

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classificação das subvariedades
totalmente umbílicas de $S^n \times \mathbb{R}$

Rodrigo Costa

MACEIÓ - AL
MARÇO DE 2022

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Classificação das subvariedades
totalmente umbílicas de $S^n \times \mathbb{R}$

por

Rodrigo Costa

sob a orientação do

Prof. Dr. Carlos Gonçalves do Rei Filho

MACEIÓ - AL
MARÇO DE 2022

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

C837c Costa, Rodrigo.
Classificação das subvariedades totalmente umbílicas de $S_n \times \mathbb{R}$ /
Rodrigo Costa. – 2022.
100 f.

Orientador: Carlos Gonçalves do Rei Filho.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de
Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 97-98.
Apêndice: f. 99-100.

1. Subvariedades umbílicas. 2. Hipersuperfícies umbílicas. 3.
Subvariedades de rotação (Matemática). I. Título.

CDU: 51

Classificação das subvariedades totalmente umbílicas de $S^n \times \mathbb{R}$

por

Rodrigo Costa ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 24 de Março de 2022.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Carlos Gonçalves do Rei Filho (UFAL)
(Orientador)



Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória (UFAL)
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Samuel da Cruz Canevari (UFS)
(Examinador Externo)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*Dedico a minha mãe
Josete Maria Costa
e ao meu Pai
Arlindo Costa (in Memoriam).*

Agradecimentos

Sou imensamente grato primeiramente a Deus, por sua infinita bondade para comigo, e a minha família por todo apoio e incentivo.

Agradeço ao meu orientador, Carlos Gonçalves, principalmente pela paciência e compreensão durante a orientação. Grande parte do que foi feito neste trabalho, não seria possível sem o seu apoio.

Aos professores da banca, Feliciano e Samuel, por terem aceitado avaliar o trabalho e pelas valiosas sugestões.

Aos meus amigos da Unicamp, onde iniciei o mestrado, Matias, Cássio, Rafael, Lucas e Gabriel pelos momentos de descontração e diálogos matemáticos.

Aos amigos do Instituto de Matemática-UFAL, Jandir, Henrique, Carlos, Cleone, Lucas, Eduardo, Antônio e Alexandre, em especial a Deivid, Vinícius, e Davis por terem disponibilizado um pouco do seu tempo para discutir sobre o trabalho. Muitas vezes nossas discussões não tiveram êxito, mas cada um deu sua contribuição da forma que pôde. À vocês sou eternamente grato.

Aos professores do Instituto de Matemática com que cursei as disciplinas, Carlos Gonçalves, Ranieri, Tiarlos, Wagner, Feliciano, Petrucio e Gregório por todo conhecimento que adquiri ao longo do mestrado.

Ao professor Márcio Batista, coordenador do PPGMAT-UFAL, pela compreensão e sempre ter acatado as decisões que resolvi tomar.

À equipe de técnicos do Instituto de Matemática pelo excelente trabalho exercido, em especial quero agradecer a Ana, pela disponibilidade de sempre esclarecer minhas dúvidas sempre que precisei.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“A persistência é o menor caminho do
êxito”.*
(Charles Chaplin)

Resumo

Nesta dissertação, iremos apresentar uma classificação das subvariedades umbílicas de dimensão e codimensão arbitrária de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, baseado no trabalho de Bruno Mendonça e Ruy Tojeiro, em [11]. A classificação que será apresentada, estende a classificação das superfícies umbílicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ por Souam e Toubiana, em [12], bem como a descrição local das hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ por Van der Veken e Vrancken, em [15], para codimensão maior que um. Em ambos os trabalhos, as superfícies umbílicas e hipersuperfícies umbílicas são de rotação. Será mostrado que as subvariedades estudadas neste trabalho também são de rotação e apresentaremos parametrizações explícitas.

Palavras-chave: Classificação, subvariedades umbílicas, subvariedades de rotação

Abstract

In this thesis, we will present a classification for the umbilical submanifolds of arbitrary dimension and codimension of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, based on the work by Bruno Mendonça and Ruy Tojeiro in [11]. The classification that will be presented extends the current classification of the umbilic surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ by Souam and Toubiana in [12] as well as the local description of the umbilical hypersurfaces $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ by Van der Veken and Vrancken in [15] for codimensions greater than one. In both works, the umbilic surfaces and hypersurfaces are of rotation type. It will be shown here that the submanifolds studied in this work are also of rotation type and we will present explicit parametrization.

Keywords: Classification, umbilical submanifolds, rotational submanifolds

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	12
1.1 Fibrados Vetoriais	12
1.2 Fibrados Riemannianos	15
1.3 Imersões Isométricas	17
1.4 Subvariedades totalmente Geodésicas	22
1.5 Subvariedades totalmente Umbílicas	25
1.6 Folheações e Distribuições Tangentes	27
1.7 Imersões isométricas em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$	29
1.7.1 Notações e Definições	29
1.7.2 Equações de estrutura	34
2 Uma classe de subvariedades de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$	40
2.1 Classe \mathcal{A}	40
2.2 Subvariedades de Rotação em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$	53
3 Redução de Codimensão	60
3.1 Fatos básicos	60
3.2 Redução de codimensão em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$	61
3.2.1 Uma Aplicação	63
4 Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$	71
4.1 Resultados Auxiliares	71
4.2 A classificação das umbílicas de $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$	77
A Alguns Resultados utilizados	99
A.1 Resultados de Cálculo	99
A.1.1 O conjunto $I := \{s \in \mathbb{R} : (p - s^2)^2 - q > 0\}$	99
A.1.2 Uma integral	99

Introdução

Esta dissertação está centrada na teoria das subvariedades, teoria que surgiu como um desenvolvimento natural do estudo clássico de curvas e superfícies do espaço euclidiano tridimensional, e generalizou este estudo para qualquer número de dimensões e codimensões e espaços ambientes arbitrários. No último século, evoluiu para uma ampla subárea da Geometria Diferencial com muitos ramos distintos, fazendo uso de diversas técnicas.

As subvariedades mais simples de uma variedade Riemanniana são aquelas cuja segunda forma fundamental é identicamente nula, chamadas de totalmente geodésicas. Uma subvariedade $M \subset N$ é dita umbílica quando $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle \omega$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, em que α é a segunda forma fundamental de M com valores no fibrado normal e ω é o vetor curvatura média de M . Dessa forma, M é totalmente geodésica quando é umbílica e $\omega = 0$.

As formas espaciais são as variedades riemannianas completas com curvatura seccional constante. A classificação das subvariedades umbílicas das formas espaciais já foi realizada, e pode ser encontrada em [5]. Muito se há a respeito das subvariedades de uma forma espacial. Contudo, existem poucas variedades Riemannianas para as quais as subvariedades umbílicas são classificadas.

Soaun e Toubiana, em [12], deram uma classificação das superfícies totalmente umbílicas para todas as geometrias 3-dimensional de Thurston de curvaturas não constante, bem como para as esferas de Berger. Os casos mais interessantes acabaram sendo o dos espaços produtos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Para essas variedades, foi mostrado que, a menos de isometria do espaço ambiente, as superfícies umbílicas não totalmente geodésicas, são superfícies de rotação sobre uma curva. Tal curva é obtida via soluções de sistema de EDOs.

Van der Veken e Vrancken, em [15], classificaram localmente as hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, enquanto que, Calvaruso, Kowalczyk e Van der Veken, em [2], classificaram localmente as hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Novamente, nestes dois casos, as não totalmente geodésicas são hipersuperfícies de rotação sobre curvas em produtos totalmente geodésicos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$, respectivamente. Por outro lado, foi mostrado em [13], por Souam e Van der Veken que um produto Riemanniano $M \times \mathbb{R}$ admite hipersu-

perfícies totalmente umbílicas não triviais se e somente se a variedade Riemanniana M tem localmente a estrutura de um produto warped, e neste caso uma descrição local de todas essas hipersuperfícies foi fornecido.

Mendonça e Tojeiro, em [11], artigo na qual esta dissertação foi baseada, deram uma classificação das subvariedades umbílicas de dimensão e codimensão arbitrária de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. O objetivo principal desse trabalho é apresentar as demonstrações dos resultados obtidos em [11], em especial, o Teorema de classificação das subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Antes de enunciar este Teorema, é necessário que façamos uma breve apresentação dos elementos presentes neste resultado.

Para um dado inteiro $m \geq 2$, seja $\Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ o difeomorfismo conforme dado por $\Phi(x, t) = e^t x$. Escolha uma semi-reta $\ell := \{\bar{x}\} \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^{m+2} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}$ com $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Seja $M_{r,h}^m$ a imagem por Φ^{-1} da esfera m -dimensional $\mathbb{S}_{r,h}^m$ em \mathbb{R}^{m+2} de raio r centrado em ℓ que se encontra no hiperplano afim através de (\bar{x}, h) ortogonal a ℓ , com a origem removida se $h = 0$ e $r = d := \|\bar{x}\|$. Então vale o seguinte Teorema.

Teorema 1 (Teorema 4.2.4). *A subvariedade $M_{r,h}^m$ é uma subvariedade umbílica completa de $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ para cada $r > 0$ e $h \geq 0$. Além disso, $M_{r,h}^m$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) *é difeomorfa a \mathbb{S}^m se $(r, h) \neq (d, 0)$ e a \mathbb{R}^m se $(r, h) = (d, 0)$;*
- (ii) *está em uma hipersuperfície totalmente geodésica $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ se e somente se, $h = 0$;*
- (iii) *$M_{r,0}^m$ é homotópica a 0 em $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ se $r < d$ e não homotópica a 0 se $r > d$;*
- (iv) *é uma subvariedade de rotação cujo perfil é uma curva em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$) se $h \neq 0$ (respectivamente, $h = 0$);*
- (v) *$M_{r,h}^m$ é congruente a $M_{r',h'}^m$ se e somente se, $(r, h) = (r', h')$.*

Reciprocamente, qualquer subvariedade umbílica não totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com dimensão $m \geq 2$ é, a menos de uma isometria do espaço ambiente, um subconjunto aberto de um dos seguintes:

- (a) *uma esfera pequena em $\mathbb{S}^n \times \{0\}$;*
- (b) *$M_{r,0}^m$ para algum $r > 0$ se $n = m$;*
- (c) *$M_{r,h}^m$ para algum $r > 0$ e $h \geq 0$ se $n = m + 1$;*
- (d) *$M_{r,h}^m$ em $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ totalmente geodésica para algum $r > 0$ e $h \geq 0$ se $n > m + 1$.*

No primeiro capítulo deste trabalho, introduzimos definições e resultados básicos sobre fibrados vetoriais e Geometria Riemanniana. Na última seção deste capítulo é apresentado os resultados auxiliares que darão apoio no decorrer dos capítulos seguintes. Mais especificamente, nesta seção obtemos alguns resultados a respeito da imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. A variedade \mathbb{Q}_ϵ^n denota \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n , ou \mathbb{H}^n , quando $\epsilon = 1, 0$ ou -1 , respectivamente, onde ϵ é a curvatura seccional de \mathbb{Q}_ϵ^n . O campo $\frac{\partial}{\partial t}$, campo unitário tangente ao fator \mathbb{R} de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, admite a decomposição $\frac{\partial}{\partial t} = f_*T + \eta$, onde $T \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \Gamma(N^fM)$. O campo T desempenha um papel importante não apenas nesta seção, mas também na obtenção de vários outros resultados deste trabalho.

O capítulo dois é dedicado ao estudo da classe \mathcal{A} . Esta classe é o conjunto de todas as imersões isométricas $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, com a propriedade de que o campo de vetores T , tangente a M^m é um autovetor de todo operador de forma de f para todo $\xi \in \Gamma(N^fM)$. Um dos principais resultados deste capítulo é o Teorema 2.1.3, que fornece uma descrição completa de todas as imersões isométricas na classe \mathcal{A} . Na seção 2.2 deste capítulo faremos um estudo sobre as subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, que é uma subclasse da classe \mathcal{A} , onde apresentamos o Teorema 2.2.3, que nos dá uma sequência de equivalências sobre subvariedades de rotação de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, e é um dos resultados chave na demonstração do teorema principal deste trabalho.

No capítulo três apresentamos resultados a cerca da redução da codimensão de uma imersão isométrica. A codimensão de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$ pode ser reduzida a $k < m$, quando existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+k}$ de $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$ tal que $f(M^n) \subseteq \mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$. Joseph Erbacher, em [8], estabeleceu que a codimensão de $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$ pode ser reduzida a k , quando existe um subfibrado paralelo L do espaço normal de f com posto $k < m$ tal que o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é um subconjunto de $L(x)$, $x \in M^n$. O objetivo deste capítulo é a prova do Teorema 3.2.1, que estabelece hipóteses, para que a codimensão de f possa ser reduzida quando o espaço ambiente for $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Finalizamos este capítulo com uma aplicação para uma prova alternativa sobre um teorema de redução de codimensão de superfícies com vetor curvatura média paralelo em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, devido a Alencar, do Carmo e Tribuzy, em [1].

Finalmente, o último capítulo é dedicado a prova do Teorema de classificação das subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contém um material de apoio, essencial para o entendimento dos capítulos subsequentes. A maior parte deste capítulo é dedicada aos resultados básicos de Geometria Riemanniana, e o leitor interessado em detalhes sobre o assunto deve procurar as referências citadas. Porém, na última seção é onde damos início a apresentação dos resultados auxiliares que serão fundamentais no decorrer deste trabalho.

1.1 Fibrados Vetoriais

Nesta seção, definimos um dos objetos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho, os fibrados vetoriais. Um fibrado vetorial é, de certa forma, uma generalização do fibrado tangente e do fibrado normal (de uma imersão isométrica) sobre uma variedade diferenciável. O conteúdo desta seção foi baseado em [5] e [10].

Definição 1.1.1. Dada uma variedade diferenciável M , um *fibrado vetorial* real C^∞ sobre M é uma variedade diferenciável E , juntamente com uma aplicação diferenciável e sobrejetiva $\pi : E \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes condições:

- 1) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ possui a estrutura de espaço vetorial real k dimensional
- 2) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e uma aplicação diferenciável $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tal que:
 - i. Para cada $q \in U$, a restrição de Φ à E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, munido com a estrutura canônica de espaço vetorial.
 - ii. Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então $\pi = \pi_U \circ \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$.

Nas notações acima, dizemos que M é a *base* e E é o *espaço total* do fibrado; E_p ($p \in M$) é a *fibra* de E sobre p . O natural k é o *posto* de E (ou de π); se $k = 1$, dizemos que E é um *fibrado de linhas*. Por fim, Φ é uma *trivialização local*, ou carta de fibrado de E sobre U .

Sempre que não houver perigo de confusão, diremos simplesmente que E (resp. π) é um fibrado sobre M , deixando implícita a projeção π (resp. o espaço total E) e o posto k .

Dados dois fibrados vetoriais $\pi_E : E \rightarrow M_1$ e $\pi_F : F \rightarrow M_2$, e um difeomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, dizemos que uma aplicação diferenciável $\bar{\phi} : E \rightarrow F$ é um isomorfismo de fibrados ao longo de ϕ quando para todo $x \in M_1$, temos

- i. $\pi_F \circ \bar{\phi} = \phi \circ \pi_E$ e $\bar{\phi}(\pi_E^{-1}(x)) = \pi_F^{-1}(\phi(x))$,
- ii. A restrição $\bar{\phi}_x : \pi_E^{-1}(x) \rightarrow \pi_F^{-1}(\phi(x))$ de $\bar{\phi}$ a fibra $\pi_E^{-1}(x)$ é um isomorfismo de espaço vetorial.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$, um *subfibrado* de E é um fibrado vetorial $\tilde{\pi} : D \rightarrow M$, em que D é um subespaço topológico de E e $\tilde{\pi}$ é a restrição de π em D , tal que para cada $p \in M$, o subconjunto $D_p = D \cap E_p$ é um subespaço linear de E_p , e a estrutura de espaço vetorial em D_p é herdada de E_p .

Se M é uma variedade diferenciável, $E = M \times \mathbb{R}^k$ e $\pi_M : E \rightarrow M$ é a projeção sobre o primeiro fator, então é imediato verificar que E é um fibrado vetorial de posto k sobre M , denominado o *fibrado trivial* de posto k sobre M (para $p \in M$, a estrutura de espaço vetorial k -dimensional em $E_p = \{p\} \times \mathbb{R}^k$ é novamente a canônica).

Um fato importante é que podemos construir fibrados vetoriais a partir de outros já dados. Não iremos nos aprofundar nesse assunto, o leitor interessado deve procurar as referências citadas. Apresentaremos a soma de Whitney e o fibrado induzido. Não provaremos as próximas afirmações, mas em caso de dúvidas ver, por exemplo, [5] ou [14].

Exemplo 1.1.2 (Soma de Whitney). *Sejam $\pi_E : E \rightarrow M$ e $\pi_F : F \rightarrow M$ fibrados vetoriais de postos k e l , respectivamente. A soma de Whitney de E e F é o espaço topológico de dimensão kl*

$$E \oplus_W F = \coprod_{p \in M} (E_p \oplus F_p)$$

munido da estrutura de fibrado vetorial sobre M induzida a partir daquelas de E e F .

Exemplo 1.1.3 (Fibrado Induzido). *Sejam $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial e $f : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Defina*

$$\hat{E} = \{(x, e) \in N \times E : f(x) = \pi(e)\}$$

e denote $\hat{\pi}(x, e) = x$ e $\hat{f}(x, e) = e$. Para cada $x \in N$, sejam $\hat{E}_x = \hat{\pi}^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)}$ e $\hat{f} = \hat{f}|_{\hat{E}_x}$. Então \hat{E}_x tem uma estrutura de espaço vetorial que torna \hat{f}_x um isomorfismo. Seja $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in L}$ um atlas de trivializações locais para E , e seja $(g_{\lambda\mu})$ as funções de transições correspondentes. Definindo

$$\hat{\varphi}_{\lambda,x} = \varphi_{\lambda,f(x)} \circ \hat{f}_x, \quad x \in \hat{U}_\lambda = f^{-1}(U_\lambda),$$

obtemos, para cada $\lambda \in L$, uma bijeção $\hat{\varphi}_\lambda : \hat{\pi}^{-1}(\hat{U}_\lambda) \rightarrow \hat{U}_\lambda \times \mathbb{R}^k$, onde k é o posto de E . É imediato verificar que

$$\hat{\varphi}_{\lambda,x} \circ \hat{\varphi}_{\mu,x}^{-1} = g_{\lambda\mu}(f(x)), \quad x \in \hat{U} \cap \hat{U}_\mu.$$

Portanto, o princípio da colagem pode ser aplicado, tornando $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow N$ um fibrado vetorial. O espaço total \hat{E} é usualmente denotado por f^*E .

Se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M e $U \subset M$, é um aberto de M , uma seção local de E (ou de π) é uma aplicação diferenciável $\eta : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \eta = Id_U$, é a aplicação identidade de U , nesse caso, dizemos que η é uma seção em U para π . Quando $U = M$, dizemos apenas que η é uma seção em E . Doravante, salvo menção em contrário, denotamos por $\Gamma(E)$ ao conjunto das seções de E . Munido das operações usuais, $\Gamma(E)$ possui a estrutura de espaço vetorial real.

As seções de $E \oplus_W F$, no exemplo 1.1.2, são da forma $\eta = \xi \oplus \zeta$, onde $\xi \in \Gamma(E)$ e $\zeta \in \Gamma(F)$.

Uma seção $X : M \rightarrow TM$ do fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$ de uma variedade diferenciável é um campo de vetores em M . Denotaremos, no decorrer do texto, $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. Se $f : N \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável e $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial, então a seção $\xi \in \Gamma(f^*E)$ do fibrado induzido f^*E é também chamada de uma seção de E ao longo de f . Em particular, um campo de vetores ao longo de f é uma seção de f^*TM .

Dado $U \subset M$ aberto, um referencial (local) em U para π é um conjunto $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ de seções em U para π , tal que $\{\eta_1(p), \dots, \eta_k(p)\}$ é uma base de $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in U$. O referencial é global quando $U = M$.

Sempre existe um referencial local. Em outras palavras, vale o

Lema 1.1.4. *Se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M e $U \subset M$ é domínio de uma trivialização local para π , então existe em U um referencial para π .*

Demonstração. Sejam $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ uma trivialização local para π e $\{e_1, \dots, e_k\}$ o referencial canônico em \mathbb{R}^k ; defina $\iota_j : U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ por $\iota_j(p) = (p, e_j)$. Se $\eta_j : U \rightarrow E$

é dada por

$$\eta_j = \Phi^{-1} \circ \iota_j.$$

é imediato verificar que se trata de um referencial em U para π . □

1.2 Fibrados Riemannianos

O objetivo desta seção é apenas lembrar alguns fatos, a respeito de fibrados Riemannianos, os quais iremos usar frequentemente ao longo do texto.

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação $C^\infty(M)$ -bilinear, simétrica e positiva definida

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M).$$

O fato é que todo fibrado vetorial, $\pi : E \rightarrow M$, admite uma métrica Riemanniana. Uma métrica Riemanniana, em uma variedade diferenciável M , é uma métrica Riemanniana no fibrado tangente TM de M . Lembre-se que denotamos $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. Em particular, toda variedade diferenciável possui uma métrica Riemanniana.

Sejam $(M_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{M_1})$ e $(M_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{M_2})$ variedades Riemannianas. Podemos definir a métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M_1 \times M_2} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{M_1} \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{M_2}$ sobre a variedade produto $M_1 \times M_2$, chamada de *métrica produto*, da seguinte maneira:

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle_{M_1 \times M_2} = \langle v_1, w_1 \rangle_{M_1} + \langle v_2, w_2 \rangle_{M_2},$$

para quaisquer $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_p M_1 \oplus T_q M_2 \simeq T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$.

Definição 1.2.2. Uma *conexão linear* em um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, \xi) &\mapsto \nabla_X \xi \end{aligned}$$

satisfazendo, para $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(E)$, as seguintes condições:

- (a) $\nabla_{(fX)} \xi = f \nabla_X \xi$.
- (b) $\nabla_X (f\xi) = f \nabla_X \xi + X(f)\xi$.

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial com conexão linear ∇ . Diremos que uma seção $\xi \in \Gamma(E)$ é *paralela* quando $\nabla_X \xi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dizemos que um subfibrado vetorial F de E é *paralelo* quando, para cada seção ξ de F e cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, nós tivermos que $\nabla_X \xi$ é uma seção de F .

Fixada uma métrica \langle, \rangle em E , dizemos que a conexão linear ∇ é compatível com a métrica quando, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \Gamma(E)$, tivermos

$$X\langle\eta, \xi\rangle = \langle\nabla_X\eta, \xi\rangle + \langle\eta, \nabla_X\xi\rangle.$$

Em geral, fixada uma métrica em um fibrado vetorial, pode existir mais de uma conexão compatível com tal métrica. Porém, a conexão de Levi-Civita ∇ de uma variedade Riemanniana M é a única conexão compatível com a métrica de M e simétrica, ou seja,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

O próximo Lema, cuja prova será omitida, nos diz como é a conexão de Levi-Civita, quando temos um produto de variedades Riemannianas.

Lema 1.2.3. *Se M_1 e M_2 são variedades Riemannianas com conexões de Levi-Civita ∇ e $\bar{\nabla}$, respectivamente, então a conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ do produto Riemanniano $M_1 \times M_2$ é tal que*

$$\widetilde{\nabla}_{X_1 \oplus X_2}(Y_1 \oplus Y_2) = (\nabla_{X_1} Y_1) \oplus (\bar{\nabla}_{X_2} Y_2),$$

para todos $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

Um *fibrado vetorial Riemanniano* é um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ munido de uma métrica Riemanniana \langle, \rangle e de uma conexão compatível com a métrica.

Sejam $(E, \nabla^E, \langle, \rangle_E)$, e $(F, \nabla^F, \langle, \rangle_F)$, fibrados vetoriais Riemannianos dados. A soma de Whitney $E \oplus_W F$ é um fibrado Riemanniano com a métrica \langle, \rangle e conexão ∇ , tais que

$$\begin{aligned} \langle\eta_1 \oplus \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2\rangle &= \langle\eta_1, \eta_2\rangle_E + \langle\xi_1, \xi_2\rangle_F, \\ \nabla_X(\eta \oplus \xi) &= \nabla_X^E \eta \oplus \nabla_X^F \xi, \end{aligned}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Gamma(E), \xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(F)$.

É simples verificar que \langle, \rangle e ∇ definem, respectivamente, uma métrica e uma conexão em $E \oplus_W F$. Mostremos a compatibilidade entre ambas. As compatibilidades entre \langle, \rangle_E e $\nabla^E, \langle, \rangle_F$ e ∇^F nos dão

$$\begin{aligned} X\langle\eta_1 \oplus \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2\rangle &= X\langle\eta_1, \eta_2\rangle_E + X\langle\xi_1, \xi_2\rangle_F \\ &= \langle\nabla_X^E \eta_1, \eta_2\rangle_E + \langle\eta_1, \nabla_X^E \eta_2\rangle_E + \langle\nabla_X^F \xi_1, \xi_2\rangle_F + \langle\xi_1, \nabla_X^F \xi_2\rangle_F \\ &= \langle\nabla_X^E \eta_1 \oplus \nabla_X^F \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2\rangle + \langle\eta_1 \oplus \xi_1, \nabla_X^E \eta_2 \oplus \nabla_X^F \xi_2\rangle \\ &= \langle\nabla_X(\eta_1 \oplus \xi_1), \eta_2 \oplus \xi_2\rangle + \langle\eta_1 \oplus \xi_1, \nabla_X(\eta_2 \oplus \xi_2)\rangle \end{aligned}$$

o que mostra a compatibilidade de ∇ .

Definição 1.2.4. Quando ∇ é uma conexão no fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$, o operador curvatura, ou simplesmente a curvatura de E é a aplicação \mathbb{R} -trilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ dada por

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi$$

Quando $E = TM$, dizemos que R é o operador curvatura da variedade M .

Em um fibrado vetorial Riemanniano $\pi : E \rightarrow M$, com operador de curvatura R , valem as seguintes propriedades: para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(E)$,

$$(i) \quad \langle R(X, Y)\xi, \eta \rangle = -\langle R(Y, X)\xi, \eta \rangle,$$

$$(ii) \quad \langle R(X, Y)\xi, \eta \rangle = -\langle R(X, Y)\eta, \xi \rangle.$$

Quando $E = TM$, o operador R satisfaz várias outras propriedades (Ver [7], cap. 4).

1.3 Imersões Isométricas

Nesta seção apresentamos as equações básicas que aparecem naturalmente quando se estuda imersões isométricas entre variedades Riemannianas. Conhecidas como “as equações fundamentais” ou “equações de estrutura” de uma imersão isométrica. O conteúdo desta seção foi baseado em [5].

Sejam M^n e \overline{M}^m variedades diferenciáveis de dimensões n e m . Dizemos que a aplicação diferenciável $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é uma *imersão* quando a diferencial $f_*(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \overline{M}$ é injetiva para todo $x \in M^n$. O número $k = m - n$ é chamado a *codimensão* de f . Quando $k = 1$, diremos que f é uma *hipersuperfície*. Também é comum referir-se a f , ou a $f(M)$, como uma *subvariedade imersa*, ou simplesmente uma *subvariedade*, de \overline{M}^m .

Uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ entre variedades Riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$ é chamada uma *imersão isométrica* quando

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle f_*(x)X, f_*(x)Y \rangle_{\overline{M}} \tag{1.1}$$

para todo $x \in M^n$ e $X, Y \in T_x M$.

Se $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é uma imersão e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}}$ é uma métrica Riemanniana em \overline{M}^m , então (1.1) define uma métrica Riemanniana em M^n , chamada de métrica induzida por f . Munindo M^n com tal métrica tornamos f uma imersão isométrica.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$, denotamos por $f^*T\overline{M}$ o fibrado induzido sobre M^n cuja fibra em $x \in M^n$ é $T_{f(x)}\overline{M}$. O complemento ortogonal de $f_*T_x M$ em $T_{f(x)}\overline{M}$

é chamado *espaço normal* de f em x e denotaremos por $N_x^f M$. O *fibrado normal* $N^f M$ de f é o subfibrado de $f^*T\bar{M}$ cuja fibra em um ponto $x \in M^n$ é $N_x^f M$. Com isso obtemos a seguinte decomposição ortogonal

$$f^*T\bar{M} = f_*TM \oplus N^f M. \quad (1.2)$$

A conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de \bar{M}^m induz naturalmente uma única conexão $\hat{\nabla}$ em $f^*T\bar{M}$ tal que

$$\hat{\nabla}_X(Z \circ f) = \bar{\nabla}_{f_*X}Z$$

para todo $x \in M^n$, $X \in T_xM$ e $Z \in \mathfrak{X}(\bar{M})$. Identificaremos $\hat{\nabla}$ por $\bar{\nabla}$.

Sejam $\nabla, \bar{\nabla}$ as conexões de Livi-Civita de M^n e \bar{M}^m , respectivamente, e $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ uma imersão isométrica. Dados campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos a decomposição

$$\bar{\nabla}_X f_*Y = (\bar{\nabla}_X f_*Y)^T + (\bar{\nabla}_X f_*Y)^\perp \quad (1.3)$$

com respeito a decomposição em (1.2). É simples verificar que

$$\nabla_X Y = f_*^{-1}(\bar{\nabla}_X f_*Y)^T$$

é uma conexão simétrica e compatível com a métrica de M .

Definição 1.3.1. A aplicação $\alpha_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(N^f M)$ definida por

$$\alpha_f(X, Y) = (\bar{\nabla}_X f_*Y)^\perp$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f .

Quando não houver perigo de confusão, escreveremos α ao invés de α_f . Com isso, podemos escrever (1.3) como

$$\bar{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha_f(X, Y). \quad (1.4)$$

A fórmula acima, é conhecida como *fórmula de Gauss*. Verifica-se diretamente das propriedades das conexões $\bar{\nabla}$ e ∇ que α_f é bilinear e simétrica sobre o anel $C^\infty(M)$.

Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N^f M)$. Denote por $A_\xi X$ a componente tangente de $-f_*\bar{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$f_*A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^T.$$

Desde que para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$0 = X\langle \xi, f_*Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, f_*Y \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X f_*Y \rangle,$$

a fórmula de Gauss nos dá

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha_f(X, Y), \xi \rangle.$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(N_f M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X, \xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear no anel $C^\infty(M)$ e simétrica, isto é, $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A_ξ é conhecido na literatura por *operador de forma*, *endomorfismo de Weingarten* associado a α ou, por abuso de linguagem, a segunda forma fundamental na direção normal ξ .

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla_X^\perp \xi$, define uma conexão compatível no fibrado normal $N^f M$, uma vez que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \Gamma(N^f M)$, então

$$X\langle \eta, \xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \bar{\nabla}_X \xi \rangle = \langle \nabla_X^\perp \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla_X^\perp \xi \rangle.$$

Dizemos que ∇^\perp é a conexão normal de f , e obtemos a *fórmula de Weingarten*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } \xi \in \Gamma(N^f M). \quad (1.5)$$

Para uma hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, um campo de vetores diferenciável normal e unitário é localmente único a menos de sinal. Uma vez que foi fixado, nós simplesmente denotaremos A por A_ξ . Então a fórmula de Gauss se torna

$$\bar{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle \xi,$$

enquanto que a fórmula de Weingarten se reduz a

$$\bar{\nabla}_X \xi = -f_*AX.$$

Através das fórmulas de Gauss e Weingarten podemos obter relações interessantes quando temos composições de duas imersões isométricas, que são dadas na seguinte proposição.

Proposição 1.3.2. *Dadas as imersões isométricas $j : M^m \rightarrow N^n$ e $F : N^n \rightarrow Q^q$, seja $f = F \circ j$. Sejam ${}^f\nabla^\perp$ e ${}^j\nabla^\perp$ as conexões normais de f e j , respectivamente. Então valem as seguintes afirmações:*

- (i) $N_p^f M = F_*N_p^j M \oplus N_{j(p)}^{F^*} N$;
- (ii) $\alpha_f(X, Y) = F_*\alpha_j(X, Y) + \alpha_F(j_*X, j_*Y)$;

$$(iii) \quad {}^f\nabla_X^\perp F_*\xi = F_* {}^j\nabla_X^\perp \xi + \alpha_F(j_*X, \xi);$$

para $p \in M$, e para todo $X, Y \in T_pM, \xi \in \Gamma(N^jM)$.

Demonstração. (i) Por definição, temos

$$\begin{aligned} N_p^f M &= (f_*T_pM)^\perp = \{w \in T_{f(p)}Q; \langle w, f_*x \rangle = 0, x \in T_pM\} \subset T_{f(p)}Q, \\ N_p^j M &= (j_*T_pM)^\perp = \{u \in T_{j(p)}N; \langle u, j_*x \rangle = 0, x \in T_pM\} \subset T_{j(p)}N, \\ N_{j(p)}^F N &= (F_*T_{j(p)}N)^\perp = \{w \in T_{F(j(p))}Q; \langle w, F_*u \rangle = 0, u \in T_{j(p)}N\} \subset T_{f(p)}Q. \end{aligned}$$

Assim, dado $z \in F_*N_p^j M \oplus N_{j(p)}^F N \subset T_{f(p)}Q$, temos que $z = F_*u + w$, onde $u \in T_{j(p)}N$. Dado $x \in T_pM$, como

$$\begin{aligned} \langle F_*u + w, f_*x \rangle &= \langle F_*u, f_*x \rangle + \langle w, f_*x \rangle \\ &= \langle u, j_*x \rangle + \langle w, F_*(j_*x) \rangle \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

segue que $z \in N_p^f M$, donde $F_*N_p^j M \oplus N_{j(p)}^F N \subset N_p^f M$. Como

$$\dim(F_*N_p^j M \oplus N_{j(p)}^F N) = \dim(N_p^f M)$$

segue que, $N_p^f M = F_*N_p^j M \oplus N_{j(p)}^F N$ para todo $p \in M$.

(ii) Sejam $\nabla, \bar{\nabla}$ e $\widetilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M, N e Q , respectivamente. Assim, a fórmula de Gauss para j, F e f são dadas, respectivamente por

$$\bar{\nabla}_X j_*Y = j_*\nabla_X Y + \alpha_j(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.6)$$

$$\widetilde{\nabla}_U F_*V = F_*\bar{\nabla}_U V + \alpha_F(U, V), \quad U, V \in \mathfrak{X}(N), \quad (1.7)$$

$$\widetilde{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + \alpha_f(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_f(X, Y) &\stackrel{(1.8)}{=} \widetilde{\nabla}_X f_*Y - f_*\nabla_X Y \\ &= \widetilde{\nabla}_X F_*(j_*Y) - f_*\nabla_X Y \\ &\stackrel{(1.7)}{=} F_*\bar{\nabla}_{j_*X} j_*Y + \alpha_F(j_*X, j_*Y) - f_*\nabla_X Y \\ &\stackrel{(1.6)}{=} \cancel{F_*j_*\nabla_X Y} + F_*\alpha_j(X, Y) + \alpha_F(j_*X, j_*Y) - \cancel{f_*\nabla_X Y} \\ &= F_*\alpha_j(X, Y) + \alpha_F(j_*X, j_*Y). \end{aligned}$$

(iii) Temos que a fórmula de Weingarten para j, F e f são dadas respectivamente por

$$\bar{\nabla}_X \xi = -j_* A_\xi^j X + {}^j \nabla_X^\perp \xi, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \Gamma(N^j M), \quad (1.9)$$

$$\widetilde{\nabla}_U \zeta = -F_* A_\zeta^F U + {}^F \nabla_U^\perp \zeta, \quad U \in \mathfrak{X}(N), \zeta \in \Gamma(N^F N), \quad (1.10)$$

$$\widetilde{\nabla}_X \eta = -f_* A_\eta^f X + {}^f \nabla_X^\perp \eta, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \eta \in \Gamma(N^f M). \quad (1.11)$$

Assim, dado $\xi \in N^j M$, temos que $F_* \xi \in N^f N = F_* N^j M \oplus N^F N$, donde

$$\begin{aligned} {}^f \nabla_X^\perp F_* \xi &\stackrel{(1.11)}{=} \widetilde{\nabla}_X F_* \xi + f_* A_{F_* \xi}^f X \\ &\stackrel{(1.7)}{=} F_* \bar{\nabla}_X \xi + \alpha_F(X, \xi) + F_* j_* A_{F_* \xi}^f X \\ &= \alpha_F(X, \xi) + F_* (\bar{\nabla}_X \xi + j_* A_{F_* \xi}^f X) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \alpha_F(X, \xi) + F_* (-j_* A_\xi^j X + {}^j \nabla_X^\perp \xi + j_* A_{F_* \xi}^f X) \\ &= \alpha_F(X, \xi) + F_* {}^j \nabla_X^\perp \xi - f_* A_\xi^j X + f_* A_{F_* \xi}^f X \\ &\stackrel{\text{item (ii)}}{=} \alpha_F(X, \xi) + F_* {}^j \nabla_X^\perp \xi. \end{aligned}$$

□

As fórmulas de Gauss e Weingarten também permitem estabelecer as equações de estrutura de uma imersão isométrica, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Para esse fim, fixaremos mais algumas notações. Seja

$$\left(\nabla_X^\perp \alpha \right) (Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

Observe que $\nabla^\perp \alpha$ é $C^\infty(M)$ -multilinear e que podemos ver ∇^\perp como uma conexão no fibrado vetorial $\text{Hom}(TM \times TM, N^f M)$. Seja R^\perp o operador de curvatura do fibrado normal $N^f M$, ou seja,

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N^f M)$. A proposição a seguir, contém as equações de estrutura de uma imersão isométrica. Sua demonstração é simples, mas em caso de dúvidas, o leitor pode encontrar uma demonstração em [5], ou [7], por exemplo.

Proposição 1.3.3. *Sejam (M^n, ∇) e $(\bar{M}^m, \bar{\nabla})$, variedades Riemannianas e $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ uma imersão isométrica. Para todo campo de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e toda seção $\xi \in \Gamma(N^f M)$ valem as seguintes equações, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, respectivamente:*

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)Z &= (\bar{R}(X, Y)Z)^T + A_{\alpha(Y, Z)}X - A_{\alpha(X, Z)}Y, \\
 (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp &= \left(\nabla_X^\perp \alpha\right)(Y, Z) - \left(\nabla_Y^\perp \alpha\right)(X, Z), \\
 (\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp &= R^\perp(X, Y)\xi - \alpha(X, A_\xi Y) + \alpha(A_\xi X, Y).
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Se calcularmos a componente tangente de $\bar{R}(X, Y)\xi$ obtemos uma equivalência para equação de *Codazzi*, dada por

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^T = (\nabla_Y A)(X, \xi) - (\nabla_X A)(Y, \xi),$$

onde

$$(\nabla_Y A)(X, \xi) = \nabla_Y A_\xi - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X.$$

Quando a variedade ambiente tiver curvatura seccional constante, obtemos o

Corolário 1.3.4. *Sejam (M^n, ∇) e $(\bar{M}^m, \bar{\nabla})$, variedades Riemannianas e $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ uma imersão isométrica. Suponha que \bar{M}^m tem curvatura seccional constante igual a c . Então, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(N^f M)$ valem as seguintes equações, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, para o caso de curvatura seccional constante, respectivamente:*

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)Z &= c(X \wedge Y)Z + A_{\alpha(Y, Z)}X - A_{\alpha(X, Z)}Y, \\
 \left(\nabla_X^\perp \alpha\right)(Y, Z) &= \left(\nabla_Y^\perp \alpha\right)(X, Z), \\
 R^\perp(X, Y)\xi &= \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$.

1.4 Subvariedades totalmente Geodésicas

Nesta seção apresentaremos brevemente alguns resultados e definições sobre subvariedades totalmente geodésicas.

Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ é dita totalmente geodésica em $x \in M^n$ quando a segunda forma fundamental α de f se anula em x . Quando α é identicamente zero, dizemos que f é uma imersão *totalmente geodésica*. A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.4.1. *Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ é totalmente geodésica se e somente se, $f \circ \gamma$ é uma geodésica de \bar{M}^m para qualquer geodésica γ de M^n .*

A prova do resultado acima pode ser encontrada em [7]. Um fato útil e que iremos precisar é uma aplicação do próximo resultado, cuja prova será omitida, mas pode ser consultada em [9].

Proposição 1.4.2. *Seja $f : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ uma isometria. Então cada componente conexa M do conjunto dos pontos fixos de f*

$$\{y \in \overline{M}; f(y) = y\},$$

com a métrica Riemanniana induzida é uma subvariedade totalmente geodésica.

Exemplo 1.4.3. *Os exemplos abaixo são uma aplicação da proposição acima.*

(a) *Consideremos*

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Para $1 \leq k < n$,

$$\mathbb{S}^k = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{k+1} = \dots = x_{n+1} = 0\}$$

é uma subvariedade totalmente geodésica de \mathbb{S}^n . Para ver isto basta consideramos a isometria $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ definida por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_k, -x_{k+1}, \dots, -x_{n+1})$, e perceber que o conjunto dos pontos fixos de f é \mathbb{S}^k .

(b) *Consideremos $1 \leq k < n$ e seja $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 > 0\}$, onde $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{k-1} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n-k}$, munido com métrica Riemanniana $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{x_1^2} \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n}$. Então*

$$\mathbb{H}^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}); x_1 > 0\}$$

é uma subvariedade totalmente geodésica de \mathbb{H}^n . Basta consideramos a isometria $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_k, -x_{k+1}, \dots, -x_n)$, e perceber que o conjunto dos pontos fixos de f é \mathbb{H}^k .

Proposição 1.4.4. *Se $N_1 \subset M_1$, $N_2 \subset M_2$ subvariedades totalmente geodésicas das variedades Riemannianas M_1 e M_2 , então $N_1 \times N_2$ é uma subvariedade totalmente geodésica do produto $M_1 \times M_2$ com a métrica produto.*

Demonstração. Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de $N_1 \times N_2$ e $M_1 \times M_2$ respectivamente. Sabemos que, tomando a métrica produto no espaço produto que quaisquer que sejam $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(N_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(N_2)$, o Lema 1.2.3 nos garante que

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla_{Y_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 X_2 \text{ e } \overline{\nabla}_{Y_1+Y_2}(\overline{X}_1 + \overline{X}_2) = \overline{\nabla}_{Y_1}^1 \overline{X}_1 + \overline{\nabla}_{Y_2}^2 \overline{X}_2$$

onde $\nabla^1, \nabla^2, \overline{\nabla}^1$ e $\overline{\nabla}^2$ são as conexões Riemannianas de N_1, N_2, M_1 e M_2 naturalmente também respectivamente e a notação \overline{X} representa uma extensão do campo X ao corres-

pondente espaço claro no contexto. Sejam X, Y campos em $\mathfrak{X}(N_1 \times N_2)$, então X e Y são escritos de maneira única como $X = X_1 + X_2$ e $Y = Y_1 + Y_2$, onde $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(N_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(N_2)$. Temos,

$$\begin{aligned}
 \alpha(X, Y) &:= \nabla_Y X - \nabla_X Y \\
 &= \bar{\nabla}_{Y_1}^1 \bar{X}_1 + \bar{\nabla}_{Y_2}^2 \bar{X}_2 - (\nabla_{Y_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 X_2) \\
 &= \bar{\nabla}_{Y_1}^1 \bar{X}_1 - \nabla_{Y_1}^1 X_1 + \bar{\nabla}_{Y_2}^2 \bar{X}_2 - \nabla_{Y_2}^2 X_2 \\
 &=: \alpha_1(X_1, Y_1) + \alpha_2(X_2, Y_2) \\
 &= 0 + 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

pois como N_1 é uma subvariedade totalmente geodésica de M_1 e N_2 é uma subvariedade totalmente geodésica de M_2 , suas segundas formas fundamentais α_1 e α_2 são nulas. Esta conta nos mostra, portanto, que $N_1 \times N_2$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $M_1 \times M_2$ com a métrica produto. \square

Proposição 1.4.5. *Seja $\phi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma isometria. Então, existem isometrias $\phi_1 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ e $\phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\phi = \phi_1 \times \phi_2$.*

Demonstração. Seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ um ponto e $i_1^{p_2} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, dada por $i_1^{p_2}(x) = (x, p_2)$, a inclusão totalmente geodésica. Consideremos $T_p \mathbb{S}^n := i_1^{p_2} T_{p_1} \mathbb{S}^n \subset T_p \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Afirmacão 1: $\pi_2(\phi_* T_p \mathbb{S}^n) = \{0\}$, onde $\pi_2 : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção.

Sejam $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $v \in T_p \mathbb{S}^n$ um vetor tangente ao primeiro fator e $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma geodésica fechada tal que $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma'(0) = v$. Como γ é uma geodésica, então $\phi \circ (\gamma, p_2)$ também é uma geodésica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, em que $(\gamma, p_2)(t) := (\gamma(t), p_2)$. Logo $\pi_2 \circ \phi \circ (\gamma, p_2)$ é constante ou é uma geodésica.

Como γ é uma geodésica fechada, então $\pi_2(\phi(\gamma(-\varepsilon), p_2)) = \pi_2(\phi(\gamma(\varepsilon), p_2))$, portanto $\pi_2 \circ \phi \circ (\gamma, p_2)$ é constante, pois não existem geodésicas fechadas em \mathbb{R} . Dessa forma, $\pi_2 \phi_* v = 0$. \checkmark

Como $\pi_2(\phi_* T_p \mathbb{S}_k^n) = \{0\}$, então $\phi_* T_p \mathbb{S}^n = T_{\phi(p)} \mathbb{S}^n$, logo $\phi_* T \mathbb{R} = T \mathbb{R}$. Sejam então $(x, y) = \phi(p)$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de $T_x \mathbb{S}^n$. Tomemos também $\phi_1 \in O(n)$ tal que $\phi(p_1) = x$ e $\phi_1(v_i) = \phi_* v_i$ e $\phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi_2(t) := \begin{cases} t - p_2 + y, & \text{se } \phi_* e_{n+2} = e_{n+2}; \\ -t + p_2 + y, & \text{se } \phi_* e_{n+2} = -e_{n+2}; \end{cases}$$

em que $e_{n+2} = (0, \dots, 1) \in \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R}$. Dessa forma, $\phi_1 \times \phi_2 : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é uma isometria tal que $\phi(p) = (\phi_1 \times \phi_2)(p)$, $\phi_* v_i = (\phi_1 \times \phi_2)_* v_i$ e $\phi_* e_{n+2} = (\phi_1 \times \phi_2)_* e_{n+2}$.

Seja agora $q \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ um ponto qualquer. Como $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é completa, então $q = \exp_p v$, para algum $v \in T_p \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \phi(q) &= \phi(\exp_p v) = \exp_{\phi(p)} \phi_s(p)v = \exp_{(\phi_1 \times \phi_2)(p)} (\phi_1 \times \phi_2)_s(p)v = \\ &= (\phi_1 \times \phi_2)(\exp_p v) = (\phi_1 \times \phi_2)(q). \end{aligned}$$

Portanto $\phi = \phi_1 \times \phi_2$. □

1.5 Subvariedades totalmente Umbílicas

Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é chamada de *umbílica* em $x \in M^n$ quando existe $\omega \in N_x^f M$ tal que

$$\alpha_f(X, Y) = \langle X, Y \rangle \omega$$

para todo $X, Y \in T_x M$. A subvariedade é chamada de *umbílica* quando for umbílica em cada ponto. Neste caso, ω é o vetor curvatura média $H(x)$ de f em x . De fato, seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$. Assim, temos

$$\omega = \langle X_i, X_i \rangle \omega = \alpha_f(X_i, X_i),$$

Somando em i , obtemos

$$\omega n = \sum_{i=1}^n \alpha_f(X_i, X_i),$$

implicando que

$$\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_f(X_i, X_i) = H(x).$$

Equivalentemente, f é umbílica em x quando

$$A_\xi = \langle H(x), \xi \rangle I,$$

para cada $\xi \in N_x^f M$, onde $I : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é a aplicação identidade.

Definição 1.5.1. Dizemos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ tem *vetor curvatura média paralelo* quando

$$\nabla_X^\perp H = 0,$$

$X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se M^n é conexa e a imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ tem vetor curvatura média

paralelo, então $\|H\|$ é constante ao longo de M^n . De fato, segue que para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X(\|H\|^2) = X\langle H, H \rangle = 2\langle \nabla_X^\perp H, H \rangle = 0.$$

Quando f é umbílica e tem vetor curvatura média paralelo, dizemos que f é uma *esfera extrínseca*.

Dizemos que uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ tem *fibrado normal flat* quando $R^\perp \equiv 0$.

Grosso modo, as subvariedades umbílicas de \mathbb{R}^m são os subespaços afins e as esferas euclidianas e a próxima proposição nos dá uma descrição completa das subvariedades umbílicas (em particular, totalmente geodésicas) das formas espaciais, cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Proposição 1.5.2. *Seja $\bar{x} \in \mathbb{Q}_\epsilon^m$ e seja V um subespaço vetorial próprio de $T_{\bar{x}}\mathbb{Q}_\epsilon^m$ tal que $n = \dim V \geq 1$. Se $z \in T_{\bar{x}}\mathbb{Q}_\epsilon^m$ é ortogonal a V , então existe exatamente uma esfera extrínseca completa n -dimensional S em \mathbb{Q}_ϵ^m e $T_{\bar{x}}S = V$ cujo vetor curvatura média em \bar{x} é z . A subvariedade S é isométrica a \mathbb{Q}_ϵ^n , onde $\epsilon = \tilde{\epsilon} + \|z\|^2$, e é totalmente geodésica se e somente se $z = 0$. Se denotarmos*

$$a = \tilde{\epsilon}\bar{x} - z \quad e \quad W = \mathbb{R}a \oplus V,$$

então S é dado explicitamente como segue:

(i) Se $\mathbb{Q}_\epsilon^m = \mathbb{R}^m$, então S é qualquer espaço afim

$$\bar{x} + W, \quad \text{se } \epsilon = 0,$$

ou a esfera

$$\bar{x} - \frac{1}{\epsilon}a + \{x \in W; \|x\|^2 = \frac{1}{\epsilon}\}, \quad \text{se } \epsilon > 0.$$

(ii) Se $\mathbb{Q}_\epsilon^m = \mathbb{S}_\epsilon^m$, então S é a esfera

$$S = \mathbb{S}_\epsilon^m \cap (\bar{x} + W) = \bar{x} - \frac{1}{\epsilon}a + \{x \in W; \|x\|^2 = \frac{1}{\epsilon}\}.$$

(iii) Se $\mathbb{Q}_\epsilon^m = \mathbb{H}_\epsilon^m$, então $S = \mathbb{H}_\epsilon^m \cap (\bar{x} + W)$. Se $\epsilon > 0$, então S é a esfera

$$S = \bar{x} - \frac{1}{\epsilon}a + \{x \in W; \|x\|^2 = \frac{1}{\epsilon}\}.$$

Se $\epsilon < 0$, então S é o espaço hiperbólico

$$S = \bar{x} - \frac{1}{\epsilon}a + \{x \in W; \|x\|^2 = \frac{1}{\epsilon}, \langle a, x \rangle > 0\},$$

Se $\epsilon = 0$, então

$$S = \bar{x} + \left\{ -\frac{1}{2} \|x\|^2 a + x; x \in V \right\}.$$

Reciprocamente, se $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^m$, $n \geq 2$, é uma imersão isométrica totalmente umbílica, então $f(M)$ é um subconjunto aberto de uma esfera extrínseca.

1.6 Folheações e Distribuições Tangentes

Nesta seção, enunciamos uma versão do teorema de Frobenius que diz: se M é uma variedade diferenciável e Δ é uma distribuição involutiva em M , então existe uma folheação \mathcal{F} de M tal que $T\mathcal{F} = \Delta$. O conteúdo desta seção foi baseado em [3], [5] e [10].

A idéia intuitiva de folheação corresponde a decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas e disjuntas, chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro. Passemos a formalizar essa idéia.

Seja U um subconjunto de \mathbb{R}^k . Uma fatia de U (de dimensão k) é qualquer subconjunto da forma $S = \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in U; x_{k+1} = c_{k+1}, \dots, x_n = c_n, \text{ onde } c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R} \text{ são constantes}\}$. Assim, dada uma variedade diferenciável n -dimensional M e uma carta diferenciável (U, φ) em M , dizemos que um subconjunto S de U é uma fatia k -dimensional de U se $\varphi(S)$ é uma fatia k -dimensional de $\varphi(U)$.

Definição 1.6.1. Uma folheação (de dimensão k) de uma variedade n -dimensional M é uma coleção de subvariedades (de dimensão k), disjuntas, conexas e imersas de M (chamadas de folhas da folheação) cuja união é M e tais que, em uma vizinhança de cada ponto $p \in M$, existe uma carta (U, φ) com a propriedade que $\varphi(U)$ é o produto de dois abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e cada folha da folheação intercepta U ou em um conjunto vazio ou em uma coleção enumerável de fatias de dimensão k da forma $x_{k+1} = c_{k+1}, \dots, x_n = c_n$ (tal carta é chamada de carta plana da folheação).

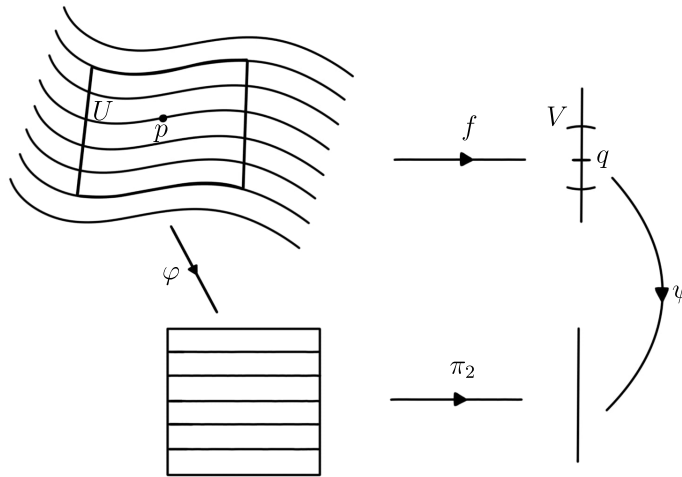
A folheação é de classe C^r , se as subvariedades são todas de classe C^r . O número $n - k$ é dito a codimensão da folheação.

Uma folheação de dimensão k de uma variedade diferenciável M^n é, a grosso modo, uma decomposição de M^n em subvariedades de dimensão k , disjuntas, conexas chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ com segunda coordenada constante.

Exemplo 1.6.2. Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão, onde M, N são variedades diferenciáveis de dimensão m, n respectivamente. Pelo teorema da forma local das submersões, dado $p \in M$ e $q = f(p) \in N$ existem cartas locais (U, φ) em M , (V, ψ) em N tais que $p \in U, q \in V, \varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$, e, além disso,

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ coincide com a segunda projeção $(x, y) \mapsto y$ (para detalhes ver as referências acima citadas). As cartas locais (U, φ) definem uma estrutura de variedade folheada de classe C^r onde as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c), c \in N$.

Figura 1.1: Folheado definido por submersão.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Seja M uma variedade diferenciável. Escolha para cada $p \in M$ um subespaço linear k -dimensional $\Delta_p \subset T_p M$. Diremos que $\Delta = \coprod_{p \in M} \Delta_p \subset TM$ é uma *distribuição tangente* (ou simplesmente, uma distribuição) em M , quando a seguinte condição é satisfeita: Cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U na qual existem campos de vetores diferenciáveis $Y_1, \dots, Y_k : U \rightarrow TM$ tal que $Y_1|_p, \dots, Y_k|_p$ formam uma base para Δ_p em cada $p \in U$. Um dos exemplos mais simples de distribuição é a dada na seguinte

Proposição 1.6.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, não se anula em M , então $\Delta = \{v \in TM; \langle v, X \rangle = 0\}$ é uma distribuição em M .*

Seja Δ uma distribuição em M . Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é dita uma *variedade integral* de Δ quando $T_p N = \Delta_p$ para cada ponto $p \in N$. Δ é dita *integrável* quando cada ponto de M está contido em uma variedade integral de Δ . Δ é dita *involutiva* quando dados campos diferenciáveis X e Y em um aberto U de M tais que $X_p, Y_p \in \Delta_p$ para todo $p \in U$, então o colchete de Lie $[X, Y]$ é tal que $[X, Y]_p \in \Delta_p$, para todo $p \in U$.

Proposição 1.6.4. *Toda distribuição integrável é involutiva.*

Demonstração. Seja $\Delta \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha que X e Y são seções locais de Δ definidas em algum aberto U de M . Sejam $p \in U$ qualquer e N uma variedade integral de Δ contendo p . Como X e Y são seções de Δ , segue-se que X e Y

são tangentes à N e, conseqüentemente, $[X, Y]$ também o é. Já que $p \in U$ é qualquer, Δ é involutiva. \square

Uma distribuição Δ em M é dita ser *completamente integrável* quando existe uma folheação \mathcal{F} sobre M tal que $T\mathcal{F} = \Delta$, onde $T\mathcal{F} = \coprod_{S \in \mathcal{F}} T\mathcal{S}$. Estamos preparados para enunciar o resultado principal desta seção.

Proposição 1.6.5 (Teorema de Frobenius). *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

Finalizamos essa seção com a seguinte definição

Definição 1.6.6. Uma distribuição Δ em uma variedade Riemanniana M^n é *totalmente geodésica* quando $\nabla_T S \in \Gamma(\Delta)$ sempre que $T, S \in \Gamma(\Delta)$.

1.7 Imersões isométricas em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$

Nesta seção serão apresentados os resultados essenciais que servirão de suporte para a compreensão dos próximos capítulos, dentre tais resultados, destacamos a obtenção das equações de compatibilidade para $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, que serão apresentadas na seção [1.7.2](#).

1.7.1 Notações e Definições

A seguir vamos estabelecer algumas notações e definições que serão utilizadas ao longo do texto. Denotaremos por

$$\mathbb{Q}_\epsilon^n := \begin{cases} \mathbb{H}^n, & \text{se } \epsilon = -1, \\ \mathbb{R}^n, & \text{se } \epsilon = 0, \\ \mathbb{S}^n, & \text{se } \epsilon = 1. \end{cases},$$

onde ϵ é a curvatura seccional de \mathbb{Q}_ϵ^n .

O espaço \mathbb{E}^{n+2} é o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+2} munido com a métrica $ds^2 = \epsilon dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2$, onde $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Quando $\epsilon = -1$, denotaremos \mathbb{E}^{n+2} por \mathbb{L}^{n+2} , e será chamado *espaço de Lorentz* ou *espaço Lorentziano*. Para os espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ adotaremos os seguintes modelos

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} &= \{(x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}, \\ \mathbb{H}^n \times \mathbb{R} &= \{(x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+2} : -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\}. \end{aligned}$$

As conexões de Levi-Civita das variedades $M^m, \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ (para $\epsilon \in \{-1, 1\}$) e \mathbb{E}^{n+2} serão denotadas por $\nabla, \bar{\nabla}, \tilde{\nabla}$, respectivamente, onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada de \mathbb{E}^{n+2} . No decorrer desta seção $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ e $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ (para $\epsilon \in \{-1, 1\}$) serão imersões isométricas, onde i denota a inclusão canônica. A partir destas imersões definimos a imersão isométrica $\tilde{f} = i \circ f$.

$$\begin{array}{ccccc} M^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{E}^{n+2} \\ & & \searrow \tilde{f} & \nearrow & \end{array}$$

Sejam $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ um campo de vetores tangente e unitário ao segundo fator de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Para $\epsilon = 0$ escolhemos apenas um campo de vetores unitário constante $\frac{\partial}{\partial t}$ em \mathbb{R}^{n+1} . O campo $\frac{\partial}{\partial t}$ se decompõe como

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_*T + \eta \quad (1.14)$$

onde $T \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \Gamma(N^fM)$.

O campo $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ é paralelo em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. De fato, dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R})$ podemos escrever $X = X_Q + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$, onde $X_Q \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}_\epsilon^n)$. Daí

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = \bar{\nabla}_{X_Q} \partial_t + \langle X, \partial_t \rangle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t.$$

Denotando por ∇^1 e ∇^2 as conexões de \mathbb{Q}_ϵ^n e \mathbb{R} respectivamente, temos pelo Lema 1.2.3 que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \partial_t &= (\bar{\nabla}_{X_Q+0}(0 + \partial_t)) + \langle X, \partial_t \rangle (\bar{\nabla}_{0+\partial_t}(0 + \partial_t)) \\ &= (\nabla_{X_Q}^1 0 + \nabla_0^2 \partial_t) + \langle X, \partial_t \rangle (\nabla_0^1 0 + \nabla_{\partial_t}^2 \partial_t) \\ &= \langle X, \partial_t \rangle \nabla_{\partial_t}^2 \partial_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Derivando (1.14) e usando que ∂_t é um campo de vetores paralelos em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, obtemos das equações de Gauss e Weingarten que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X \partial_t = \bar{\nabla}_X f_*T + \bar{\nabla}_X \eta \\ &= f_*\nabla_X T + \alpha_f(X, T) - f_*A_\eta^f X + \bar{\nabla}_X^\perp \eta \\ &= f_*(\nabla_X T - A_\eta^f X) + \alpha_f(X, T) + \nabla_X^\perp \eta. \end{aligned}$$

Daí, tomando a componente tangente e normal, obtemos

$$\nabla_X T = A_\eta^f X, \quad (1.15)$$

e

$$\alpha_f(X, T) = -\nabla_X^\perp \eta, \quad (1.16)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Note que o campo de vetores T é um campo vetorial gradiente. Se $\epsilon \in \{-1, 1\}$, então T é o gradiente da função altura $h = \langle \tilde{f}, i_* \partial_t \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla h, X \rangle = X(h) &= X \langle \tilde{f}, i_* \partial_t \rangle \\ &= \langle \tilde{f}_* X, i_* \partial_t \rangle \\ &= \langle i_* f_* X, i_* \partial_t \rangle \\ &= \langle f_* X, f_* T + \eta \rangle \\ &= \langle X, T \rangle. \end{aligned}$$

para todo $X \in TM$. Se $\epsilon = 0$, então T é o gradiente de $h = \langle f, \partial_t \rangle$.

Vamos agora relacionar a segunda forma fundamental, o espaço normal e as conexões normais de f e \tilde{f} . Primeiro note que $\hat{\nu} = \pi \circ i$ é um campo de vetores normal unitário para a inclusão $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, onde $\pi : \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ é a projeção.

Pelo item (i) da Proposição 1.3.2 o espaço normal de f e \tilde{f} são relacionados por

$$N^{\tilde{f}} M = i_* N^f M \oplus \text{span}\{\nu\},$$

onde $\nu = \hat{\nu} \circ f = \pi \circ \tilde{f}$.

Agora, para cada $Z \in T(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R})$, temos $i_* Z = X + Y \in T(\mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R})$, onde $X \in T\mathbb{E}^{n+1}$ e $Y = \lambda i_* \partial_t \in T\mathbb{R}$. Desde que $\pi_* : T\mathbb{E}^{n+1} \oplus T\mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{E}^{n+1}$ dada por $\pi_*(X + Y) = X$ temos $i_* Z = \pi_* i_* Z + \lambda i_* \partial_t$, ou seja, $\pi_* i_* Z = i_* Z - \lambda i_* \partial_t$. Segue-se então que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Y, X \rangle \\ &= \lambda \langle i_* \partial_t, X \rangle \\ &= \lambda \langle i_* \partial_t, i_* Z - Y \rangle \\ &= \lambda \langle i_* \partial_t, i_* Z \rangle - \lambda^2 \langle i_* \partial_t, i_* \partial_t \rangle \\ &= \lambda \langle i_* \partial_t, i_* Z \rangle - \lambda^2. \end{aligned}$$

pois, se $|\partial_t| = 1$ temos $|i_* \partial_t| = 1$. Então temos $\lambda(\langle i_* \partial_t, i_* Z \rangle - \lambda) = 0$. Então para $\lambda \neq 0$

1. Preliminares

temos $\lambda = \langle i_*\partial_t, i_*Z \rangle$. Assim,

$$\pi_*i_*Z = i_*Z - \langle i_*\partial_t, i_*Z \rangle i_*\partial_t = i_*(Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t).$$

Assim, temos

$$\widetilde{\nabla}_Z \widehat{\nu} = \widetilde{\nabla}_Z(\pi \circ i) = (\pi \circ i)_*Z = \pi_*i_*Z = i_*(Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t).$$

Consequentemente, pela fórmula de Weingarten temos

$$A_{\widehat{\nu}}^i Z = -Z + \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t. \quad (1.17)$$

Dado $\xi \in N^f M$, obtemos do item (iii) da proposição 1.3.2 que

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X i_*\xi &= i_*\overline{\nabla}_X \xi + \alpha_i(f_*X, \xi) \\ &= i_*(-f_*A_\xi^f X + \nabla_X^\perp \xi) + \alpha_i(f_*X, \xi) \\ &= -\widetilde{f}_*A_\xi^f X + i_*\nabla_X^\perp \xi + \alpha_i(f_*X, \xi). \end{aligned}$$

Afirmação: $\alpha_i(f_*X, \xi) = \epsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu$.

Notemos que a imersão i é uma hipersuperfície. Assim,

$$\alpha_i(f_*X, \xi) = a\nu \Rightarrow \langle \alpha_i(f_*X, \xi), \nu \rangle = a \langle \nu, \nu \rangle = \begin{cases} a, & \text{se } \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2} \\ -a, & \text{se } \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{L}^{n+2} \end{cases}.$$

Então, segue que para $\epsilon \in \{-1, 1\}$ temos

$$\begin{aligned} \alpha_i(f_*X, \xi) &= \epsilon \langle \alpha_i(f_*X, \xi), \nu \rangle \nu \\ &= \epsilon \langle A_\nu^i f_*X, \xi \rangle \nu \\ &\stackrel{(1.17)}{=} \epsilon \langle -f_*X + \langle f_*X, f_*T + \eta \rangle (f_*T + \eta), \xi \rangle \nu \\ &= \epsilon \langle -f_*X + \langle f_*X, f_*T \rangle f_*T + \langle f_*X, f_*T \rangle \eta + \langle f_*X, \eta \rangle f_*T + \langle f_*X, \eta \rangle \eta, \xi \rangle \nu \\ &= \epsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widetilde{\nabla}_X i_*\xi = -\widetilde{f}_*A_\xi^f X + i_*\nabla_X^\perp \xi + \epsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu.$$

consequentemente,

$$A_{i_*\xi}^{\widetilde{f}} = A_\xi^f.$$

e

$$\widetilde{\nabla}_X^\perp i_* \xi = i_* \nabla_X^\perp \xi + \epsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu,$$

para cada $\xi \in N^f M$, onde $\widetilde{\nabla}^\perp$ é a conexão normal de \widetilde{f} . Por outro lado

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X \nu &= \widetilde{\nabla}_X \widehat{\nu} \circ f = \widetilde{\nabla}_{f_* X} \widehat{\nu} &= i_*(f_* X - \langle f_* X, f_* T + \eta \rangle (f_* T + \eta)) \\ &= i_*(f_* X - [\langle f_* X, f_* T \rangle + \langle f_* X, \eta \rangle] (f_* T + \eta)) \\ &= i_*(f_* X - \langle f_* X, f_* T \rangle f_* T - \langle f_* X, f_* T \rangle \eta) \\ &= \widetilde{f}_*(X - \langle X, T \rangle T) - \langle f_* X, f_* T \rangle i_* \eta \\ &= \widetilde{f}_*(X - \langle X, T \rangle T) - \langle X, T \rangle i_* \eta. \end{aligned}$$

pois $\langle f_* X, f_* T \rangle = \langle X, T \rangle$, uma vez que f é uma imersão isométrica. Consequentemente,

$$A_\nu^{\widetilde{f}} X = -X + \langle X, T \rangle T,$$

ou equivalentemente,

$$A_\nu^{\widetilde{f}} T = -\|\eta\|^2 T \quad \text{e} \quad A_\nu^{\widetilde{f}} X = -X \quad \text{para } X \in \{T\}^\perp$$

De fato, como $\|f_* T\|^2 = \langle f_* T, f_* T \rangle = \langle T, T \rangle = \|T\|^2$, e $1 = \|\partial_t\|^2 = \|f_* T\|^2 + \|\eta\|^2$ temos que $-\|\eta\|^2 = -1 + \|T\|^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} A_\nu^{\widetilde{f}} T &= -T + \langle T, T \rangle T \\ &= (-1 + \langle T, T \rangle) T \\ &= (-1 + \|T\|^2) T \\ &= -\|\eta\|^2 T. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\widetilde{\nabla}_X^\perp \nu = -\langle X, T \rangle i_* \eta.$$

Afim de facilitar eventuais consultas ao longo do trabalho, resumimos os cálculos anteriores na seguinte proposição.

Proposição 1.7.1. *Sejam (M^m, ∇) , $(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}, \overline{\nabla})$, $(\mathbb{E}^{n+2}, \widetilde{\nabla})$ variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$, $\widetilde{f} = i \circ f$ imersões isométricas. Sejam T e η dados como em (1.14), $\xi \in N^f M$, $\widehat{\nu} = \pi \circ i$ um campo de vetores normais unitário para i , onde $\pi : \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ e $\nu = \widehat{\nu} \circ f = \pi \circ \widetilde{f}$.*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{E}^{n+1} & & \\
 & \nearrow \nu & \uparrow \hat{\nu} & \nwarrow \pi & \\
 M^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{E}^{n+2} \\
 & \searrow \tilde{f} & & &
 \end{array}$$

Então valem as seguintes relações

$$N^{\tilde{f}}M = i_*N^fM \oplus \text{span}\{\nu\}, \quad (1.18)$$

$$A_{i_*\xi}^{\tilde{f}} = A_\xi^f, \quad (1.19)$$

$$\tilde{\nabla}_X^\perp i_*\xi = i_*\nabla_X^\perp \xi + \epsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu, \text{ para } X \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.20)$$

$$A_\nu^{\tilde{f}}T = -\|\eta\|^2 T, \quad (1.21)$$

$$A_\nu^{\tilde{f}}X = -X, \text{ para } X \in \{T\}^\perp, \quad (1.22)$$

$$\tilde{\nabla}_X^\perp \nu = -\langle X, T \rangle i_*\eta. \quad (1.23)$$

1.7.2 Equações de estrutura

Seja $\Delta = \{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}); \langle X, \partial_t \rangle = 0\}$. Como antes, dado X tangente a $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, podemos escrever $X = X_Q + X_R$, onde $X_R = \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$. Temos que $X_Q \in \Delta$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle X_Q, \partial_t \rangle &= \langle X - X_R, \partial_t \rangle \\
 &= \langle X, \partial_t \rangle - \langle X_R, \partial_t \rangle \\
 &= \langle X, \partial_t \rangle - \langle X, \partial_t \rangle |\partial_t|^2 \\
 &= \langle X, \partial_t \rangle - \langle X, \partial_t \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Assim, $T(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}) = \Delta \oplus \{\partial_t\}$ e $\langle X_Q, X_R \rangle = 0$.

Iremos agora determinar as equações de *Gauss*, *Codazzi* e *Ricci* para a imersão f . Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, e denotemos por \bar{R} a curvatura de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Usando o fato de que ∂_t é paralelo em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)\partial_t &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \partial_t - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \partial_t - \bar{\nabla}_{[X, Y]} \partial_t \\
 &= 0 - 0 - 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Além disso, escrevendo $Z = Z_Q + Z_R = Z_Q + \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t$, temos que

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{R}(X, Y)Z_Q + \bar{R}(X, Y)Z_R \\
 &= \bar{R}(X, Y)Z_Q + \bar{R}(X, Y)\langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &= \bar{R}(X, Y)Z_Q + \langle Z, \partial_t \rangle \bar{R}(X, Y)\partial_t \\
 &= \bar{R}(X, Y)Z_Q + \langle Z, \partial_t \rangle \cdot 0 \\
 &= \bar{R}(X, Y)Z_Q.
 \end{aligned}$$

Então escrevendo $X = X_Q + Z_R, Y = Y_Q + Y_R$ temos

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{R}(X, Y)Z_Q = \bar{R}(X_Q + Z_R, Y_Q + Y_R)Z_Q \\
 &= \bar{R}(X_Q, Y_Q)Z_Q + \bar{R}(X_Q, Y_R)Z_Q + \bar{R}(X_R, Y_Q)Z_Q + \bar{R}(X_R, Y_R)Z_Q
 \end{aligned}$$

Como a curvatura seccional de \mathbb{Q}_ϵ^n é constante e igual a ϵ temos que

$$\bar{R}(X_Q, Y_Q)Z_Q = \epsilon(\langle Y_Q, Z_Q \rangle X_Q - \langle X_Q, Z_Q \rangle Y_Q)$$

Para as outras parcelas, usando as propriedades do tensor curvatura, temos que

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X_Q, Y_R)Z_Q, W \rangle &= \langle \bar{R}(Z_Q, W)X_Q, Y_R \rangle \\
 &= -\langle \bar{R}(Z_Q, W)Y_R, X_Q \rangle \\
 &= -\langle 0, X_Q \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

como W é arbitrário, temos $\bar{R}(X_Q, Y_R)Z_Q = 0$. Também temos $\bar{R}(X_R, Y_Q)Z_Q = 0$, pois segue de forma análoga ao que fizemos acima. Finalmente, para $\bar{R}(X_R, Y_R)Z_Q$ temos

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X_R, Y_R)Z_Q &= \bar{R}(\langle X, \partial_t \rangle \partial_t, \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t)Z_Q \\
 &= \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z_Q \\
 &= \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z_Q, Y \rangle &= -\langle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z_Q, Y \rangle \\
 &\Rightarrow \langle \bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z_Q, Y \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z_Q = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{R}(X, Y)Z = \epsilon(\langle Y_Q, Z_Q \rangle X_Q - \langle X_Q, Z_Q \rangle Y_Q)$.

Agora, escrevendo

$$X_Q = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$$

$$Y_Q = Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t$$

$$Z_Q = Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t$$

iremos substituir na expressão de $\bar{R}(X, Y)Z$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle Y_Q, Z_Q \rangle X_Q &= \left\langle Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t, Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \right\rangle \left(X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \right) \\ &= \left(\langle Y, Z \rangle - \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle + \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \right) \left(X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \right) \\ &= X \langle Y, Z \rangle - X \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \cancel{X \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle} + \cancel{X \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle} \\ &\quad - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\ &\quad - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\ &= X \langle Y, Z \rangle - X \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\ &\quad + \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X_Q, Z_Q \rangle Y_Q &= \left\langle X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, Z - \langle Z, \partial_t \rangle \partial_t \right\rangle \left(Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t \right) \\ &= \left(\langle X, Z \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle + \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \right) \left(Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t \right) \\ &= Y \langle X, Z \rangle - Y \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \cancel{Y \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle} + \cancel{Y \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle} \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t + \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t + \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t \\ &\quad - \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t. \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} -\langle X_Q, Z_Q \rangle Y_Q &= -Y \langle X, Z \rangle + Y \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t - \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t \\ &\quad - \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t + \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\begin{aligned}
 \langle Y_Q, Z_Q \rangle X_Q - \langle X_Q, Z_Q \rangle Y_Q &= X \langle Y, Z \rangle - X \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &\quad + \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t + \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &\quad - \langle Y, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &\quad - Y \langle X, Z \rangle + Y \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &\quad - \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t - \langle Z, \partial_t \rangle \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &\quad + \langle X, \partial_t \rangle \langle Z, \partial_t \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)Z &= \epsilon(X \langle Y, Z \rangle - X \langle Y, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \\
 &\quad - Y \langle X, Z \rangle + Y \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t). \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

Sendo $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica, temos que a equação de Gauss para f é dada por

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^T + A_{\alpha(Y, Z)}^f X - A_{\alpha(X, Z)}^f Y.$$

Vamos determinar $(\bar{R}(X, Y)Z)^T$. Substituindo (1.14) em $\bar{R}(X, Y)Z$ temos

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)Z &= \epsilon \left(X \langle Y, Z \rangle - X \langle Y, T + \eta \rangle \langle T + \eta, Z \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T + \eta \rangle (T + \eta) \right. \\
 &\quad \left. - Y \langle X, Z \rangle + Y \langle X, T + \eta \rangle \langle T + \eta, Z \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, T + \eta \rangle (T + \eta) \right) \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned}
 -X \langle Y, T + \eta \rangle \langle T + \eta, Z \rangle &= -X(\langle Y, T \rangle + \langle Y, \eta \rangle)(\langle Z, T \rangle + \langle Z, \eta \rangle) \\
 &= -X \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\langle Y, Z \rangle \langle X, T + \eta \rangle (T + \eta) &= -\langle Y, Z \rangle (\langle X, T \rangle + \langle X, \eta \rangle) (T + \eta) \\
 &= -\langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle T - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \eta.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y \langle X, T + \eta \rangle \langle T + \eta, Z \rangle &= Y(\langle X, T \rangle + \langle X, \eta \rangle)(\langle T, Z \rangle + \langle \eta, Z \rangle) \\
 &= Y \langle X, T \rangle \langle T, Z \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle X, Z \rangle \langle Y, T + \eta \rangle (T + \eta) &= \langle X, Z \rangle (\langle Y, T \rangle + \langle Y, \eta \rangle) (T + \eta) \\ &= \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle T + \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \eta.\end{aligned}$$

Tomando a componente tangente em \bar{R} temos que

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X, Y)Z)^T &= \epsilon \left(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y - X \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle T \right. \\ &\quad \left. + Y \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle T \right)\end{aligned}$$

Denotando $(X \wedge Y)T := \langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y$, podemos escrever

$$\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y = (X \wedge Y)Z.$$

$$\begin{aligned}-X \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle + \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle T &= -(X \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle T) \\ &= -(\langle T, Z \rangle \langle Y, T \rangle X - \langle Y, T \rangle \langle X, Z \rangle T) \\ &= -(\langle Y, T \rangle X \wedge T)Z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle T, Z \rangle \langle X, T \rangle Y - \langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle T &= \langle T, Z \rangle \langle X, T \rangle Y - \langle \langle X, T \rangle Y, Z \rangle T \\ &= (\langle X, T \rangle Y \wedge T)Z.\end{aligned}$$

colocando Z em evidência temos

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^T = \epsilon(X \wedge Y - \langle Y, T \rangle X \wedge T + \langle X, T \rangle Y \wedge T)Z$$

e portanto, a equação de *Gauss* para f é dada por

$$R(X, Y)Z = \epsilon(X \wedge Y - \langle Y, T \rangle X \wedge T + \langle X, T \rangle Y \wedge T)Z + A_{\alpha(Y, Z)}^f X - A_{\alpha(X, Z)}^f Y$$

Temos que a equação de *Codazzi* é dada por

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z).$$

Tomando a componente normal em $\bar{R}(X, Y)Z$ temos

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp &= \epsilon(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle \eta - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \eta) \\ &= \epsilon(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle) \eta\end{aligned}$$

Assim,

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) = \epsilon(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle) \eta$$

Dado $\xi \in \Gamma(N^f M)$, temos de (1.25) que

$$\bar{R}(X, Y)\xi = \epsilon(Y \langle X, T \rangle - X \langle Y, T \rangle) \langle \xi, \eta \rangle,$$

o que implica que $(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = 0$. Portanto, segue que a equação de *Ricci* para f é dada por

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi^f Y) - \alpha(A_\xi^f X, Y).$$

Por fim, tomando a componente normal em $\bar{R}(X, Y)\xi$, temos que a equação de *codazzi* pode ser escrita como

$$(\nabla_Y A^f)(X, \xi) - (\nabla_X A^f)(Y, \xi) = \epsilon \langle \eta, \xi \rangle (X \wedge Y) T.$$

Podemos resumir todo esse cálculo na seguinte proposição:

Proposição 1.7.2. *Sejam $(M^m, \nabla), (\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}, \bar{\nabla})$ variedades Riemannianas e $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Para todo campo de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e toda seção $\xi \in \Gamma(N^f M)$ valem as seguintes equações, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, respectivamente:*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \epsilon(X \wedge Y - \langle Y, T \rangle X \wedge T + \langle X, T \rangle Y \wedge T)Z \\ &\quad + A_{\alpha(Y, Z)}^f X - A_{\alpha(X, Z)}^f Y, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) = \epsilon(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle) \eta, \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_Y A^f)(X, \xi) - (\nabla_X A^f)(Y, \xi) &= \epsilon \langle \eta, \xi \rangle (X \wedge Y) T, \\ R^\perp(X, Y)\xi &= \alpha(X, A_\xi^f Y) - \alpha(A_\xi^f X, Y). \end{aligned} \quad (1.28)$$

onde T e η estão definidos (1.14).

Capítulo 2

Uma classe de subvariedades de

$$\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$$

Neste capítulo estudaremos uma classe de subvariedades M^m em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, denominada classe \mathcal{A} , que será útil no Capítulo 4. O Teorema 2.1.3, resultado principal deste capítulo, nos fornecerá uma descrição completa de todas as imersões isométricas na classe \mathcal{A} . Como consequência deste resultado, também trataremos sobre as subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, que é uma subclasse importante da classe \mathcal{A} .

2.1 Classe \mathcal{A}

Denotaremos por \mathcal{A} a classe de imersões isométricas $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ com a propriedade de que o campo de vetores T , definido como em (1.14), é um autovetor de todo operador de forma de f , isto é, o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}; f \text{ é imersão isométrica e} \\ A_\zeta^f T = \lambda T, \forall \zeta \in \Gamma(N^f M), T \text{ definido em (1.14)} \end{array} \right\}.$$

É importante mencionar que os exemplos triviais que pertencem a classe \mathcal{A} são produtos $N^{m-1} \times \mathbb{R}$, onde N^{m-1} é uma subvariedade de \mathbb{Q}_ϵ^n , que neste caso, o campo de vetores normais η , definido em (1.14), é identicamente nulo. De fato, seja $f : N^{m-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, uma imersão isométrica. Como $\eta = 0$, temos $\nabla_X^\perp \eta = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(N^{m-1} \times \mathbb{R})$. Assim, para $\zeta \in \Gamma(N^f M)$, temos

$$0 = \langle \nabla_X^\perp \eta, \zeta \rangle \stackrel{(1.16)}{=} \langle -\alpha(X, T), \zeta \rangle = \langle -A_\zeta^f T, X \rangle.$$

Isto implica que $A_\zeta^f T = 0$ e portanto $f \in \mathcal{A}$. Chamamos esses exemplos de *cilindros verticais*. Os mais interessantes são construídos como segue, onde iremos considerar o

2. Uma classe de subvariedades de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$

caso $\epsilon \in \{-1, 1\}$. O caso $\epsilon = 0$ é similar, e pode ser encontrado em [4]

Seja $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ uma imersão isométrica. Assuma que existe um conjunto ortonormal de campos de vetores paralelos ξ_1, \dots, ξ_k ao longo de g . Esta suposição é satisfeita, se g tem fibrado normal flat. Portanto, o subfibrado vetorial E com posto k do fibrado normal $N^g N$ de g gerado por ξ_1, \dots, ξ_k é paralelo e flat. De fato, seja $\xi \in E = \text{span}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$, então $\xi = \sum_{i=1}^k a_i \xi_i$. Assim,

$$\nabla_X \xi = \sum_{i=1}^k X(a_i) \xi_i + \sum_{i=1}^k \nabla_X \xi_i = \sum_{i=1}^k b_i \xi_i \in E.$$

pois como ξ_i é paralelo $\nabla_X \xi_i = 0$. Isto mostra que E é paralelo. Mostremos que E é flat. Temos que

$$\begin{aligned} R^E(X, Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \\ &= \sum_{i=1}^k XY(a_i) \xi_i - \sum_{i=1}^k YX(a_i) \xi_i - \sum_{i=1}^k [X, Y](a_i) \xi_i \\ &= 0. \end{aligned}$$

Seja $j : \mathbb{Q}_\epsilon^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ e $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ denota a inclusão canônica, e seja $\tilde{j} = i \circ j$.

$$\begin{array}{ccccc} N^{m-1} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Q}_\epsilon^n & \xrightarrow{j} & \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \\ & \searrow \tilde{g} & \downarrow \tilde{j} & \swarrow i & \\ & & \mathbb{E}^{n+2} & & \end{array}$$

Seja

$$\tilde{\xi}_i = \begin{cases} \tilde{j} \circ g & , \text{ se } i = 0; \\ \tilde{j}_* \xi_i & , \text{ se } 1 \leq i \leq k; \\ i_* \partial / \partial t & , \text{ se } i = k + 1. \end{cases}$$

Então o subfibrado vetorial \tilde{E} de $N^{\tilde{g}} N$ cuja fibra $\tilde{E}(x)$ em $x \in N^{m-1}$ é gerado por $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k+1}$ é também paralelo e flat.

Note que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : N^{m-1} \times \mathbb{E}^{k+2} &\longrightarrow \tilde{E} = \text{span}\{\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k+1}\} \\ (x, y) &\longmapsto \phi_x(y) := \phi(x, y) = \sum_{i=0}^{k+1} y_i \tilde{\xi}_i, \quad y = (y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) \in \mathbb{E}^{k+2}, \end{aligned}$$

é uma isometria de fibrados vetoriais. Agora, seja

$$f : M^m = N^{m-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$$

dada por

$$\tilde{f}(x, s) := (i \circ f)(x, s) = \phi_x(\gamma(s)) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i(s) \tilde{\xi}_i(x), \quad (2.1)$$

onde $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1})$ é uma curva regular suave tal que $\epsilon\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \dots + \gamma_k^2 = \epsilon$ e γ_{k+1} possui derivada não nula em todo ponto. Note que cilindros verticais correspondem ao caso em que γ parametriza $\{\bar{p}\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$.

Proposição 2.1.1. *Assumamos que o campo de vetores T em (1.14) nunca se anula. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é um autovetor de A_ζ^f para todo $\zeta \in N^f M$;
- (ii) η é paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$;
- (iii) $A_\nu^{\tilde{f}}$ comuta com A_ζ^f para todo $\zeta \in N^f M$.

Demonstração. Mostremos que (i) se e somente se (ii). Assumamos que T é um autovetor de A_ζ^f para todo $\zeta \in N^f M$, então $A_\zeta^f T = \lambda T$. Assim, para $X \in \{T\}^\perp$, por (1.16) temos que

$$\langle -\nabla_X^\perp \eta, \zeta \rangle = \langle \alpha_f(T, X), \zeta \rangle = \langle A_\zeta^f T, X \rangle = \langle \lambda T, X \rangle = \lambda \langle T, X \rangle = 0$$

como $\langle -\nabla_X^\perp \eta, \zeta \rangle = 0$ para todo $\zeta \in N^f M$ temos que $\nabla_X^\perp \eta = 0$, ou seja, η é paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$. Agora supondo η paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$ temos $\nabla_X^\perp \eta = 0$, com $X \in \{T\}^\perp$. então segue que para $\zeta \in N^f M$ temos

$$0 = \langle \nabla_X^\perp \eta, \zeta \rangle \stackrel{(1.16)}{=} \langle -\alpha(X, T), \zeta \rangle = \langle -A_\zeta^f T, X \rangle.$$

Isto implica que $A_\zeta^f T \in \{T\}^{\perp\perp} = \{T\}$, ou seja, $A_\zeta^f T = \lambda T$.

Mostremos agora a equivalência entre (i) e (iii). Suponhamos que T é um autovetor de A_ζ^f para todo $\zeta \in N^f M$, isto é, $A_\zeta^f T = \lambda T$. Então segue que

$$\begin{aligned} A_\zeta^f A_\nu^{\tilde{f}} T &= A_\zeta^f (A_\nu^{\tilde{f}} T) = A_\zeta^f (-\|\eta\|^2 T) \\ &= -\|\eta\|^2 A_\zeta^f T \\ &= -\|\eta\|^2 \lambda T \end{aligned}$$

e

$$A_\nu^{\tilde{f}} A_\zeta^f T = A_\nu^{\tilde{f}} \lambda T = \lambda A_\nu^{\tilde{f}} T = -\lambda \|\eta\|^2 T.$$

Então

$$A_\zeta^f A_\nu^{\tilde{f}} T = A_\nu^{\tilde{f}} A_\zeta^f T,$$

o que implica que $A_\nu^{\tilde{f}}$ comuta com A_ζ^f para todo $\zeta \in N^f M$.

Suponhamos agora que $A_\nu^{\tilde{f}}$ comuta com A_ζ^f para todo $\zeta \in N^f M$. Então de (1.21) temos que

$$A_\nu^{\tilde{f}} A_\zeta^f T = A_\zeta^f A_\nu^{\tilde{f}} T = -\|\eta\| A_\zeta^f T.$$

Isto mostra que $A_\zeta^f T$ é um autovetor de $A_\nu^{\tilde{f}}$ com autovalor $-\|\eta\|^2$. Segue então que para $X \in \{T\}^\perp$ temos

$$\begin{aligned} -\|\eta\|^2 \langle A_\zeta^f T, X \rangle &= \langle A_\nu^{\tilde{f}} A_\zeta^f T, X \rangle \\ &= \langle A_\zeta^f T, A_\nu^{\tilde{f}} X \rangle \\ &= \langle A_\zeta^f T, -X \rangle \\ &\Rightarrow \langle (1 - \|\eta\|^2) A_\zeta^f T, X \rangle = 0 \\ 1 - \|\eta\|^2 \neq 0 &\Rightarrow \langle A_\zeta^f T, X \rangle = 0 \\ &\Rightarrow A_\zeta^f T \in \{T\}^{\perp\perp} = \{T\}, \end{aligned}$$

o que implica que $A_\zeta^f T = \lambda T$ para algum λ .

O fato usado acima que $1 - \|\eta\|^2 \neq 0$ decorre de que se tivermos $0 = 1 - \|\eta\|^2 = \|T\|^2$, deveríamos ter $\|T\|^2 = 0$, implicando que $T = 0$, mas T é não nulo por hipótese, logo devemos ter $1 - \|\eta\|^2 \neq 0$. \square

A proposição seguinte descreve a diferencial, o espaço normal e a segunda forma fundamental da imersão isométrica \tilde{f} definida em (2.1). Dado $x \in N^{m-1}$, $X \in T_x N$ e $s \in I$, denotamos por $X^{\mathcal{H}}$ o único vetor em $T_{(x,s)} M$ tal que $\pi_{1*} X^{\mathcal{H}} = X$ e $\pi_{2*} X^{\mathcal{H}} = 0$, onde $\pi_1 : M^m \rightarrow N^{m-1}$ e $\pi_2 : M^m \rightarrow I$ são as projeções canônicas.

Proposição 2.1.2. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) *A diferencial de \tilde{f} é dada por*

$$\tilde{f}_*(x, s) X^{\mathcal{H}} = \tilde{g}_*(x) \left(\gamma_0(s) I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s) A_{\xi_i}^g(x) \right) X, \quad (2.2)$$

para cada $X \in T_x N$, onde I é o endomorfismo identidade de $T_x N$, e

$$\tilde{f}_*(x, s) \frac{\partial}{\partial s} = \phi_x(\gamma'(s)), \quad (2.3)$$

onde $\frac{\partial}{\partial s}$ é o campo de vetores tangentes a $\gamma(s)$.

(ii) A aplicação \tilde{f} (e conseqüentemente f) é uma imersão em (x, s) se e somente se

$$P_s(x) := \gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)A_{\xi_i}^g(x) = -A_{\phi_x(\bar{\gamma}(s))}^{\tilde{g}} = -A_{\phi_x(\gamma(s))}^{\tilde{g}},$$

onde $\bar{\gamma}(s) = (\gamma_0(s), \dots, \gamma_k(s), 0)$, é um endomorfismo invertível de $T_x N$.

(iii) Se \tilde{f} é uma imersão em (x, s) , então

$$N_{(x,s)}^{\tilde{f}}M = \tilde{j}_*E(x)^\perp \oplus \phi_x(\gamma'(s)^\perp) \subset N_x^{\tilde{g}}N,$$

onde $E(x)^\perp$ é o complemento ortogonal de $E(x)$ em $N_x^g N$, e

$$N_{(x,s)}^{\tilde{f}}M = i_*N_{(x,s)}^fM \oplus \text{span}\{(\pi \circ \tilde{f})(x, s)\} = i_*N_{(x,s)}^fM \oplus \text{span}\{\phi_x(\bar{\gamma}(s))\}, \quad (2.4)$$

em que $\pi : \mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ é a projeção canônica.

(iv) Se \tilde{f} é uma imersão em (x, s) , então

$$A_{\xi}^{\tilde{f}}(x, s)X^{\mathcal{H}} = (P_s(x)^{-1}A_{\xi}^{\tilde{g}}X)^{\mathcal{H}} \quad (2.5)$$

para todo $\xi \in N_{(x,s)}^{\tilde{f}}M$ e $X \in T_x N$,

$$A_{\xi}^{\tilde{f}}(x, s)\frac{\partial}{\partial s} = 0, \quad \text{se } \xi \in \tilde{j}_*E(x)^\perp \quad (2.6)$$

e

$$A_{\phi_x(\zeta)}^{\tilde{f}}(x, s)\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \frac{\partial}{\partial s}, \quad (2.7)$$

se $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$, $\langle \zeta, \gamma'(s) \rangle = 0$.

Demonstração. (i) Dada uma curva suave $\beta : J \rightarrow N^{m-1}$ com $0 \in J$, $\beta(0) = x$, e $\beta'(0) = X$, para cada $s \in I$ seja $\beta_s : J \rightarrow M^m$ dada por $\beta_s(t) = (\beta(t), s)$. Então $\beta_s(0) = (x, s)$ e $\beta'_s(0) = X^{\mathcal{H}}$. Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \tilde{f}_*(x, s)X^{\mathcal{H}} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{f}(\beta_s(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i(s)\tilde{\xi}_i(\beta(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_0(s)\tilde{g}(\beta(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i(s)\tilde{\xi}_i(\beta(t)) \\ &= \gamma_0(s)\tilde{g}_*(x)X - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)\tilde{g}_*(x)A_{\xi_i}^{\tilde{g}}(x)X \\ &= \tilde{g}_*(x) \left(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)A_{\xi_i}^{\tilde{g}}(x) \right) X \end{aligned}$$

e (2.2) segue do fato que $\tilde{A}_{\xi_i}^g = A_{\xi_i}^g$ para qualquer $1 \leq i \leq k$. Além disso,

$$\tilde{f}_*(x, s) \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i(s) \tilde{\xi}_i = \phi_x(\gamma'(s))$$

Os itens (ii) e (iii) seguem imediatamente de (i).

(iv) Para provar (2.5), dado $\xi \in N_{(x,s)}^f M$ e $X \in T_x N$, seja $\beta : J \rightarrow N^{m-1}$ e $\beta_s : J \rightarrow M^m$ como no início da demonstração. Então, usando (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} -\tilde{f}_*(x, s) A_{\xi}^f(x, s) X^{\mathcal{H}} &= (\tilde{\nabla}_{X^{\mathcal{H}}} \xi)^T = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \xi(\beta_s(t)) \right)^T \\ &= -\tilde{g}_*(x) A_{\xi}^g(x) X \\ &= -\tilde{g}_*(x) P_s(x) P_s(x)^{-1} A_{\xi}^g(x) X \\ &= -\tilde{f}_*(x, s) (P_s(x)^{-1} A_{\xi}^g(x) X)^{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

e (2.5) segue. Aqui, colocar T como um sobrescrito de um vetor significa pegar sua componente tangente.

A fórmula (2.6) é clara. Quanto a (2.7), dado $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$ com $\langle \zeta, \gamma'(s) \rangle = 0$, estendendo ζ a um campo de vetor normal paralelo ao longo de γ , de modo que

$$\zeta'(s) = \frac{\langle \zeta'(s), \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \gamma'(s) = -\frac{\langle \gamma''(s), \zeta(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \gamma'(s).$$

Então temos que

$$\begin{aligned} -\tilde{f}_*(x, s) A_{\phi_x(\zeta)}^f(x, s) \frac{\partial}{\partial s} &= (\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \phi_x(\zeta))^T = (\phi_x(\zeta'(s)))^T \\ &= -\frac{\langle \gamma''(s), \zeta(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} (\phi_x(\gamma'(s)))^T \\ &= -\tilde{f}_*(x, s) \frac{\langle \gamma''(s), \zeta(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \frac{\partial}{\partial s}, \end{aligned}$$

onde usamos (2.3) na ultima igualdade. Isto dá (2.7) e concluímos a demonstração. \square

Teorema 2.1.3. *A aplicação f em (2.1) define, em pontos regulares, uma imersão na classe \mathcal{A} . Reciprocamente, qualquer imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $m \geq 2$ na classe \mathcal{A} é dada localmente como em (2.1).*

Demonstração. Afirmção 1: $\langle X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(N)$, com respeito a

métrica induzida por f . De fato, das equações (2.2) e (2.3) temos

$$\begin{aligned} \left\langle X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \tilde{f}_*(x, s)X^{\mathcal{H}}, \tilde{f}_*(x, s)\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \\ &\stackrel{(2.2)-(2.3)}{=} \left\langle \tilde{g}_*(x) \left(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)A_{\xi_i}^g(x) \right) X, \phi_x(\gamma'(s)) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

pois $\phi_x(\gamma'(s)) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma'_i(s)\tilde{\xi}_i$ pertence ao subfibrado \tilde{E} de $N^{\tilde{g}}N$. ✓

Afirmção 2: $\langle X^{\mathcal{H}}, T \rangle = \langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, i_*\frac{\partial}{\partial t} \rangle = 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(N)$.

Primeiro provemos a primeira igualdade da afirmação. Note que

$$i_*\frac{\partial}{\partial t} = i_*f_*T + i_*\eta \Rightarrow \tilde{f}_*T = i_*\frac{\partial}{\partial t} - i_*\eta.$$

Assim,

$$\langle X^{\mathcal{H}}, T \rangle = \langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, \tilde{f}_*T \rangle = \left\langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle - \langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, i_*\eta \rangle = \left\langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle,$$

pois, $\langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, i_*\eta \rangle = \langle i_*f_*X^{\mathcal{H}}, i_*\eta \rangle = \langle f_*X^{\mathcal{H}}, \eta \rangle = 0$. Provemos agora a segunda igualdade da afirmação. Relembremos que $\tilde{g} = i \circ j \circ g$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{f}_*X^{\mathcal{H}}, i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &\stackrel{(2.2)}{=} \left\langle \tilde{g}_*(x) \left(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)A_{\xi_i}^g(x) \right) X, i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle i_*(j \circ g)_*(x) \left(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)A_{\xi_i}^g(x) \right) X, i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle (j \circ g)_*(x) \left(\gamma_0(s)I - \sum_{i=1}^k \gamma_i(s)A_{\xi_i}^g(x) \right) X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

pois, $\frac{\partial}{\partial t}$ é ortogonal a imersão $j \circ g$. Isto conclui nossa afirmação. ✓

Afirmção 3: T está na direção de $\partial/\partial s$.

Note que $\langle f_*X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 0$, para do $X \in TN$. Daí, de $\langle X^{\mathcal{H}}, \frac{\partial}{\partial s} \rangle$, temos $\langle f_*X^{\mathcal{H}}, f_*\frac{\partial}{\partial s} \rangle = 0$, para todo $X \in TN$.

Analogamente, de $\langle X^{\mathcal{H}}, T \rangle = 0$, temos $\langle f_*X^{\mathcal{H}}, f_*T \rangle = 0$, para todo $X \in TN$. Isso mostra que $f_*\frac{\partial}{\partial s}$ e f_*T estão na direção de $\frac{\partial}{\partial t}$. Então $f_*\frac{\partial}{\partial s}$ e f_*T estão na mesma direção e conseqüentemente, T e $\frac{\partial}{\partial s}$ também. Portanto, $T = \lambda\frac{\partial}{\partial s}$ para algum λ . ✓

Afirmção 4: $\langle T, \frac{\partial}{\partial s} \rangle = \gamma'_{k+1}(s)$.

Relembremos que $\tilde{f}_*T = i_*\frac{\partial}{\partial t} - i_*\eta$ e que $i_*\frac{\partial}{\partial t} = \tilde{\xi}_{k+1}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \left\langle T, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \tilde{f}_*T, \tilde{f}_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t} - i_*\eta, \tilde{f}_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{f}_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle - \left\langle i_*\eta, i_*f_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \\
 &= \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{f}_*\frac{\partial}{\partial s} \right\rangle \stackrel{(2.3)}{=} \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \phi_x(\gamma'(s)) \right\rangle = \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=0}^{k+1} \gamma'_i(s)\tilde{\xi}_i \right\rangle \\
 &= \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \gamma'_{k+1}(s)\tilde{\xi}_{k+1} \right\rangle + \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=0}^k \gamma'_i(s)\tilde{\xi}_i \right\rangle \\
 &= \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, \gamma'_{k+1}(s)i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \tilde{\xi}_{k+1}, \sum_{i=0}^k \gamma'_i(s)\tilde{\xi}_i \right\rangle \\
 &= \gamma'_{k+1}(s) \left\langle i_*\frac{\partial}{\partial t}, i_*\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \gamma'_{k+1}(s).
 \end{aligned}$$

Note que pela afirmação 3, temos $T = \lambda\frac{\partial}{\partial s}$, o que implica que

$$\lambda = \frac{\langle T, \partial/\partial s \rangle}{\langle \partial/\partial s, \partial/\partial s \rangle}.$$

Conseqüentemente, pela afirmação 4, temos que

$$T = \frac{\langle T, \partial/\partial s \rangle}{\langle \partial/\partial s, \partial/\partial s \rangle} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Em particular, T nunca se anula pela suposição que $\gamma'_{k+1} \neq 0$ para todo $s \in I$. ✓

Afirmação 5: f pertence a classe \mathcal{A} .

Seja $\tilde{\xi} \in N_{(x,s)}^{\tilde{f}}M$, então pelo item (iii) da proposição 2.1.2, temos que $\tilde{\xi} = \xi_1 + \xi_2$, onde $\xi_1 \in \tilde{j}_*E(x)^\perp$ e $\xi_2 \in \phi_x(\gamma'(s)^\perp)$. Assim, para $\xi \in N_{(x,s)}^fM$, temos

$$\begin{aligned}
 A_\xi^f T &\stackrel{(1.19)}{=} A_{\tilde{\xi}}^{\tilde{f}} T = A_{\xi_1}^{\tilde{f}} T + A_{\xi_2}^{\tilde{f}} T \\
 &= A_{\xi_1}^{\tilde{f}} \left(\frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} \frac{\partial}{\partial s} \right) + A_{\xi_2}^{\tilde{f}} \left(\frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} \frac{\partial}{\partial s} \right) \\
 &= \frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} A_{\xi_1}^{\tilde{f}} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} A_{\xi_2}^{\tilde{f}} \frac{\partial}{\partial s} \\
 &\stackrel{(2.6)-(2.7)}{=} \frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} \cdot \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \frac{\partial}{\partial s} \\
 &= \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \cdot \frac{\gamma'_{k+1}(s)}{\|\gamma'(s)\|^2} \frac{\partial}{\partial s} \\
 &= \lambda T.
 \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle}$. ✓

Finalmente, a primeira parte do Teorema está provada. Vamos agora provar a recí-

proca.

Afirmção 6: $\langle \nabla_T T, X \rangle = \langle \nabla_X T, T \rangle = \langle A_\eta^f T, X \rangle = 0$, para qualquer $X \in \{T\}^\perp$. (2.8)

Provemos a primeira igualdade da afirmação. Desde que $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ pertence a classe \mathcal{A} , o campo de vetor T nunca se anula, e usando o fato que T é um campo de vetores gradiente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T T, X \rangle &= \langle \nabla_T \text{grad } h, X \rangle = \text{Hess } h(T, X) = \text{Hess } h(X, T) = \langle \nabla_X \text{grad } h, T \rangle \\ &= \langle \nabla_X T, T \rangle. \end{aligned}$$

Para as duas últimas igualdades basta derivar $\langle X, T \rangle = 0$ em relação a T e obter

$$-\langle \nabla_T X, T \rangle = \langle X, \nabla_T T \rangle = \langle \nabla_X T, T \rangle \stackrel{(1.15)}{=} \langle A_\eta^f X, T \rangle = \langle X, A_\eta^f T \rangle = \langle X, \lambda T \rangle = 0. \checkmark$$

Em particular, a distribuição unidimensional gerada por T é totalmente geodésica.

Afirmção 7: A distribuição ortogonal $\{T\}^\perp = \{X; \langle X, T \rangle = 0\}$ é integrável. De fato, sejam $X, Y \in \{T\}^\perp$. Iremos mostrar que $[X, Y] \in \{T\}^\perp$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle X, T \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \nabla_Y X, T \rangle = -\langle X, \nabla_Y T \rangle, \\ \langle Y, T \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \nabla_X Y, T \rangle = -\langle Y, \nabla_X T \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], T \rangle &= \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, T \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, T \rangle - \langle \nabla_Y X, T \rangle \\ &= -\langle X, \nabla_Y T \rangle + \langle Y, \nabla_X T \rangle \\ &\stackrel{(1.15)}{=} -\langle Y, A_\eta^f X \rangle + \langle X, A_\eta^f Y \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $[X, Y] \in \{T\}^\perp$, o que mostra que $\{T\}^\perp$ é involutiva. Logo, pelo Teorema de Frobenius é integrável. \checkmark

Portanto, existe um difeomorfismo local $\psi : N^{m-1} \times I \rightarrow M^m$, onde I é um intervalo aberto contendo 0, tal que $\psi(x, \cdot) : I \rightarrow M^m$ são curvas integrais ¹ de T para qualquer $x \in N^{m-1}$. Denotando por E_1 e E_2 as distribuições dadas por espaços tangentes as folhas da folheação produto de $N^{m-1} \times I$, temos que E_1 e E_2 são mutuamente ortogonais e E_2

¹Seja X é um campo de vetores em M . Uma *curva integral* de X é uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$.

é totalmente geodésica com respeito a métrica induzida por ψ .

Seja $\tilde{f} = i \circ f \circ \psi : N^{m-1} \times I \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$.

$$\begin{array}{ccccccc} N^{m-1} \times I & \xrightarrow{\psi} & M^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{E}^{n+2} \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & \tilde{f} & \end{array}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{f}_* X, i_* \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle i_* f_* \psi_* X, i_* \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle f_* \psi_* X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \langle f_* \psi_* X, f_* T + \eta \rangle \\ &= \langle f_* \psi_* X, f_* T \rangle \\ &= \langle \psi_* X, T \rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

para cada $X \in E_1$.

Além disso, em vista de (1.22) e do fato que f pertence a classe \mathcal{A} , temos que

$$\begin{aligned} \left\langle A_{i_* \eta}^{\tilde{f}} X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &= \mu \left\langle X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0, \quad \forall X \in E_1, \\ \left\langle A_{\nu}^{\tilde{f}} X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle &\stackrel{(1.22)}{=} - \left\langle X, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0, \quad \forall X \in E_1, \end{aligned}$$

Portanto, para cada $X \in E_1$, $\alpha_{\tilde{f}}(X, \frac{\partial}{\partial s}) = 0$.

Assim, como E_2 é totalmente geodésica, para to $X \in E_1$ parte tangente de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}$ a E_2 é nula, ou seja, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \in E_1$, e daí, usando a fórmula de Gauss obtemos que

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{f}_* X = \tilde{f}_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X + \alpha_{\tilde{f}} \left(X, \frac{\partial}{\partial s} \right) = \tilde{f}_* \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X \in \tilde{f}_* E_1.$$

consequentemente $\tilde{f}_* E_1$ é constante em \mathbb{E}^{n+1} ao longo das folhas de E_2 .

Agora, pela equação (2.9) $\tilde{g} := \tilde{f}(\cdot, 0)$ está contido em um subespaço afim ortogonal a $i_* \frac{\partial}{\partial t}$. Iremos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{g}(N^{m-1}) \subset \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{0\}$.

Definindo $\hat{f} = \pi \circ \tilde{f}$, em que $\pi : \mathbb{E}^{n+2} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1} \times \{0\}$ é a projeção canônica, temos que $\hat{f}(x, s) \in \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{0\}$ e daí, $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \epsilon$. Em particular, $\langle \hat{f}_* X, \hat{f} \rangle = \frac{1}{2} X(\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle) = 0$. Além disso, podemos escrever:

$$\tilde{f} = \hat{f} + h i_* \frac{\partial}{\partial t},$$

em que $h = \langle \tilde{f}, i_* \partial / \partial t \rangle$. Usando (2.9) obtemos para todo $X \in E_1$ que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}_* X, \tilde{f} \rangle &= \left\langle \hat{f}_* X + h_* X i_* \frac{\partial}{\partial t}, \hat{f} + h i_* \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= \langle \hat{f}_* X, \hat{f} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\tilde{f}(x, s) \in (\tilde{f}_*(x, s)E_1(x, s))^\perp = (\tilde{f}_*(x, 0)E_1(x, 0))^\perp = (\tilde{f}_*(x)T_x N)^\perp,$$

onde na primeira igualdade foi usado o fato que $\tilde{f}_* E_1$ é constante em \mathbb{E}^{n+2} ao longo de E_2 . Consequentemente, fixado $s \in I$ temos que $\xi_s(x) := \tilde{f}(x, s)$ define um campo de vetor normal ao longo de \tilde{g} . Além disso,

$$\tilde{\nabla}_X \xi_s \in \tilde{f}_*(x, s)E_1(x, s) = \tilde{g}_* T_x N,$$

portanto, ξ_s é paralelo ao longo de \tilde{g} na conexão normal, Segue-se que

$$x \in N \mapsto W(x) := \text{span}\{\tilde{f}(x, s) : s \in I\}$$

é um subfibrado paralelo flat de $N^{\tilde{g}}N$. Além disso, desde que $\langle \hat{f}(x, s), \tilde{f}(x, s) \rangle = \epsilon$, para qualquer $x \in N$ fixado, a imagem de $s \in I \mapsto \tilde{f}(x, s)$ está contido em um cilindro

$$\mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R} = W(x) \cap (\mathbb{Q}_\epsilon^{n-m+1} \times \mathbb{R}) \subset N_x^{\tilde{g}}N$$

onde $k + 2$ é o rank de W .

Seja $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ definido por $\tilde{g} = \tilde{j} \circ g$, e seja $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ um conjunto ortonormal de campos de vetores paralelos ao longo de g tal que $\tilde{\xi}_i = i_* \xi_i, 1 \leq i \leq k, \tilde{\xi}_0 = \tilde{g}$, e $\tilde{\xi}_{k+1} = i_* \partial / \partial t$ forma um referencial ortonormal de W . Note que, para qualquer $X \in E_1$, temos

$$X \langle \tilde{f}, \tilde{\xi}_i \rangle = \langle \tilde{f}_* X, \tilde{\xi}_i \rangle + \langle \tilde{f}, \tilde{\nabla}_X \tilde{\xi}_i \rangle = 0,$$

para \tilde{f} é um campo de vetor normal, $\tilde{f}_*(x, s)X \in \tilde{g}_*(x)T_x N$ e $\tilde{\xi}_i$ é paralelo na conexão normal de \tilde{g} . Então podemos escrever

$$\tilde{f}(x, s) = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i \tilde{\xi}_i, \quad \text{com } \gamma_i = \gamma_i(s).$$

Além disso, de $\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \epsilon$ obtemos que $\epsilon \gamma_0^2 + \sum_{i=1}^k \gamma_i^2 = \epsilon$. □

Corolário 2.1.4. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) O campo de vetores T em (1.14) nunca se anula, e \tilde{f} tem um fibrado normal flat;
- (ii) f tem um fibrado normal flat e está na classe \mathcal{A} ;
- (iii) \tilde{f} é localmente dada como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ com fibrado normal flat e uma curva regular suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1})$, com γ'_{k+1} nunca nulo.

Demonstração. Provemos a equivalência entre (i) e (ii). Tomando o produto interno na equação de Ricci (1.28) com $\zeta \in N^f M$ temos que

$$\begin{aligned}
 \langle R^\perp(X, Y)\xi, \zeta \rangle &= \langle \alpha(A_\xi X, Y), \zeta \rangle - \langle \alpha(A_\xi Y, X), \zeta \rangle \\
 &= \langle A_\zeta A_\xi X, Y \rangle - \langle A_\zeta A_\xi Y, X \rangle \\
 &= \langle A_\zeta A_\xi X, Y \rangle - \langle Y, A_\xi A_\zeta X \rangle \\
 &= \langle [A_\zeta, A_\xi]X, Y \rangle.
 \end{aligned}$$

Assim, R^\perp se anula em $x \in M$ se e somente se todo operador de forma $A_\xi^f, \xi \in N^f M$, comutam, ou seja, f tem fibrado normal flat se e somente se, todo operador de forma são simultaneamente diagonalizáveis.

Desta forma, \tilde{f} tem fibrado normal flat se e somente se todo operador de forma $A_\xi^{\tilde{f}}, \xi \in N^{\tilde{f}} M$ comutam. Como por (1.19) vale $A_\xi^f = A_\xi^{\tilde{f}}$, então \tilde{f} tem fibrado normal flat se e somente se f também tem fibrado normal flat. Assim, todo operador de forma A_ξ^f comutam e da proposição 2.1.1, temos que T é autovetor de todo operador de forma de f , e portanto, f pertence a classe \mathcal{A} . Fica provado que (i) e (ii) são equivalentes.

Provemos agora a equivalência entre (ii) e (iii). Primeiro mostremos que (ii) implica (iii). Se f pertence a classe \mathcal{A} , então T é autovetor de todo operador de forma de f , e por 1.19, temos que $A_\xi^f T = A_\xi^{\tilde{f}} T$, ou seja, T também é autovetor de todo operador de \tilde{f} . Assim, \tilde{f} pertence a classe \mathcal{A} , e pelo Teorema 2.1.3 é dada localmente como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ e uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{k+1})$, com $\gamma'_{k+1} \neq 0$. Desde que o subfibrado vetorial \tilde{E} de $N^{\tilde{g}} N$ gerado por $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_{k+1}$ é flat, segue da equação de Ricci dada em (1.13) para $\tilde{g} : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ que $A_\xi^{\tilde{g}}$ comuta com qualquer operador de forma de \tilde{g} para todo $\xi \in \tilde{E}$. Assim, por (1.19), g tem fibrado normal flat, se e somente se \tilde{g} tem fibrado normal flat.

Agora mostremos que (iii) implica (ii). Suponhamos que \tilde{f} é localmente dada como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ com fibrado normal flat e uma curva regular suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^{k+2}$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1})$, com γ'_{k+1} nunca nulo. Assim, pela recíproca do Teorema 2.1.3, \tilde{f} pertence a classe \mathcal{A} . Dessa forma, T é autovetor de todo operador de forma de \tilde{f} , então segue de (1.19), que f também pertence

a classe \mathcal{A} . Como g tem fibrado normal flat, então \tilde{g} também tem fibrado normal flat. Segue da equação (2.5), que se \tilde{g} tem fibrado normal flat, o fibrado normal de \tilde{f} também é flat, e por (1.19), o fibrado normal de f também é flat. \square

Corolário 2.1.5. *Seja $f : M^m := N^{m-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ dado por (2.1) com $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$ uma geodésica de $\mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$. Então f define, em pontos regulares, uma imersão para o qual o campo de vetor η em (1.14) é paralelo na conexão normal. Reciprocamente, qualquer imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $m \geq 2$, tal que T nunca se anula e η é paralelo na conexão normal, é localmente desta forma.*

Demonstração. Seja $f : M^m := N^{m-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ dada por (2.1) com $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$ uma geodésica de $\mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$. Pela recíproca do teorema 2.1.3, a imersão pertence a classe \mathcal{A} , então T é um autovetor de todo operador de forma de f . Assim, pela proposição 2.1.1 η é paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$. Por outro lado, como $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$ é uma geodésica de \mathbb{Q}_ϵ^k , temos $\gamma''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Além disso, desde que T e $\frac{\partial}{\partial s}$ estão na mesma direção, temos $\frac{\partial}{\partial s} = \lambda T$. Assim, para $\phi_x(\zeta) \in N^{\tilde{f}}M$ e $\xi \in N^fM$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \frac{\partial}{\partial s}, T \right\rangle \stackrel{(2.7)}{=} \left\langle A_{\phi_x(\zeta)}^{\tilde{f}} \frac{\partial}{\partial s}, T \right\rangle \\ &\stackrel{(1.19)}{=} \left\langle A_\xi^f \frac{\partial}{\partial s}, T \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_f \left(\frac{\partial}{\partial s}, T \right), \xi \right\rangle \\ &= \lambda \langle \alpha_f(T, T), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Isto implica que $\alpha_f(T, T) = 0$ para todo $\xi \in N^fM$. Assim, temos por (1.16) que $\alpha_f(X, T) = -\nabla_X^\perp \eta$, para to $X \in TM$. O que implica que

$$\nabla_T^\perp \eta = -\alpha_f(T, T) = 0.$$

Portanto, η é paralelo na conexão normal de f .

Reciprocamente, seja $f : M^m := N^{m-1} \times I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com a propriedade que o campo de vetor η é paralelo na conexão normal. Obtemos de (1.16) que $\alpha_f(T, T) = 0$. Além disso como campo de vetor η é paralelo na conexão normal obtemos que f pertence a classe \mathcal{A} pela proposição 2.1.1. Pelo Teorema 2.1.3, f é localmente dada por (2.1) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ e uma curva regular suave $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$. Com um cálculo similiar ao que fizemos anteriormente, segue de

$\alpha_f(T, T) = 0$ e da equação (2.7) que

$$\begin{aligned} 0 = \alpha_f(T, T) &= \left\langle \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \frac{\partial}{\partial s}, T \right\rangle \\ &= \lambda \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \langle T, T \rangle \end{aligned}$$

Assim, $\langle \gamma''(s), \zeta \rangle = 0$. O que implica que $\gamma''(s) = 0$ para todo $\zeta \in \mathbb{E}^{k+2}$. Portanto, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$ é uma geodésica de $\mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R}$. \square

2.2 Subvariedades de Rotação em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$

Nesta seção estudaremos subvariedades de rotação em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, cuja definição estende a definição dada em [6], para o caso de hipersuperfície. Antes de demonstrarmos o principal resultado desta seção, apresentaremos alguns conceitos.

Dizemos que um grupo G age em uma variedade diferenciável \overline{M} se existe uma aplicação $\psi : G \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ tal que:

- (i) Para cada $g \in G$, a aplicação $\psi_g : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ dada por $\psi_g(p) = \psi(g, p)$, $p \in \overline{M}$ é um difeomorfismo e $\psi_e = \text{identidade}$.
- (ii) Se $g_1, g_2 \in G$, então $\psi_{g_1 g_2} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$.

A órbita de um elemento $p \in \overline{M}$ por ψ é a classe de equivalência de p com respeito a relação de equivalência \sim determinada por $p \sim q$ se e somente se, existe $g \in G$ tal que $\psi_g(p) = q$, ou seja, $\mathcal{O}(p) = \{q \in \overline{M} \mid q \sim p\}$.

Seja $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ as coordenadas canônicas em \mathbb{E}^{n+2} com respeito ao qual a métrica flat é escrita como

$$ds^2 = \epsilon dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2.$$

Considere \mathbb{E}^{n+1} como

$$\mathbb{E}^{n+1} = \{(x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+2} : x_{n+1} = 0\}$$

e

$$\mathbb{Q}_\epsilon^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^{n+1} : \epsilon x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = \epsilon\} \quad (x_0 > 0 \text{ se } \epsilon = -1).$$

Seja P^{n-m+3} um subespaço de \mathbb{E}^{n+2} de dimensão $n - m + 3$ contendo as direções e_0 e e_{n+1} , onde $\{e_0, \dots, e_{n+1}\}$ é a base canônica. Então

$$(\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}) \cap P^{n-m+3} = \mathbb{Q}_\epsilon^{n-m+1} \times \mathbb{R}.$$

Denotemos por \mathcal{I} o grupo de isometrias de \mathbb{E}^{n+2} que fixa pontualmente um subespaço $P^{n-m+2} \subset P^{n-m+3}$ também contendo a direção e_{n+1} . Considere uma curva γ em $\mathbb{Q}_\epsilon^{n-m+1} \times \mathbb{R} \subset P^{n-m+3}$ que está em um dos dois semiespaços de P^{n-m+3} determinado por P^{n-m+2} .

Definição 2.2.1. Uma subvariedade de rotação m -dimensional em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil γ e eixo P^{n-m+2} é a órbita de γ sob a ação de \mathcal{I} .

Assumiremos que P^{n-m+3} é gerado por e_0, e_m, \dots, e_{n+1} . No caso $\epsilon = 1$, também assumiremos que P^{n-m+2} é gerado por e_m, \dots, e_{n+1} . Escrevendo a curva γ como

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)e_0 + \sum_{i=m}^n \gamma_{i-m+1}(s)e_i + h(s)e_{n+1},$$

com $\sum_{i=0}^{n-m+1} \gamma_i^2 = 1$, a subvariedade de rotação em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com curva perfil γ e eixo P^{n-m+2} pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s, t) = (\gamma_0(s)\varphi_1(t), \dots, \gamma_0(s)\varphi_m(t), \gamma_1(s), \dots, \gamma_{n-m+1}(s), h(s)), \quad (2.10)$$

onde $t = (t_1, \dots, t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

Para $\epsilon = -1$, tem-se três possibilidades distintas, visto que P^{n-m+2} pode ser Lorentziana, Riemanniana, ou degenerada, respectivamente, e a subvariedade de rotação é chamada de esférica, hiperbólica ou parabólica, respectivamente. No primeiro caso, assumimos que P^{n-m+2} é gerado por $e_0, e_{m+1}, \dots, e_{n+1}$ e que

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)e_0 + \sum_{i=m}^n \gamma_{i-m+1}(s)e_i + h(s)e_{n+1} \quad (2.11)$$

com $-\gamma_0^2(s) + \sum_{i=0}^{n-m+1} \gamma_i^2 = -1$. Então a subvariedade pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s, t) = (\gamma_0(s), \gamma_1(s)\varphi_1(t), \dots, \gamma_1(s)\varphi_m(t), \gamma_2(s), \dots, \gamma_{n-m+1}(s), h(s)),$$

onde novamente $t = (t_1, \dots, t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

No segundo caso, podemos assumir que P^{n-m+2} é gerado por e_m, \dots, e_{n+1} . Então, com a curva γ também dada como em (2.11), uma parametrização é

$$\tilde{f}(s, t) = (\gamma_0(s)\varphi_1(t), \dots, \gamma_0(s)\varphi_m(t), \gamma_1(s), \dots, \gamma_{n-m+1}(s), h(s)),$$

onde $t = (t_1, \dots, t_{m-1})$ e $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ parametriza $\mathbb{H}^{m-1} \subset \mathbb{L}^m$.

Finalmente, quando P^{n-m+2} é degenerada, escolhemos uma base pseudo-ortonormal

$$\hat{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_0 + e_n), \quad \hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_n), \quad \hat{e}_j = e_j$$

para $j \in \{1, \dots, n-1, n+1\}$, e assumamos que P^{n-m+2} é gerado por $\hat{e}_m, \dots, \hat{e}_{n+1}$. Note que $\langle \hat{e}_0, \hat{e}_0 \rangle = 0 = \langle \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle$ e $\langle \hat{e}_0, \hat{e}_n \rangle = 1$. Então podemos parametrizar γ por

$$\gamma(s) = \gamma_0(s)\hat{e}_0 + \sum_{i=m}^n \gamma_{i-m+1}(s)\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1},$$

com $2\gamma_0(s)\gamma_{n-m+1}(s) + \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_i^2(s) = -1$, e a parametrização da subvariedade de rotação é

$$\tilde{f}(s, t) = \left(\gamma_0, \gamma_0 t_1, \dots, \gamma_0 t_{m-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}, \gamma_{n-m+1} - \frac{\gamma_0}{2} \sum_{i=1}^{m-1} t_i^2, h \right), \quad (2.12)$$

onde $t = (t_1, \dots, t_{m-1})$ parametriza \mathbb{R}^{m-1} , $\gamma_i = \gamma_i(s)$, $0 \leq i \leq n-m+1$, e $h = h(s)$.

Definição 2.2.2. Um círculo geodésico em \mathbb{Q}_ϵ^n é uma curva cujo vetor curvatura é paralelo na conexão normal.

Teorema 2.2.3. *Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$ uma imersão isométrica tal que o campo de vetores T definido por (1.14) nunca se anula. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *f é uma subvariedade de rotação cuja curva perfil é uma curva em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^{n-m+1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$;*
- (ii) *f é dada como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica umbílica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ (um círculo geodésico, se $m = 2$);*
- (iii) *existe um campo de vetores normais ξ ao longo de f tal que*

$$\alpha_f(X, Y) = \langle X, Y \rangle \zeta \quad \text{para todo } X \in TM \text{ e } Y \in \{T\}^\perp \quad (2.13)$$

e ζ é paralelo na conexão normal ao longo de $\{T\}^\perp$ se $m = 2$.

Além disso, para $\epsilon = 1$ as afirmações anteriores são equivalentes a f sendo dada como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica totalmente geodésica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$. Isto também é o caso se $\epsilon = -1$ e f é do tipo hiperbólico em (i) e g uma hipersuperfície equidistante em (ii).

Demonstração. Nós podemos escrever (2.10) como

$$\tilde{f}(s, t) = \gamma_0(s)\hat{g}(t) + \sum_{i=m}^n \gamma_{i-m+1}(s)e_i + h(s)e_{n+1},$$

onde $\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t)e_i$ para $t = (t_1, \dots, t_{m-1})$. Isto mostra que para $\epsilon = 1$ uma subvariedade de rotação é dado como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica totalmente

geodésica $\hat{g} : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$. O caso de uma subvariedade de rotação do tipo hiperbólico em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é similar. Em particular, isso prova que (i) implica (ii) nesses casos.

A equação pode (2.12) ser escrita como

$$\tilde{f}(s, t) = \gamma_0(s)\hat{g} + \sum_{i=m}^n \gamma_{i-m+1}(s)\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1}, \quad (2.14)$$

onde

$$\hat{g}(t) = \hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} t_i \hat{e}_i - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i^2 \right) \hat{e}_n.$$

Note que \hat{g} define uma imersão isométrica de \mathbb{R}^{m-1} no cone de Luz $\mathbb{V}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ e que $\hat{g}, \hat{e}_m, \dots, \hat{e}_n, \hat{e}_{n+1}$ é uma base pseudo-ortonormal de $N^{\hat{g}}\mathbb{R}^{m-1}$, com $\langle \hat{g}, \hat{g} \rangle = 0 = \langle \hat{e}_n, \hat{e}_n \rangle$, $\langle \hat{g}, \hat{e}_n \rangle = 1$ e $\hat{e}_m, \dots, \hat{e}_{n-1}, \hat{e}_{n+1}$ uma base ortonormal de $\text{span}\{\hat{g}, \hat{e}_n\}^\perp$. Para qualquer $s_0 \in I$ fixado, seja $g : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por $g = \gamma(s_0)\hat{g} + v$, onde $v = \sum_{i=m}^n \gamma_{i-m+1}(s_0)\hat{e}_i$. Então g define uma imersão umbílica com o mesmo espaço normal em \mathbb{L}^{n+2} como \hat{g} em cada $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, isto é,

$$\text{span}\{\hat{g}, \hat{e}_m, \dots, \hat{e}_n, \hat{e}_{n+1}\} = \text{span}\{g, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{n-m+1}, \hat{e}_{n+1}\},$$

onde $\tilde{\xi}_i = i_*\xi_i$, $1 \leq i \leq n - m + 1$, para um referencial ortonormal paralelo $\xi_1, \dots, \xi_{n-m+1}$ de $N^g\mathbb{R}^{m-1}$. Portanto, também podemos escrever (2.14) como

$$\tilde{f}(s, t) = \tilde{\gamma}_0(s)g + \sum_{i=1}^{n-m+1} \tilde{\gamma}_i(s)\tilde{\xi}_i + h(s)\hat{e}_{n+1},$$

onde $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{E}^{n-m+3}$ é uma curva regular satisfazendo $-\tilde{\gamma}_0^2 + \sum_{i=1}^{n-m+1} \tilde{\gamma}_i^2 = -1$. Assim, a condição (ii) é verdade para f . O caso de uma subvariedade de rotação esférica é semelhante.

Agora suponhamos que f é dado como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica umbílica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ (um círculo geodésico se $m = 2$). Suponhamos primeiro que $\epsilon = 1$. Então, $g(N^{m-1})$ está contida em uma esfera menor de \mathbb{S}^n e podemos assumir que o subespaço afim que contém $g(N^{m-1})$ em \mathbb{R}^{n+1} é $v + W$, onde W é o subespaço gerado por $\{e_0, \dots, e_{m-1}\}$ e $v \in w^\perp$, consequentemente $g = a\hat{g} + v$, onde $a \in \mathbb{R}$ e \hat{g} é a composição $\hat{g} = i \circ \tilde{g}$ de uma homotetia $\tilde{g} : M^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ com a inclusão canônica i de \mathbb{S}^{m-1} em $W = \mathbb{R}^m$ como a esfera unitária centrada na origem. Então g e \hat{g} tem o mesmo espaço normal em \mathbb{R}^{n+1} em cada ponto de N^{m-1} , que é

$$\text{span}\{\hat{g}, \hat{e}_m, \dots, \hat{e}_n, \hat{e}_{n+1}\} = \text{span}\{g, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{n-m+1}, \hat{e}_{n+1}\},$$

onde $\tilde{\xi}_i = i_*\xi_i$, $1 \leq i \leq n - m + 1$, para um referencial ortonormal paralelo $\xi_1, \dots, \xi_{n-m+1}$

de $N^g\mathbb{S}^{m-1}$. Conseqüentemente f também pode ser parametrizada por

$$\tilde{f}(s, t) = \tilde{\gamma}_0(s)\hat{g} + \sum_{i=m}^n \tilde{\gamma}_{i-m+1}(s)\hat{e}_i + h(s)\hat{e}_{n+1},$$

onde $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{E}^{n-m+3}$ é uma curva regular suave satisfazendo $\sum_{i=0}^{n-m+1} \tilde{\gamma}_i^2 = 1$. Portanto, f é uma subvariedade de rotação com $\tilde{\gamma}$ como perfil.

Para o caso $\epsilon = -1$, discutiremos o caso parabólico, os outros são semelhantes. Podemos assumir que $N^{m-1} = \mathbb{R}^{m-1}$ e que o espaço afim que contém $g(\mathbb{R}^{m-1})$ em \mathbb{L}^{n+1} é $v + w$, onde W é o subespaço gerado por $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{m-1}, \hat{e}_n\}$ e $v \in W^\perp$. Então $g = \hat{g} + v$, onde

$$\hat{g}(t) = \hat{e}_0 + \sum_{i=1}^{m-1} t_i \hat{e}_i - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i^2 \right) \hat{e}_n.$$

for $t = (t_1, \dots, t_{m-1})$. Como antes, usando o fato que g e \hat{g} tem o mesmo espaço normal em \mathbb{L}^{n+1} para cada $t \in \mathbb{R}^{m-1}$, concluímos que f pe uma subvariedade de rotação parametrizada como em (2.14).

A segunda forma fundamental de f sendo dada por (2.13) é equivalente a restrição de cada operador de forma A_ξ^f a $\{T\}^\perp$ sendo um múltiplo do tensor identidade. Por (1.19) e (1.21), isso é equivalente a mesma propriedade sendo satisfeita por todo operador de forma de \tilde{f} . Em particular, a imersão f está na classe \mathcal{A} , conseqüentemente ela é dada localmente como em (2.1) em termos de uma imersão isométrica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$ e uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^k \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{k+2}$. Segue-se de (2.5) que, para cada $x \in N^{m-1}$ e $s \in I$, o operador $P_s^{-1}(x)A_\xi^{\tilde{g}}(x)$, com $P_s(x) = -A_{\phi_x(\gamma(s))}^{\tilde{g}}$, é um múltiplo do endomorfismo identidade I de $T_x N$ para qualquer

$$\xi \in N_{(x,s)}^{\tilde{f}} M = \tilde{j}_* E(x)^\perp \oplus \phi_x(\gamma'(s)^\perp) \subset N_x^{\tilde{g}} N.$$

Portanto $A_\xi^{\tilde{g}}(x)$ é um múltiplo de $P_s(s)$ para qualquer $\xi \in N_{(x,s)}^{\tilde{f}} M$. segue-se que, para cada $s \in I$, existe um hiperplano W_s em $N_{(x,s)}^{\tilde{f}} M \subset N_x^{\tilde{g}} N$ tal que $A_\xi^{\tilde{g}}(x) = 0$ para qualquer $\xi \in W_s$. Se a família de subespaços $s \mapsto W_s$ não é constante, desde que $A_{\tilde{g}}^{\tilde{g}} = -I$, então o subespaço gerado por todo $W_s, s \in I$ deve ser um hiperplano $W \subset N_x^{\tilde{g}} N$ com $A_\xi^{\tilde{g}}(x) = 0$ para qualquer $\xi \in W$. Portanto, a aplicação $\xi \in N_x^{\tilde{g}} N \mapsto A_\xi^{\tilde{g}}(x)$ tem rank um, e conseqüentemente sua imagem é gerada por I . Portanto \tilde{g} , e conseqüentemente g , é umbílica.

Assuma agora que todo W_s coincida com um subespaço fixado $W \subset N_x^{\tilde{g}} N$. Então W não pode conter $\tilde{\xi}_{k+1} = i_* \partial / \partial t$, caso contrário $\partial / \partial t$ seria normal a f , contradizendo o fato que o campo de vetor T em (1.14) nunca se anula. Então $A_\xi^{\tilde{g}} = 0$ para qualquer ξ no hiperplano de $N_x^{\tilde{g}} N$ gerado por W e $i_* \partial / \partial t$, e concluímos como antes que g é umbílica.

Reciprocamente, se f é localmente dado como em (2.1) em termos de uma imersão

isométrica umbílica $g : N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$, então as fórmulas (1.19) e (2.5)-(2.7) implica que a restrição de cada operador de forma A_ϵ^f a $\{T\}^\perp$ é um múltiplo do tensor identidade, consequentemente a segunda forma de f é como em (2.13).

Para concluir que a prova de (ii) e (iii) são equivalentes, resta mostrar que para $m = 2$ a hipótese adicional que o campo de vetores ζ em (2.13) seja paralelo ao longo de $\{T\}^\perp$ é equivalente a curva $g : J := N^{m-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n$, parametrizada pelo comprimento de arco, ser um círculo geodésico.

Escreva $\zeta = \alpha_f(X, X)$, onde X é um campo de vetor ortogonal a T . Seja $\tilde{f} = i \circ f$. Em vista de (1.21)-(1.22) temos

$$\alpha_{\tilde{f}}(X, X) = i_*\alpha_f(X, X) - \nu,$$

consequentemente usando (1.20) e (1.23) obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \alpha_{\tilde{f}}(X, X) &= -\tilde{f}_* A_{\alpha_{\tilde{f}}(X, X)}^{\tilde{f}} X + \tilde{\nabla}_X^\perp \alpha_{\tilde{f}}(X, X) \\ &= -\tilde{f}_* A_{\alpha_f(X, X)}^{\tilde{f}} X + i_* \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X). \end{aligned}$$

Portanto, $i_* \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X) = 0$ se e somente se

$$\tilde{\nabla}_X \alpha_{\tilde{f}}(X, X) = -\tilde{f}_* A_{\alpha_{\tilde{f}}(X, X)}^{\tilde{f}} X. \quad (2.15)$$

Segue-se de (2.5) que no ponto (t, s) temos

$$\alpha_{\tilde{f}}(X, X) = \frac{\tilde{g}''(t)}{\langle \tilde{g}''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle}, \quad (2.16)$$

onde $\tilde{g} = \tilde{j} \circ g$. De (2.2) obtemos

$$X = \frac{1}{\langle \tilde{g}''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle} \frac{d}{dt} \quad (2.17)$$

onde $\frac{d}{dt}$ é um campo de vetores unitário ao longo de J . Consequentemente

$$\tilde{\nabla}_X \alpha_{\tilde{f}}(X, X) = -\frac{\langle \tilde{g}'''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle}{\langle \tilde{g}''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle^3} \tilde{g}''(t) + \frac{1}{\langle \tilde{g}''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle^2} \tilde{g}'''(t). \quad (2.18)$$

Por outro lado, as equações (2.2), (2.16) e (2.17) produzem

$$\tilde{f}_* A_{\alpha_{\tilde{f}}(X, X)}^{\tilde{f}} X = \frac{\langle \tilde{g}''(t), \tilde{g}''(t) \rangle}{\langle \tilde{g}''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle^2} \tilde{g}'(t). \quad (2.19)$$

Segue-se de (2.18) e (2.19) que (2.15) é verdade se e somente se

$$\tilde{g}'''(t) + \langle \tilde{g}''(t), \tilde{g}''(t) \rangle \tilde{g}'(t) = -\frac{\langle \tilde{g}'''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle}{\langle \tilde{g}''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle} \tilde{g}''(t).$$

Usando que $\langle \tilde{g}(t), \tilde{g}(t) \rangle = \epsilon$ e $\langle \tilde{g}'(t), \tilde{g}'(t) \rangle = 1$ produz

$$\langle \tilde{g}'(t), \tilde{g}(t) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{g}''(t), \tilde{g}(t) \rangle = -1, \quad \text{e} \quad \langle \tilde{g}'''(t), \tilde{g}(t) \rangle = 0.$$

Então, tomando o produto interno em ambos os lados da equação anterior com $\tilde{g}(t)$ implica que $\langle \tilde{g}'''(t), \phi_t(\tilde{\gamma}(s)) \rangle = 0$, e conseqüentemente

$$\tilde{g}'''(t) = -\langle \tilde{g}''(t), \tilde{g}''(t) \rangle \tilde{g}'(t),$$

o qual é equivalente a g ser um círculo geodésico. □

Capítulo 3

Redução de Codimensão

O estudo de imersões isométricas torna-se cada vez mais difícil para valores altos da codimensão. Por esse motivo faz-se necessário investigar quando que a codimensão de uma imersão isométrica pode ser reduzida. Dizemos que a codimensão da imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$ pode ser reduzida a $k < m$ quando existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+k}$ de $\mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$ tal que $k < m$ e $f(M^n) \subseteq \mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$. Joseph Erbacher em [8] provou o seguinte resultado, que estabelece em quais condições a codimensão de uma imersão pode ser reduzida.

“Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^{n+m}$ uma imersão isométrica. Suponha que existe um subfibrado paralelo L do fibrado normal $N^f M$ com posto $k < m$ tal que $N_1(x) \subset L(x)$ para todo $x \in M^n$. Então a codimensão de f pode ser reduzida a k .”

O objetivo deste capítulo é apresentar condições de quando é possível reduzir a codimensão de uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Antes de demonstrarmos tal fato, precisamos estabelecer alguns resultados básicos.

3.1 Fatos básicos

Definição 3.1.1. O primeiro espaço normal $N_1(x)$ de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ em $x \in M^n$ é o subespaço de $N_x^f M$ gerado pela segunda forma fundamental de f em x . Isto é

$$N_1(x) = \text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\}. \quad (3.1)$$

$N_1(x)$ também pode ser definido por

$$N_1(x) = \{\xi \in N_x^f M : A_\xi = 0\}^\perp. \quad (3.2)$$

Veremos que ambas definições de $N_1(x)$ coincidem. Para isto, verificaremos que ambos conjuntos são iguais. Com efeito, seja $\xi \in N_x^f M$ não nulo, tal que $A_\xi = 0$. Então, para cada $X, Y \in T_x M$, temos que

$$0 = \langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle$$

Daí, $\xi^\perp \in \{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\}$. Portanto,

$$(\{\xi \in N_x^f M : A_\xi = 0\}^\perp)^\perp \subseteq \text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\}^\perp,$$

donde

$$\text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\} \subset \{\xi \in N_x^f M : A_\xi = 0\}^\perp.$$

Se $\xi \in \text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\}^\perp$, então $A_\xi = 0$. Daí, $\xi \in \{\xi \in N_x^f M : A_\xi = 0\}$. Então podemos concluir que

$$\text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\}^\perp \subseteq (\{\xi \in N_x^f M : A_\xi = 0\}^\perp)^\perp$$

e portanto,

$$\{\xi \in N_x^f M : A_\xi = 0\}^\perp \subseteq \text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\}.$$

Lema 3.1.2. *Sejam M e \bar{M} variedades Riemannianas e $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ uma imersão isométrica. Se L é um subfibrado paralelo de $N^f M$ e L^\perp é o seu complemento ortogonal em $N^f M$, então L^\perp é um subfibrado paralelo de $N^f M$.*

Demonstração. Sejam $\xi \in L$ e $\eta \in L^\perp$ campos diferenciáveis, então temos $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Derivando em relação ao campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$0 = X \langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle.$$

Como L é um subfibrado paralelo em $N^f M$, temos $\nabla_X^\perp \xi \in L$, o que implica que, $\langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle = 0$. Assim, $\langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle = 0$ para todo $\xi \in L$. Portanto, $\nabla_X^\perp \eta \in L^\perp$ para todo $\eta \in L^\perp$, isto é, L^\perp é subfibrado paralelo de $N^f M$. Agora, se L^\perp é um subfibrado paralelo, L também é um subfibrado paralelo, pois $(L^\perp)^\perp = L$. \square

3.2 Redução de codimensão em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$

Uma etapa fundamental na classificação das subvariedades umbílicas $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é o seguinte resultado na redução da codimensão da imersão isométrica em $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Dizemos que a imersão isométrica $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ reduz a codimensão para ℓ , ou tem codimensão

3. Redução de Codimensão

substancial ℓ , significa que $f(M^n)$ está contido em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^{m+\ell-1} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. A seguir provamos um resultado de redução de codimensão para f .

Teorema 3.2.1 (Redução de codimensão). *Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}, \epsilon \in \{-1, 1\}$, uma imersão isométrica. Seja η um campo de vetores normais definido por (1.14). Assuma que $L := N_1 + \text{span}\{\eta\}$ é um subfibrado de $N^f M$ com posto $\ell < n + 1 - m$ e que $\nabla^\perp N_1 \subset L$. Então f reduz codimensão para ℓ .*

Demonstração. Temos de (1.16) que $\nabla_X^\perp \eta \in N_1 \subset L$ para cada $X \in TM$. Desde que $\nabla^\perp N_1 \subset L$ por hipótese, segue-se que L é um subfibrado paralelo de $N^f M$. Seja $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ é a inclusão, e seja L^\perp o complemento ortogonal de L em $N^f M$. Dado $\xi \in L^\perp = N_1^\perp \cap \{\eta\}^\perp$, de (1.20) e o fato que L é um subfibrado paralelo de $N^f M$, temos que L^\perp também o é. Além disso, obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X^\perp i_* \xi &= i_* \nabla_X^\perp \xi + \epsilon \langle X, T \rangle \langle \xi, \eta \rangle \nu^0 \\ &= i_* \nabla_X^\perp \xi \in i_* L^\perp. \end{aligned}$$

Isto mostra que $i_* L^\perp$ é um subfibrado paralelo de $N^{\tilde{f}} M$. Por outro lado, segue de (1.19) que $i_* L^\perp \subset \widetilde{N}_1^\perp$, onde $\widetilde{N}_1(x)$ é o primeiro espaço normal de \tilde{f} em $x \in M$. De fato, dado $i_* \xi \in i_* L^\perp$, temos que $\xi \in L^\perp = N_1^\perp \cap \{\eta\}^\perp$, em particular, $\xi \in N_1^\perp$, o que implica que $A_\xi^f = 0$. Assim,

$$\langle \alpha_{\tilde{f}}(X, Y), i_* \xi \rangle = \langle A_{i_* \xi}^{\tilde{f}} X, Y \rangle \stackrel{(1.19)}{=} \langle A_\xi^f X, Y \rangle = 0.$$

Isto mostra que $i_* \xi \in \widetilde{N}_1^\perp$. Obtemos da fórmula de Weingarten para \tilde{f} que

$$\widetilde{\nabla}_X i_* \xi = -\tilde{f}_* A_{i_* \xi}^{\tilde{f}} X + \widetilde{\nabla}_X^\perp i_* \xi = \widetilde{\nabla}_X^\perp i_* \xi \in i_* L^\perp,$$

onde $\widetilde{\nabla}$ é a derivada de \mathbb{E}^{n+2} . Isto mostra que $i_* L^\perp$ é paralelo em \mathbb{E}^{n+2} . Consequentemente, $i_* L^\perp$ é um subespaço constante de \mathbb{E}^{n+2} , o qual é ortogonal a $\frac{\partial}{\partial t}$. De fato, dado $\xi \in i_* L^\perp$, temos $\langle \xi, f_* T + \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = 0$.

Denote por K o complemento ortogonal de $i_* L^\perp$ em \mathbb{E}^{n+2} . Então para qualquer $x_0 \in M^m$ fixado temos

$$\tilde{f}(M^m) \subset \tilde{f}(x_0) + K.$$

Mas desde que K contém $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\nu(x_0)$, ele também contém o vetor posição $\tilde{f}(x_0)$. Portando $\tilde{f}(x_0) + K = K$. Concluimos que $\tilde{f}(M) \subset (\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}) \cap K = \mathbb{Q}_\epsilon^{m+\ell-1} \times \mathbb{R}$. \square

3.2.1 Uma Aplicação

Nesta subseção aplicaremos o Teorema 3.2.2 para provarmos um resultado devido a Alecar, do Carmo e Tribuzy.

Teorema 3.2.2. *Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, uma imersão isométrica. seja η um campo de vetores normais definido por (1.14). Assuma que $L := N_1 + \text{span}\{\eta\}$ é um subfibrado de $N^f M$ com posto $\ell < n + 1 - m$. Então $\nabla^\perp N_1 \subset L$ se e somente se as duas condições seguintes são verdadeiras:*

$$(i) \quad \nabla^\perp R^\perp|_{L^\perp} = 0;$$

$$(ii) \quad \nabla^\perp H \in L.$$

Demonstração. Assumamos que $\nabla^\perp N_1 \subset L$. Então como $H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(X_i, X_i)$ e N_1 é gerado pela segunda forma, temos que $\nabla^\perp H \in \nabla^\perp N_1 \subset L$, o que prova (ii). Agora provamos (i). Dado $\xi \in N_1^\perp$, temos $A_\xi = 0$, então a equação de Ricci nos fornece que

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y) = 0.$$

Dado $\xi \in L^\perp$, temos que $\xi \in N_1^\perp$ e que $\nabla_Z^\perp \xi \in N_1^\perp$ pela nossa hipótese, e daí $A_{\nabla_Z^\perp \xi} = 0$, seguindo da equação acima que $R^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = 0$. Consequentemente derivando R^\perp temos

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R^\perp)(X, Y, \xi) &= \nabla_Z R^\perp(X, Y)\xi - R^\perp(\nabla_Z X, Y)\xi - R^\perp(X, \nabla_Z Y)\xi - R^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi \\ &= \nabla_Z 0 - 0 - 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Agora provemos a recíproca. Suponhamos válidos (i) e (ii) e seja $\xi \in L^\perp$. Desde que $R^\perp(X, Y)\xi = 0$ para todo $X, Y \in TM$, obtemos de (i) que

$$R^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = 0$$

para todo $X, Y, Z \in TM$. Usando novamente a equação de Ricci, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= R^\perp(X, Y)\nabla_Z^\perp \xi = \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y) - \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y) \\ &\Rightarrow \alpha(X, A_{\nabla_Z^\perp \xi} Y) = \alpha(A_{\nabla_Z^\perp \xi} X, Y). \end{aligned}$$

3. Redução de Codimensão

Denotando $\mu = \nabla_Z^\perp \xi$ e tomando o produto interno com $\nu = \nabla_W^\perp \xi$ na equação acima temos

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha(X, A_\mu Y), \nu \rangle &= \langle \alpha(A_\mu X, Y), \nu \rangle \\
 &\Rightarrow \langle A_\nu X, A_\mu Y \rangle = \langle A_\nu A_\mu X, Y \rangle \\
 &\Rightarrow \langle A_\mu A_\nu X, Y \rangle = \langle A_\nu A_\mu X, Y \rangle \\
 &\Rightarrow \langle (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) X, Y \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu = 0 \\
 &\Rightarrow [A_{\nabla_Z^\perp \xi}, A_{\nabla_W^\perp \xi}] = 0,
 \end{aligned}$$

para todo $Z, W \in TM$. Consequentemente qualquer que seja $x \in M$, existe uma base ortonormal Z_1, \dots, Z_n de $T_x M$ que diagonaliza simultaneamente todo operador de forma $A_{\nabla_Z^\perp \xi}$, $Z \in TM$. Iremos mostrar que

$$\langle \nabla_{Z_k}^\perp \xi, \alpha(Z_i, Z_j) \rangle = 0$$

para todo $1 \leq i, j, k \leq n$, o qual implica que $\nabla_X^\perp \xi \in N_1^\perp$ para todo $X \in TM$.

Da escolha da base Z_1, \dots, Z_n temos que

$$\langle \alpha(Z_i, Z_j), \nabla_{Z_k}^\perp \xi \rangle = \langle A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i, Z_j \rangle = \langle \lambda_{ki} Z_i, Z_j \rangle = \lambda_{ki} \langle Z_i, Z_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \lambda_{ki}, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Segue-se do fato que $\xi \in L^\perp \subset \{\eta\}^\perp$ e aplicando a equação de Codazzi a Z_k e Z_i temos

$$(\nabla_{Z_i} A^\xi)(Z_k, \xi) - (\nabla_{Z_k} A^\xi)(Z_i, \xi) = \epsilon \langle \eta, \xi \rangle (Z_k \wedge Z_i) T = 0,$$

isto é,

$$\nabla_{Z_i} A_\xi Z_k - A_\xi \nabla_{Z_i} Z_k - A_{\nabla_{Z_i}^\perp \xi} Z_k = \nabla_{Z_k} A_\xi Z_i - A_\xi \nabla_{Z_k} Z_i - A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i.$$

Como $A_\xi = 0$ temos que

$$A_{\nabla_{Z_i}^\perp \xi} Z_k = A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i \Rightarrow \lambda_{ik} Z_k = \lambda_{ki} Z_i \Rightarrow \lambda_{ik} = 0, \text{ se } i \neq k.$$

Portanto,

$$\langle \alpha(Z_i, Z_i), \nabla_{Z_k}^\perp \xi \rangle = \langle A_{\nabla_{Z_k}^\perp \xi} Z_i, Z_i \rangle = \langle A_{\nabla_{Z_i}^\perp \xi} Z_k, Z_i \rangle = \lambda_{ik} \langle Z_k, Z_i \rangle = 0, \text{ se } i \neq k.$$

3. Redução de Codimensão

Finalmente, a hipótese $\nabla^\perp H \in L$ e o acima implica que

$$\langle \alpha(Z_i, Z_i), \nabla_{Z_i}^\perp \xi \rangle = n \langle H, \nabla_{Z_i}^\perp \xi \rangle = 0.$$

Da equação acima temos que $\langle \alpha(X, Y), \nabla_Z^\perp \xi \rangle = 0$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in L^\perp = N_1^\perp \cap \{\eta\}^\perp$. Temos que $\nabla_Z^\perp \xi \in N_1^\perp$, e como $\xi \in \{\eta\}^\perp$ temos que $\langle \xi, \eta \rangle = 0$, donde obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_Z^\perp \eta \rangle &= 0 \\ \langle \nabla_Z^\perp \xi, \eta \rangle &= -\langle \xi, \nabla_Z^\perp \eta \rangle \\ &= -\langle \xi, \alpha_f(X, T) \rangle \\ &= -\langle A_\xi X, T \rangle = 0, \end{aligned}$$

pois $\xi \in N_1^\perp$. Assim, $\nabla_Z^\perp \xi \in \{\eta\}^\perp$. Logo, $\nabla_Z^\perp \xi \in N_1^\perp \cap \{\eta\}^\perp = L^\perp$. O que mostra que L^\perp é paralelo, e conseqüentemente, L também é paralelo. E portanto, $\nabla^\perp N_1 \subset L$. \square

O Teorema que enunciaremos a seguir, que omitimos a prova, tem apenas a finalidade de se aplicado para provarmos o Teorema Principal desta subseção.

Lema 3.2.3 ([16], Teorema 4). *Seja M^2 uma superfície com vetor curvatura média paralelo em uma variedade N com curvatura seccional constante. Então ou M^2 é uma superfície mínima de uma hipersuperfície umbílica de N ou M^2 encontra-se em uma subvariedade umbílica tridimensional de N com curvatura média constante.*

Teorema 3.2.4 (Alencar-do Carmo-Tribuzy). *Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, $n \geq 5$, uma superfície com vetor curvatura média paralelo não nulo. Então, uma das seguintes possibilidades é verdadeira:*

- (i) *f é uma superfície mínima de uma hipersuperfície umbílica de um slice $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t\}$.*
- (ii) *f é uma superfície com curvatura média constante em uma subvariedade tridimensional umbílica ou uma totalmente geodésica de um slice $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t\}$.*
- (iii) *$f(M^2)$ está contida em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^m \times \mathbb{R}$, $m \leq 4$, de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Uma vez que o vetor curvatura média H é paralelo e não nulo, a função $\mu := \|H\|^2$ em M^2 é uma constante não nula em M^2 . Suponhamos primeiro que $A_H = \mu I$ em todo ponto de M^2 . Afirmamos que o campo de vetores T se anula identicamente. Assumamos o contrário, então existe um subconjunto aberto U , onde $T \neq 0$. Escolha um

3. Redução de Codimensão

campo de vetores unitários X em U ortogonal a T . Então

$$\langle \alpha(X, T), H \rangle = \langle A_H X, T \rangle = \langle \mu I X, T \rangle = \langle \mu X, T \rangle = \mu \langle X, T \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Pela equação de Codazzi (1.27) temos

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_T^\perp \alpha)(X, X) - (\nabla_X^\perp \alpha)(T, X), H \rangle &= \langle \epsilon \langle T, X \rangle \langle X, T \rangle - \epsilon \langle X, X \rangle \langle T, T \rangle \eta, H \rangle \\ &= \langle -\epsilon \|X\|^2 \|T\|^2 \eta, H \rangle \\ &= -\epsilon \|T\|^2 \langle \eta, H \rangle. \end{aligned}$$

Afirmação: $\langle (\nabla_T^\perp \alpha)(X, X) - (\nabla_X^\perp \alpha)(T, X), H \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_T^\perp \alpha)(X, X) - (\nabla_X^\perp \alpha)(T, X), H \rangle &= \langle \nabla_T^\perp \alpha(X, X), H \rangle - \langle \alpha(\nabla_T X, X), H \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_T X), H \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_T^\perp \alpha(T, X), H \rangle + \langle \alpha(\nabla_X T, X), H \rangle + \langle \alpha(T, \nabla_X X), H \rangle. \end{aligned}$$

- De (3.3) temos

$$\begin{aligned} X \langle \alpha(X, T), H \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \alpha(X, T), H \rangle + \langle \alpha(X, T), \nabla_X^\perp H \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \alpha(X, T), H \rangle = 0. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \langle \alpha(X, X), H \rangle &= \langle A_H X, X \rangle = \mu \langle X, X \rangle = \mu \Rightarrow T \langle \alpha(X, X), H \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \alpha(X, X), H \rangle + \langle \alpha(X, X), \nabla_X^\perp H \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \alpha(X, X), H \rangle = 0. \end{aligned}$$

- $\langle \alpha(\nabla_T X, X), H \rangle = \langle A_H \nabla_T X, X \rangle = \mu \langle \nabla_T X, X \rangle = 0$. Pois como $\langle X, X \rangle = 1 \Rightarrow 2 \langle \nabla_T X, X \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_T X, X \rangle = 0$.

•

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\nabla_X T, X), H \rangle + \langle \alpha(T, \nabla_X X), H \rangle &= \langle A_H \nabla_X T, X \rangle + \langle A_H \nabla_X X, T \rangle \\ &= \mu \langle \nabla_X T, X \rangle + \mu \langle \nabla_X X, T \rangle \\ &= \mu (\langle \nabla_X T, X \rangle + \langle \nabla_X X, T \rangle) \\ &= \mu \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

pois $\langle X, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_X T, X \rangle + \langle \nabla_X X, T \rangle = 0$. Isto mostra a nossa afirmação.

3. Redução de Codimensão

Portanto $\langle \eta, H \rangle$ se anula em U , e conseqüentemente ,

$$\begin{aligned} 0 = T\langle \eta, H \rangle &= \langle \nabla_T^\perp \eta, H \rangle + \langle \eta, \nabla_T^\perp H \rangle \\ &\stackrel{(1.16)}{=} \langle -\alpha(T, T), H \rangle = -\langle A_H T, T \rangle = -\langle \mu I T, T \rangle = -\mu \langle T, T \rangle = -\mu \|T\|^2. \end{aligned}$$

Como μ é uma constante não nula, segue que $T = 0$ em U , o que é uma contradição, o que prova a nossa afirmação.

Portanto, se $A_H = \mu I$ em todo ponto de M^2 , então $f(M^2)$ está contida em uma slice $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \{t\}$ de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$, e qualquer uma das possibilidades (i) ou (ii) é verdade pelo Lema 3.2.3.

Assuma agora que $A_H \neq \mu I$ em um subconjunto aberto V de M^2 . Segue-se da equação de Ricci que,

$$R^\perp(X, Y)H = \alpha(X, A_H Y) - \alpha(A_H X, Y).$$

Por outro lado, uma vez que H é paralelo temos que

$$R^\perp(X, Y)H = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp H - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp H - \nabla_{[X, Y]}^\perp H = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\alpha(X, A_H Y) = \alpha(A_H X, Y),$$

o que implica que $[A_H, A_\zeta] = 0$ para qualquer $x \in M^2$ e cada vetor normal $\zeta \in N_x M$. Então o fato que A_H tem autovalores distintos em V implica que os autovetores de A_H também são autovetores de A_ζ para qualquer $\zeta \in N_x M, x \in V$. Portanto todos os operadores de forma são diagonalizáveis simultaneamente em qualquer $x \in V$, o qual implica que f tem um fibrado normal flat em V pela equação de Ricci (1.28).

Afirmção: O primeiro espaço normal N_1 de f tem no máximo dimensão 2 em qualquer $x \in V$.

Sjam $N_1 = \{\alpha(X, Y); X, Y \in T_x M\}$ e $\{X_1, X_2\}$ uma base de $T_x M$. Então escrevendo $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$ e $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2$, temos

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) &= a_1 b_1 \alpha(X_1, X_1) + a_1 b_2 \alpha(X_1, X_2) + a_2 b_1 \alpha(X_2, X_1) + a_2 b_2 \alpha(X_2, X_2) \\ &= a\alpha(X_1, X_1) + b\alpha(X_1, X_2) + c\alpha(X_2, X_2). \end{aligned}$$

Logo, $\{\alpha(X_1, X_1), \alpha(X_1, X_2), \alpha(X_2, X_2)\}$ é base de N_1 . Mostraremos agora que $\alpha(X_1, X_2) = 0$. Se $\{X_1, X_2\}$ for base que diagonaliza A_ξ , temos que equação de Ricci que

$$\begin{aligned} \alpha(X_1, A_\xi^f X_2) &= \alpha(X_1, \lambda_2 X_2) = \lambda_2 \alpha(X_1, X_2). \\ \alpha(A_\xi^f X_1, X_2) &= \alpha(\lambda_1 X_1, X_2) = \lambda_1 \alpha(X_1, X_2) \end{aligned}$$

3. Redução de Codimensão

Subtraindo as equações temos que $(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha(X_1, X_2) = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ temos que $\alpha(X_1, X_2) = 0$. Isto mostra que $\dim N_1 \leq 2$.

Seja $W \subset V$ um conjunto aberto, onde $L = N_1 + \text{span}\{\eta\}$ tem dimensão constante $\ell \leq 3$. Segue do Lema 3.2.1 e do teorema 3.2.2 que $f(W)$ encontra-se em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^{2+l-1} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$. Pela analiticidade de f (ver a observação abaixo), concluímos que $f(M^2) \subset \mathbb{Q}_\epsilon^{2+l-1} \times \mathbb{R}$. \square

Observação 3.2.5 ([1], observação 1). *Como o vetor curvatura média de nossa imersão é paralelo, a própria imersão é analítica; isso significa que as funções de duas variáveis reais que definem localmente a aplicação $x : M^2 \rightarrow \mathbb{E}_\epsilon^n \times \mathbb{R}$ são funções analíticas reais (Ver, C.B. Morrey Jr. Sobre a analiticidade das soluções de sistemas elípticos analíticos não lineares de equações diferenciais parciais, American J. of Math. 80 (1958), 198-237). Tal função satisfaz um princípio da continuação analítica (Ver J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1969, Capítulo IX (2.4.2)) que tem a seguinte consequência: Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo, e seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma aplicação analítica real em V . Seja $U \subset V$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Se $f \equiv 0$ em U então $f \equiv 0$ em V . Assim, uma aplicação analítica não pode se anular em qualquer conjunto aberto a menos que seja identicamente zero.*

Corolário 3.2.6. *Qualquer superfície $f : M^2 \rightarrow \mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}, \epsilon \in \{-1, 1\}$ na classe \mathcal{A} com vetor curvatura média paralelo é uma superfície de rotação em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^n \times \mathbb{R}, m \leq 4$ sobre uma curva em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^s \times \mathbb{R}, s \leq 3$.*

Demonstração. Seja X um campo de vetores ortogonais a T . Pelo Teorema 2.2.3, a fim de provar que f é uma superfície de rotação é suficiente mostrar que $\nabla_X^\perp \alpha(X, X) = 0$. Nós seguimos essencialmente a prova de [[1], proposição 2]. Uma vez que o campo vetorial curvatura média

$$H = \frac{1}{2}(\alpha_f(X, X) + \|T\|^{-2}\alpha_f(T, T))$$

é paralelo na conexão normal, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_X^\perp H &= \nabla_X^\perp \left(\frac{1}{2}(\alpha_f(X, X) + \|T\|^{-2}\alpha_f(T, T)) \right) \\ &\Rightarrow \nabla_X^\perp \alpha_f(X, X) = -\nabla_X^\perp (\|T\|^{-2}\alpha_f(T, T)) \\ &= -X(\|T\|^{-2})\alpha_f(T, T) - \|T\|^{-2}\nabla_X^\perp \alpha_f(T, T). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $X(\|T\|^{-2}) = \nabla_X^\perp \alpha_f(T, T) = 0$. Uma vez que f está na classe \mathcal{A} , temos de (2.8) que

$$\langle \nabla_T T, X \rangle = 0 = \langle \nabla_X T, T \rangle.$$

3. Redução de Codimensão

Disso segue também que $\langle \nabla_T X, T \rangle = 0$. De fato, $0 = T\langle X, T \rangle = \langle \nabla_T X, T \rangle + \langle X, \nabla_T T \rangle$. Conseqüentemente,

$$X(\|T\|^{-2}) = \frac{X(1)\langle T, T \rangle - X\langle T, T \rangle}{\|T\|^4} = \frac{-\langle \nabla_X T, T \rangle + \langle T, \nabla_X T \rangle}{\|T\|^4} = \frac{-2\langle \nabla_X T, T \rangle}{\|T\|^4} = 0.$$

Agora, pela equação de Codazzi (1.19), temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha_f)(T, T) - (\nabla_T^\perp \alpha_f)(X, T) &= \epsilon \langle X, T \rangle \langle T, T \rangle \eta - \epsilon \langle T, T \rangle \langle X, T \rangle \eta = 0 \\ \Rightarrow (\nabla_X^\perp \alpha_f)(T, T) &= (\nabla_T^\perp \alpha_f)(X, T). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha_f)(T, T) &= \nabla_X^\perp \alpha_f(T, T) - \alpha_f(\nabla_X T, T) - \alpha_f(T, \nabla_X T) \\ &= \nabla_X^\perp \alpha_f(T, T) - 2\alpha_f(\nabla_X T, T) \\ \Rightarrow \nabla_X^\perp \alpha_f(T, T) &= (\nabla_X^\perp \alpha_f)(T, T) + 2\alpha_f(\nabla_X T, T), \end{aligned}$$

e,

$$(\nabla_T^\perp \alpha_f)(X, T) = \nabla_T^\perp \alpha_f(X, T) - \alpha_f(\nabla_T X, T) - \alpha_f(X, \nabla_T T).$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp \alpha_f(T, T) &= (\nabla_X^\perp \alpha_f)(T, T) + 2\alpha_f(\nabla_X T, T) = (\nabla_X^\perp \alpha_f)(T, T) \\ &= (\nabla_T^\perp \alpha_f)(X, T) = \nabla_T^\perp \alpha_f(X, T) - \alpha_f(\nabla_T X, T) - \alpha_f(X, \nabla_T T) = 0. \end{aligned}$$

Onde acima, usamos que,

$$\alpha_f(\nabla_X T, T) = \alpha_f(X, T) = \alpha_f(\nabla_T X, T) = \alpha_f(X, \nabla_T T) = 0.$$

De fato, pelo item (iii) do Teorema 2.2.3, temos que $\alpha_f(X, Y) = \langle X, Y \rangle \xi$, portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_f(\nabla_X T, T) &= \langle \nabla_X T, T \rangle \xi = 0, \\ \alpha_f(X, T) &= \langle X, T \rangle \xi = 0, \\ \alpha_f(\nabla_T X, T) &= \langle \nabla_T X, T \rangle \xi = 0, \\ \alpha_f(X, \nabla_T T) &= \langle X, \nabla_T T \rangle \xi = 0. \end{aligned}$$

Que $f(M^2)$ está contida em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{Q}_\epsilon^m \times \mathbb{R}$, $m \leq 4$, e portanto, o fato de que sua curva de perfil encontra-se em uma subvariedade totalmente

3. Redução de Codimensão

geodésica $Q_\epsilon^s \times \mathbb{R}$, $s \leq 3$, segue-se do Teorema 3.2.4.

□

Capítulo 4

Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Neste capítulo provaremos o principal resultado deste trabalho. Mostraremos que as subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ são todas difeomorfas a esferas, com exceção de um único caso, onde ela é difeomorfa a \mathbb{R}^m . Veremos também que, a menos de isometrias do espaço ambiente, elas vêm em uma família a dois parâmetros de subvariedades de rotação cuja codimensão substancial é um ou dois, cuja curva perfil é uma curva em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, respectivamente. Além disso, obtemos parametrizações explícitas de todas essas subvariedades. Antes da demonstração do resultado, iremos demonstrar alguns lemas técnicos.

4.1 Resultados Auxiliares

Lema 4.1.1. *A aplicação $\Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ dada por $\Phi(x, t) = e^t x$ possui as seguintes propriedades:*

- (i) *é um difeomorfismo conforme;*
- (ii) *Se $T : \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ é uma aplicação ortogonal, então $\tilde{T} = \Phi^{-1} \circ T \circ \Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ é uma isometria que fixa \mathbb{R} pontualmente;*
- (iii) *Se $T : \mathbb{R}^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ é uma homotetia de razão λ , isto é, $Tx = \lambda x$, então $\tilde{T} = \Phi^{-1} \circ T \circ \Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ é uma isometria que fixa \mathbb{S}^{m+1} pontualmente e corresponde a uma translação ao longo de \mathbb{R} ;*
- (iv) *preserva subvariedade umbílica, ou seja, se $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ é uma imersão umbílica, então $\Phi \circ f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ também é uma imersão umbílica.*

Demonstração. (i) Para ver que Φ é um difeomorfismo, basta observar que Φ é um homeomorfismo diferenciável, cuja inversa $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ definida por $\Phi^{-1}(y) = \left(\frac{y}{\|y\|}, \ln\|y\| \right)$, é diferenciável.

4. Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Mostremos agora que Φ é conforme. Dado $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+2}) \in \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$, seja $\xi_i(x_i, t) = e^t x_i, i \in \{1, \dots, m+2\}$. Então $d\xi_i = e^t dx_i + e^t x_i dt = e^t(dx_i + x_i dt)$. Assim,

$$\begin{aligned} d\xi^2 &= \sum_{i=1}^{m+2} (d\xi_i)^2 = e^{2t} \left((dx_1)^2 + 2x_1 dx_1 dt + x_1^2 dt^2 + (dx_2)^2 + 2x_2 dx_2 dt + x_2^2 dt^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (dx_{m+2})^2 + 2x_{m+2} dx_{m+2} dt + x_{m+2}^2 dt^2 \right) \\ &= e^{2t} \left((dx_1)^2 + \dots + (dx_{m+2})^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{m+2} x_i dx_i \right) dt + (x_1^2 + \dots + x_{m+2}^2) dt^2 \right) \\ &= e^{2t} (dx^2 + dt^2). \end{aligned}$$

Onde dx^2 é a métrica de \mathbb{S}^{m+1} e dt^2 é a métrica de \mathbb{R} . Portanto, Φ é conforme.

(ii) Dado $(x, t) \in \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$, e usando o fato que T é ortogonal, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x, t) &= \Phi^{-1} \circ (T(e^t x)) \\ &= \left(\frac{T(e^t x)}{\|T(e^t x)\|}, \ln \|T(e^t x)\| \right) \\ &= (T(x), \ln \|e^t x\|) \\ &= (T(x), \ln e^t + \ln \|x\|) \\ &= (T(x), t). \end{aligned}$$

Assim, segue da proposição 1.4.5 que \tilde{T} é uma isometria que fixa \mathbb{R} pontualmente.

(iii) Se T for uma homotetia de razão λ , isto é, $Tx = \lambda x$, então um cálculo similar ao que fizemos anteriormente no item (ii) obtemos $\tilde{T}(x, t) = (x, \ln(\lambda^2) + t)$.

(iv) Suponhamos $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica umbílica, isto é, existe $\omega \in N_x^f M$ tal que $\alpha_f(X, Y) = \langle X, Y \rangle \omega$ e sejam $\Phi : \overline{M} \rightarrow \widetilde{M}$ um difeomorfismo conforme, e $\hat{f} = \Phi \circ f$. Queremos mostrar que \hat{f} é umbílica, isto é, que existe $\zeta \in N_x^{\hat{f}} M$ tal que $\alpha_{\hat{f}}(X, Y) = \langle X, Y \rangle \zeta$. Como a segunda forma fundamental de \hat{f} e f estão relacionadas por

$$\alpha_{\hat{f}}(X, Y) = \Phi_* \alpha_f(X, Y) - \frac{1}{\varphi} \langle X, Y \rangle \Phi_*(\text{grad} \varphi)^\perp,$$

e usando a hipótese de f ser umbílica, temos

$$\begin{aligned}\alpha_{\hat{f}}(X, Y) &= \Phi_*\alpha_f(X, Y) - \frac{1}{\varphi}\langle X, Y \rangle \Phi_*(\text{grad}\varphi)^\perp \\ &= \Phi_*\langle X, Y \rangle \omega - \frac{1}{\varphi}\Phi_*\langle X, Y \rangle (\text{grad}\varphi)^\perp \\ &= \langle X, Y \rangle \left(\Phi_*(\omega - \frac{1}{\varphi}(\text{grad}\varphi)^\perp) \right) \\ &= \langle X, Y \rangle \zeta,\end{aligned}$$

onde $\zeta = \Phi_*(\omega - \frac{1}{\varphi}(\text{grad}\varphi)^\perp)$ e $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$ é o fator conforme de Φ .

Portanto, \hat{f} é umbílica. Em particular, pelo item (i), a aplicação $\Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ dada por $\Phi(x, t) = e^t x$ preserva subvariedade umbílica. \square

Consideremos agora o seguinte conjunto

$$\mathcal{J} = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : (p-1)^2 \leq q < p^2\}.$$

Para cada $(p, q) \in \mathcal{J}$, seja $J_{p,q} = (-\sqrt{p-\sqrt{q}}, \sqrt{p-\sqrt{q}})$ e defina $h_{p,q} : \bar{J}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_{p,q}(s) = \sqrt{p-s^2 + \sqrt{(p-s^2)^2 - q}}.$$

Seja $Y_{p,q} : \mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ e $Z_{p,q} : \mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ dadas por

$$Y_{p,q}(x, s) = \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2}h_{p,q}(s)}, \log h_{p,q}(s) \right),$$

e, para $q \neq 0$,

$$Z_{p,q}(x, s) = \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2q}} h_{p,q}(s), \log \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right).$$

Então vale o seguinte lema

Lema 4.1.2. *Valem as seguintes afirmações*

(i) *A aplicação $\psi : \mathcal{J} \rightarrow (0, \infty) \times [0, \infty)$ dada por*

$$\psi(p, q) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{p^2 - q}, \sqrt{q - (p-1)^2} \right)$$

é um homeomorfismo;

(ii) As aplicações $Y_{p,q}$ e $Z_{p,q}$ estão bem definidas;

(iii) $Z_{p,q} = \Psi \circ Y_{p,q}$, onde $\Psi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ a isometria definida por $\Psi(y, s) = (Ay, -s + \log \sqrt{q})$, com A dada por

$$A = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1-p & \sqrt{q-(1-p)^2} \\ \sqrt{q-(1-p)^2} & -(1-p) \end{pmatrix}.$$

Demonstração. (i) Seja $\sigma : (0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{J}$ dada por

$$\sigma(u, v) = \left(\frac{1}{2}(2u^2 + 2v^2 + 1), \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2 \right).$$

Primeiro vamos mostrar que σ realmente aplica $(0, \infty) \times [0, \infty)$ em \mathcal{J} . Sejam $\sigma_1(u, v) = \frac{1}{2}(2u^2 + 2v^2 + 1)$ e $\sigma_2(u, v) = \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2$. Queremos mostrar que $(\sigma_1 - 1)^2 \leq \sigma_2 < \sigma_1^2$. Perceba que

$$\begin{aligned} v \geq 0 &\Leftrightarrow -2v^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2u^2 - 2v^2 - 1 + 1 \leq -2u^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - (2u^2 + 2v^2 + 1) + 1 \leq \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(2u^2 + 2v^2 + 1) - 1 \right)^2 \leq \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2. \end{aligned}$$

Isto mostra a primeira parte da desigualdade, ou seja, $(\sigma_1 - 1)^2 \leq \sigma_2$. Para a outra parte, temos

$$\begin{aligned} u > 0 &\Leftrightarrow -2u^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2 < \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\sigma_2 < \sigma_1^2$. Além disso, ψ e σ são contínuas. Vamos mostrar que σ é a

inversa de ψ , concluindo que ψ é uma bijeção. De fato,

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ \sigma)(u, v) &= \psi(\sigma(u, v)) \\
 &= \psi\left(\frac{1}{2}(2u^2 + 2v^2 + 1), \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2\right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - \frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 + 2u^2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(2u^2 + 2v^2 + 1)^2 - 2u^2 - \left(\frac{1}{2}(2u^2 + 2v^2 + 1) - 1\right)^2}\right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2u^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2v^2}\right) = (u, v).
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 (\sigma \circ \psi)(p, q) &= \sigma(\psi(p, q)) \\
 &= \sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{p^2 - q}), \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{q - (p - 1)^2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{2}{4}(p^2 - q) + 2 \cdot \frac{2}{4}(q - (p - 1)^2) + 1\right), \frac{1}{4}(2p)^2 - 2 \cdot \frac{2}{4}(p^2 - q)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}(p^2 - q + q - p^2 + 2p - 1 + 1), p^2 - p^2 + q\right) \\
 &= (p, q).
 \end{aligned}$$

Portanto, ψ é um homeomorfismo.

(ii) Vamos mostrar que $Y_{p,q}$ e $Z_{p,q}$ realmente aplica $\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}$ em $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$. Seja $(x, s) \in \mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}$. Então para $Y_{p,q}$ temos,

$$\begin{aligned}
 &s^2 \|x\|^2 + \frac{2}{4} \left(h_{p,q} + \frac{1-p}{h_{p,q}}\right)^2 + \frac{q - (p-1)^2}{2h_{p,q}^2} \\
 &= s^2 + \frac{1}{2} \left(h_{p,q}^2 + 2(1-p) + \frac{(1-p)^2}{h_{p,q}^2}\right) + \frac{q - (p-1)^2}{2h_{p,q}^2} \\
 &= s^2 + \frac{h_{p,q}^2}{2} + \frac{q}{2h_{p,q}^2} + 1 - p \\
 &= s^2 + \frac{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}}{2} + \frac{q}{2(p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q})} + 1 - p \\
 &= \frac{2s^2}{2} + \frac{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}}{2} + \frac{q(p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q})}{2q} + \frac{2 - 2p}{2} \\
 &= \frac{\cancel{2s^2} - \cancel{2s^2} + \cancel{2p} - \cancel{2p} + 2}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

Analogamente, para $Z_{p,q}$ temos,

$$\begin{aligned}
 & s^2 \|x\|^2 + \frac{2}{4} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q} + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}} \right)^2 + \frac{q - (1-p)^2}{2q} h_{p,q}^2 \\
 = & s^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{(1-p)^2}{q} h_{p,q}^2 + 2(1-p) + \frac{q}{h_{p,q}^2} \right) + \frac{q - (1-p)^2}{2q} h_{p,q}^2 \\
 = & s^2 + \frac{(1-p)^2 h_{p,q}^2}{2q} + \frac{q}{2h_{p,q}^2} + \frac{q h_{p,q}^2 - (1-p)^2 h_{p,q}^2}{2q} + 1 - p \\
 = & s^2 + \frac{\cancel{(1-p)^2 h_{p,q}^2} + q h_{p,q}^2 - \cancel{(1-p)^2 h_{p,q}^2}}{2q} + \frac{q}{2h_{p,q}^2} + 1 - p \\
 = & s^2 + \frac{q h_{p,q}^2}{2q} + \frac{q}{2h_{p,q}^2} + 1 - p \\
 = & s^2 + \frac{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}}{2} + \frac{q}{2(p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q})} + 1 - p \\
 = & \frac{2s^2}{2} + \frac{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}}{2} + \frac{q(p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q})}{2q} + \frac{2 - 2p}{2} \\
 = & \frac{\cancel{2s^2} - \cancel{2s^2} + \cancel{2p} - \cancel{2p} + 2}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

(iii) Mostremos agora que $Z_{p,q} = \Psi \circ Y_{p,q}$. Seja $y = (y_1, \dots, y_{m+2}) \in \mathbb{S}^{m+1}$. Então podemos escrever Ψ , como $\Psi(y, s) = (y_1, \dots, y_m, B(y_{m+1}, y_{m+2}), -s + \log \sqrt{q})$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \Psi(Y_{p,q}(x, s)) &= \Psi \left(\left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)}, \log h_{p,q}(s) \right) \right) \\
 &= \left(sx, B \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)} \right), -\log h_{p,q}(s) + \log \sqrt{q} \right) \\
 &= \left(sx, B \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)} \right), \log \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right).
 \end{aligned}$$

Agora, basta mostrar que,

$$B \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2q}} h_{p,q}(s) \right).$$

De fato,

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{1-p}{\sqrt{q}} & \frac{\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{q}} \\ \frac{\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{q}} & -\frac{(1-p)}{\sqrt{q}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right) \\ \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)} \end{array} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{array}{c} \frac{1-p}{\sqrt{q}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right) \right) + \frac{q-(1-p)^2}{\sqrt{2qh_{p,q}(s)}} \\ \frac{\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{q}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right) \right) + \frac{(p-1)\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2qh_{p,q}(s)}} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}(1-p)^2}{qh_{p,q}(s)} + \frac{q\sqrt{q}-\sqrt{q}(1-p)^2}{qh_{p,q}(s)} \right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) - \frac{(p-1)\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{2qh_{p,q}(s)}} + \frac{(p-1)\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{2qh_{p,q}(s)}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right) \\ \frac{\sqrt{q-(1-p)^2}}{\sqrt{2q}} h_{p,q}(s) \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

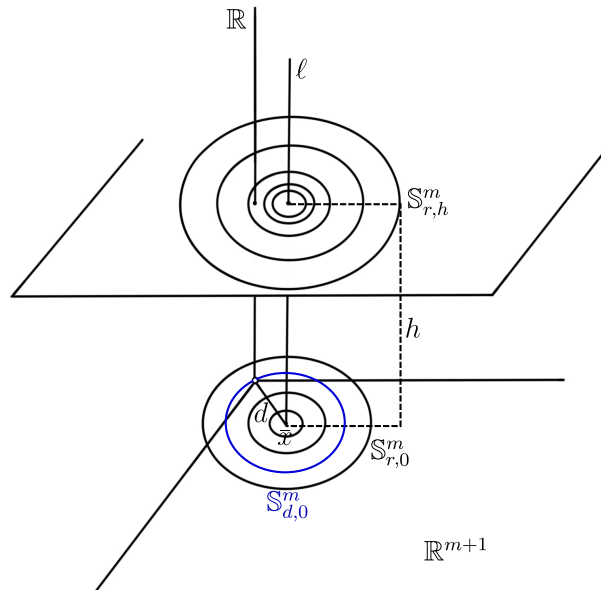
□

4.2 A classificação das umbílicas de $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$

Para um dado inteiro $m \geq 2$, seja $\Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ o difeomorfismo conforme dado por $\Phi(x, t) = e^t x$. Escolha uma semi-reta $\ell := \{\bar{x}\} \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^{m+2} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}$ com $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Seja $M_{r,h}^m = \Phi^{-1}(\mathbb{S}_{r,h}^m)$ a imagem por Φ^{-1} da esfera m -dimensional $\mathbb{S}_{r,h}^m$ em \mathbb{R}^{m+2} de raio r centrado em ℓ que se encontra no hiperplano afim através de (\bar{x}, h) ortogonal a ℓ , com a origem removida se $h = 0$ e $r = d := \|\bar{x}\|$.

Uma vez que transformações ortogonais de \mathbb{R}^{m+2} correspondem, sob o difeomorfismo Φ , a isometrias de $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ fixando pontualmente o fator \mathbb{R} , e homotetias de \mathbb{R}^{m+2} correspondem, a translações ao longo de \mathbb{R} (ver lema 4.1.1), podemos assumir que $\bar{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Na figura (4.1) abaixo temos uma interpretação da construção que acabamos de descrever.

Figura 4.1: Interpretação geométrica de $\Phi(M_{r,h}^m) = \mathbb{S}_{r,h}^m$.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2022.

Lema 4.2.1. Para $(r, h) = \psi(p, q)$ temos

$$M_{r,h}^m = \begin{cases} Y_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) \cup Z_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}), & \text{se } (r, h) \neq (d, 0), \\ Y_{1,0}(\mathbb{S}^{m-1} \times (-1, 1)), & \text{se } (r, h) = (d, 0). \end{cases}$$

Onde $\psi(p, q)$ é a aplicação definida no item (i) do Lema 4.1.2

Demonstração. Discutiremos a prova para $(r, h) \neq (d, 0)$, o caso $(r, h) = (d, 0)$ (ou seja, $(p, q) = (1, 0)$) é similar. Seja $\Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ o difeomorfismo conforme dado por $\Phi(x, t) = e^t x$.

Afirmção 1:

$$\begin{aligned} (\Phi \circ Y_{p,q})(x, s) &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2}(h_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) + (\bar{x}, h), \\ (\Phi \circ Z_{p,q})(x, s) &= \left(s\bar{h}_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{h}_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) + (\bar{x}, h). \end{aligned}$$

De fato, calculemos $\Phi \circ Y_{p,q}$ e $\Phi \circ Z_{p,q}$.

$$\begin{aligned} (\Phi \circ Y_{p,q})(x, s) &= \Phi \left(\left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2}h_{p,q}(s)}, \log h_{p,q}(s) \right) \right) \\ &= e^{\log h_{p,q}(s)} \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2}h_{p,q}(s)} \right) \\ &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}^2(s) + 1 - p \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{h_{p,q}(s)} \right) \\ &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}^2(s) - p \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q-(p-1)^2} \right) \\ &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q-(p-1)^2} \right) \\ &= \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) + (\bar{x}, h). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 (\Phi \circ Z_{p,q})(x, s) &= \Phi \left(\left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2q}} h_{p,q}(s), \log \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right) \right) \\
 &= e^{\log \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)}} \left(sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2q}} h_{p,q}(s) \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1-p + \frac{q}{h_{p,q}^2(s)} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} sx, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{q}{h_{p,q}^2(s)} - p \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q-(p-1)^2} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} sx, \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{h}_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) + \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q-(1-p)^2} \right) \\
 &= \left(s\bar{h}_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} (\bar{h}_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) + (\bar{x}, h),
 \end{aligned}$$

em que $0 \in \mathbb{R}^m$, e $\bar{h}_{p,q}(s) = \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{p,q}^2(s) &= \frac{q}{h_{p,q}^2(s)} \\
 &= \frac{q}{p-s^2 + \sqrt{(p-s^2)^2 - q}} \cdot \frac{p-s^2 - \sqrt{(p-s^2)^2 - q}}{p-s^2 - \sqrt{(p-s^2)^2 - q}} \\
 &= \frac{q(p-s^2 - \sqrt{(p-s^2)^2 - q})}{(p-s^2)^2 - ((p-s^2)^2 - q)} = p-s^2 - \sqrt{(p-s^2)^2 - q},
 \end{aligned}$$

Assim, $\bar{h}_{p,q}(s) = \sqrt{p-s^2 - \sqrt{(p-s^2)^2 - q}}$ ✓.

Agora, note que,

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(sh_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) \right\|^2 &= s^2 h_{p,q}^2(s) + \frac{(h_{p,q}^2(s) - p)^2}{2} \\
 &= s^2(p-s^2 + \sqrt{(p-s^2)^2 - q}) + \frac{\left(p-s^2 + \sqrt{(p-s^2)^2 - q} - p \right)^2}{2} \\
 &= -s^4 + ps^2 + s^2 \sqrt{(p-s^2)^2 - q} + \frac{s^4 - 2s^2 \sqrt{(p-s^2)^2 - q} + p^2 - 2ps^2 + s^4 - p}{2} \\
 &= \cancel{-s^4} + \cancel{ps^2} + s^2 \sqrt{(p-s^2)^2 - q} + \cancel{s^4} - s^2 \sqrt{(p-s^2)^2 - q} - \cancel{ps^2} + \frac{p^2 - q}{2} = \frac{p^2 - q}{2}
 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
 \left\| \left(s\bar{h}_{p,q}(s)x, \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{h}_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) \right\|^2 &= s^2\bar{h}_{p,q}^2(s) + \frac{(\bar{h}_{p,q}^2(s) - p)^2}{2} \\
 &= s^2(p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q}) + \frac{\left(p - s^2 - \sqrt{(p - s^2)^2 - q} - p \right)^2}{2} \\
 &= -s^4 + ps^2 - s^2\sqrt{(p - s^2)^2 - q} + \frac{s^4 + 2s^2\sqrt{(p - s^2)^2 - q} + p^2 - 2ps^2 + s^4 - p}{2} \\
 &= \cancel{-s^4} + \cancel{ps^2} - \cancel{s^2\sqrt{(p - s^2)^2 - q}} + \cancel{s^4} - \cancel{s^2\sqrt{(p - s^2)^2 - q}} - \cancel{ps^2} + \frac{p^2 - q}{2} = \frac{p^2 - q}{2}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, se $\mathbb{R}^{m+1} := \{x \in \mathbb{R}^{m+2}; x_{m+1} = 0\}$, mostramos que

$$\begin{aligned}
 (\Phi \circ Y_{p,q}) (\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) \cup (\Phi \circ Z_{p,q}) (\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) &\subset \\
 &\subset \left[\mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(0, 1, \sqrt{q - (1 - p)^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Agora, sejam $\beta : \bar{J}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\bar{\beta} : \bar{J}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\beta(s) = \left(sh_{p,q}(s), \frac{\sqrt{2}}{2}(h_{p,q}^2(s) - p) \right) \quad \text{e} \quad \bar{\beta}(s) = \left(s\bar{h}_{p,q}(s), \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{h}_{p,q}^2(s) - p) \right),$$

respectivamente.

Afirmação 2: $\beta(\bar{J}_{p,q}) \cup \bar{\beta}(\bar{J}_{p,q})$ é o círculo de raio $r = \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}}$ centrado na origem.

De fato, um cálculo semelhante ao que foi feito acima nos dá que

$$\left\| \left(sh_{p,q}(s), \frac{\sqrt{2}}{2}(h_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) \right\|^2 = \frac{p^2 - q}{2}.$$

Analogamente,

$$\left\| \left(s\bar{h}_{p,q}(s), \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{h}_{p,q}^2(s) - p), 0 \right) \right\|^2 = \frac{p^2 - q}{2}.$$

Isto mostra que $\beta(\bar{J}_{p,q}) \cup \bar{\beta}(\bar{J}_{p,q}) \subset \mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right)$.

4. Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Agora, vamos calcular o valor que β e $\bar{\beta}$ assume em 0 e nos extremos do intervalo $\bar{J}_{p,q}$.

$$\begin{aligned}
 \beta\left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\right) &= \left(-\sqrt{p-\sqrt{q}} \cdot h_{p,q}\left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h_{p,q}^2\left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\right) - p\right)\right) \\
 &= \left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\sqrt{\sqrt{q}}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{q}-p)\right) \\
 &= \left(-\sqrt{p\sqrt{q}-q}, \frac{\sqrt{q}-p}{\sqrt{2}}\right), \\
 \bar{\beta}\left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\right) &= \left(-\sqrt{p-\sqrt{q}} \cdot \bar{h}_{p,q}\left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{h}_{p,q}^2\left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\right) - p\right)\right) \\
 &= \left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}\sqrt{\sqrt{q}}, \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{q}-p)\right) \\
 &= \left(-\sqrt{p\sqrt{q}-q}, \frac{\sqrt{q}-p}{\sqrt{2}}\right).
 \end{aligned}$$

Analogamente, calculando o valor de β e $\bar{\beta}$ para o extremo $\sqrt{p-\sqrt{q}}$ e 0, temos

$$\begin{aligned}
 \beta\left(\sqrt{p-\sqrt{q}}\right) &= \left(\sqrt{p\sqrt{q}-q}, \frac{\sqrt{q}-p}{\sqrt{2}}\right), \\
 \bar{\beta}\left(\sqrt{p-\sqrt{q}}\right) &= \left(\sqrt{p\sqrt{q}-q}, \frac{\sqrt{q}-p}{\sqrt{2}}\right), \\
 \beta(0) &= \left(0 \cdot h_{p,q}(0), \frac{\sqrt{2}}{2}(h_{p,q}^2(0) - p)\right) = \left(0, \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right), \\
 \bar{\beta}(0) &= \left(0 \cdot \bar{h}_{p,q}(0), \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{h}_{p,q}^2(0) - p)\right) = \left(0, -\sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right).
 \end{aligned}$$

Note que nos extremos de $\bar{J}_{p,q}$, β e $\bar{\beta}$ coincidem, e em 0 os pontos são simétricos. Assim, segue da compacidade de $\mathbb{S}\left(0, \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right)$ e da continuidade de β e $\bar{\beta}$ que $\beta(\bar{J}_{p,q}) \cup \bar{\beta}(\bar{J}_{p,q}) = \mathbb{S}\left(0, \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right)$. \checkmark

Portanto, segue das afirmações acima que

$$\begin{aligned}
 (\Phi \circ Y_{p,q})\left(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}\right) \cup (\Phi \circ Z_{p,q})\left(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}\right) &= \\
 &= \left[\mathbb{S}\left(0, \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}\right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0, 1, \sqrt{q-(1-p)^2}\right)\right] = \mathbb{S}_{r,h}^m.
 \end{aligned}$$

onde $r = \sqrt{\frac{p^2-q}{2}}$. Agora, aplicando Φ^{-1} na igualdade acima, temos

$$M_{r,h}^m = \Phi^{-1}(\mathbb{S}_{r,h}^m) = Y_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) \cup Z_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}).$$

□

Proposição 4.2.2. *Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica umbílica. Sejam T e η , os campos de vetores definido em (1.14) e H o vetor curvatura média de f . Se T não se anula identicamente, então valem as seguintes afirmações:*

(i)

$$n\nabla_X^\perp H = -\langle X, T \rangle \eta, \quad \text{para cada } X \in \mathfrak{X}(M). \quad (4.1)$$

(ii) *Se H e η são linearmente dependentes, então f tem codimensão substancial em um subconjunto aberto $U \subset M^m$;*

(iii) *Se H e η não forem linearmente dependentes em todo ponto de U , então existe um subconjunto aberto $\tilde{U} \subset U$, tal que f tem codimensão substancial dois em \tilde{U} .*

Demonstração. (i) De fato, como f é umbílica temos $\alpha_f(X, Y) = n\langle X, Y \rangle H$, e que a equação de codazzi (1.27) é dada por

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) = \epsilon(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle) \eta.$$

Assim, segue que tomando $Y = Z$ unitários, X ortogonal a Y na equação de codazzi, obtemos que o lado direito é dado por $-\langle X, T \rangle \eta$. Note que no nosso caso ϵ é igual a 1. Como $\langle Y, Y \rangle = 1$, temos que $X\langle Y, Y \rangle = \langle \nabla_X Y, Y \rangle = 0$. Agora desenvolvendo o lado esquerdo da equação de codazzi obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Y) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Y) &= \nabla_X^\perp \alpha(Y, Y) - \alpha(\nabla_X Y, Y) - \alpha(Y, \nabla_X Y) \\ &\quad - \nabla_Y^\perp \alpha(X, Y) + \alpha(\nabla_Y X, Y) + \alpha(X, \nabla_Y Y) \\ &= \nabla_X^\perp (n\langle Y, Y \rangle H) - n\langle \nabla_X Y, Y \rangle H - n\langle Y, \nabla_X Y \rangle H \\ &\quad - \nabla_X^\perp (n\langle X, Y \rangle H) + n\langle \nabla_Y X, Y \rangle H + n\langle X, \nabla_Y Y \rangle H \\ &= nX(\langle Y, Y \rangle)H + n\langle Y, Y \rangle \nabla_X^\perp H - nY\langle X, Y \rangle H \\ &\quad - n\langle X, Y \rangle \nabla_Y^\perp H + n\langle \nabla_Y X, Y \rangle H + n\langle X, \nabla_Y Y \rangle H \\ &= nX(\langle Y, Y \rangle)H + n\|Y\|^2 \nabla_X^\perp H + nY\langle X, Y \rangle H \\ &= nX(\langle Y, Y \rangle)H + n\|Y\|^2 \nabla_X^\perp H = n\nabla_X^\perp H. \end{aligned}$$

Portanto, $n\nabla_X^\perp H = -\langle X, T \rangle \eta$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) Se T não se anula em algum ponto, ele não se anula em algum subconjunto aberto $U \subset M^m$. Uma vez que $\alpha_f(X, Y) = n\langle X, Y \rangle H$, temos $N_1 = \text{span}\{\alpha(X, Y)\} = \text{span}\{H\}$. Como H e η são linearmente dependentes, isto é, $H = \lambda\eta$, temos que $\text{span}\{H\} = \text{span}\{\eta\}$. Assim, o subfibrado $L = N_1 + \text{span}\{\eta\}$ de $N^f M$ é $L = \text{span}\{H\}$, que tem posto um. Vamos

mostrar agora que $\nabla_X^\perp N_1 \subset L$. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp kH &= k\nabla_X^\perp H + X(k)H \\ &= -\frac{k}{n}\langle X, T \rangle \eta + X(k)\lambda\eta \\ &= \left(-\frac{k}{n}\langle X, T \rangle \eta + X(k) \right) \eta \in \text{span}\{\eta\} = \text{span}\{H\} = L. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.2.1, f tem codimensão substancial um em U .

(iii) Se H e η não são linearmente dependentes em todos os pontos de U , então em um ponto, e portanto em um aberto \tilde{U} , H e η são linearmente independentes em \tilde{U} . Assim, $L = N_1 + \text{span}\{\eta\} = \text{span}\{H\} + \text{span}\{\eta\}$, tem posto dois em \tilde{U} . Com um cálculo semelhante ao do item anterior, concluímos que $\nabla_X^\perp N_1 \subset L$. Portanto, pelo Teorema 3.2.1, f tem codimensão substancial dois em \tilde{U} . \square

Observação 4.2.3. *Da proposição acima, temos que se a imersão $f : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ for totalmente geodésica, temos que $\alpha_f(X, Y) = 0$, conseqüentemente, temos $H = 0$. Então H e η são linearmente dependentes, e portanto, pelo item (ii) da proposição temos que f tem codimensão substancial um em $U \subset M^m$. Dessa forma, classificar as subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ de dimensão e codimensão arbitrária se reduz a classificação das hipersuperfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ que já foi feita por Van der Veken e Vrancker, em [15].*

Teorema 4.2.4 (Teorema de classificação das subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$). *A subvariedade $M_{r,h}^m$ é uma subvariedade umbílica completa de $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ para cada $r > 0$ e $h \geq 0$. Além disso, $M_{r,h}^m$ tem as seguintes propriedades:*

- (i) *é difeomorfa a \mathbb{S}^m se $(r, h) \neq (d, 0)$ e a \mathbb{R}^m se $(r, h) = (d, 0)$;*
- (ii) *está contida em uma hipersuperfície totalmente geodésica $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ se e somente, $h = 0$;*
- (iii) *$M_{r,0}^m$ é homotópica a 0 em $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ se $r < d$ e não homotópica a 0 se $r > d$;*
- (iv) *é uma subvariedade de rotação cujo perfil é uma curva em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$) se $h \neq 0$ (respectivamente, $h = 0$);*
- (v) *$M_{r,h}^m$ é congruente a $M_{r',h'}^m$ se e somente se, $(r, h) = (r', h')$.*

Reciprocamente, qualquer subvariedade umbílica não totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ com dimensão $m \geq 2$ é, a menos de uma isometria do espaço ambiente, um subconjunto aberto de um dos seguintes:

4. Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

- (a) *uma esfera pequena em $\mathbb{S}^n \times \{0\}$;*
- (b) *$M_{r,0}^m$ para algum $r > 0$ se $n = m$;*
- (c) *$M_{r,h}^m$ para algum $r > 0$ e $h \geq 0$ se $n = m + 1$;*
- (d) *$M_{r,h}^m$ em $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ totalmente geodésica para algum $r > 0$ e $h \geq 0$ se $n > m + 1$.*

Demonstração. Uma vez que $\Phi : \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$ dado por $\Phi(x, t) = e^t x$ é um difeomorfismo conforme, segue-se que $M_{r,h}^m = \Phi^{-1}(\mathbb{S}_{r,h}^m)$ é uma subvariedade umbílica de $\mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$, pois, pelo item (iv) do Lema 4.1.1 difeomorfismo conforme preserva subvariedades umbílicas.

(i) Se $(r, h) \neq (d, 0)$, então temos que \mathbb{S}^m é difeomorfa a $\mathbb{S}_{r,h}^m$. Como $M_{r,h}^m = \Phi^{-1}(\mathbb{S}_{r,h}^m)$ é difeomorfa a $\mathbb{S}_{r,h}^m$, segue que $M_{r,h}^m$ é difeomorfa a \mathbb{S}^m . Se $(r, h) = (d, 0)$, então temos que $\mathbb{S}_{d,0}^m \setminus \{0\}$ é difeomorfa a \mathbb{R}^m pela projeção estereográfica. Assim, $M_{d,0}^m = \Phi^{-1}(\mathbb{S}_{d,0}^m \setminus \{0\})$ é difeomorfa a \mathbb{R}^m .

(ii) Como as hipersuperfícies totalmente geodésicas $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ são as imagens por Φ^{-1} de hiperplanos em \mathbb{R}^{m+2} e como $\mathbb{S}_{r,h}^m$ está contido em um hiperplano se e somente se $h = 0$, a afirmação (ii) segue.

(iii) Temos que $\mathbb{S}_{r,0}^m$ é homotópica a zero em \mathbb{R}^{m+1} se $r < d$ e não homotópica a zero em \mathbb{R}^{m+1} se $r > d$. Temos que Φ preserva homotopia, pois é um homeomorfismo, então $M_{r,0}^m$ é homotópica a 0 em $\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ se $r < d$ e não homotópica a 0 se $r > d$.

(iv) Mostramos no Lema 4.2.1 que

$$M_{r,h}^m = \Phi^{-1}(\mathbb{S}_{r,h}^m) = Y_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}) \cup Z_{p,q}(\mathbb{S}^{m-1} \times \bar{J}_{p,q}).$$

Assim, segue da equação (2.10) que $Y_{p,q}$ e $Z_{p,q}$ são parametrizações de rotação, com curvas perfis dadas por

$$\gamma_1(s) = \left(s, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(h_{p,q}(s) + \frac{1-p}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2} h_{p,q}(s)}, \log h_{p,q}(s) \right),$$

$$\gamma_2(s) = \left(s, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p}{\sqrt{q}} h_{p,q}(s) + \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right), \frac{\sqrt{q - (p-1)^2}}{\sqrt{2} q} h_{p,q}(s), \log \frac{\sqrt{q}}{h_{p,q}(s)} \right), q \neq 0.$$

respectivamente. Fazendo um cálculo similar ao do item (ii) do Lema 4.1.2, verifica-se que $\|\gamma_1(s)\|^2 = \|\gamma_2(s)\|^2 = 1$. Um cálculo direto mostra que $\gamma_1(s)$ e $\gamma_2(s)$ coincidem nos

extremos do intervalo $\bar{J}_{p,q}$, ou seja,

$$\begin{aligned}\gamma_1(-\sqrt{p-\sqrt{q}}) &= \gamma_2(-\sqrt{p-\sqrt{q}}) \\ &= \left(-\sqrt{p-\sqrt{q}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p+\sqrt{q}}{\sqrt{\sqrt{q}}} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{q}}}, \log \sqrt{\sqrt{q}} \right), \\ \gamma_1(\sqrt{p-\sqrt{q}}) &= \gamma_2(\sqrt{p-\sqrt{q}}) \\ &= \left(\sqrt{p-\sqrt{q}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1-p+\sqrt{q}}{\sqrt{\sqrt{q}}} \right), \frac{\sqrt{q-(p-1)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{q}}}, \log \sqrt{\sqrt{q}} \right).\end{aligned}$$

Além disso, considerando Ψ a isometria dada como no item (iii) do Lema 4.1.2, com $I_m = I_2$, temos que $\gamma_2(s) = \Psi \circ \gamma_1(s)$. Portanto, concluímos que $M_{r,h}^m$ é uma subvariedade de rotação, cuja curva perfil é dada pela concatenação das curvas γ_1 e γ_2 , ou seja, pela curva

$$\gamma(s) := \begin{cases} \gamma_1\left(2s + \sqrt{p-\sqrt{q}}\right), & \text{se } -\sqrt{p-\sqrt{q}} \leq s \leq 0, \\ \gamma_2\left(2s - \sqrt{p-\sqrt{q}}\right), & \text{se } 0 \leq s \leq \sqrt{p-\sqrt{q}}. \end{cases}$$

Isto prova o item (iv).

(v) Uma vez que (p, q) e (r, h) estão relacionados pelo homeomorfismo ψ , mostraremos que $M_{p,q}^m$ é congruente a $M_{p',q'}^m$ se e somente se, $(p, q) = (p', q')$. Suponhamos que $M_{p,q}^m$ e $M_{p',q'}^m$ sejam congruentes, logo existe uma isometria $\phi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ tal que $M_{p',q'}^m = \phi(M_{p,q}^m)$. Por outro lado, pela Proposição (1.4.5), as isometrias de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ são do tipo $\phi_1 \times \phi_2$, em que $\phi_1 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma transformação ortogonal e $\phi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\phi_2(t) = \pm t + a$.

Note que $\Psi(M_{p,q}) = M_{p,q}$, ou seja, $\phi(M_{p,q}) = (\phi \circ \Psi)(M_{p,q})$, onde Ψ está definida no Lema (4.1.2). Dessa forma, se $\phi_2(t) = -t + a$, então podemos trocar ϕ por $\tilde{\phi} := \phi \circ \Psi$ de forma que $\tilde{\phi}_2 = \phi_2 \circ \Psi_2 = t + \tilde{a}$, em que $\tilde{a} = a - \ln \sqrt{q}$. Portanto podemos sempre supor que $\phi_2(t) = t + a$. Por outro lado,

$$\left(\Phi \circ \phi \circ \Phi^{-1} \right) \left(e^t x \right) = (\Phi \circ \phi)(x, t) = \Phi(Ax, t + a) = e^a (Ae^t x),$$

em que $A \in O(n)$. Como $\phi(M_{p,q}) = M_{p',q'}$, então

$$\begin{aligned}e^{ta} \cdot A \left[\mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, 1, \sqrt{q - (1-p)^2} \right) \right] = \\ \mathbb{S} \left(0, \sqrt{\frac{p'^2 - q'}{2}} \right) \cap \mathbb{R}^{m+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, 1, \sqrt{q' - (1-p')^2} \right)\end{aligned}$$

Das fórmula acimas deduzimos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} e^a \sqrt{\frac{p^2 - q}{2}} = \sqrt{\frac{p'^2 - q'}{2}}, \\ e^a A \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, \sqrt{q - (1 - p)^2}) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, \sqrt{q' - (1 - p')^2}), \\ A(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathbb{R}^{m+1}. \end{cases}$$

Por outro lado, $\mathbb{R}^{m+1} = \{x \in \mathbb{R}^{m+2} : x_{m+1} = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$. Assim, das duas últimas equações do sistema acima segue que

$$\begin{cases} e^a A(0, 1, 0) = (0, 1, 0), \\ e^a A(0, 0, \sqrt{q - (1 - p)^2}) = (0, 0, \sqrt{q' - (1 - p')^2}). \end{cases}$$

Logo $a = 0$, $A(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $A(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$, $\sqrt{q - (1 - p)^2} = \sqrt{q' - (1 - p')^2}$ e $\sqrt{p^2 - q} = \sqrt{p'^2 - q'}$. Portanto

$$q - p^2 - 1 + 2p = q' - p'^2 - 1 + 2p' \Rightarrow p = p' \Rightarrow q = q'.$$

Agora provaremos a recíproca. Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $m \geq 2$, uma imersão isométrica umbílica.

Afirmção: Se o campo vetorial T em (1.14) se anula identicamente, então $f : M^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, onde $f_2(x) = t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Em particular, $f(M^m) \subset \mathbb{S}^n \times \{t_0\}$. De fato, temos que $f_*(x)X = f_{1*}(x)X + f_{2*}(x)X$. Como o segundo fator de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é gerado por $\frac{\partial}{\partial t}$, temos $f_{2*}(x)X = \lambda \frac{\partial}{\partial t}$. Por outro lado, como $T = 0$, então $\frac{\partial}{\partial t} = \eta$ é normal a imersão. Daí, $\lambda = 0$. Portanto $f_{2*}(x)X = 0$ para todo $X \in T_x M^m$. Isto mostra que f_2 é constante em cada componente conexa de M . Isto mostra nossa afirmação. \checkmark

Como $f(M^m)$ é umbílica, e está contida em um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, temos pelo item (ii) da proposição 1.5.2, que a primeira possibilidade da recíproca ocorre.

Agora suponha que T não se anule em algum ponto e, portanto, em algum subconjunto aberto $U \subset M^n$. Basta provar que existem subconjuntos abertos $\tilde{U} \subset U$ e $V \subset \mathbb{S}^m$, $(p, q) \in \mathcal{J}$ e um intervalo $I \subset J_{p,q}$ tal que, a menos de isometria de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, temos $f(\tilde{U}) \subset Y_{p,q}(V \times I)$. Pois isso implica que $f(\tilde{U}) \subset M_{r,h}^h$ com $(r, h) = \psi(p, q)$, e portanto $(\Phi \circ f)(\tilde{U}) \subset \Phi(M_{r,h})^m = \mathbb{S}_{r,h}^m$. Uma vez que $\Phi \circ f$ é uma imersão umbílica em $\mathbb{R}^{m+2} \setminus \{0\}$, segue-se que $(\Phi \circ f)(M^m) \subset \mathbb{S}_{r,h}^m$, e portanto $f(M^m) \subset M_{r,h}^m$.

A partir de agora provaremos a existência dos abertos mencionados no parágrafo anterior. O aberto \tilde{U} existe em vista da Proposição 4.2.2, resta mostrar a existência de $V \subset \mathbb{S}^m$ e $I \subset J_{p,q}$.

Por outro lado, uma vez que f é umbílica, e que seu vetor curvatura média H é paralelo na conexão normal ao longo de $\{T\}^\perp$ por (4.1), o item (iii) do Teorema 2.2.3 é satisfeito.

Portanto f é uma subvariedade de rotação.

Resumindo, $f|_{\tilde{U}}$ é uma subvariedade de rotação, e pela proposição 4.2.2 tem codimensão substancial no máximo dois, com curva perfil em uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^s \times \mathbb{R}$, $s \leq 2$, onde $s = n + 1 - m$. Portanto podemos assumir que $n = m + 1$ e $s = 2$. Equivalentemente, em vista da última afirmação no Teorema 2.2.3 para $\epsilon = 1$, obtemos que $f|_{\tilde{U}}$ é dado por (2.1) em termos de uma imersão isométrica totalmente geodésica $g : V \subset \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{S}^{m+1}$ e uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, com $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$.

Com as notações como na proposição 2.1.2, temos por (2.4) e a umbilicidade de f que $A_{\phi_x(\zeta)}^{\tilde{f}}$ é um múltiplo do tensor identidade para cada $\zeta \in \gamma'(s)^\perp \cap \bar{\gamma}(s)^\perp$. Usando que $P_s(x) = \gamma_0(s)I$, segue de (1.19), (2.5), e (2.7) que

$$-\frac{\langle \tilde{g}, \phi_x(\zeta) \rangle}{\gamma_0(s)} = \frac{\langle \gamma''(s), \zeta \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \quad \text{para todo } \zeta \in \gamma'(s)^\perp \cap \bar{\gamma}(s)^\perp,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\langle \gamma_0(s)\gamma''(s), \zeta \rangle + \langle \varphi(s)\phi_x(e_0), \phi_x(\zeta) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \gamma_0(s)\gamma''(s), \zeta \rangle + \langle \varphi(s)e_0, \zeta \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \gamma_0(s)\gamma''(s) + \varphi(s)e_0, \zeta \rangle = 0 \quad \text{para todo } \zeta \in \gamma'(s)^\perp \cap \bar{\gamma}(s)^\perp = (\gamma'(s) + \bar{\gamma}(s))^\perp, \end{aligned}$$

onde $\tilde{g} = \phi_x(e_0)$ e $\varphi(s) = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$. Portanto, existem funções suaves $y = y(s)$ e $z = z(s)$ tais que

$$\gamma_0\gamma'' + \varphi e_0 = y\gamma' + z\bar{\gamma}. \quad (4.2)$$

Note que

$$\begin{aligned} \gamma_0\gamma'' &= (\gamma_0\gamma'', \gamma_0\gamma_1'', \gamma_0\gamma_2'', \gamma_0\gamma_3'') \\ &= (\gamma_0\gamma'', \gamma_0\gamma_1'', \gamma_0\gamma_2'', 0) + (0, 0, 0, \gamma_0\gamma_3'') \\ &= \gamma_0(\gamma_0'', \gamma_1'', \gamma_2'', 0) + \gamma_0\gamma_3''(0, 0, 0, 1) \\ &= \gamma_0\bar{\gamma}'' + \gamma_0\gamma_3''e_3. \end{aligned}$$

De forma análoga, temos $y\gamma' = y\bar{\gamma}' + y\gamma_3'e_3$. Assim, podemos escrever (4.2) como

$$\gamma_0\bar{\gamma}'' + \gamma_0\gamma_3''e_3 + \varphi e_0 = y\bar{\gamma}' + y\gamma_3'e_3 + z\bar{\gamma}. \quad (4.3)$$

Além disso, note que

$$\left. \begin{aligned}
 \langle \bar{\gamma}, \bar{\gamma} \rangle &= \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 0^2 = 1 & \text{(a)} \\
 \langle \bar{\gamma}', \bar{\gamma} \rangle &= 0 & \text{(b)} \\
 \langle \bar{\gamma}', \bar{\gamma}' \rangle &= -\langle \bar{\gamma}'', \bar{\gamma} \rangle & \text{(c)} \\
 \langle \bar{\gamma}', \bar{\gamma}' \rangle &= (\gamma_0')^2 + (\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 + (\gamma_3')^2 - (\gamma_3')^2 = \varphi - (\gamma_3')^2 & \text{(d)} \\
 \langle \bar{\gamma}'', \bar{\gamma}' \rangle &= \frac{1}{2}(\varphi' - 2\gamma_3'\gamma_3'') & \text{(e)}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Por outro lado, tomando o produto interno em ambos os lados de (4.3) com e_3 resulta em

$$\gamma_0\gamma_3'' = y\gamma_3'. \quad (4.5)$$

Agora, usando (4.4)-(a), (4.4)-(b) e tomando o produto interno em ambos os lados de (4.3) com $\bar{\gamma}$ obtemos

$$\begin{aligned}
 z &= \gamma_0\varphi + \gamma_0\langle \bar{\gamma}'', \bar{\gamma} \rangle \\
 &= \gamma_0(\varphi + \langle \bar{\gamma}'', \bar{\gamma} \rangle) \\
 &\stackrel{(4.4)-(c)}{=} \gamma_0(\varphi - \langle \bar{\gamma}', \bar{\gamma}' \rangle) \\
 &\stackrel{(4.4)-(d)}{=} \gamma_0(\varphi + (\gamma_3')^2 - \varphi) \\
 &= \gamma_0(\gamma_3')^2.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Analogamente, tomando o produto interno em ambos os lados de (4.3) com $\bar{\gamma}'$ e usando (4.4)-(b) temos

$$\begin{aligned}
 y\langle \bar{\gamma}', \bar{\gamma}' \rangle &= \gamma_0\langle \bar{\gamma}'', \bar{\gamma}' \rangle + \varphi\gamma_0' \\
 \stackrel{(4.4)-(d)-(e)}{\Rightarrow} y(\varphi - (\gamma_3')^2) &= \gamma_0\left(\frac{1}{2}(\varphi' - 2\gamma_3'\gamma_3'')\right) + \varphi\gamma_0' \\
 \Rightarrow y(\varphi - (\gamma_3')^2) &= \frac{\varphi'\gamma_0 - 2\gamma_0\gamma_3'\gamma_3'' + 2\varphi\gamma_0'}{2} \\
 \stackrel{(4.5)}{\Rightarrow} 2y(\varphi - (\gamma_3')^2) + 2y(\gamma_3')^2 &= \varphi'\gamma_0 + 2\varphi\gamma_0' \\
 \Rightarrow y = \frac{\gamma_0\varphi' + 2\varphi\gamma_0'}{2\varphi}.
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Portanto, substituindo (4.6) e (4.7) em (4.2), obtemos

$$2\varphi\gamma_0\gamma'' + 2\varphi^2e_0 - (\gamma_0\varphi' + 2\varphi\gamma_0')\gamma' - 2\varphi\gamma_0(\gamma_3')^2\bar{\gamma} = 0. \quad (4.8)$$

Tomando o produto interno em ambos os lados de (4.8) com e_3 resulta em

$$\gamma_3'' = \left(\frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \right) \gamma_3'.$$

Dividindo a equação acima por γ_3' e integrando temos

$$\begin{aligned} \int \frac{\gamma_3''}{\gamma_3'} ds &= \int \frac{\varphi'}{2\varphi} ds + \int \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} ds \\ \ln|\gamma_3'| &= \frac{1}{2} \ln|\varphi| + \ln|\gamma_0| + k \\ |\gamma_3'| &= e^{\ln|\varphi|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\ln|\gamma_0|} \cdot e^k \\ |\gamma_3'| &= e^k |\gamma_0| \sqrt{|\varphi|}. \end{aligned}$$

como $\varphi(s) = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$ é positivo, temos que

$$\gamma_3' = c\gamma_0\sqrt{\varphi} \quad \text{para algum } c \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Agora mostraremos que γ_0 não pode ser constante em I . Assumamos o contrário, digamos, que $\gamma_0 = a \in \mathbb{R}$. Podemos supor que γ está parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\varphi = 1$. Então $\gamma_3' = ac$ por (4.9), portanto $z = a^3c^2$ e $y = 0$ por (4.6) e (4.7). Com essas considerações, passamos a ter $\gamma'' = (0, \gamma_1'', \gamma_2'', 0)$, $\bar{\gamma} = (a, \gamma_1, \gamma_2, 0)$, e substituindo em (4.8) obtemos

$$\begin{aligned} 2a\gamma'' + 2e_0 - 2a^3c^2\bar{\gamma} &= 0 \\ \Rightarrow (2, 2a\gamma_1'', 2a\gamma_2'', 0) &= (2a^4c^2, 2a^3c^2\gamma_1, 2a^3c^2\gamma_2, 0). \end{aligned}$$

Assim, da igualdade acima temos que e_0 -componente é $c^2a^4 = 1$, e sempre que $1 \leq i \leq 2$ a e_i -componente é $\gamma_i'' = (\frac{1}{a^2})\gamma_i$. Dessa forma obtemos que $\gamma_i = a_i \exp(s/a) + b_i \exp(-s/a)$ para algum $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2$. Agora, substituindo em $1 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + (a_1e^{\frac{s}{a}} + b_1e^{-\frac{s}{a}})^2 + (a_2e^{\frac{s}{a}} + b_2e^{-\frac{s}{a}})^2 \\ &= a^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + (a_1^2 + a_2^2)e^{\frac{2s}{a}} + (b_1^2 + b_2^2)e^{-\frac{2s}{a}}. \end{aligned}$$

Fazendo $A = a_1^2 + a_2^2$, $B = b_1^2 + b_2^2$, $C = a^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 - 1$ e $m = e^{\frac{s}{a}}$, a equação acima se torna $Am^2 + Bm^{-2} + C = 0$, o que implica que $Am^4 + Cm^2 + B = 0$. Assim, devemos ter $A = B = C = 0$. Então $a_i = b_i = 0$ para $1 \leq i \leq 2$. Conseqüentemente, $a = \pm 1$, e $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Portanto $f|_{\bar{U}}$ é totalmente geodésica, o que contradiz nossa hipótese. Portanto, deve existir um intervalo aberto $J \subset I$ tal que $\gamma_0'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$, então podemos reparametrizar γ em J de modo que $\gamma_0(s) = s$ para todo $s \in J$.

Assim, passamos a ter

$$\begin{cases} \gamma = (s, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ \gamma' = (1, \gamma'_1, \gamma'_2, c s \sqrt{\varphi}) \\ \gamma'' = (0, \gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3) \\ \bar{\gamma} = (s, \gamma_1, \gamma_2, 0) \end{cases}, \quad (4.10)$$

que substituindo em (4.8) temos

$$(0, 2\varphi s \gamma''_1, 2\varphi s \gamma''_2, 2\varphi s \gamma''_3) + (2\varphi^2, 0, 0, 0) - (s\varphi' + 2\varphi, (s\varphi' + 2\varphi)\gamma'_1, (s\varphi' + 2\varphi)\gamma'_2, (s\varphi' + 2\varphi)\gamma'_3) + (-2\varphi^2 s^4 c^2, -2\varphi^2 s^4 c^2 \gamma_1, -2\varphi^2 s^4 c^2 \gamma_2, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Da igualdade acima obtemos que a e_0 -componente é $2\varphi^2 - s\varphi' - 2\varphi - 2\varphi^2 s^4 c^2 = 0$. Então obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} 2\varphi^2 - s\varphi' - 2\varphi - 2\varphi^2 s^4 c^2 = 0 &\Leftrightarrow s\varphi' + 2\varphi^2 s^4 c^2 - 2\varphi^2 + 2\varphi = 0 \\ \Leftrightarrow s\varphi' + 2(c^2 s^4 - 1)\varphi^2 + 2\varphi = 0 &\Leftrightarrow \frac{\varphi'}{2\varphi} + \left(c^2 s^3 - \frac{1}{s}\right)\varphi + \frac{1}{\varphi} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\varphi'}{\varphi^2} + \frac{2}{s\varphi} = -2c^2 s^3 + \frac{2}{s} &\Leftrightarrow -(\varphi^{-1})' + \frac{2}{s}\varphi^{-1} = -2c^2 s^3 + \frac{2}{s} \\ \stackrel{y=\varphi^{-1}}{\Leftrightarrow} y' - \frac{2}{s}y = 2c^2 s^3 - \frac{2}{s} &\Leftrightarrow \frac{y'}{s^2} - \frac{2y}{s^3} = 2c^2 s - \frac{2}{s^3} \\ \stackrel{w=\frac{y}{s^2}}{\Leftrightarrow} w' = 2c^2 s - \frac{2}{s^3} &\Leftrightarrow w = c^2 s^2 + \frac{1}{s^2} + c_2 \\ \Leftrightarrow y = c^2 s^4 + c_2 s^2 + 1 &\Leftrightarrow \varphi = \frac{1}{c^2 s^4 + c_2 s^2 + 1}, \text{ para algum } c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\varphi^{-1} = c^2 \left(s^4 + \frac{c_2}{c^2} s^2 + \frac{1}{c^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \varphi^{-1} = s^4 + \frac{c_2}{c^2} s^2 + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow b\varphi^{-1} = s^4 + as^2 + b,$$

onde $b = \frac{1}{c^2}$ e $a = \frac{c_2}{c^2}$. De forma equivalente, temos

$$\varphi(s) = \frac{b}{s^4 + as^2 + b} = \frac{b}{s^4 + 2s^2 \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b} = \frac{b}{(s^2 + \frac{a}{2})^2 - (\frac{a^2}{4} - b)}.$$

Pondo $p = -\frac{a}{2}$ e $q = \frac{a^2}{4} - b$ temos que $b = \frac{a^2}{4} - q = p^2 - q$. Portanto,

$$\varphi(s) = \frac{p^2 - q}{(s^2 - p)^2 - q}, \quad p^2 > q. \quad (4.11)$$

Segue-se então que a equação (4.9) se torna

$$\gamma'_3(s) = \frac{cs\sqrt{p^2 - q}}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} = \frac{cs\sqrt{b}}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} = \frac{cs\sqrt{\frac{1}{c^2}}}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} = \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}}. \quad (4.12)$$

Temos ainda que

$$\varphi'(s) = \frac{-4s(p^2 - q)(s^2 - p)}{((s^2 - p)^2 - q)^2}, \quad (4.13)$$

e tomando o produto interno em ambos os lados de (4.8) com $e_i, 1 \leq i \leq 2$, e usando (4.11), (4.12) e (4.13) obtemos que

$$\begin{aligned} 2s \cdot \frac{p^2 - q}{(s^2 - p)^2 - q} \gamma''_i - \left(-\frac{4s^2(p^2 - q)(s^2 - p)}{((s^2 - p)^2 - q)^2} + \frac{2(p^2 - q)}{(s^2 - p)^2 - q} \right) \gamma'_i - \frac{2s^3(p^2 - q)}{((s^2 - p)^2 - q)^2} \gamma_i &= 0 \\ \Leftrightarrow s((s^2 - p)^2 - q) \gamma''_i + (2s^2(s^2 - p) - ((s^2 - p)^2 - q)) \gamma'_i - s^3 \gamma_i &= 0 \\ \Leftrightarrow s((s^2 - p)^2 - q) \gamma''_i + (s^4 - p^2 + q) \gamma'_i - s^3 \gamma_i &= 0, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

Discutiremos a solução da EDO acima no Lema 4.2.5, que garante a existência do intervalo $I \subset J_{p,q}$. Ainda do Lema 4.2.5 e (4.12) obtemos que $\gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = \left(s, \frac{\sqrt{2}}{2} (h(s) + \frac{1-p}{h(s)} u) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{q - (1-p)^2}}{h(s)} v, C \pm \log h(s) \right),$$

onde $u := (\cos \theta, \sin \theta)$ e $v := (-\sin \theta, \cos \theta)$, $C \in \mathbb{R}$, e $f|_{\tilde{U}}$ pode ser parametrizada por $Y : \mathbb{S}^{m-1} \times I \rightarrow \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ dada por

$$Y(X, s) = (sX, \gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)).$$

Seja A uma isometria linear de $\mathbb{R}^{m+2} \supset \mathbb{S}^{m+1} \times \mathbb{R}$ definida por

$$A(e_i) = \begin{cases} e_i, & \text{se } i \in \{1, \dots, m\}; \\ \cos \theta e_m + \sin \theta e_{m+1}, & \text{se } i = m; \\ \mp \sin \theta e_m + \cos \theta e_{m+1}, & \text{se } i = m + 1; \\ \pm e_{m+2}, & \text{se } i = m + 2; \end{cases}$$

Então $A^{-1}Y(X, s) - he_{m+2} = Y_{p,q}(X, s)$.

□

Lema 4.2.5. *Seja $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 2$, uma solução linearmente independente da EDO*

$$s((s^2 - p)^2 - q) \gamma''_i + (s^4 - p^2 + q) \gamma'_i - s^3 \gamma_i = 0, \quad p^2 > q, \quad (4.14)$$

4. Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, onde $(s^2 - p)^2 - q > 0$. Assuma que $s^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ para todo $s \in I$. Então $(p, q) \in \mathcal{J}$, $I \subset J_{p,q}$ e existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{2}(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \left(h(s) + \frac{1-p}{h(s)} \right) (\cos \theta, \sin \theta) \pm \frac{\sqrt{q - (1-p)^2}}{h(s)} (-\sin \theta, \cos \theta), \quad (4.15)$$

onde $h(s) = \sqrt{p - s^2 + \sqrt{(p - s^2)^2 - q}}$.

Demonstração. Seja F uma primitiva de $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(s) = \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}}.$$

Afirmção 1: As funções

$$\rho_+ := \exp \circ F \quad \text{e} \quad \rho_- := \exp \circ (-F)$$

formam uma base para o espaço de soluções de (4.14) em I .

Para provarmos isso, basta mostrar que cada uma das funções $\rho_+(s)$ e $\rho_-(s)$ satisfaz a EDO (4.14).

Seja $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\rho(s) = e^{\pm \int \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} ds}.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \pm \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} \cdot e^{\pm \int \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} ds} = \pm \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} \rho(s), \\ \rho''(s) &= \pm \frac{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q} - s \frac{(s^2 - p)2s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}}}{(s^2 - p)^2 - q} \rho(s) + \left(\pm \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} \cdot \left[\pm \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} \rho(s) \right] \right) \\ &= \frac{1}{(s^2 - p)^2 - q} \left(\pm \frac{(s^2 - p)^2 - q - (s^2 - p)2s^2}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} + s^2 \right) \rho(s) \\ &= \frac{1}{(s^2 - p)^2 - q} \left(\pm \frac{-s^4 + p^2 - q}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} + s^2 \right) \rho(s) \\ &= \frac{1}{(s^2 - p)^2 - q} \left(\mp \frac{s^4 - p^2 + q}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} + s^2 \right) \rho(s). \end{aligned}$$

Assim, substituindo $\rho'(s)$ e $\rho''(s)$ em (4.14), temos

$$\begin{aligned}
 s((s^2 - p)^2 - q)\rho'' + (s^4 - p^2 + q)\rho' - s^3\rho &= \\
 s((s^2 - p)^2 - q)\frac{1}{(s^2 - p)^2 - q} \left(\mp \frac{s^4 - p^2 + q}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} + s^2 \right) \rho(s) & \\
 + (s^4 - p^2 + q) \left[\pm \frac{s}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} \rho(s) \right] - s^3\rho(s) & \\
 = \left[\mp \frac{s^5 - sp^2 + sq}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} + \cancel{s^3} \pm \frac{s^5 - sp^2 + sq}{\sqrt{(s^2 - p)^2 - q}} - \cancel{s^3} \right] \rho(s) = 0. &
 \end{aligned}$$

Isso mostra as funções $\rho_+(s)$ e $\rho_-(s)$ satisfaz a EDO (4.14), como queríamos. Portanto, existem $a_i, b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 2$, tais que

$$\gamma_i = a_i\rho_+ + b_i\rho_-, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Substituindo em $s^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ obtemos que

$$\begin{aligned}
 s^2 + (a_1 \exp(F) + b_1 \exp(-F))^2 + (a_2 \exp(F) + b_2 \exp(-F))^2 &= 1 \\
 \Rightarrow s^2 + a_1^2 \exp(2F) + 2a_1b_1 + b_1^2 \exp(-2F) + a_2^2 \exp(2F) + 2a_2b_2 + b_2^2 \exp(-2F) &= 1 \\
 \Rightarrow s^2 + (a_1^2 + a_2^2) \exp(2F) + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 - 1 + (b_1^2 + b_2^2) \exp(-2F) &= 0 \\
 \Rightarrow s^2 + A \exp(2F) + B + C \exp(-2F) = 0, \quad \text{para todo } s \in I, & \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

onde $A = a_1^2 + a_2^2, B = 2(a_1b_1 + a_2b_2) - 1$ e $C = b_1^2 + b_2^2$.

Dessa forma, se $u := s^2 - p$ e $E := -B - p$, então por (4.16) temos

$$Ae^{\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du} + Ce^{-\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du} = -u + E. \tag{4.17}$$

Afirmção 2: $q \geq 0$.

De fato, se $q < 0$, então a integral $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du = \ln(u + \sqrt{u^2 - q})$ está definida em todo o conjunto dos números reais (ver as contas da Subseção A.1.2). Dessa forma, por

(4.17), temos

$$\begin{aligned}
 & A \left(u + \sqrt{u^2 - q} \right) + C \left(u + \sqrt{u^2 - q} \right)^{-1} = -u + E \Rightarrow \\
 & \Rightarrow A \left(u + \sqrt{u^2 - q} \right)^2 + C = (-u + E) \cdot \left(u + \sqrt{u^2 - q} \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow A \left(2u^2 + 2u\sqrt{u^2 - q} - q \right) + C = -u^2 + Eu + (E - u)\sqrt{u^2 - q} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow (2A + 1)u^2 - Eu - Aq + C = [E - (2A + 1)u] \cdot \sqrt{u^2 - q} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow (2A + 1)^2 u^4 - 2(2A + 1)Eu^3 + [2(2A + 1)(C - Aq) + E^2] u^2 - 2(C - Aq)Eu + \\
 & \quad + (C - Aq)^2 = [E^2 - 2(2A + 1)Eu + (2A + 1)^2 u^2] \cdot (u^2 - q) \\
 & \Rightarrow \cancel{(2A + 1)^2 u^4} - \cancel{2(2A + 1)Eu^3} + [2(2A + 1)(C - Aq) + E^2] u^2 - 2(C - Aq)Eu + \\
 & \quad + (C - Aq)^2 = \cancel{(2A + 1)^2 u^4} - \cancel{2(2A + 1)Eu^3} + [E^2 - (2A + 1)^2 q] u^2 + 2(2A + 1)Equ - E^2 q.
 \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{cases} 2(C - Aq) = -(2A + 1)q; \\ (C - Aq)E = -(2A + 1)Eq; \\ (C - Aq)^2 = -E^2 q. \end{cases}$$

Dessa forma, se $E = 0$, então $C = Aq$ e $2A + 1 = 0$, o que contradiz o fato de $A \geq 0$. Já se $E \neq 0$, então $C - Aq = -(2A + 1)q$ e $2(C - Aq) = -(2A + 1)q$, o que também é uma contradição.

Afirmiação 3: $p > 0$.

De fato, se $p \leq 0$, então $u = s^2 - p$ é sempre positivo. Além disso, no intervalo (\sqrt{q}, ∞) $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du = \ln \left(u + \sqrt{u^2 - q} \right)$ (ver as contas da Subseção A.1.2. Assim, podemos chegar a uma contradição utilizando as mesmas contas da Afirmiação 1.

Sabendo que $q \geq 0$ e que $p > 0$, seja γ uma solução do sistema (4.14).

Caso $q = 0$: Neste caso, para $u > 0$ e pela equação (4.17), temos

$$Au + Cu^{-1} = -u + E \Leftrightarrow (A + 1)u^2 - Eu + C = 0 \Leftrightarrow C = 0, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad A = -1$$

Mas $A = a_1^2 + a_2^2$, logo u não pode ser maior do que 0, ou seja, $s^2 - p < 0$. Portanto devemos tomar s apenas dentro do intervalo $(-\sqrt{p}, \sqrt{p})$.

Para $s \in (-\sqrt{p}, \sqrt{p})$, sabemos que $u < 0$ e, pela equação (4.17),

$$-Au^{-1} - Cu = -u + E \Rightarrow (C - 1)u^2 + Eu + A = 0 \Rightarrow A = 0, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad C = 1.$$

4. Subvariedades umbílicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Assim, $(a_1, a_2) = (0, 0)$, $p = -B = -1$, e existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $(b_1, b_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Portanto $\gamma_1 = \cos \theta \sqrt{1 - s^2}$, $\gamma_2 = \sin \theta \sqrt{1 - s^2}$, e, portanto, a afirmação é verdadeira neste caso. Assim, utilizando a Tabela A.2, a função γ é dada por

$$\gamma(s) = \left(s, \sqrt{1 - s^2}(\cos \theta, \sin \theta), \pm \ln \sqrt{1 - s^2} + d \right),$$

e o intervalo de definição de γ deve estar contido em $(0, 1)$. Neste caso, $(p, q) = (1, 0) \in \mathcal{J}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{h_{1,0}(s)} + b_1 h_{1,0}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \sqrt{2(1 - s^2)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(1 - 1) \cos \theta \mp \sqrt{0 - (1 - 1)^2} \sin \theta \right] \cdot \left[\sqrt{2(1 - s^2)} \right]^{-1} = \\ &= \cos \theta \sqrt{1 - s^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, $\frac{a_2}{h_{1,0}(s)} + b_2 h_{1,0}(s) = \sin \theta \sqrt{1 - s^2}$. Portanto a solução do sistema (4.14) é da forma dita no enunciado.

caso $q > 0$:

Neste caso, por um argumento análogo ao feito na Afirmação 3, não podemos ter u positivo na equação (4.17). Assim, para $u < 0$, $s \in (0, \sqrt{p - \sqrt{q}})$ e, pela equação (4.17), vale a igualdade

$$\begin{aligned} A \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right)^{-1} + C \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right) &= -u + E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A + C \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right)^2 &= (E - u) \left(\sqrt{u^2 - q} - u \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A + C \left(2u^2 - q - 2u\sqrt{u^2 - q} \right) &= u^2 - Eu - (u - E)\sqrt{u^2 - q} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2C - 1)u^2 + Eu + A - qC &= [(2C - 1)u + E]\sqrt{u^2 - q} \Rightarrow \\ \Rightarrow (2C - 1)^2 u^4 + 2(2C - 1)Eu^3 + [E^2 + 2(2C - 1)(A - qC)] u^2 &+ 2(A - qC)Eu + \\ + (A - qC)^2 &= [(2C - 1)^2 u^2 + 2(2C - 1)Eu + E^2] \cdot (u^2 - q) = \\ = (2C - 1)^{-2} u^4 + 2(2C - 1)Eu^3 + [E^2 - q(2C - 1)^2] u^2 - 2q(2C - 1)Eu - qE^2 \\ \therefore \left\{ \begin{array}{l} 2(2C - 1)(A - qC) = -q(2C - 1)^2, \\ (A - qC)E = -q(2C - 1)E, \\ (A - qC)^2 = -qE^2. \end{array} \right\} \stackrel{q \geq 0}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} E = 0 \\ A = qC \\ C = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{q}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Como $E = 0$ então, pela definição de E , valem as igualdades

$$-B - p = 0 \Rightarrow 1 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) - p = 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = \frac{1}{2} - \frac{p}{2}.$$

Portanto,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \frac{1}{2}(1-p), \quad a_1^2 + a_2^2 = \frac{q}{2} \quad \text{e} \quad b_1^2 + b_2^2 = \frac{1}{2}.$$

Seja θ tal que $(b_1, b_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta, \sin \theta)$ e definamos $u := (\cos \theta, \sin \theta)$ e $v := (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Assim, podemos escrever primeira equação como

$$a_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + a_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta = \frac{1}{2}(1-p) \Rightarrow \langle (a_1, a_2), u \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-p). \quad (4.18)$$

De (4.18) temos,

$$\begin{aligned} \langle (a_1, a_2), u \rangle^2 &= \frac{1}{2}(1-p)^2 \\ \Rightarrow (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta)^2 &= \frac{1}{2}(1-p)^2 \\ \Rightarrow a_1^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta &= \frac{1}{2}(1-p)^2 - 2a_1 a_2 \sin \theta \cos \theta \\ \Rightarrow a_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1-p)^2 + a_1^2 \sin^2 \theta - 2a_1 a_2 \sin \theta \cos \theta + a_2^2 \cos^2 \theta \\ \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 &= \frac{1}{2}(1-p)^2 + (a_1(-\sin \theta) + a_2 \cos \theta)^2 \\ \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 &= \frac{1}{2}(1-p)^2 + \langle (a_1, a_2), v \rangle^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{q}{2} = \frac{1}{2}(1-p)^2 + \langle (a_1, a_2), v \rangle^2 \Rightarrow \begin{cases} (1-p)^2 \leq q \text{ e} \\ \langle (a_1, a_2), v \rangle = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q - (1-p)^2}. \end{cases}$$

Portanto, $(p, q) \in \mathcal{J}$. Além disso, de (4.18) e do que obtemos acima temos,

$$\begin{cases} -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{q - (1-p)^2} \\ a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-p). \end{cases} \quad (4.19)$$

Multiplicando a primeira e a segunda equação de (4.19) por $-\sin \theta$ e $\cos \theta$ respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left((1-p) \cos \theta \mp \sqrt{q - (1-p)^2} \sin \theta \right), \\ a_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left((1-p) \sin \theta \pm \sqrt{q - (1-p)^2} \sin \theta \right), \end{aligned}$$

e (4.15) segue. □

Referências Bibliográficas

- [1] Hilário Alencar, Manfredo do Carmo, and Renato Tribuzy, *A Hopf theorem for ambient spaces of dimensions higher than three*, J. Differential Geom. **84** (2010), no. 1, 1–17. MR 2629507
- [2] Giovanni Calvaruso, Daniel Kowalczyk, and Joeri Van der Veken, *On extrinsically symmetric hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Aust. Math. Soc. **82** (2010), no. 3, 390–400. MR 2737951
- [3] César Camacho and Alcides Lins Neto, *Teoria geométrica das folheações*, vol. 9, Instituto de matematica pura e aplicada, 1979.
- [4] Sheila Carter and Alan West, *Partial tubes about immersed manifolds*, Geom. Dedicata **54** (1995), no. 2, 145–169. MR 1326059
- [5] Marcos Dajczer and Ruy Tojeiro, *Submanifold theory*, Universitext, Springer, New York, 2019, Beyond an introduction. MR 3969932
- [6] Franki Dillen, Johan Fastenakels, and Joeri Van der Veken, *Rotation hypersurfaces in $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* , Note Mat. **29** (2009), no. 1, 41–54. MR 2779904
- [7] Manfredo P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides. [Euclid Project], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015, Fifth edition, second printing of [MR0651516]. MR 3791495
- [8] Joseph Erbacher, *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geometry **5** (1971), 333–340. MR 288701
- [9] Wilhelm P. A. Klingenberg, *Riemannian geometry*, second ed., De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 1, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995. MR 1330918
- [10] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013. MR 2954043
- [11] Bruno Mendonça and Ruy Tojeiro, *Umbilical submanifolds of $S^n \times \mathbb{R}$* , Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 400–428. MR 3176148

- [12] Rabah Souam and Eric Toubiana, *Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), no. 3, 673–704. MR 2507258
- [13] Rabah Souam and Joeri Van der Veken, *Totally umbilical hypersurfaces of manifolds admitting a unit Killing field*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 7, 3609–3626. MR 2901226
- [14] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. IV*, second ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979. MR 532833
- [15] Joeri Van der Veken and Luc Vrancken, *Parallel and semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **39** (2008), no. 3, 355–370. MR 2473852
- [16] Shing Tung Yau, *Submanifolds with constant mean curvature. I, II*, Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366; *ibid.* 97 (1975), 76–100. MR 370443

Apêndice A

Alguns Resultados utilizados

A.1 Resultados de Cálculo

A.1.1 O conjunto $I := \{s \in \mathbb{R} : (p - s^2)^2 - q > 0\}$

Sejam p e q números reais para os quais o conjunto $I := \{s \in \mathbb{R} : (p - s^2)^2 - q > 0\}$ é não vazio. A tabela abaixo nos dá o conjunto I de acordo com os p e q escolhidos.

Tabela A.1: Conjunto I

I	Condições sobre p e q
\mathbb{R}	$p \leq 0$ e $p^2 > q$, ou $q < 0$
$(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}}) \cup (\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty)$	$p^2 \leq q$
$(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}}) \cup (-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}}) \cup (\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty)$	$p > 0$ e $0 \leq q < p^2$

A.1.2 Uma integral

Vamos determinar uma primitiva para $s \mapsto \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}}$.

Caso $q = 0$.

$$\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds \stackrel{u:=s^2-p}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{|u|} du = \begin{cases} \frac{\ln(s^2-p)}{2}, & \text{se } p \leq 0; \\ \frac{\ln(s^2-p)}{2}, & \text{se } p > 0 \text{ e } s \notin (-\sqrt{p}, \sqrt{p}) \\ -\frac{\ln(p-s^2)}{2}, & \text{se } p > 0 \text{ e } s \in (-\sqrt{p}, \sqrt{p}). \end{cases}$$

Caso $q < 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds &\stackrel{u:=s^2-p}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du \stackrel{c:=\sqrt{-q}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + c^2}} du = \\ &\stackrel{\tan \theta := \frac{u}{c}}{=} \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta) = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{u^2 + c^2} + u) \\ \therefore \int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds &= \frac{1}{2} \ln \left(s^2 - p + \sqrt{(p-s^2)^2 - q} \right). \end{aligned}$$

Caso $q > 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds &\stackrel{u:=s^2-p}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - q}} du \stackrel{c:=\sqrt{q}}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} du = \\ \stackrel{\cos \theta := \frac{c}{|u|} \text{ e } \theta \cdot u > 0}{=} \frac{1}{2} \int \sec \theta d\theta &= \frac{1}{2} \ln(\sec \theta + \tan \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left(u + \sqrt{u^2 - c^2} \right), & \text{se } u > c; \\ \frac{1}{2} \ln \left(-u - \sqrt{u^2 - c^2} \right), & \text{se } u < -c. \end{cases} \end{aligned}$$

Observação. Para $u < -c$,

$$\begin{aligned} -u - \sqrt{u^2 - c^2} &= \frac{c^2}{-u + \sqrt{u^2 - c^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left(-u - \sqrt{u^2 - c^2} \right) &= \ln \left(\frac{c^2}{-u + \sqrt{u^2 - c^2}} \right) = -\ln \left(-u + \sqrt{u^2 - c^2} \right) + \ln \left(c^2 \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} du = \ln \left(-u - \sqrt{u^2 - c^2} \right) = -\ln \left(-u + \sqrt{u^2 - c^2} \right) + K.$$

Portanto,

$$\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left(s^2 - p + \sqrt{(p-s^2)^2 - q} \right), & \text{se } p \leq 0, \text{ ou se } p > 0 \text{ e} \\ & s^2 > p + \sqrt{q}; \\ -\frac{1}{2} \ln \left(p - s^2 + \sqrt{(p-s^2)^2 - q} \right), & \text{se } p > 0 \text{ e } s^2 < p - \sqrt{q}. \end{cases}$$

Podemos resumir os cálculos através da seguinte tabela

Tabela A.2: Integral

$\int \frac{s}{\sqrt{(p-s^2)^2 - q}} ds$	Domínio da primitiva	Condições sobre p e q
$\frac{1}{2} \ln \left(s^2 - p + \sqrt{(p-s^2)^2 - q} \right)$	\mathbb{R}	$p \leq 0$ e $p^2 > q$, ou $q < 0$
	$\left(-\infty, -\sqrt{p + \sqrt{q}} \right) \cup$ $\left(\sqrt{p + \sqrt{q}}, \infty \right)$	$p^2 \leq q$, ou $p > 0$ e $0 \leq q < p^2$
$-\frac{1}{2} \ln \left(p - s^2 + \sqrt{(p-s^2)^2 - q} \right)$	$\left(-\sqrt{p - \sqrt{q}}, \sqrt{p - \sqrt{q}} \right)$	$p > 0$ e $0 \leq q < p^2$