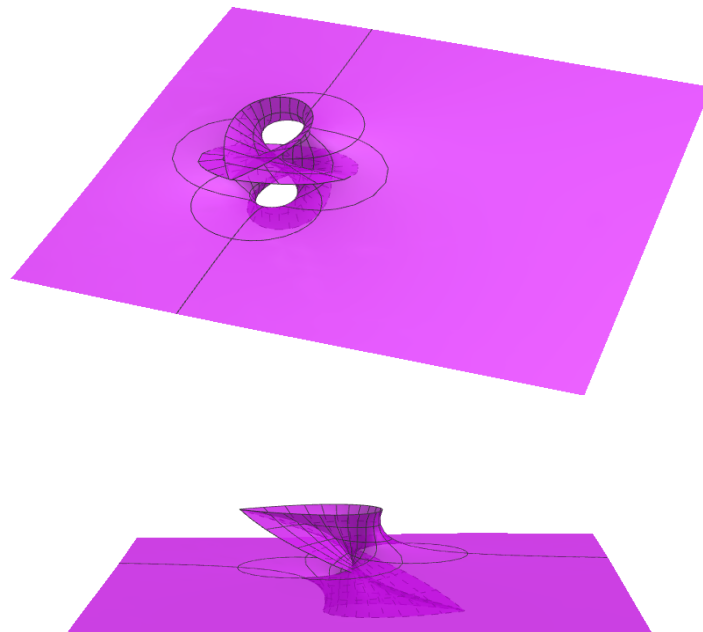


Figura 18: Superfície de Richmond

Fonte: Autoria Própria

Veremos agora como as funções das primeiras e segundas representações de Weierstras-Enneper podem fornecer informações relevantes acerca da superfície mínima que representa. Para isto, recordaremos que em termos das coordenadas isotérmicas, a curvatura Gaussiana  $K$  é dada por

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2E} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{E} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{E_u}{E} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2E} \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} \ln E + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \ln E \right) \\
&= -\frac{1}{2E} \Delta(\ln E),
\end{aligned}$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ . Usando a Proposição 3.3, sabemos que  $E = 2|\phi|^2$ .

Então  $\phi = (\frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau), \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau), \tau F(\tau))$  e

$$\begin{aligned}
E &= 2 \left[ \left| \frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau) \right|^2 + \left| \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau) \right|^2 + |\tau F(\tau)|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} |F|^2 [|\tau^2 - 1|^2 + |\tau^2 + 1|^2 + 4|\tau|^2].
\end{aligned}$$

Agora,  $\tau^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$ , então

$$|\tau^2 - 1|^2 = (u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2.$$

Analogamente,

$$|\tau^2 + 1|^2 = (u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2$$

e

$$4|\tau|^2 = 4(u^2 + v^2).$$

Com isto,

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}|F|^2 2[(u^2 - v^2)^2 + 1 + 4u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2] \\
 &= |F|^2[u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 1 + 2u^2 + 2v^2] \\
 &= |F|^2[1 + u^2 + v^2]^2.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, mostraremos em termos da representação  $(f, g)$  que  $E = |f|^2(1 + |g|^2)^2$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 E &= 2|\phi|^2 = 2 \left( \left| \frac{1}{2}f(1-g)^2 \right| + \left| \frac{i}{2}f(1+g)^2 \right| + |fg|^2 \right) \\
 &= \frac{|f|^2}{2} (|(1-g)^2| + |(1+g)^2| + 4|g|^2) \\
 &= \frac{|f|^2}{2} [(1 - \operatorname{Re} g^2)^2 + (\operatorname{Im} g^2)^2 + (1 + \operatorname{Re} g^2)^2 + (\operatorname{Im} g^2)^2 + 4|g|^2] \\
 &= \frac{|f|^2}{2} [2 + 2(\operatorname{Re} g^2)^2 + (\operatorname{Im} g^2)^2 + 4|g|^2] \\
 &= \frac{|f|^2}{2} (1 + 2|g|^2 + |g^2|^2) \\
 &= |f|^2(1 + |g|^2)^2.
 \end{aligned}$$

Em termos da II representação de Weierstrass-Enneper e da Proposição 3.3, podemos enunciar o teorema a seguir.

**Teorema 3.6.** *A curvatura Gaussiana da superfície mínima determinada pela II representação de Weierstrass-Enneper é*

$$K = \frac{-4}{|F|^2(1 + u^2 + v^2)^4}.$$

**Prova** Sabemos que  $\ln E = \ln |F|^2 + 2 \ln(1 + u^2 + v^2)$  em termos da II Representação. Apli-

cando o operador de Laplace, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(2\ln(1+u^2+v^2)) &= \frac{\partial^2 2\ln(1+u^2+v^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 2\ln(1+u^2+v^2)}{\partial v^2} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{2u}{1+u^2+v^2} \right) + 2\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{2v}{1+u^2+v^2} \right) \\
&= \frac{4(1+u^2+v^2) - 4u(2u) + 4(1+u^2+v^2) - 4u(2v)}{(1+u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{8}{(1+u^2+v^2)^2}.
\end{aligned}$$

Devemos agora calcular  $\Delta(\ln|F|^2)$ . Note que

$$\Delta(\ln|F|^2) = \Delta(\ln F \bar{F}) = \Delta(\ln F + \ln \bar{F}),$$

e conforme a Proposição 2.10, vimos que  $\Delta = 4\partial^2/\partial\bar{z}\partial z$ . Além disso, como  $F$  é holomorfa,  $\bar{F}$  não pode ser,  $\partial\bar{F}/\partial z = 0$  e, conseqüentemente,  $\partial\ln\bar{F}/\partial z = 0$ . Assim,

$$\Delta(\ln F) = 4\frac{\partial^2 \ln F}{\partial\bar{z}\partial z} = 4\frac{\partial(F'/F)}{\partial\bar{z}} = 0,$$

pois  $F, F'$  e, portanto,  $F'/F$  é holomorfa. Dessa forma,

$$\Delta(\ln|F|^2) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta(\ln E) = \frac{8}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

Pelos cálculos acima, segue que

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2E}\Delta(\ln E) \\
&= -\frac{8}{2|F|^2(1+u^2+v^2)^4} \\
&= -\frac{4}{|F|^2(1+u^2+v^2)^4}.
\end{aligned}$$

□



## 4 Considerações finais

Tratamos de alguns resultados interessantes acerca das Superfícies Mínimas, entre os quais destaca-se o resultado que afirma que toda superfície mínima e regrada em  $\mathbb{R}^3$  é localmente um helicóide ou um plano. Ao abordarmos a Representação Weierstrass-Enneper, um importante resultado para o desenvolvimento da Geometria Diferencial, obtivemos um método para obter superfícies mínimas e exploramos a conexão entre as superfícies mínimas e as funções de uma variável complexa. Dessa forma, a fim de compreender tais resultados, fez-se necessário recordar uma série de resultados estudados em algumas disciplinas da graduação, entre as quais: Cálculo em Variáveis Reais, Cálculo em uma Variável Complexa, Introdução à Geometria Diferencial e Análise no  $\mathbb{R}^n$ . Este trabalho proporcionou, assim, o contato com um tema muito rico visto a sua interdisciplinaridade.

## Referências

- [1] Apostol, Tom M. *Calculus II*, 1.ed. Barcelona: Reverté, 1984.
- [2] Carmo, Manfredo Perdigão do *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] Lima, Elon Lages *Análise real*, v.2, 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [4] Oprea, John *Differential Geometry and its Applications*, 2.ed. Washington: MAA, 2007.
- [5] Soares, Márcio G. *Cálculo em uma Variável Complexa*, 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.