UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
CAMPUS A. C. SIMÕES
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

RICARDO BIONI LIBERALQUINO

TEOREMAS DE MAZUR E DE PERRON

MACEIÓ
2021

RICARDO BIONI LIBERALQUINO

TEOREMAS DE MAZUR E DE PERRON

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em matemática em Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus A. C. Simões.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena.

Maceió

2021

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Roselito de Oliveira Santos

L695t Liberalquino, Ricardo Bioni.
Teoremas de mazur e de Perrone / Ricardo Bioni Liberalquino. - 2021.
51 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Nobrega de Oliveira Lucena.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 51.

1. Matemática. 2. Teoremas-Mazur / Perron. 3. Vetores. I. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DEMATEMÁTICA BACHARELADO
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.mat@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Bacharelado que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **RICARDO BIONI LIBERALQUINO**, matrícula nº **20112345**, do curso de **TEOREMAS DE MAZUR E DE PERRON**", recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: ___**10**____ (**Dez**), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena (Orientador): ___10_____
Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira: ___10_____
Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira: ___10_____

Maceió, ___23__ de _______Dezembro_________ de 2021.

gov.br Documento assinado digitalmente
Rafael Nobrega de Oliveira Lucena
Data: 23/12/2021 23:01:23-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

gov.br Documento assinado digitalmente
ALAN ANDERSON DA SILVA PEREIRA
Data: 24/12/2021 10:16:46-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira

Krerley Olivi

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira

Dedico em memória ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os amigos, colegas, familiares, que estiveram presentes em algum momento da jornada do meu ingresso à UFAL até a conclusão deste trabalho, especialmente, a Adán, Alan, Diego, Diogo, Isaia, Krerley, Maurizio, Rafael, Stefano, Maria José.

“No one shall drive us out of the paradise that Cantor has created."

David Hilbert

Resumo do Trabalho

Neste trabalho, serão demonstrados teoremas que permitem o tratamento de espaços vetoriais de dimensão arbitrária e apresentados alguns importantes resultados que surgem ao se adicionar a um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ uma estrutura de espaço vetorial topológico, espaço normado ou espaço de Banach.

Em particular, serão demonstrados o teorema de Hahn-Banach analítico, geométrico, e o teorema de Mazur, a partir do qual será demonstrado o teorema de Perron para matrizes com entradas positivas.

Abstract

In this monography, we prove theorems that apply to vector spaces of arbitrary dimension and present some important results that arise when we add to a vector space over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ a structure of topological vector space, normed space or Banach space.

In particular, we prove the analytical and geometrical Hahn-Banach theorems and Mazur theorem, from which we derive Perron's theorem for matrices with positive entries.

SUMÁRIO

REFERÊNCIAS . . . 51

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns resultados, com aplicações à teoria de sistemas dinâmicos, que possuem uma descrição geométrica, embora se refiram a espaços bastante abstratos: os espaços vetoriais topológicos e, em particular, os espaços de Banach.

Esses espaços englobam muitos objetos de interesse, como as famílias de funções. Tal flexibilidade possui um preço: trata-se de espaços de dimensão infinita, que demandam rigorosos fundamentos lógicos. Por isso, na seção "Noções sobre Espaços Vetoriais", trazem-se as definições e os resultados básicos ao tratamento desses conceitos. A seção seguinte, "Funcionais Lineares", fornece ferramentas indispensáveis ao estudo dos espaços vetoriais de dimensão infinita.

Provavelmente o teorema mais famoso acerca desses espaços é o de Hahn-Banach, que possui duas versões: a analítica e a geométrica. A partir delas, obtém-se um resultado de maior conteúdo geométrico: o teorema de Mazur. Esses teoremas são tratados na seção "Os Teoremas de Hahn-Banach e de Mazur".

Por fim, é apresentado o teorema de Perron, diretamente relacionado à teoria de sistemas dinâmicos. Ele refere-se a matrizes positivas de dimensão finita, porém pode ser obtido, a partir do conceito de cones, como corolário de proposições válidas em dimensão infinita. Isso é demonstrado na seção final "Cones Duais e o Teorema de Perron".

2 Noções de Espaços Vetoriais

Esta seção apresenta o conceito abstrato de espaços vetoriais e alguns teoremas gerais que valem no contexto de dimensão arbitrária. Também apresenta alguns conceitos correlatos, como normas, espaços de Banach e aplicações lineares.

2.1 DEFINIÇÃO DE ESPAÇO VETORIAL

Definição 2.1.1. Dado um corpo $\mathbb{K}$, suponhamos definido um grupo abeliano aditivo $(V, +)$ e uma associação

$$\mathbb{K} \times V \to V$$
$$(\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

que satisfaça as seguintes condições:

a $\forall v \in V : 1v = v$, onde 1 é a unidade de $\mathbb{K}$;

b $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ v, w \in V : \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;

c $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;

d $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

Diremos então que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, denominaremos vetores os elementos de V e escalares os elementos de $\mathbb{K}$. As operações $v \mapsto \alpha v$ e $v \mapsto a + v$, onde $a \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ serão chamadas, respectivamente, de *multiplicação escalar por* α e *translação por* a.

A seguinte proposição relaciona algumas propriedades das operações de um espaço vetorial:

Proposição 2.1.1. *Se V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ cujo vetor nulo (elemento zero de V) é θ, então:*

1. $\forall v \in V : 0v = \theta$*, onde 0 é o zero de* $\mathbb{K}$*;*

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha\theta = \theta$*;*

3. $c \in \mathbb{K}\backslash\{0\},\ cv = \theta \implies v = \theta$*;*

4. $\forall v \in V :\ (-1)v = -v$*, onde* $-v$ *é o inverso* $aditivo$ *de* v*.*

Demonstração.

1. $\forall v \in V : \theta = 0v + (-0v) = (0+0)v + (-0v) = (0v + 0v) + (-0v) = 0v + [0v + (-0v)] = 0v + \theta = 0v$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \theta = \alpha\theta + (-\alpha\theta) = \alpha(\theta + \theta) + (-\alpha\theta) = (\alpha\theta + \alpha\theta) + (-\alpha\theta) = \alpha\theta + [\alpha\theta + (-\alpha\theta)] = \alpha\theta + \theta = \alpha\theta$

3. $c \in \mathbb{K}\backslash\{0\},\ cv = \theta \implies v = 1v = (c^{-1}c)v = c^{-1}(cv) = c^{-1}\theta = \theta$

4. $\forall v \in V : (-1)v = (-1)v + \theta = (-1)v + [v + (-v)] = [(-1)v + v] + (-v) = [(-1)v + 1v] + (-v) = [(-1) + 1]v + (-v) = 0v + (-v) = \theta + (-v) = -v$

$\square$

Usaremos a mesma notação 0 para o zero do corpo $\mathbb{K}$ e o vetor nulo de V.

Definição 2.1.2. Dado um subconjunto M de um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$, diremos que M é linearmente independente (sobre $\mathbb{K}$) se, para todo subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de M, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Caso contrário, diremos que M é linearmente dependente (sobre $\mathbb{K}$).

Exemplo 2.1.1. Se $\mathbb{R}$ for visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, o subconjunto $M = \{\log p :$ p é um número primo$\}$ será linearmente independente, devido à unicidade (a menos da ordem dos fatores) da escrita de um número natural $n \geq 2$ como produto de números primos.

Definição 2.1.3. Diremos que um conjunto M é parcialmente ordenado pela relação $\leq$, ou que $\leq$ é uma ordenação parcial sobre M, se $\leq$ for uma relação binária sobre M com as seguintes propriedades:

1. $\forall a \in M : a \leq a$; (Reflexividade)

2. $a \leq b,\ b \leq a \implies a = b$; (Antissimetria)

3. $a \leq b,\ b \leq c \implies a \leq c$. (Transitividade)

Se, para quaisquer elementos $a, b \in M$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$, diremos que $\leq$ é uma ordenação total.
Um *majorante* de um subconjunto $S \subset M$ é um elemento $m \in M$ tal que $\forall x \in S : x \leq m$.
Um *elemento maximal* de M é um $w \in M$ tal que $w \leq x \implies x = w$.

Exemplo 2.1.2. A relação de inclusão em uma família de conjuntos é uma ordenação parcial. Com essa ordenação, a família dos subconjuntos próprios de um conjunto W com pelo menos dois elementos possui vários elementos maximais, enquanto um subconjunto do tipo $\{\{x\}, W\backslash\{x\}\}$ não possui majorante. Note no entanto que um elemento maximal em um conjunto totalmente ordenado, se existir, é único.

Definição 2.1.4. Um elemento maximal não vazio da família (parcialmente ordenada através da relação de inclusão) dos conjuntos linearmente independentes de um espaço vetorial é denominado uma *base de Hamel* desse espaço.

Teorema 2.1.1. *Seja B uma base de um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dado um elemento qualquer $x \in X$, existe uma única função $\alpha : B \to \mathbb{K}$ tal que $\sum\limits_{v \in B} \alpha(v)\, v = x$ e $\alpha(v) = 0$ exceto para um número finito de elementos de B.*

Demonstração. Para demonstrar a existência, consideramos os dois casos $x \in B$ e $x \notin B$. Se $x \in B$, basta definir a função α por $\alpha(v) = 1$ quando $v = x$, $\alpha(v) = 0$ quando $v \in B\backslash\{x\}$. Se $x \notin B$, então, pela maximalidade de B, temos que $B \cup \{x\}$ é linearmente dependente, logo existe um subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de $B \cup \{x\}$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Algum dos x_i, digamos x_k, é igual a x com $\alpha_k \neq 0$, pois B é linearmente independente. Então, basta definir $\alpha(x_i) = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_k}$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $x_i \neq x$, $\alpha(v) = 0$ para $v \in B\backslash F$. A unicidade segue-se da seguinte observação: se α e β são funções com as propriedades descritas, $\sum\limits_{v \in B} \alpha(v)v = \sum\limits_{v \in B} \beta(v)v \implies \sum\limits_{v \in B} [\alpha(v) - \beta(v)]v = 0$, e $\alpha(v) - \beta(v) \neq 0$ para uma quantidade finita de vetores $v \in B$; então, $\alpha(v) - \beta(v) = 0$ para cada $v \in B$, pois B é um conjunto linearmente independente e $\alpha(v) = \beta(v)$ para cada $v \in B$, ou seja, $\alpha = \beta$. $\square$

Definição 2.1.5. Dado um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$, um subconjunto $S \subset X$ e uma função $\alpha : S \to \mathbb{K}$ com $\alpha(v) = 0$ exceto para um número finito de elementos de S, diremos que $\sum\limits_{v \in S} \alpha(v)$ é uma *combinação linear* de elementos de S. Se S é tal que todo $x \in X$ é uma combinação linear de elementos de S, diremos que S é um conjunto de *geradores* de X.

É claro que todo espaço vetorial X possui algum conjunto de geradores, pois X é, ele próprio, um tal conjunto. Para demonstrar que todo espaço vetorial que possua algum vetor não-nulo tem uma base (de Hamel), usaremos o Lema de Zorn, equivalente ao Axioma da Escolha. Uma demonstração dessa equivalência pode ser encontrada em [HEWITT; STROMBERG, 1975].

Axioma 2.1.1 (Axioma da Escolha). *Seja $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ uma família de conjuntos tal que $I \neq \phi$ e $\forall \iota \in I : A_\iota \neq \phi$. Então, existe uma função $x : I \to \bigcup\limits_{\iota \in I} A_\iota$ tal que:*

$$\forall \iota \in I : x(\iota) \in A_\iota.$$

Definição 2.1.6. Uma *cadeia* $\mathfrak{C}$ de um conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado pela restrição da relação $\leq$.

Notação 2.1.1. Se β é uma família de conjuntos, denotaremos por $\cup\beta$ a reunião $\bigcup\limits_{B \in \beta} B$.

Axioma 2.1.2 (Lema de Zorn). *Se em um conjunto não-vazio parcialmente ordenado $(M, \leq)$ toda cadeia $\mathfrak{C} \subset M$ possuir um majorante, então M possui algum elemento maximal.*

Teorema 2.1.2. *Seja X um espaço vetorial. Dados um subconjunto linearmente independente e não-vazio A e um conjunto de geradores S de X com $A \subset S$, existe uma base de Hamel B de X tal que $A \subset B \subset S$. Em particular, se X possui algum vetor não-nulo x, então X possui uma base (de Hamel).*

Demonstração. A relação de inclusão define uma ordenação parcial em qualquer família de conjuntos. Em particular, na família $\mathfrak{I}$ dos subconjuntos de S linearmente independentes que contêm A.

$\mathfrak{I}$ é não vazio, pois $A \in \mathfrak{I}$. Além disso, dada uma cadeia $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{I}$, temos que $\cup\mathfrak{C}$ é um majorante para $\mathfrak{C}$, pois para todo $C \in \mathfrak{C}$, $C \subset \cup\mathfrak{C}$ e $\cup\mathfrak{C} \in \mathfrak{I}$. De fato, $\cup\mathfrak{C} \subset S$ e dado um subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\cup\mathfrak{C}$, temos $x_1 \in C_1, \ldots,\ x_n \in C_n$ para certos conjuntos $C_1, \ldots, C_n$ de $\mathfrak{C}$, e por ser $\mathfrak{C}$ uma cadeia, $C_i \subset C_k$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e algum $k \in \{1, \ldots, n\}$, donde $F \subset C_k$ e então F é linearmente independente. Como o subconjunto finito F foi tomado arbitrariamente, $\cup\mathfrak{C}$ é linearmente independente, donde $\cup\mathfrak{C} \in \mathfrak{I}$.

O Lema de Zorn mostra então que $\mathfrak{I}$ possui algum elemento maximal, digamos B. Suponhamos que B não seja uma base de X. Então, existe $x \in X$ tal que $B \cup \{x\}$ seja linearmente independente. Por outro lado, x é uma combinação linear de elementos de S (pois S é um conjunto de geradores), e cada elemento s de S é uma combinação linear de elementos de B, pois caso $s \notin B$, então $B \cup \{s\}$ é linearmente dependente, pela maximalidade de B. Daí segue-se que x é uma combinação linear de elementos de B, contradizendo nossa hipótese.

A segunda afirmação do teorema é verificada tomando $A = \{x\}$ e $S = X$. □

Em geral, não existe unicidade para as bases de um espaço vetorial. No entanto, dadas duas bases quaisquer A e B de um espaço vetorial, existe uma bijeção entre elas. Para demonstrar esse resultado, faremos uso do próximo teorema.

Teorema 2.1.3 (Cantor–Bernstein–Schröder)**.** *Se existem funções injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$ entre conjuntos A e B, então existe uma bijeção $h : A \to B$.*

A demonstração é consequência imediata do seguinte:

Lema 2.1.1. *Se existe uma função injetiva $\varphi : C \to D$ e $D \subset C$, então existe uma função bijetiva $\Phi : C \to D$.*

Demonstração. Definamos indutivamente uma sequência de subconjuntos de C pondo $C_0 = C\backslash D$ e $C_n = \varphi(C_{n-1})$ para cada inteiro positivo n. Seja $\mathscr{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. É óbvio que $D\backslash\mathscr{C} \subset C\backslash\mathscr{C}$. Por outro lado, $x \in C\backslash\mathscr{C} \implies x \in C\backslash\mathscr{C} \wedge x \in C\backslash C_0 \implies x \in C\backslash\mathscr{C} \wedge x \in D \implies x \in D\backslash\mathscr{C}$. Logo, $C\backslash\mathscr{C} = D\backslash\mathscr{C}$. Consideremos então a função $\Phi : C \to D$ dada por:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in \mathscr{C} \\ x, & \text{se } x \in D\backslash\mathscr{C} \end{cases}$$

Dado qualquer $y \in D$, temos que $y \in \mathscr{C}$ ou $y \in D\backslash\mathscr{C}$. No primeiro caso, $y \notin C_0$, pois $C_0 = C\backslash D$. Segue-se daí que $y \in C_n$ para algum inteiro positivo n, donde existe $x \in C_{n-1}$ tal que $\Phi(x) = y$. No segundo caso, basta tomar $x = y$ para que $\Phi(x) = y$. Portanto, Φ é sobrejetiva.

É claro que $z \in \mathscr{C} \implies \Phi(z) \in \mathscr{C}$ e $z \in D\backslash\mathscr{C} \implies \Phi(z) \in D\backslash\mathscr{C}$. Logo, $\Phi(x) = \Phi(y) \implies (x, y \in \mathscr{C}) \vee (x, y \in D\backslash\mathscr{C})$, donde $\Phi(x) = \Phi(y) \implies (\varphi(x) = \varphi(y)) \vee (x = y) \implies x = y$, o que mostra que Φ é injetiva. Como Φ é sobrejetiva, concluímos que Φ é bijetiva. □

Demonstração do teorema. Podemos tratar g como uma função bijetiva $g : B \to g(B)$. Seja $\varphi = g \circ f$. Então, $\varphi : A \to g(B)$ é injetiva (pois f e g são injetivas) e $g(B) \subset A$. Pelo lema, existe uma função bijetiva $\Phi : A \to g(B)$. Concluímos que $h : A \to B$ dada por $h = g^{-1} \circ \Phi$ é uma bijeção. $\square$

Teorema 2.1.4. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam A e B duas bases (de Hamel) quaisquer de X. Então, existe uma bijeção $h : A \to B$.*

Demonstração. Com o uso do Teorema de Cantor–Bernstein–Schröder, basta demonstrarmos que existe uma função injetiva $f : A \to B$ para bases A e B quaisquer. Para isso, consideremos a família $\mathfrak{G}$ das funções injetivas g tais que:

1. $\mathrm{D}(g) \subset A$; (onde $\mathrm{D}(g)$ é o domínio de g)

2. $\mathrm{Im}(g) \subset B$; (onde $\mathrm{Im}(g)$ é a imagem de g)

3. $\mathrm{Im}(g) \cup (A \backslash \mathrm{D}(g))$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$.

$\mathfrak{G}$ é não vazia, pois a função vazia $\phi : \phi \to B$ pertence a $\mathfrak{G}$. Como funções são conjuntos, podemos ordenar $\mathfrak{G}$ parcialmente através da relação de inclusão. Dada uma cadeia $\mathfrak{C}$ de elementos de $\mathfrak{G}$, afirmamos que $\cup\mathfrak{C}$ é um elemento de $\mathfrak{G}$ e portanto um majorante de $\mathfrak{C}$.
De fato, dados quaisquer $(x, y),\ (x', y) \in \cup\mathfrak{C}$, vale $(x, y) \in g_1,\ (x', y) \in g_2$ para certos $g_1,\ g_2 \in \mathfrak{C}$. Como $\mathfrak{C}$ é uma cadeia, vale $g_1 \subset g_2$ ou $g_2 \subset g_1$, digamos $g_2 \subset g_1$. Então, $(x, y),\ (x', y) \in g_1$, e como g_1 é uma função, temos $x = x'$. Resumindo, $(x, y),\ (x', y) \in \cup\mathfrak{C} \implies x = x'$. Usando também o fato que $\cup\mathfrak{C}$ é uma relação, temos que $\cup\mathfrak{C}$ é uma função. A injetividade de $\cup\mathfrak{C}$ é provada de maneira semelhante. Resta demonstrar que $\cup\mathfrak{C}$ satisfaz as condições 1, 2 e 3.
De $(x, y) \in \cup\mathfrak{C} \implies \exists g \in \mathfrak{C} : (x, y) \in g$ e de $(x, y) \in g \implies x \in \mathrm{D}(g),\ y \in \mathrm{Im}(g)$, temos que $(x, y) \in \cup\mathfrak{C} \implies x \in \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{D}(g),\ y \in \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{Im}(g)$. Então, $\mathrm{D}(\cup\mathfrak{C}) \subset \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{D}(g) \subset A$ e $\mathrm{Im}(\cup\mathfrak{C}) \subset \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{Im}(g) \subset B$. Assim, as condições 1 e 2 são satisfeitas.
Concluímos de $g \subset \cup\mathfrak{C}$ para todo $g \in \mathfrak{C}$ e das inclusões anteriores que $\mathrm{D}(\cup\mathfrak{C}) = \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{D}(g)$ e $\mathrm{Im}(\cup\mathfrak{C}) = \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{Im}(g)$, logo basta mostrar que $\bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} \mathrm{Im}(g) \cup \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} [A \backslash \mathrm{D}(g)]$ é linearmente independente. Para isso, tomamos um subconjunto finito $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e encontramos $g_i \in \mathfrak{C}$ tal que $x_i \in \mathrm{Im}(g_i) \cup \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} [A \backslash \mathrm{D}(g)]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sendo $\mathfrak{C}$ uma cadeia, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g_i \subset g_k$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então, $F \subset \mathrm{Im}(g_k) \cup \bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} [A \backslash \mathrm{D}(g)]$, e como $\bigcup\limits_{g \in \mathfrak{C}} [A \backslash \mathrm{D}(g)] \subset [A \backslash \mathrm{D}(g_k)]$, vale $F \subset \mathrm{Im}(g_k) \cup [A \backslash \mathrm{D}(g_k)]$. Como $g_k \in \mathfrak{G}$, $\mathrm{Im}(g_k) \cup [A \backslash \mathrm{D}(g_k)]$ é linearmente independente, e seu subconjunto finito F também é.
A condição 3 está então demonstrada, e assim $\cup\mathfrak{C} \in \mathfrak{G}$. Agora, o Lema de Zorn aplicado a $\mathfrak{G}$ fornece um elemento maximal $f \in \mathfrak{G}$. Devemos provar que $\mathrm{D}(f) = A$. Suponhamos que $A \backslash \mathrm{D}(f) \neq \phi$. Então, existe $x_0 \in A \backslash \mathrm{D}(f)$, e como B é uma base, x_0 expressa-se como combinação linear de elementos de B. Da independência linear de $\mathrm{Im}(f) \cup [A \backslash \mathrm{D}(f)]$, concluímos que $\mathrm{Im}(f) \neq B$. Seja $y_0 \in B \backslash \mathrm{Im}(f)$. y_0 expressa-se de forma única como combinação linear

de elementos de A. Se algum dos termos com coeficiente não nulo nessa combinação, digamos x_1, pertence a $A \backslash \mathrm{D}(f)$, então $\tilde{f} = f \cup \{(x_1, y_0)\}$ é uma extensão própria de f que pertence a $\mathfrak{G}$. Caso contrário, tomamos $\tilde{f} = f \cup \{(x_0, y_0)\}$. Em qualquer caso, chegamos a uma contradição. Portanto, $A \backslash D(f) = \phi$.
Então, f é uma função injetiva de A em B, pois $\mathrm{D}(f) = A$ e $\mathrm{Im}(f) \subset B$, o que conclui a demonstração. $\square$

Demonstrado o teorema anterior, faz sentido a próxima definição.

Definição 2.1.7. A dimensão de um espaço vetorial X, denotada por dim X é o número cardinal de uma base (de Hamel) qualquer de X.

Definição 2.1.8. Um homomorfismo entre um espaço vetorial X e um espaço vetorial Y, ambos sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, é dita uma aplicação ($\mathbb{K}$-)linear. Ou seja, uma função $T : X \to Y$ é dita uma aplicação linear quando $T(x + y) = T(x) + T(y)$ e $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ quaisquer que sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ (na notação, não fazemos distinção entre as operações em X e as operações em Y). Um funcional ($\mathbb{K}$-)linear é uma aplicação linear $f : X \to \mathbb{K}$ de um espaço vetorial X no corpo $\mathbb{K}$ sobre o qual é tomado X, sendo $\mathbb{K}$ visto como um espaço vetorial (sobre si próprio). Um funcional linear não identicamente nulo é dito não trivial.

Exemplo 2.1.3. Se X é um espaço vetorial e M é um subespaço de X, podemos formar o espaço quociente X/M, cujos vetores são os conjuntos $x + M := \{x + m : m \in M\}$, para $x \in X$, e cujas operações são dadas por $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$ e $\alpha(x+M) = \alpha x+M$. Assim, surge naturalmente uma aplicação linear $q : X \to X/M$, $q(x) = x + M$, a qual denominaremos *aplicação quociente*.

Para certas aplicações lineares, usaremos a notação Tx, em vez de $T(x)$. A composição de duas aplicações lineares $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ será denotada por ST. A demonstração do teorema seguinte é consequência das definições e do teorema 2.1.1:

Teorema 2.1.5. *Uma aplicação linear $T : X \to Y$ está unicamente determinada dados os valores de T para cada vetor de uma base de X. Um funcional linear $f : X \to \mathbb{K}$ está unicamente determinado dados os valores de f para cada vetor de uma base de X.*

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

Definição 2.2.1. Dado um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo, uma *norma* em X é uma função real cujo valor em $x \in X$ é denotado por $||x||$ e que satisfaz as seguintes condições:

1. $x \neq 0 \implies \|x\| > 0$
2. $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdade Triangular)
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (onde $|\alpha|$ é a norma real ou complexa usual).

Uma *seminorma* é uma função real não negativa sobre X que satisfaz as condições 2 e 3. Fixada uma norma em um espaço vetorial X, diremos que $(X, \|\cdot\|)$, ou simplesmente X, é um espaço (vetorial) normado.

Definição 2.2.2. Diremos que uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto X é uma *topologia* sobre X e que (X, τ), ou simplesmente X, é um *espaço topológico* se τ possuir as seguintes propriedades:

1. $X \in \tau$ e $\phi \in \tau$;

2. A interseção de toda subcoleção finita de τ pertence a τ;

3. A união de toda subcoleção de τ pertence a τ.

Os elementos de uma topologia τ em X serão chamados *conjuntos abertos* de X e seus complementares em relação a X de *conjuntos fechados* de X. Dado um elemento $x \in X$, diremos que x é um *ponto* de X e que um subconjunto $V \subset X$ tal que $x \in U \subset V$ para algum $U \in \tau$ é uma *vizinhança* de x. A união de todos os abertos contidos num subconjunto $C \subset X$ será denominada o *interior* de C e seus pontos denominados pontos interiores de C. A interseção de todos os fechados que contêm C será denominada o *fecho* de C. Denotaremos o interior de C por $\mathring{C}$ e o fecho de C por $\overline{C}$.
Uma *base* para uma topologia τ em X é um subconjunto β da topologia tal que, para todo $A \in \tau$, existe $\beta_0 \subset \beta$ com $\cup\beta_0 = A$.
Se, para toda família $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos em X tal que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = X$, existir um subconjunto finito $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda = X$, diremos que X é um espaço (topológico) *compacto*. Um conjunto K de um espaço topológico qualquer (X, τ) será denominado compacto se for um espaço compacto na *topologia relativa (natural)* gerada por τ, $\tau_K = \{A \cap K : A \in \tau\}$.
Dados espaços topológicos $(X, \tau), (Y, \tau_1)$, uma função $f : X \to Y$ será dita *contínua* se, para todo aberto A de Y, $f^{-1}(A)$ for um aberto de X; e será dita contínua em um ponto $x_0 \in X$ se, para toda vizinhança V de $f(x_0)$, existir um aberto U de X tal que $f(U) \subset V$.

Observação 2.2.1. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada ponto $x \in X$. De fato, se f é contínua em cada $x \in X$, encontramos para um aberto qualquer $A \subset Y$ e cada $x \in f^{-1}(A)$ uma vizinhança $V_x \subset f^{-1}(A)$ de x, e assim um aberto $U_x \subset f^{-1}(A)$ com $x \in U_x$, de forma que $f^{-1}(A) = \bigcup\limits_{x\in f^{-1}(A)} U_x$ é um aberto de X. Reciprocamente, se $f : X \to Y$ é contínua e $x \in X$, como toda vizinhança V de $f(x)$ contém um aberto U tal que $f(x) \in U$ e como $f^{-1}(U)$ é aberto, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x. Portanto, f é contínua em cada $x \in X$.

Lema 2.2.1. *Dada uma coleção β de subconjuntos de um conjunto X, o conjunto τ de todas as uniões de subcoleções de β é uma topologia em X (ou seja, β é uma base para uma topologia em X) se, e somente se:*

1. $X = \cup\beta$*;*

2. $U, V \in \beta,\ x \in U \cap V \implies \exists W \in \beta : x \in W,\ W \subset U \cap V$*.*

Demonstração. a Se $\tau = \{\cup\beta_0 : \beta_0 \subset \beta\}$ é uma topologia em X, então $X = \cup\beta_0$ para algum $\beta_0 \subset \beta$, e como $\cup\beta \subset X$, temos que $X = \cup\beta$. Se $U, V \in \beta,\ x \in U \cap V$, então $U, V \in \tau$ e, como τ é uma topologia, $U \cap V \in \tau$. Logo, $\exists\beta_0 \subset \beta : U \cap V = \cup\beta_0$ e de $x \in U \cap V$ segue-se que $\exists W \in \beta_0 : x \in W,\ W \subset U \cap V$. Como $\beta_0 \subset \beta$, vale $W \in \beta$.

b Devemos provar que $\tau = \{\cup\beta_0 : \beta_0 \subset \beta\}$ é uma topologia em X quando β satisfaz as hipóteses do enunciado. Notemos que, por indução, a segunda delas estende-se a uma interseção finita qualquer. A outra, $X = \cup\beta$, mostra que $X \in \tau$. Então, como $\phi \subset \beta$, $\cup\phi = \phi \implies \phi \in \tau$, temos que τ cumpre a primeira condição para ser topologia.
Dada uma subcoleção finita qualquer $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de τ, seja $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Para todo $x \in A$, encontramos $B_{x_1} \subset A_1, \ldots, B_{x_n} \subset A_n$ tais que $x \in B_{x_i},\ B_{x_i} \in \beta$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Existe então $B_x \subset B_{x_1} \cap \cdots \cap B_{x_n}$ com $x \in B_x,\ B_x \in \beta$. Portanto, definindo $\beta_0 = \{B_x : x \in A\}$, vemos que $A = \cup\beta_0,\ \beta_0 \subset \beta$, donde $A \in \tau$.
Dada uma subcoleção arbitrária $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de τ, seja $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Para cada $x \in A$, podemos encontrar $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in A_\lambda$ e então algum $B_x \subset A_\lambda,\ B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x$. A subcoleção $\beta_0 = \{B_x : x \in A\}$ de β satisfaz $A = \cup\beta_0$. Logo, $A \in \tau$.

□

Proposição 2.2.1. *Dado um espaço normado* X*, o conjunto* $\{B(x,\epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$*, onde* $B(x,\epsilon) := \{y \in X : \|y - x\| < \epsilon\}$ *é dita a bola aberta de centro* x *e raio* ϵ*, é uma base para uma topologia em* X*.*

Demonstração. Seja $\beta = \{B(x,\epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$. Devemos mostrar que, dado qualquer $x \in X$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$ e que dados $B_1, B_2 \in \beta$ e $z \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \beta$ tal que $z \in B,\ B \subset B_1 \cap B_2$.
A primeira afirmação segue-se de $\|x - x\| = 0$ para todo $x \in X$, de forma que qualquer $x \in X$ pertence a toda bola aberta de centro x e raio $\epsilon > 0$. Seja x_1 o centro de B_1 na segunda afirmação. Como $z \in B_1$, $\|z - x_1\| = d_1 < \epsilon_1$, onde ϵ_1 é o raio de B_1. Definimos $r_1 = \epsilon_1 - d_1 > 0$ e r_2 de maneira semelhante para B_2. Tomando $r = \min\{r_1, r_2\}$ e usando a desigualdade $\|y - x\| \leq \|y - z\| + \|z - x\|$, válida para quaisquer $x, y \in X$, vemos que $B(z, r) \subset B_1 \cap B_2$. Como $r > 0$, $B(z, r) \in \beta$. □

Definição 2.2.3. Em um espaço normado X, a topologia gerada pelo conjunto das bolas abertas de X, $\{B(x,\epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$, é denominada a topologia da norma.

Ao usarmos termos como conjuntos compactos ou continuidade em um espaço normado X, estaremos nos referindo, a menos que dito o contrário, à topologia da norma de X.

Proposição 2.2.2. *Um conjunto* A *de um espaço normado* $(X, \|\cdot\|)$ *é aberto se, e somente se, possui uma bola aberta centrada em cada ponto de* A*.*

Demonstração. Basta mostrarmos que existe uma bola aberta centrada em cada ponto de um aberto arbitrário A, pois a recíproca decorre imediatamente da definição da topologia da norma. Seja A um aberto de X, e seja $x \in A$. Como o conjunto das bolas abertas de X é uma base para a topologia da norma, existem $z \in X, r > 0$ tais que $x \in B(z,r),\ B(z,r) \subset A$. Pondo $\epsilon = r - \|x - z\|$, concluímos com o uso da desigualdade $\|y - z\| \leq \|y - x\| + \|x - z\|$, válida para qualquer $y \in X$, que $B(x,\epsilon) \subset B(z,r)$, donde $B(x,\epsilon) \subset A$. $\square$

Corolário 2.2.1. *Uma aplicação $T : X \to Y$ entre espaços normados $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|_1)$ é contínua num ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \implies \|Tx - Tx_0\|_1 < \epsilon$.*

Exemplo 2.2.1. Se X é um espaço topológico e Y é um espaço normado sobre um corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo, o conjunto das funções contínuas $f : X \to Y$ torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $f + g$ definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in X$ e αf definida por $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ para cada $x \in X$. De fato, para quaisquer $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ e funções contínuas f, g de X em Y, a continuidade de f fornece uma vizinhança U de x_0 tal que $x \in U \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e a continuidade de g fornece uma vizinhança V de x_0 tal que $x \in V \implies \|g(x) - g(x_0)\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Então, a vizinhança $W = U \cap V$ de x_0 é tal que $x \in W \implies \|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|g(x) - g(x_0)\| < \epsilon$. Isso prova a continuidade de $f + g$ em cada $x_0 \in X$ e portanto a continuidade de $f + g$. Se $f : X \to Y$ é contínua, a continuidade de αf para $\alpha = 0$ é imediata. Também, se $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, dados quaisquer $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 tal que $x \in V \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \dfrac{\epsilon}{|\alpha|}$, donde $x \in V \implies \|(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)\| < \epsilon$, o que demonstra a continuidade de αf.

Definição 2.2.4. A *topologia produto* de um produto cartesiano $\prod\limits_{\iota \in I} X_\iota$ de espaços topológicos é a topologia gerada pelos conjuntos $\prod\limits_{\iota \in I} U_\iota$, onde cada U_ι é um aberto de X_ι e $U_\iota = X_\iota$ exceto para um número finito de $\iota \in I$.

Proposição 2.2.3. *Dados os espaços normados $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n)$, podemos tornar $X_1 \times \cdots \times X_n$ um espaço vetorial através das operações $(\xi_1, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$, $a(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (a\xi_1, \ldots, a\xi_n)$ e podemos definir uma norma por $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_1, \ldots, \|x_n\|_n\}$. A topologia da norma de $X_1 \times \cdots \times X_n$ será então igual à topologia produto desse espaço (onde os X_i são vistos como espaços topológicos com a topologia da norma).*

Demonstração. É óbvio que $X_1 \times \cdots \times X_n$ assim definido é um espaço normado. Denotando por τ a topologia produto e $\tau_{\|\cdot\|}$ a topologia da norma do espaço $X_1 \times \cdots \times X_n$, devemos provar que $\tau \subset \tau_{\|\cdot\|}$ e $\tau_{\|\cdot\|} \subset \tau$.

Dado qualquer $A \in \tau$, para cada $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in A$ podemos encontrar abertos $A_1 \subset X_1, \ldots, A_n \subset X_n$ tais que $x \in A_1 \times \cdots \times A_n$, $A_1 \times \cdots \times A_n \subset A$. Então, encontramos $\epsilon_i > 0$ tal que $\|\eta_i - \xi_i\|_i < \epsilon_i \implies \eta_i \in A_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pondo $\epsilon_x = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$,

vemos que a bola aberta $B(x, \epsilon_x)$ está contida em A. Logo, $A = \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon_x)$ e $A \in \tau_{\|\cdot\|}$.
Dado qualquer $A \in \tau_{\|\cdot\|}$, para cada $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in A$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $\|y - x\| < \epsilon_x \implies y \in A$. Seja $B_i(x, \epsilon_x)$ a bola aberta em X_i de centro ξ_i e raio ϵ_x, onde $i \in \{1, \dots, n\}$. Então, $A = \bigcup_{x \in A} [B_1(x, \epsilon_x) \times \cdots \times B_n(x, \epsilon_x)]$ e $A \in \tau$. □

O próximo teorema é um importante resultado sobre topologias produto. Uma demonstração pode ser encontrada em [DUNFORD; SCHWARTZ, 1963].

Teorema 2.2.1 (Teorema de Tychonoff)**.** *Um produto arbitrário de espaços compactos é compacto na topologia produto.*

Definição 2.2.5. Diremos que uma norma $\|\cdot\|$ é equivalente a uma norma $\|\cdot\|_0$, ambas sobre um mesmo espaço vetorial X, se existem reais positivos a, b tais que $\forall x \in X : a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$, e denotaremos por $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_0$.

Exemplo 2.2.2. As normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ sobre $\mathbb{R}^2$ dadas por $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\|(x_1, x_2)\|_0 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ são tais que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_0$. De fato, como $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{2}\max\{|x_1|, |x_2|\}$, temos que $\forall x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_0 \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_0$.

Proposição 2.2.4. *A equivalência de normas sobre um espaço vetorial X é uma relação de equivalência, isto é, reflexiva, simétrica e transitiva.*

Demonstração. Como $\forall x \in X : 1\|x\| \leq \|x\| \leq 1\|x\|$, temos $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$ para qualquer norma $\|\cdot\|$ sobre X, o que prova a reflexividade.
Se $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_0$, isto é, se existem constantes positivas $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in X : a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$, então $\forall x \in X : \frac{1}{b}\|x\| \leq \|x\|_0 \leq \frac{1}{a}\|x\|$, donde $\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|$, o que prova a simetria.
Se $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ e $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$, então existem constantes positivas $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in X : a_1\|x\| \leq \|x\|_1 \leq b_1\|x\|$ e $\forall x \in X : a_2\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b_2\|x\|_2$, logo $\forall x \in X : a_1 a_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b_1 b_2\|x\|_2$ e $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, o que prova a transitividade. □

O próximo teorema mostra a import,ncia da equivalência de normas:

Teorema 2.2.2. *Dadas duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ sobre um espaço vetorial X tais que $\|\cdot\|$ é equivalente a $\|\cdot\|_0$, a topologia da norma de $(X, \|\cdot\|)$ é igual à topologia da norma de $(X, \|\cdot\|_0)$.*

Demonstração. A equivalência das normas mostra que existem reais positivos a, b tais que $\forall x \in X : a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$. Reescrevendo, $\forall x \in X : \|x\|_0 \leq \frac{1}{a}\|x\|,\ \|x\| \leq b\|x\|_0$. Usaremos isso para mostrar que um aberto de $(X, \|\cdot\|)$ é união de bolas abertas de $(X, \|\cdot\|_0)$, e portanto um aberto de $(X, \|\cdot\|_0)$. Ou seja, estaremos mostrando que a topologia da norma de $(X, \|\cdot\|)$ está contida na topologia da norma de $(X, \|\cdot\|_0)$. A recíproca é semelhante.
Dado um aberto qualquer A de $(X, \|\cdot\|)$, para cada $x \in A$ existe uma bola aberta $B(x, \epsilon_x)$

tal que $B(x,\epsilon_x) \subset A$. Seja $B_0\left(x,\dfrac{\epsilon_x}{b}\right) = \{y \in X : \|y-x\|_0 < \dfrac{\epsilon_x}{b}\}$. Da desigualdade $\|y-x\| \leq b\|y-x\|_0$ segue-se que $B_0\left(x,\dfrac{\epsilon_x}{b}\right) \subset B(x,\epsilon_x)$, donde $B_0\left(x,\dfrac{\epsilon_x}{b}\right) \subset A$. Portanto, $A = \bigcup_{x\in A} B_0\left(x,\dfrac{\epsilon_x}{b}\right)$, onde cada $B_0\left(x,\dfrac{\epsilon_x}{b}\right)$ é uma bola aberta de $(X, \|\cdot\|_0)$. $\square$

Lema 2.2.2.

1. *Em um espaço topológico (X,τ), um conjunto fechado contido em um conjunto compacto é compacto.*

2. *A imagem por uma função contínua de um conjunto compacto é um conjunto compacto.*

Demonstração. 1. Basta mostrarmos que se C é um conjunto compacto e $F \subset C$ é fechado, então dada uma família qualquer $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos tal que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset F$, existe um subconjunto finito $\Lambda' \subset \Lambda$ com $\bigcup_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda \supset F$.
   Para isso, tomamos $\lambda_0 \notin \Lambda$ e definimos $A_{\lambda_0} = X \backslash F$ e $\Lambda_0 = \Lambda \cup \{\lambda_0\}$. Como F é fechado, A_{λ_0} é aberto. Portanto, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ é uma família de abertos tal que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} A_\lambda \supset C$. A compacidade de C fornece um subconjunto finito $\Lambda_0' \subset \Lambda_0$ tal que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0'} A_\lambda \supset C$. Então, $\Lambda' = \Lambda_0' \backslash \{\lambda_0\}$ é o subconjunto de Λ que procurávamos.

2. Sejam (X,τ), (Y,τ_1) espaços topológicos, $C \subset X$ um conjunto compacto, $f : X \to Y$ uma função contínua.
   Dada uma família qualquer $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos tal que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset f(C)$, para cada $x \in C$, encontramos $\lambda_x \in \Lambda$ tal que $f(x) \in A_{\lambda_x}$. A continuidade de f fornece então um aberto $V_{\lambda_x} \subset X$ tal que $x \in V_{\lambda_x},\ f(V_{\lambda_x}) \subset A_{\lambda_x}$. Como $\bigcup_{x\in C} V_{\lambda_x} \supset C$ e C é compacto, podemos obter $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset C$ tal que $V_{\lambda_{x_1}} \cup \cdots \cup V_{\lambda_{x_n}} \supset C$. Com isso, a inclusão $A_{\lambda_{x_1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_{x_n}} \supset f(V_{\lambda_{x_1}}) \cup \cdots \cup f(V_{\lambda_{x_n}})$ fornece $A_{\lambda_{x_1}} \cup \cdots \cup A_{\lambda_{x_n}} \supset f(C)$.

$\square$

Assumiremos o Teorema de Heine-Borel verdadeiro para $\mathbb{R}$, ou seja, assumiremos que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado. O próximo lema pode ser utilizado para demonstrar um resultado semelhante para $\mathbb{C}$.

Lema 2.2.3. *O disco unitário fechado $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ é compacto.*

Demonstração. Definindo normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ sobre $\mathbb{R}^2$ como no exemplo 2.2.2, a inequação $\|x\|_0 \leq \|x\|$, válida para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, mostra que $\tilde{B}(0,1) \subset \tilde{B}_0(0,1)$, onde $\tilde{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ e $\tilde{B}_0(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_0 \leq 1\}$. Como $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_0 \leq 1\} = [-1,1] \times [-1,1]$, a proposição 2.2.3, juntamente com o teorema de Tychonoff, mostra que $\tilde{B}_0(0,1)$ é um compacto em $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_0)$, portanto em $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, pelo uso do teorema anterior. Então, $\tilde{B}(0,1)$ é um fechado contido em um compacto, e assim é compacto. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $T(x,y) = x + yi$ preserva normas, tomando sobre $\mathbb{R}^2$ a norma $\|\cdot\|$. Portanto, T é contínua, e como a imagem do compacto $\tilde{B}(0,1)$ é $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, este conjunto é compacto. $\square$

A demonstração do próximo teorema baseia-se na demonstração de [LANG, 1993].

Teorema 2.2.3. *Quaisquer duas normas* $\|\cdot\|_1$ *e* $\|\cdot\|_2$ *sobre um mesmo espaço vetorial* X *de dimensão finita são equivalentes.*

Demonstração. Por transitividade e simetria, basta provarmos que qualquer norma $\|\cdot\|$ sobre X, cujo corpo de escalares $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ denotaremos por $\mathbb{K}$, é equivalente à norma $\|\cdot\|_0$ dada por $\|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\|_0 = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base.
Dado qualquer $x \in X$, podemos escrever $x = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n$ para certos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pondo $b = \|e_1\| + \cdots + \|e_n\|$, a desigualdade triangular fornece $\|x\| \leq b\|x\|_0$.
Seja $S(0,1) = \{x \in X : \|x\|_0 = 1\}$. $\tilde{B}(0,1) = \{x \in X : \|x\|_0 \leq 1\}$ é compacto, como produto U^n dos compactos de $\mathbb{K}$ dados por $U = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq 1\}$. Como $S(0,1)$ é fechado e $S(0,1) \subset \tilde{B}(0,1)$, $S(0,1)$ é compacto. A função $z \mapsto \|z\|$ definida sobre $(X, \|\cdot\|_0)$ é (uniformemente) contínua, pois $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq b\|x - y\|_0$. Logo, a imagem de $S(0,1)$ é um compacto em $\mathbb{R}$, donde atinge um valor mínimo $a > 0$ (pois $0 \notin S(0,1)$).
Temos então que $x \neq 0 \implies \left\| \dfrac{x}{\|x\|_0} \right\| \geq a$, portanto $a\|x\|_0 \leq \|x\|$, o que conclui a demonstração. ☐

2.3 ESPAÇOS DE BANACH

Definição 2.3.1. Em um espaço normado X, uma *sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por simplicidade $\{x_n\}$, é uma função $n \mapsto x_n$ definida no conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{N}$ e tomando valores (denominados *termos* da sequência) em X. Diremos que:

1. $\{x_n\}$ é *convergente* se existe $x \in X$ tal que, para toda vizinhança V de x, $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies x_n \in V$. Diremos então que x é limite da sequência ou que a sequência converge a x e escreveremos $\lim x_n = x$.

2. $\{x_n\}$ é uma *sequência de Cauchy* se, para toda vizinhança V da origem (vetor nulo de X), $\exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies x_m - x_n \in V$.

Uma subsequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}'}$ é uma restrição de $\{x_n\}$ a um subconjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists n' \in \mathbb{N}' : n' \geq n$. De forma semelhante à definição de sequência convergente, diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}'}$ é convergente se existe $x \in X$ tal que, para toda vizinhança V de x, $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N,\ n \in \mathbb{N}' \implies x_n \in V$.

Notemos que, como consequência do teorema 2.2.3, sequências convergentes ou de Cauchy em um espaço $(X, \|\cdot\|_0)$ são (respectivamente) convergentes ou de Cauchy em qualquer espaço $(X, \|\cdot\|)$ com $\|\cdot\|$ equivalente a $\|\cdot\|_0$.

Proposição 2.3.1. *Seja* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço normado. Então:*

1. *O limite de uma sequência convergente é único.*

2. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

3. *Toda sequência de Cauchy é limitada, isto é, seus termos têm norma majorada por alguma constante real.*

4. *Se uma sequência de Cauchy possui subsequência convergente então é convergente.*

Demonstração. 1. Suponhamos que existam $x \neq x'$ em X ambos limites de uma sequência $\{x_n\}$. Pondo $\epsilon = \|x - x'\|$, consideremos as vizinhanças $V_1 = B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right)$, $V_2 = B\left(x', \frac{\epsilon}{2}\right)$. Por hipótese, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $x_n \in V_1$ quando $n \geq N_1$ e $x_n \in V_2$ quando $n \geq N_2$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, $\|x_N - x\| < \frac{\epsilon}{2}$, $\|x_N - x'\| < \frac{\epsilon}{2}$. A desigualdade triangular fornece $\|x - x'\| < \epsilon$, uma contradição.

2. Seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente cujo limite é x. Dada uma vizinhança qualquer V da origem, existe $\epsilon > 0$ tal que $\|z\| < \epsilon \implies z \in V$. Podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right)$ quando $n \geq N$. Então, se $m, n \geq N$, $\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x\| + \|x - x_n\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto,
$$m, n \geq N \implies x_m - x_n \in V.$$

3. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy. Podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$m, n \geq N \implies \|x_m - x_n\| < 1.$$
Definindo $c = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + 1\}$, temos que $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \leq N$. No caso $n > N$, $\|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| < \|x_N\| + 1$, logo $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência convergente com limite x. Dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $m, n \geq N_1$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $n \geq N_2,\ n \in \mathbb{N}'$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$ e $n_1 \in \mathbb{N}',\ n_1 \geq N$. Logo,
$$n \geq N \implies \|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - x\| < \epsilon.$$

□

Definição 2.3.2. Denominaremos *Espaço de Banach* um espaço normado onde toda sequência de Cauchy é convergente.

Exemplo 2.3.1.

1. O conjunto dos números reais tornado um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e com a norma usual é um espaço de Banach. De fato, dada uma sequência de Cauchy de números reais, temos que ela é limitada (item 3 da proposição), logo possui subsequência convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass), e então é convergente (item 4).

2. Se X é um espaço compacto e $(Y, \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach, o espaço vetorial das funções contínuas $f : X \to Y$ é um espaço de Banach com norma dada por $\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_1$. Note que esta norma está bem definida pois a função $x \mapsto \|f(x)\|_1$ é uma função real contínua definida num compacto. As propriedades que a caracterizam como norma decorrem das propriedades de $\|\cdot\|_1$ e do supremo de conjuntos. Dada uma sequência de Cauchy $\{f_n\}$ nesse espaço, podemos definir uma função $f : X \to Y$ por $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada $x \in X$, pois as sequências $\{f_n(x)\}$ são sequências de Cauchy no espaço de Banach Y. Dados quaisquer $\epsilon > 0$ e $x \in X$, podemos obter $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_N\| < \frac{\epsilon}{3}$ e então uma vizinhança V de x tal que $y \in V \implies \|f_N(y) - f_N(x)\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$. Daí, $y \in V$ implica $\|f(y) - f(x)\|_1 \leq \|f(y) - f_N(y)\|_1 + \|f_N(y) - f_N(x)\|_1 + \|f_N(x) - f(x)\|_1 < \epsilon$, donde concluímos a continuidade de f, provando que o espaço considerado é um espaço de Banach.

O próximo teorema é uma importante caracterização dos espaços de Banach. Precisaremos de uma definição:

Definição 2.3.3. Seja X um espaço normado e $\{x_n\}$ uma sequência com termos em X. Denominaremos *série* associada à sequência, ou simplesmente série, a expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Caso a sequência $\{s_n\},\ s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ seja convergente, diremos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é *convergente* e definiremos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim s_n$. Caso contrário, diremos que a série é *divergente*. A toda série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ podemos associar uma série de números reais $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Se esta série de números reais for convergente, diremos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é *absolutamente convergente*.

Teorema 2.3.1. *Seja X um espaço normado. Então, X é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Seja X um espaço de Banach e $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ uma série absolutamente convergente. Segue-se que a sequência de números reais $\{y_n\},\ y_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ é uma sequência convergente, portanto de Cauchy. Portanto, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|y_{n+k} - y_n| < \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x_n + \cdots + x_{n+k}\| \leq \|x_n\| + \cdots + \|x_{n+k}\| < \epsilon$$

Assim, a sequência $\{s_n\},\ s_n = \sum_{k=1}^{n} x_n$ é uma sequência de Cauchy. Como X é, por hipótese, um espaço de Banach, a sequência $\{s_n\}$ é convergente. Portanto, a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ é convergente.

Reciprocamente, suponhamos que, em um espaço normado X, toda série absolutamente convergente é convergente. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy com termos em X. Podemos definir indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_l\| < \frac{1}{2^n}$ para quaisquer $k, l \geq k_n$ e $k_n \geq k_{n-1}$ para $n \geq 2$. Seja $\{y_n\}$ a sequência dada por $y_1 = x_{k_1}$ e $y_n = x_{k_n} - x_{k_{n-1}}$ para $n \geq 2$. É claro que a série associada a $\{y_n\}$ é absolutamente convergente, logo convergente. Isto é, existe $\lim \sum_{k=1}^{n} y_k = \lim x_{k_n}$.

Pondo $\mathbb{N}' = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$, segue-se que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ é uma subsequência convergente de $\{x_n\}$. Pela proposição 2.3.1, $\{x_n\}$ é convergente. Como a sequência de Cauchy $\{x_n\}$ foi tomada arbitrariamente, X é um espaço de Banach. □

Teorema 2.3.2. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Provaremos primeiro o caso onde o corpo de escalares é $\mathbb{R}$. Devido à equivalência de normas, é suficiente mostrarmos que um espaço normado qualquer $(X, \|\cdot\|)$ de dimensão finita, base $\{e_1, \ldots, e_j\}$ e norma dada por $\|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j\| = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_j|\}$, é um espaço de Banach.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy arbitrária de pontos de X. Formemos sequências de escalares $\{\alpha_1^{(n)}\}, \ldots, \{\alpha_j^{(n)}\}$ de forma que $x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \cdots + \alpha_j^{(n)} e_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Então, como $\forall m, n \in \mathbb{N} : \|x_m - x_n\| = \max\{|\alpha_1^{(m)} - \alpha_1^{(n)}|, \ldots, |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|\}$, concluímos que cada $\{\alpha_i^{(n)}\}$, $i \in \{1, \ldots, j\}$, é uma sequência de Cauchy de escalares, pois $\forall m, n \in \mathbb{N}$: $|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(n)}| \leq \|x_m - x_n\|$. Para cada i, seja α_i o limite da sequência $\{\alpha_i^{(n)}\}$, o qual existe pois é uma sequência de Cauchy de escalares, e seja $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j$.

Para qualquer $\epsilon > 0$ e cada $i \in \{1, \ldots, j\}$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_i \implies |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| < \epsilon$. Pondo $N = \max\{N_1, \ldots, N_j\}$, é claro que $\forall i \in \{1, \ldots, j\} : n \geq N \implies |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| < \epsilon$, donde $n \geq N \implies \|x_n - x\| < \epsilon$. Logo, $\lim x_n = x$ e $\{x_n\}$ é convergente.

Podemos tratar o conjunto dos números complexos com a norma usual como um espaço normado de base $\{1, i\}$ e corpo de escalares $\mathbb{R}$. Daí segue-se que toda sequência de Cauchy de números complexos é convergente. Assim, para um espaço normado com corpo de escalares $\mathbb{C}$, basta repetir os argumentos da demonstração. □

Definição 2.3.4. Diremos que uma aplicação linear $T : X \to Y$ entre espaços normados é *limitada* se existe $c > 0$ tal que $\forall x \in X : \|Tx\| \leq c\|x\|$, onde não fazemos distinção, na notação, entre a norma em X e a norma em Y.

Exemplo 2.3.2. Toda aplicação linear T de um espaço normado X de dimensão finita em um espaço normado qualquer Y é limitada. De fato, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base para X, podemos escrever qualquer $x \in X$ como $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ para certos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e então $\|Tx\| \leq \|T(\alpha_1 e_1)\| + \cdots + \|T(\alpha_n e_n)\| \leq b \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$, onde $b = \|Te_1\| + \cdots + \|Te_n\|$. A equivalência de normas fornece uma constante $a > 0$ tal que $a \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \leq \|x\|$ e portanto $c = \frac{b}{a}$ satisfaz $\|Tx\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 2.3.3. *As seguintes afirmações acerca de uma aplicação linear $T : X \to Y$ entre espaços normado são equivalentes:*

1. *T é contínua num ponto $x_0 \in X$;*

2. *T é limitada;*

3. *T é contínua.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $(1) \implies (2)$, $(2) \implies (3)$ e $(3) \implies (1)$.
Se T é contínua num ponto $x_0 \in X$, como $\{y \in Y : \|y - Tx_0\| \leq 1\}$ é uma vizinhança de Tx_0, existe uma vizinhança V de x_0 tal que $x \in V \implies \|Tx - Tx_0\| \leq 1$. E sendo V uma vizinhança de x_0, V contém uma bola aberta centrada em x_0, digamos $B(x_0, 2\delta)$. Assim, $\|x - x_0\| \leq \delta \implies \|Tx - Tx_0\| \leq 1$ e então $\forall x \in X : \left\|T\left(x_0 + \delta\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) - Tx_0\right\| \leq 1$.
Usando a linearidade de T, $\forall x \in X : \|T(x - x_0)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x - x_0\|$. Substituindo x por $x + x_0$ vemos que T é limitada. Logo, $(1) \implies (2)$.
Suponhamos T limitada, com $c > 0$ tal que $\forall x \in X : \|Tx\| \leq c\|x\|$, e A um aberto arbitrário de Y. Dado qualquer $x_0 \in T^{-1}(A)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\|y - Tx_0\| < \epsilon \implies y \in A$. Como $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{c} \implies \|T(x - x_0)\| < \epsilon$, a linearidade de T mostra que $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{c} \implies x \in T^{-1}(A)$. Logo, $T^{-1}(A)$ é aberto. Portanto, T é contínua e $(2) \implies (3)$.
Pela observação após a definição 1.2.2, $(3) \implies (1)$. $\square$

Lema 2.3.1. *Se X e Y são espaços normados sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, o conjunto $L(X, Y)$ das aplicações lineares limitadas de X em Y com $T_1 + T_2$ definida por $(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$ para cada $x \in X$ e αT definida por $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ para cada $x \in X$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração. A aplicação linear $0 : X \to Y$ definida por $0x = 0$ para cada $x \in X$ é uma identidade aditiva para $L(X, Y)$. Dada $T \in L(X, Y)$ podemos definir um inverso aditivo $-T \in L(X, Y)$ por $(-T)x = -Tx$ para cada $x \in X$. Além disso, se $T_1, T_2 \in L(X, Y)$, $\forall x_1, x_2 \in X : (T_1 + T_2)(x_1 + x_2) = (T_1x_1 + T_1x_2) + (T_2x_1 + T_2x_2) = T_1x_1 + [(T_2x_1 + T_2x_2) + T_1x_2] = (T_1x_1 + T_2x_1) + (T_2x_2 + T_1x_2) = (T_1 + T_2)x_1 + (T_1 + T_2)x_2$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X : (T_1 + T_2)(\alpha x) = \alpha T_1x + \alpha T_2x = \alpha(T_1 + T_2)x$, logo $T_1 + T_2$ é linear. Como $\forall x \in X : \|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq c_1\|x\| + c_2\|x\|$ para certos reais positivos c_1, c_2, definindo $c = c_1 + c_2$ vemos que $T_1 + T_2 \in L(X, Y)$.
A linearidade de αT, onde $\alpha \in \mathbb{K}$, $T \in L(X, Y)$ segue-se da linearidade de T e das operações de Y. Como $\forall x \in X : \|(\alpha T)x\| = |\alpha|\|Tx\| \leq |\alpha|\tilde{c}\|x\|$ para um certo $\tilde{c} > 0$, definindo $c = |\alpha|\tilde{c}$ concluímos que $\alpha T \in L(X, Y)$.
As propriedades que relacionam as duas operações e mostram que $L(X, Y)$ com essas operações é um espaço vetorial decorrem das operações de Y. $\square$

No caso $X = Y$, denotaremos $L(X, Y)$ por $L(X)$. Se a dimensão de X é finita, sabemos da Álgebra Linear que é possível associar uma matriz a cada aplicação linear de $L(X)$ de forma a obtermos um homomorfismo entre a álgebra das aplicações lineares $T : X \to X$ (onde o produto de aplicações lineares é a composição) e a álgebra das matrizes sobre $\mathbb{K}$.

Definição 2.3.5. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear limitada entre espaços normados, definiremos a *norma de* T por $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$ se X possui algum vetor não nulo (e então $\exists x \in X : \|x\| = 1$) e $\|T\| = 0$ caso contrário.

Lema 2.3.2. *Se X e Y são espaços normados, a norma das aplicações lineares limitadas de X em Y define uma norma sobre $L(X, Y)$.*

Demonstração. Para qualquer aplicação linear $T : X \to Y$, $T0 = T(0+0) = T0+T0$, donde $T0 = 0$. Portanto, se X possui apenas o vetor nulo, $L(X, Y)$ possui um único elemento e então $\|T\| = 0$ para todo $T \in L(X, Y)$ define uma norma em $L(X, Y)$.
Suponhamos de agora em diante que X possua algum vetor não nulo. Seja $T \in L(X, Y)$. Como existe $c > 0$ tal que $\forall x \in X : \|Tx\| \leq c\|x\|$, temos $\|Tx\| \leq c$ para todo $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$, de forma que $\|T\|$ é um número real. Se uma aplicação linear limitada $T \neq 0$, isto é, se existe $w \in X$ tal que $Tw \neq 0$, então $T\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \neq 0$, consequentemente $\left\|T\frac{w}{\|w\|}\right\| > 0$ e $\|T\| > 0$, pois $\left\|\frac{w}{\|w\|}\right\| = 1$. Resumindo, $T \neq 0 \implies \|T\| > 0$.
Dados quaisquer $T_1, T_2 \in L(X, Y)$, temos $\|(T_1+T_2)x\| \leq \|T_1x\|+\|T_2x\| \leq (\|T_1\|+\|T_2\|)\|x\|$ para todo $x \in X$, de forma que $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, pois $\|T_1\| + \|T_2\|$ majora o conjunto das $\|(T_1 + T_2)x\|$ com $\|x\| = 1$.
Se $\alpha \in \mathbb{K},\ T \in L(X, Y)$, então $\|\alpha T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\alpha T)x\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\alpha(Tx)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\alpha|\|Tx\| = |\alpha| \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\alpha|\|T\|$, o que conclui a demonstração. ☐

Teorema 2.3.4. *Se X é um espaço normado e Y é um espaço de Banach, $L(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Basta mostrarmos que uma sequência de Cauchy arbitrária $\{T_n\}$ com termos em $L(X, Y)$ é convergente. Para isso, observemos que, para todo $x_0 \in X$ fixado, a sequência $\{T_nx_0\}$ é uma sequência de Cauchy com termos em Y. De fato, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos definir $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\|x_0\| + 1}$ e então obter $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m - T_n\| < \tilde{\epsilon}$ sempre que $m, n \geq N$, pois $\{T_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Daí,

$$m, n \geq N \implies \|T_mx_0 - T_nx_0\| \leq \|T_m - T_n\|\|x_0\| < \epsilon\frac{\|x_0\|}{\|x_0\| + 1} < \epsilon.$$

Como toda vizinhança da origem possui uma bola aberta centrada na origem, isso mostra que $\{T_nx_0\}$ é uma sequência de Cauchy e portanto converge, pois Y é um espaço de Banach.
Definamos uma função $T : X \to Y$ por $Tx = \lim T_nx$. Por linearidade, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|T(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T(x_1 + x_2) - T_n(x_1 + x_2)\| + \|T_nx_1 - Tx_1\|\\ + \|T_nx_2 - Tx_2\|.\end{aligned}$$

Para todo $\epsilon > 0$, podemos obter $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N$,

$$\|T(x_1 + x_2) - T_n(x_1 + x_2)\| < \frac{\epsilon}{3},\ \|T_n x_1 - T x_1\| < \frac{\epsilon}{3},\ \|T_n x_2 - T x_2\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então, podemos concluir que $\|T(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2\| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ ao tomarmos n suficientemente grande no lado direito da inequação. Portanto, $\|T(x_1+x_2) - Tx_1 - Tx_2\| = 0$ e $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$. Da mesma forma se mostra que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X : T(\alpha x) = \alpha T x$. Resta mostrar que T é limitada. Notemos antes que $\{\|T_n\|\}$ é uma sequência de Cauchy de números reais, pois de $\forall m, n \in \mathbb{N} : \|T_m\| - \|T_n\| \leq \|T_m - T_n\|,\ \|T_n\| - \|T_m\| \leq \|T_n - T_m\|$ segue-se que $\forall m, n \in \mathbb{N} : |\|T_m\| - \|T_n\|| \leq \|T_m - T_n\|$. Seja $\lim \|T_n\| = c$. Afirmamos que $\forall x \in X : \|Tx\| \leq c\|x\|$. De fato, dados quaisquer $x \in X,\ \epsilon > 0$, podemos obter $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies \|Tx - T_n x\| < \frac{\epsilon}{2},\ |\|T_n\| - c| < \tilde{\epsilon}$, onde $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2(1 + \|x\|)}$. Daí, $\|Tx\| \leq \|Tx - T_N x\| + \|T_N x\| < \frac{\epsilon}{2} + \|T_N\|\|x\| < \frac{\epsilon}{2} + (c + \tilde{\epsilon})\|x\| < c\|x\| + \epsilon$. Portanto, $\forall x \in X : \|Tx\| \leq c\|x\|$. Como $c \geq 0$, substituindo c por $c + 1$ vemos que $T \in L(X, Y)$. Isso prova que $L(X, Y)$ é um espaço de Banach. □

Exemplo 2.3.3.

1. Se X é um espaço normado sobre um corpo $\mathbb{K}$, o espaço normado $L(X, \mathbb{K})$ dos funcionais limitados definidos em X é um espaço de Banach. Esse espaço é denominado *espaço dual* de X e é denotado por X^*.

2. Dado um espaço normado X e quaisquer $A, B \in L(X, X)$, $\|AB\| = \sup_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|A\|\|Bx\| = \|A\| \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\|B\|$.
   Fixemos quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

   $$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(|t|\|A\|)^k}{k!} < e^{|t|\|A\|}.$$

   Logo, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ é absolutamente convergente. Como $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ é um espaço de Banach, essa série é convergente, pelo teorema 2.3.1. Então, podemos definir $e^{tA} \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ por $e^{tA} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, onde $I : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ Ix = x$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

3 Funcionais Lineares

Na seção anterior, vimos alguns espaços que admitem uma topologia natural: espaços normados e espaços de Banach. Nesta seção, são apresentados um conceito abstrato de espaço vetorial topológico e ferramentas úteis para trabalhar nesses espaços: os funcionais lineares.

3.1 ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

Definição 3.1.1. Se X é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo e τ é uma topologia sobre X, então diremos que (X, τ), por simplicidade X, é um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{K}$ se:

1. $(x, y) \mapsto x + y$ de $X \times X$ em X é contínua, onde consideramos sobre $X \times X$ a topologia produto;

2. $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ de $\mathbb{K} \times X$ em X é contínua, onde consideramos sobre $\mathbb{K}$ a topologia usual e sobre $\mathbb{K} \times X$ a topologia produto.

Exemplo 3.1.1. Se X é um espaço normado e τ é sua topologia da norma, (X, τ) é um espaço vetorial topológico. De fato, a função $f : (x, y) \mapsto x + y$ é contínua em todo ponto $(x_0, y_0) \in X \times X$ pois dada qualquer vizinhança V de $x_0 + y_0$, podemos obter $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0 + y_0, \epsilon) \subset V$ e então $f\left(B\left(x_0, \frac{\epsilon}{2}\right), B\left(y_0, \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \subset V$; e a função $g : (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ é contínua em todo ponto $(\alpha_0, x_0) \in \mathbb{K} \times X$, pois dada qualquer vizinhança V de $\alpha_0 x_0$, podemos obter $\epsilon > 0$ tal que $B(\alpha_0 x_0, \epsilon) \subset V$, consequentemente $g\left(B_{\mathbb{K}}\left(\alpha_0, \frac{\epsilon/2}{\|x_0\| + 1}\right), B\left(x_0, \frac{\epsilon/2}{|\alpha_0| + 1}\right)\right) \subset V$, onde $B_{\mathbb{K}}(\alpha, r) := \{\beta \in \mathbb{K} : |\beta - \alpha| < r\}$.

Na proposição seguinte, usaremos o fato de que uma composição de funções contínuas é contínuas. Isto é, se X, Y, Z são espaços topológicos e $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ são contínuas, então $g \circ f : X \to Z$ também é. Realmente, pela definição de função contínua, se W é um aberto de Z, então $g^{-1}(W) = V$ é um aberto de Y e $f^{-1}(V) = U$ é um aberto de X. Consequentemente, $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) = U$ é um aberto de X e $g \circ f$ é contínua.

Proposição 3.1.1. *Sejam X um espaço vetorial topológico sobre um corpo $\mathbb{K}$, , $p \in X$ e $\beta \in \mathbb{K}$. Então, a translação por p e a multiplicação escalar por β são funções contínuas. Em particular, se A é um conjunto aberto de X:*

1. *$\forall p \in X : p + A$ é um conjunto aberto;*

2. *$\forall \beta \in \mathbb{K} \backslash \{0\} : \beta A$ é um conjunto aberto;*

Demonstração. Sejam $\sigma : X \times X \to X,\ \sigma(x, y) = x + y$ e $\pi : \mathbb{K} \times X \to X,\ \pi(\alpha, x) = \alpha x$. Como X é um espaço vetorial topológico, σ e π são contínuas. Pela definição de topologia produto, as funções $p_0 : X \to X \times X,\ p_0(x) = (p, x)$ e $\beta_0 : X \to \mathbb{K} \times X,\ \beta_0(x) = (\beta, x)$ também são contínuas. Como a translação por p é dada por $\sigma \circ p_0$ e a multiplicação escalar por

$\pi \circ \beta_0$, ambas são funções contínuas, como composição de funções contínuas. Se A é aberto e $\beta \neq 0$, $p + A$ é a imagem inversa de A pela translação de $-p$ e βA é a imagem inversa de A pela multiplicação escalar por $\dfrac{1}{\beta}$, logo $p + A$ e βA são abertos. $\square$

A próxima proposição, óbvia para espaços normados, ainda é verdadeira para espaços vetoriais topológicos gerais:

Proposição 3.1.2. *Se X é um espaço vetorial topológico e $x \in X$, então qualquer vizinhança U de x contém uma vizinhança fechada de x.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que U é aberto. Assim, $U - x$ é uma vizinhança aberta de 0. Como $0 + 0 = 0$ e $U - x$ é uma vizinhança aberta de 0, existem vizinhanças abertas W de 0 e W' de 0 tais que $W + W' \subset U - x$. Tomando $V = W \cap W'$, vale $V + V \subset U - x$. Se $y \in \overline{V}$, então a vizinhança aberta $y - V$ de y não é disjunta de V. Logo, existe $z \in V$ tal que $y \in z + V$ e $\overline{V} \subset V + V \subset U - x$. Segue-se que $x + \overline{V} \subset U$ é uma vizinhança fechada de x. $\square$

Definição 3.1.2. Se X é um espaço vetorial sobre o corpo dos complexos ou reais, diremos que um subconjunto $K \subset X$ é um *conjunto convexo* se $x_1, x_2 \in K,\ \alpha \in [0,1] \implies \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in K$.

Proposição 3.1.3. *Se C e D são conjuntos convexos de um espaço vetorial X sobre o corpo dos complexos ou reais, então $\lambda C + \nu D$ é um conjunto convexo para quaisquer escalares λ e ν.*

Demonstração. Dados quaisquer $x_1, x_2 \in \lambda C + \nu D$ e $\alpha \in [0,1]$, escrevamos $x_i = \lambda c_i + \nu d_i$ com $c_i \in C$ e $d_i \in D$ para $i \in \{1,2\}$. De $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(\lambda c_1 + \nu d_1) + (1-\alpha)(\lambda c_2 + \nu d_2) = \lambda[\alpha c_1 + (1-\alpha)c_2] + \nu[\alpha d_1 + (1-\alpha)d_2]$ segue-se que $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \lambda C + \nu D$, pois C e D são convexos. $\square$

Definição 3.1.3. Dado um espaço vetorial topológico X, o *funcional de Minkowski* de um conjunto convexo $K \subset X$ é a função $p : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha K\}$, onde $\alpha K := \{\alpha x : x \in K\}$.

Definição 3.1.4. Se X é um espaço vetorial topológico, diremos que um ponto p de um subconjunto $A \subset X$ é um *ponto interno* de A se, para todo $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $|\alpha| < \delta \implies p + \alpha x \in A$.

Proposição 3.1.4. *Sejam X um espaço vetorial topológico e $A \subset X$. Então:*

1. *Todo ponto interior $p \in A$ é ponto interno de A;*

2. *Se A é convexo e $\mathring{A} \neq \phi$, então um ponto $q \in K$ é ponto interno de A se, e somente se, é ponto interior.*

Demonstração.

1. Se $p \in V \subset A$ e V é aberto, a continuidade da adição de vetores mostra que existe uma vizinhança U de 0 tal que $p + U \subset V$, pois $p + 0 = p$. Por outro lado, para todo $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $|\alpha| < \delta \implies \alpha x \in U$, pois $0x = 0$. Logo, $|\alpha| < \delta \implies p + \alpha x \in V$.

2. Sejam $p \in \mathring{A}$ e q ponto interno de A. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\alpha| < \epsilon \implies p + \epsilon(q - p) \in A$. Podemos tomar $0 < \alpha < 1$ tal que $\frac{1}{1-\alpha} < \epsilon$ e $p + \frac{1}{1-\alpha}(q-p) \in A$, ou seja, $q = \alpha p + (1-\alpha)r$ para algum $r \in A$ e $0 < \alpha < 1$. Por convexidade, o aberto $\alpha\mathring{A} + (1-\alpha)r$, ao qual pertence q, está contido em A, logo q é ponto interior de A.

□

Exemplo 3.1.2. No plano euclidiano, as retas que passam pela origem correspondem ‡ família $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$, onde r_α é a reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,\alpha)$, se $\alpha \in \mathbb{R}$, e $r_\infty = \{(0,c) : c \in \mathbb{R}\}$. Pondo $s_\alpha = r_\alpha \cap \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |a| < \frac{1}{\alpha}\right\}$ se α é inteiro positivo e $s_\alpha = r_\alpha$ caso contrário, é claro que $(0,0)$ é ponto interno de $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} s_\alpha$, mas não é ponto interior deste conjunto.

Proposição 3.1.5. *Seja* p *o funcional de Minkowski de um conjunto convexo* K *que tem* 0 *como ponto interno, em um espaço vetorial* X*. Então:*

1. p *é uma função real e assume valores não negativos;*

2. $\forall \gamma \geq 0$, $p(\gamma x) = \gamma p(x)$*;*

3. $\forall x, y : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

4. $p(x) < 1$ *se, e somente se,* x *é ponto interno de* K*;*

5. $p(x) = 1$ *se, e somente se,* x *não é ponto interno de* K *nem de* $X \backslash K$*;*

Demonstração.

1. Como 0 é ponto interno de K, dado qualquer $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $|\alpha| < \delta \implies \alpha x \in K$. Em particular, $\frac{2}{\delta} \in \{\alpha > 0 : x \in \alpha K\}$. Assim, sendo $\{\alpha > 0 : x \in \alpha K\} \neq \phi$, temos que $p(x) \in \mathbb{R}$. A segunda afirmação decorre de 0 ser uma cota inferior para $\{\alpha > 0 : x \in \alpha K\}$.

2. Para $\gamma > 0$,
$$\begin{aligned} p(\gamma x) &= \inf\{\alpha > 0 : \gamma x \in \alpha C\} \\ &= \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{\gamma} C\right\} \\ &= \gamma \inf\left\{\frac{\alpha}{\gamma} > 0 : x \in \frac{\alpha}{\gamma} C\right\} \\ &= \gamma p(x). \end{aligned}$$
O caso $\gamma = 0$ é consequência de $0x = 0$ e $p(0) = 0$.

3. Para $x, y \in X$ arbitrários, dados quaisquer $\alpha > p(x),\ \beta > p(y)$, temos que $p\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1,\ p\left(\frac{y}{\beta}\right) < 1$, logo $\frac{x}{\alpha} \in K,\ \frac{y}{\beta} \in K$. Como $x + y = (\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta}\right]$, concluímos que $x+y \in (\alpha+\beta)K$, logo $p(x+y) \leq \alpha+\beta$. Como isso vale para quaisquer $\alpha > p(x),\ \beta > p(y)$, segue-se que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

4. Se x é ponto interno de K, então existe $\delta > 0$ tal que $|\alpha| < \delta \implies x + \alpha x \in K$. Em particular, $1 > \frac{1}{1+\delta/2} \in \{\alpha > 0 : x \in \alpha K\}$. Logo, $p(x) < 1$.
   Suponhamos agora que $p(x) < 1$. Então, existe $p(x) \leq \alpha < 1$ para o qual $x \in \alpha K$, ou seja, $x = \alpha k$ para algum $k \in K$. Como $p(x) \geq 0$, podemos usar a convexidade de K para concluir que $x = \alpha k + (1-\alpha)0$ pertence a K.
   Seja $\epsilon = 1 - p(x) > 0$. Caso o corpo subjacente a X seja $\mathbb{R}$, podemos obter, para qualquer $y \in X$, $\delta > 0$ tal que $\delta[p(y)+p(-y)] < \epsilon$, donde $p(x+\alpha y) < (1-\epsilon)+\epsilon = 1$ e $x+\alpha y \in K$ sempre que $|\alpha| < \delta$. Caso o corpo seja $\mathbb{C}$, podemos obter, para qualquer $y \in X$, $\delta > 0$ tal que $\delta[p(y)+p(-y)] < \frac{\epsilon}{2}$ e $\delta[p(iy)+p(-iy)] < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, $p(x+\alpha y) < (1-\epsilon)+\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = 1$ e $x + \alpha y \in K$ sempre que $|\alpha| < \delta$.

5. Pelo item anterior, é suficiente provarmos que $p(x) > 1$ se, e somente se, x é ponto interno de $X \backslash K$.
   Suponhamos que $x \in X$ seja ponto interno de $X \backslash K$. Então, existe $0 < \delta < 2$ tal que $|\alpha| < \delta \implies x + \alpha x \in X \backslash K$, donde $\alpha > 0,\ x \in \alpha K \implies \alpha > \frac{1}{1-\delta/2}$, pois, se existisse $0 < \alpha \leq 1 - \frac{\delta}{2}$ para o qual $x \in \alpha K$, então $0 < \alpha\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) < 1$ e, por convexidade, $\left(1-\frac{\delta}{2}\right)x = \alpha\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{1}{\alpha}x\right) + \left[1 - \alpha\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\right]0 \in K$, uma contradição. Logo, $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha K\} \geq \frac{1}{1-\delta/2} > 1$.
   Reciprocamente, se $p(x) > 1$, seja $\epsilon = p(x) - 1 > 0$. Caso o corpo subjacente a X seja $\mathbb{R}$, podemos obter, para qualquer $y \in X$, $\delta > 0$ tal que $\delta[p(y) + p(-y)] < \epsilon$, donde $p(x + \alpha y) \geq p(x) - p(-\alpha y) > (1+\epsilon) - \epsilon = 1$ sempre que $|\alpha| < \delta$. Caso o corpo seja $\mathbb{C}$, podemos obter, para qualquer $y \in X$, $\delta > 0$ tal que $\delta[p(y) + p(-y)] < \frac{\epsilon}{2}$ e $\delta[p(iy)+p(-iy)] < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, $p(x+\alpha y) \geq p(x+\alpha y) - p(-\alpha y) > (1+\epsilon) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} > 1$ sempre que $|\alpha| < \delta$.

□

3.2 VARIEDADES AFINS E HIPERPLANOS

Definição 3.2.1. Dado um espaço vetorial X, diremos que um subconjunto $V \subset X$ é uma *variedade afim* se $V = x_0 + M$ para algum $x_0 \in X$ e algum subespaço vetorial M, onde $x_0 + M := \{x_0 + m : m \in M\}$. Se $V \neq X$, diremos que V é uma variedade afim própria. Denominaremos *hiperplano* um elemento maximal da relação de inclusão no conjunto das variedades afins próprias de X.

Teorema 3.2.1. *Em um espaço vetorial topológico X, o fecho $\overline{V}$ de uma variedade afim V é uma variedade afim.*

Demonstração. Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos escalares de X. Um subconjunto $A \neq \phi$ de X é uma variedade afim se, e somente se, $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in A : \alpha x + (1-\alpha)y \in A$. O “somente se"pode ser verificado facilmente, lembrando que $\alpha x_0 + (1-\alpha)x_0 = x_0$; o “se", tomando qualquer $x_0 \in A$, verificando que $A - x_0 := \{a - x_0 : a \in A\}$ é um subespaço vetorial, pois $\alpha \in \mathbb{K},\ x \in A - x_0 \implies \alpha x + x_0 = \alpha(x + x_0) + (1-\alpha)x_0 \in A \implies \alpha x \in A - x_0$ e então $x, y \in A - x_0 \implies \dfrac{1}{2}(x+y) \in A - x_0 \implies x + y \in A - x_0$.
Sejam $\sigma : X \times X \to X$ e $\pi : \mathbb{K} \times X \to X$ dadas por $\sigma(x,y) = x + y$ e $\pi(\alpha, x) = \alpha x$. Como X é um espaço vetorial topológico, σ e π são contínuas. Seja V uma variedade afim. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : f_\alpha(A \times A) \subset A$, onde $f_\alpha : X \to X$, $f(x,y) = \alpha x + (1-\alpha)y$. Tomemos $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrário e denotemos f_α por f. Como $f = \sigma \circ g$, onde $g(x,y) = (\alpha x, (1-\alpha)y)$ e g é contínua (pela continuidade de π e definição de topologia produto), f é contínua.
$\overline{f(V \times V)}$ é fechado, donde $X \backslash \overline{f(V \times V)}$ é aberto e

$$f^{-1}\left(X \backslash \left(\overline{f(V \times V)}\right)\right) = X \backslash f^{-1}\left(\overline{f(V \times V)}\right)$$

é aberto. Logo, $f^{-1}\left(\overline{f(V \times V)}\right)$ é um fechado que contém $V \times V$, e daí $f^{-1}\left(\overline{f(V \times V)}\right) \supset \overline{V \times V}$ e $f\left(\overline{V \times V}\right) \subset \overline{f(V \times V)}$. Além disso, $(X \times X) \backslash \overline{V \times V} \subset (X \times X) \backslash (\overline{V} \times \overline{V})$, pois $(x,y) \in (X \times X) \backslash \overline{V \times V}$ implica a existência de abertos $U, W \subset X$ tais que $(x,y) \in U \times W \subset (X \times X) \backslash \overline{V \times V}$ e então $U \cap V = \phi$ ou $W \cap V = \phi$, donde $(x,y) \in (X \times X) \backslash (\overline{V} \times \overline{V})$. Equivalentemente, $\overline{V} \times \overline{V} \subset \overline{V \times V}$.
Finalmente, $f(\overline{V} \times \overline{V}) \subset f(\overline{V \times V}) \subset \overline{f(V \times V)} \subset \overline{V}$. Portanto, $\overline{V}$ é uma variedade afim. $\square$

Corolário 3.2.1. *Um hiperplano ou é fechado ou é denso (isto é, tem o espaço todo como fecho).*

Demonstração. Se um hiperplano H de um espaço vetorial topológico X não é fechado, então seu fecho $\overline{H}$ é uma variedade afim, $H \subset \overline{H}$ e $H \neq \overline{H}$. Pela maximalidade de H, $\overline{H} = X$. Se um hiperplano H não é denso, então $\overline{H}$ é uma variedade afim própria e, pela maximalidade de H, vale $H = \overline{H}$, donde H é fechado. Como hiperplanos são subconjuntos próprios, as condições não podem ocorrer simultaneamente. $\square$

Teorema 3.2.2. *Um subconjunto H de um espaço vetorial topológico X é um hiperplano se, e somente se, $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$ e algum funcional linear f não trivial.*

Demonstração. Se H é um hiperplano, podemos escrever $H = x_0 + M$, para algum subespaço M. Além disso, deve existir $x_1 \in X \backslash H$, pois H é um subconjunto próprio, e o subespaço

gerado por x_1 e M deve ser $X - x_0 = X$, pela maximalidade de H. Definamos portanto $f(\lambda x_1 + m) = \lambda$ para $\lambda \in \mathbb{K},\ m \in M$. Então, $\lambda_1 x_1 + m_1 = \lambda_2 x_1 + m_2 \implies (\lambda_1 - \lambda_2)x_1 = m_2 - m_1 \implies \lambda_1 = \lambda_2$ (pois $x_1 \notin M$). Logo, f é uma função de X em $\mathbb{K}$, evidentemente linear e não identicamente nula. Pondo $\alpha = f(x_0)$, temos que $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$.
Reciprocamente, se um subconjunto $H \subset X$ é tal que $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$ e algum funcional linear f não trivial, então para $x_0 \in H$ e $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$, vale $H = x_0 + M$, pois $x \in H \Leftrightarrow f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x \in x_0 + M$, donde H é uma variedade afim.
Dados quaisquer $x_1 \notin H$ e $x \in X$, vale $x = \dfrac{f(x_1) - f(x)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_0 + m) + \dfrac{f(x) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}x_1$ para certo $m \in M$, logo $x_0 + M$ é maximal. Como f é não trivial e $f(0) = 0$, H é um subconjunto próprio. Concluímos que H é um hiperplano. □

Para obtermos uma melhor caracterização de hiperplanos a partir de funcionais lineares, utilizaremos dois lemas de [SCHAEFER, 1971].

Lema 3.2.1. *Se X é um espaço vetorial topológico e M é um subespaço fechado de X, a topologia formada pelos $q(V)$ tais que $V + M$ é aberto em X, onde q é a aplicação quociente de X em X/M, torna X/M um espaço de Hausdorff, isto é, dados quaisquer dois pontos distintos $[x], [y] \in X/M$, existem nessa topologia vizinhanças abertas U de $[x]$ e V de $[y]$ disjuntas.*

Demonstração. Notemos que $A + M = \bigcup_{x \in M} (A + x)$ é aberto em X para todo aberto A de X, de forma que $q(A)$ é aberto em X/M para todo aberto A de X. Além disso, para todo $B \subset X$, temos que $q^{-1}(q(B)) = B + M$, pois $x \in q^{-1}(q(B)) \Leftrightarrow q(x) \in q(B) \Leftrightarrow \exists y \in B : q(x) = q(y) \Leftrightarrow \exists y \in B : q(x - y) = 0 \Leftrightarrow \exists y \in B : x - y \in M \Leftrightarrow x \in B + M$. Em particular, q é contínua.
Dados $[x], [y] \in X/M$ arbitrários e um aberto $W = q(W')$, $W' + M$ aberto de X, ao qual pertence $[x] + [y] = [x + y]$, sabemos que $q^{-1}(W) = W' + M$ é um aberto de X que possui o ponto $x + y$. Por continuidade da adição de vetores de X, encontramos vizinhanças abertas U' de x e V' de y tais que $U' + V' \subset W' + M$. Portanto, $U = q(U')$ é uma vizinhança de $[x]$, $V = q(V')$ é uma vizinhança de $[y]$ e $U + V \subset W$. Isso mostra que a adição de vetores em X/M é contínua, e de maneira semelhante demonstra-se que a multiplicação por escalar é também contínua. Então, X/M é um espaço vetorial topológico.
Sejam $[x], [y]$ quaisquer dois pontos distintos de X/M. Vale $y \notin x + M$, e como $x + M$ é fechado, seu complemento W em X é aberto. Assim, $q(W)$ é um aberto de X/M que contém $[y]$ mas não contém $[x]$. Sendo X/M um espaço vetorial topológico, podemos aplicar a proposição 3.1.2 e obter uma vizinhança fechada $F \subset q(W)$ de $[y]$. Seja V um aberto tal que $[y] \in V,\ V \subset F$ (o qual existe pois F é vizinhança) e $U = (X/M) \backslash F$. Então, U é uma vizinhança aberta de $[x]$, V é uma vizinhança aberta de $[y]$ e $U \cap V = \phi$. □

Lema 3.2.2. *Se X é um espaço vetorial topológico de Hausdorff sobre um corpo $\mathbb{K}$ e* dim $X = 1$*, então existe uma aplicação linear bijetiva e contínua $T : X \to \mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K}$ visto como um espaço vetorial sobre si mesmo.*

Demonstração. Seja $x_0 \neq 0$ um elemento de X. Como $\{x_0\}$ é um conjunto linearmente independente e dim $X = 1$, todo elemento de X pode ser escrito como λx para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Sendo X um espaço topológico, a aplicação linear bijetiva $T : X \to \mathbb{K}$ dada por $T(\lambda x_0) = \lambda$ possui inversa contínua, como composição $\pi \circ g$ das funções contínuas $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \times X,\ g(\alpha) = (\alpha, x_0)$ e $\pi : \mathbb{K} \times X \to X,\ \pi(\alpha, x) = \alpha x$.
Dada uma vizinhança U qualquer de $T0 = 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\alpha| < \epsilon \implies \alpha \in U$. Seja $\alpha_0 \in K,\ 0 < |\alpha_0| < \epsilon$. Como X é um espaço de Hausdorff, podemos encontrar uma vizinhança V de 0 tal que $\alpha_0 x_0 \notin V$. Considerando a continuidade da função π definida anteriormente, que satisfaz $\pi(0, 0) = 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ e um aberto $W \subset X,\ 0 \in W$, tais que $|\alpha| < \delta,\ x \in W \implies \alpha x \in V$. Portanto, $\alpha x_0 \in \delta W \implies |\alpha| < \epsilon$, pois se houvesse $\alpha x_0 \in \delta W$ com $|\alpha| \geq \epsilon$, teríamos $\left|\dfrac{\alpha_0 \delta}{\alpha}\right| < \delta$ e $\alpha_0 x_0 = \dfrac{\alpha_0 \delta}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\delta} x_0\right)$ pertenceria a V. Como δW é um aberto contendo 0 e $\alpha x_0 \in \delta W \implies \alpha \in U$, T é contínua em 0.
A continuidade de T segue facilmente da continuidade em 0, pois se $x \in X$ e U é uma vizinhança de Tx, então $U - Tx$ é uma vizinhança de 0 e daí existe uma vizinhança V de 0 satisfazendo $T(V) \subset U - Tx$. Logo $V + x$ é uma vizinhança de x tal que $T(V + x) \subset U$. $\square$

Teorema 3.2.3. *Se X é um espaço vetorial topológico sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e f é um funcional linear, então $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ é fechado se, e somente se, f é contínuo.*

Demonstração. Para f identicamente nulo, a afirmação é óbvia. Se f é não trivial, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \in H,\ H = x_0 + N$, onde $N = \{x \in X : f(x) = 0\}$ e H é fechado se, e somente se, N é fechado. Logo, basta demonstrarmos o caso $\alpha = 0$.
Como $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{K}$, H é fechado se f é contínuo. Reciprocamente, se H é fechado, então o lema 3.2.1 mostra que X/H é um espaço de Hausdorff. Como H é um hiperplano, existe $x_0 \notin H$ e o espaço vetorial $E = \{h + \alpha x_0 : h \in H,\ \alpha \in \mathbb{K}\}$ é uma variedade afim que contém propriamente H, logo $E = X$ e X/H tem dimensão 1. Pelo lema 3.2.2, existe uma aplicação linear bijetiva e contínua $T : X/H \to \mathbb{K}$. Seja $q : X \to X/H$ a aplicação quociente, a qual é contínua (veja a demonstração do lema 3.2.1). Então, $f = \dfrac{f(x_0)}{T(x_0 + H)}(T \circ q)$ é contínuo. $\square$

4 Os Teoremas de Hahn-Banach e de Mazur

Os teoremas de Hahn-Banach e de Mazur são normalmente enunciados para espaços normados, mas algumas de suas versões podem ser facilmente generalizadas para espaços vetoriais topológicos, como veremos a seguir. A primeira versão envolve extensões de um funcional sublinear.

Definição 4.0.2. Um *funcional sublinear* p sobre um espaço vetorial X é uma função real subaditiva, isto é, $\forall x, y \in X : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ e positivamente homogênea, isto é, $\forall x \in X,\ \alpha \geq 0 : p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Exemplo 4.0.1. Pela proposição 3.1.5, o funcional de Minkowski de um conjunto convexo que possui 0 como ponto interno é um funcional sublinear. Num espaço normado, a norma é o funcional de Minkowski da bola unitária centrada na origem, logo é um funcional sublinear.

4.1 O TEOREMA DE HANH-BANACH ANALÍTICO

Teorema 4.1.1 (Hahn-Banach Analítico)**.** *Seja X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear sobre X. Se um funcional linear f definido em um subespaço $Z \subset X$ satisfaz $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$, então existe uma extensão linear $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ de f que satisfaz $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{G}$ o conjunto das extensões lineares g de f definidas sobre algum subespaço de X e satisfazendo $g(x) \leq p(x)$ nesse domínio. Como $f \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \neq \phi$. Dada qualquer cadeia $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$, $(x,w),(x,z) \in \cup\mathfrak{C} \implies \exists g_1, g_2 \in \mathfrak{C} : (x,w) \in g_1,\ (x,z) \in g_2$, e como $\mathfrak{C}$ é uma cadeia, $g_1 \subset g_2$ ou $g_2 \subset g_1$, digamos $g_2 \subset g_1$. Então, como g_1 é uma função real e $(x,w),(x,z) \in g_1$, vale $w = z \in \mathbb{R}$. Logo $\cup\mathfrak{C}$ é uma função real.
Sabemos que $(x,y) \in \cup\mathfrak{C}$ é equivalente a $\exists g \in \mathfrak{C} : (x,y) \in g$ e que, para toda relação $h : A \to B$, $x \in \mathrm{D}(h)$ é equivalente a $\exists y \in B : (x,y) \in h$. Logo, $\mathrm{D}(\cup\mathfrak{C}) = \bigcup\limits_{g\in\mathfrak{C}} \mathrm{D}(g) \subset X$. Dados quaisquer $x, y \in \mathrm{D}(\cup\mathfrak{C})$, temos que $x \in \mathrm{D}(g_1),\ y \in \mathrm{D}(g_2)$ para certas $g_1, g_2 \in \mathfrak{C}$, e supondo $g_2 \subset g_1$, pois $\mathfrak{C}$ é cadeia, $x, y \in \mathrm{D}(g_1) \implies x+y \in \mathrm{D}(g_1) \implies x+y \in \bigcup\limits_{g\in\mathfrak{C}} \mathrm{D}(g) \implies x+y \in \mathrm{D}(\cup\mathfrak{C})$.
De modo semelhante, $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathrm{D}(\cup\mathfrak{C}) \implies \alpha x \in \mathrm{D}(\cup\mathfrak{C})$. Consequentemente, $\mathrm{D}(\cup\mathfrak{C})$ é um subespaço vetorial de X.
Usando novamente o fato de $\cup\mathfrak{C}$ ser uma cadeia, pondo $c := \cup\mathfrak{C}$ e considerando a linearidade dos elementos de $\mathfrak{C}$, $x, y \in \mathrm{D}(c) \implies \exists g \in \mathfrak{C} : x, y \in \mathrm{D}(g) \implies g(x+y) = g(x)+g(y) \implies c(x+y) = c(x)+c(y)$. Da mesma forma, $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathrm{D}(c) \implies c(\alpha x) = \alpha c(x)$. Finalmente, $\cup\mathfrak{C} \in \mathfrak{G}$. Como $\mathfrak{C}$ foi arbitrária, toda cadeia $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{G}$ possui majorante.
Aplicando o Lema de Zorn, podemos obter um elemento maximal $g \in \mathfrak{G}$. Suponhamos que $\mathrm{D}(g) \neq X$. Seja y_1 um elemento de X que não pertence a $Y_0 := \mathrm{D}(g)$ e Y_1 o subespaço vetorial de X gerado por Y_0 e y_1. Como Y_0 é espaço vetorial e $y_1 \notin Y_0$, todo elemento $x \in Y_1$ tem uma representação única $y + \alpha y_1,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Definindo uma função real g_1 por $g_1(y + \alpha y_1) =$

$g(y)+\alpha c,\ y\in Y_0,\ \alpha\in\mathbb{R}$, temos que g_1 é uma extensão linear própria de g para todo $c\in\mathbb{R}$. Dados quaisquer $x,y\in Y_0$, vale $g(y)-g(x)=g(y-x)\leq p(y-x)\leq p(y+y_1)+p(-y_1-x)$ e $-g(x)-p(-y_1-x)\leq p(y+y_1)-g(y)$. Como o lado esquerdo da inequação não depende de y e o lado direito não depende de x, existe $c\in\mathbb{R}$ para o qual:

$$-g(x)-p(-y_1-x)\leq c\leq p(y+y_1)-g(y).$$

Seja $g_1(y+\alpha y_1)=g(y)+\alpha c$ para $y\in Y_0,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Se $\alpha=0$, vale $g_1(y+\alpha y_1)\leq p(y+\alpha y_1)$, pois $\forall y\in Y_0: g_1(y)=g(y)\leq p(y)$. Se $\alpha<0$, ao substituirmos x por $\dfrac{y}{\alpha}$ no lado esquerdo da primeira inequação, obtemos $-g(x)-p\left(-\dfrac{y_1}{\alpha}-x\right)\leq c$, donde $g(y)-p(y_1+\alpha x)\leq -\alpha c$ e $g_1(y+\alpha y_1)=g(y)+\alpha c\leq p(y_1+\alpha x)$. Se $\alpha>0$, ao substituirmos y por $\dfrac{y}{\alpha}$ no lado direito da segunda inequação, obtemos $c\leq p\left(\dfrac{y}{\alpha}+y_1\right)-g\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)$, donde $\alpha c\leq p(y+\alpha y_1)-g(y)$ e $g_1(y+\alpha y_1)=g(y)+\alpha c\leq p(y+\alpha y_1)$.
Concluímos que g_1 satisfaz $g_1(x)\leq p(x)$ para todo $x\in Y_1$, donde $g_1\in\mathfrak{G}$, contradizendo a maximalidade de g. Portanto, a hipótese $\mathrm{D}(g)\neq X$ é falsa, ou seja, $\mathrm{D}(g)=X$. □

Exemplo 4.1.1. Podemos tornar o conjunto l^∞ das sequências reais limitadas um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações dadas por $\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$ e $\alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\}$. ... claro que o conjunto c das sequências reais convergentes forma um subespaço vetorial de l^∞ e que podemos definir um funcional linear $f:c\to\mathbb{R}$ por $\lim x_n=f(\{x_n\})$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $X_n=\{x_k : k\geq n\}$. A sequência de números reais $\{\sup X_n\}$ é não crescente e possui $\inf X_1$ como cota inferior. Logo, existe $\lim(\sup X_n)$, o qual denotaremos por $\limsup x_n$. Evidentemente, $p:s\to\mathbb{R}$ dada por $p(\{x_n\})=\limsup x_n$ é um funcional sublinear. O teorema de Hahn-Banach analítico mostra então que podemos estender f a um funcional linear $\tilde{f}$ de forma que $\tilde{f}(\{x_n\})\leq\limsup x_n$ para toda sequência $\{x_n\}\in s$.

Para um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, podemos utilizar o seguinte teorema:

Teorema 4.1.2. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ real ou complexo e p uma seminorma sobre X. Se um funcional linear f definido em um subespaço $Z\subset X$ satisfaz $|f(x)|\leq p(x)$ para todo $x\in X$, então existe uma extensão linear $\tilde{f}:X\to\mathbb{K}$ de f que satisfaz $|\tilde{f}(x)|\leq p(x)$ para todo $x\in X$.*

Demonstração. Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, as desigualdades $f(x)\leq|f(x)|\leq p(x)$ mostram que podemos utilizar o teorema de Hahn-Banach analítico, pois p é um funcional sublinear, para obter uma extensão linear $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ tal que $\forall x\in X:\tilde{f}(x)\leq p(x)$. Sendo $-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leq p(-x)=p(x)$, vale $|\tilde{f}(x)|\leq p(x)$ para todo $x\in X$.
Suponhamos que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Denotando por $\Re z$ a parte real de um número complexo z e por $\Im z$ a parte imaginária, podemos definir um funcional $\mathbb{R}$-linear r sobre Z por $r(x)=\Re f(x)$ e então $\forall x\in Z: r(x)\leq\sqrt{[\Re f(x)]^2+[\Im f(x)]^2}=|f(x)|\leq p(x)$. O teorema de Hahn-Banach analítico fornece uma extensão $\mathbb{R}$-linear R de r, definida sobre todo X, tal que $\forall x\in X$: $R(x)\leq p(x)$.

Definindo $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ por $\tilde{f}(x) = R(x) - iR(ix)$, é claro que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para $x \in Z$ e que $\tilde{f}$ é $\mathbb{R}$-linear. Qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$ escreve-se $\alpha = a + bi$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$, e então $\forall x \in X : \tilde{f}(\alpha x) = a\tilde{f}(x) + b\tilde{f}(ix) = aR(x) - aiR(ix) + bR(ix) - biR(-x) = (a+bi)R(x) - i(a+bi)R(ix) = \alpha\tilde{f}(x)$, donde $\tilde{f}$ é $\mathbb{C}$-linear.
Dado qualquer $x \in X$, existe $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$ tal que $\alpha\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)| \in \mathbb{R}$. Portanto, $|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(\alpha x) = r(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha|p(x) = p(x)$. Isto é, $\forall x \in X : |\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. □

Corolário 4.1.1. *Se f é um funcional linear limitado sobre um subespaço Z de um espaço normado X, então existe uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ de f, definida sobre todo X, tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\|_Z$, onde $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Z$ são as normas de X^* e Z^*, respectivamente.*

Demonstração. Se Z possui apenas o vetor nulo, f é identicamente nulo, e a extensão procurada é $\tilde{f} = 0$. Suponhamos que Z possua vetores não nulos. Como $\forall x \in Z : |f(x)| \leq \|f\|_Z\|x\|$, podemos tomar $p : X \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = \|f\|_Z\|x\|$ como a seminorma do teorema e estender f a um funcional linear $\tilde{f}$ sobre X tal que $\forall x \in X : |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z\|x\|$.
$\|\tilde{f}\|_X = \sup\limits_{\|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z$ e $\{|f(x)| : x \in Z, \|x\| = 1\} \subset \{|\tilde{f}(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}$, donde $\|f\|_Z \leq \|\tilde{f}\|_X$. Segue-se que $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$. □

4.2 O TEOREMA DE HANH-BANACH GEOMÉTRICO

Funcionais lineares e hiperplanos são conceitos muito próximos. Assim como o teorema de Hahn-Banach analítico trata de funcionais lineares, o geométrico trata de hiperplanos.

Teorema 4.2.1 (Hahn-Banach Geométrico)**.** *Seja X um espaço vetorial topológico sobre um corpo $\mathbb{K}$, A um conjunto convexo aberto de X e M um subespaço vetorial disjunto de A. Então, existe um hiperplano fechado H disjunto de A que contém M.*

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $C = A - a$. Pela proposição 3.1.3, C é convexo. Ademais, C é aberto, como imagem inversa de A pela função contínua $g : X \to X,\ g(x) = x + a$. Pela proposição 3.1.4, o aberto C possui 0 como ponto interno, pois $0 = a - a \in A - a$. Seja p o funcional de Minkowski de C e seja Y o subespaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ gerado por M e a. Note que todo ponto de Y tem a forma $m - \lambda a,\ m \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Defina um funcional $\mathbb{R}$-linear f sobre Y por $f(m - \lambda a) = \lambda$. Então, $f(m - \lambda a) \leq p(m - \lambda a)$. Para $\lambda \leq 0$, a desigualdade é óbvia, pois $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Para $\lambda > 0$, a desigualdade decorre da proposição 3.1.5 e de $\dfrac{1}{\lambda}(m - \lambda a) = \dfrac{1}{\lambda}m - a \notin A - a$, pois $M \cap A = \phi$. Pelo teorema de Hahn-Banach analítico, podemos estender f a um funcional $\mathbb{R}$-linear $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ de forma que $\forall x \in X : \tilde{f}(x) \leq p(x)$.
Seja $H_0 = \{x \in X : \tilde{f}(x) = 0\}$. Como $\tilde{f}(x) = 0$ para $x \in M$, $M \subset H_0$. Além disso, se $b \in A$, $\tilde{f}(b) + 1 = \tilde{f}(b - a) \leq p(b - a) < 1$ (pois $b - a$ é ponto interno de $C = A - a$). Logo, $\tilde{f}(b) < 0$ para $b \in A$, o que mostra que H_0 e A são disjuntos. Sendo A um aberto, H_0 não é denso. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o teorema 2.1.2 mostra que H_0 é um hiperplano, pois $\tilde{f}$ é não trivial.

Pelo corolário 3.2.1, H_0 é um hiperplano fechado. Resumindo, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, H_0 é um hiperplano fechado, $H_0 \cap A = \phi$ e $M \subset H_0$.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, seja $H_1 = H_0 \cap iH_0$. Agora, $H_1 = \{x \in X : \tilde{h}(x) = 0\}$, onde $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) - i\tilde{f}(ix)$ é um funcional linear. Como $\tilde{h}$ não é identicamente nulo, H_1 é um hiperplano. $H_1 \subset H_0$, logo $H_1 \cap A = \phi$ e H_1 é um hiperplano fechado. □

Definição 4.2.1. Se X é um espaço vetorial e $M, N \neq \phi$ são subconjuntos de X, diremos que um funcional linear f sobre X separa M e N se f é não trivial e $\forall m \in M,\ n \in N$: $\Re f(m) \leq \Re f(n)$. Equivalentemente, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{m \in M} \Re f(m) \leq c \leq \inf_{n \in N} \Re f(n)$ e diremos que o *hiperplano real* $H = \{x \in X : \Re f(x) = c\}$ separa M e N ou que M e N podem ser separados.

Para hiperplanos reais, vale um resultado similar ao teorema 3.2.3 – um hiperplano real H é fechado se, e somente se, existem um funcional linear contínuo f e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $H = \{x \in X : \Re f(x) = \alpha\}$.

Lema 4.2.1. *Sejam M e N subconjuntos não vazios de um espaço vetorial X e $x_0 \in X$. Então:*

1. *M e N podem ser separados se, e somente se, N e M podem ser separados;*

2. *M e N podem ser separados se, e somente se, $M - x_0$ e $N - x_0$ podem ser separados;*

3. *M e N podem ser separados se, e somente se, $M - N$ e 0 podem ser separados.*

Demonstração.

1. Se M e N podem ser separados, seja f um funcional linear que separe M e N e g o funcional linear dado por $g(x) = -f(x)$. Então, $\forall m \in M,\ n \in N : \Re f(m) \leq \Re f(n)$ equivale a $\forall n \in N,\ m \in M : \Re g(n) \leq \Re g(m)$. A recíproca é simétrica.

2. M e N podem ser separados se, e somente se, existe funcional linear f tal que $\forall m \in M,\ n \in N : \Re f(m) \leq \Re f(n)$. Equivalentemente, $\forall m \in M,\ n \in N : \Re(f(m) - f(x_0)) \leq \Re(f(n) - f(x_0))$. Por linearidade, $\forall m_0 \in M - x_0,\ n_0 \in N - x_0 : \Re f(m_0) \leq \Re f(n_0)$.

3. M e N podem ser separados se, e somente se, existe funcional linear f tal que $\forall m \in M,\ n \in N : \Re f(m) \leq \Re f(n)$. Equivalentemente, $\forall m \in M,\ n \in N : \Re(f(m) - f(n)) \leq 0$. Por linearidade, $\forall p \in M - N : \Re f(p) \leq \Re f(0)$.

□

Lema 4.2.2. *Em um espaço vetorial topológico, o interior de um conjunto convexo K é convexo e $p \in \mathring{K},\ q \in \overline{K},\ 0 < \alpha < 1 \implies \alpha p + (1 - \alpha) q \in \mathring{K}$.*

Demonstração. Sejam p um ponto de $\mathring{K}$, q um ponto de $\overline{K}$, $0 < \alpha < 1$. Existem uma vizinhança aberta U da origem tal que $p + U \subset K$, pois $p + 0 = p$ e K é uma vizinhança de p, e um ponto $q_1 \in K$ tal que $q_1 \in q + \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}U$, pois, como $q + \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}U$ é uma vizinhança de $q \in \overline{K}$, se fosse $\left[q + \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}U\right] \cap K = \phi$, o conjunto $X \setminus \left[q + \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}U\right]$ seria um fechado contendo K, contradizendo $q \in \overline{K}$. Como K é convexo, o aberto $A = \alpha(p + U) + (1 - \alpha)q_1$ está contido em K. $\alpha p + (1-\alpha)q = \alpha p + (1-\alpha)(q - q_1) + (1-\alpha)q_1 \in A$, pois $q - q_1 \in \dfrac{\alpha}{1-\alpha}U$, donde $\alpha p + (1-\alpha)q$ é um ponto interior de K. Em particular, o resultado vale para $q \in \mathring{K}$, donde $\mathring{K}$ é convexo. □

4.3 O TEOREMA DE SEPARAÇÃO DE MAZUR

Resumidamente, o teorema de separação de Mazur fornece condições em que é possível obter um hiperplano que separa conjuntos convexos.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Mazur)**.** *Sejam X um espaço vetorial topológico e $C \subset X$ convexo com $\mathring{C} \neq \phi$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se V é uma variedade afim e $V \cap \mathring{C} = \phi$, então existe um hiperplano real fechado H tal que $V \subset H$ e $H \cap \mathring{C} = \phi$;*

2. *Se $C_1 \neq \phi$ é um conjunto convexo tal que $C_1 \cap \mathring{C} = \phi$, então existe um hiperplano real fechado que separa C e C_1.*

Demonstração.

1. Podemos escrever $V = x_0 + M$ para algum $x_0 \in X$ e M subespaço de X. Pelo lema anterior, $\mathring{C}$ é convexo, logo $\mathring{C} - x_0$ é um convexo aberto disjunto de M. Se X é um espaço vetorial real, o teorema de Hahn-Banach geométrico garante a existência de um hiperplano H' tal que $M \subset H'$ e $H' \cap \left(\mathring{C} - x_0\right) = \phi$. Como existe um funcional linear não trivial f tal que $H' = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $H = \{x \in X : f(x) = \alpha + f(x_0)\}$. Como H é disjunto do aberto $\mathring{C}$, H é um hiperplano real fechado com as propriedades desejadas.
   Caso X seja um espaço vetorial complexo, podemos tratar X como espaço vetorial real, por restrição da multiplicação escalar, e assim obter um funcional $\mathbb{R}$-linear não trivial f e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ contenha M e seja disjunto de $\mathring{C}$, logo seja fechado. Definindo um funcional linear por $g(x) = f(x) - if(ix)$, é claro que $H = \{x \in X : \Re g(x) = \alpha\}$ e que H tem as propriedades desejadas.

2. Pelo lema 4.2.1, podemos supor que C possui 0 como ponto interior, portanto ponto interno. Seja $a \in C_1$. O conjunto convexo $K = \mathring{C} - C_1 + a$ possui 0 como ponto interior, mas $a \notin K$, pois $\mathring{C} \cap C_1 = \phi$. Seja p o funcional de Minkowski de K. Como $a \notin K$, a proposição 3.1.5 nos mostra que $p(a) \geq 1$. Definamos um funcional $\mathbb{R}$-linear

f por $f(\lambda a) = p(\lambda a)$ para todo número real λ. É claro que $f(x) \leq p(x)$ para todo x pertencente ao subespaço real gerado por a.

O teorema de Hahn-Banach analítico garante a existência de uma extensão $\mathbb{R}$-linear $\tilde{f}$, $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in X : \tilde{f}(x) \leq p(x)$. Portanto, $\tilde{f}(x) \leq 1$ para todo $x \in K$ e $\tilde{f}(a) \geq 1$. Segue-se que $\mathring{C} - C_1 + a$ e a podem ser separados, donde $\mathring{C}$ e C_1 podem ser separados. Seja g um funcional $\mathbb{R}$-linear que separa $\mathring{C}$ e C_1 com $g(x) \leq c \leq g(y)$ para quaisquer $x \in \mathring{C},\ y \in C_1$. Suponhamos que algum $z \in C$ satisfaça $g(z) > c$. Seja $\epsilon = \dfrac{g(z) - c}{|g(z)| + |c| + 1}$. Então, $g(\epsilon 0 + (1-\epsilon)z) > c$, donde $\epsilon 0 + (1-\epsilon)z \notin \mathring{C}$ com $0 < \epsilon < 1$, o que contradiz o lema anterior. Logo, g separa C e C_1.

Caso X seja um espaço vetorial real, basta tomar, então, o hiperplano real $\{x \in X : \Re g(x) = c\}$, o qual é fechado, pois, se fosse denso, existiria $x \in \mathring{C}$ tal que $\Re g(x) = c$ e, como g é não trivial, existiria y tal que $\Re g(y) > 0$. Sendo x um ponto interior, portanto interno, poderíamos obter $\delta > 0$ tal que $x + \delta y \in \mathring{C}$, mas $g(x + \delta y) > c$, uma contradição.

Caso X seja um espaço vetorial complexo, basta definir um funcional linear h por $h(x) = g(x) - ig(ix)$ para todo $x \in X$ e tomar o hiperplano real $\{x \in X : \Re h(x) = c\}$. A demonstração de que este hiperplano real é fechado é a mesma do anterior.

$\square$

5 Cones Duais e o Teorema de Perron

O teorema de Perron é um resultado bastante famoso a respeito de sistemas dinâmicos. Nesta seção, é apresentada uma demonstração baseada no conceito de cones.

5.1 CONES E FUNCIONAIS POSITIVOS

Definição 5.1.1. Seja X um espaço vetorial topológico. Denominaremos *cone* um conjunto convexo e fechado $\{0\} \neq K \subset X$ tal que

1. $\forall \lambda \geq 0 : \lambda K \subset K$;
2. $K \cap (-K) = \{0\}$.

Por exemplo, o conjunto dos vetores $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0\}$ é um cone de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.1.1. No espaço vetorial s das sequências reais, podemos definir uma norma por $\|\{\xi_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n|}{2^n(1 + |\xi_n|)}$ (a desigualdade triangular decorre da monotonicidade de $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ h(t) = \frac{t}{1+t}$). O conjunto s_+ das sequências reais não negativas é um cone de s. Notemos que s_+ não possui ponto interior. De fato, dada qualquer $\{\xi_n\} \in s_+$ e $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Então, $\{\zeta_n\}$ dada por $\zeta_N = -1$, $\zeta_n = \xi_n$ para $n \neq N$ satisfaz $\|\{\zeta_n\} - \{\xi_n\}\| < \epsilon$, mas $\{\zeta_n\} \notin s_+$.

Fixemos um cone K de X. Dada uma aplicação linear $T : X \to X$, diremos que T é um operador positivo se T é contínua e $T(K) \subset K$. Dado um funcional linear μ sobre X, diremos que μ é um funcional positivo se μ é contínuo e $\Re\mu(x) \geq 0$ para todo $x \in K$. Denotaremos por K^*, e denominaremos cone dual de K, o cone formado por todos os funcionais positivos.

Exemplo 5.1.2. No espaço s, definido no exemplo anterior, fixemos o cone s_+. A aplicação linear $T : s \to s$ que associa a cada sequência $\{x_n\}$ a sequência $\{y_n\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : y_n = x_{n+1}$ é um operador positivo e o funcional linear contínuo μ sobre s dado por $\mu(\{\xi_n\}) = \xi_1$ é positivo.

Proposição 5.1.1. *Sejam X um espaço vetorial topológico e K um cone de X. Ao definirmos uma relação $\leq$ por $x \leq y$ se, e somente se, $y - x \in K$, ordenamos parcialmente X.*

Demonstração. Como $0 \in K$, a reflexividade de $\leq$ é óbvia. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$. Então, $y - x \in K$ e $x - y \in K$. Como $K \cap (-K) = \{0\}$, segue-se que $x - y = 0$, donde $x = y$, o que prova a antissimetria. Sejam $x, y, z \in X$ tais que $x \leq y$ e $y \leq z$. Então, $y - x \in K$, $z - y \in K$ e $z - x = 2\left(\frac{y-x}{2} + \frac{z-y}{2}\right) \in K$, ou seja, $x \leq z$, o que prova a transitividade. $\square$

Proposição 5.1.2. *Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo (isto é, dados dois pontos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças convexas U de x e V de y tais que $U \cap V = \phi$). Se $K \subset X$ é um cone e K^* é seu cone dual, então:*

1. *$K^* \neq \{0\}$;*

2. *$x \in K$ se, e somente se, $\Re f(x) \geq 0$ para todo $f \in K^*$;*

3. *Se $x_0 \in K \backslash \{0\}$, então existe $f \in K^*$ tal que $\Re f(x_0) > 0$;*

4. *Seja $\mathring{K} \neq \phi$. Se $x_0 \in \mathring{K}$, então $\Re f(x_0) > 0$ para todo $f \in K^* \backslash \{0\}$, e caso $x_0 \in \overline{K} \backslash \mathring{K}$, existe $f \in K^* \backslash \{0\}$ tal que $\Re f(x) = 0$;*

Demonstração.

1. Como $K \neq \{0\}$, podemos encontrar $x_0 \in K \backslash \{0\}$. Seja V uma vizinhança convexa de $-x_0$ disjunta de K. Pelo teorema de Mazur, V e K podem ser separados por um hiperplano real fechado, donde existem um funcional linear contínuo não trivial f e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\sup\limits_{y \in V} \Re f(y) \leq c \leq \inf\limits_{x \in K} \Re f(x)$. Suponhamos que exista $x \in K$ tal que $\Re f(x) < 0$. Então, para algum $n \in \mathbb{N}$, $\Re f(nx) = n \Re f(x) < c$, uma contradição, pois $nx \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f \in K^*$.

2. Seja $x_0 \in X \backslash K$. Como K é fechado e X é localmente convexo, existe uma vizinhança convexa V de x_0 tal que $V \cap K = \phi$. Pelo teorema de Mazur, existem um funcional linear contínuo não trivial f e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\sup\limits_{y \in V} \Re f(y) \leq c \leq \inf\limits_{x \in K} \Re f(x)$. Seja $x \in K$. Como K é um cone, $\dfrac{x}{n} \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\Re f(x) \geq nc$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $c \leq 0$. Suponhamos que $\Re f(x_0) \geq 0$, donde $\Re f(x_0) = 0$. Seja $x \in X$ tal que $\Re f(x) > 0$, o qual existe pois f é não trivial. Podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $x_0 + \epsilon x \in V$. Porém, $\Re f(x_0 + \epsilon x) = \epsilon \Re f(x) > 0$, uma contradição. A recíproca decorre da definição de K^*.

3. Dado $x_0 \in K \backslash \{0\}$, podemos encontrar vizinhanças convexas U de 0 e V de x_0 tais que $U \cap V = \phi$. Pelo teorema de Mazur, existem um funcional linear contínuo não trivial f e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\sup\limits_{y \in U} \Re f(y) \leq c \leq \inf\limits_{x \in V} \Re f(x)$. Como $0 \in U$, $c \geq 0$. Suponhamos que não valha $\Re f(x_0) > 0$, ou seja, que $\Re f(x_0) = 0$. Seja $x \in X$ tal que $\Re f(x) < 0$, o qual existe pois f é não trivial. Podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $x_0 + \epsilon x \in V$. Porém, $\Re f(x_0 + \epsilon x) = \epsilon \Re f(x) < 0$, uma contradição.

4. Se $x_0 \in \mathring{K}$ e $f \in K^* \backslash \{0\}$, então x_0 é ponto interno de K e existe $x \in X$ tal que $\Re f(x) < 0$. Suponhamos que não seja $\Re f(x_0) > 0$, isto é, suponhamos que $\Re f(x_0) = 0$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $x_0 + \epsilon x \in K$. Então, $\Re f(x_0 + \epsilon x) = \epsilon f(x) < 0$, uma contradição.
   Se $x_0 \in \overline{K} \backslash \mathring{K}$, então $\{x_0\}$ e K podem ser separados por um hiperplano real fechado, pois $\{x_0\} \cap \mathring{K} = \phi$. Logo, existem um funcional linear contínuo não trivial f e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\Re f(x_0) \leq c \leq \inf\limits_{x \in K} \Re f(x)$. Assim, dado qualquer $x \in K$, $nx \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

donde $\Re f(x) \geq 0$ e $f \in K^*$. Suponhamos que $\Re f(x_0) < 0$ e seja $x \in \mathring{K}$. Então, podemos encontrar $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha \Re f(x_0) + (1-\alpha)\Re f(x) < 0$. Logo, $\alpha x_0 + (1-\alpha)x \notin K$, o que contradiz o lema 4.2.2. $c \leq 0$, pois $0 \in K$. Consequentemente, $\Re f(x_0) = 0$.

□

Definição 5.1.2. Sejam X e Y espaços normados e $T \in L(X,Y)$. A aplicação adjunta de T, denotada por T^*, é a aplicação linear $T^* : Y^* \to X^*$ que associa a cada $y^* \in Y^*$ a aplicação linear T^*y^* tal que $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$ para todo $x \in X$.

Proposição 5.1.3. *Sejam X e Y espaços normados e $T \in L(X,Y)$. Então, $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração. Se $y^* \in Y^*$, então:

$$\begin{aligned} \|T^*y^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(T^*y^*)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|y^*(Tx)\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|y^*\|\|Tx\| \\ &= \|y^*\|\|T\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|T^*\| \leq \|T\|$. Dado qualquer $x_0 \in X$, podemos definir um funcional linear $g_0,\ \|g_0\| = 1$ sobre o subespaço vetorial gerado por Tx_0 pondo $g_0(\alpha Tx_0) = \alpha\|Tx_0\|$ para todo escalar α e estender g_0 a um funcional linear $g_1 \in Y^*,\ \|g_1\| = 1$. Seja $f_1 = T^*g_1$. Então:

$$\begin{aligned} \|Tx_0\| = g_1(Tx_0) &= f_1(x_0) \\ &\leq \|f_1\|\|x_0\| \\ &= \|T^*g_1\|\|x_0\| \\ &\leq \|T^*\|\|g_1\|\|x_0\| \end{aligned}$$

Logo, $\|Tx_0\| \leq \|T^*\|\|x_0\|$ e, como $x_0 \in X$ foi arbitrário, $\|T\| \leq \|T^*\|$. Portanto, vale a igualdade $\|T^*\| = \|T\|$. □

Definição 5.1.3. Se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então diremos que um cone K de X é *normal* quando

$$\inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ x,y \in K}} \|x+y\| > 0.$$

Exemplo 5.1.3. Seja Ω um espaço compacto. $C^+_{\mathbb{R}}(\Omega) \subset C_{\mathbb{R}}(\Omega)$, onde $C_{\mathbb{R}}(\Omega)$ é o espaço de Banach (como no exemplo 2.3.1) das funções reais não negativas sobre Ω, é um cone normal. De fato, se $x, y \in C^+_{\mathbb{R}}(\Omega)$ são tais que $\|x\| = 1,\ \|y\| = 1$, então existem $t_0, t_1 \in \Omega$ tais que $|x(t_0)| = 1$ e $|y(t_1)| = 1$. Portanto, $\|x+y\| = \sup_{t\in\Omega} |(x+y)(t)| \geq |(x+y)(t_0)| \geq |x(t_0)| + |y(t_0)| \geq 1$, donde $\inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ x,y \in K}} \|x+y\| > 0$.

O cone dual de $C^+_{\mathbb{R}}(\Omega)$ é denominado cone das medidas de Baire não negativas sobre Ω.

Proposição 5.1.4. *Um cone K de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é normal se, e somente se, $\|\cdot\|$ é semimonotônica, isto é,* $\exists \gamma \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq y \implies \|x\| \leq \gamma \|y\|$.

Demonstração. Se $\|\cdot\|$ é semimonotônica, então existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x \leq y \implies \|x\| \leq \gamma\|y\|$. Evidentemente, $\gamma > 0$. Dados quaisquer $x, y \in K$ tais que $\|x\| = \|y\| = 1$, vale $x \leq x + y$, donde $\|x\| \leq \gamma\|x+y\|$ e $\|x+y\| \geq \frac{1}{\gamma}$. Logo, $\inf\limits_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ x,y \in K}} \|x+y\| > 0$.

Se $\|\cdot\|$ não é semimonotônica, então podemos encontrar sequências $\{x_n\}, \{y_n\}$ de vetores de K tais que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n,\ \|x_n\| > n\|y_n\|$. Sejam $v_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, $w_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ e $z_n = \frac{\frac{1}{n}w_n - v_n}{\|\frac{1}{n}w_n - v_n\|}$. Então, $\|v_n\| = \|z_n\| = 1$, $v_n, z_n \in K$, mas $\|v_n + z_n\| \leq \left\|\frac{\frac{1}{n}w_n}{\|\frac{1}{n}w_n - v_n\|}\right\| + \left\|\left(1 - \frac{1}{\|\frac{1}{n}w_n - v_n\|}\right)v_n\right\| = \frac{1}{\|w_n - nv_n\|} + \left|1 - \frac{n}{\|w_n - nv_n\|}\right| \leq \frac{1}{n-1} + \left(\frac{n}{n-1} - 1\right) = \frac{2}{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, donde $\lim \|v_n + z_n\| = 0$ e K não é normal. □

Definição 5.1.4. Se $T \in L(X)$, onde X é um espaço de Banach, então o *raio espectral* de T, o qual denotaremos por $r(T)$, é o limite dado por:

$$\lim \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

A demonstração da existência do limite definido acima pode ser encontrada, por exemplo, em [KREYSZIG, 1989].Notemos que, se existe $x \in X,\ x \neq 0$, tal que $Tx = \lambda x$, então $\sqrt[n]{\|T^n\|} \geq |\lambda|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r(T) \geq |\lambda|$.

Proposição 5.1.5. *Seja $T \in L(X)$, onde X é um espaço de Banach, e T^* a aplicação adjunta de T. Então, $r(T) = r(T^*)$.*

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, é claro que $(T^*)^n = (T^n)^*$. Portanto:

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim \sqrt[n]{\|T^n\|} \\ &= \lim \sqrt[n]{\|(T^n)^*\|} \\ &= \lim \sqrt[n]{\|(T^*)^n\|} \\ &= r(T^*). \end{aligned}$$

□

Definição 5.1.5. Sejam X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e X' o espaço vetorial dos funcionais lineares sobre X. Diremos que $f \in X'$ é um autofuncional associado a uma aplicação linear $T : X' \to X'$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K} : Tf = \lambda f$.

Teorema 5.1.1. *Seja X um espaço de Banach parcialmente ordenado por um cone normal K tal que $\mathring{K} \neq \phi$ e seja T um operador positivo. Então, o raio espectral $r(T)$ é um autovalor de T^*, ao qual está associado um autofuncional $x^* \in K^*$.*

Demonstração. Tomemos $e \in \mathring{K}$ e $X_0 = \{r(T)x - Tx : x \in X\}$. Suponhamos que $X_0 \cap \mathring{K} \neq \phi$. Então, existem $x \in X$ e $y \in \mathring{K}$ tais que $y = r(T)x - Tx$. Como $y \in \mathring{K}$, y é um ponto interno de K, logo $\exists \delta > 0 : y - \delta(-x) \geq 0$.
$T(-x) = r(T)(-x) + y \implies T(-x) \geq [r(T) + \delta](-x)$. Aplicando T repetidamente, a linearidade de T mostra que $T^n(-x) \geq [r(T) + \delta]^n(-x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como e é ponto interno, existe $\delta' > 0$ tal que $e + \delta'(-x) \geq 0$, donde $A = \dfrac{1}{\delta'}$ satisfaz $Ae - x \geq 0$.
Portanto, $T^n(-x) + [r(T)+\delta]^n Ae \geq [r(T)+\delta]^n(-x + Ae)$. Pela proposição 5.1.4, $\lambda|T^n(-x) + [r(T) + \delta]^n Ae| \geq |[r(T) + \delta]^n(-x + Ae)|$ para algum $\lambda > 0$, donde $\lambda|T^n(-x)| + \lambda[r(T) + \delta]^n|Ae| \geq [r(T)+\delta]^n|Ae-x|$ e $\lambda|T^n||-x| \geq [r(T)+\delta]^n[|Ae-x| - \lambda|Ae|]$. Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar,

$$\sqrt[n]{\lambda|-x|}\,\sqrt[n]{|T^n|} \geq [r(T) + \delta]\,\sqrt[n]{|Ae - x| - \lambda|Ae|}.$$

Pela definição 5.1.4 e pelas propriedades elementares de limites de sequências de números reais, $r(T) \geq r(T) + \delta$, uma contradição.
Concluímos que $X_0 \cap \mathring{K} = \phi$. Como X_0 e K são convexos, o Teorema de Mazur garante que X_0 e K podem ser separados por um hiperplano real fechado. Assim, existem x^* um funcional linear não trivial contínuo e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_{x \in X_0} \Re x^*(x) \leq c \leq \inf_{y \in K} \Re x^*(y).$$

Como $0 \in X_0$ e $0 \in K$, é claro que $c = 0$. E como X_0 é um subespaço vetorial, segue-se que $x^*(x) = 0$ para todo $x \in X_0$. Então, $\forall x \in X : x^*(r(T)x - Tx) = 0$, donde $\forall x \in X : x^*(Tx) = r(T)x^*(x)$ e $\forall x \in X : T^*x^*(x) = r(T)x^*(x)$. Além disso, $\Re x^*(y) \geq 0$ para todo $y \in K$, donde $x^* \in K^*$, o que conclui a demonstração. □

5.2 TEOREMA DE PERRON

Como aplicação do teorema 5.1.1, temos o seguinte teorema. Em sua demonstração, usaremos alguns fatos da Álgebra Linear que podem ser facilmente encontrados, por exemplo, em [LAX, 2007].

Teorema 5.2.1 (Teorema de Perron)**.** *Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear cuja matriz (relativamente à base canônica) possua todas os elementos positivos. Então, P possui um autovalor $\lambda > 0$ simples, isto é, de multiplicidade 1 no polinômio característico de P, tal que:*

1. *Existe um autovetor p associado a λ com todas as coordenadas positivas;*

2. *$\lambda > |\mu|$ para todo autovalor $\mu \neq \lambda$ da complexificação de P;*

3. *λ é o único autovalor ao qual está associado algum autovetor não negativo.*

Demonstração.

a Sem perda de generalidade, podemos tomar sobre o espaço $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana. Podemos definir uma aplicação linear $A : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$Af = (f(1, \ldots, 0), \ldots, f(0, \ldots, 1)).$$

É claro que A é bijetiva, logo possui uma aplicação linear inversa A^{-1}. Notemos que, para todo $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\|Af\| \le \|f\|$, pois:

$$\begin{aligned}\|Af\|^2 &= f(1, \ldots, 0)^2 + \cdots + f(0, \ldots, 1)^2 \\ &= f(f(1, \ldots, 0), \ldots, f(0, \ldots, 1)) \\ &\le \|f\|\|Af\|.\end{aligned}$$

Além disso, $\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \le \|Af\|\|(x_1, \ldots, x_n)\|$ para todo $(x_1, \ldots, x_n)$ pertencente a $\mathbb{R}^n$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, donde $\|f\| \le \|Af\|$. Portanto $\|Af\| = \|f\|$ para todo $f \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Seja $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Se $M = \{m_{ij}\}$ é a matriz de P, então, dado qualquer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}f(Px) &= \sum_{j=1}^{n}(m_{1j}x_j)f(1, \ldots, 0) + \cdots + \sum_{j=1}^{n}(m_{nj}x_j)f(0, \ldots, 1) \\ &= f(m_{11}, \ldots, m_{n1})x_1 + \cdots + f(m_{n1}, \ldots, m_{nn})x_n.\end{aligned}$$

Segue-se que a aplicação linear T cuja matriz é a transposta de M satisfaz $P^* = A^{-1}TA$, onde P^* é a adjunta de P. Seja $(\mathbb{R}^n)^*_+$ o cone dual do cone dos vetores de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas não negativas. Então, o teorema 5.1.1 nos diz que a adjunta T^* de T possui o raio espectral $r(T)$ como autovalor, ao qual está associado um autofuncional $q \in (\mathbb{R}^n)^*$. Afirmamos que $r(T) = r(P)$. De fato, $T = AP^*A^{-1}$ e a restrição de A^{-1} a $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \ = 1\}$ é uma bijeção de $S(0,1)$ em $S(0,1)$. Logo, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|(AP^*A^{-1})^m\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(A(P^*)^m A^{-1})(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|((P^*)^m A^{-1})(x)\| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|(P^*)^m y\| \\ &= \|(P^*)^m\|,\end{aligned}$$

donde $r(T) = r(P^*)$. De $r(P^*) = r(P)$ segue-se que $r(T) = r(P)$. Sabemos da álgebra linear que a soma dos elementos da diagonal da matriz de T é igual à soma dos autovalores, cada um somado tantas vezes quanto sua multiplicidade, da complexificação de T. Logo, T possui algum autovalor não nulo, donde $r(P) = r(T) > 0$.

Afirmamos que $p = Aq$ é um autovetor de P associado ao autovalor $r(P)$. De fato,

$$\begin{aligned} Pp = PAq &= P(q(1, \ldots, 0), \ldots, q(0, \ldots, 1)) \\ &= (q(m_{11}, \ldots, m_{1n}), \ldots, q(m_{n1}, \ldots, m_{nn})) \\ &= ((T^*q)(1, \ldots, 0), \ldots, (T^*q)(0, \ldots, 1)) \\ &= AT^*q \\ &= r(P)p. \end{aligned}$$

$p \in (\mathbb{R}^n)_+$, pois $q \in (\mathbb{R}^n)_+^*$ e $(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1) \in (\mathbb{R}^n)_+$. Como $p \neq 0$, $p \in (\mathbb{R}^n)_+$ e a matriz de P tem todas os elementos positivos, concluímos que $p = \dfrac{1}{r(P)}Pp$ tem todas as coordenadas positivas.

b Mostraremos agora que $r := r(P)$ é um autovalor simples de P. Para isso, basta provarmos que, para todo $m \in \mathbb{N}$, vale $(P - rI)^m x = 0$ somente se $(P - rI)x = 0$. Podemos supor $x \neq 0$. Escrevamos K em vez de $(\mathbb{R}^n)_+$.

a) No caso $m = 1$, como p é ponto interno de K, existe $\delta > 0$ tal que $p + tx \in K$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \delta$. Como $p + tx = \dfrac{1}{r}P(p + tx)$, temos que $p + tx \in \mathring{K}$ para esses valores de t. Logo, o conjunto $C = \{|t| : p + tx, p - tx \in \mathring{K}\}$ contém elementos não nulos.
Seja $c = \sup C$. Evidentemente, $c \neq +\infty$, caso contrário encontramos uma sequência $\{t_n\}, |t_n| \to +\infty$ de escalares tais que $\dfrac{1}{t_n}p + x$ e $\dfrac{1}{t_n}p - x$ pertencem a K para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, x e $-x$ pertencem a K, pois K é fechado. Logo, $x = 0$, uma contradição.
Suponhamos que $p + cx$ e $p - cx$ pertençam a $\mathring{K}$. Portanto, existem $\delta_1 > 0$ tal que $p + dx \in \mathring{K}$ para $|d - c| < \delta_1$ e $\delta_2 > 0$ tal que $p + dx$ para $|d + c| < \delta_2$. Pondo $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, concluímos que $c + \dfrac{\delta_0}{2}$ pertence a C, uma contradição. Logo, $p + cx \notin \mathring{K}$ ou $p - cx \notin \mathring{K}$.
Sem perda de generalidade, podemos supor $p + cx \notin \mathring{K}$. Então, como existe uma sequência $\{c_n\}$ tal que $c_n < c$ e $p + c_n x \in \mathring{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $p + cx \in K$, pois K é fechado. Mas o único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Pv = rv$ e $v \in K \backslash \mathring{K}$ é $v = 0$, logo $x = -\frac{1}{c}p$ e $(P - rI)x = 0$.

b) Agora, suponhamos demonstrado que, para um certo $m \in \mathbb{N}$, valha $(P - rI)^m x = 0$ somente se $(P - rI)x = 0$. Então, $(P - rI)^{m+1}x = 0$ implica $(P - rI)(Px - rx) = 0$, por hipótese, donde $rx - Px = t_0 p$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Para $t_0 = 0$, não há o que fazer. Caso $t_0 \neq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $t_0 > 0$. Então, $P(p + sx) = r(p + sx) - st_0 p$ e $r(p + sx) - P(p + sx) \in \mathring{K}$ para todo $s > 0$. Seja $S = \{s : p + sx \in \mathring{K}\}$. Como p é ponto interno de K, $S \neq \phi$. Pondo $c = \sup S$, é claro que $c = +\infty$, caso contrário teríamos $p + cx \in K \backslash \mathring{K}$ mas $r(p + cx) - P(p + cx) \in \mathring{K}$, donde $p + cx = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{r}[r(p + cx) - P(p + cx)] + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{r}P(p + cx) \in \mathring{K}$, uma contradição.

Logo, $p+sx \in \mathring{K}$ para todo $s \geq 0$, donde $x \in K$ e $x = \dfrac{1}{r}(Tx+t_0p) \in \mathring{K}$. Portanto, existe $t > 0$ tal que $x - tp \in \mathring{K}$, já que $x \in \mathring{K}$. Mas não podemos ter $x - tp \in \mathring{K}$ para todo $t > 0$, caso contrário seria $-p \in K$ e $p = 0$. Seja então t_1 o supremo dos $t > 0$ tais que $x - tv \in \mathring{K}$. Segue-se que $x - t_1v \in K$, logo $x - t_1v = 0$, caso contrário $T(x-t_1v) = rx-t_0v-t_1rv \in \mathring{K}$, donde $x - \left(t_1 + \dfrac{t_0}{r}\right) v \in \mathring{K}$, absurdo, pois $t_1 + \dfrac{t_0}{r} > t_1$. Portanto, por indução, $(P-rI)^m x = 0$ somente se $(P-rI)x = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

c Denotemos por $P_{\mathbb{C}}$ a complexificação de P. Seja $\epsilon > 0$ tal que a matriz de $P_{\mathbb{C}} - \epsilon I$ tenha todas os elementos positivos. $\mu \in \mathbb{C}$ é autovalor $P_{\mathbb{C}} - \epsilon$ se, e somente se, $\mu + \epsilon$ é autovalor de $P_{\mathbb{C}}$. Portanto, o maior autovalor positivo de $P_{\mathbb{C}} - \epsilon I$ é $r(P) - \epsilon$. Como $P - \epsilon I$ satisfaz as hipóteses do teorema, $r(P) - \epsilon$ é o raio espectral de $P - \epsilon I$, logo o raio espectral de $P_{\mathbb{C}} - \epsilon I$. Segue-se que o conjunto dos autovalores de $P_{\mathbb{C}} - \epsilon I$ está contido em $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq r(P) - \epsilon\}$, donde o conjunto dos autovalores de $P_{\mathbb{C}}$ está contido em $\{z \in \mathbb{C} : \|z - \epsilon\| \leq r(P) - \epsilon\}$. Portanto, todo autovalor de $P_{\mathbb{C}}$ diferente de $r(P)$ satisfaz $\|z\| < r(P)$.

d Seja v um autovetor não negativo e ρ o autovalor ao qual v está associado. Como Pv possui todas as coordenadas positivas, segue-se que v tem todas as coordenadas positivas e $\rho > 0$. Suponhamos que $\rho \neq r(P)$. Como $r(P)$ é o maior autovalor positivo de P, $\rho < r(P)$. Seja $\leq$ a ordenação parcial do cone $(\mathbb{R}^n)_+$. Podemos escolher um autovetor w associado a $r(P)$ de forma que $w \leq v$. Então, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$r(P)^m w = P^m w \leq P^m v = \rho^m v.$$

Como w possui todas as coordenadas positivas, podemos encontrar $k > 0$ tal que $kw - v \geq 0$. Para tal k, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k\rho^m < r(P)^m$, pois $\rho < r(P)$. Portanto, $\rho^m(kw - v) \in (\mathbb{R}^n)_+$ e $r(P)^m w \geq \rho^m v$, donde $r(P)^m w = \rho^m v$, uma contradição.

$\square$

6 CONCLUSÃO

Podemos concluir a partir deste trabalho que, com as ferramentas adequadas, é possível trabalhar em espaços vetoriais de dimensão infinita para obter teoremas relevantes, inclusive no contexto de sistemas dinâmicos.

REFERÊNCIAS

DEIMLING, Klaus. *Nonlinear Functional Analysis*. Dover Publications, New York, 2010.

DUNFORD, Nelson e SCHWARTZ, Jacob. *Linear Operators. Part I: General Theory*. Interscience Publishers, New York, 1963.

HEWITT, Edwin e STROMBERG, Karl. *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1975.

KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York, 1989.

LANG, Serge. *Real and Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1993.

LAX, Peter. *Linear Algebra and Its Applications*. Wiley, New York, 2007.

SCHAEFER, Helmut. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1971.