

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO MATEMÁTICA LICENCIATURA

LARISSA KAROLINE CÂNDIDO DOS SANTOS

**Resoluções visuais e materiais
didático-pedagógicos lúdicos no ensino de
Matemática na Educação Básica**

Maceió
2019

LARISSA KAROLINE CÂNDIDO DOS SANTOS

**Resoluções visuais e materiais didático-pedagógicos lúdicos
no ensino de Matemática na Educação Básica**

*Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso Matemática Licenciatura do Insti-
tuto de Matemática da Universidade Federal de
Alagoas como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva*

Maceió
2019

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecário Responsável: Marcelino de Carvalho

S237r Santos, Larissa Karoline Cândido dos.
Resoluções visuais e materiais didático-pedagógicos lúdicos no ensino de matemática na educação básica / Larissa Karoline Cândido dos Santos. – 2019. 52 f. : il.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Curso Matemática Licenciatura. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 49-52.

1. Educação básica. 2. Ludicidade. 3. Resolução de problemas. 4. Álgebra. 5. Geometria. 6. Trigonometria. I. Título.

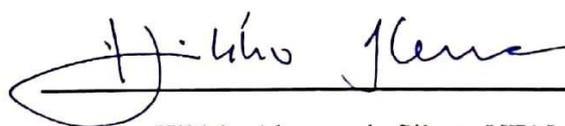
CDU:51:373.3

Folha de Aprovação

AUTORA: LARISSA KAROLINE CÂNDIDO DOS SANTOS

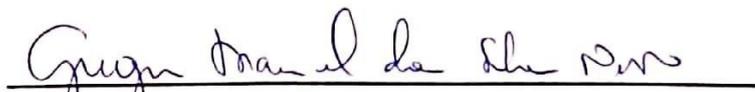
(Resoluções visuais e materiais didático-pedagógicos lúdicos no ensino de Matemática na Educação Básica / trabalho de conclusão do curso Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, na forma normalizada e de uso obrigatório)

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática, aprovado em 29 de maio de 2019.



Dr. Hilário Alencar da Silva - UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:



Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Examinador Interno)



Dr. André Luiz Flores - UFAL (Examinador Interno)

Aos meus pais e à memória da minha avó Maria José.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Hilário Alencar pelas diretrizes acadêmicas e pessoais ao longo desses 3 anos, inclusive por sua dedicação e paciência durante a orientação dos artigos incluídos neste trabalho de conclusão de curso.

Ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática – INCTMat/CNPq – pelo financiamento da bolsa de iniciação científica durante o período de janeiro de 2017 a maio de 2019.

RESUMO

O presente trabalho é uma coletânea de três artigos. O primeiro artigo foi escrito em colaboração com Hilário Alencar e Milena Farias. Os outros dois artigos foram escritos em colaboração com Milena. No primeiro artigo construímos resoluções visuais de alguns problemas de Matemática, envolvendo álgebra, geometria e trigonometria, que são conhecidos na Educação Básica. No segundo artigo expomos a experiência dos egressos do Profmat na Ufal que lecionam Matemática em Alagoas e utilizam materiais didático-pedagógicos lúdicos como recurso didático. No último artigo exibimos uma solução visual para o seguinte problema: Qual a relação entre a área do quadrado inscrito num semicírculo e a área do quadrado inscrito num círculo de mesmo raio?

Palavras-chave: Educação Básica. Materiais lúdicos. Resoluções visuais. Álgebra. Geometria. Trigonometria.

ABSTRACT

The present work is a collection of three articles. The first article was written in collaboration with Hilario Alencar and Milena Farias. The other two articles were written in collaboration with Milena. In the first article we constructed visual resolutions of some mathematical problems, involving algebra, geometry and trigonometry, which are known in Basic Education. In the second article we present the experience of Profmat graduates at Ufal who teach Mathematics in Alagoas and use ludic didactic-pedagogical materials as a didactic resource. In the last article we present a visual solution to the following problem: What is the relation between the area of the square inscribed in a semicircle and the area of the square inscribed in a circle of the same radius?

Keywords: Basic Education. Ludic materials. Visual resolutions. Algebra. Geometry. Trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Resolução visual para o Teorema de Pitágoras	16
1.2	Resolução visual para a soma dos n primeiros números ímpares	17
1.3	Resolução visual para o complemento de quadrados	18
1.4	Resolução visual para a desigualdade entre média aritmética e geométrica	20
1.5	Resolução visual para o seno da diferença de dois ângulos	21
1.6	Resolução visual para a série geométrica	22
1.7	Resolução visual para a tangente da soma de dois ângulos	23
1.8	Resolução visual para o cosseno do arco duplo	24
1.9	Resolução visual para o seno do arco duplo	25
1.10	Resolução visual para a tangente da diferença entre dois ângulos	26
1.11	Resolução visual para uma propriedade das proporções	27
1.12	Resolução visual para a lei dos cossenos	29
2.1	Rede de ensino em que os egressos do Profmat na Ufal lecionam em Alagoas	37
2.2	Materiais didático-pedagógicos lúdicos que os egressos utilizam em suas aulas	40
2.3	Avaliação do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos pelos egressos	41
2.4	Existência de melhorias no processo de ensino a partir do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos pelos egressos	41
2.5	Avaliação dos egressos sobre o processo de ensino-aprendizagem com o uso dos materiais didático-pedagógicos lúdicos	42
2.6	Conhecimentos matemáticos mais valorizados por meio do uso dos materiais didático-pedagógicos lúdicos	42
2.7	Nível de ensino cuja utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos é mais adequada	43
2.8	Fontes de informação dos egressos acerca da utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos	44
2.9	Nível de conhecimento dos egressos quanto à utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos	44
2.10	Nível de conhecimento obtido durante o Profmat sobre a utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos	45
3.1	Quadrado inscrito num semicírculo	47
3.2	Quadrado inscrito num círculo	47
3.3	Quadrado inscrito num círculo e triângulos congruentes	48

LISTA DE TABELAS

2.1	Metas e resultados do Ideb na rede pública de Alagoas	32
-----	---	----

LISTA DE QUADROS

2.1	Lista de perguntas do questionário e tipo de questão	34
-----	--	----

SUMÁRIO

1	Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da educação básica	13
1.1	Introdução	13
1.2	Problemas de matemática e suas resoluções visuais	16
1.3	Conclusão	29
2	Uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos por egressos do Profmat e sua influência no aprendizado em Matemática em Alagoas	31
2.1	Introdução	31
2.2	Metodologia	33
2.3	Egressos do Profmat em Alagoas	36
2.4	Uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos em matemática como recurso didático	37
2.5	Resultados e discussões	39
2.6	Conclusões	45
3	Uma demonstração visual	47

INTRODUÇÃO

Na seção 1 apresentamos “Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da Educação Básica”, artigo publicado na Revista Professor de Matemática Online (PMO), v. 7, n° 1, 2019, p. 1–18, o qual foi escrito em colaboração com Hilário Alencar e Milena Farias. Essa seção, foi embasada no livro *Problem-Solving Through Problems*, onde Loren C. Larson propôs doze estratégias para a resolução de problemas. Inspirados no planejamento recomendado, construímos resoluções de alguns problemas de Matemática, envolvendo álgebra, geometria e trigonometria, que são conhecidos na Educação Básica. Observamos que das estratégias apresentadas, foram utilizadas com maior predominância a segunda, sexta e sétima estratégias, que são, respectivamente, trace uma figura, explore as simetrias e divida em casos. Dessa forma, no decorrer dessa seção, apresentamos o que denominamos de “resolução visual” para uma série de problemas, mediante uma sequência de figuras.

Na seção 2 exibimos “Uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos por egressos do Profmat e sua influência no aprendizado em Matemática em Alagoas”, artigo aceito para publicação na Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa), o qual foi escrito em colaboração com Milena Farias, sob a orientação de Hilário Alencar. Essa seção, relata a experiência dos egressos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) na Ufal que lecionam Matemática em Alagoas e utilizam materiais didático-pedagógicos lúdicos (ábaco, atividades de corte, colagem ou dobradura, jogos, material dourado, sólidos geométricos, tangram, *softwares*, entre outros) em suas aulas. Assim, com a aplicação de um questionário eletrônico, fomos capazes de apontar resultados positivos na prática pedagógica dos egressos – como a motivação de seus alunos – mediante o uso de tais materiais. Além disso, embora o Profmat não tenha atividades específicas acerca do uso desses recursos didáticos, os egressos do Profmat na Ufal foram influenciados pelo Programa para utilizar tais materiais.

Na seção 3 apresentamos “Uma demonstração visual”, artigo aceito para publicação na Revista do Professor de Matemática (RPM), v. 99, 2019, p. 31, o qual foi escrito em colaboração com Milena Farias, sob a orientação de Hilário Alencar. Nessa última seção, ressaltamos a importância da visualização geométrica. A fim de alcançar o objetivo proposto, exibimos uma solução visual para o seguinte problema: Qual a relação entre a área do quadrado inscrito num semicírculo e a área do quadrado inscrito num círculo de mesmo raio?

1. RESOLUÇÕES VISUAIS DE ALGUNS PROBLEMAS DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1.1. Introdução

O conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas é denominado *heurística*, do grego *heuristiké*. Essencialmente, essa palavra significa a arte de encontrar, descobrir. Esse tema é fértil em publicações de textos, artigos, teses e dissertações; como por exemplo, [16], [20], [31], [32], [33], [37] e [38].

Neste trabalho consideraremos *problema* como descrito por A. H. Schoenfeld, ver [37], isto é, uma proposição não resolvida, que constitui um desafio e oferece algum grau de dificuldade para aquele que se propõe a resolvê-la. De fato, Schoenfeld diferencia problema e exercício. Um *exercício* é uma proposição não resolvida que pode ser solucionada usando procedimentos de rotina, sem que haja a necessidade de raciocínios mais elaborados. Vale observar ainda que uma proposição pode ser um problema para um indivíduo e, ao mesmo tempo, ser um mero exercício para outro. Por exemplo, encontrar o triângulo de área máxima dentre todos os triângulos inscritos em um círculo dado é um problema para aqueles alunos que têm conhecimento apenas de Matemática em termos de Ensino Médio, mas é um exercício de rotina para universitários que conhecem o cálculo e sabem maximizar funções de várias variáveis.

Em Matemática os problemas surgem, ver [31], a partir de:

- Uma questão concreta da realidade envolvendo outras ciências;
- Uma questão proposta após observar exemplos de situações simples que possuem soluções;
- Generalizações de resultados demonstrados em situações diferentes.

Um problema em Matemática deve ter uma clareza no seu enunciado e, além disso, suas hipóteses são completamente essenciais na sua resolução. Ademais, a originalidade e a complexidade cristalina das técnicas envolvidas na solução caracterizam sua importância na Matemática. A tentativa de solucionar um problema conduz ao desenvolvimento intelectual, além de potencializar habilidades como o raciocínio lógico, tenacidade, disciplina, paciência, visão geométrica, entre outras.

A resolução de um problema em Matemática pressupõe um conhecimento científico e é resultado de uma investigação metódica, onde se observam fortemente as suposições postas na questão, isto é, as *hipóteses* do problema. De fato, um caminho para a descoberta de novos resultados em Matemática requer, em geral, que teorias sejam desenvolvidas na medida em que os conceitos estão sendo introduzidos, uso de resultados já provados, observação de exemplos existentes sobre o problema e determinação de suas propriedades.

Em [20], são listadas doze estratégias para a resolução de problemas. Diferentemente de [31], o autor não lista um roteiro a ser seguido, nem regras gerais sobre como proceder na resolução de problemas matemáticos, mas apresenta as principais estratégias usadas na resolução

de problemas. Larson, deixa claro que essa lista não esgota todas as possibilidades de estratégias de um problema, isto é, existirão problemas nos quais as estratégias citadas não poderão ser aplicadas.

No que segue, faremos uma breve descrição de cada uma das doze estratégias.

1. Procure por um padrão.

Virtualmente, todos os resolvidores de problemas iniciam sua análise gerando um sentimento sobre o problema, convencendo-se sobre a plausibilidade do resultado. Isso é feito da melhor maneira examinando-se os casos particulares mais imediatos. Quando essa exploração é empreendida de um modo sistemático, os padrões podem emergir e irão inspirar ideias sobre como proceder na resolução do problema.

2. Trace uma figura.

Sempre que possível é útil descrever um problema de forma pictórica, o que pode ser uma figura, um diagrama ou um grafo, por exemplo. A representação por diagramas geralmente torna mais fácil a assimilação de dados relevantes e a percepção de relações e dependências.

3. Formule um problema equivalente.

Nem sempre um problema pode ser resolvido diretamente, seja porque os cálculos tornam-se muito complicados ou porque o problema simplesmente não possui casos especiais que lancem qualquer visão sobre uma possível resolução. Nesse caso, é recomendável tentar reformular o problema para que tenha uma forma mais simples, mas ainda equivalente ao problema original e, para isso, apela-se para a imaginação e criatividade de cada um. Algumas dessas técnicas envolvem manipulações algébricas ou trigonométricas, mudança de variáveis e reinterpretação do problema em outros contextos (álgebra, geometria, combinatória etc).

4. Modifique o problema.

No decorrer do trabalho para a resolução do problema A, podemos ser levados a considerar o problema B. De um modo característico, essa mudança de problemas ocorre pelo uso das frases “É suficiente mostrar que ...”, ou “Podemos assumir que ...”, ou ainda “Sem perda de generalidade ...”.

5. Escolha uma notação efetiva.

Um dos primeiros passos ao se trabalhar em um problema de Matemática é traduzir esse problema. Inicialmente, todos os conceitos-chave devem ser identificados e rotulados. As redundâncias na notação podem ser eliminadas à medida que novas relações são descobertas.

6. Explore as simetrias.

A presença de simetria em um problema normalmente significa a redução de trabalho na resolução do problema. Por exemplo, ao realizarmos o produto $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ vemos que ambas as parcelas são simétricas com relação aos símbolos a , b e c , ou seja, se realizarmos uma permutação qualquer entre os símbolos a , b e c , a expressão permanece inalterada. Assim é de se esperar que, se o termo a^3 aparece no

produto, os fatores b^3 , c^3 também apareçam. Se a^2b aparecer, os termos a^2c , ab^2 , ac^2 , b^2c , bc^2 também deverão aparecer com os mesmos coeficientes.

7. Divida em casos.

Frequentemente pode acontecer de um problema ser dividido em um pequeno número de subproblemas. Isso é especialmente verdade quando o problema contém um quantificador universal ('para todo x ...'). Por exemplo, na prova de uma proposição da forma 'para todos os inteiros...', podemos provar separadamente os casos de inteiros pares e ímpares. De modo similar, um teorema sobre triângulos pode ser demonstrado separando os casos em que ele é agudo, retângulo ou obtuso. Às vezes, os subproblemas podem ser organizados hierarquicamente em submetas de tal forma que a solução possa ser realizada em sucessivos estágios.

8. Raciocine de trás para frente.

Raciocinar de trás para frente significa assumir a conclusão e então deduzir fatos dessa conclusão até aparecer algo que possa ser facilmente demonstrado. Depois de chegar às hipóteses ou a algo conhecido, revertamos os passos do argumento e seguimos na ordem original (começando das hipóteses e terminando na afirmação do problema).

9. Argumente por contradição.

Argumentar por contradição significa assumir que a conclusão é falsa e então derivar raciocínios até se deparar com uma afirmação que contradiz a hipótese (forma contrapositiva), ou algo que sabemos ser verdadeiro (*reductio ad absurdum* ou redução ao absurdo). Dessa forma, por exemplo, para demonstrar que raiz quadrada de 2 é irracional, podemos assumir que ela é racional e derivar daí um absurdo. Esse método é frequentemente apropriado quando a conclusão é facilmente negável, quando a hipótese fornece poucas informações para manipulação ou quando existe uma escassez de ideias sobre como proceder na solução do problema.

10. Procure por paridade.

Muitos problemas podem ser resolvidos observando a invariância da paridade e imparidade dos números inteiros que aparecem nas informações do problema.

11. Considere os casos extremos.

Nos estágios iniciais da exploração do problema, frequentemente é útil considerar as consequências da variação dos parâmetros entre casos extremos. Isso ocorre frequentemente com o uso das frases "Na pior (melhor) das hipóteses ..." e "No pior (melhor) dos casos ...".

12. Generalize.

Isto pode parecer paradoxal, mas é frequente o caso em que um problema pode ser simplificado e tornado mais tratável e inteligível depois de generalizado. Esse fato é bem apreciado por matemáticos. Com efeito, generalizações são características básicas da Matemática. Uma abordagem mais geral fornece uma perspectiva mais clara, elimina informações não essenciais e providencia um arsenal inteiro de novas técnicas.

O uso de estratégias para resoluções de problemas de Matemática é foco de muitas pesquisas, como por exemplo, [1], [17], [18], [19], [22], [26], [31], [40] e [43]. Neste artigo construímos, inspirados nessas pesquisas, resoluções de alguns problemas de Matemática, os quais são apresentados na Educação Básica, envolvendo álgebra, geometria e trigonometria. Para resolver os problemas propostos, utilizamos predominantemente a segunda estratégia listada por Larson, isto é, “trace uma figura”, bem como a sexta estratégia “explore as simetrias” e a sétima estratégia “divida em casos”. De fato, a resolução visual de cada problema é dada por uma sequência de figuras.

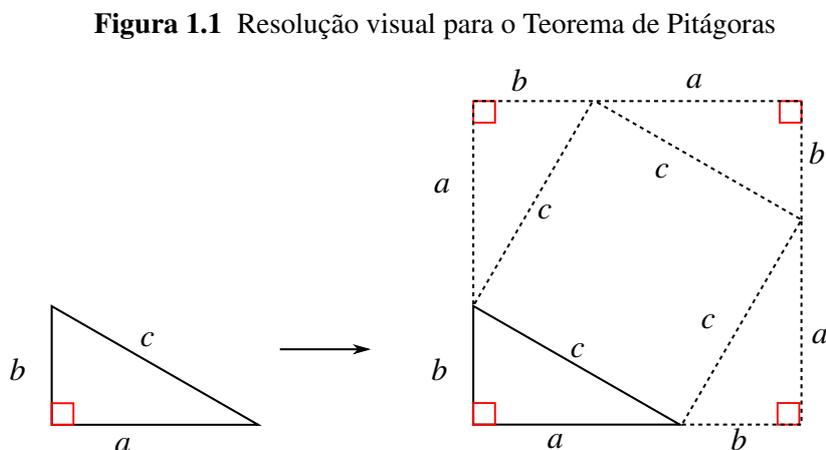
Agradecimentos. Os autores são gratos a Carmen Vieira Mathias e Leticia Rangel pelos comentários e sugestões.

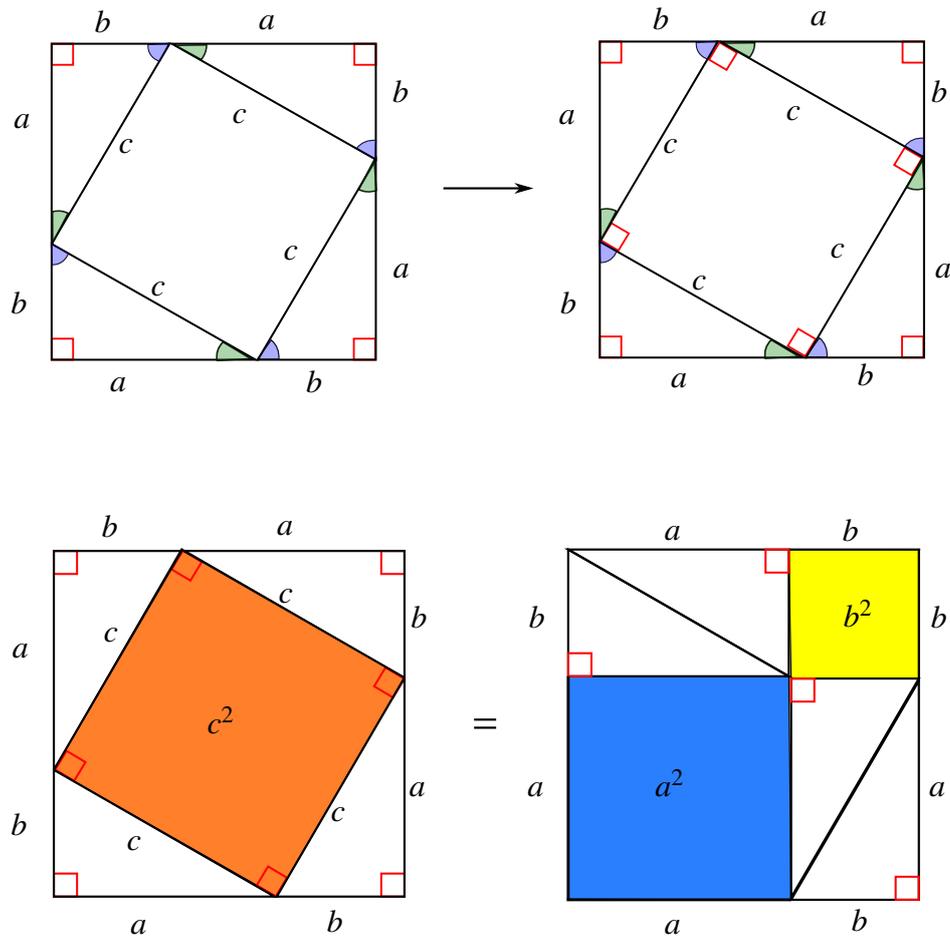
1.2. Problemas de matemática e suas resoluções visuais

Nesta seção apresentamos resoluções de alguns problemas de Matemática, que geralmente são contemplados na Educação Básica.

A primeira resolução visual que apresentamos refere-se ao Teorema de Pitágoras. Nesse caso, consideramos um triângulo retângulo de lados a , b e c (Figura 1.1). Assim, a Figura 1.1 ilustra a sequência de passos necessários para obter a resolução do problema proposto, isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



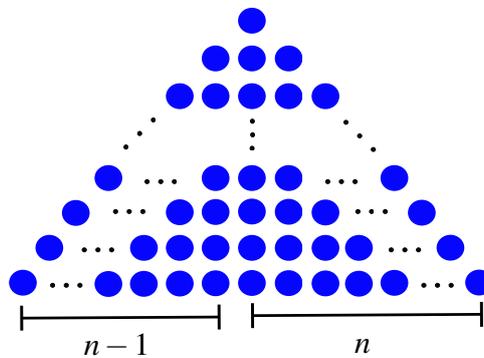


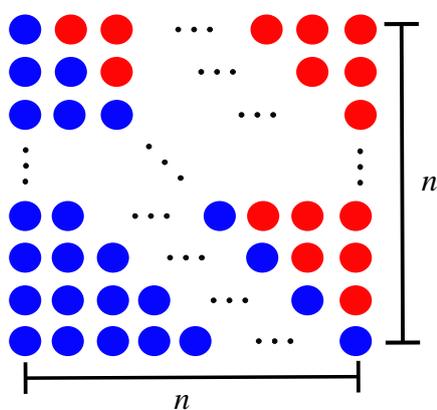
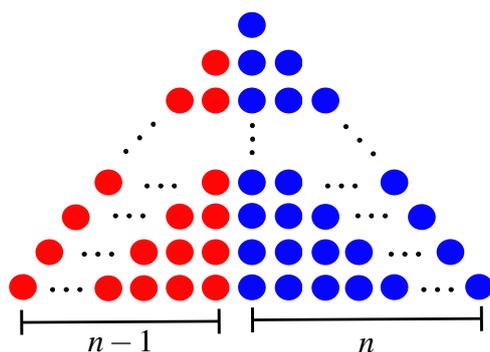
Fonte: Autoria própria

Considerando n um número natural, a Figura 1.2 ilustra como é possível mostrar que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Figura 1.2 Resolução visual para a soma dos n primeiros números ímpares





Fonte: Autoria própria

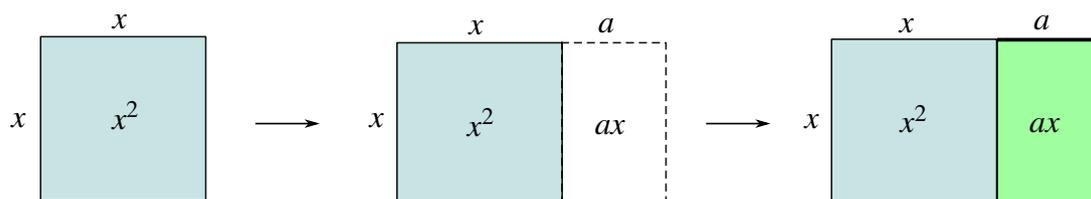
O terceiro problema proposto refere-se ao completamento de quadrados, ou seja,

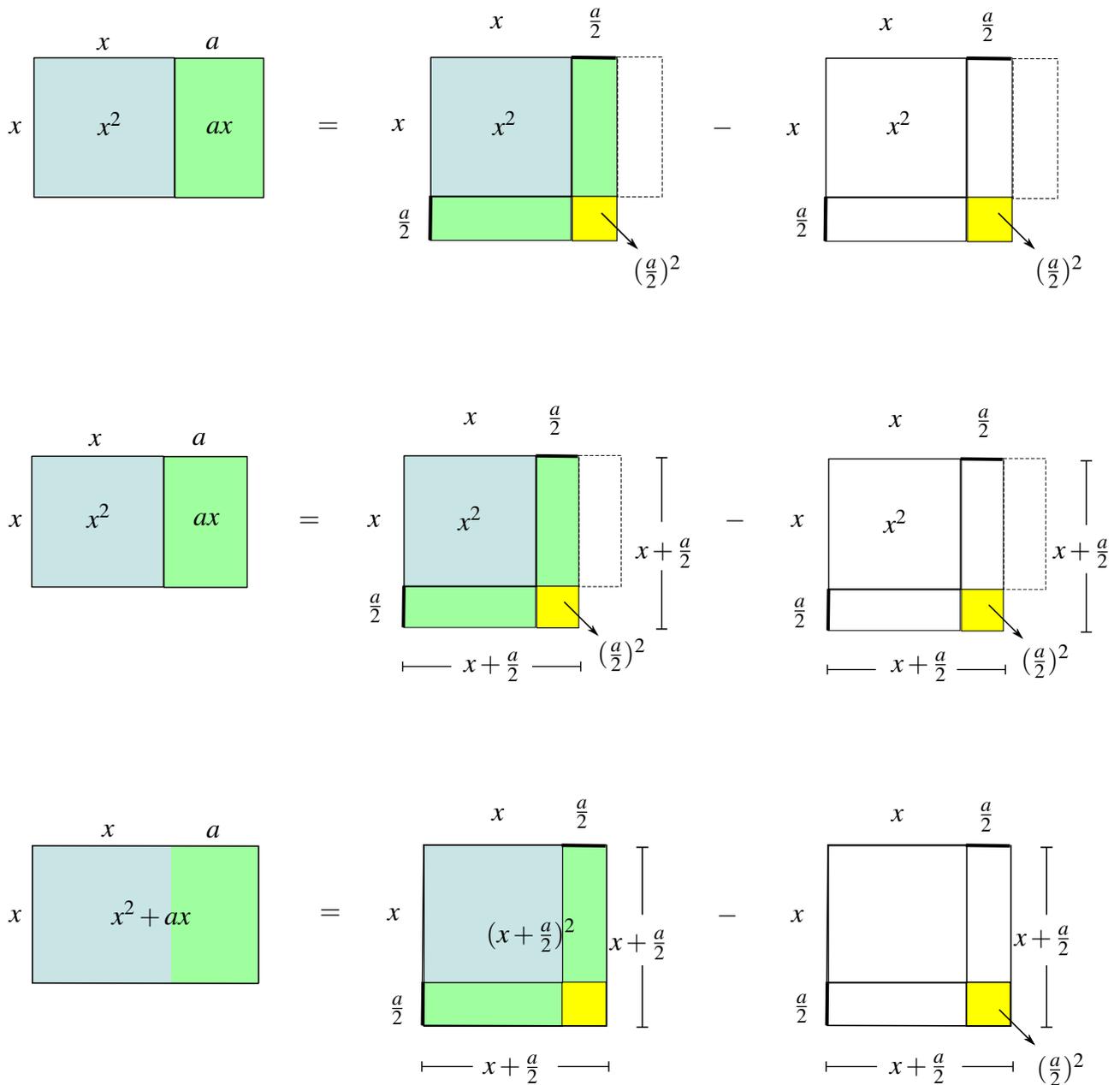
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

onde $x > 0$ e $a > 0$.

Mostramos (Figura 1.3) como tal algebrismo torna-se viável ao utilizar somente figuras.

Figura 1.3 Resolução visual para o completamento de quadrados





Fonte: Autoria própria

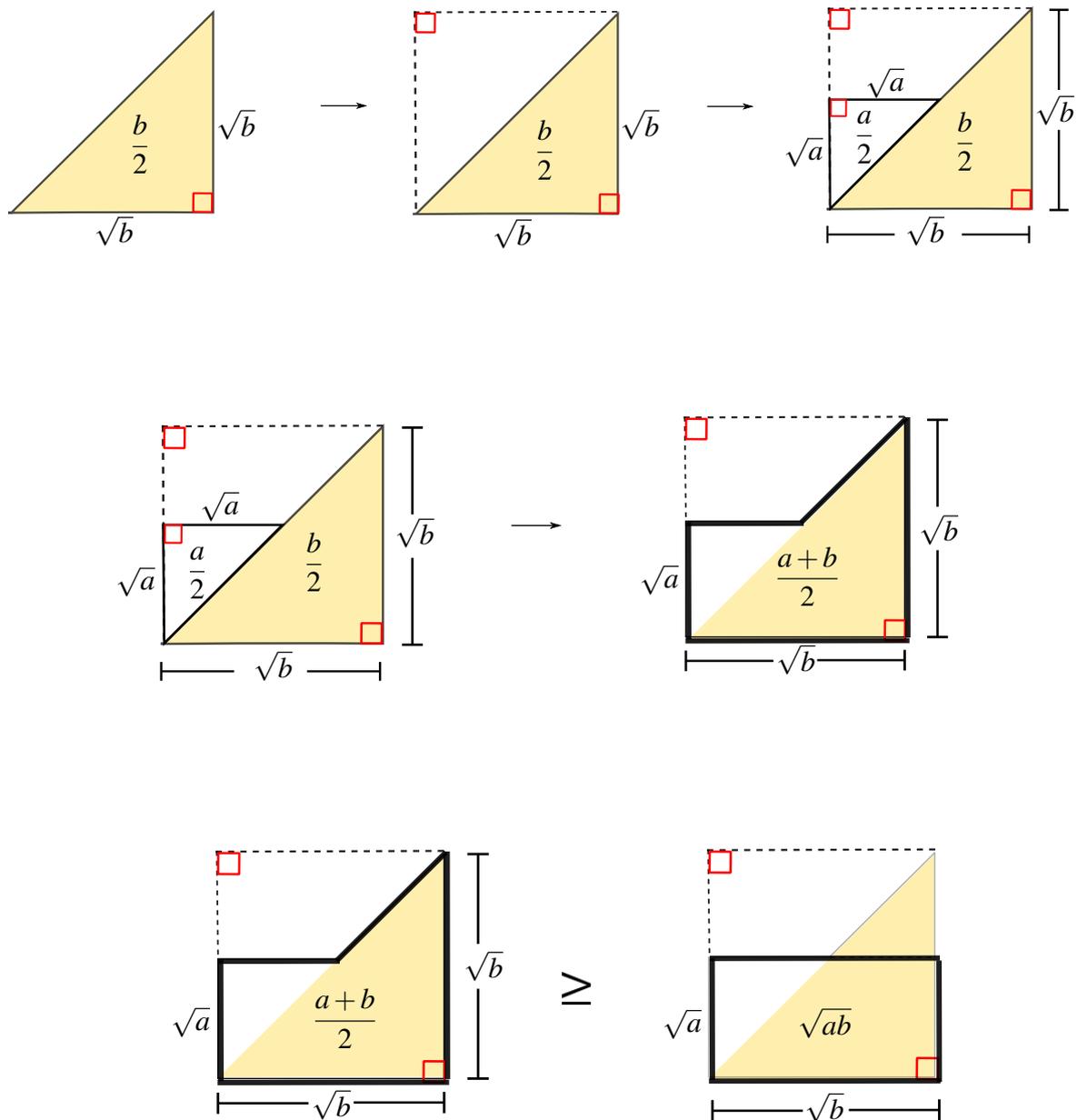
A próxima resolução visual que apresentamos concerne a desigualdade entre média aritmética e geométrica, isto é,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $a < b$.

Ilustramos a resolução desta desigualdade com uma sequência de figuras (Figura 1.4).

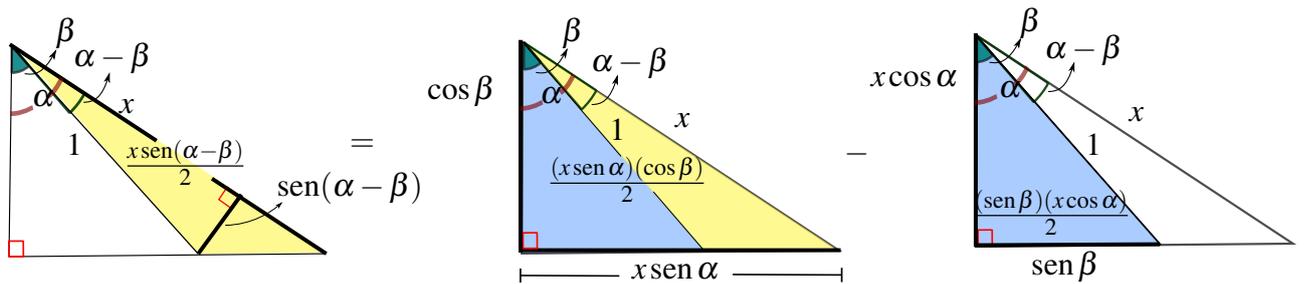
Figura 1.4 Resolução visual para a desigualdade entre média aritmética e geométrica



Fonte: Autoria própria

Dados dois ângulos α e β tais que $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, apresentamos na Figura 1.5 a resolução visual para o seno da diferença de dois ângulos, isto é,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$



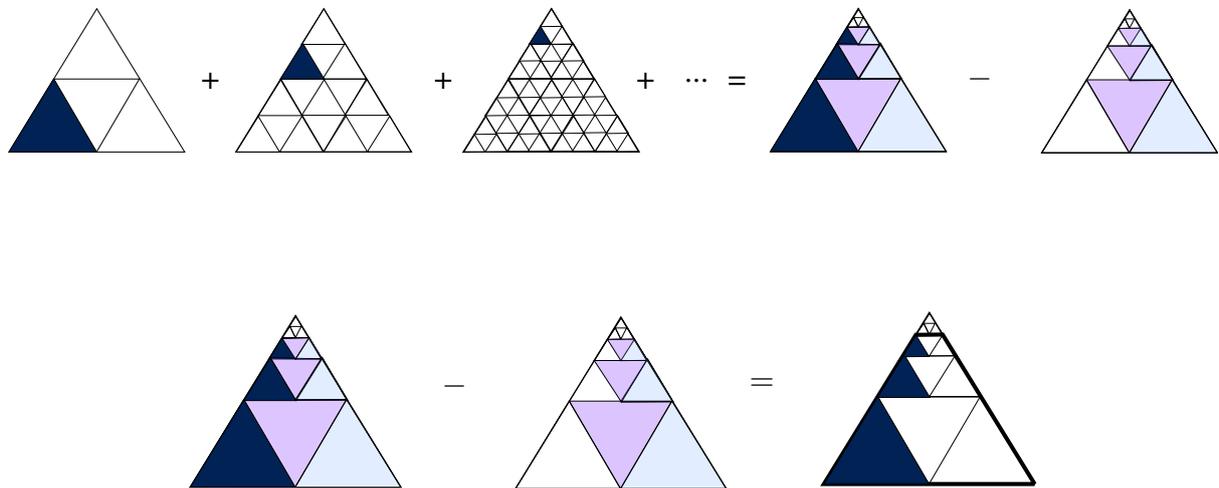
Fonte: Autoria própria

Uma interessante série geométrica é dada por

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}.$$

Usando figuras triangulares, exibimos uma resolução visual para esse problema, ver Figura 1.6.

Figura 1.6 Resolução visual para a série geométrica

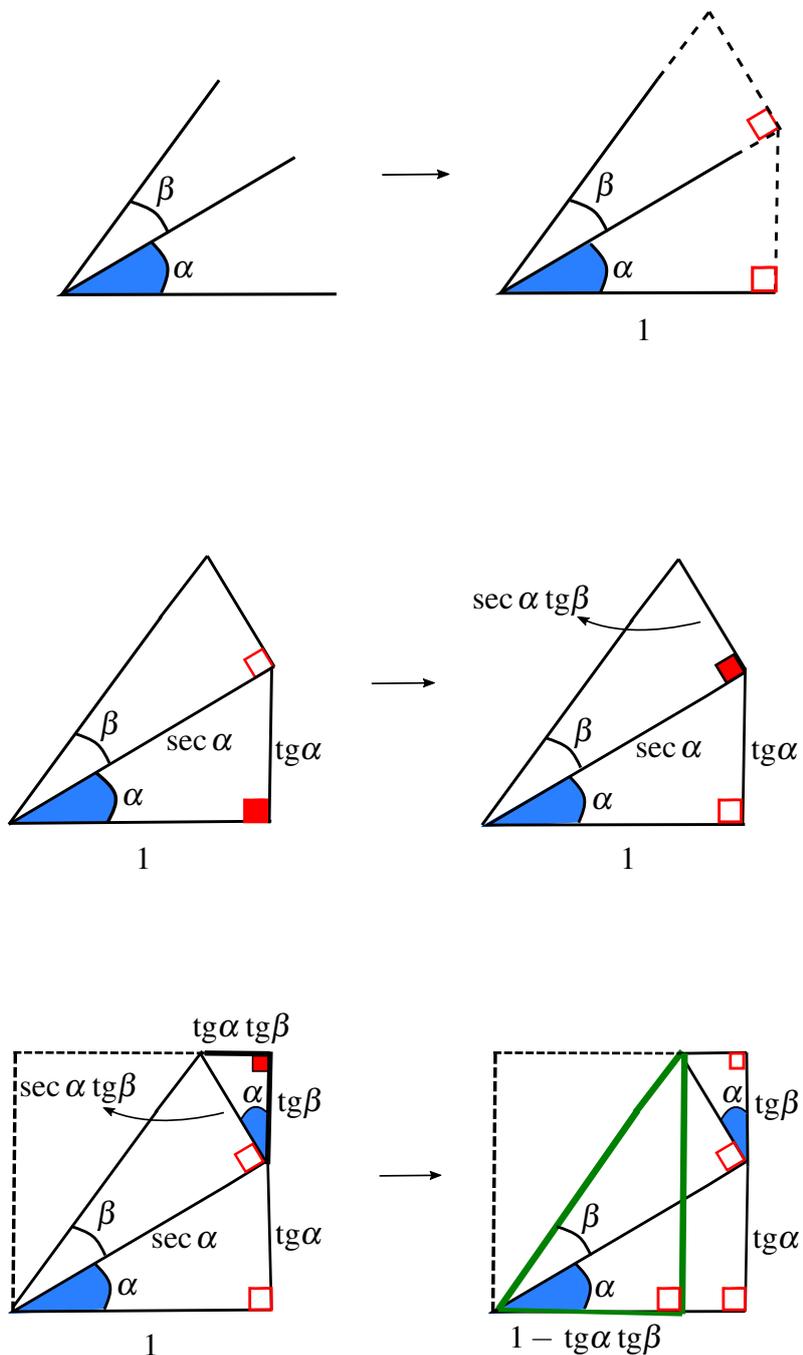


Fonte: Autoria própria

Sejam α e β dois ângulos tais que $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Apresentamos na Figura 1.7 a resolução visual para a tangente da soma de dois ângulos, isto é,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Figura 1.7 Resolução visual para a tangente da soma de dois ângulos

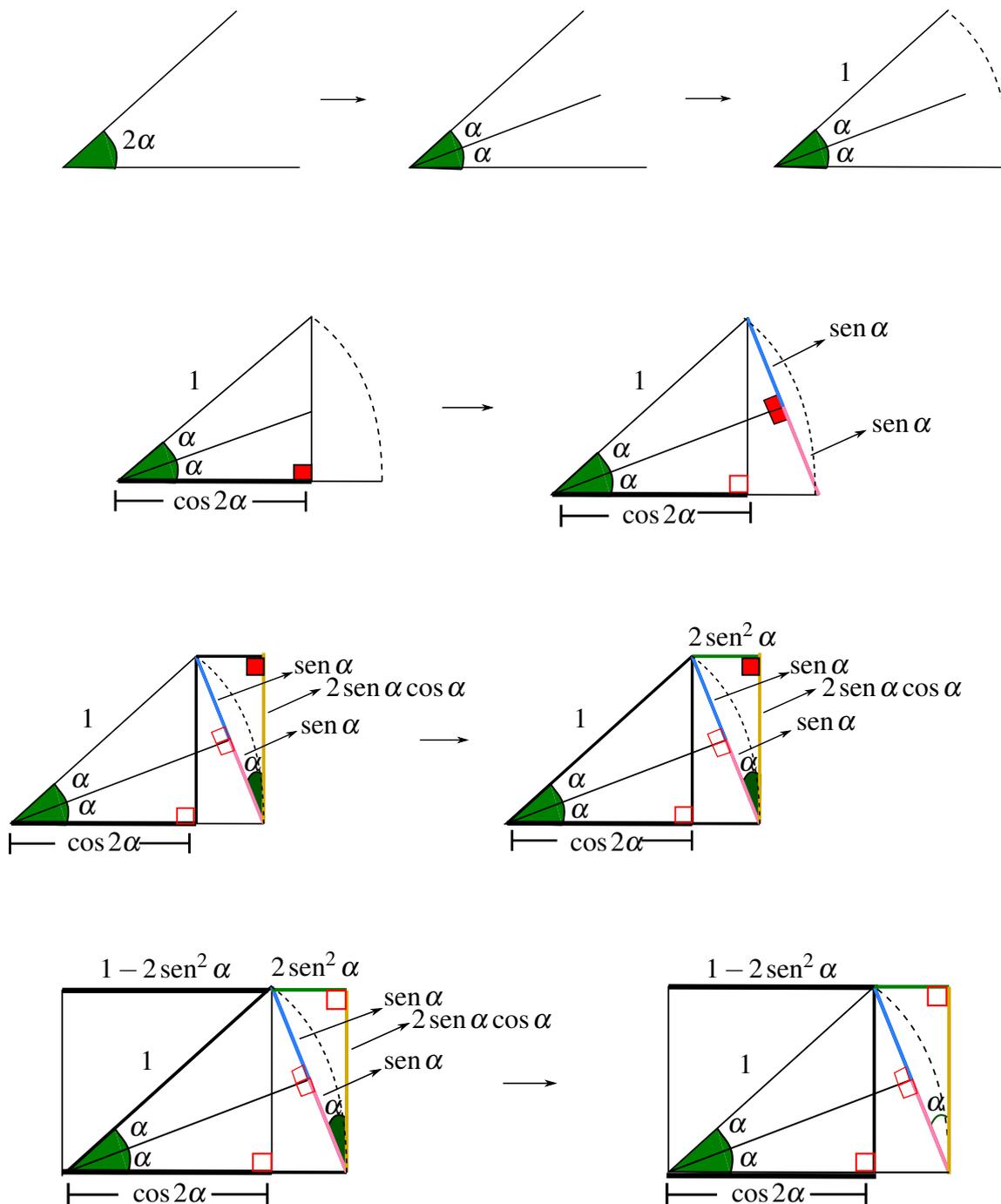


Fonte: Autoria própria

Considerando um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, mostramos uma resolução visual, ver Figura 1.8, para o cosseno do arco duplo, isto é,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Figura 1.8 Resolução visual para o cosseno do arco duplo

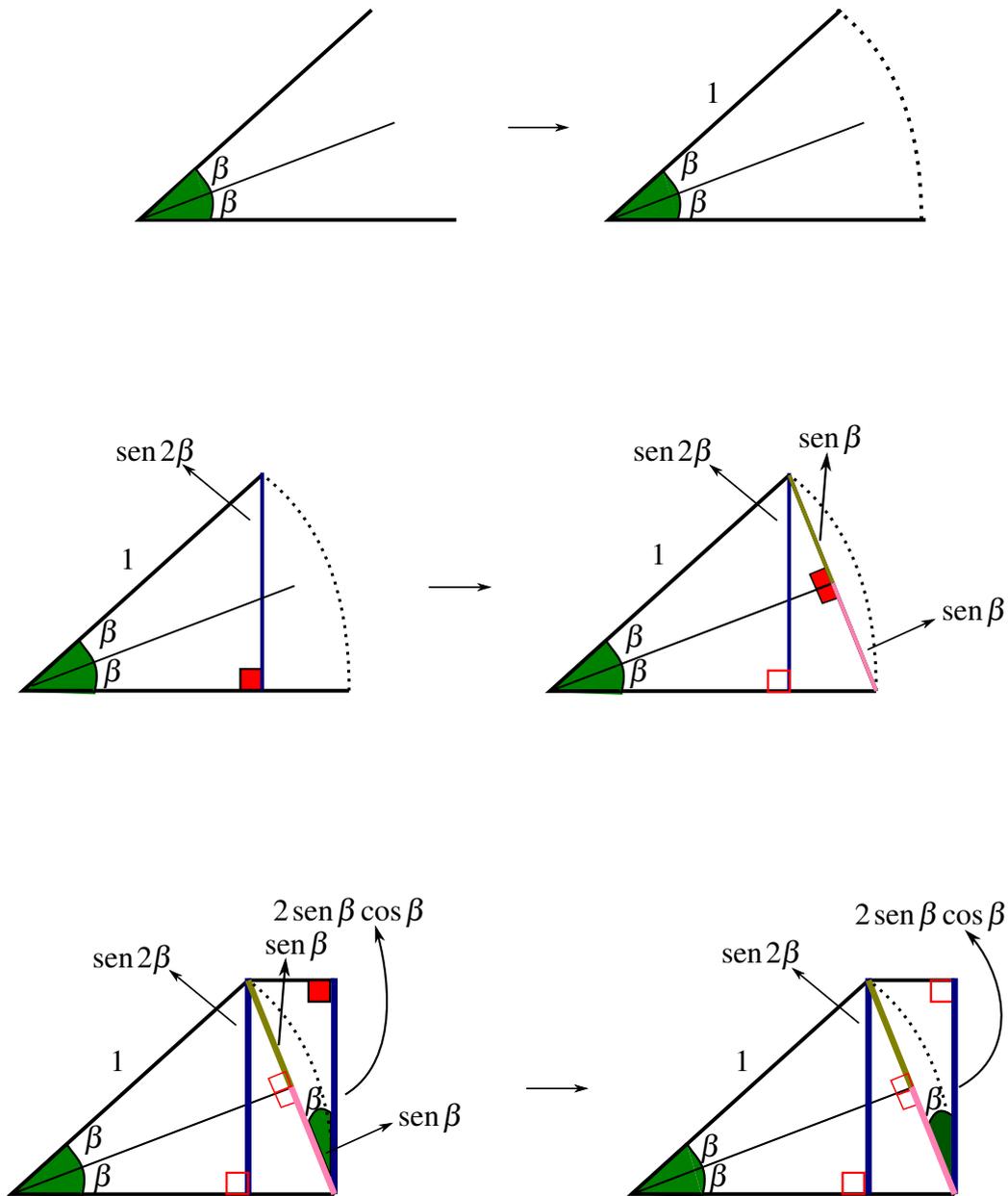


Fonte: Autoria própria

Dado um ângulo β tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, expomos na Figura 1.9 uma resolução visual para o seno do arco duplo, isto é,

$$\text{sen } 2\beta = 2 \text{sen } \beta \cos \beta.$$

Figura 1.9 Resolução visual para o seno do arco duplo



Fonte: Autoria própria

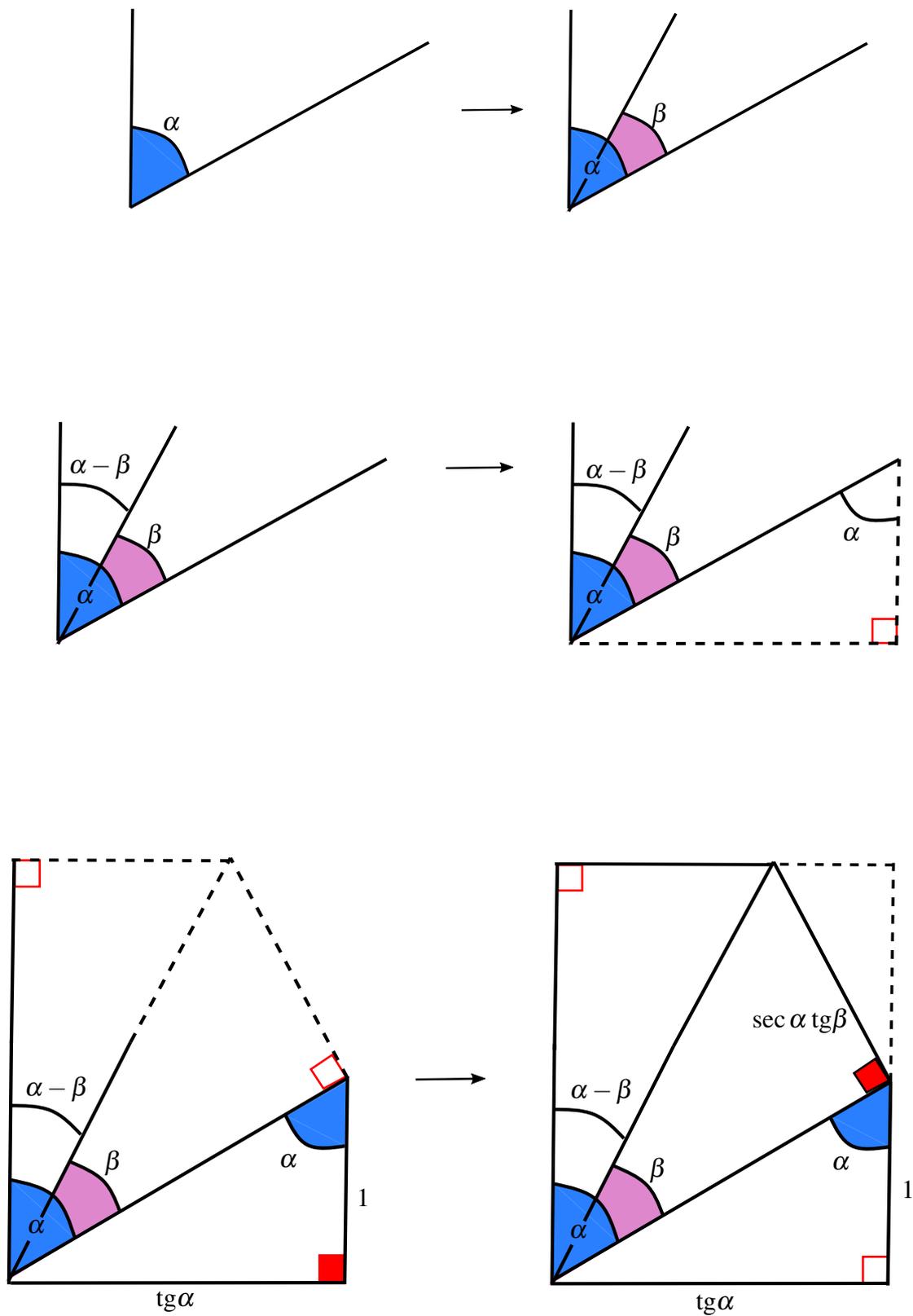
O décimo problema proposto refere-se à tangente da diferença entre dois ângulos, ou seja,

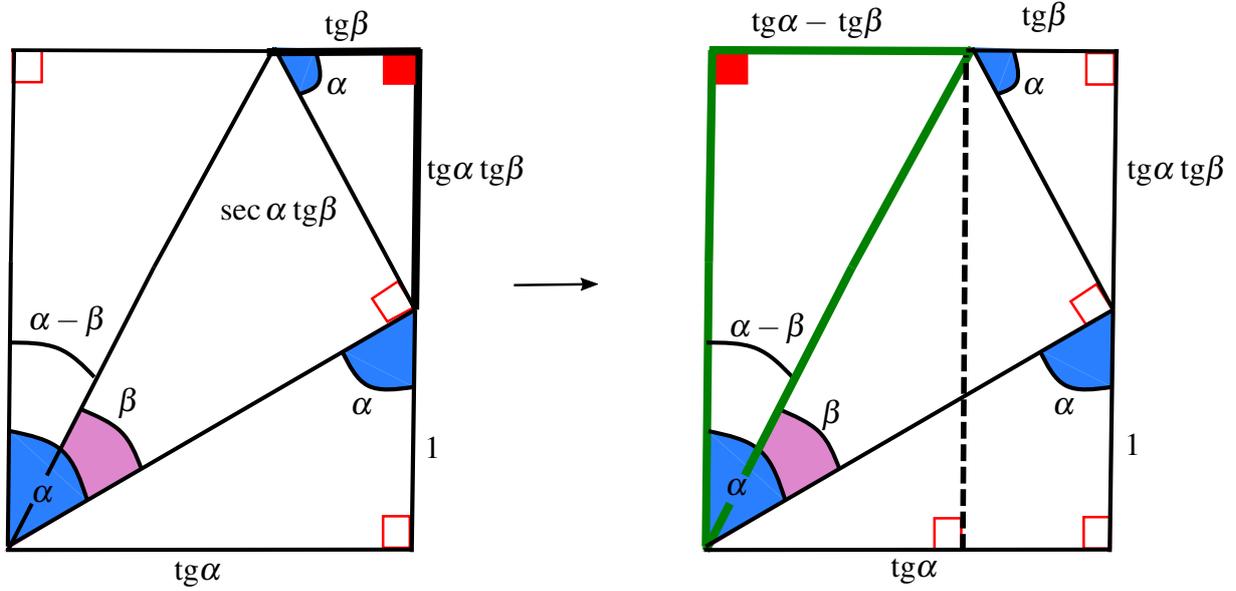
$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \text{tg}\beta},$$

onde $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Apresentamos a resolução visual deste problema mediante a Figura 1.10.

Figura 1.10 Resolução visual para a tangente da diferença entre dois ângulos





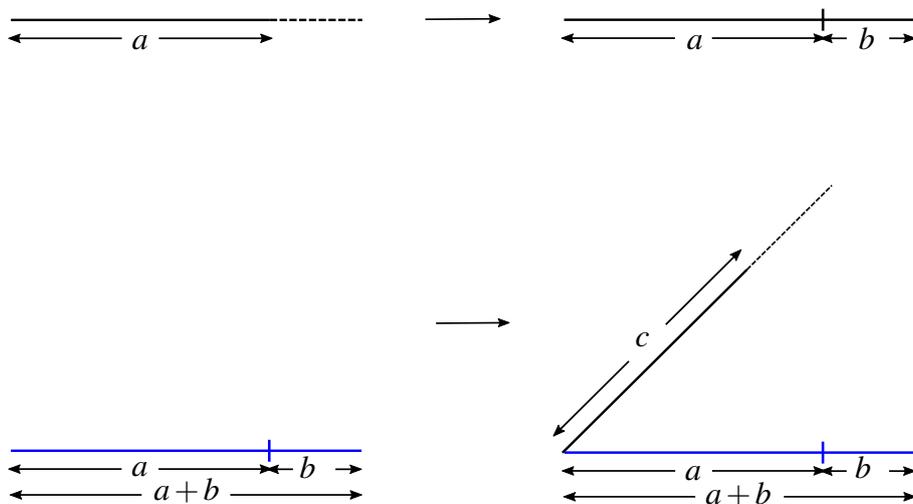
Fonte: Autoria própria

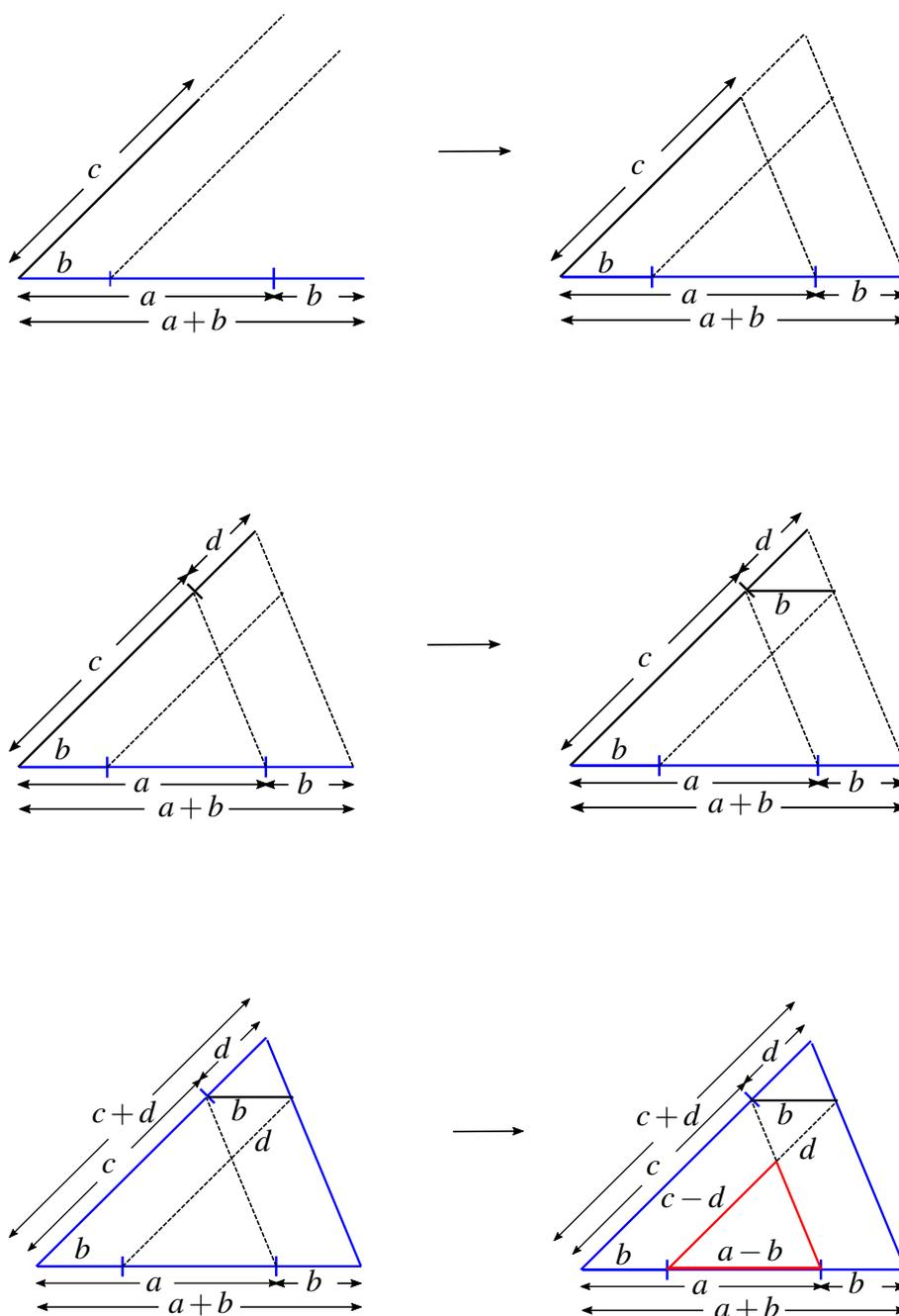
A partir de um segmento que possui medida a , ilustramos na Figura 1.11 uma resolução visual de uma propriedade das proporções, ou seja,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d},$$

onde $b > 0, c > 0, d > 0$ e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$.

Figura 1.11 Resolução visual para uma propriedade das proporções





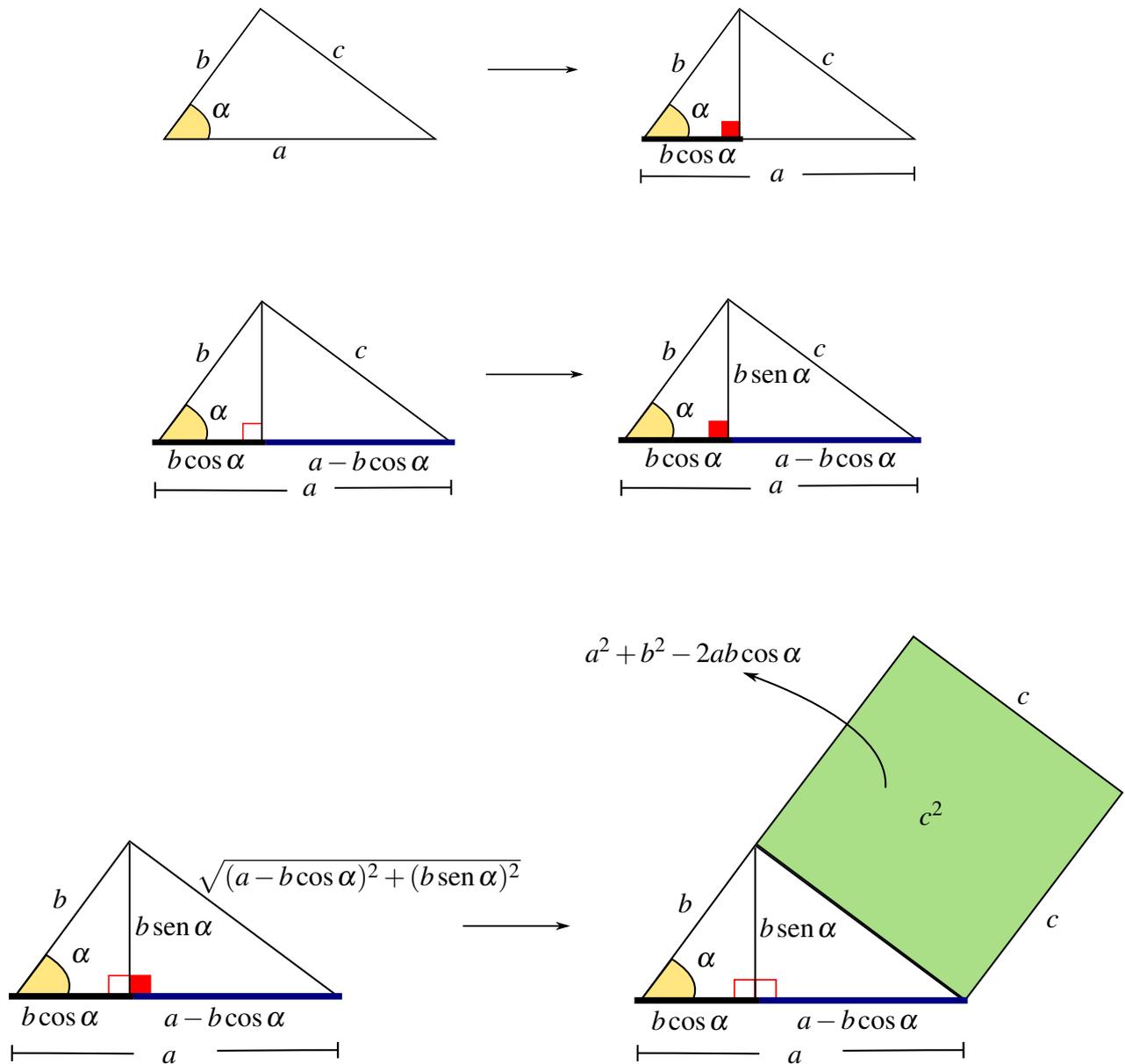
Fonte: Autoria própria

A última resolução visual refere-se à lei dos cossenos, isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

onde a , b e c são positivos. Nesse caso, consideramos um triângulo de lados a , b e c , que possui um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Assim, na Figura 1.12 exibimos uma sequência de passos necessários para a resolução desse problema.

Figura 1.12 Resolução visual para a lei dos cossenos



Fonte: Autoria própria

1.3. Conclusão

O uso das estratégias listadas por Larson, ver [20], notadamente “trace uma figura”, “explore as simetrias” e “divida em casos”, mostra fortemente a importância da visualização de cada problema, e, conseqüente, obtém-se uma maior clareza na busca de sua resolução. De

fato, a atitude de visualizar um problema provoca um olhar desafiador de imaginação geométrica, o qual direciona a criatividade para outra forma importante e cristalina de encontrar resoluções de problemas.

Destacamos que os problemas apresentados e resolvidos neste artigo são alguns exemplos de problemas de Matemática da Educação Básica. Provavelmente, o professor em sua prática diária, pode tomar esses exemplos como ponto inicial e ampliar o leque de atividades realizadas em sala de aula, criando novas possibilidades de investigação.

2. USO DE MATERIAIS DIDÁTICO-PEDAGÓGICOS LÚDICOS POR EGRESSOS DO PROFMAT E SUA INFLUÊNCIA NO APRENDIZADO EM MATEMÁTICA EM ALAGOAS

2.1. Introdução

O uso de materiais auxiliares, como os didático-pedagógicos lúdicos, provoca o interesse, a segurança, bem como o aperfeiçoamento das habilidades orais e cognitivas. Esse desenvolvimento é embasado por [44]. No Brasil, existem muitos grupos de trabalho e pesquisa em Educação Matemática que indicam o uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos no ensino da Matemática. Em particular, podemos encontrar no grupo de estudos do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) os trabalhos do *Pentathlon Institute*, cujo grupo vê nesses recursos didáticos uma forma de tratar os conhecimentos matemáticos que vêm sendo ignorados no ensino, trazendo de volta o pensamento lógico-matemático e, conseqüentemente, fazendo o aluno se envolver com o levantamento de conjecturas – uma perspectiva primordial para o desenvolvimento do pensamento matemático, ver [15]. Daí a importância do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos como recurso didático para avançarmos na melhoria do aprendizado em Matemática.

Em Alagoas, segundo o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), no ano de 2017, os estudantes obtiveram notas abaixo da média nacional quando avaliados em Matemática. De acordo com os dados disponibilizados, a média obtida na Prova Brasil pelos estudantes do Ensino Fundamental I de Alagoas alcançou 199,41 pontos, enquanto a média nacional foi de 224,10 pontos. No caso dos alunos que estavam terminando o Ensino Fundamental II e Ensino Médio, as médias nacionais atingiram 258,36 e 269,74, respectivamente. No entanto, os estudantes das escolas alagoanas obtiveram médias 240,48 no Ensino Fundamental II e 247,78 no Ensino Médio. Em particular, segundo os dados do Saeb, o desempenho em Matemática na Educação Básica em 2017 não atingiu níveis de proficiência expressivos numa escala de 0 a 10, ver [6].

O ensino da Matemática é um desafio em qualquer escola brasileira, principalmente nas instituições de ensino públicas, que ainda não contam com a totalidade de seus professores com formação obrigatória adequada, ou seja, a Licenciatura. De fato, segundo o Inep, o Censo Escolar é o principal instrumento de coleta de informações da Educação Básica, realizado anualmente com a colaboração de todas as instituições públicas e privadas com oferta de Ensino Infantil, Fundamental e Médio, ver [9]. Segundo as estatísticas do Censo Escolar de 2017, cerca de 74,2% dos docentes que atuam na Educação Básica são formados em Licenciatura. Com relação aos 25,8% dos docentes que não são licenciados, 4,2% têm formação em algum Bacharelado, ver [9]. Os dados revelam, portanto, que o percentual de profissionais sem formação em Licenciatura ainda é expressivo.

Os resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) de 2017 para a rede pública de ensino em Alagoas mostram que a média dos alunos nos anos iniciais do Ensino

Fundamental não só atingiu a meta prevista de 4,0, como ultrapassou essa meta, ao obter uma média 4,9. Em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, embora não tenha atingido a meta prevista de 3,9, a média obteve um aumento significativo quando comparada à avaliação anterior de 3,2 em 2015, atingindo 3,8 em 2017. Ademais, o Ensino Médio não alcançou a meta de 4,1, e a média 3,3 revela que a aprendizagem diminuiu à medida que o estudante avança nos anos escolares, especialmente nos últimos anos, como exibido na Tabela 2.1.

Embora os dados acima mostrem que os estudantes de Alagoas estão obtendo resultados abaixo da média nacional no Ensino Básico, o Inep comparou os resultados obtidos nas avaliações de 2015 e 2017, e revelou avanços no desempenho dos alunos da Educação Básica do estado. Com isso, Alagoas ganhou destaque por proporcionar mais ganhos de aprendizagem aos alunos, ver [5].

Ano/Série	Rede	Meta	Ideb
5º Ano EF	Pública	4,0	4,9
9º Ano EF	Pública	3,8	3,9
3ª Série EM	Estadual	4,1	3,3

Tabela 2.1 Metas e resultados do Ideb na rede pública de Alagoas

Tendo em vista que o Ensino Básico em Alagoas e no restante do país apresenta a necessidade de melhorias significativas, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) atende prioritariamente à Educação Básica na área de Matemática e visa ao aprimoramento na formação profissional dos professores que lecionam a disciplina de Matemática na Educação Básica, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência [36]. É um mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional, formado por instituições de ensino superior, no âmbito do sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB) e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). Em Alagoas, atuam 63 professores mestres formados pelo Profmat, lecionando Matemática.

O Profmat foi retratado em algumas publicações: Quem é o professor de Matemática da Escola Básica? Um perfil qualitativo-quantitativo extraído dos Exames de Acesso ao Profmat, ver [34]; Avaliação Suplementar Externa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), ver [21], ambas com o objetivo de avaliar o Profmat como política pública, apresentando resultados observados no acompanhamento e em avaliação suplementar do Profmat, sendo a primeira publicação durante o período de 2011 a 2013, e a segunda de 2013 a 2016; Profmat: Uma reflexão e alguns resultados, ver [12], apresentando informações com vistas a orientar a comissão de avaliação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), tendo em consideração as especificidades do programa que não se enquadram nos critérios de avaliação dos cursos de mestrado acadêmico em Matemática; Perspectivas do Profmat: Política Pública em construção – Tese de doutorado –, ver [41], que identificou as contribuições do programa para a melhoria da educação básica mediante o relato dos discentes do programa, coordenadores e de entrevistas com os diretores das escolas onde lecionam seus egressos; Profmat: Avaliação de possíveis impactos, ver [11], com o objetivo

de compreender o Profmat enquanto projeto de política pública vinculado ao Plano Nacional da Educação (PNE) e ao VI Plano Nacional de Pós-Graduação (PNPG) e seu desempenho até o momento, centrando no monitoramento do programa. Nas citadas publicações, quando necessário, foram aplicados questionários aos docentes, discentes e egressos do Programa, via internet.

O objetivo do presente artigo é identificar quais desses mestres usam materiais didático-pedagógicos lúdicos, e a influência de tais recursos no aprendizado de seus alunos. Além disso, detectar qual o nível de conhecimento obtido durante esse mestrado sobre a utilização desses materiais.

Agradecimentos. As autoras são gratas ao Hilário Alencar pelos valiosos comentários neste artigo e aos pareceristas pelos pertinentes comentários e sugestões. Também agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão das bolsas de Iniciação Científica concedidas (PIBIC/UFAL/CNPq e INCTMat/CNPq).

2.2. Metodologia

De acordo com Marconi e Lakatos [24], existem diferentes tipos de métodos científicos: indutivo, dedutivo, hipotético-dedutivo, dialético e os métodos específicos das ciências sociais. Além disso, as autoras exibem os diferentes tipos de técnicas de pesquisa, como a documentação indireta (como pesquisa documental e pesquisa bibliográfica), documentação direta (pesquisa de campo), observação direta intensiva (como observação e entrevista) e observação direta extensiva (como questionário e formulário). Em particular,

A observação direta extensiva é realizada mediante a aplicação de um questionário. O questionário é um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. Em geral, o pesquisador envia o questionário ao informante, pelo correio ou por um portador; depois de preenchido, [...] devolve-o do mesmo modo. Junto com o questionário deve-se enviar uma carta explicando a natureza da pesquisa, sua importância e a necessidade de obter respostas, tentando despertar o interesse do recebedor, no sentido de que ele preencha e devolva o questionário dentro de um prazo razoável. [24]

“A elaboração de um questionário requer a observância de normas precisas, a fim de aumentar sua eficácia e validade”, ver [24]. Na elaboração do questionário, devem-se levar em conta os tipos, a ordem, os grupos de perguntas, a formulação das mesmas e também tudo aquilo que se sabe sobre percepção, estereótipos, mecanismos de defesa, liderança etc, ver [24].

A presente pesquisa qualitativa e quantitativa sobre uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos por egressos do Profmat e sua influência no aprendizado em Matemática no estado de Alagoas foi elaborada mediante o uso de questionário. Dessa forma, utilizamos como metodologia a análise das respostas de questionários enviados aos egressos do Profmat, que atuam na docência nas escolas do estado de Alagoas na disciplina de Matemática, sobre a utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos (ábaco, atividades de corte, colagem ou dobradura (ex.: origami), jogos, material dourado, sólidos geométricos, Tangram, softwares, entre outros) em

prática de aula, visando conhecer a influência do Programa no aprendizado acerca do uso desses materiais pelo egresso. Em média, quando a técnica do questionário é aplicada, as respostas obtidas alcançam 25% de devolução, tendo como vantagem a economia de tempo, a abrangência de uma área geográfica mais ampla, respostas rápidas e precisas, além de maior liberdade nas respostas, em razão do anonimato, ver [24]. Sob outra perspectiva, as autoras apresentam diversas desvantagens de utilizar o questionário como técnica de pesquisa, tais como

(...) o baixo retorno de respostas, grande número de perguntas sem respostas, a impossibilidade de ser aplicado a analfabetos, a dificuldade de compreensão das perguntas, o desconhecimento das circunstâncias em que foi respondido, além da devolução tardia das respostas. [24]

A influência do retorno das respostas nessa porcentagem depende de diversos fatores, como a

Forma atraente, a extensão, o tipo de carta que o acompanha, solicitando colaboração; as facilidades para seu preenchimento e sua devolução pelo correio; motivos apresentados para a resposta e tipo de classe de pessoas a quem é enviado o questionário. [39]

Em relação ao questionário encaminhado, via *e-mail*, aos 63 egressos do Profmat da Ufal que são professores de Matemática da Educação Básica nas escolas alagoanas, foram auferidas 52 respostas. Isto configura 82,53% de devolução de respostas e, portanto, muito acima dos 25% citados por Marconi e Lakatos [24].

Nessa pesquisa usamos como recurso metodológico perguntas de múltipla resposta, escala avaliativa, dicotômicas, tricotômica e duas perguntas discursivas – uma pergunta para quem utiliza os materiais didático-pedagógicos lúdicos e outra pergunta diante da negativa da primeira.

No Quadro 2.1, descrevemos o questionário, bem como os tipos de questão que foram formuladas e aplicadas aos egressos do Profmat na Ufal com suas respectivas opções de resposta.

Quadro 2.1: Lista de perguntas do questionário e tipo de questão

Perguntas	Tipo de Questão	Opções de Resposta
Atualmente, você leciona a disciplina de Matemática?	dicotômica	() Sim () Não
Atualmente, em qual(is) rede(s) de ensino você leciona?	múltipla resposta	() Municipal () Estadual () Federal () Privada
Você utiliza materiais didático-pedagógicos lúdicos em suas aulas?	dicotômica	() Sim () Não
Descreva o porquê de você não utilizar tais materiais em sua prática.	aberta	

Quadro 2.1: Lista de perguntas do questionário e tipo de questão

Assinale quais materiais didático-pedagógicos lúdicos você costuma utilizar em suas aulas.	múltipla resposta	() Ábaco () Ativ. de Corte, Cola-gem e Dobradura () Jogos () Material Dourado () <i>Softwares</i> () Sólidos Geométricos () Tangram Outros: _____
Como você avalia a utilização de tais materiais em sua prática pedagógica?	escala avaliativa	() Muito bom () Muito bom, mas com limitações () Regular () Ruim () Péssimo
Houve melhorias no processo de ensino a partir do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos?	tricotômica	() Sim () Parcialmente () Não
Descreva os resultados positivos e/ou negativos ao utilizar os materiais didático-pedagógicos lúdicos em sua prática.	aberta	
Como você avalia o processo de ensino-aprendizagem ao utilizar materiais didático-pedagógicos lúdicos?	escala avaliativa	() Muito bom () Adequado () Com algumas limitações () Inadequado () Não consegui avaliar
Quais os conhecimentos matemáticos são mais valorizados por meio de materiais didático-pedagógicos lúdicos?	múltipla resposta	() Números e Operações () Grandezas e Medidas () Tratamento da Informação () Espaço e Forma
Em sua opinião, para que nível de ensino os materiais didático-pedagógicos lúdicos são mais adequados?	múltipla resposta	() Ensino Fund. I () Ensino Fund. II () Ensino Médio

Quadro 2.1: Lista de perguntas do questionário e tipo de questão

Quais foram as fontes de informação que o fizeram optar pela utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos em sala de aula?	múltipla resposta	<input type="checkbox"/> Artigos <input type="checkbox"/> Livros <input type="checkbox"/> Minicursos <input type="checkbox"/> Vídeos Outros: _____
Qual o seu nível de conhecimento quanto à utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos em sala de aula?	escala avaliativa	<input type="checkbox"/> Adequado <input type="checkbox"/> Adequado, mas com limitações <input type="checkbox"/> Inadequado <input type="checkbox"/> Não obtive conhecimento
O Profmat teve influência no seu aprendizado sobre os materiais didático-pedagógicos lúdicos?	dicotômica	<input type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não
Qual o nível de conhecimento que você obteve durante o Profmat quanto à utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos em sala de aula?	escala avaliativa	<input type="checkbox"/> Adequado <input type="checkbox"/> Adequado, mas com limitações <input type="checkbox"/> Inadequado <input type="checkbox"/> Não obtive conhecimento

Fonte: Autoria própria (2018)

2.3. Egressos do Profmat em Alagoas

O Profmat surgiu em 2011, mediante uma ação induzida pela Capes junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM.

O Programa está presente nos 26 estados brasileiros e no Distrito Federal mediante uma rede de 75 instituições de ensino superior associadas, distribuídas em 96 *campi*. O Profmat é recomendado pela Capes, reconhecido pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e validado pelo MEC com nota 5 (nota máxima para programas de mestrado). Até o início de novembro de 2018, o Programa titulóu 4.244 mestres. Diante do pioneirismo inovador do Profmat, existem atualmente 11 mestrados profissionais que seguem a linha deste Programa, os quais estão inseridos na UAB. Uma das instituições associadas ao Profmat é a Universidade Federal de Alagoas (Ufal), a qual participa desde o início dessa rede.

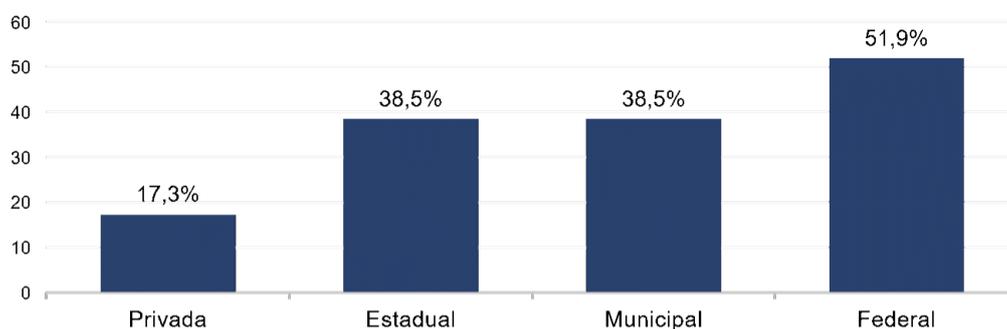
Os indicadores apresentados mostram a importância da intervenção dos egressos do Profmat no ensino de Matemática no Ensino Básico. Neste mestrado, os egressos obtiveram um aperfeiçoamento no tocante ao conhecimento matemático e, portanto, apresentam totais condições de ministrar aulas de Matemática com mais qualidade, desenvolver intervenções efetivas em sua prática, além de despertar o interesse dos alunos acerca da disciplina. São observadas

menores taxas de reprovação em Matemática nas turmas onde os professores lecionam, e a realização de mais atividades extracurriculares com os alunos, ver [11].

Uma forma de melhorar esses indicadores é buscar alternativas para uma maior compreensão pelo aluno dos conhecimentos matemáticos, e continuar avançando na ampliação do aprendizado desse aluno na disciplina de Matemática. Uma excelente alternativa é o uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos, pois como consequência de sua formação, muitas vezes destituída de perspectivas didático-pedagógicas, muitos professores lecionam a Matemática de maneira pouco inovadora, gerando assim uma certa apatia por parte dos alunos. A análise dos dados do questionário mostra que, de fato, 80,8% dos egressos do Profmat fazem uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos, conforme pode ser visto na próxima seção.

Considerando-se que o mesmo professor pode atuar em mais de uma instituição e a possibilidade de escolher como resposta mais de uma opção, atualmente, 98,42% dos egressos do Profmat lecionam Matemática em escolas da rede pública de Alagoas. Tais dados podem ser observados na Figura 2.1.

Figura 2.1 Rede de ensino em que os egressos do Profmat na Ufal lecionam em Alagoas



Fonte: Dados da Pesquisa

A distribuição dos egressos do Profmat em escolas da rede federal, estadual e municipal é um aspecto extremamente relevante. Ademais, observamos que do total dos egressos, 82,54% são do sexo masculino.

2.4. Uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos em matemática como recurso didático

A recente Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental já indica de forma clara a inclusão da utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos como recurso didático:

(...) a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. [7]

No entanto, esses recursos didáticos precisam estar integrados às diversas situações do cotidiano, para que se inicie um processo de formalização do conhecimento matemático. Em relação à Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio, a qual está sob revisão, observam-se ações que contemplam a utilização de tais materiais na prática pedagógica, visando, por exemplo:

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. [8]

Aliás, existem importantes pesquisas acerca da utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos como recurso didático, como pode ser visto em “Jogos pedagógicos & oficinas: uma parceria nas aulas de Matemática”, ver [14], “A utilização de *applets* no GeoGebra para a aprendizagem da trigonometria no Ensino Médio”, ver [29], e “O jogo torre de Hanói para o ensino de conceitos matemáticos”, ver [28]. Assim, apresentamos a seguir alguns destes materiais, isto é, ábaco, atividades de corte, colagem ou dobradura (ex.: origami), jogos, material dourado, sólidos geométricos, tangram, torre de Hanói, *softwares* e, respectivamente, descrevemos a respeito dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao utilizá-los, bem como suas contribuições no desenvolvimento das habilidades dos alunos.

Ábaco: É um recurso didático

(...) de cálculo aritmético que consiste, geralmente, num quadro de madeiras com cordas ou arames transversais, correspondentes cada um a uma posição digital (unidades, dezenas,...) e nas quais estão os elementos de contagem (fichas, bolas, contas, ...) que podem fazer-se deslizar livremente. [2]

Atualmente, existem vários tipos de ábaco utilizados, por exemplo, no ensino de operações matemáticas básicas.

Atividades de corte, colagem ou dobradura: Estas atividades visam o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos utilizando papel, tesoura ou cola. Em particular, segundo [42], “o origami é a arte de dobrar papel, sem cortes ou cola”. Além da construção de figuras com papéis coloridos, é possível ensinar conceitos geométricos, como “(...) a construção de figuras planas, demonstrações de teoremas e a construção de figuras tridimensionais” [23]. A construção e estudo de algumas dessas figuras aplicadas no ensino básico podem ser vistas em Pimenta (2018), ver [30], e Barreto (2013), ver [3].

Jogos: Segundo Cordeiro e Silva, ver [13], “o jogo e a instrução escolar representam o mesmo papel no que se diz respeito ao desenvolvimento das habilidades e conhecimentos”. São exemplos de jogos o xadrez, dominós matemáticos, bingos, sudoku e cubo mágico, além

dos diversos materiais construídos por professores e pesquisadores com a finalidade de ensinar determinado conteúdo matemático.

Material Dourado: De acordo com Oliveira, ver [27], o Material Dourado “destina-se a atividades que auxiliam o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e dos métodos para efetuar as operações fundamentais (ou seja, os algoritmos)”. É composto por materiais de madeira que representam a unidade, dezena, centena e unidade de milhar: o cubo pequeno, barra, placa e cubo grande, respectivamente.

Sólidos Geométricos: São objetos geométricos que possuem dimensão três, por exemplo, prismas, pirâmides e corpos redondos. Este material amplia os conhecimentos dos estudantes, familiarizando-os com as formas geométricas, identificando suas diferenças e semelhanças, despertando a necessidade de observação do espaço e apresentando algumas de suas propriedades [4].

Tangram: É um antigo jogo chinês, que consiste em 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) e tem o objetivo de formar figuras e desenhos. É bastante utilizado nas aulas de Matemática, uma vez que estimula os alunos a desenvolverem a criatividade e o raciocínio lógico, habilidades essenciais no estudo da disciplina de Matemática.

Torre de Hanói: É um tipo de quebra-cabeça, que consiste em uma base contendo três pinos, onde são dispostos alguns discos uns sobre os outros. O objetivo do jogo consiste em transferir todos os discos de um pino para o outro, afim de que um disco maior nunca fique em cima de um menor. O jogo é considerado como um procedimento para avaliar a capacidade de memória e principalmente de planejamento e solução de problemas.

Softwares: São programas que obedecem a uma sequência de instruções ordenadas e são entendidas e executadas por um computador (inclusive celulares). Segundo Navarro, ver [25], ensinar Matemática com o auxílio de um *software* educativo aumenta as possibilidades de exploração das definições e apresentação dos conteúdos.

2.5. Resultados e discussões

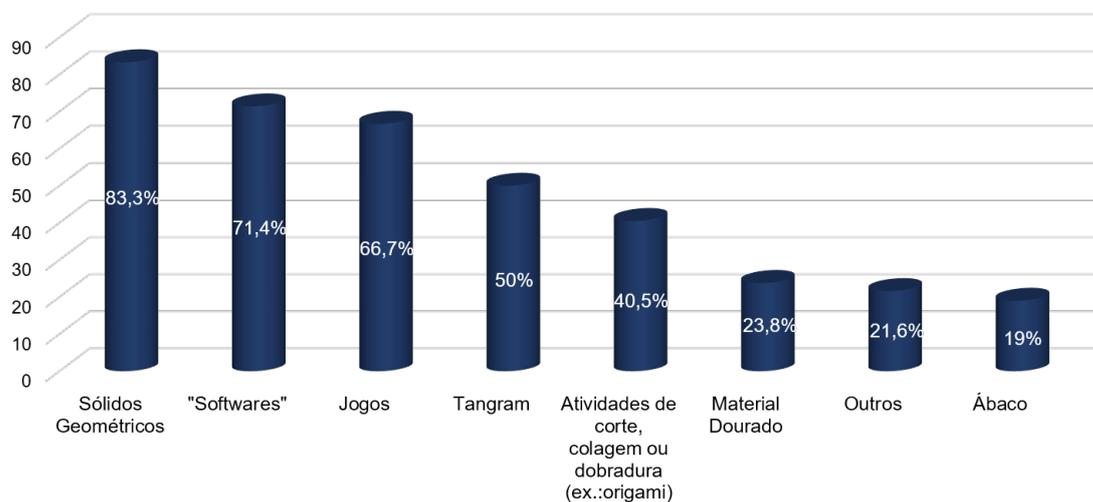
Ao longo de toda esta seção as análises qualitativas e quantitativas referem-se exclusivamente aos egressos do Profmat na Ufal, que lecionam a disciplina Matemática nas escolas situadas em Alagoas. Visto que o foco principal desta pesquisa é identificar quais desses mestres usam materiais didático-pedagógicos lúdicos e a influência de tais recursos no aprendizado de seus alunos, detectando qual o nível de conhecimento obtido durante este mestrado sobre a utilização desses materiais, a primeira questão fundamental é se esses egressos utilizam materiais didático-pedagógicos lúdicos em suas aulas. A resposta afirmativa alcança 80,8%.

Buscamos saber o porquê dos 19,2% não usarem tais materiais. Desses respondentes, 13,44% alegaram que a escola não possui materiais, e que não há tempo para a organização das atividades em sala de aula diante de uma carga horária reduzida para o cumprimento do programa. Além disso, daqueles 19,2% que não utilizam os materiais didático-pedagógicos lúdicos, o que representa 10 respondentes, 2 afirmaram que não conseguiram visualizar uma aplicação satisfatória de tais materiais no nível das turmas em que lecionam. Ressaltamos ainda que dois egressos, embora tenham construído alguns materiais, mencionaram que não existe laboratório de Matemática na escola e, por isso, não utilizam os materiais em sua prática de sala

de aula de Matemática. Finalmente, neste quesito, um respondente admitiu a necessidade de melhorar nesse aspecto.

Os materiais didático-pedagógicos lúdicos são recursos importantes para o professor, pois desenvolvem habilidades e incentivam a curiosidade de seus alunos. Por tal razão os egressos foram questionados sobre quais materiais eles utilizam em suas aulas. Em geral, os egressos do Profmat na Ufal encontraram, entre as opções listadas, os materiais que utilizam em suas aulas, com destaque para sólidos geométricos, com 83,3% e *softwares* com 71,4%. Além disso, havia a opção “Outros” em que os egressos citaram outros materiais que costumam utilizar: competições lúdicas (ex.: olimpíadas de Matemática), confecção de gibis matemáticos, construção de teodolito caseiro, geoplano, materiais recicláveis para construção de objetos fractais, prancha para construção de gráficos, régua e compasso, robótica e a torre de Hanói. Os dados são exibidos na Figura 2.2.

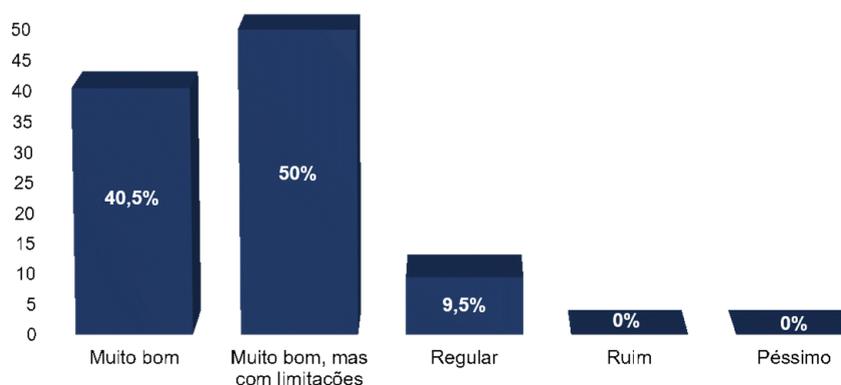
Figura 2.2 Materiais didático-pedagógicos lúdicos que os egressos utilizam em suas aulas



Fonte: Dados da Pesquisa

No questionário aplicado, foi avaliada a utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos na prática pedagógica dos egressos do Profmat na Ufal. Dessa forma, a utilização destes materiais foi considerada de muito bom com limitações a muito bom por 90,5% dos egressos que responderam à pesquisa, como observado na Figura 2.3.

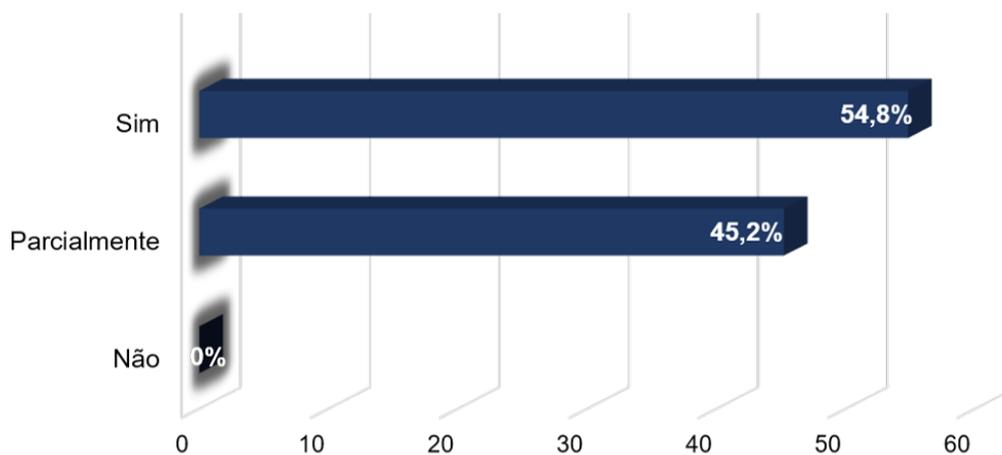
Figura 2.3 Avaliação do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos pelos egressos



Fonte: Dados da Pesquisa

Com isso, enfatizamos que 54,8% dos egressos do Profmat na Ufal responderam sim quando indagados sobre a existência de melhorias no processo de ensino a partir do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos, como podemos observar na Figura 2.4.

Figura 2.4 Existência de melhorias no processo de ensino a partir do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos pelos egressos



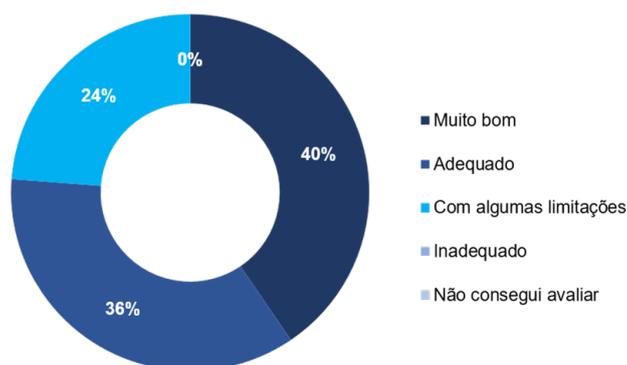
Fonte: Dados da Pesquisa

Os egressos que utilizam tais materiais indicaram como resultados positivos a melhor compreensão, associação da teoria com a prática, maior interesse de seus alunos a respeito dos conceitos matemáticos, o aumento do rendimento e a obtenção de um discente mais comprometido com o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, relataram que o uso de tais materiais desenvolve o trabalho em equipe, o respeito às regras, bem como melhora a oralidade e escrita dos alunos.

Na escola, a utilização de metodologias distintas é algo substancial para o processo de ensino-aprendizagem. Complementarmente, indagamos ao egresso acerca da avaliação do pro-

cesso de ensino-aprendizagem ao utilizar materiais didático-pedagógicos lúdicos. Para 76,2% dos respondentes que utilizam tais materiais, essa avaliação foi considerada de adequado a muito bom, como mostra a Figura 2.5.

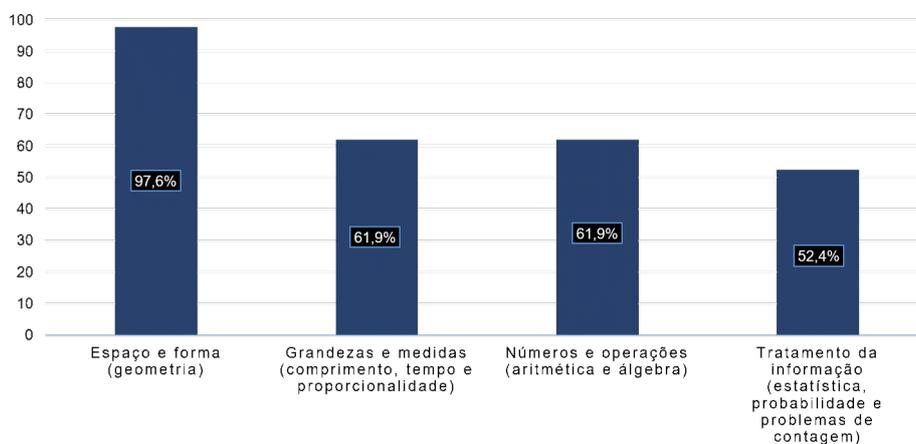
Figura 2.5 Avaliação dos egressos sobre o processo de ensino-aprendizagem com o uso dos materiais didático-pedagógicos lúdicos



Fonte: Dados da Pesquisa

Tratar sobre os conhecimentos matemáticos é uma tarefa complexa, pois, além das particularidades da disciplina, cada instituição possui uma cultura distinta. Com isso, utilizamos o questionário, para saber dos entrevistados quais os conhecimentos matemáticos seriam mais valorizados por meio do uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos. Ademais, sendo possível escolher como resposta mais de uma opção, 97,6% dos 42 respondentes que utilizam tais materiais mencionaram o conhecimento sobre espaço e forma (geometria) como o mais enaltecido por meio da utilização desses materiais. Os dados são exibidos na Figura 2.6.

Figura 2.6 Conhecimentos matemáticos mais valorizados por meio do uso dos materiais didático-pedagógicos lúdicos

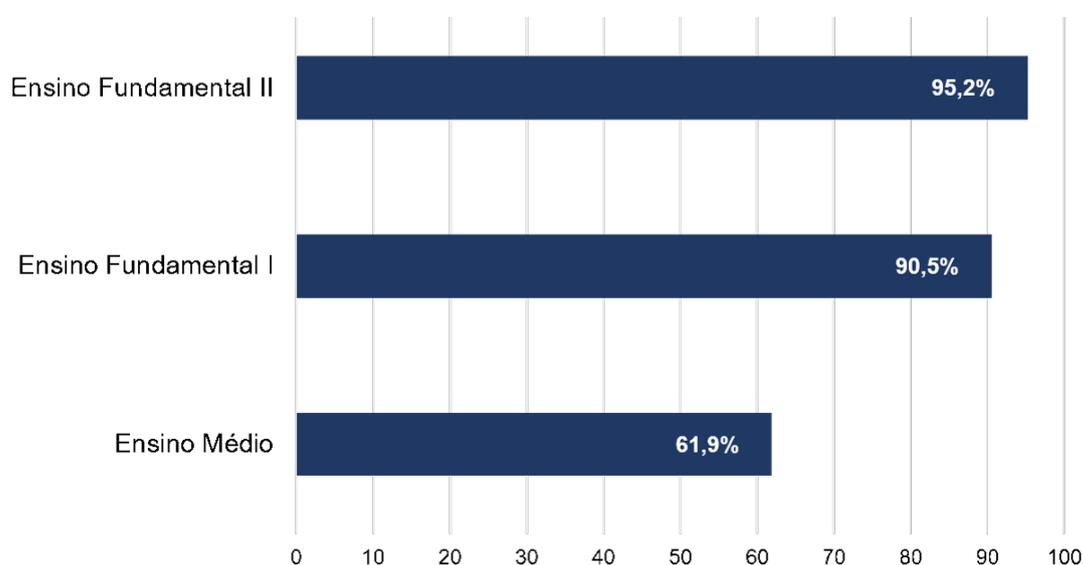


Fonte: Dados da Pesquisa

Os recursos didáticos utilizados pelos egressos em suas práticas pedagógicas servem como um auxílio benéfico para o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, o sucesso mediante o uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos depende da interação e curiosidade dos alunos durante a aplicação dos mesmos, o que muitas vezes tem como influência a adaptação desses materiais segundo o nível de ensino em que os alunos se encontram.

Nesta pesquisa os egressos que utilizam materiais didático-pedagógicos lúdicos avaliaram o nível de ensino em que a utilização desses recursos é mais adequada. De fato, sendo possível escolher como resposta mais de uma opção, quase a totalidade dos 42 respondentes, ou seja, 95,2% alegaram que o Ensino Fundamental II é mais adequado (Figura 2.7). Esse aspecto é bastante relevante, pois o Profmat é um mestrado direcionado para a Educação Básica.

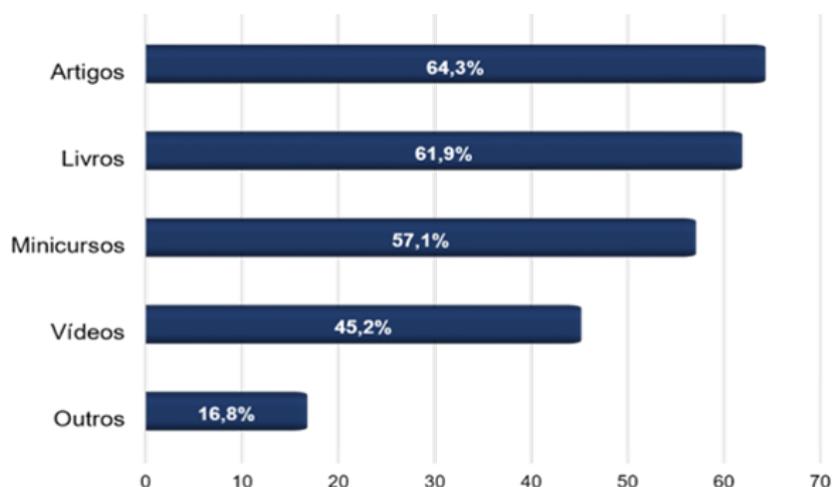
Figura 2.7 Nível de ensino cuja utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos é mais adequada



Fonte: Dados da Pesquisa

Questionamos aos egressos quais foram as fontes de informação que lhes fizeram optar pelo uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos em sala de aula. Constatamos com essa pesquisa que, dentre os egressos que utilizam tais materiais, 64,3% obtiveram informações mediante artigos, 61,9% com livros e 57,1% minicursos, de acordo com a Figura 2.8. Além disso, havia a opção “Outros”, onde alguns respondentes destacaram outras fontes, como cursos de aperfeiçoamento, cursos de formação, experimento, internet, mestrado, o dia a dia de sala de aula e trabalhos apresentados em eventos.

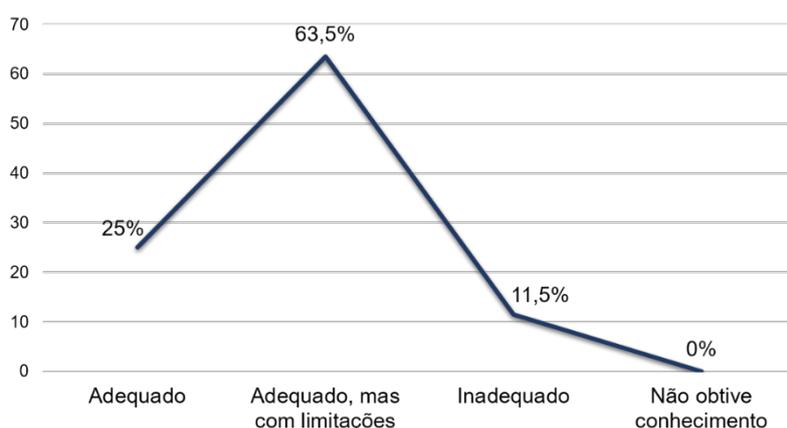
Figura 2.8 Fontes de informação dos egressos acerca da utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao serem questionados acerca do seu nível de conhecimento sobre os materiais didático-pedagógicos lúdicos, cerca de 88,5% dos egressos avaliaram de adequado com limitações a adequado (Figura 2.9). Destacamos que, mediante a pesquisa, 11,52% dos respondentes que não utilizam tais materiais declararam que possuem um nível de conhecimento adequado com limitações a respeito de tais materiais.

Figura 2.9 Nível de conhecimento dos egressos quanto à utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos

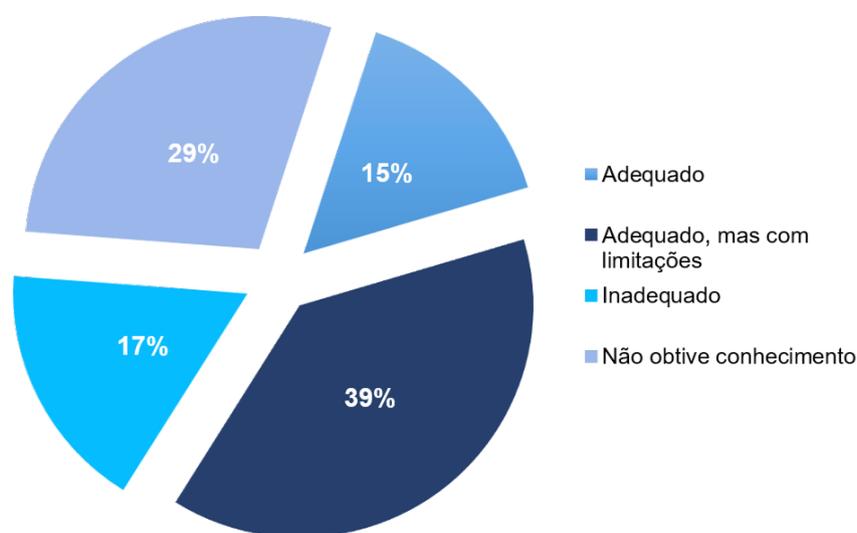


Fonte: Dados da Pesquisa

Com o uso dos materiais didático-pedagógicos lúdicos, o professor fica mais convicto acerca de seu planejamento pedagógico e, conseqüentemente, sua prática torna-se mais ampla. Assim sendo, entre os egressos que responderam o questionário, 61,5% declararam que o Profmat teve influência nos seus aprendizados sobre os materiais didático-pedagógicos lúdicos.

Observamos que não só os egressos, mas principalmente seus alunos, encaminham-se para um aprendizado mais prático e estimulado, o que também permite a formação de um educador mais completo. Diante do exposto notamos que o professor de matemática deve buscar o conhecimento necessário para aplicar intervenções eficazes em sua prática, como a utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos. Desse modo, outra questão da pesquisa abordou o nível de conhecimento que o Profmat proporcionou aos egressos a respeito destes materiais em sala de aula: 53,9% dos egressos que responderam à pesquisa consideraram que o mestrado proporcionou um conhecimento de adequado com limitações a adequado (Figura 2.10).

Figura 2.10 Nível de conhecimento obtido durante o Profmat sobre a utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos



Fonte: Dados da Pesquisa

A influência do Profmat no aprendizado dos egressos sobre a utilização de materiais didático-pedagógicos lúdicos em sala de aula é um aspecto extremamente importante. Além disso, ressaltamos que 5,76% dos que não utilizam esses materiais consideraram como adequado com limitações o conhecimento obtido durante o Profmat na Ufal.

2.6. Conclusões

Nacionalmente, os egressos do Profmat na Ufal têm se destacado no que diz respeito à produção de resultados positivos. De fato, segundo Carneiro e Spinetti, ver [12], o Trabalho de Conclusão de 79% dos egressos entrevistados foi aplicado em sala de aula. Os egressos foram questionados se acreditam que sua formação no Profmat impactou no desempenho dos seus alunos. Esse aspecto apareceu como um ponto forte do Programa: 94% dos que responderam à pesquisa afirmaram que houve impacto, sendo que, para 49%, a formação impactou totalmente [12].

A Matemática, como área do conhecimento extremamente importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da cidadania dos alunos, tem se apropriado de diversas práticas didático-pedagógicas que auxiliam o estudante na compreensão dos conceitos de espaço e forma, grandezas e medidas, números e operações e tratamento da informação. Tais conteúdos, que integram a Educação Básica, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, ver [10], e recentemente detalhados na BNCC, são aprofundados ao longo do mestrado do Profmat.

Considerando que a maioria absoluta, isto é, 98,42% dos egressos do Profmat da Ufal, atua na rede pública de ensino em Alagoas, é perceptível que esse Programa contribui diretamente com a melhoria da aprendizagem dos estudantes em Matemática por meio de metodologias envolvendo materiais didático-pedagógicos lúdicos.

Como resultado desta pesquisa conseguimos descrever a atuação desses egressos em sala de aula mediante o uso efetivo dos materiais didático-pedagógicos lúdicos em suas práticas pedagógicas, destacando-se as áreas de Álgebra, Aritmética, Estatística, Geometria e Probabilidade. A pesquisa também aponta que embora o Profmat não tenha uma atividade específica voltada para o uso de materiais didático-pedagógicos lúdicos, os egressos do Profmat na Ufal foram influenciados pelo Programa acerca de seu aprendizado sobre o uso de tais materiais em sua prática em sala de aula de Matemática.

A respeito da utilização dos materiais didático-pedagógicos lúdicos pelos egressos do Profmat na Ufal, mostrou-se que a maioria desses professores não só utilizam esses recursos como também identificam melhorias significativas na aprendizagem de seus estudantes. Ademais, assinalamos a influência do Programa no aprendizado de 61,5% dos egressos com relação à utilização desses materiais.

Segundo a análise das respostas do questionário aplicado, conclui-se que os respondentes consideram que tais materiais valorizam as áreas de conteúdos matemáticos segundo os PCNs. É notável ainda que os egressos assinalaram a contribuição na aprendizagem dos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental, bem como do Ensino Médio, por meio destes materiais, etapas mais evidenciadas na formação do mestrado profissional.

É importante ressaltar que dentre as justificativas apresentadas por egressos que não utilizam materiais didático-pedagógicos lúdicos, nenhum deles alegou falta de conhecimento sobre esses métodos. Isto é justificável pelo fato do Profmat exigir que o Trabalho de Conclusão de Curso do mestrando esteja relacionado diretamente com algum tema da Educação Básica e, além disso, produza impacto na sala de aula. Nesse mestrado, dos 4.244 trabalhos de conclusão disponíveis, ver [35], 107 deles mencionam diretamente em seus títulos o termo jogo. Acerca desses trabalhos, destacamos que um deles foi realizado por um dos egressos do Profmat na Ufal. Outrossim, 258 dissertações apresentam o termo GeoGebra no título, sendo quatro delas de autoria de egressos desse mestrado profissional na Ufal. Isso confirma a influência do Profmat no aprendizado e na efetiva aplicação dos materiais didático-pedagógicos lúdicos no dia a dia em sala de aula por tais egressos, conforme apontado nessa pesquisa.

O significativo aumento de professores com o mestrado profissional em Matemática que exercem a docência em Alagoas, cuja maioria absoluta faz uso dos materiais didático-pedagógicos lúdicos, conforme mostramos neste artigo, contribui fortemente com a evolução da aprendizagem dos alunos em Matemática e, conseqüentemente, para um maior avanço na melhoria dos indicadores da educação do Estado.

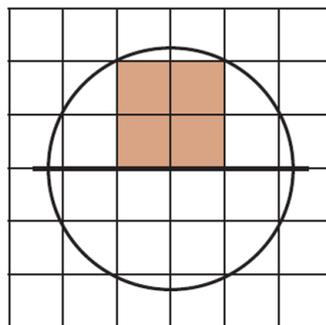
3. UMA DEMONSTRAÇÃO VISUAL

Neste texto, usando as estratégias “Trace uma figura” e “Explore as simetrias”, as quais fazem parte da lista das doze estratégias de Loren C. Larson, ver [20], obtivemos uma resolução visual do seguinte problema:

Qual a relação entre a área do quadrado inscrito num semicírculo e a área do quadrado inscrito num círculo de mesmo raio?

Inicialmente, construímos um semicírculo e inscrevemos um quadrado inserido numa malha quadriculada, ver Figura 3.1.

Figura 3.1 Quadrado inscrito num semicírculo

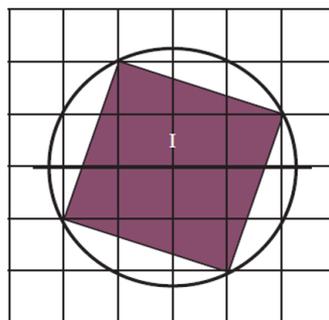


Fonte: Autoria própria

Agora, construímos um quadrado inscrito num círculo de raio igual ao semicírculo anteriormente construído (Figura 3.2).

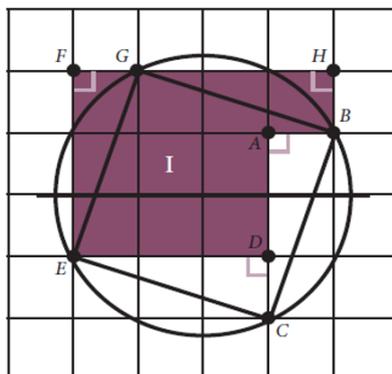
Por outro lado, a área do quadrado que está inscrito no círculo (Figura 3.2), é igual à área de I (Figura 3.3), tendo em vista que o triângulo ABC é congruente ao triângulo FEG (caso LLL) e o triângulo DCE é congruente a HBG (caso LLL) e, conseqüentemente, possuem a mesma área.

Figura 3.2 Quadrado inscrito num círculo



Fonte: Autoria própria

Figura 3.3 Quadrado inscrito num círculo e triângulos congruentes



Fonte: Autoria própria

Concluimos o resultado observando que a área de I (ver Figura 3.3) é igual a 10 quadrados da malha, enquanto a área do quadrado inscrito no semicírculo é igual a 4 quadrados da malha. Portanto, a área do quadrado inscrito num semicírculo é igual a $2/5$ da área do quadrado inscrito num círculo de mesmo raio.

Agradecimentos. As autoras são gratas ao Hilário Alencar pelos comentários e orientação neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALSINA, C; NELSEN, R. B. **Math Made Visual**. MAA, 2006.
- [2] ALVES, C.; MORAIS, C. Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca & P. Canavarro (Orgs.), **Números e álgebra: na aprendizagem da matemática e na formação de professores**, p. 335-349. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Seção de Educação Matemática, Lisboa, 2006.
- [3] BARRETO, C. A. **A Geometria do Origami como Ferramenta para o Ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica**. 2013. 86p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.
- [4] BEDIM, A. A. P. **O ensino de conceitos geométricos no 2º ano do ensino fundamental usando a *webquest* “viajando nas obras de arte”**. 2011. 174p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2011.
- [5] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)**. Brasília: INEP, 2017c. Disponível em: <<http://ideb.inep.gov.br/resultado/>>. Acesso em: 26 nov. 2018.
- [6] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)**. Brasília: 2017d. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/saeb-2017-revela-queapenas-1-6-dos-estudantes-brasileiros-do-ensino-medio-demonstraram-niveis-de-aprendizagem-considerados-adequados-em-lingua-portug/21206>. Acesso em: 16 nov. 2018.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Ensino Fundamental**. 2017a, 274p. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 02 nov. 2018.
- [8] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Ensino Médio**. 2018, 526p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC-EM_Vers%C3%A3oCompleta_EmRevis%C3%A3o_06dez.pdf>. Acesso em: 08 dez. 2018.
- [9] BRASIL. Ministério da Educação. **Educação Básica: Censo Escolar**. 2017b, 24p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=81861-divulgacao-censo-2017-vi-pdf&category_slug=janeiro-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em 26 de maio de 2019.
- [10] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997, 142p.

- [11] CARNEIRO, F.; SPINETI, C. **Profmat**: avaliação de possíveis impactos. 2018. Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/wpcontent/uploads/sites/23/2018/07/PROFMAT-Avaliacao-de-possiveis-impactos.pdf>>. Acesso em: 8 nov. 2018.
- [12] CARNEIRO, F.; SPINETI, C. **Profmat**: uma reflexão e alguns resultados. 2017. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wpcontent/uploads/sites/23/2017/06/PROFMAT_relatorio_DIGITAL.pdf>. Acesso em: 8 nov. 2018.
- [13] CORDEIRO, M. J.; SILVA, V. N. A importância dos jogos para a aprendizagem da Matemática. **Revista Científica Eletrônica de Ciências Sociais Aplicadas da EDUVALE**, Jaciara, v. 5, n. 7, p. 1-9, nov. 2012.
- [14] COSTA, L. C.; GUERATO, E. Jogos pedagógicos & oficinas: uma parceria nas aulas de Matemática. **REnCiMa**, Anais do II Seminário Hispano-Brasileiro de Avaliação das Atividades Relacionadas com Ciência, Tecnologia e Sociedade, São Paulo, v. 3, n. 3, p. 304-313. out. 2012.
- [15] D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM, Brasília, v. 2, n. 2, p. 5. 1989.
- [16] DESCARTES, R. **Oeuvres de Descartes**. Ch. Adam & P. Tannery, Paris: Vrin/CNRS, 1964.
- [17] GALLANT, C. D. Completing the square. **Mathematics Magazine**, v. 56, n. 2, p. 110, 1983.
- [18] KOBAYASHI, Y. Proof Without Words: Componendo et Dividendo, a Theorem on Proportions. **The College Mathematics Journal**, v. 45, n. 2, p. 115, 2014.
- [19] KUNG, S. H. Area and difference formulas. **Mathematics Magazine**, v. 62, n. 5, p. 317, 1989.
- [20] LARSON, L. C. **Problem-Solving Through Problems**. Springer, New York, 1983.
- [21] LIMA, J. F. (Coord.). **Avaliação Suplementar Externa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)**. Brasília: CAPES, 2013.
- [22] MABRY, R. Proof Without Words: $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3}$. **Mathematics Magazine**, v. 72, n. 1, p. 63, 1999.
- [23] MANSO, R, L, D. **Origami**: Uma Abordagem Pedagógica para o Ensino da Geometria no 9º ano. 2008. 244p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.
- [24] MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5.^a ed. São Paulo: Atlas, 2003.

- [25] NAVARRO, E. P. **Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática com Atividades de Aplicação em Geometria Analítica: o ponto e a reta.** 2013. 58 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2013.
- [26] NELSEN, R. B. One figure, six identities. **The College Mathematics Journal**, v. 31, n. 2, p. 145-146, 2000.
- [27] OLIVEIRA, R. A. **Caderno de Atividades e Jogos: material dourado e outros recursos.** Paraná, 2012. Disponível em: <http://www.londrina.pr.gov.br/dados/images/stories/Storage/sec_educacao/canal_educativo/mat_material_dourado.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2018.
- [28] OLIVEIRA, S. G.; CALEJON, L. M. C. O jogo torre de Hanói para o ensino de conceitos matemáticos. **REnCiMa**, São Paulo, v. 7, n. 4, p. 149-158, 2016.
- [29] PEREIRA, E.; GUERRA, E. A. A utilização de *applets* no GeoGebra para a aprendizagem da trigonometria no Ensino Médio. **REnCiMa**, São Paulo, v. 7, n. 3, p. 53-72, 2016.
- [30] PIMENTA, A. L.; GAZIRE, E. S. **Construindo Poliedros Platônicos com Origami: Uma perspectiva axiomática.** 1ª ed. Novas Edições Acadêmicas, 2018.
- [31] POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro. Interciência, 1995.
- [32] POLYA, G. **Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of Plausible Inference.** Princeton. Princeton University Press, v. 2, 1968.
- [33] POLYA, G. **Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics.** Princeton. Princeton University Press, v. 1, 1990.
- [34] PROFMAT. **Análise Profmat: Quem é o professor de Matemática da Escola Básica? Um perfil qualitativo-quantitativo extraído dos Exames de Acesso ao PROFMAT.** Rio de Janeiro: 2013. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/SBM_PROFMAT_relatorio.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2018.
- [35] PROFMAT. **Dissertações do Profmat.** Rio de Janeiro: 2018. Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>>. Acesso em: 12 dez. 2018.
- [36] PROFMAT. **Regimento Profmat.** Rio de Janeiro: 2016, p. 1. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wpcontent/uploads/sites/23/2016/08/Regimento_Profmat_2016.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2018.
- [37] SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving.** New York. Academic Press, 1985.
- [38] SCHOENFELD, A. H. Pólya, Problem Solving, and Education. **Mathematics Magazine**, v. 60, p. 283-291, 1987.

- [39] SELLTIZ, C. et al. **Métodos de pesquisa nas relações sociais**. 2^a. ed. São Paulo. Herder: Edusp, 1967.
- [40] SIPKA, T. A. The law of cosines. **Mathematics Magazine**, v. 61, n. 4, p. 259, 1988.
- [41] TAKAI, A. M. **Perspectivas do Profmat**: política pública em construção. 2017. 175p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- [42] TEIXEIRA, S. A.; NAKATA. M. K. A evolução artística e científica do origami: Um estudo teórico e prático sobre a prática e técnicas das dobraduras. **Palíndromo**, Florianópolis, v. 9, n. 18, p.142-163, mai./ago. 2017.
- [43] UNAL, H. Double sum for sine and cosine. **The College Mathematics Journal**, v. 41, n. 5, p. 392, 2010.
- [44] VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4.^a ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.