UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ CARLOS MEDEIROS DOS SANTOS

CONCEITUAÇÃO, MANIPULAÇÃO E APLICAÇÃO DE FRAÇÕES PELO MÉTODO DE SINGAPURA

MACEIÓ
2019

JOSÉ CARLOS MEDEIROS DOS SANTOS

CONCEITUAÇÃO, MANIPULAÇÃO E APLICAÇÃO DE FRAÇÕES PELO MÉTODO DE SINGAPURA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

MACEIÓ

2019

Folha de catalogação

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S237c Santos, José Carlos Medeiros dos.
Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método Singapura / José Carlos Medeiros dos Santos. – 2022.
146 f. : il. color.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 145-146.

1. Frações. 2. Método de Singapura. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Operações com frações. 5. Resolução de problemas. I. Título.

CDU: 511.13: 371.13

Folha de Aprovação

JOSÉ CARLOS MEDEIROS DOS SANTOS

CONCEITUAÇÃO, MANIPULAÇÃO E APLICAÇÕES DE FRAÇÕES PELO MÉTODO DE SINGAPURA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 17 de maio de 2019.

Banca Examinadora:

Márcio H. Batista da Silva

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL (Presidente)

Abraão Mendes

Prof. Dr. Abraão Mendes do Rego Gouveia - UFAL

José Ivan da S. Santos

Prof. Dr. José Ivan da Silva Santos – IFAL

MACEIÓ – 2019

DEDICATÓRIA

Dedico a minha esposa Fernanda,
meus filhos Júlia Luiza e José Maycon.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. Agradeço também a minha família que sempre me apoiou, aos professores e colegas de turma que sempre estiveram muito próximo nesta jornada, que foi sem dúvida muito proveitosa.

Epígrafe

Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o permanente apelo das aplicações às mais variadas atividades humanas, das mais simples na vida cotidiana, às mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da Matemática.

PCN’s, 1998

RESUMO

Fração é com certeza uma das temáticas mais delicadas no currículo do Ensino de matemática no Ensino Fundamental. O objetivo deste trabalho é mostrar a importância do Método de Singapura no ensino de frações, em especial a abordagem Concreto - Pictórico - Abstrata (APC). Frações sem dúvida é um conteúdo delicado, relevante e abstrato, principalmente para aqueles que nunca tiveram contato com esse conhecimento de forma bem elaborada. Conceituar fração não é nada fácil, pior ainda será manipular e aplicar se os conceitos não foram bem construídos. Aprendizagem essa que só se torna real quando é realizada de forma significativa, ou seja, de forma que o aluno possa conceituar, manipular e aplicar. Assim, vamos fazer uma breve abordagem sobre as três componentes consideradas juntas um tripé que norteiam o ensino e aprendizagem de Matemática de acordo com o professor e pesquisador Elon Lages Lima, que são: Conceituação, Manipulação e Aplicação. O método de Singapura é um dos métodos que surgem para que aluno tenha a possibilidade de construir o conceito de frações e assim tornando-se protagonista de sua aprendizagem e caminhando com autonomia no transcorrer do processo de aprendizagem ele possa tomar posse desse conhecimento sendo assim capaz de resolver problemas dos mais diversos, dessa natureza. Além de tratar com zelo, através do método de Singapura, a construção do conceito de frações, vamos também manipular para realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Vamos aplicar esse método em sala de aula com os alunos de 7º ano e fazer uma análise dos resultados. Um dos motivos para a realização deste trabalho se justifica pelo fato de que Singapura se tornou uma referência no ensino de matemática. (Assim diz a BBC: Os melhores estudantes de matemática do mundo estão em Cingapura, segundo a prova de avaliação internacional Pisa, realizada todos os anos pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico). Não chega a surpreender, portanto, que o chamado "método de Cingapura" (também conhecido como "Mastery Approach" ou "Abordagem Maestria"), voltado ao ensino da matemática, tenha se espalhado por todo o mundo). Para finalizar vamos fazer uma análise dos problemas de frações abordados pela OBMEP, ENEM, PROVA BRASIL e CONCURSOS. Esperamos, com esta dissertação, contribuir para a construção de um ambiente de sala de aula provocador, onde o aluno seja de fato protagonista na construção do conhecimento e autônomo na capacidade de aprender.

Palavras chave: Método de Singapura, Conceituação de frações, Operações com frações, Resolução de problemas envolvendo frações, Modelo de barra, Representação pictórica de frações.

ABSTRACT

Fraction is certainly one of the most delicate topics in the curriculum of Mathematics Teaching in Elementary School. The purpose of this work is showing the importance of the Singapore Method in the teaching of fractions, especially the Concrete - Pictorial - Abstract (CPA) approach. Fractions certainly is a delicate, relevant and abstract content, especially for those who have never had contact with this knowledge in a well elaborated way. Conceptualizing fraction is not easy, worse still will be to manipulate and apply if the concept is not well constructed. This learning only becomes real when it is performed in a meaningful way. In other words, in a way that the student can conceptualize, manipulate and apply. Thus, we will make a brief approach on the three components considered together a tripod that guide the teaching and learning of Mathematics according to the teacher and researcher Elon Lages Lima, which are: Conceptualization, Manipulation and Application. The Singapore method is one of the methods that arise so that the student has the possibility to construct the concept of fractions. By becoming a protagonist of his learning and walking with autonomy in the course of the learning process, he can take possession of this knowledge, thus being able to solve problems of the most diverse, of that nature In addition to zealously building the concept of fractions, through the Singapore method, we will also manipulate to perform addition, subtraction, multiplication and division operations. We will apply this method in the classroom with the 7th grade students and do an analysis of the results. One reason for this work is justified by the fact that Singapore has become a benchmark in mathematics teaching. (This is how the BBC says: The best math students in the World are in Singapore, according to the international assessment test PISA, held annually by the OECD (Organization for Economic Cooperation and Development). It is therefore not surprising that the so-called "Singapore Method" (also known as the "Mastery Approach"), aimed at teaching mathematics, has spread all over the world. Finally, we will analyze the problems of fractions addressed by OBMEP, ENEM, PROVA BRASIL and COMPETITIONS. We hope, with this dissertation, to contribute to the construction of a provocative classroom environment, where the student is indeed protagonist in the construction of knowledge and autonomous in the capacity to learn.

Key words: Singapore method, Fraction conceptualization, Fractions operations, Problem solving involving fractions, Bar model, Pictorial representation of fractions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar à importância do Método de Singapura no ensino de frações, um tópico tão relevante e abstrato, principalmente para aqueles que nunca tiveram contato com esse conhecimento de forma elaborada. Conceituar fração não é nada fácil, pior ainda será manipular e aplicar se o conceito não for bem construído. Aprendizagem essa que só se torna real quando é realizada de forma significativa, ou seja, de forma que o aluno possa palpar e manipular.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos: Capítulo 1 – Parâmetros; Capítulo 2 – Conceitos e Operações; Capítulo 3 – Aplicação e Resultados; Capítulo 4 – Problemas envolvendo frações.

No Capítulo 1, Frações de acordo com os PCN's, Frações de acordo com a BNCC, O desenvolvimento de Competências e Habilidades: Conceituação, Manipulação e Aplicação e Método de Cingapura.

Já, no Capítulo 2, vamos adentrar no Método de Singapura para entender o ensino de Frações e números fracionários, Frações equivalentes, Adição e subtração de fração, Multiplicação e divisão de fração, Potenciação e radiciação de frações na busca de tornar o ensino significativo.

É fundamental que o aluno tenha a oportunidade de desenvolver suas competências e habilidades, desta maneira, escrevemos o Capítulo 3, como sendo a aplicação em turmas do 7º ano o Método aqui explorado e faremos algumas análises do resultado obtido, desta maneira aplicaremos uma lista de problemas envolvendo o conceito de frações para diagnosticar os alunos e em seguida será desenvolvido a construção desse conhecimento aplicando o Método de Singapura e aplicaremos assim para finalizar outra lista de problemas similares aos propostos inicialmente, problemas esses conceituais, de manipulação e aplicação, para comparar os resultados da avaliação diagnóstica. No quarto capítulo, vamos explorar problemas aplicados nas provas da OBMEP, ENEM e PROVA BRASIL ao longo dos anos e faremos uma análise tomando como referência o Método de Singapura.

Esperamos desta maneira contribuir para a construção de um ensino significativo e provocador, onde o aluno seja de fato protagonista na construção do conhecimento e autônomo na capacidade de aprender.

1. PARÂMETROS

Antes de irmos direto ao assunto, se faz necessário falar sobre a regulamentação do ensino de Frações no Brasil de acordo com os PCN's, documento que serve de referência para professores em todo território brasileiro. O desenvolvimento de Competências e Habilidades; Conceituação, Manipulação e Aplicação que é considerada segundo o professor Elon Lages Lima o tripé de sustentação para o ensino e aprendizagem da Matemática e um pouco de História das frações.

1.1 Frações de acordo com os PCN's

No território Brasileiro, o desenvolvimento escolar envolvendo o conceito de fração está intrinsicamente ligada a construção dos números racionais, em geral, iniciado a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental composto por 4º e 5º anos do Ensino Fundamental seguido do 3º e 4º ciclo e seu ensino deve estar em conexão direta a outros conhecimentos: Medidas, Razão, Proporção, Porcentagem e outros. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> No terceiro e no quarto ciclos a abordagem dos racionais, em continuidade ao que foi proposto para os ciclos anteriores, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. Para abordar o estudo dos racionais, sob essa perspectiva, os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino. (BRASIL, 1997, p. 101).

Ainda segundo PCN's, embora as representações fracionárias dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma fracionária. Uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais. Ao trabalhar com os números racionais, os alunos acabam tendo de enfrentar vários obstáculos:

Imagem 01 – frações em pcn's

- cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$,... são diferentes representações de um mesmo número;
- a comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
- se a seqüência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87.

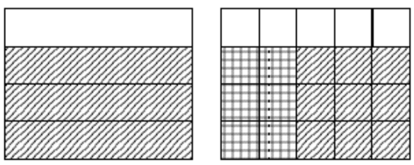
Fonte: PCN's

Segundo os PCN's a interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas.

Quanto ao cálculo da adição e da subtração envolvendo frações com denominadores diferentes, pode-se transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes.

Compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como partes de partes do total. (Neste caso a multiplicação não se apoia na ideia de adição reiterada). Assim, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo.

Imagem 02 – multiplicação de frações 01



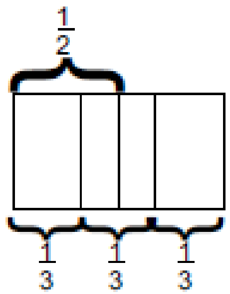
$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

Fonte: PCN's

A partir de várias experiências como essas, os alunos poderão construir um procedimento para multiplicar frações.

No caso da divisão envolvendo frações pode-se interpretá-la como partes que cabem em partes. Assim, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ pode ser interpretado como quantas partes de $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$.

Imagem 03 - multiplicação de frações 02



Fonte- PCN's

Comparando, ½ com 1/3 pode se observar que 1/3 cabe uma vez e meia em ½. Entretanto, nem sempre representações desse tipo permitem a visualização do resultado e por isso é importante ter em mãos outras estratégias.

1.2 Frações de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC se constitui em um documento que aborda as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem ter acesso durante a etapa da Educação Básica, tornando-se uma referência nacional para subsidiar a elaboração do currículo do sistema brasileiro de ensino.

Segundo a BNCC 2018, a etapa do Ensino Fundamental está organizada em quatro áreas do conhecimento, a saber: Linguagens; Matemática; Ciências da Natureza; e Ciências Humanas. Cada área dessas possui competências específicas que devem ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Salientamos que de acordo com esse documento, o resultado das aprendizagens deve ser expresso em competências (conhecimentos mobilizados). Ser competente é ser capaz de utilizar o conhecimento construído ao se deparar com um problema

Em sua elaboração, o documento citado, referindo-se a Matemática, leva em consideração os diferentes campos que compõe essa área do saber: Aritmética; Álgebra; Geometria; Estatística; e Probabilidade. Nesse sentido, o documento propõe cinco unidades temáticas as quais orientam as habilidades para serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental, quais sejam: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística.

As habilidades referem-se às aprendizagens as quais devem ser garantidas aos educandos nos mais diversos contextos escolares e estão relacionadas a objetos de conhecimento (conteúdo, conceitos e processos). A seguir, faremos uma análise da unidade temática Números, mais especificamente do objeto de conhecimento de Frações, pois abrange o assunto de nossa proposta de pesquisa.

De acordo com a BNCC, as ideias preliminares de fração são introduzidas no 3º ano do Ensino Fundamental em que o aluno desenvolve o significado de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. Quanto à habilidade temos: Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

No 4º ano é requerida do aluno a habilidade de reconhecer, com o auxílio da reta numérica, as frações unitárias com denominadores 2, 3, 4, 5, 10 e 100 como unidades de medidas menores que uma unidade. Além disso, o educando deve reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para os números racionais na representação decimal.

Ao chegar ao 5º ano o objeto de conhecimento números racionais devem ser ampliados e as habilidades desejadas são as seguintes: com o auxílio da reta numérica, identificar e representar frações, maiores ou menores que a unidade; identificar frações equivalentes; comparar e ordenar as frações; e utilizar as representações percentuais 10%, 25%, 50%, 75% e 100% a décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, respectivamente. Cujas habilidades de acordo com BNCC são:

> Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. Identificar frações equivalentes. Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (BNCC, 2018)

Resumidamente, o trabalho com frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental é proposto pela BNCC conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 - Objetos de conhecimentos distribuídos nos anos

ANO	CONTEÚDOS
4º ano	Números racionais: Frações Unitárias com denominadores 2, 3, 4, 5, 10 e 100
5º ano	Números racionais expressos na representação fracionária: Reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica
	Comparação e ordenação de frações, utilizando equivalência
	Cálculo de porcentagens e representação fracionária

Fonte: dados da pesquisa

Fonte - PCN’s

Observa-se que, assim como os PCN’s propõe que o conteúdo de Frações seja iniciado a partir do 2º ciclo (3ª e 4ª séries, ou seja, 4º e 5º anos), a BNCC também sugere que o conceito de Frações seja introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mais precisamente a partir do 4° ano.

1.3 O desenvolvimento de Competências e Habilidades

As Diretrizes Curriculares Nacionais e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), enfatizam a necessidade de centrar o ensino e aprendizagem no desenvolvimento de competências e habilidades por parte do aluno, em lugar de centrá-lo no conteúdo conceitual apenas.

Segue um fragmento dos (PCNs, BRASIL, 1999) que comprova nosso argumento:

> Os objetivos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais concretizam as intenções educativas em termos de capacidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longo da escolaridade. A decisão de definir os objetivos educacionais em termos de capacidades é crucial nesta proposta, pois as capacidades, uma vez desenvolvidas, podem se expressar numa variedade de comportamentos. (PCNs, BRASIL, 1999).

De acordo com os PCNs (PCNs, BRASIL, 1999), o papel do professor nesse processo é crucial, pois a ele cabe apresentar os conteúdos e atividades de aprendizagem de forma que os alunos compreendam a importância teórica e prática do que se aprende, isto é, uma aprendizagem significativa, e assim desenvolvam expectativas positivas em relação à aprendizagem e sintam-se motivados para o trabalho escolar.

> O projeto educacional expresso nos Parâmetros Curriculares Nacionais demanda uma reflexão sobre a seleção de conteúdos, como também exige uma ressignificação, em que a noção de conteúdo escolar se amplia para além de fatos e conceitos, passando a incluir procedimentos, valores, normas e atitudes. Os procedimentos expressam um saber fazer, que envolve tomar decisões e realizar uma série de ações, de forma ordenada e não aleatória, para atingir uma meta. (PCNs, BRASIL, 1999).

Cabe, ainda, referenciar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96 BRASIL (1996), que em seu artigo 32, inciso I, relata: “o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo”. Seguindo a leitura da Lei o inciso III acrescenta: “o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores”.

Segundo o dicionário da língua portuguesa, o termo competência é a “capacidade decorrente de profundo conhecimento que alguém tem sobre um assunto”[1]. Poderíamos então dizer que competência é a capacidade de usar nossas inteligências, nossos pensamentos, memórias e outros recursos mentais para realizar com eficiência uma tarefa desejada. A competência é a operacionalização da inteligência, e a forma concreta e prática de colocá-la em ação. Quando trabalhamos com as diferentes inteligências humanas, podemos ativar diferentes competências.

Para vários autores, muitas definições são dadas ao termo competência, tais como faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações, etc.) para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações, entre elas resolver problemas.

> Se acreditamos que a formação de competências não é evidente e que depende em parte da escolaridade básica, resta decidir quais ela deveria desenvolver prioritariamente. Ninguém pretende que todo saber deve ser aprendido na escola. Uma boa parte dos saberes humanos é adquirida por outras vias. Por que seria diferente com as competências? Dizer que cabe a escola desenvolver competências não significa confiar-lhe o monopólio disso. (PERRENOUD, 1999)

[1] Disponível em: <http://www.dicionariodoaurelio.com/Competencia.html>. Acesso em: 12 de janeiro. 2019.

Para Perrenoud (PERRENOUD, 1999), as competências referem-se ao domínio prático de um tipo de tarefas e de situações, ou seja, capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiando-se em conhecimentos, mas sem se limitar a eles. Trabalhar com competências não é virar as costas aos conteúdos e sim mudar o foco. Ao invés de memorização de conteúdos, é importante que esses conteúdos tenham significado na vida do aluno, assim a memorização dará lugar ao aprender, pois o aluno desenvolve a competência de identificar quais as ferramentas que ele pode usar em situações diferentes.

As competências elementares evocadas não deixam de ter relação com os programas escolares e com os saberes disciplinares, ao contrário, elas exigem noções e conhecimentos matemáticos. Assim os documentos oficiais do Ministério de Educação e Cultura sinalizam algumas dessas competências elementares:

> Dominar leitura/escrita e outras linguagens; Fazer cálculos e resolver problemas; Analisar, sintetizar e interpretar dados, fatos situações; Compreender o seu entorno social e atuar sobre ele; Reconhecer criticamente os meios de comunicação; Localizar, acessar e usar melhor a informação acumulada; Planejar, trabalhar e decidir em grupo (BRASIL, 2005).

Supõem um domínio da língua e das operações; apelam para uma forma de cultura geral que também se adquire na escola. Mesmo quando a escolaridade não é organizada para desenvolver tais competências, ela permite a apropriação de alguns dos conhecimentos necessários.

Percebemos que há uma parte das competências que se desenvolve fora da escola e apela para saberes escolares, portanto, não há contradição entre os programas escolares e as competências.

> Competência é o conjunto de conhecimentos, qualidades, capacidades e aptidões que habilitam para a discussão, a consulta, a decisão de tudo o que concerne a um ofício, supondo conhecimentos teóricos fundamentados, acompanhados das qualidades e da capacidade que permitem executar as decisões sugeridas. (TANGUY, 1997).

Ser competente diz respeito ao saber fazer, ou melhor, aplicar, utilizar determinado recurso. Assim as competências são requeridas na vida cotidiana, no fazer diário, nas práticas associacionistas, que nos levam a um saber fazer, saber agir, saber conviver. Nos documentos oficiais do ENEM, vimos mais uma denominação para o termo competência:

> Modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. As habilidades decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do “saber fazer”, através das ações e operações as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova organização das competências (BRASIL, 2000, p.8).

Esse saber fazer já nos diz respeito à aplicabilidade e à contextualização dos afazeres, à mobilização de coisas, isto é, um aluno capaz de utilizar seus recursos de forma ativa, sabendo elencar meios para solucionar problemas. É interessante destacar que uma competência leva à utilização de várias habilidades, e as habilidades articulam-se em uma nova competência. Seria então um ciclo, quanto mais competente, mais habilidade estaria utilizando e a cada nova habilidade adquirida, mais uma competência seria elencada. Também temos que as “competências” antecedem as “habilidades”, ou seja, é preciso que o sujeito construa competências para conseguir resolver problemas mais elaborados, com uma maior dependência de conhecimentos previamente construídos.

No que diz respeito à habilidade, vimos sua definição no dicionário como: qualidade de hábil; capacidade, destreza; agilidade[2]. Poderíamos, então, dizer que a habilidade diz respeito a uma capacidade adquirida, ou seja, saber fazer alguma coisa. As habilidades devem ser desenvolvidas na busca de uma competência.

Sobre o termo habilidades Antunes, (ANTUNES, 2001, p.18) define como: “Filha específica da competência”. Não há como diferenciar de forma precisa os termos competência e habilidade, pois em determinadas situações ou, isoladamente, uma habilidade pode ser uma competência a ser desenvolvida.

De acordo com Brasil (BRASIL, 2005, p. 58), competência é uma habilidade de ordem geral, enquanto a habilidade é uma competência de ordem particular, específica, por exemplo: Uma competência seria a resolução de problemas; enquanto as habilidades seriam saber utilizar recursos para resolver determinados problemas. A competência seria constituída de várias habilidades. Mas uma habilidade não pertence à determinada competência, uma vez que a mesma habilidade pode contribuir para competências diferentes. Resumindo, as habilidades devem ser desenvolvidas na busca de competências.

A matriz de habilidades e competências da Prova Brasil (BRASIL, 2008, p.18) define que, habilidades referem-se ao plano objetivo e prático do saber fazer e decorrem, diretamente, das competências adquiridas que se transformam em habilidades.

Diante deste novo contexto, não podemos olhar mais a educação como meramente repetição. Mas como um processo de inserção e atuação do aluno na sociedade, onde os problemas são os mais diversos e exige dele capacidade de pensar com criatividade, utilizando as competências desenvolvidas na escola.

1.4 Conceituação, Manipulação e Aplicação

Segundo o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE, BRASIL, 2011), a matriz de referência que norteia o ensino de Matemática no Ensino Fundamental está estruturada sobre o foco: Resolução de Problemas. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático, ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Assim, se faz conveniente falarmos sobre as três componentes que organizam o ensino e aprendizagem da Matemática: conceituação, manipulação e aplicação.

O pesquisador e professor Elon Lages Lima (LIMA,1999) conceitua três componentes fundamentais para o ensino e aprendizagem em Matemática: conceituação, manipulação e aplicação. Essas três componentes devem ser pensadas como um tripé que sustenta e organiza o ensino e aprendizagem de Matemática. Sendo cada uma delas com importância única, e que no conjunto, as três devem ser bem equilibradas, pois não existe alguma com mais importância. Vejamos o que Lima afirma sobre cada uma dessas três componentes.

Imagem 04 – Tripé da Matemática

Fonte: do autor

A Conceituação é a componente que trata das definições em sua essência, ou seja, parte da elaboração das definições matemáticas formais até a própria reformulação de ideias sob diferentes formas e termos.

> A conceituação compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações. (LIMA, 1999)

Compreender bem o conceito para assim dá um significado do que se ensina ou aprende é fundamental, pois assim os próximos componentes ganham clareza e importância.

Um bom exemplo desse componente se dá quanto ao estudo de frações. Na maioria das vezes os alunos estão manipulando excessivamente, ou seja, fazendo uso de fórmulas e manipulando sem nem ter a real consciência do que de fato estão fazendo, assim, mergulham num mecanismo sem significado. O aluno não sabe nem o que é fração em sua essência e quando o conceito de fração lhes foi apresentado e não construído, isso em pouco tempo, na maioria dos casos quase que imediatamente, já começa a manipular e aplicar. E quando se deparam com uma aplicação mais conceitual, param no problema. É extremamente importante que o aluno resolva vários problemas conceituais, assim o professor deve ter varias estratégias de ensino. Estratégia de ensino direcionada pelo aluno e Estratégia de ensino direcionada pelo professor.

De acordo com Elon Lages Lima (LIMA,1999), a manipulação, de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está pra o ensino e o aprendizado de Matemática, assim como a prática de exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes.

> A presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a matemática se resumisse a ela. Isso tem bastante a ver com o fato de que o manuseio eficiente de expressões numéricas e símbolos algébricos impõe a formação de hábitos mentais de atenção, ordem e exatidão, porém não exige criatividade, imaginação ou capacidade de raciocinar abstratamente. (LIMA, 1999, p. 4)

Assim, manipular está associado à atividade de manusear. Mas é importante que o estudante tenha total consciência das ferramentas que está manuseando, pois assim ele terá total capacidade de manipulá-la em qualquer situação que seja acionada essa necessidade.

Um bom exemplo desse componente se dá no estudo de frações mais uma vez. Na maioria das vezes, o estudante segue uma manipulação seguindo um conjunto de regras operatórias, mas sem de fato entender o que está operando. Isso porque o estudante não tem claro o que significa trabalhar com frações, ou seja, qual conceito de frações. Outro exemplo muito bom, e que ocorre de maneira desagradável nas aulas de matemática é o ensino de produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença. O aluno não sabe o significado desses produtos, são obrigados a manipular e não conseguem aplicá-los e nem para qual objetivo claro o aluno precisa desse conhecimento, isto é: a construção desse conhecimento levará a construção de qual outro(s) conhecimento(s). É importante que fique bem claro principalmente para o professor, depois para seus alunos, qual a intencionalidade, ou seja, qual a intensão que se tem ao desenvolver determinado conhecimento.

De acordo com Elon Lages Lima (LIMA,1999), a aplicação é o emprego de noções e teorias da Matemática em situações que vão de problemas triviais do dia a dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas, quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário.

> As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. (LIMA,1999)

Portanto, aplicar é nada mais que usufruir de um conjunto de competências e habilidades desenvolvidas e apoiadas nas componentes conceituação e manipulação completando o tripé que organiza e sustenta o ensino e aprendizagem da Matemática.

1.5 História das frações

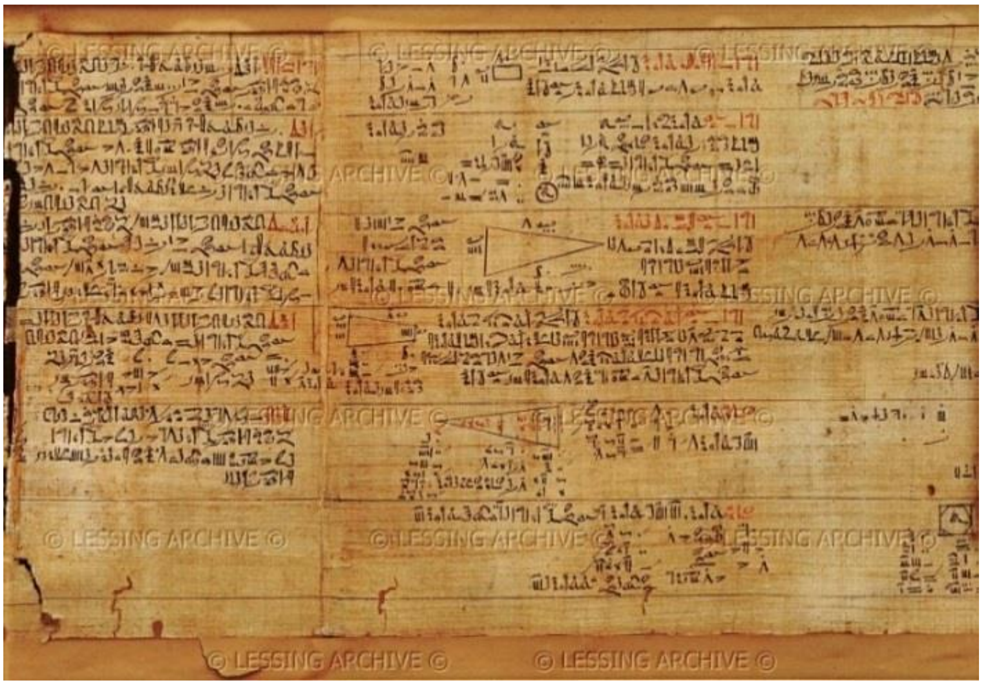
De acordo com diversas fontes históricas, as frações surgiram há mais de 3000 anos, no antigo Egito, em decorrência de problemas do dia a dia que envolviam medidas.

Segundo Boyer (1998), os homens da Idade da Pedra não faziam uso de frações, mas com o avanço das culturas na Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade tanto do conceito como de uma notação para as frações.

Muito provavelmente, tal necessidade possa ter decorrido devido às enchentes do rio Nilo, que levavam as marcações das terras à sua margem. Para remarcá-las, usavam-se cordas e registravam-se quantas vezes essa unidade de medida estava contida no terreno. Na maioria das vezes essa medida não era um número inteiro, o que fez surgir um novo conceito de número, no caso, o número fracionário.

No mais extenso papiro egípcio de natureza matemática, conhecido por Papiro Rhind e por vezes, de Papiro Ahmes, em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 A.C, tem-se uma noção de como lidavam com as frações.

Figura 1 – Papiro Rhind



Fonte: http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm.

> Os egípcios esforçaram-se para evitar algumas das dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de 2/3 e 3/4, como soma das frações chamadas *unitárias*, ou seja, aquelas de numerador igual a 1. Essa redução tornava-se possível graças ao emprego de tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo 2/n, as únicas necessárias devido à natureza diádica da multiplicação egípcia. Os problemas do papiro Rhind são precedidos de uma dessas tábuas para todos os ímpares *n* de 5 a 101. Assim, encontramos 2/7 expresso como 1/4 + 1/28, 2/97 como 1/56 + 1/679 + 1/776 e 2/99 como 1/66 + 1/98. (EVES, 1997, p.73)

De acordo com os PCN's Pode-se discutir com os alunos, por exemplo, que os egípcios já usavam a fração para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados.

> Eles utilizavam apenas frações unitárias (frações de numerador 1), com exceção de 2/3 e ¾. Assim, numa situação em que precisavam dividir 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que na nossa notação pode ser expresso por 2 + 1/4 + 1/8. (PCN'S 1998)

2. MÉTODO DE SINGAPURA, CONCEITOS E OPERAÇÕES.

É curioso observar como Singapura se tornou uma referência no ensino, em particular no ensino de matemática. Isso se deu por razões muito claras, objetivas e intencionais. Mas, ao realizar as pesquisas necessárias vemos que Singapura tinha altos índices de analfabetismo e que finalmente o país acordou para a prosperidade, vendo que a única forma disso acontecer seria levar a educação a sério.

Em uma entrevista ao programa roda viva no dia 19 de maio de 2016 que pode ser encontrada no seguinte endereço https://www.youtube.com/watch?v=t-Io2ZfqUtU, o ex-diretor do Instituto Nacional de Educação de Singapura Lee Sing Kong afirma que um sistema educacional funciona como um ecossistema onde vários aspectos estão ligados para que esse ecossistema prospere. Mas, dois deles são fundamentais e merecem destaque: a qualificação e valorização do professor e a qualidade do líder da escola, e isso deve ser apoiado por políticas e recursos, bem como o reconhecimento da sociedade da profissão do professor e de suas contribuições para a sociedade. O Ex-diretor ainda afirma que é extremamente relevante que esteja claro quais resultados deseja-se alcanças, quais habilidades os professores devem ter e ainda qual o currículo escolar é necessário para a evolução ocorrer. A visão oficial do Ministério da Educação de Singapura é expressa pela máxima “Thinking School, Learning Nation” (Escola que Pensa, Nação que Aprende) e pretende traduzir o objetivo de preparar uma geração de cidadãos empenhados que saibam pensar e que sejam capazes de contribuir para o contínuo crescimento e prosperidade de Singapura. Vale destacar que a profissão de professor é uma profissão com altíssimo status. E que para ser professor é preciso estar entre os melhores da turma.

Neste capítulo, nos debruçaremos sobre o que é o Método de Singapura, em quais teorias esse método se edifica e sua aplicação no ensino de fração. Método esse que tem como objetivo principal tornar o ensino significativo e assim dar ao aluno autonomia no desenvolvimento de sua aprendizagem, sendo agente ativo no processo.

2.1 Método de Singapura

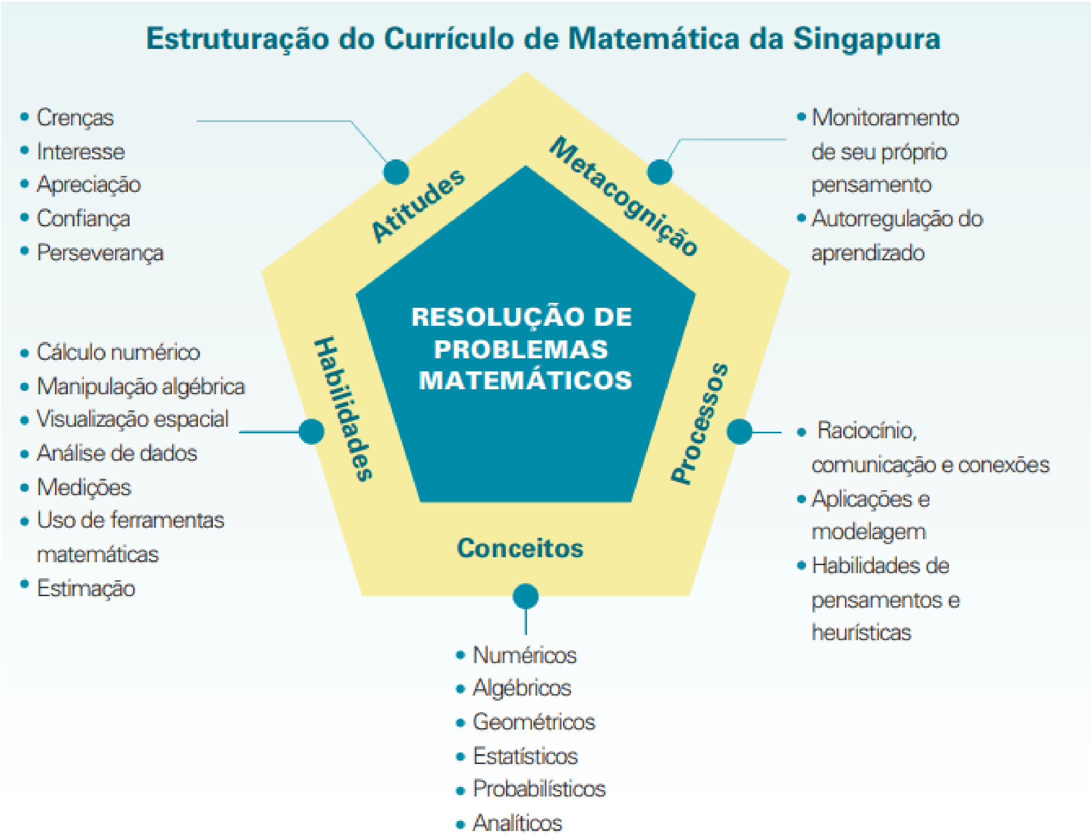
Método que revolucionou o ensino de matemática e colocou Singapura como sendo referência, em primeiro lugar no PISA, *Programme for International Student Assessment* – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.

O método de ensino de Singapura tem como lema: Escola que Pensa, Nação que Aprende. Para que seja possível ter uma escola que pensa, é preciso despertar alunos curiosos e o ambiente provocador para o aprender. Levando assim o aluno a ter um papel ativo em sala de aula e o papel do professor sendo de facilitador na construção, como se o professor fosse um engenheiro e os alunos operários que constroem suas próprias casas. Alunos que pensam desenvolvem a principal competência, aquela que norteia o ensino em Singapura, que é a capacidade de resolver problemas e de problematizar.

> O objetivo do currículo de matemática em Singapura é desenvolver a habilidade dos estudantes em aplicar matemática para resolver problemas através do desenvolvimento de suas habilidades matemáticas, ajudando-os a adquirir conceitos-chave da matemática, promovendo atitudes positivas frente à matemática e encorajando-os a pensar por si mesmos sobre a maneira como aprendem. (IMPA, 2018)

O quadro conceitual do Currículo de Matemática de Singapura foi publicado na década de 90 do século passado e tem sofrido pequenos ajustes devido à demanda econômica e social desde então. As alterações que o programa tem são pontuais e são incrementadas mediante reação do meio e após a sua experimentação em contexto de sala de aula. A elaboração dos manuais de Singapura também é realizada com muito cuidado. No geral, se destacam as seguintes características: os manuais contêm apenas o essencial, não tem explicações em excesso; expõem um conteúdo em 5 a 10 páginas, podendo levar dias a abordá-lo; não contém longas explicações sobre um procedimento ou conceito; isso implica em aulas menos expositivas o possível e convidam os alunos a refletirem sobre o seu processo de pensamento, assim difunde uma aprendizagem problematizada com estratégia de ensino ativa e até mesmo a curiosidade dos alunos são bem direcionadas, pois o seu material tem intensões muito bem postadas.

Figura 02 - estrutura



Fonte: IMPAR.

Uma interpretação dos elementos deste quadro permite concluir que a Matemática de Singapura não se trata apenas de uma metodologia, e sim uma proposta coesa de currículo escolar baseada numa filosofia de ensino que tem como eixo central a Resolução de Problemas. A proposta curricular é constituída de cinco frentes: atitudes, metacognição, processos, conceitos e habilidades. Na base do diagrama se encontram os conceitos que são os conteúdos específicos dos campos da disciplina Matemática na Educação Básica, que são conceitos numéricos, geométricos, algébricos e estatísticos (que no Brasil seria parte do Tratamento da Informação). As habilidades desejadas abrangem: estimativa e aproximação, cálculo mental, comunicação, uso de ferramentas matemáticas, manipulação aritmética, manipulação algébrica e tratamento de dados. Os processos envolvem a habilidade de pensamento e heurística (encontrar/descobrir fatos). A metacognição se trata do monitoramento do próprio pensamento e as atitudes requeridas são apreciação, interesse, confiança e perseverança.

As principais características da Matemática de Singapura, de acordo com Baldin (2014) são:

- Abordagem de aprendizagem: Concreto → Pictórico → Abstrato;
- Estímulo ao processo de pensamento ativo, comunicação de ideias matemáticas e resolução de problemas.
- Desenvolvimento de fundamentos que os alunos necessitarão para a matemática mais avançada;
- Ênfase no exercício mental dos conceitos de matemática por meio da abordagem pelo modelo pictórico.

2.2 Teoria do Método de Singapura

Vamos agora entender como se sistematiza teoricamente a construção do método de Singapura onde se destacam três teorias edificadoras que consolidam o currículo e as estratégias de Singapura e que juntas tem tornado o ensino em matemática e o desenvolvimento das habilidades desejadas.

A primeira teoria se refere a abordagem Concreto- Pictórico- Abstrato (CPA) que tem relação com o trabalho do americano Jerone Bruner. A segunda são Os princípios de variabilidade matemática e perspectiva, do educador húngaro Zoltán Paul Dienes (o criador de O Bloco Lógico), que defende que para construir um conceito deve ser levado em consideração diversos exemplos, contextos e representações. Desta forma destacamos a importância da construção da componente conceituação, componente abordada pelo pesquisador e professor Elon Lages Lima como mencionamos no Capitulo 1. E a terceira e última teoria é o trabalho do psicólogo inglês Richard Skemp sobre a importância de se estabelecer conexões para que o conhecimento seja sólido e duradouro, ou seja, tudo deve estar relacionado. Vale destacar mais uma vez que fica evidente no uso desta teoria a importância das componentes: conceituação, manipulação e aplicação.

2.2.1 Concreto - Pictórico - Abstrato (CPA)

A primeira teoria se refere à abordagem Concreto- Pictórico- Abstrato (CPA) que tem relação com o trabalho do americano Jerone Bruner, defende a tese de que os conteúdos devem ser abordados a partir do concreto, principalmente nos anos inicias da escolaridade, e que a partir de situações problemas os alunos são levados à construção, ou seja, materiais manipulativos, que podem ser objetos do dia a dia como barras de chocolate, lego, folha de papel ofício, bolinhas de gude ou objetos construídos intencionalmente para o desenvolvimento desejado como, por exemplo, bloco lógico, planilhas, material dourado, ábacos e papel quadriculado, entre outros.

Figura 03 - CPA

Fonte: do autor

Mas esse não é um pensamento exclusivo de Jerone Bruner, pois Piaget em sua teoria epistemológica sobre o desenvolvimento cognitivo analisa as relações com o sujeito e com o objeto no processo de construção do conhecimento, mostrando como o conhecimento se desenvolve. Para Piaget, a cognição refere-se ao conhecimento e o desenvolvimento cognitivo à aquisição de conhecimento. No desenvolvimento cognitivo incluem-se todos os aspetos da inteligência humana que utilizamos para compreendermos e nos adaptarmos ao mundo, ou seja, processos como a compreensão, o raciocínio, a aprendizagem, o pensamento, a conceituação, a resolução de problemas, a classificação e a recordação.

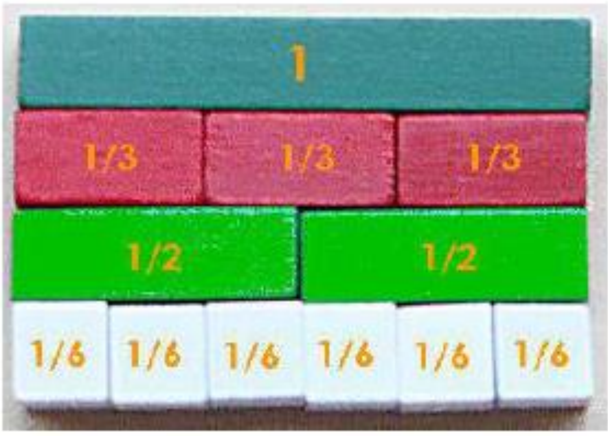
No desenvolvimento cognitivo, o indivíduo em questão é um sujeito ativo neste processo e na interação com o objeto. Nesta abordagem Piaget pretendeu perceber quais os mecanismos que o indivíduo utiliza para explorar e compreender o mundo externo.

> “O desenvolvimento psíquico (mental), que se inicia com o nascimento e termina na idade adulta é comparável ao crescimento orgânico: tal como este, consiste essencialmente numa marcha para o equilíbrio.” Tal como o corpo está em evolução (crescimento e maturidade dos órgãos), também a vida mental evolui em direção a uma forma de equilíbrio final (espírito adulto). De certa forma, o desenvolvimento é uma equilibração progressiva e crescente (Piaget, 1983, p.11).

Para (Cunha, 2002), na faixa etária de 2 a 7 anos, o processo de pensar da criança alcança a capacidade de operar mentalmente. Conforme este autor, embora consiga operar mentalmente, essas operações possuem um caráter concreto, ou seja, precisam realizar parte da tarefa empiricamente, ou com a presença e apoio de suportes de objetos e materiais concretos.

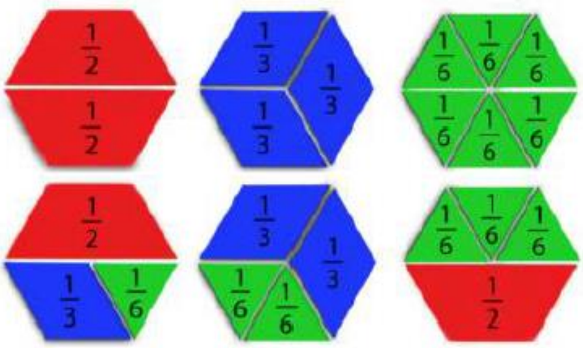
Podemos observar assim que existe uma forte relação no que diz Piaget e o que vemos na abordagem Concreto do método de Singapura e assim o aluno deve perceber que a matemática pode ser usada para interagir com o meio que o rodeia e para resolver problemas da vida real. Vejamos um exemplo com frações para ilustrar a construção desse conhecimento:

Figura 04 - Explorar as frações com as barras Cuisenaire



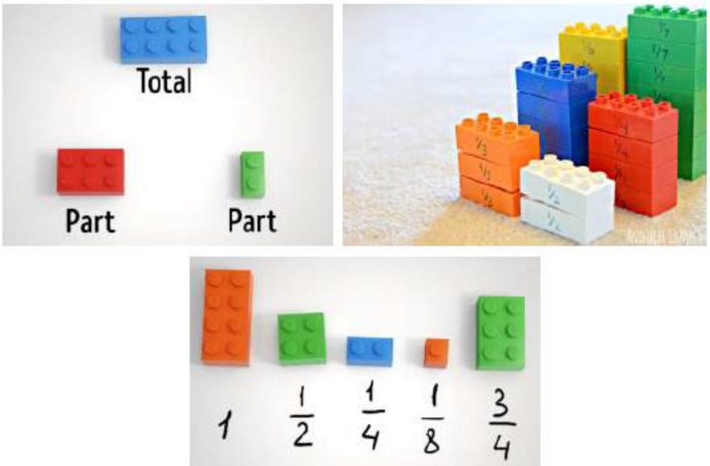
Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Figura 05 - hexágonos



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Figura 06 - legos



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Assim, temos o segundo momento importante que é do ser, para o representar, isto é, o Pictórico, que ocorre por meio de imagens podendo ser pontos, traço, barras, círculo, figuras geométricas adequadas. Esta abordagem ajuda o aluno a visualizar os conceitos matemáticos. No caso das frações, é importante uso de barras dividas em partes iguais, círculos divididos em setores iguais, mas no caso deste último é preciso ter cuidado com a natureza das propriedades geométricas do objeto, pois dividir um círculo em partes iguais não é tarefa simples podendo causar confusões visuais e vale destacar que o ensino com barras é o mais usado em Singapura. O Modelo de Barras é encontrado constantemente nos materiais didáticos de Singapura, e por isso muitas vezes o Modelo de Barras é confundido com a própria Matemática de Singapura. Porém, como vimos até aqui, a Matemática de Singapura é mais que uma metodologia.

> A modelagem por barras é uma variante específica do “desenhar uma figura” que é uma estratégia comum de resolução de problemas de matemática. Porque a Matemática de Singapura usa esta variante consistentemente, os alunos sabem que tipo de representação desenhar. Isso é uma vantagem se o modelo de barras for versátil o suficiente para se aplicar a muitos problemas complexos e é. Ele é especialmente útil para problemas que envolvem comparações, cálculos de parte-todo, relações, proporções e taxas de variação. Ele comunica graficamente e instantaneamente as informações que o aluno já conhece, e mostra ao estudante como usar essa informação para resolver o problema. (Hoven e Garelick 2007).

O abstrato é uma etapa do ensino em que o aluno faz uso de uma linguagem simbólica matemática para representar os objetos concretos e pictóricos. É nessa etapa que entra o desenvolvimento das representações abstratas do que foi representado pictoricamente e que deve estar enraizado ao objeto real. O trabalho formal com os símbolos permite mostrar aos alunos que existe uma maneira mais rápida e eficaz de representar um determinado conceito. A passagem do concreto ao abstrato pode ser consideravelmente delicada para a criança. Trata-se de todo um caminho a ser percorrido de forma sistematizada, passo a passo. Assim os livros de Singapura se mostram muito eficientes, pois são muito instrutivos, para que essas etapas sejam cumpridas de maneira eficiente e a passagem de uma etapa para outra seja natural.

De acordo com (IMPA 2018) em Dez Questões para Professores de Matemática: O objetivo do currículo de matemática em Singapura é desenvolver a habilidade dos estudantes em aplicar matemática para resolver problemas através do desenvolvimento de suas habilidades matemáticas, ajudando-os a adquirir conceitos-chave da matemática, promovendo atitudes positivas frente à matemática e encorajando-os a pensar por si mesmos sobre a maneira como aprendem. Para atingir esse objetivo os professores usam várias estratégias de ensino na sua abordagem na matemática. Tipicamente, os professores fornecem um contexto da vida real que demonstra a importância dos conceitos matemáticos para os estudantes (respondendo, portanto, à pergunta tão comum: “Por que devo aprender isso?”). Os professores então explicam esses conceitos, demonstram abordagens para solução de problemas e facilitam as atividades na aula. Eles usam várias práticas de avaliação para fornecerem aos alunos um atendimento individualizado sobre seus aprendizados.

2.2.2 Os princípios de variabilidade matemática e da variabilidade perspectiva

Os princípios de variabilidade matemática e perspectiva de Zoltan Paul Dienes, um matemático húngaro e um dos grandes pioneiros dos estudos alusivos à metodologia para o ensino de matemática nas séries iniciais, considerado assim referência no campo da Educação Matemática afirmava que a Matemática devia ser vista como uma estrutura de relações e não apenas considerada como um conjunto de técnicas. Assim, ele também orientava seguir os quatro princípios sugeridos para o aprendizado da Matemática: Princípio Dinâmico, Princípio da Construtividade, Princípio da Variabilidade Matemática e Princípio da Variabilidade Perceptiva, mas que se destacam para o método de Singapura os dois últimos:

> No Princípio da Variabilidade Matemática os conceitos que envolvam variáveis devem ser aprendidos por meio de experiências que incluam o maior número possível de variáveis. No Princípio da Variabilidade Perceptiva, para permitir o maior campo possível para variações individuais na formação dos conceitos, tanto quanto induzir as crianças a perceber a essência Matemática de uma abstração, a mesma estrutura conceitual deve ser apresentada na forma de tantos equivalentes perceptivos quanto possível. (DIENES, 1974, p. 41)

De acordo com esses princípios, as crianças deveriam ser expostas a diferentes situações em que era explorada a mesma estrutura, ou seja, variar as representações de um mesmo conceito.

2.2.3 A importância de se estabelecer conexões

Segundo Richard Skemp é necessário que o professor adote uma prática de sala de aula em que o aluno e suas condições intelectuais sejam o centro de sua ação educativa. Skemp reforça a importância da construção dos conceitos e que eles devem ser construídos seguindo uma série de atividades estruturadas que conectam esses conceitos.

> Conceito é uma forma de processar dados que capacita o usuário a utilizar experiências passadas de maneira proveitosa ao analisar a situação presente. (SKEMP, 1980 p.32)

Assim, temos que os conceitos devem ser desenvolvidos seguindo uma hierarquia do menos complexo, porém essencial, para os mais complexos e interligados, o que favorece o desenvolvimento do pensamento matemático. Ao desenvolver um conceito matemático o professor deve levar em consideração que a criança em sua formação se apoia em dois processor: abstração e generalização.

2.3 Fração e números fracionários

O ensino de frações é com certeza um dos conhecimentos mais delicados do currículo no ensino fundamental, pois se trata principalmente de uma ruptura com os números naturais e a construção de uma nova estrutura matemática, uma tecnologia própria com vários contextos, aplicações e sentidos. Assim, ensinar frações exige várias estratégias e a construção de modelos mentais adequados. Neste trabalho vamos explorar o modelo que em Singapura é usual, que é o de modelo de barras.

Um ensino muito bem direcionado, com bom equilíbrio entre abordagem Concreto – Pictórico – Abstrato, e atividades bem estruturadas para que o aluno num processo de aprendizagem ativa seja protagonista no desenvolvimento desse aprendizado, vivenciando a partir de etapas uma boa e frutífera experiência.

Os primeiros contatos com fração ocorrem normalmente entre 6 e 7 anos de idade. A partir daí é preciso ter muito zelo com a construção desse conceito pois, como já foi falado, esse conhecimento tem várias aplicações, contextos e sentidos. Assim, para nos organizar em relação ao desenvolvimento dessa temática, tomaremos a seguinte lista ordenada na tabela:

Itens	Conceituação	Manipulação	Aplicação
1. O que é uma fração? Fração como relação todo-partes.			
2. Representações distintas da mesma quantidade. Frações equivalentes.			
3. Mesma natureza e mesmo denominador. Adição e subtração de frações.			
4. Fração como multiplicador e multiplicando. O que é a multiplicação de frações?			
5. Medir e repartir. Noção de inverso e divisão de frações.			

Vamos assim responder a cada pergunta ordenadamente para a construção desse conhecimento.

O que é uma fração? Fração como relação todo-partes.

Antes de irmos em perseguição a resposta para essa pergunta vamos observar a história retirarada do livro “O Homem que Calculava” do fictício escritor Malba Tahan (heterônimo do professor brasileiro Julio César de Mello e Souza), que narra as aventuras e proezas matemáticas do calculista persa Beremiz Samir na Bagdá do século XIII. Foi publicado pela primeira vez em 1938 e já chegou a sua 80ª edição. Onde é narrada a singular aventura dos 35 camelos que deviam ser repartidos por três árabes. Beremiz Samir efetua uma divisão que parecia impossível, contentando plenamente os três querelantes. Vejamos:

> Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:
> - Não pode ser!
> - Isto é um roubo!
> - Não aceito!
> O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.
> - Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte, e, ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, e, a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas?
> - É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. – Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que em boa hora aqui nos trouxe!
> Neste ponto, procurei intervir na questão:
> - Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viajem se ficássemos sem o camelo?
> - Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! – replicou-me em voz baixa Beremiz – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar. Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal,**2** que imediatamente foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.
> - Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos -, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem em número de 36.
> E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:
> - Deverias receber meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.
> E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:
> - E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é 11 e pouco.
> Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.
> E disse por fim ao mais moço:
> E tu jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto, O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado! E concluiu com a maior segurança e serenidade:

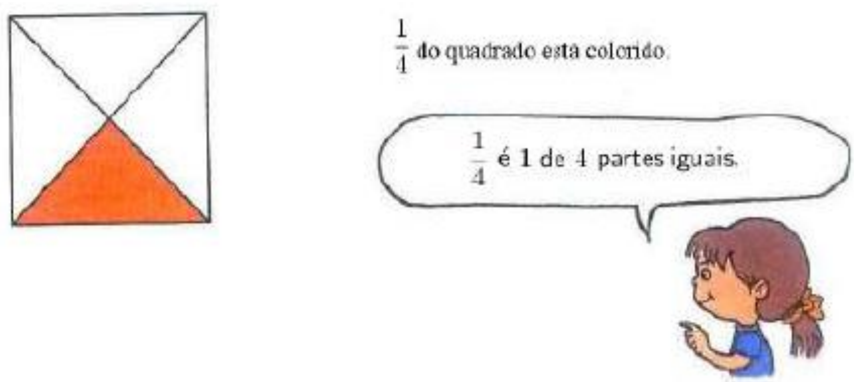
> - Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence como sabem ao bagdáli, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido a contento de todos o complicado problema da herança!
> - Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos três irmãos.
> – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!
> E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos "jamales" do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:
> - Poderás agora, meu amigo, continuar a viajem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!
> E continuamos nossa jornada para Bagdá. (MALBA, 1938)

Vale salientar que são situações curiosas como essas que nos provoca e consequentemente nos leva a busca por determinados conhecimentos.

> Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito (Fenelon)

Como já foi dito, frações têm vários sentidos: parte-todo, quociente, razão e operador, mas o primeiro a ser abordado é o de relação parte-todo, que indica certo número de partes iguais que compõem um todo. A noção de todo ou unidade é o centro para uma boa compreensão do conceito de fração e traz em si associada a ideia fundamental de representação. A vantagem de trabalhar inicialmente com a ideia de todo é que torna mais empírico e quando tomamos a unidade já começamos certa abstração.

Figura 07 - O que é uma fração?



Fonte: Primary mathematics Textbook 2B

Quando trabalhamos frações no sentido da relação todo-partes é fundamental que o aluno saiba fazer e responder a duas perguntas:

- Em quantas partes iguais é dividido o todo (denominador)?

- Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar (numerador)?

É importante que o aluno tenha sempre uma leitura completa da figura, pois muitas vezes é destacada apenas a parte citada, mas muitos problemas mais elaborados são solucionados a partir da parte não citada, ou seja, aquela parte que completa o todo.

Para entender a origem do nome denominador e numerador precisamos entender a natureza do todo e quantas partes foram enumeradas, que é dada por duas ações: ação de qualificar e ação de quantificar. Para o denominador temos que pelo número de partes iguais que o todo é dividido e a ação de qualificar esse ato em meios, terços, quartos,... se refere ação de denominar. Daí vem o nome denominador. Já a ação de quantificar, ou seja, ação de tomar certa quantidade, assim numerar, dá origem ao termo numerador. É extremamente importante que essa mensagem seja transmitida ao longo da construção do conceito de fração com eficácia.

Os papéis do numerador e do denominador devem ser desvendados através de frases simples como, por exemplo, a que se segue:

"2/5 são 2 partes de 5 partes iguais que certo todo foi dividido. "

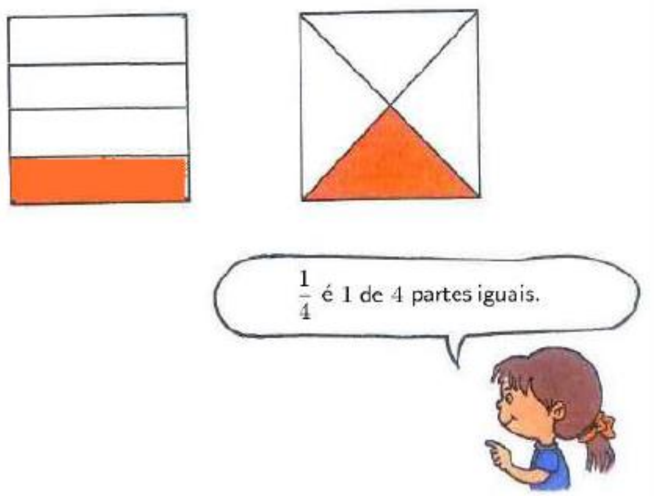
Observe que nesta frase estamos falando todos os elementos, suas relações e significados.

- Quantas partes o todo foi dividido.
- Quantas partes estão sendo tomada.

Assim temos o denominador e o numerador, ou seja, aquele que denomina a natureza do todo e aquele que enumera a quantidade tomada. Mas, não pode ser esquecido de destacar a parte não tomada, pois ela terá um papel importante para a resolução de problemas futuro.

Precisamos construir bem e explorar todos os elementos ao máximo possível, o que pode ser feito por situações problemas. Vejamos um exemplo de figura que expressa a primeira mensagem que uma criança deve receber sobre esse assunto:

Figura 08 - mesma parte

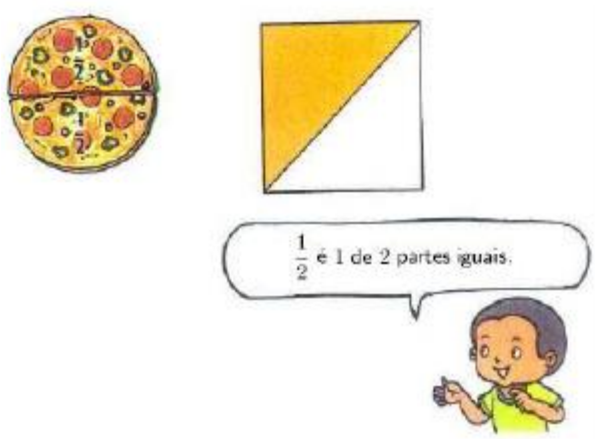


Fonte: Primary mathematics Textbook 2B

Apesar de neste trabalho focarmos na representação Pictórica usando o modelo de barras, nesse processo de construção do conceito é importante que o aluno veja outros modelos, para assim o aluno vivenciar as diversas formas do todo. E que independente do todo, o importante é estabelecer corretamente a relação desse todo com suas partes. Partes essas, iguais.

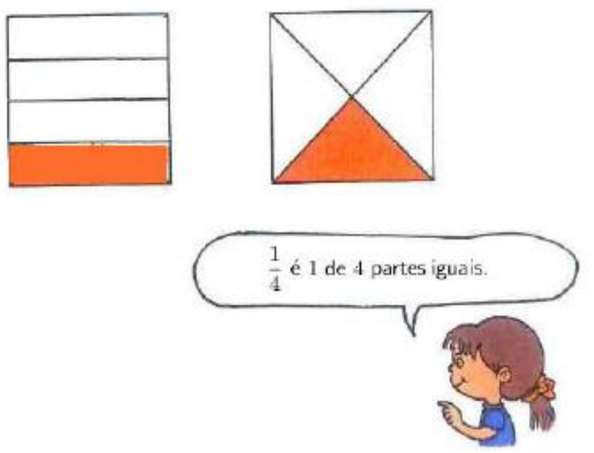
Vejamos duas situações, onde na primeira, formas diferentes para o todo representam a mesma fração. E na segunda, o mesmo todo sendo repartido de forma diferente, mas em pedaços iguais.

Figura 09: Todos diferentes



Fonte - Primary mathematics Textbook 2B

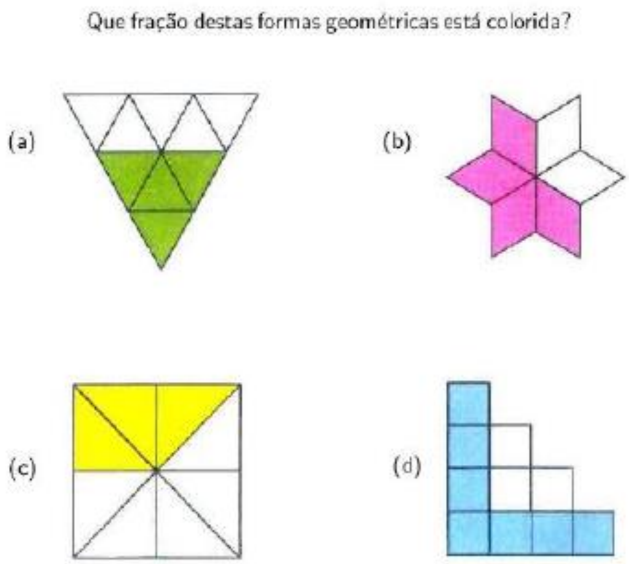
Figura 08 - mesma parte



Fonte - Primary mathematics Textbook 2B

Estas ideias sobre numerador e denominador são simples, porém não deixam de ser fundamentais. E aí onde mora o perigo do ensino, pois as ideias simples guardam a essência, mas ainda há uma grande negligência por parte de professores quando transmitem rapidamente, julgando ser fácil e não constroem junto ao aluno essas ideias. Assim, ensinar frações exige uma prática associada, tal como se ilustra na figura:

Figura 10 - mesma parte



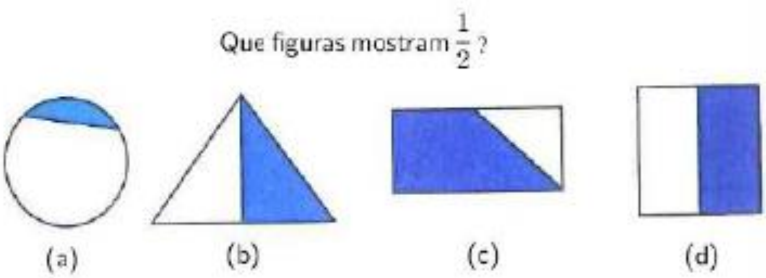
Fonte - Primary mathematics Textbook 2B

Figura 11 - Exemplos variados

Fonte: do autor

Também é importante que o aluno tenha contato com problemas em que as partes não são iguais, pois é possível que essa seja uma abordagem feita por algum aluno. Por exemplo, relativamente ao item (a) da Figura 6, a criança deverá responder “O todo foi dividido em duas partes, mas as partes não são iguais. A zona azul é muito menor do que a branca, pelo que não corresponde a $\frac{1}{2}$."

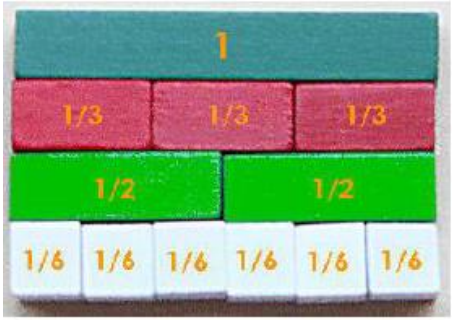
Figura 6: Partes iguais ou desiguais?



Fonte - Primary mathematics Textbook 2B

Pelo que foi visto até o momento percebe-se que a construção do conceito é uma etapa indispensável e fundamental ao êxito no processo de aprendizagem, então pensado na abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato temos: Para o concreto pode-se utilizar as barras Cuisenaire, que são barras de material concreto manipulável que ajudam o aluno a comparar o todo com suas partes e as partes com outras partes criando assim um modelo mental. É interessante observar como essas barras podem ser utilizadas para operar com frações também. Vejamos na figura abaixo.

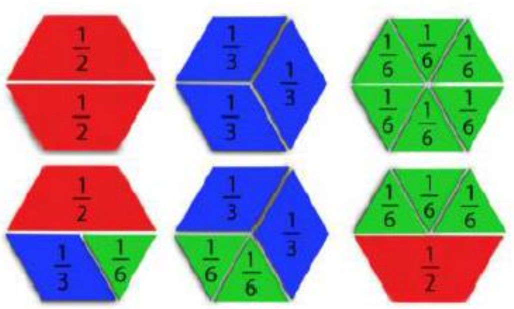
Figura 12 - barras Cuisenaire



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Nesse sentido, outro material que é muito bom são os blocos padrões. Vejamos na figura abaixo:

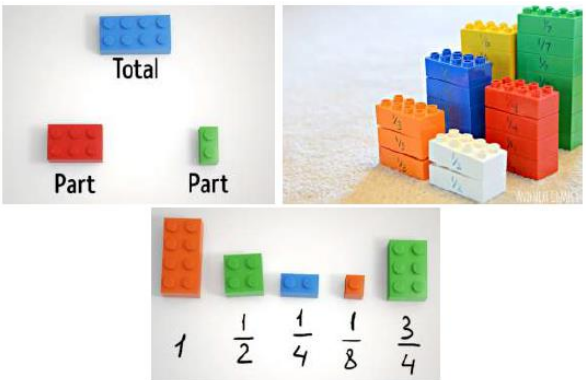
Figura 13 – hexágono fracionado



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Outro material concreto muito bom para a construção do conceito de fração são as peças de Legos. Vejamos na figura abaixo:

Figura 14 – hexágono fracionado



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Exemplos pictóricos constituem representações de materiais concretos que ajudam os alunos a visualizarem conceitos matemáticos. O uso do modelo de barras na abordagem pictórico tem se mostrado eficaz no ensino de fração em Singapura e tendo em vista a construção desse conceito é apresentado ao aluno a representação abstrata e trabalhada bem essa representação para que o aluno fica familiarizado com essa nova linguagem. O significado de cada símbolo deve estar firmemente enraizado em experiências com objetos reais.

Com a construção do conceito de frações, frações equivalentes, suas representações pictóricos e abstratas enraizadas em experiências com o concreto, o aluno está pronto para entrar em uma nova etapa: A manipulação desses conceitos.

Assim o aluno está pronto para comparar frações e somar frações com denominadores iguais. Por exemplo:

Quem é maior $\frac{2}{5} ou \frac{3}{5}$? Neste caso fica fácil, pois o aluno nesta etapa tem claramente um modelo mental simples e eficaz e as frações estão expressas na mesma natureza, isto é, mesmo denominador (quintos). Portanto ele sabe comparar com muita naturalidade frações com denominadores iguais. E fazendo uso de uma linguagem clara ele percebe que:

"*2 partes de um todo dividido em 5 partes iguais é menor, que 3 partes do mesmo todo, dividido nas mesmas 5 partes iguais*."

Assim então enfatizamos quanto ao uso de uma linguagem simples e clara, que torna o processo de aprendizagem natural. Mas quanto ao problema de comparar frações com denominadores diferentes. Por exemplo: Quem é maior $\frac{1}{4} ou \frac{1}{5}$? Neste caso entra em cena a capacidade desenvolvida de obter frações equivalentes.

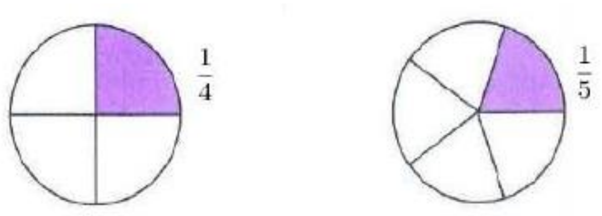
2.4 Frações Equivalentes

Depois de construir o conceito de frações dentro de vários contextos como sugere Skemp, vem a manipulação do conceito para a construção de um novo conceito de grande relevância, podendo ser o conceito mais importante dentro do conceito de frações, que é o conceito de frações equivalentes, pois com o conceito de frações equivalentes desenvolveremos os conceitos de adição, subtração e divisão de frações.

Para a criança que não tem o conceito de frações equivalentes bem construídos e um modelo mental bem elaborado fica uma confusão em sua mente. Portanto, surgem os erros comuns: já que 5 é maior que 4, então $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{4}$. Ou ficam confusos quanto ao entendimento de já que 5 é maior que 4, então como pode $\frac{1}{5}$ ser menor que $\frac{1}{4}$? Com situações concretas e representações pictóricas o aluno observa de maneira clara.

Vejamos:

Figura 15 - Comerá mais bolo



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

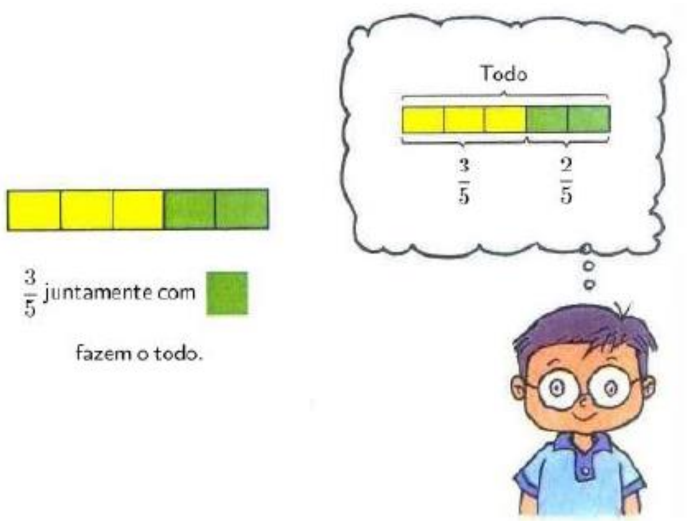
Com essa figura pode-se contextualizar o problema da seguinte maneira: tendo dois bolos iguais, um para dividir entre quatro amigos e o outro para dividir entre cinco amigos. Comerá mais bolo uma pessoa que comeu no primeiro grupo de amigos ou uma pessoa que comeu no segundo grupo de amigos?

Observe que com essa contextualização entra aspectos que motivam o aluno a resolver problemas. Pois, ele pode se colocar entre uma pessoa destes grupos e aí ele pensa qual seria a melhor escolha: está no primeiro grupo ou no segundo grupo? Contextualizar o problema é a melhor maneira de capitar atenção do aluno.

Mas é preciso focar na natureza dos objetos que estão sendo comparados. Vejamos uma pergunta muito comum: o que é mais importante: o amor ou o dinheiro? Como podemos comparar o amor e o dinheiro? Não podemos esquecer que a medida que comparamos estamos realizando a ação de observar uma mesma característica ou seja a mesma natureza. Assim, como podemos responder a perguntas do tipo: quantos litros tem um metro?

Como já havia falado anteriormente existe uma ação que muitas vezes nos impede de ver todos os elementos envolvidos na fração. Na maioria das vezes o professor conduz sua aula, focado apenas nas partes do todo em destaque. Mas é importante que seja enfatizado a parte não destacada, pois é ela que completa o todo. E muitos problemas são resolvidos a partir dessas partes. Que podemos chamar de partes restantes.

Figura 16 - somar ou subtrair frações com denominadores iguais

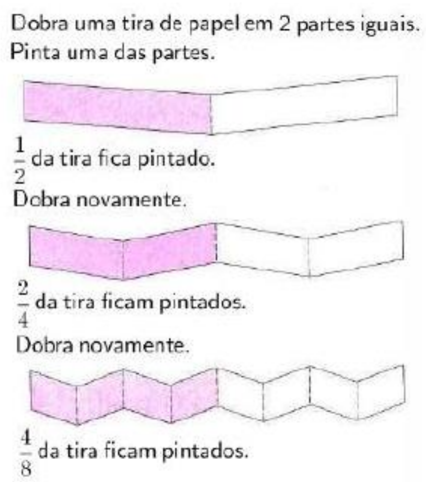


Fonte - Primary mathematics Textbook 2B

Seguindo a mesma linha de raciocínio o aluno pode somar ou subtrair frações com denominadores iguais ou diferentes. Mais é importante sempre motivar ao uso de materiais concretos ou o uso de representações pictóricas, não desligando essa representação da representação abstrata. Neste contexto é muito importante que o aluno saiba bem obter frações equivalentes.

Assim vejamos uma situação que contribui para a construção desse conceito: somar ou subtrair frações com denominadores iguais

Figura 17 – fações equivalentes 01.



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Ao dobrar a tira de papel o aluno é levado a perceber um fato visível e palpável, que é a mesma porção sendo representada de formas diferentes. Assim ele tem:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}.$$

A partir de atividades como essas em vários contextos o aluno deve ser levado a perceber a regularidade da multiplicidade entre os numeradores e denominadores. Vejamos uma situação que leva a uma nova abordagem na variação da natureza do todo: tome uma moeda de 1 real. Agora considere existentes moedas de 50 centavos, 25 centavos, 20 centavos, 10 centavos, 5 centavos, 2 centavos e 1 centavo. Dentro deste contexto podemos expressar que:

A moeda de 50 centavos é $\frac{1}{2}$ real, pois precisamos de 2 moedas para obter 1 real.

A moeda de 25 centavos é $\frac{1}{4}$ real, pois precisamos de 4 moedas para obter 1 real.

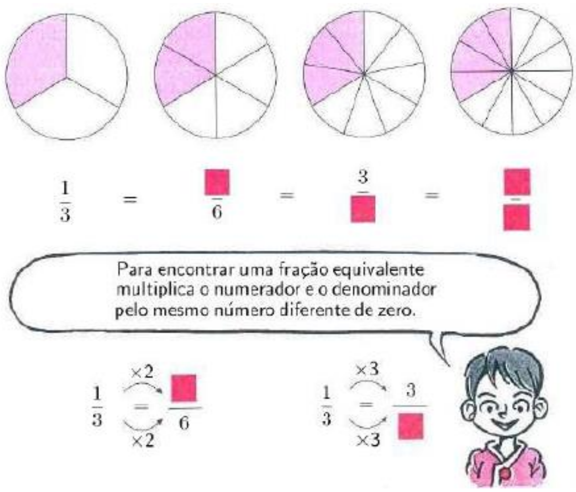
A moeda de 20 centavos é $\frac{1}{5}$ real, pois precisamos de 5 moedas para obter 1 real.

A moeda de 10 centavos é $\frac{1}{10}$ real, pois precisamos de 10 moedas para obter 1 real.

A moeda de 1 centavo é $\frac{1}{100}$ real, pois precisamos de 100 moedas para obter 1 real.

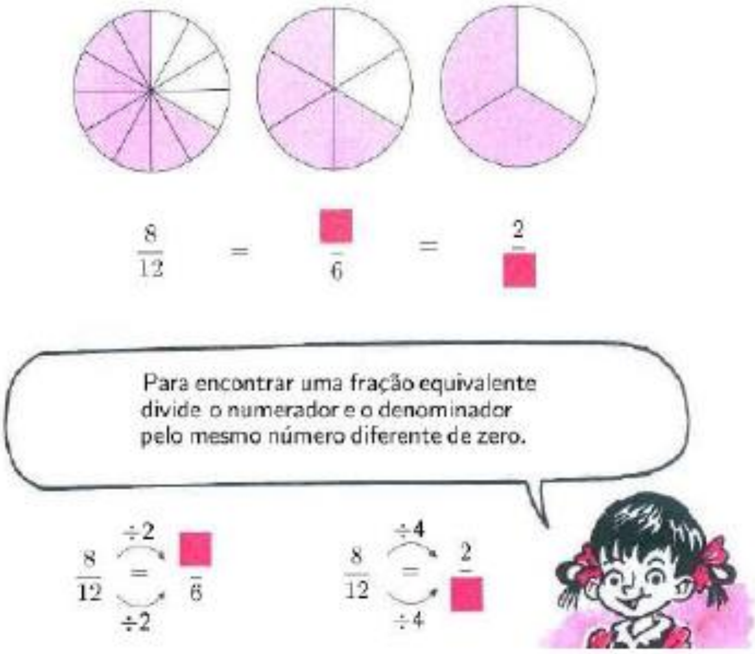
Vejamos dois exemplos de atividades do livro Primary Mathematics Textbook que buscar a construção do conceito de frações equivalentes nas imagens abaixo:

Figura 18 – fações equivalentes 02.



Fonte - Primary mathematics Textbook

Figura 19 – fações equivalentes 03.



Fonte - Primary mathematics Textbook

Visto o conceito de frações equivalentes em vários contextos e como obter essas frações, assim fica pronto o terreno para a adição e subtração de frações, que serão trabalhadas em duas situações: denominadores iguais, ou seja, aqueles cuja natureza do todo é a mesma e denominadores diferentes, ou seja, aqueles cuja natureza do todo é diferente. Lembrando que denominador é aquele que qualifica a natureza do todo em meios, terços, quartos, quintos,... para isso vamos observar cada caso usando o modelo de barras.

2.5 Adição e subtração de fração

Na adição de frações com denominadores iguais temos que a natureza do todo é a mesma, então tomar 2 partes de um todo que foi dividido em 8 partes iguais e depois tomar 3 partes do mesmo todo que foi dividido nas mesmas 8 partes iguais é o mesmo que somar o numerador que representa aquele que enumera, ou seja, aquele que quantifica as partes tomadas e preservar a qualidade do todo. Em matemática para operar é preciso que tenhamos objetos de mesma natureza, se, é claro, queremos que o resultado preserve a natureza dos objetos somados, ou seja, se desejamos somar 2 laranjas com 3 maçãs devemos buscar que natureza podemos somar, pois se formos somar a natureza da nome da fruta não vamos conseguir, mas se pensamos que estamos somando frutas então temos 5 frutas.

2 laranjas + 3 maçãs = ? laranjas.

2 laranjas + 3 maçãs = ? maçãs.

2 laranjas + 3 maçãs = 5 frutas.

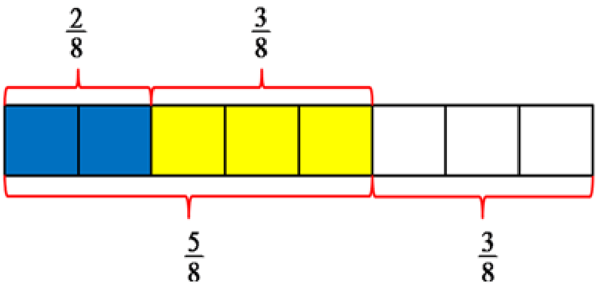
> Imagine o leitor que pergunta a uma criança de 5 ou 6 anos. Quanto é três gatos mais duas rosas?". Mesmo que a resposta seja cinco, há claramente um problema de lógica. A pergunta seguinte pode ser Cinco quê?". Naturalmente que não são nem cinco gatos nem cinco rosas. Quanto muito, seriam cinco seres vivos, na medida em que tanto os gatos como as rosas são seres vivos. Ha uma espécie de lei fundamental nas adições e nas subtrações que é a necessidade de uma natureza comum para os objetos a contar de modo a que estas operações tenham lógica e façam sentido.(SANTOS, 2015)

Agora vejamos se perguntamos quanto é 2 laranjas + 3 laranjas? Naturalmente a resposta será 5 laranjas. 2 maçãs + 3 maçãs = 3 maçãs.

Neste sentido é importante salientar para a importância de termos denominadores iguais, pois vamos preparar o aluno para caso esses denominadores sejam diferentes.

Vejamos a soma $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$ como exemplo.

Figura 20 – soma com mesmos denominadores.



Fonte – do autor.

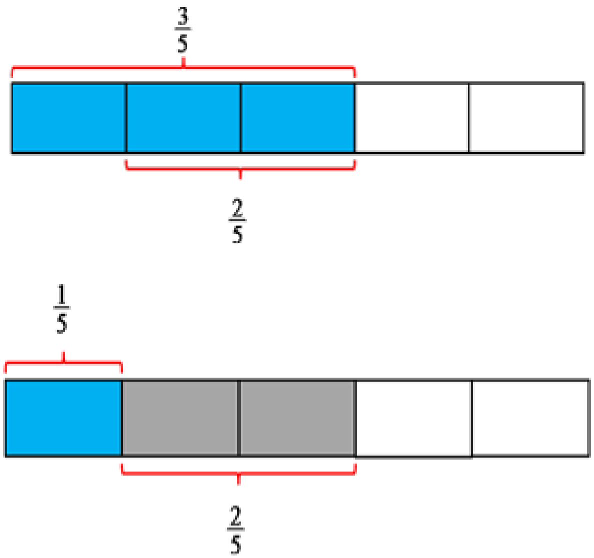
Portanto, o que se segue é que $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ e vale destacar sempre a parte restante $\frac{3}{8}$, sendo essa parte aquela que completa o todo. Essa situação deve ser inserida dentro de vários contextos, pois os alunos vão vivenciando e dando significado, o quê o leva a construção de algoritmos como veremos.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Para a subtração segue a ideia similar. Vejamos a subtração como $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$ exemplo.

Na subtração de frações com numeradores iguais temos que como a natureza do todo é a mesma, então retirar 1 parte de um todo que foi dividido em 5 partes iguais de 3 partes do mesmo todo que foi dividido nas mesmas 5 partes iguais é o mesmo que subtrair os numeradores que representam aqueles que enumeram, ou seja, quantificam as partes retiradas e preservar a qualidade do todo. Vejam na modelagem abaixo:

Figura 21– subtração com mesmos denominadores.



Fonte – do autor.

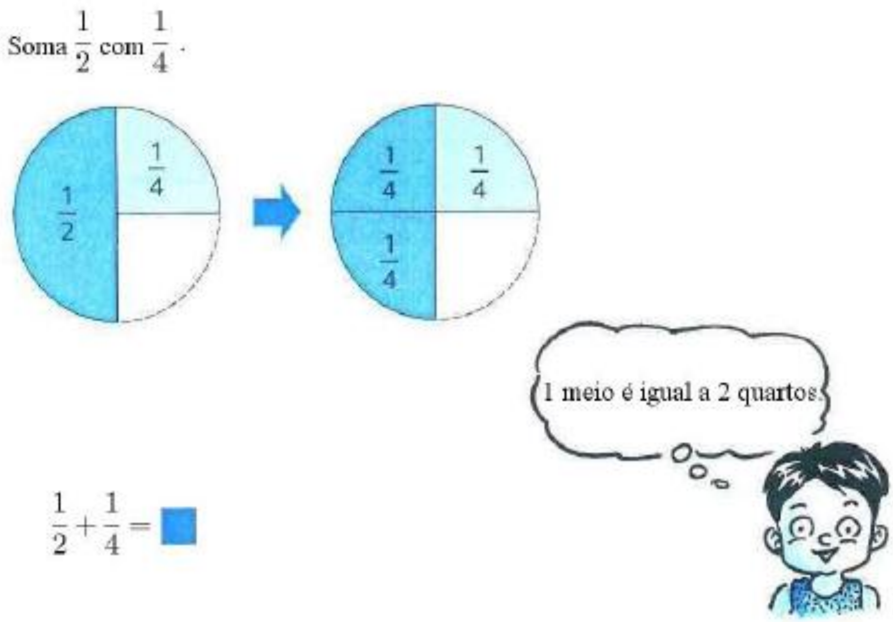
Portanto o que se segue é que $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$ e vale destacar sempre a parte resta $\frac{4}{5}$, sendo essas partes aquelas que completam o todo. Essa situação deve ser inserida dentro de vários contextos, pois os alunos vão vivenciando e dando significado o que o leva a construção de algoritmos como veremos.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Agora vamos a uma etapa das operações que os alunos mais sentem dificuldade que é a soma e subtração de frações com denominadores diferentes. Pois neste momento o que ocorre é o não uso das frações equivalentes para a construção da ideia ou transmite-se essa ideia a partir das frações equivalentes muita rapidamente, como se fosse uma perda de tempo e insere-se logo o uso do mínimo múltiplo comum. Ou ainda, o uso do mínimo múltiplo comum fica restrito a essa aplicação. Mas desta forma o aluno deixa de ter a oportunidade de pensar e aquele conhecimento que foi produzido anteriormente deixa de ter serventia, neste caso o de frações equivalentes. Tendo em vista que na maioria das vezes o aluno aprende frações equivalentes apenas para simplificar frações e por redução, mas muitas vezes é passado despercebido que simplificar nem sempre significa reduzir o numerador e denominador, pois dependendo do contexto é mais interessante obter uma fração equivalente cujo numerador e o denominador são múltiplos.

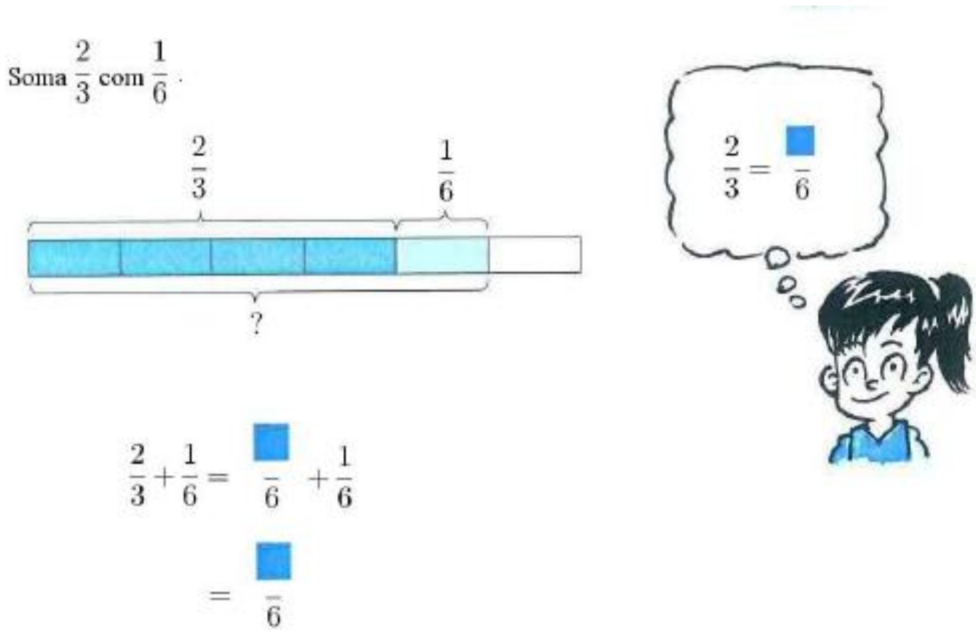
Ainda não há uma sistematização quanto ao processo para a determinação do denominador comum, mas sim uma explicação sobre a necessidade dessa prática.

Figura 22 – subtração com denominadores diferentes 01.



Fonte - Primary mathematics Textbook

Figura 23 – subtração com denominadores diferentes 02.

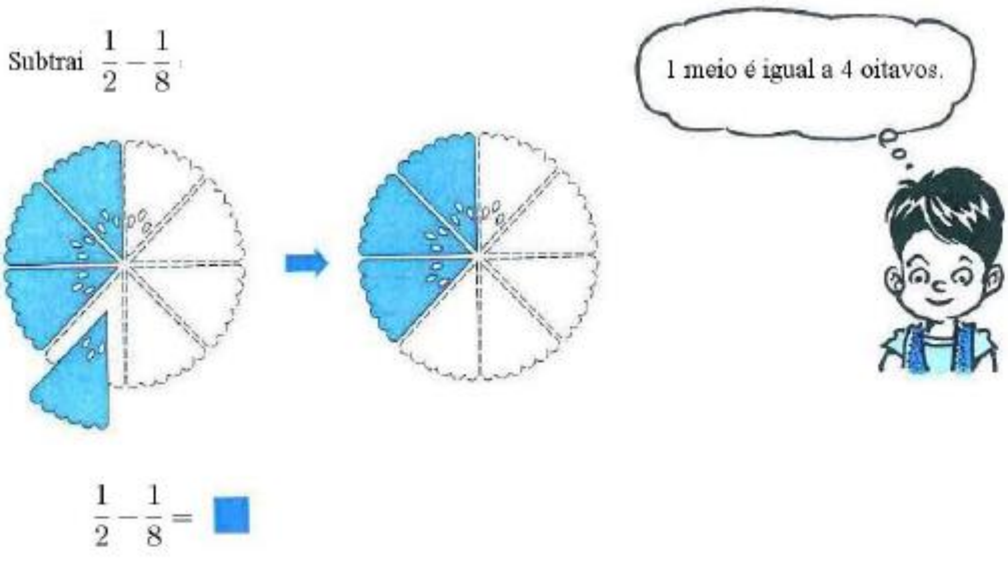


Fonte - Primary mathematics Textbook

Vemos nestas imagens a força do material de Singapura, pois se observa que é um material muito instrutivo e que conduz o aluno ao aprender. Com explicações essenciais. Por ilustração o aluno é levado à compreensão.

Constitui um exemplo do mesmo tipo quanto à subtração:

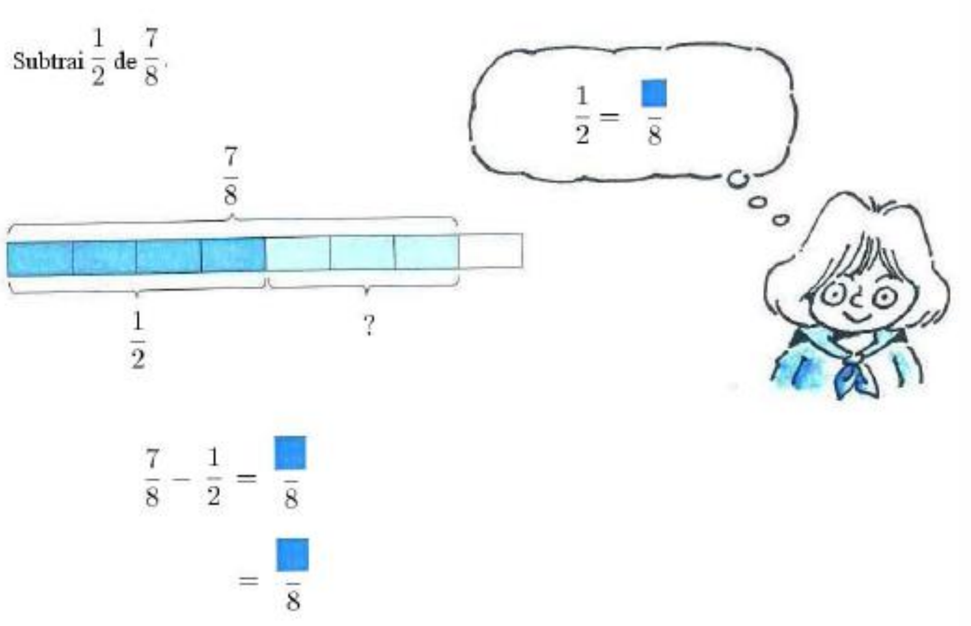
Figura 24 – subtração com denominadores diferentes 03.



Fonte - Primary mathematics Textbook

Temos que na passagem de um círculo para o outro é indicado tudo que acontece, assim o que se espera do aluno é que ele pense e faça relação entre a imagem e a expressão abaixo dela, para obter a resposta. Vejamos outra situação em que a figura apresenta instruções claras e o aluno deve apenas fazer relação:

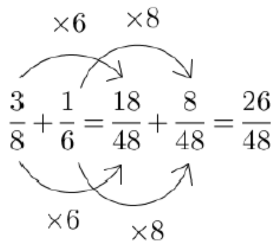
Figura 25 – subtração com denominadores diferentes.



Fonte - Primary mathematics Textbook

Vejamos que de alguma forma buscamos uma regularidade para a obtenção dos denominadores comum. Dentro deste contexto, não há uma preocupação com a necessidade de que esse denominador seja o menor. Para esse objetivo basta encontrar um fator multiplicativo para cada fração que são as parcelas a serem somadas e obter frações equivalentes que igualem os denominadores.

Vejamos no caso $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}$. Temos que neste caso podemos tomar como fator multiplicativo da fração $\frac{3}{8}$ o denominador da fração $\frac{1}{6}$, ou seja, 6, ficando assim $\frac{3\cdot 6}{8\cdot 6}=\frac{18}{48}$ e o mesmo com a fração $\frac{1}{6}$ podemos tomar como fator multiplicativo da fração $\frac{3}{8}$, ou seja, 8, ficando assim $\frac{1\cdot 8}{6\cdot 8}=\frac{8}{48}$. Portanto vejamos o esquema a seguir:



Mas enfatizamos que para a construção desse conhecimento não devemos nos apegar a ideia de que esse denominador seja o menor múltiplo comum a aos denominadores em contexto, tendo em vista que ele pode sim logo em seguida obter a fração equivalente irredutível. Assim temos,

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 6}{8\cdot 6}+\frac{1\cdot 8}{6\cdot 8}=\frac{18}{48}+\frac{8}{48}=\frac{26}{48}$$

E segue de

$$\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

Observe que esse método leva o aluno à álgebra da soma entre frações, mas que o professor não precisa se antecipar para essa observação, isso depende da turma em contexto. Pelo que vimos no método acima temos:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot d}{b\cdot d}$$

Vejamos que existe outra forma de obter frações equivalentes com denominadores comuns e que levará naturalmente a trabalhar com o menor múltiplo comum.

Vejamos os exemplos:

$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}$. Vamos fazer duas listas. Aquelas com as frações equivalentes a $\frac{3}{8}$ e a lista das frações equivalentes a $\frac{1}{6}$:

Frações equivalentes a $\frac{3}{8}$: $\left(\frac{3}{8},\frac{6}{16},\boxed{\frac{9}{24}},\frac{12}{32},\frac{15}{40},\boxed{\frac{18}{48}},\frac{21}{56},\frac{24}{64},\ldots\right)$.

Frações equivalentes a $\frac{1}{6}$: $\left(\frac{1}{6},\frac{2}{12},\frac{3}{18},\boxed{\frac{4}{24}},\frac{5}{30},\frac{6}{36},\frac{7}{42},\boxed{\frac{8}{48}},\frac{9}{54},\ldots.\right)$.

Observamos que ambas as sequências a partir das frações equivalentes conseguimos obter denominadores comuns. E ainda, observando os denominadores temos os respectivos múltiplos, onde se destacam os comuns, em especial o menor. Desta forma temos que o aluno vai fazendo ligação da obtenção de frações equivalentes com múltiplos e em especial menor múltiplo comum.

2.6 Multiplicação de frações

Agora vamos nos debruçar sobre a operação de multiplicação de frações. Mas, para este objetivo ser alcançado com sucesso vale lembrar que na multiplicação a natureza dos fatores são diferentes. Nas aplicações práticas da multiplicação no sentido aditivo, ao contrário do que se passa com as adições e subtrações, os fatores não têm a mesma natureza: um desempenha o papel de multiplicador e o outro de multiplicando. Para isso é preciso que o aluno tenha conhecimento e capacidade de identificar os papeis de cada fator.

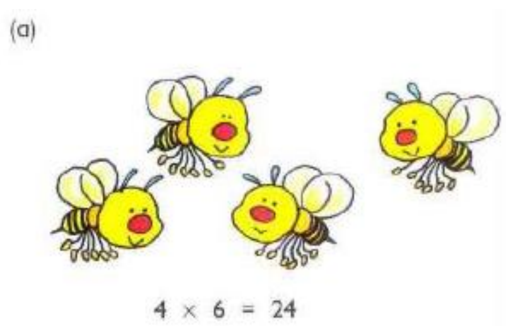
Como exemplo podemos observar a figura abaixo retirada de um livro. Esse é um tipo de erro que não pode ser cometido, pois vai contra o princípio mais fundamental da multiplicação que é o principio aditivo.

Figura 26 - multiplicando

Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Diferentemente vejamos outro exemplo:

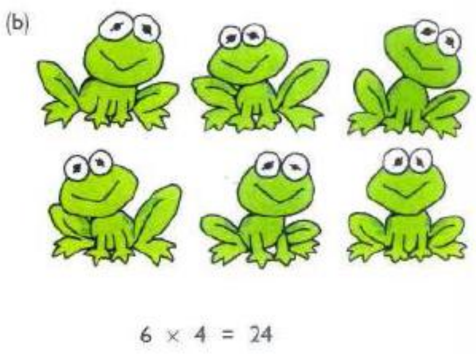
Figura 27 – multiplicando com operador 01



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Podemos observar que temos 4 abelhas onde cada abelha tem 6 patinhas. Então fica claro que a cada abelha está associado o número 6. Ou seja, 6 + 6 + 6 + 6 = 4 x 6. E assim não podemos deixar de conduzir o ensino para a intencionalidade, que é entender quem é o multiplicando e o multiplicador (operador). Neste caso das abelhas temos que o número de abelha é o multiplicador (operador), pois o número de abelha indica quantas vezes vamos adicionar o número de patas que tem em cada abelha. Sendo assim o número de patas aquele que está sendo multiplicado, o que justifica seu nome ser multiplicando. Outra forma de se observar é que entre os números (4, 6, 24) apenas o 6 e 24 representa o número de patas. O 4 não é uma quantidade de patas, mas sim o número de repetições. O 4 tem um papel operador, sendo denominado de multiplicador. Vejamos outro exemplo para essa finalidade:

Figura 28 – multiplicando com operador 02



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

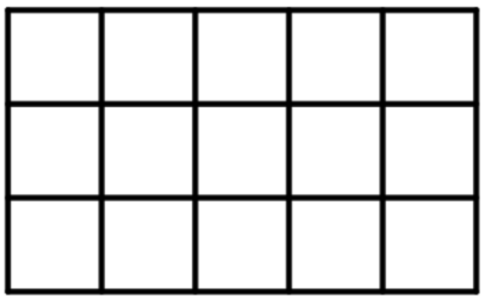
Observe que cada sapo opera como sendo aquele que carrega o número total de objetos que queremos contar, ou seja, o número de patas que queremos contar. Sendo assim, o número de sapos o operador, isto é, multiplicador, e o número de patas em cada sapo, como sendo o que se deseja multiplicar, isto é, multiplicando. É importante que ao aluno seja apresentado ao problema e que ele encontre o sentido na expressão 6 x 4 = 24 a partir da figura. Pois assim o aluno é posto a pensar. Não podemos cair na ansiedade pelos resultados. Julgar que isso é uma perda de tempo é um ato muito agressivo aos estímulos, que são mortificados. Já sabemos que 4 x 6 = 6 x 4, porém o que interessa e precisa ser enfatizado é que na primeira multiplicação o 4 tem papel de operador e na segunda multiplicação o 4 tem papel de multiplicando. É preciso ter muita clareza da intencionalidade das atividades propostas, para que o aluno não caia no mecanismo, ou seja, antes do aluno entrar no processo de manipulação (manuseio), é importante dar clareza ao que se propõe.

Assim com esse tipo de problema onde o foco não é a multiplicação, mas sim como ela ocorre e seu principio fundamental, a identificação do operador (multiplicador) e o multiplicando, o aluno vai se preparando para multiplicação entre um número natural e uma fração, uma fração e um número natural e finalizando com multiplicação de frações.

Vale lembrar que muitos significados podem ser fortalecidos com as questões linguísticas, pois tendo em vista que quando dizemos 4 vezes 3 passos, o que queremos dizer é que a ação de dar 3 passos será realizada 4 vezes. Então, a uma tendência em falarmos sempre primeiro o operador e em seguida o operado convencionando que o operador sempre estará a esquerda na expressão. Observa-se assim que o operador realiza a ação e o operado recebe a ação. Mas é importante que os problemas levem o aluno a essa conclusão e que essa conclusão não seja colocada de forma precoce. É importante que o aluno seja solicitado a explicar qual a relação entre o concreto e abstrato. O operado será definido pela situação concreta acionada.

Uma situação que contribui muito para fortalecer o entendimento do papel do multiplicador e do multiplicando e suas relações é a representação desses elementos como sendo lados de um retângulo. Este modelo pictórico serve de gancho para a compreensão de multiplicação de frações.

Figura 29 - Multiplicação no sentido aditivo: modelo retangular.



Fonte – do autor

O que temos no caso do retângulo é uma aplicação da multiplicação que fortalece o conceito e o principio aditivo, pois o aluno é levado a perceber que se ele conta primeiro o número de quadradinhos na 1ª fila na horizontal e em seguida contar o número de filas então fará 3 vezes 5. Mas por outro lado ele pode contar o número de quadradinhos em uma coluna e contar o número total de colunas e então ele fará 5 vezes 3. Assim o aluno chega em 15 quadradinhos. No primeiro caso as repetições estão associadas ao número total de filas. Enquanto no segundo caso as repetições estão associadas ao número total de colunas. A assim a aplicação leva a compreensão de que a multiplicação é comutativa, ou seja, que se relacionam por troca sem alteração no resultado.

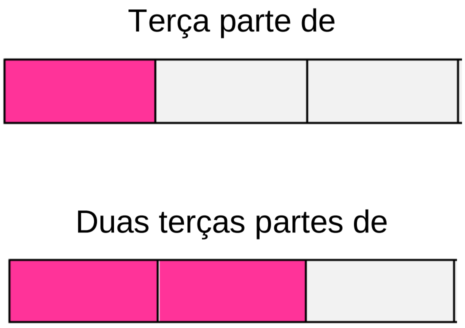
Como vimos anteriormente em situações concretas na multiplicação de números naturais no sentido aditivo, que os fatores desempenham papeis diferentes, ou seja, temos que um é o multiplicador (operador) e o outro é o multiplicando. Assim também ocorre na multiplicação de frações. Mas vale observar que existe uma observação a ser feita. E essa observação é um conceito adicional.

Na multiplicação de números naturais temos que o multiplicador faz unicamente o papel de replicador, isto é, aquele que indica quantas vezes um número será repetido, já na multiplicação de fração temos que o multiplicador desempenha um novo papel que é o de “fazer parte de”, ou seja, considerando certo valor, fazer parte deste valor. Vejamos:

Sabemos que quando dizemos a terça parte de $\blacksquare$, o que estamos fazendo é $\frac{1}{3}\times\blacksquare$ e assim o que vemos é que o multiplicador $\frac{1}{3}$ está fazendo tanto um trabalho de repetir como o de fazer parte de $\blacksquare$. Vejamos que se tomarmos duas terças partes de $\blacksquare$, o que estamos a fazer é repetir duas vezes a terça parte de $\blacksquare$. Mas como construir essa ideia e levar o aluno a entender que $\frac{1}{3}$ é um operador que toma parte de um todo.

É natural o aluno perceber essa relação, pois ele neste momento tem um modelo pronto e que pode ser muito bem utilizado. Veja o modelo de barras:

Figura 30 – terços 01

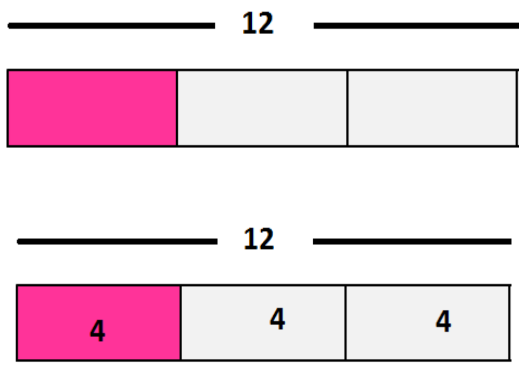


Fonte: do autor.

E com uma situação concreta ele é conduzido a perceber que tomar a fração de um número é o mesmo que multiplicar essa fração por esse número. Vejamos um exemplo:

Se João tem 12 balas e vai consumir $\frac{1}{3}$. Quantas balas João vai consumir?

Figura 31 – terços 02



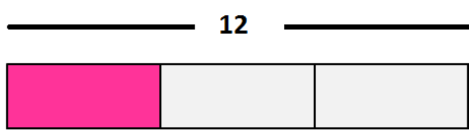
$$\frac{1}{3}\times 12 = 4$$

Fonte: do autor

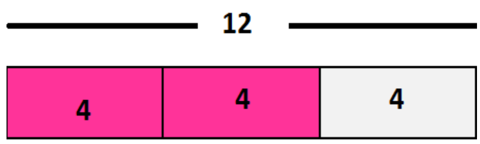
O aluno assim observa que o resultado é 4. Neste momento a imagem é apresentada ao aluno em forma de problema, para que o aluno busque explicar a expressão associada a imagem.

Se João tem 12 balas e vai consumir $\frac{2}{3}$. Quantas balas João vai consumir?

Figura 32– terços 03



$$\frac{2}{3}\times 12 = 8$$



$$\frac{2}{3}\times 12 = 8$$

Fonte: do autor

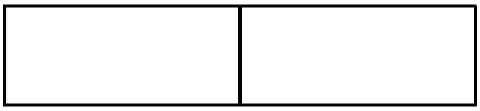
De acordo com *a* Matemática de Singapura, na abordagem para conceituar a multiplicação de frações é preciso levar em consideração três casos: primeiro caso é a multiplicação de um numero natural por uma fração, o segundo caso é de uma fração por um número natural e o terceiro caso é a multiplicação de uma fração por outra fração. Estes casos podem ser compreendidos a dois níveis (o ideal é alcançar ambos): procedimental, que consiste em saber fazer (saber executar) e conceitual, que consiste em saber profundamente o que se faz (explicar o motivo porque se faz assim), os quais podem ser abordados na ordem a seguir.

2.6.1 Número natural multiplicado por fração (replicando fração)

Este caso é sem duvida o mais fácil, porém ele nos prepara para o segundo e terceiro casos, daí sua importância. Vejamos uma situação:

$4 \times \frac{1}{2}$: Pela linguística temos uma interpretação simples que é ao observar 4 como operador o que estamos fazendo é repetindo $\frac{1}{2}$ quatro vezes. Assim podemos falar quatro vezes meio. Observando o modelo de barras temos que o todo divido em duas partes iguais onde cada parte vale $\frac{1}{2}$, o que queremos é tomar quatro partes iguais a essas.

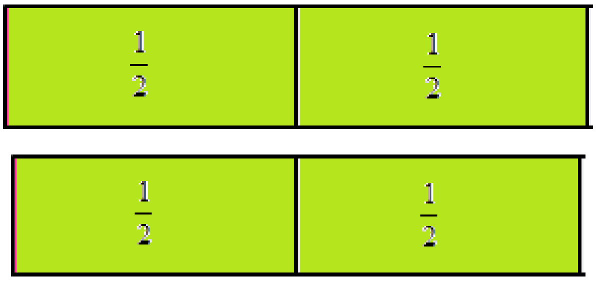
Figura 33 - Todo dividido em duas partes iguais



Fonte: do autor

Para tomar 4 parte iguais a $\frac{1}{2}$ precisamos fabricar dois todos iguais ao de cima. Portanto,

Figura 34 - Todo dividido em duas partes iguais



Fonte: do autor

Segue que quando tomamos quatro partes de $\frac{1}{2}$ precisamos tomar 2 todos completos então o que temos é 2 unidades. Vejamos que a situação pode ser problematizada quando podemos pensar em 4 meios de melancia.

Figura 35 – meios de melancia

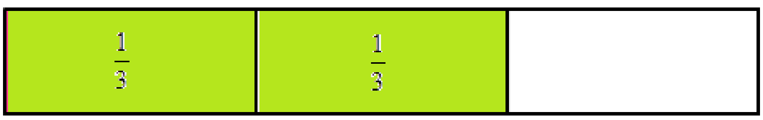
$$4\times\frac{1}{2}=2$$

Fonte - Do autor

O que juntando dois meio de melancia temos uma unidade de melancia e, portanto, finalmente duas melancias. Esse é um bom exemplo para começo. Mas vejamos outro exemplo para ampliação do conceito. Na abordagem feita nos livros de Singapura o aluno é posto em uma situação que ele deve encontrar e explicar a lógica entre a imagem e a expressão abaixo da imagem, para depois o conteúdo ser explicado. Assim atingindo os dois níveis: procedimental e conceitual.

$4\times\frac{2}{3}$: Ou podemos dizer que queremos o quadruplo de dois terços de chocolate. Neste caso como queremos o quadruplo de dois terço ao observar na figura temos que uma única barra não nos fornece o total de terços que queremos tomar:

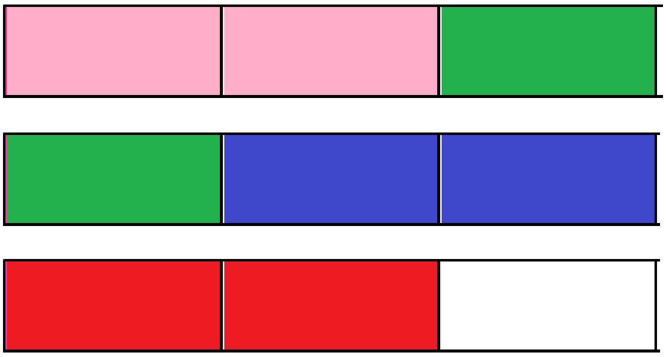
Figura 36 – dois terços



Fonte: do autor

Assim precisamos fabricar mais terços, pois na figura acima o que temos é apenas uma vez $\frac{2}{3}$. Assim vejamos:

Figura 37 – 4 vezes dois terços



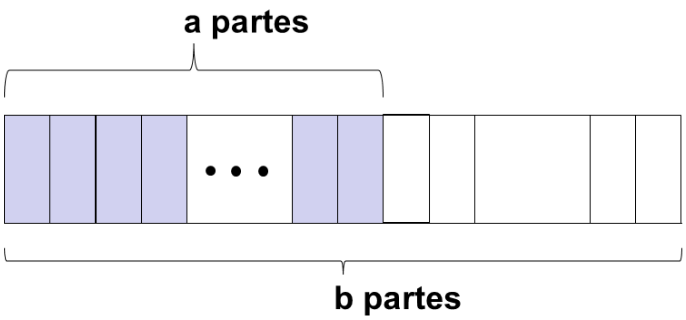
Fonte: do autor

Observando que cada dupla de barras com a mesma cor representa dois terços, tomados e portando tomamos 4 grupos, o que contabiliza oito terços. Ao final de resolver problemas dessa natureza o aluno é levado a perceber que $4\times\frac{2}{3}=\frac{4\times 2}{3}$. Assim a natureza do todo não foi modificada, e esse é o principal fato que torna esse caso simples.

2.6.2 Fração multiplicada por número natural (fração de um número natural)

Neste caso precisamos de mais cuidado ao analisar, pois o aluno na conceituação de fração sabe que quando escrevemos $\frac{a}{b}$, o que estamos pensando é na relação parte-todo, onde o todo foi dividido em b partes iguais e assim qualificado, e desse todo foram tomadas a partes. Vejamos o modelo de barras:

Figura 38 – fração generalizada

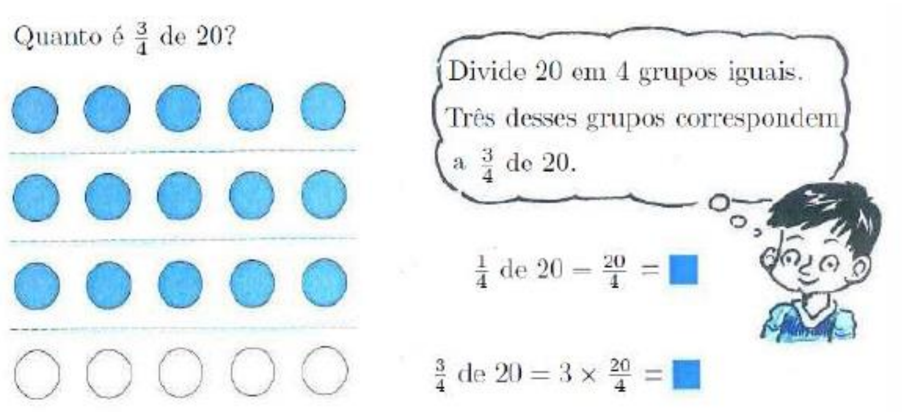


Fonte - do autor

De posse desse conhecimento, tomar certa fração de um número é o mesmo que dividir esse número (que é o todo) em partes iguais à natureza do todo da fração desejada, e em seguida tomar a quantidade de partes desejadas.

Vejamos na figura abaixo dois exemplos de problemas retirado do manual Matemática de Singapura resolvidos por estratégias diferentes.

Figura 39 – fração de número 01

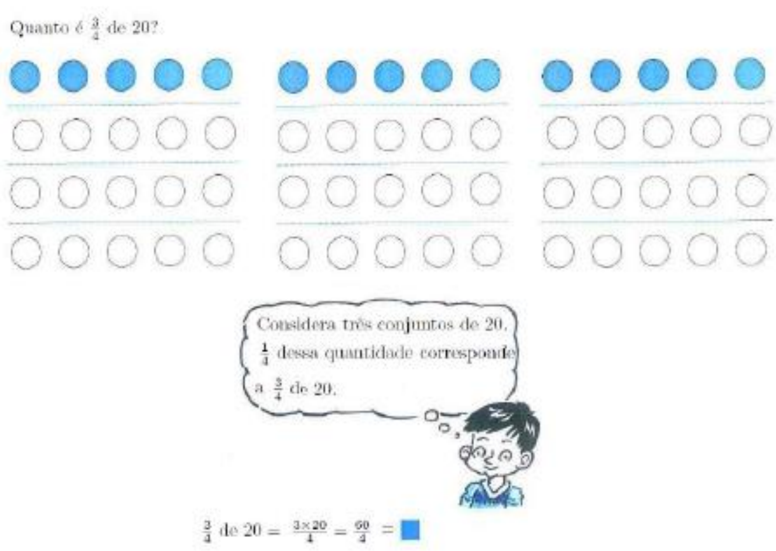


Fonte - Primary mathematics Textbook

Agora vejamos o segundo método:

Figura 40 – fração de número 02

Figura 31: Fração × número natural: primeiro método.



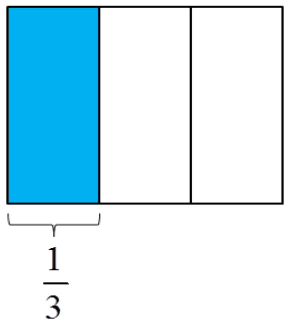
Fonte - Primary mathematics Textbook

2.6.3 Fração multiplicada por fração (fração de fração)

Temos que para generalizar o fato de que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ precisamos antes propor ao aluno problemas do tipo “quanto é um meio de um terço de um bolo”. Assim vamos a casos do tipo $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}$.

Vejamos a solução na figura 38 abaixo:

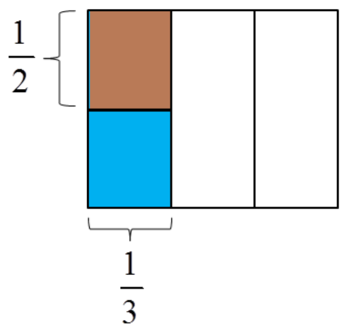
Figura 41 – fração de fração 01



Fonte: do autor

Temos que na figura acima foi tomado um terço e agora queremos um meio deste terço. Portanto teremos que dividi-lo ao meio e em seguida tomar metade:

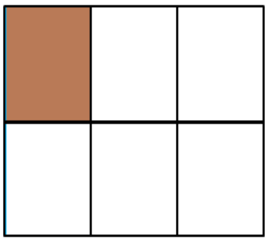
Figura 42 – fração de fração 02



Fonte: do autor

Mas observando a figura temos um problema de conceito, pois na figura maior sua divisão foi feita em partes diferentes e portanto para que ela fique com partes iguais a parte final tomada, vamos dividir os outros dois retângulo maiores ao meio:

Figura 43 – fração de fração 03



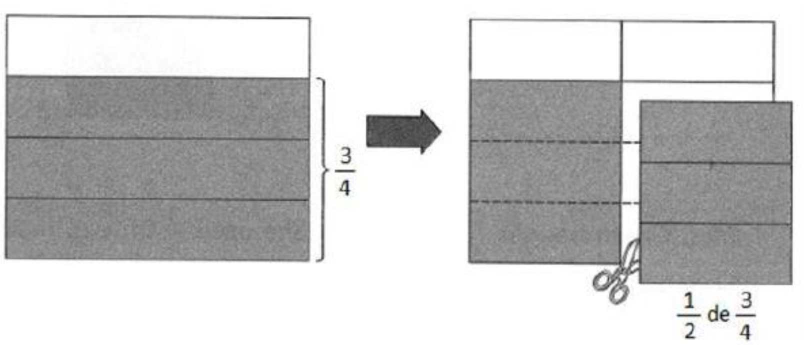
Fonte:do autor

Portanto na figura final temos $\frac{1}{6}$. Com esse tipo de problema o aluno é levado a concluir que $\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{m\cdot n}$.

Para generalizar vamos observar a dinâmica utilizada no manual do 5º ano do Matemática de Singapura, ano onde se trata o caso geral, utiliza-se uma tesoura como metáfora para o papel da fração como multiplicador.

Quanto é $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$?

Figura 44 – fração de fração 04



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Vejamos que na segunda imagem foram cortadas metade da figura, e consequentemente, metade de $\frac{3}{4}$. Mas por outro lado observando a figura toda temos 3 partes iguais de um total de 8 partes iguais. Portanto $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$. Esse tipo de abordagem conduz o aluno a concluir que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

2.7 Divisão de frações

Antes de chegarmos a discursão de como dividir frações se faz necessário falar sobre divisão de números naturais, pois como esse conceito foi construído ao longo do ensino é fundamental para o que queremos.

Por longo tempo a construção do conceito de divisão está associada à ideia de repartir, mas chega certo momento que essa ideia se torna insuficiente, pois como podemos então pensar repartir meio por terço? Por outro lado, é muito natural falar em repartir 4 por 2.

Imagine que precisássemos criar um contexto para ensinar fração de tal maneira que dentro desse contexto a finalidade fosse que o aluno tivesse que dividir $\frac{7}{4}$ por $\frac{1}{2}$. Como faríamos isso? Esse é um problema intrigante e que precisa ser pensado com muito cuidado.

Para dar significado a divisão e assim ser capaz de elaborar problemas onde o aluno tenha que dividir frações, precisamos observar mais uma vez a multiplicação em seu principio fundamental que é o aditivo.

Para formular uma questão de multiplicação temos um processo bem natural. Por exemplo: Tenho 8 flores em cada um dos 4 vasos. Quantas flores tenho no total? E pelo que vimos temos um operador que é o multiplicador neste caso o 4, que vai replicar, ou seja, repetir a quantidade de vezes que contamos o agrupamento de flores o multiplicando, neste caso o 8. Portanto, naturalmente temos $4 \times 8\, flores = 32\, flores$. Temos aqui que para elaborar esse problema foi apenas necessário definir o operador e o operando.

Para formular problemas de divisão vamos primeiro levar em consideração duas situações: Omitir o multiplicando perguntando sobre ele ou omitir o multiplicador perguntando sobre ele. Vejamos cada situação na tabela abaixo:

Tabela 02 - divisão

Tabela para sistematizar a divisão	
***Omitir o multiplicando* perguntando sobre ele**	***Omitir o multiplicador* perguntando sobre ele**
Divisão como repartição	Divisão como medição
Partilha equitativa	Agrupamento como unidade de medida
Quanto cabe a cada um?	Quantas vezes cabe?

Exemplo:	
Quero repartir igualmente 32 flores por 4 vasos. Quantas flores devo colocar em cada vaso?	
Parte da igualdade $4 \times ?\ flores = 32\ flores$,ou seja, $32 \div 4 = ?$.	Parte da igualdade $? \times 8\ flores = 32\ flores$.
A natureza aparece na resposta, isto é, 8 flores.	A natureza, que são as flores, não aparece na resposta. Já que a resposta é 4. Neste caso é um número puro.
Trata-se de repartir 32 flores e quatro grupos iguais.	Trata-se de medição, onde oito representa a unidade de medida e 32 representa o que queremos medir. Portanto temos a perguntas "quantas vezes oito cabe em 32".
Pretende-se descobrir o multiplicando	Pretende-se descobrir o multiplicador

Fonte: do autor

Observando a tabela acima devemos ter muito cuidado com o ensino e a manipulação dos conceitos, pois se essas ideias forem bem construídas e trabalhadas ainda nas operações com números naturais, ficará bem mais natural ensinar a operar com frações. A grande questão está na intencionalidade da construção e manipulação dos conceitos. É importante que os alunos estejam realizando atividades que claramente desenvolva habilidades para a construção de novas habilidades e competências. A situação de multiplicação no sentido aditivo origina duas situações de divisão, conforme o objetivo seja a determinação do multiplicando ou do multiplicador. Naturalmente, esta ideia é vital para uma boa compreensão das divisões que envolvem frações. E dessa maneira fica claro a importância da teoria de Skemp, onde reforça a importância da construção dos conceitos e que eles devem ser construídos seguindo uma série de atividades estruturadas que conectam esses conceitos. Assim o problema da ruptura dos números naturais para os números racionais (fracionários) pode ser mais positivo se o aluno construiu e manipulou os conceitos das operações em sua totalidade com a intencionalidade de que eles também se conectam.

Dentro desse contexto, vamos falar sobre Divisão para repartir no contexto das frações desenvolvendo a noção de inverso e divisão para medir no contexto das frações.

2.7.1 Divisão para repartir no contexto das frações: noção de inverso

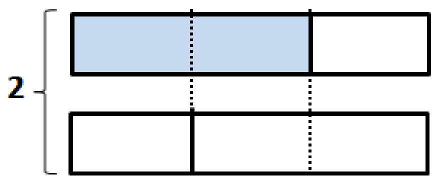
É muito comum no cotidiano fugirmos de problemas onde temos de repartir objetos por partes. Vejamos no caso que cada metade de pessoa recebe 24 reais. Quanto recebe cada pessoa?

Neste caso o que queremos é $24 \div \frac{1}{2}$. Mas que o problema está num contexto onde naturalmente se busca a multiplicação como ferramenta, pois como $\frac{1}{2}$ cabe duas vezes em 1. Então precisamos do dobro do número de vezes, ou seja, 2×24.

O que chama atenção e é ideia fundamental para entendermos a divisão de frações é o fato de termos recorrido a resposta de quanto é $1 \div \frac{1}{2}$, ou seja, quantas vezes $\frac{1}{2}$ coube na unidade? E a resposta para essa pergunta é o que chamamos de inverso multiplicativo. Portanto, o inverso de $\frac{1}{2}$ é 2. Mas quanto ao caso de explicar sobre o inversos de $\frac{2}{3}$? Ou seja o inverso de frações do tipo $\frac{n}{m}$. Neste caso vamos mostrar uma sequência didática bem estruturada para o sucesso dessa ideia:

$\frac{2}{3}$ *pode ser pensado como sendo* $\frac{1}{3}$ *de 2 unidades*. Vejamos na figura que para tirar $\frac{1}{3}$ de 2 unidades dividimos cada unidade em 3 partes, e cada duas partes representa um terço das duas unidades, e tomamos duas partes em azul:

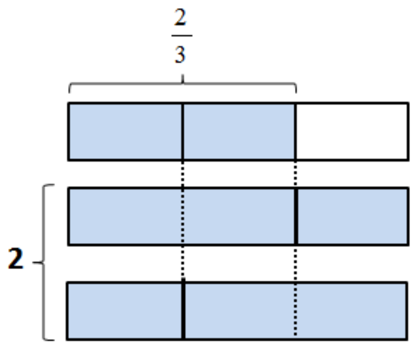
Figura 45 – divisão de fração 01



Fonte: do autor

$\frac{2}{3}$ cabe 3 vezes dentro de 2 unidades. Temos que o primeiro retângulo foi representado como $\frac{2}{3}$ de uma unidade. Mas, tomando dois retângulos iguais ao primeiro como sendo nossas 2 unidades, temos que $\frac{2}{3}$ cabe 3 vezes dentro de 2 unidades.

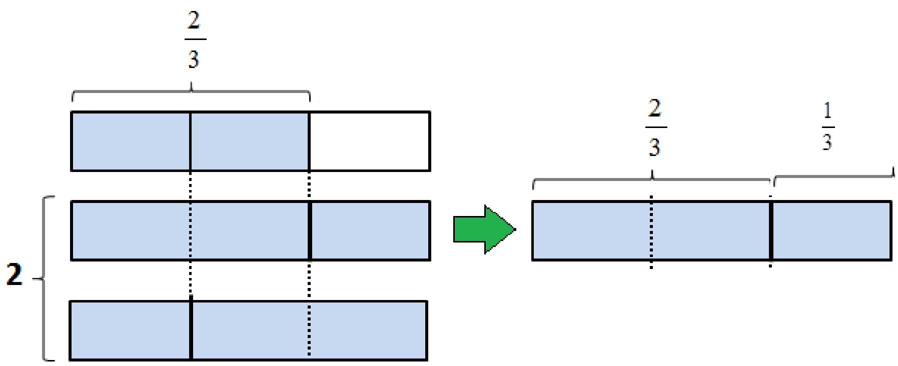
Figura 46 – divisão de fração 02



Fonte: do autor

Observando a figura abaixo e comparando $\frac{1}{3}$ que é a parte não pintada com $\frac{2}{3}$ que é a parte pintada temos que $\frac{1}{3}$ é metade de $\frac{2}{3}$, temos que $\frac{2}{3}$ cabe uma vez e meia na unidade, ou seja, cabe $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ vezes numa unidade. Vajamos na figura baixo:

Figura 47 – divisão de fração 03

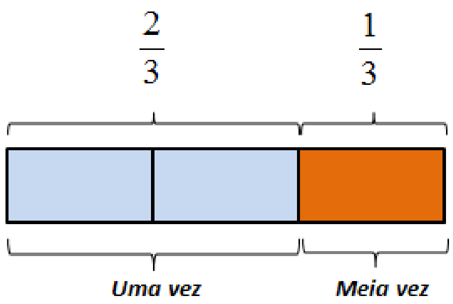


Fonte: do autor

Portanto o inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$.

Em síntese podemos observar na figura que comparando $\frac{2}{3}$ com $\frac{1}{3}$, temos que $\frac{1}{3}$ é metade de $\frac{2}{3}$, consequentemente $\frac{2}{3}$ cabe na unidade uma vez e meia, ou seja, $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Figura 48 – divisão de fração 04



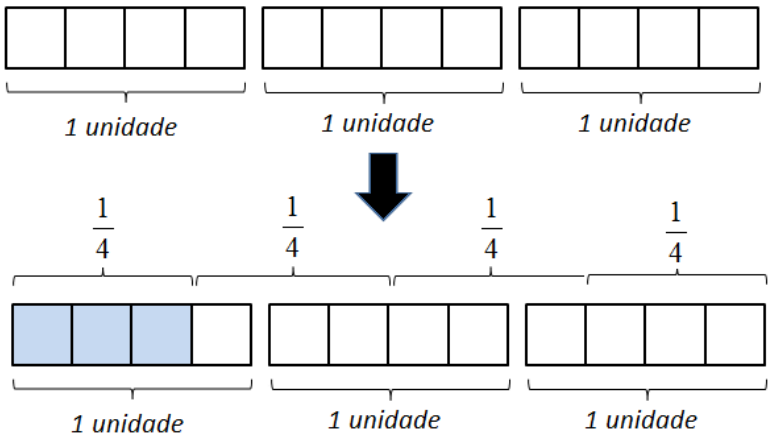
Fonte: do autor

Exatamente da mesma forma, podemos argumentar que o inverso de $\frac{n}{m}$ é $\frac{m}{n}$. É preciso ter muito cuidado para que o aluno tenha compreensão dessa ideia, para isso se faz necessário muito cuidado com as escolhas feitas para explicação e para exercícios, principalmente no primeiro momento.

Vejamos outro exemplo que para compreensão da ideia: Quem é inverso de $\frac{3}{4}$?

$\frac{3}{4}$ *pode ser pensado como sendo a quarta parte de 3 unidades*. Vejamos na figura que para tirar $\frac{1}{4}$ de 3 unidades dividimos cada unidade em 4 partes iguais, e cada três partes representa $\frac{1}{4}$ das 3 unidades, e tomamos uma delas que possuem três partes (em azul):

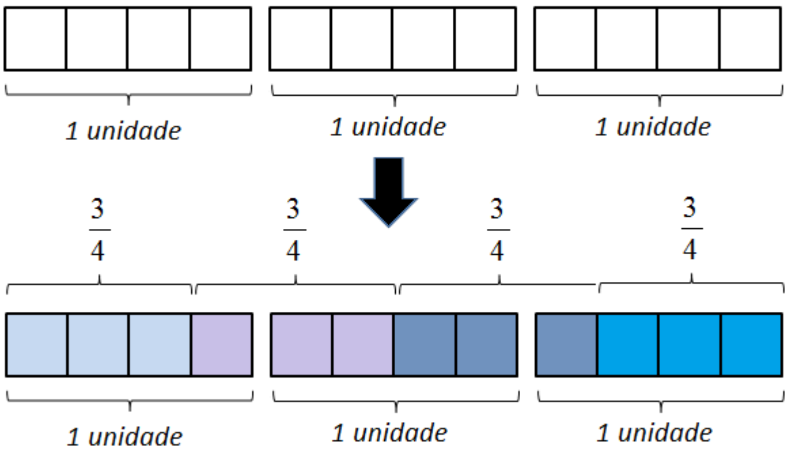
Figura 49 – divisão de fração 05



Fonte: do autor

$\frac{3}{4}$ cabe 4 vezes dentro de 3 unidades. Vejamos na figura abaixo que $\frac{1}{4}$ em relação às 3 unidades é o mesmo que $\frac{3}{4}$ em relação o unidade:

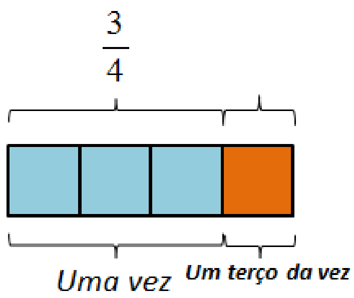
Figura 50 – divisão de fração 06



Fonte – do autor

Observando a figura abaixo e comparando $\frac{1}{4}$ que é a parte não pintada com $\frac{3}{4}$ que é a parte pintada, temos que $\frac{1}{4}$ é um terço de $\frac{3}{4}$, temos que $\frac{3}{4}$ cabe uma vez e $\frac{1}{3}$ na unidade, ou seja, cabem $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ vezes numa unidade. Vejamos na figura baixo:

Figura 51 – divisão de fração 07



Fonte: do autor

Portanto, o inverso de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$.

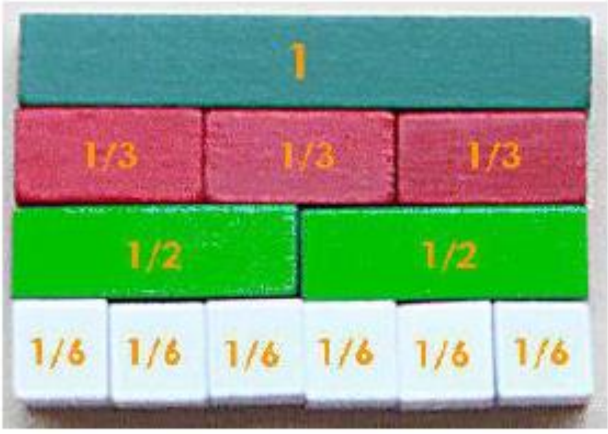
Sendo assim, a divisão pode ser simplesmente transformada numa multiplicação através do conceito de inverso. E concluímos que dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso:

$$\frac{n}{m} \div \frac{p}{q} = \frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}$$

2.7.2 Divisão para medir no contexto das frações

Pensar em divisão de frações é pensar em medição, pois como se sabe, medir é comparar, e como vimos para comparar temos uma pergunta natural a ser feita e respondida: Quantas vezes um número cabe em outro número? Uma boa forma de introduzir essa ideia é usando as barras Cuisenaire, pois como podemos ver na figura o que temos é uma forma concreta de comparar frações. Vejamos a figura abaixo:

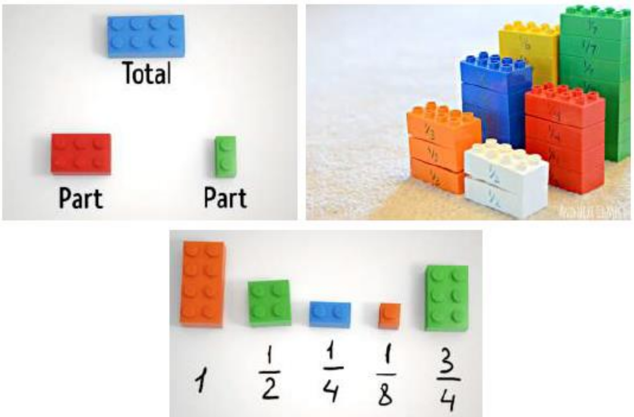
Figura 52 – Explorar as frações com as barras Cuisenaire



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Temos que dentro desse contexto pode ser feito perguntas como: quantas vezes um terço cabe em 1? Quantas vezes um terço cabe em $\frac{1}{2}$? Desta forma o aluno terá a oportunidade de forma concreta vivenciar a divisão. Essas mesmas perguntas podem ser realizadas usando também as peças de lego:

Figura 53 – explorar frações com lego



Fonte: jornal das primeiras matemáticas

Vejamos um exemplo que naturalmente pode ser colocado para os alunos: Quanto é 1 dividido por $\frac{1}{2}$? Vejamos que por medição o que queremos é comparar 1 com $\frac{1}{2}$ e assim fazemos a pergunta “quantas vezes meio ($\frac{1}{2}$) cabe em 1? E a resposta é naturalmente duas vezes. ” Portanto, $1 \div \frac{1}{2} = 2$. E assim esse tipo de pergunta deve ir evoluindo aos poucos. Vejamos uma sequência:

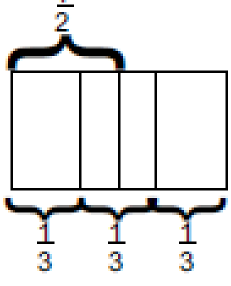
Tabela 03 – quantas vezes?

Divisão	**Pergunta**	**Resposta**
$1 \div \frac{1}{2}$	Quantas vezes meio ($\frac{1}{2}$) cabe em 1?	2 vezes
$2 \div \frac{1}{2}$	Quantas vezes meio ($\frac{1}{2}$) cabe em 2?	4 vezes
$3 \div \frac{1}{2}$	Quantas vezes meio ($\frac{1}{2}$) cabe em 3?	6 vezes
$1 \div \frac{1}{4}$	Quantas vezes a quarta parte ($\frac{1}{4}$) cabe em1?	4 vezes
$\frac{2}{3} \div \frac{2}{3}$	Quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em $\frac{2}{3}$?	1 vezes
$\frac{2}{3} \div \frac{1}{3}$	Quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{2}{3}$?	2 vezes
$1 \div \frac{2}{3}$	Quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em 1?	1 vez e meia = $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Fonte: do autor

De acordo com o PCN’s (1998), no caso da divisão envolvendo frações pode-se interpretá-la como partes que cabem em partes. Assim, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ pode ser interpretado como quantas partes de $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$.

Figura 54 – divisão como medida



Fonte: PNC

Comparando, $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$ pode se observar que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$. Entretanto, nem sempre representações desse tipo permitem a visualização do resultado e por isso é importante ter em mãos outras estratégias. Essa é uma abordagem orientada pelos PNC.

Uma forma eficiente e interessante para comparas às frações nesse processo de divisão de fração como medição é a partir da obtenção de frações equivalentes, deixando assim as frações com mesmo denominador, pois na hora da comparação o processo será bem mais natural. Vejamos como realizar a divisão $\frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$.

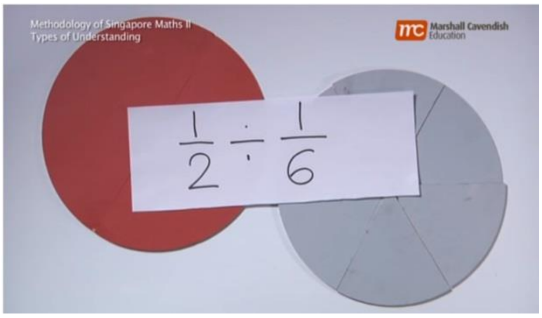
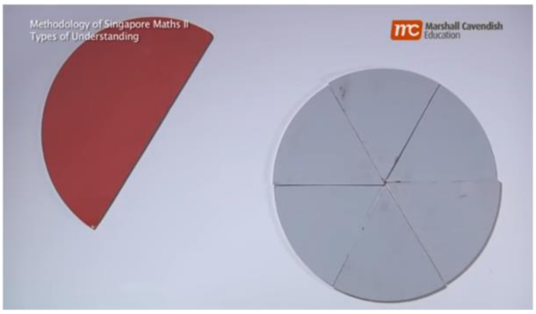
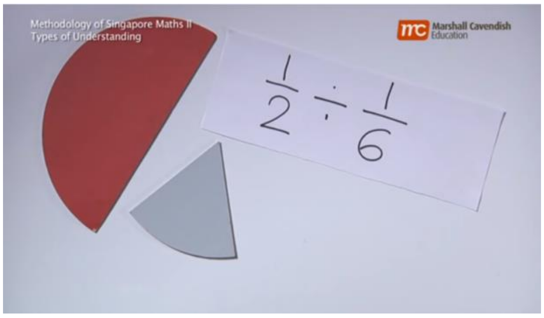
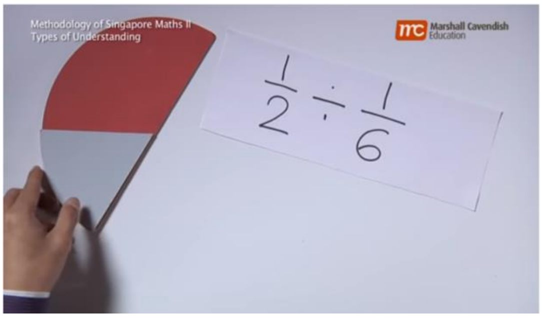
Podemos para sem de longas obter frações equivalentes de tal maneira que ambas as frações fiquem com o mesmo denominador, ou seja, tenham a mesma natureza, é tomando o denominador da primeira fração como fator de multiplicação para a segunda fração, ou seja, $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$. Da mesma forma tomamos o denominador da segunda fração como fator de multiplicação para a primeira fração, ou seja, $\frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{25}{10}$. Agora temos as frações $\frac{25}{10} \div \frac{6}{10}$. Como essas frações estão na mesma natureza podemos desprezar a natureza e comparar diretamente 6 com 25. Portanto, pelo processo de comparação o que temos é quantas vezes 6 cabe em 25, isto é, $\frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$.

Generalizando temos, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$. Como no segundo membro da igualdade temos denominadores de mesma natureza, podemos desprezar os denominadores e comparar diretamente os numeradores, ou seja, perguntar quantas vezes $c \cdot b$ cabe em $a \cdot d$? Portanto, temos $\frac{a \cdot d}{c \cdot b}$. Concluímos que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Note que o mais importante é que todo esse processo de conceituação seja realizado com muito cuidado, seguindo uma ordem onde a intencionalidade esteja muito clara ao que se deseja com cada atividade proposta, e o resultado final seja apenas consequência, pois o que dá autonomia aos alunos em aprender é ser capaz de realizar e explicar o processo. Vejamos a sequência de imagens abaixo que explica com material concreto como dividir frações como medição:

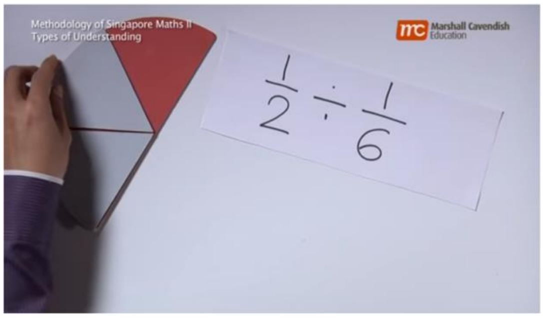
Tabela 04 – passos da divisão.

<table>
<tr><th colspan="2">Situação 01</th></tr>
<tr><td>Queremos dividir $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6}$. Para isso vamos descobrir quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{2}$.</td><td>Na figura abaixo no lado esquerdo temos meio e na direita temos o todo dividido em seis partes iguais.</td></tr>
<tr><td>Figura 55 – divisão de frações 01

Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2</td><td>Figura 56 – divisão de frações 02

Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2</td></tr>
<tr><td>Retiramos $\frac{1}{6}$ para comparar com $\frac{1}{2}$.</td><td>Sobrepondo $\frac{1}{6}$ em $\frac{1}{2}$ para comparar.</td></tr>
<tr><td>Figura 57 – divisão de frações 03

Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2</td><td>Figura 58 – divisão de frações 04

Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2</td></tr>
</table>

Sobrepondo $\frac{1}{6}$ em $\frac{1}{2}$ mais uma vez.

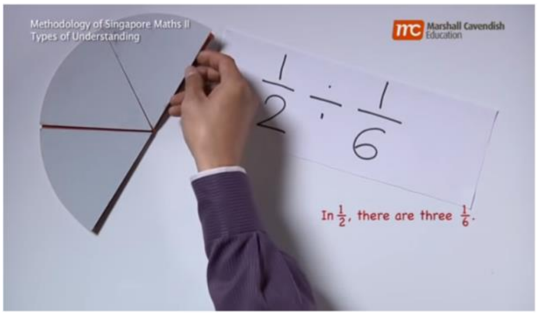
Sobrepondo $\frac{1}{6}$ em $\frac{1}{2}$ pela terceira vez.

Figura 59 – divisão de frações 05



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

Figura 60 – divisão de frações 06



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

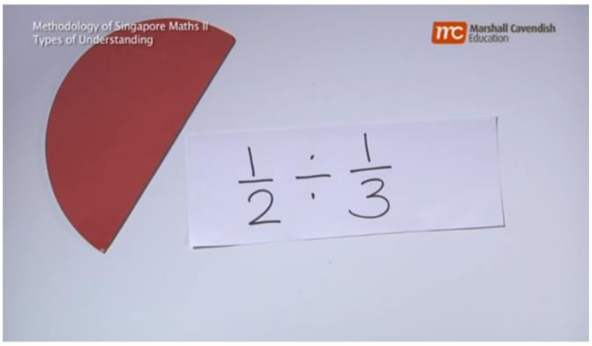
Concluimos que $\frac{1}{6}$ cabe 3 vezes em $\frac{1}{2}$.

Situação 02

Queremos dividir $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$. Para isso vamos descobrir quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$.

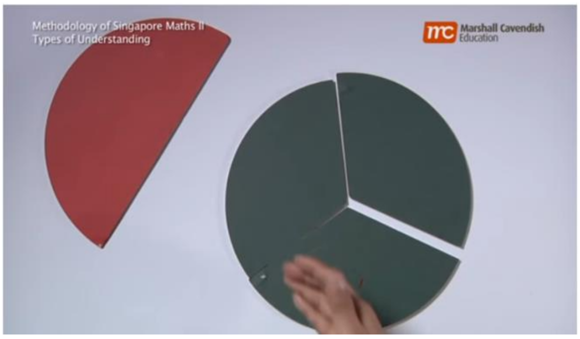
Na figura abaixo, no lado esquerdo, temos meio e na direita temos o todo dividido em três partes iguais.

Figura 61 – divisão de frações 07



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

Figura 62 – divisão de frações 08

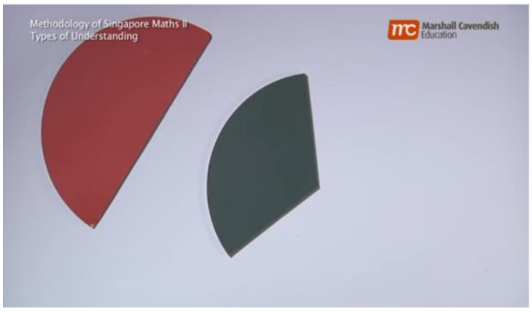


Fonte – you tube e Methodology of Singapore Math Part 2

Retiramos $\frac{1}{3}$ para comparar com $\frac{1}{2}$.

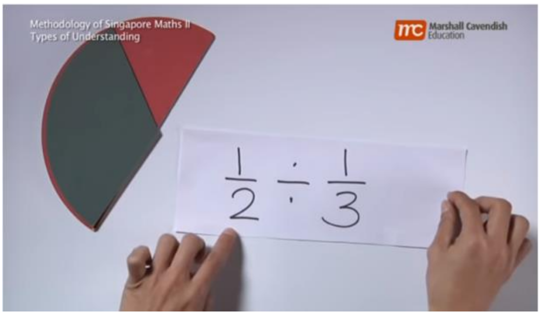
Sobrepondo $\frac{1}{3}$ em $\frac{1}{2}$ para comparar.

Figura 63 – divisão de frações 09



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

Figura 64 – divisão de frações 10



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

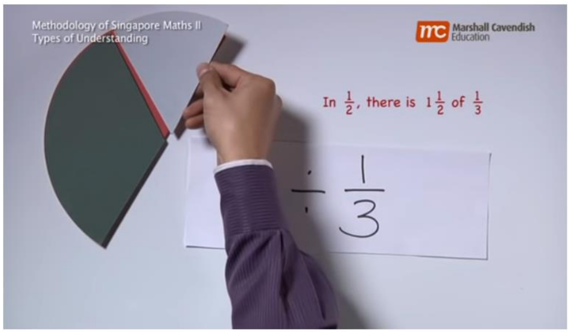
Observe a parte que falta preencher.

Temos que nela cabe essa fração abaixo

Figura 65 – divisão de frações 11

Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

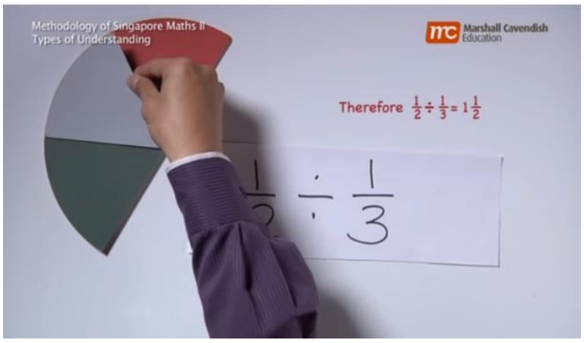
Figura 66 – divisão de frações 12



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

E que a fração citada é metade de $\frac{1}{3}$

Figura 67 – divisão de frações 13

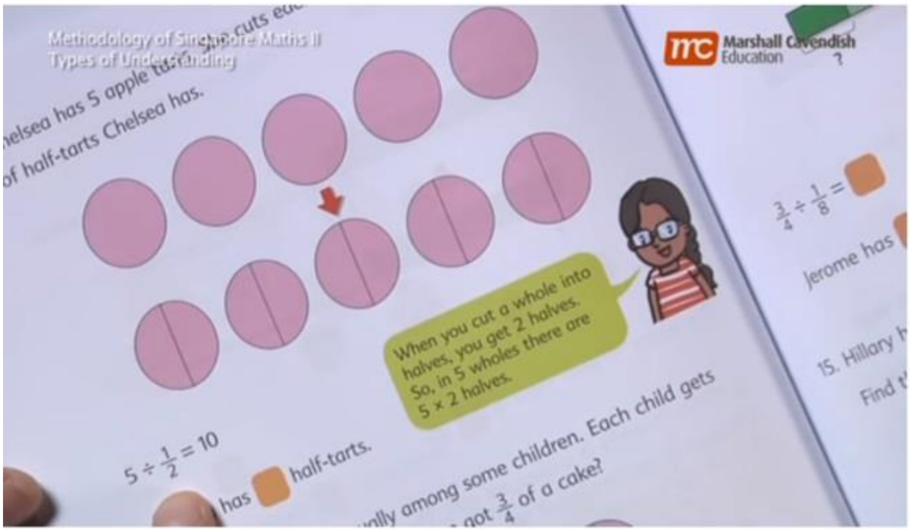


Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

Concluimos que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$, ou seja, cabem $\frac{3}{2}$.

Situação 03
Temos que as imagens foram retiradas de um dos manuais de ensino de Singapura. Onde o objetivo é dividir $5 \div \frac{1}{2}$ e $3 \div \frac{3}{4}$
Basicamente o que se deseja saber é quantas vezes meio cabe em 5.

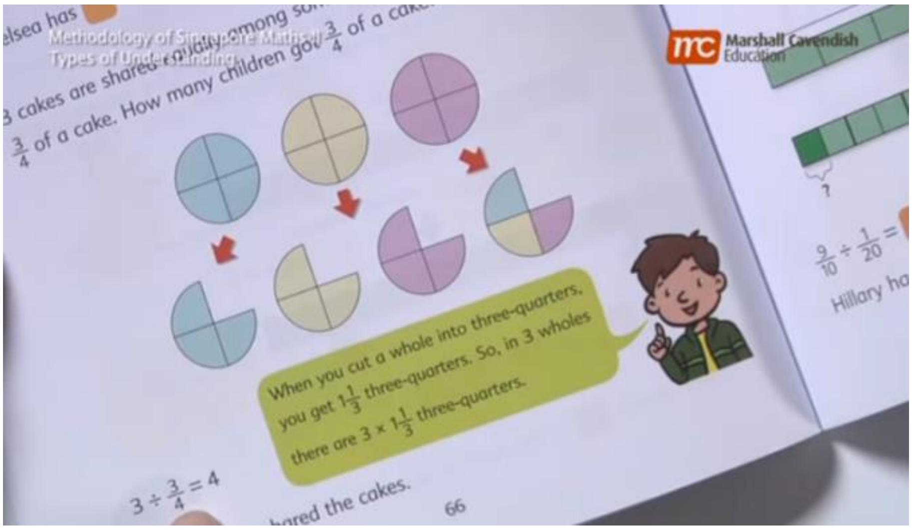
Figura 68 – divisão de frações 14



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

Basicamente o que se deseja saber é quantas vezes três quartos cabe em 3.

Figura 69 – divisão de frações 15



Fonte – you tube Methodology of Singapore Math Part 2

3. APLICAÇÃO E RESULTADOS

Neste capítulo temos como objetivo aplicar o método de Singapura em uma turma de 7º ano da Escola Estadual Dom Otávio Aguiar. Mas para tal, vamos dividir este capitulo nas seguintes etapas: teste diagnóstico, desenvolvimento do tema fração pelo método de Singapura e avaliação pós-aula, cinco amostras e comparação dos resultados.

3.1 Aplicação de 6 problemas diagnósticos na sala do 7º ano

O objetivo do teste diagnóstico é avaliar o conhecimento dos alunos em frações a nível conceitual. Observar se os alunos sabem bem o conceito de fração com ênfase na relação parte-todo, conceito de frações equivalentes e soma de frações. O teste foi aplicado em uma turma de 7º ano da Escola Estadual Dom Otávio Aguiar. Vejamos o teste diagnostico que foi aplicado com 30 alunos.

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

Teste diagnóstico

01. (Conceitual) Que fração tem em cada figura?

Figura 1

Resposta:

Figura 2

Resposta:

Figura 3

Resposta:

02. (Conceitual) Observe as figuras e responda:

Figura 4

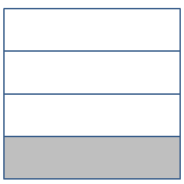
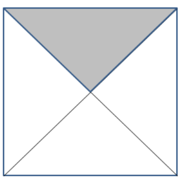


Figura 5

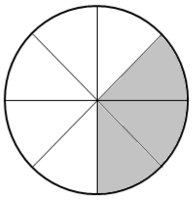


a) Que fração tem em cada figura?

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

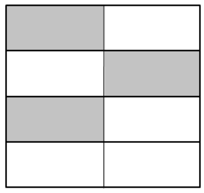
03. (Conceitual) Represente as frações nas figuras abaixo:

Figura 6



Resposta:

Figura 7

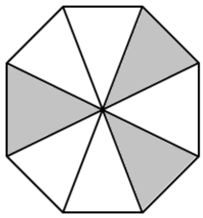


Resposta:

Figura 8

Resposta:

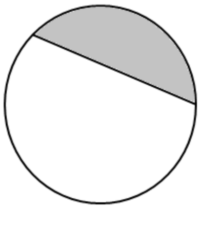
Figura 9



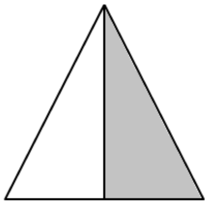
Resposta:

A diferença entre as figuras muda a representação da fração?

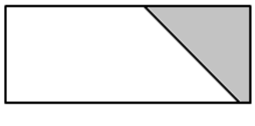
04. (Conceitual) Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?



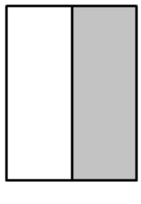
(A)



(B)

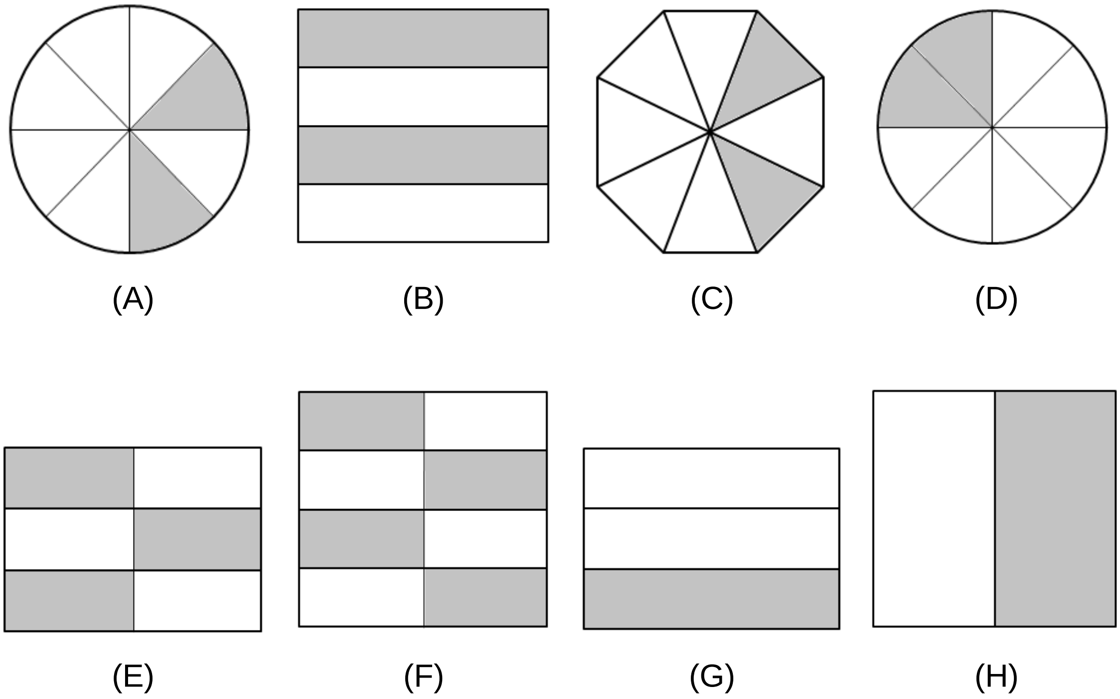


(C)



(D)

05. (Conceitual) agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



Resposta:

06. (Aplicação) João e Maria foram para uma festa de aniversário. João comeu $\frac{1}{3}$ do bolo e Maria comeu $\frac{2}{6}$. Neste caso responda:

a) João comeu mais que Maria? Maria comeu mais que João? ou João e Maria comeram a mesma quantia?

b) Que fração do bolo João e Maria comeram juntos?

Vejamos a tabela abaixo que nos indica o número de acertos e erros em cada questão:

Questão	Acertos	Erros	Não fizeram
01	19	11	0
02	17	13	0
03	11	19	0
04	24	6	0
05	3	24	3
06	0	30	0

3.2 Aplicação de 10 problemas para explorar o método de Singapura na sala do 7º ano

Após aplicar o teste entramos na segunda etapa deste capítulo, que a apresentação do conteúdo em sala da aula. Para isso vamos utilizar o material abaixo que foi produzido baseado no manual de ensino de Singapura. Bem ilustrativo e instrutivo. Com intensão de avaliar pós-aula.

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

***FRAÇÃO** – Relação Parte Todo*

01. Observe as imagens.

Imagem 01

$\frac{1}{4}$ do quadrado está colorido.

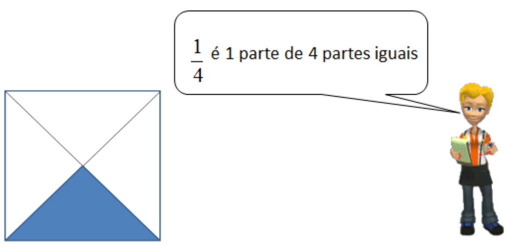
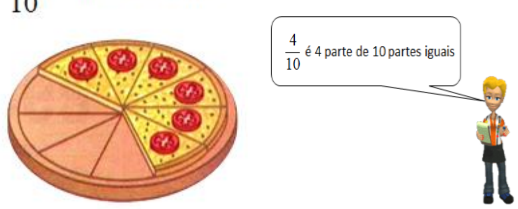
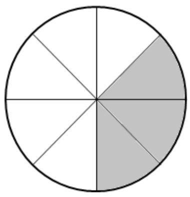


Imagem 02

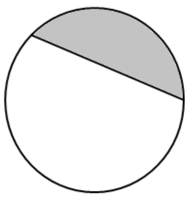
$\frac{4}{10}$ da pizza foi retirada.

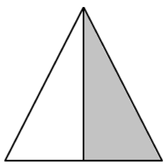


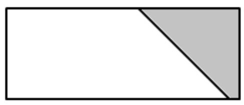
02. De acordo com as figuras abaixo responda:

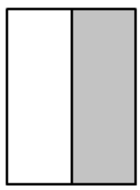
FIGURAS	Em quantas partes iguais é dividido o todo?	Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar?	FRAÇÃO
Figura 1 			Significado:
Figura 2 			Significado:
Figura 3 			Significado:

03. Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?


(A)


(B)

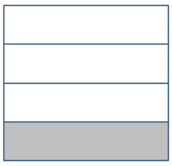

(C)

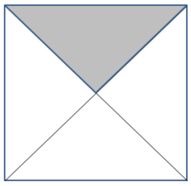

(D)

04. Observe as figuras e responda:

Figura 1

Figura 2

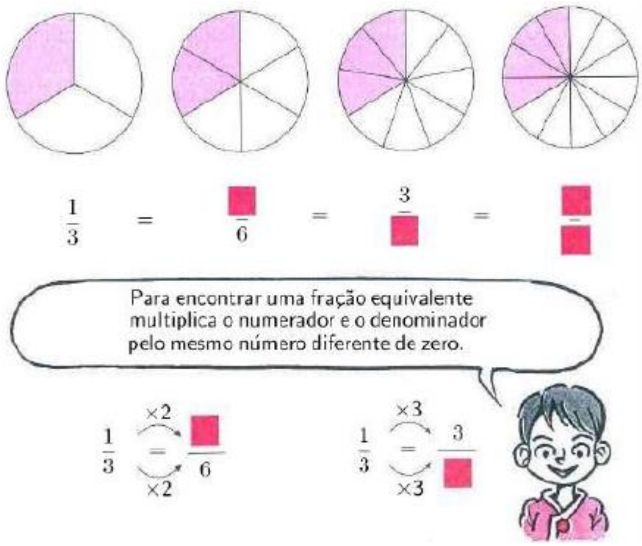




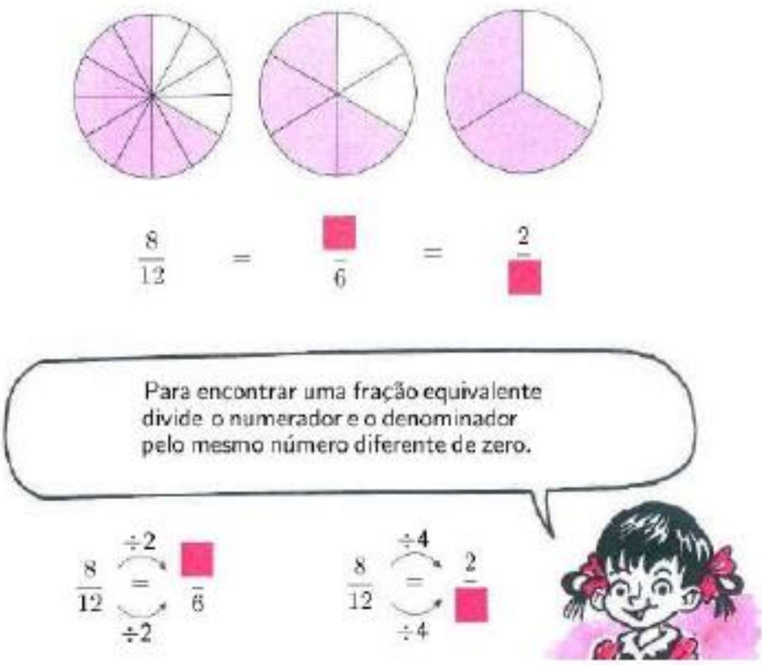
a) Que fração tem em cada figura?

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

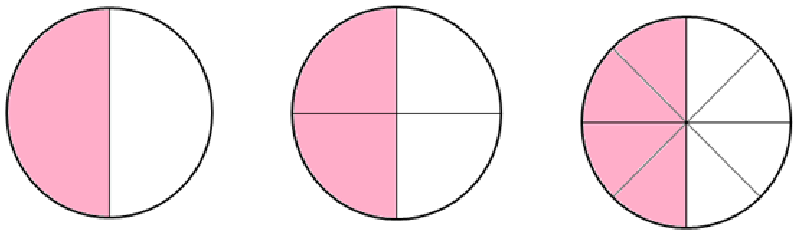
05. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:



06. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

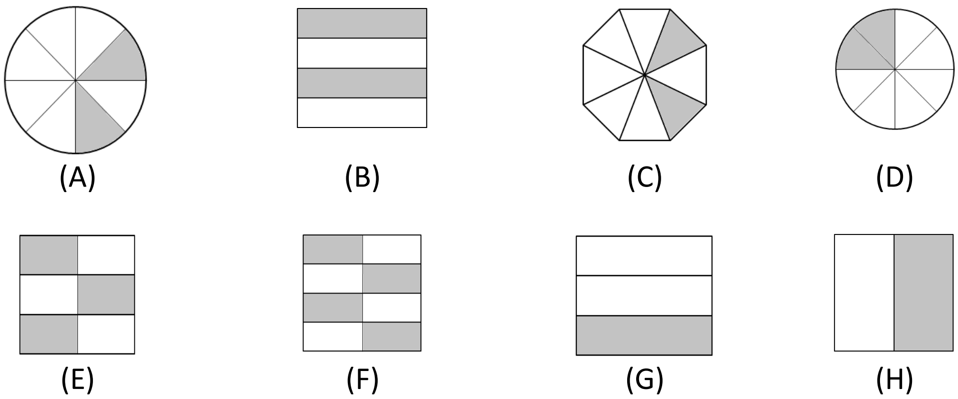


07. Complete os retângulos nas relações de igualdades abaixo:



$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{4} = \frac{4}{\square}$$

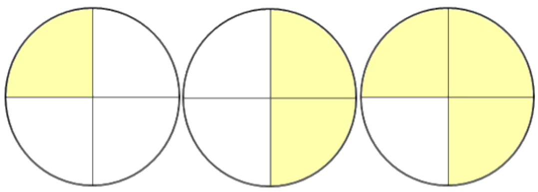
08. Agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



Resposta:

09. Soma de fração com mesmo denominador:

Figura 01



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\square}{4}$$

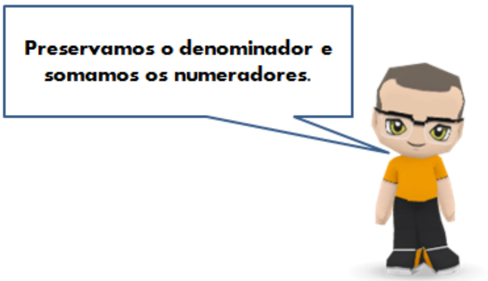


Figura 02

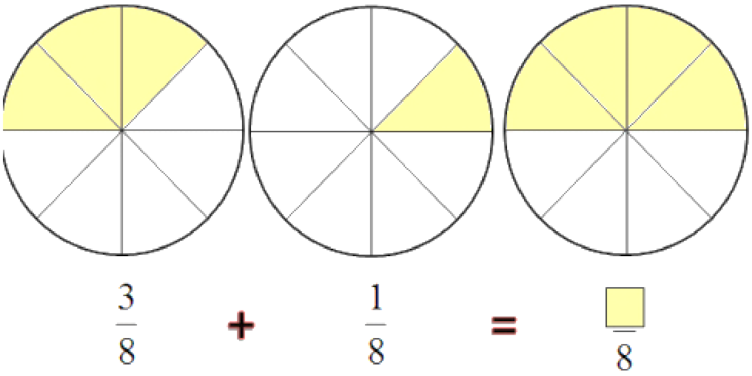
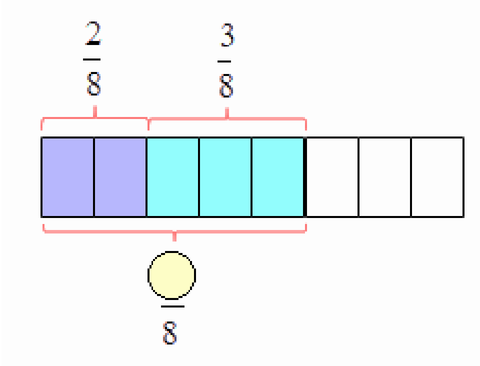
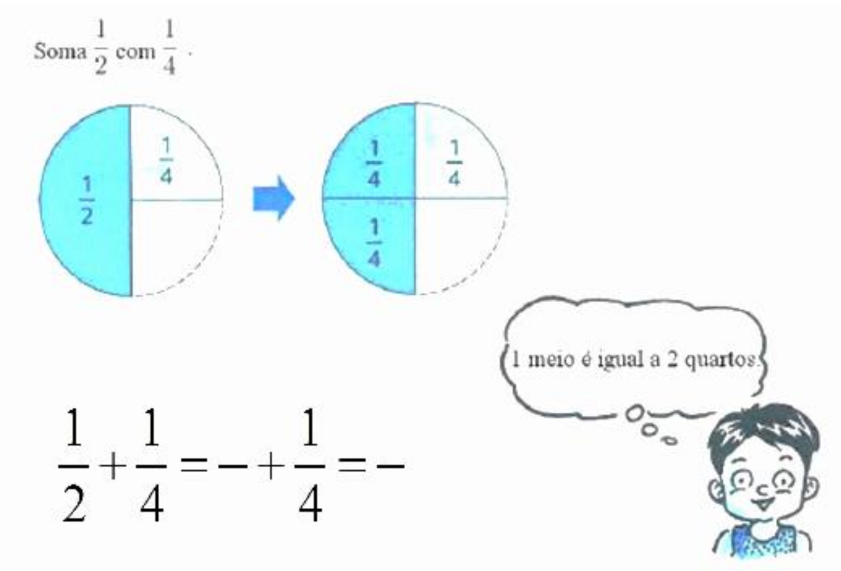
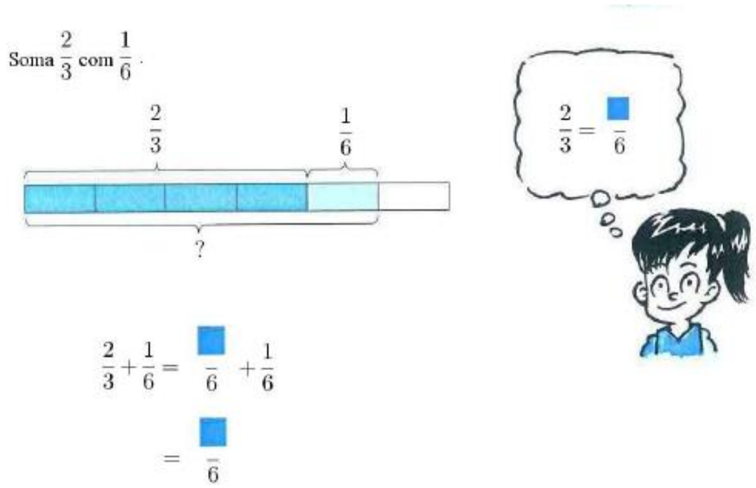


Figura 03



10. Soma de frações com denominadores diferentes:





Agora vejamos na tabela os novos números de acertos e erros no processo pós-aula.

Questão	Acertos	Erros	Não fizeram
01	29	1	0
02	28	2	0
03	30	0	0
04	27	3	0
05	28	2	0
06	28	2	0
07	28	2	0
08	25	5	0
09	30	0	0
10	29	1	0

3.3 Amostragem da avaliação diagnostica e da avaliação pós-aula

Vamos apresentas neste item cinco testes diagnóstico realizados por alunos e cinco avaliações pós-aula, para assim observar a evolução na aprendizagem dos alunos. Chamaremos os alunos de A, B, C, D e E. Vejamos:

Alunos A – Teste Diagnóstico.

[redacted]

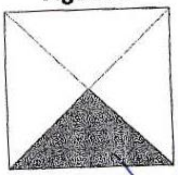
ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

Teste diagnóstico

15-05-2019

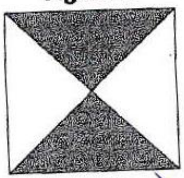
01. (Conceitual) Que fração tem em cada figura?

Figura 1



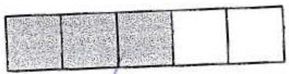
Resposta: $\frac{1}{3}$

Figura 2



Resposta: $\frac{2}{2}$

Figura 3



Resposta: $\frac{3}{2}$

02. (Conceitual) Observe as figuras e responda:

Figura 4

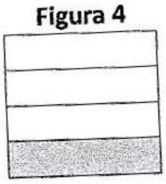
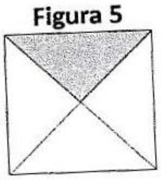


Figura 5



a) Que fração tem em cada figura?

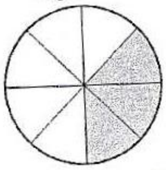
4) $\frac{1}{3}$ 5) $\frac{1}{3}$

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

iguais Por que a figuro 4 e 5 $\frac{1}{3}$

03. (Conceitual) Representes as frações nas figuras abaixo:

Figura 6

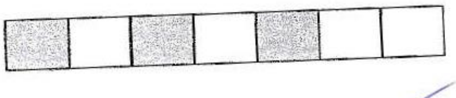


Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 7

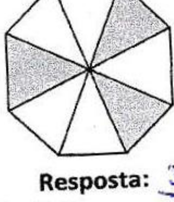
Resposta: $\frac{3}{4}$

Figura 8



Resposta: $\frac{3}{4}$

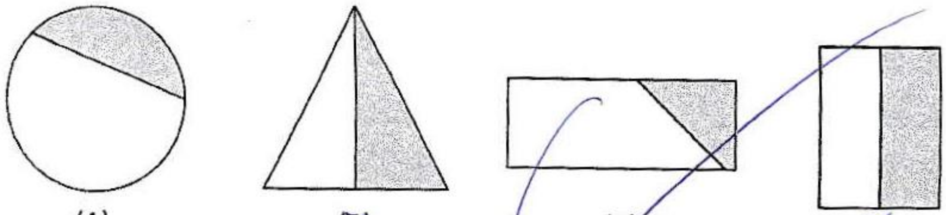
Figura 9



Resposta: $\frac{3}{5}$

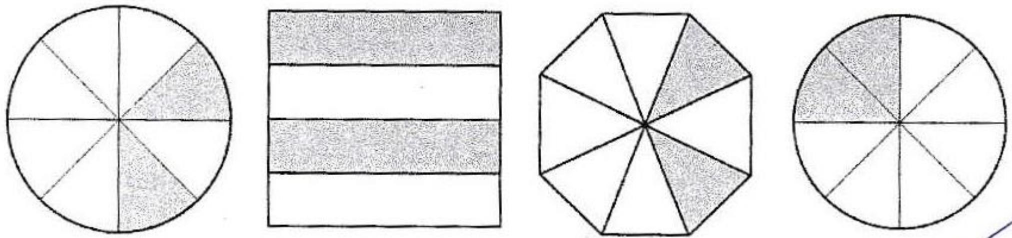
A diferença entre as figuras muda a representação da fração?

04. (Conceitual) Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?

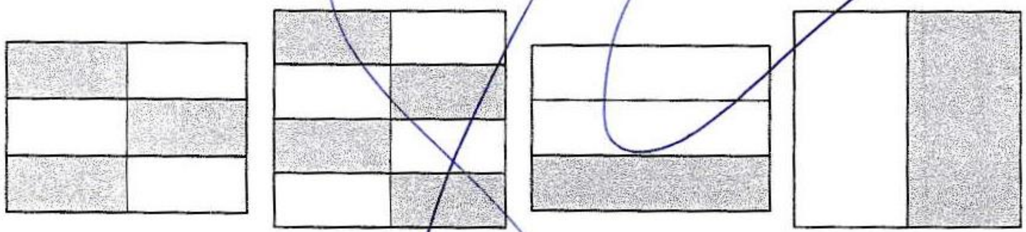


(A) (B) (C) (D)

05. (Conceitual) agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)



(E) (F) (G) (H)

Resposta:

B, E, F, H

06. (Aplicação) João e Maria foram para uma festa de aniversário. João comeu $\frac{1}{3}$ do bolo e Maria comeu $\frac{2}{6}$. Neste caso responda:

a) João comeu mais que Maria? Maria comeu mais que João? ou João e Maria comeram a mesma quantia?

maria comeu mais pois ela comeu $\frac{2}{6}$ do Bolo.

b) Que fração do bolo João e Maria comeram juntos?

$\frac{3}{6}$

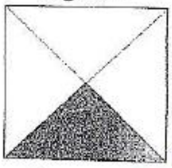
Alunos B – Teste Diagnóstico.

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR [redacted]

Teste diagnóstico turma 7º A

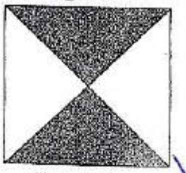
01. (Conceitual) Que fração tem em cada figura?

Figura 1



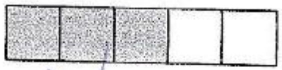
Resposta: $\frac{1}{3}$

Figura 2



Resposta: $\frac{2}{2}$

Figura 3

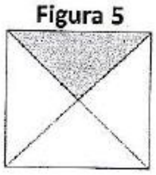


Resposta: $\frac{3}{2}$

02. (Conceitual) Observe as figuras e responda:

Figura 4

Figura 5



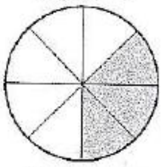
a) Que fração tem em cada figura?

4) $\frac{3}{1}$

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê? Iguais i diferentes

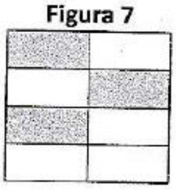
03. (Conceitual) Representes as frações nas figuras abaixo:

Figura 6



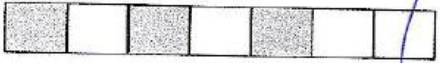
Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 7



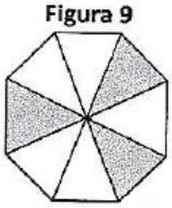
Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 8



Resposta: $\frac{3}{4}$

Figura 9

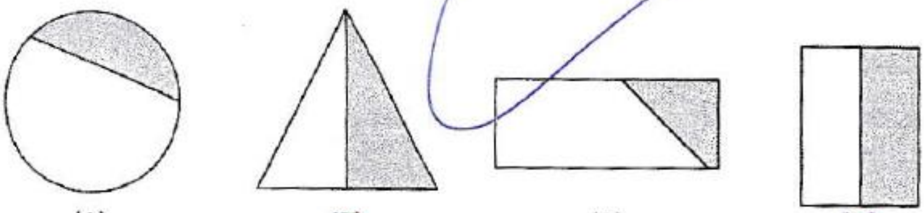


Resposta: $\frac{3}{5}$

A diferença entre as figuras muda a representação da fração?

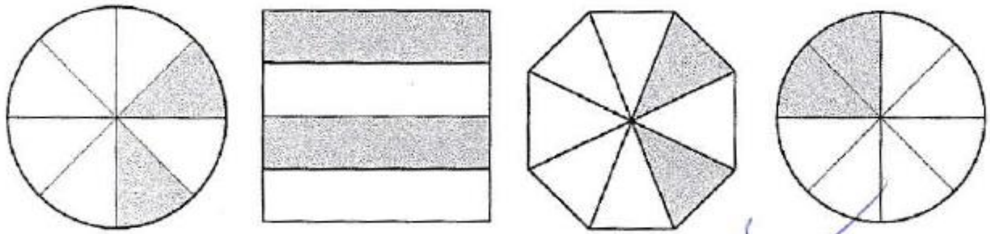
[redacted]

04. (Conceitual) Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?

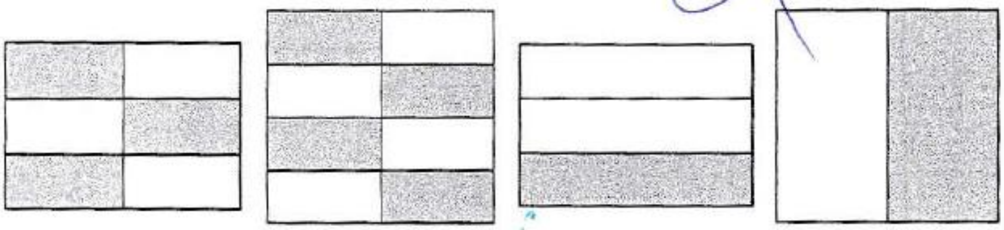


(A) (B) (C) (D)

05. (Conceitual) agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)



(E) (F) (G) (H)

Resposta:

06. (Aplicação) João e Maria foram para uma festa de aniversário. João comeu $\frac{1}{3}$ do bolo e Maria comeu $\frac{2}{6}$. Neste caso responda: Resposta: maria e João comeu o mesmo tanto

a) João comeu mais que Maria? Maria comeu mais que João? ou João e Maria comeram a mesma quantia?

b) Que fração do bolo João e Maria comeram juntos?

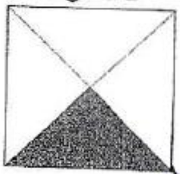
Alunos C – Teste Diagnóstico.

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

Teste diagnóstico

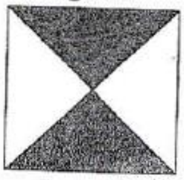
01. (Conceitual) Que fração tem em cada figura?

Figura 1



Resposta: $\frac{1}{3}$

Figura 2



Resposta: $\frac{1}{2}$

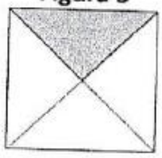
Figura 3

Resposta: $\frac{3}{2}$

02. (Conceitual) Observe as figuras e responda:

Figura 4

Figura 5



a) Que fração tem em cada figura?

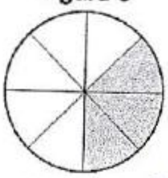
4 Figura $\frac{1}{3}$ 5 Figura $\frac{1}{3}$

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

os frasses são iguais pelo a mesma quantidade de formas

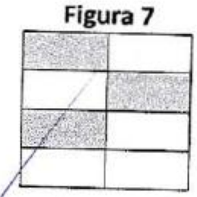
03. (Conceitual) Representes as frações nas figuras abaixo:

Figura 6



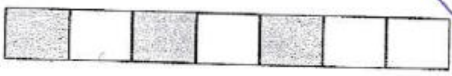
Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 7



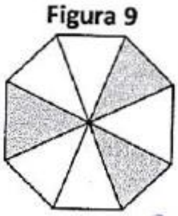
Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 8



Resposta: $\frac{3}{4}$

Figura 9

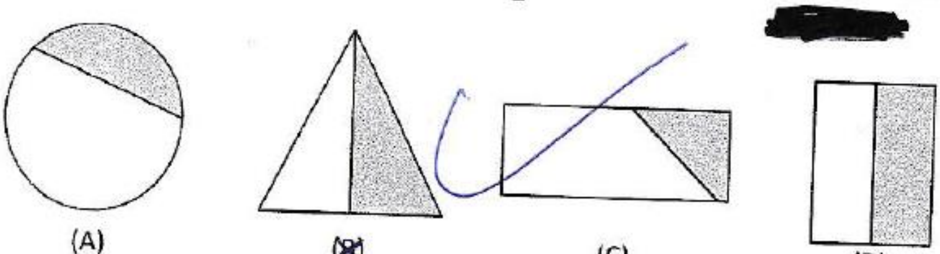


Resposta: $\frac{3}{5}$

A diferença entre as figuras muda a representação da fração?

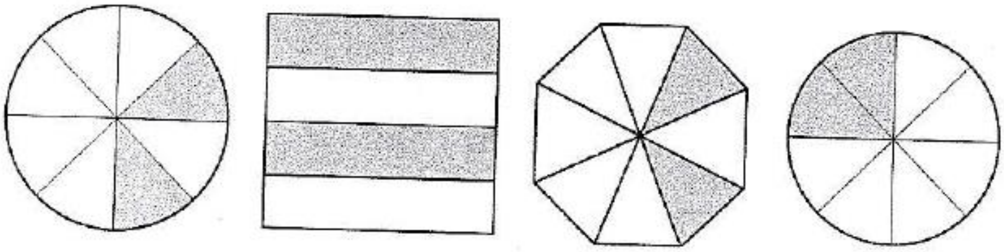
Sim

04. (Conceitual) Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$? D) B) [redacted]

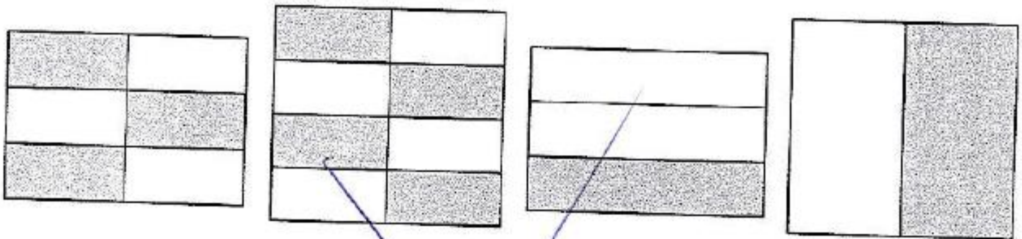


(A) (B) (C) (D)

05. (Conceitual) agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)



(E) (F) (G) (H)

Resposta:

06. (Aplicação) João e Maria foram para uma festa de aniversário. João comeu $\frac{1}{3}$ do bolo e Maria comeu $\frac{2}{6}$. Neste caso responda:

a) João comeu mais que Maria? Maria comeu mais que João? ou João e Maria comeram a mesma quantia?

b) Que fração do bolo João e Maria comeram juntos?

Alunos D – Teste Diagnóstico.

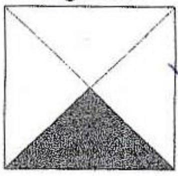
[redacted] 7º Ano A

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

Teste diagnóstico

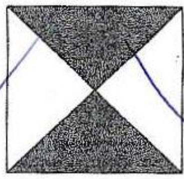
01. (Conceitual) Que fração tem em cada figura?

Figura 1



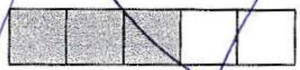
Resposta: $\frac{3}{4}$

Figura 2



Resposta: $\frac{4}{2}$

Figura 3



Resposta: $\frac{3}{3}$

02. (Conceitual) Observe as figuras e responda:

Figura 4

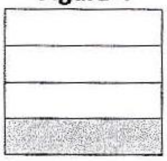
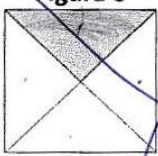


Figura 5



a) Que fração tem em cada figura?

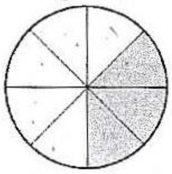
Porque umas é diferentes das outras.

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

são diferentes

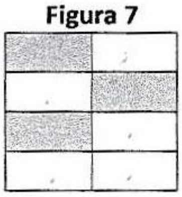
03. (Conceitual) Representes as frações nas figuras abaixo:

Figura 6



Resposta: $\frac{5}{3}$

Figura 7

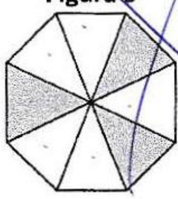


Resposta: $\frac{5}{3}$

Figura 8

Resposta: $\frac{4}{3}$

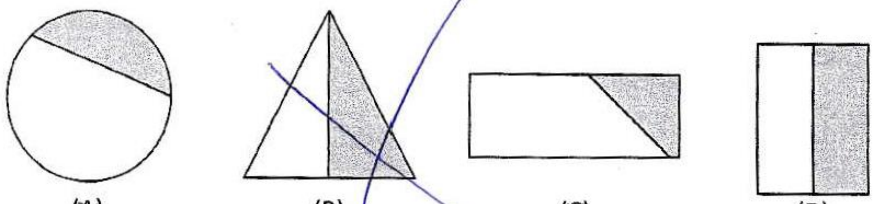
Figura 9



Resposta: $\frac{5}{3}$

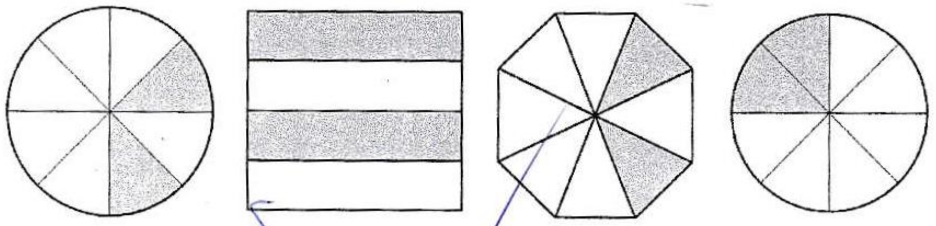
A diferença entre as figuras muda a representação da fração?

04. (Conceitual) Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?

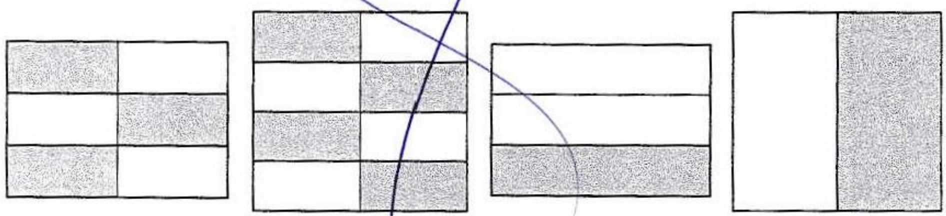


(A) (B) (C) (D)

05. (Conceitual) agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)



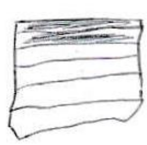
(E) (F) (G) (H)

Resposta: (A), (B), (d)

06. (Aplicação) João e Maria foram para uma festa de aniversário. João comeu $\frac{1}{3}$ do bolo e Maria comeu $\frac{2}{6}$. Neste caso responda:

a) João comeu mais que Maria? Maria comeu mais que João? ou João e Maria comeram a mesma quantia? Maria comeu mais que João

b) Que fração do bolo João e Maria comeram juntos?

João  Maria 

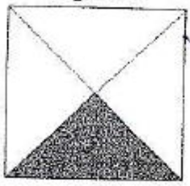
Alunos E – Teste Diagnóstico.

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

Teste diagnóstico

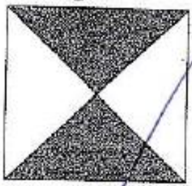
01. (Conceitual) Que fração tem em cada figura?

Figura 1



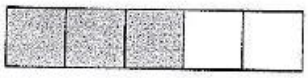
Resposta: $\frac{1}{3}$

Figura 2



Resposta: $\frac{2}{2}$

Figura 3

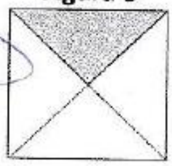


Resposta: $\frac{3}{2}$

02. (Conceitual) Observe as figuras e responda:

Figura 4

Figura 5



a) Que fração tem em cada figura? Figura 4: $\frac{1}{3}$

Figura 5: $\frac{1}{3}$

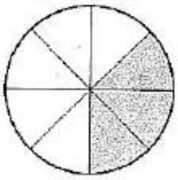
b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

são iguai mais a forma que

está diferente mais os calculo são iguai

03. (Conceitual) Representes as frações nas figuras abaixo:

Figura 6

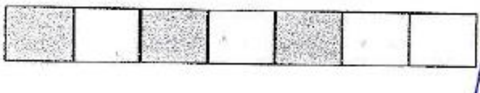


Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 7

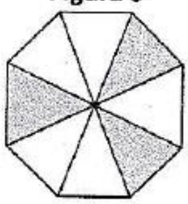
Resposta: $\frac{3}{5}$

Figura 8



Resposta: $\frac{3}{4}$

Figura 9

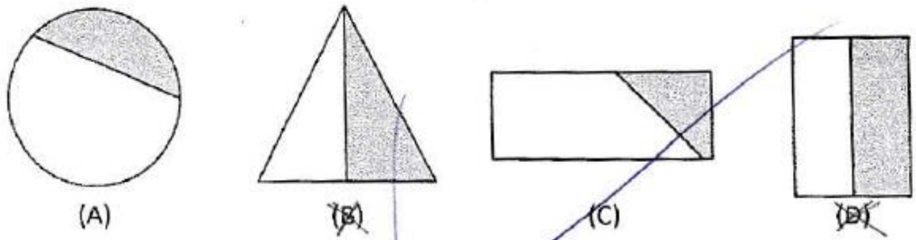


Resposta: $\frac{3}{5}$

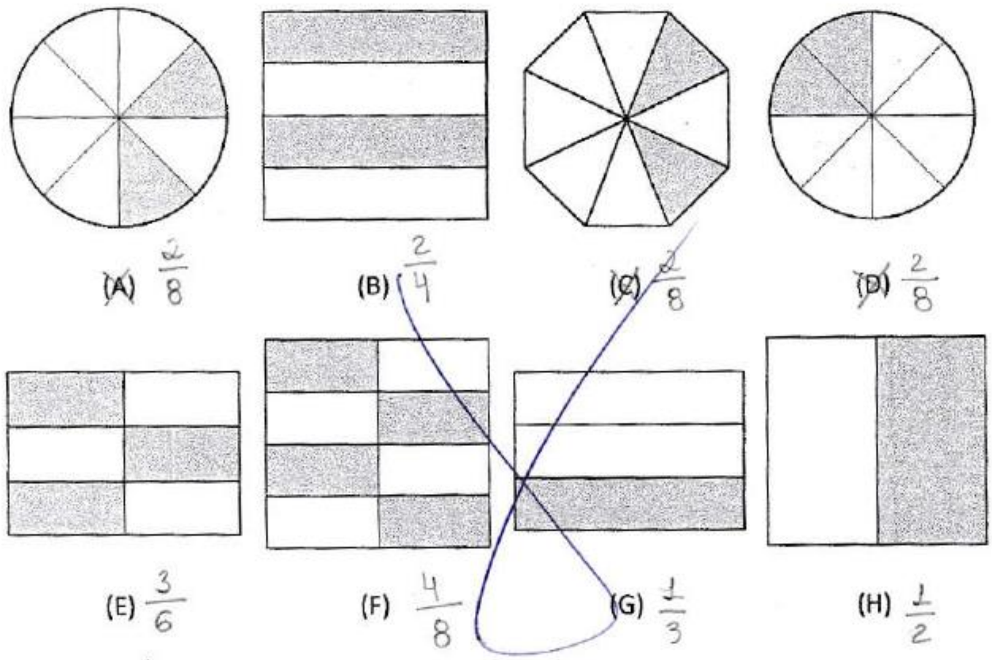
A diferença entre as figuras muda a representação da fração?

SIM

04. (Conceitual) Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?



05. (Conceitual) agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



Resposta: A, C, D.

06. (Aplicação) João e Maria foram para uma festa de aniversário. João comeu $\frac{1}{3}$ do bolo e Maria comeu $\frac{2}{6}$. Neste caso responda:

a) João comeu mais que Maria? Maria comeu mais que João? ou João e Maria comeram a mesma quantia? Não, Sim Maria comeu mais que joão, Não eles mais comeram a mesma quantia.

b) Que fração do bolo João e Maria comeram juntos?

$\frac{3}{9}$

Vejamos agora uma amostra de 5 alunos dos 30 que realizaram a avaliação pós aula. Vejamos:

Alunos A

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

***FRAÇÃO** – Relação Parte Todo*

01. Observe as imagens.

Imagem 01

$\frac{1}{4}$ do quadrado está colorido.

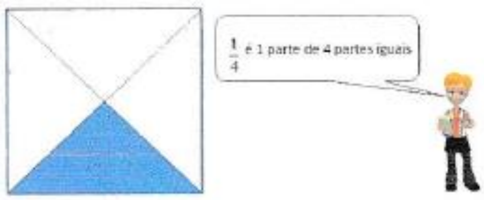
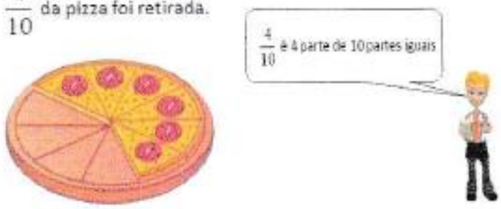
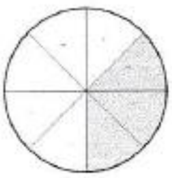


Imagem 02

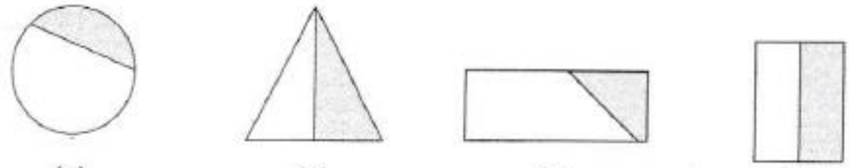
$\frac{4}{10}$ da pizza foi retirada.



02. De acordo com as figuras abaixo responda:

FIGURAS	Em quantas partes iguais é dividido o todo?	Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar?	FRAÇÃO
Figura 1 	4	2	Significado: $\frac{2}{4}$ 2 Partes de 4 Partes INGVAIS
Figura 2 	5	2	Significado: $\frac{2}{5}$ 2 Partes de 5 Partes inguais
Figura 3 	8	3	Significado: $\frac{3}{8}$ 3 Partes de 8 Partes inguais

03. Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?



(A) (B) (C) (D)

04. Observe as figuras e responda: B e D

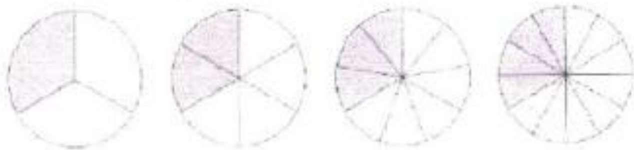
Figura 1 **Figura 2**

a) Que fração tem em cada figura? $\frac{1}{4}$

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

$\frac{1}{4}$ sim, Porque tem o mesmo quantidade

05. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:



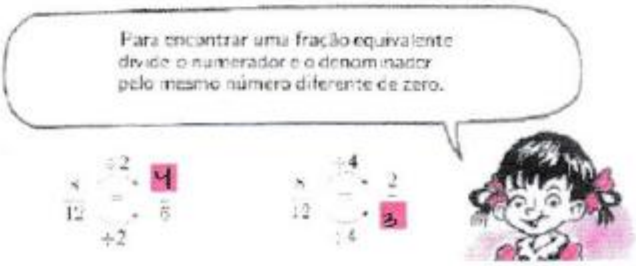
$$\frac{1}{3} = \frac{\boxed{2}}{6} = \frac{3}{\boxed{9}} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{12}}$$

Para encontrar uma fração equivalente multiplica o numerador e o denominador pelo mesmo número diferente de zero.

$$\frac{1}{3} \xrightarrow[\times 2]{\times 2} \frac{\boxed{2}}{6} \qquad \frac{1}{3} \xrightarrow[\times 3]{\times 3} \frac{3}{\boxed{9}}$$

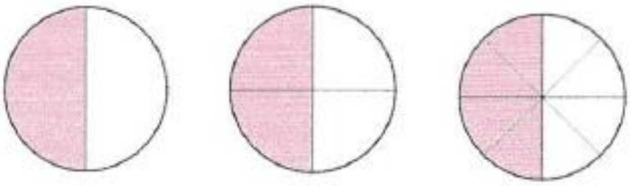
06. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{4}}{6} = \frac{2}{\boxed{3}}$$



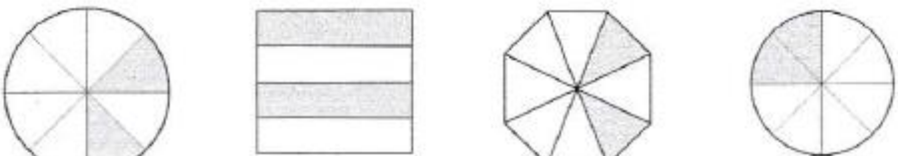
$$\frac{8}{12} \xrightarrow{\div 2} \frac{\boxed{4}}{6} \qquad \frac{8}{12} \xrightarrow{\div 4} \frac{2}{\boxed{3}}$$

07. Complete os retângulos nas relações de igualdades abaixo:

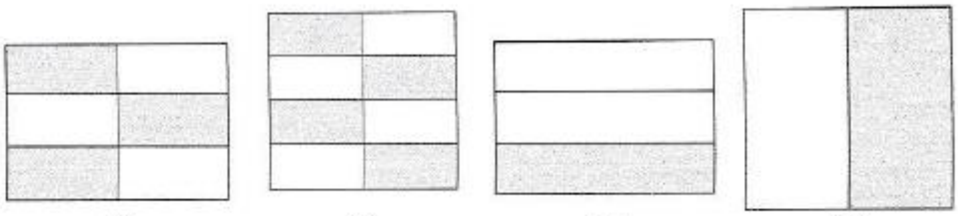


$$\frac{1}{2} = \frac{\boxed{2}}{4} = \frac{4}{\boxed{8}}$$

08. Agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)

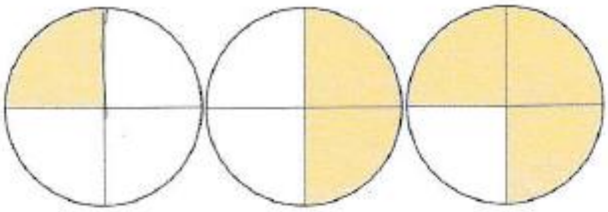


(E) (F) (G) (H)

Resposta: E : $\frac{3}{6}$ G : $\frac{1}{3}$

08. Soma de fração com mesmo denominador:

Figura 01



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\boxed{3}}{4}$$

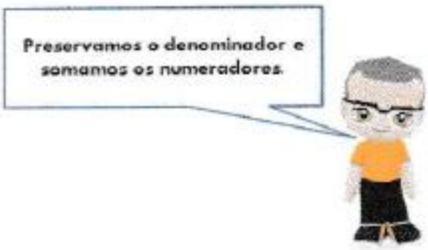
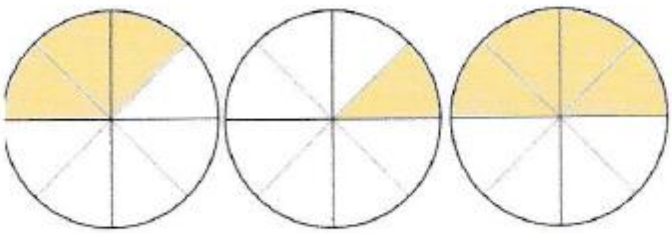
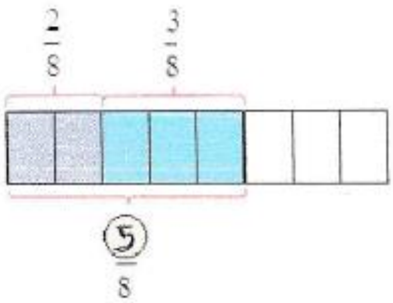


Figura 02

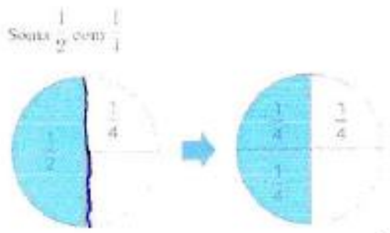


$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\boxed{4}}{8}$$

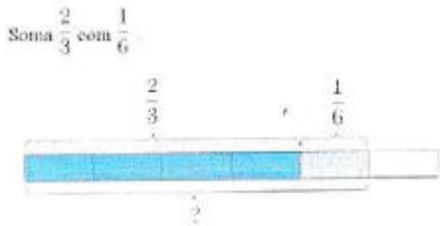
Figura 03



10. Soma de frações com denominadores diferentes:



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{6}$$

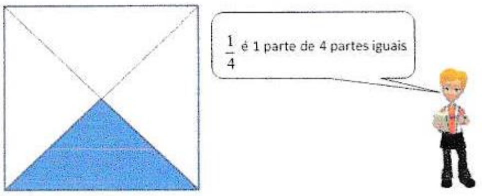
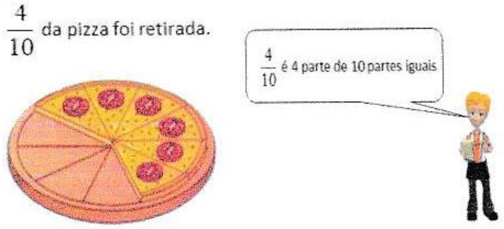
Alunos B

[redacted] 7º "A"

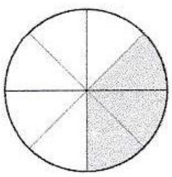
ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

***FRAÇÃO** – Relação Parte Todo*

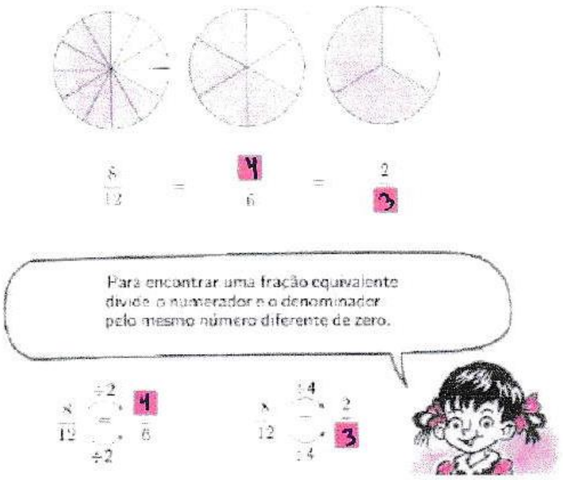
01. Observe as imagens.

Imagem 01	Imagem 02
$\frac{1}{4}$ do quadrado está colorido.	$\frac{4}{10}$ da pizza foi retirada.
	

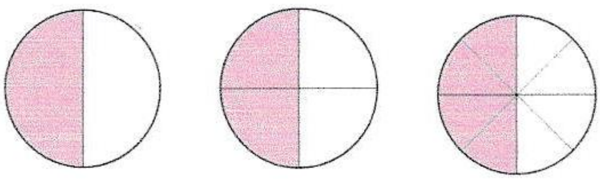
02. De acordo com as figuras abaixo responda:

FIGURAS	Em quantas partes iguais é dividido o todo?	Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar?	FRAÇÃO
Figura 1 	4	2	Significado: 2 Partes de 4 Partes iguis
Figura 2 	5	3	Significado:
Figura 3 	8	3	Significado:

06. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

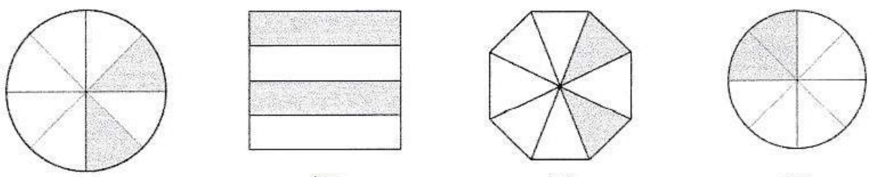


07. Complete os retângulos nas relações de igualdades abaixo:

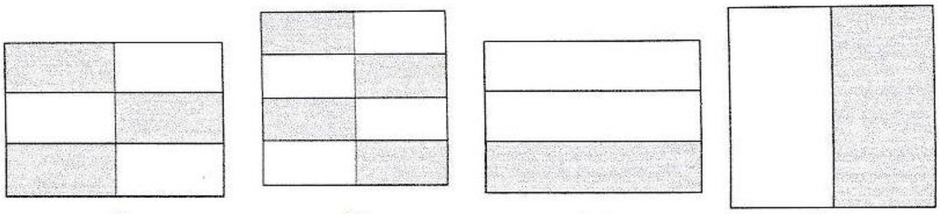


$$\frac{1}{2} = \frac{\boxed{2}}{4} = \frac{4}{\boxed{8}}$$

08. Agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)

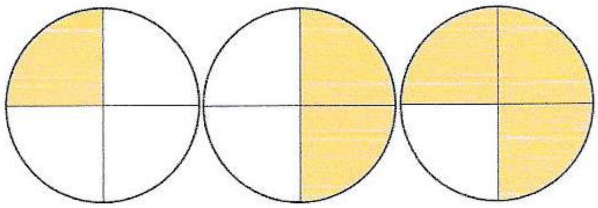


(E) (F) (G) (H)

Resposta: [illegible], E, F

09. Soma de fração com mesmo denominador:

Figura 01



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\boxed{3}}{4}$$

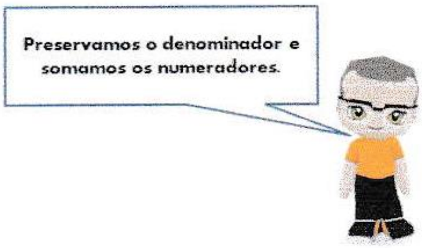
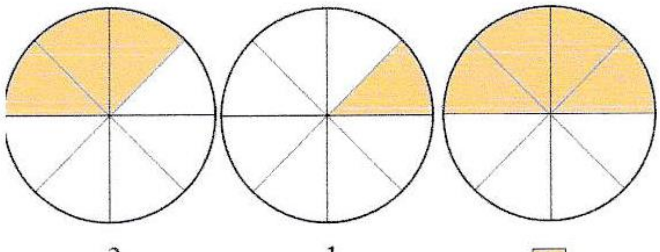
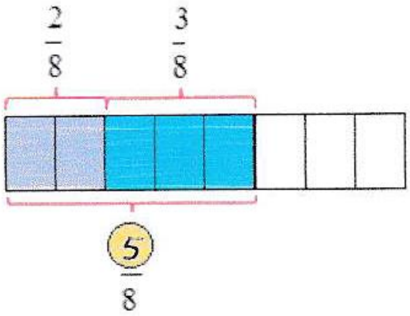


Figura 02



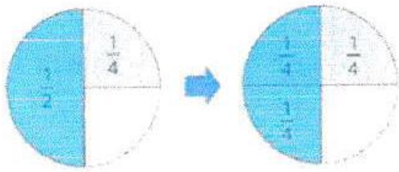
$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\boxed{4}}{8}$$

Figura 03



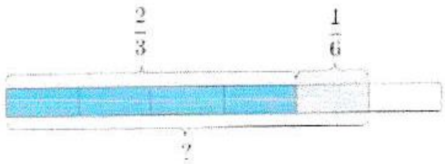
10. Soma de frações com denominadores diferentes:

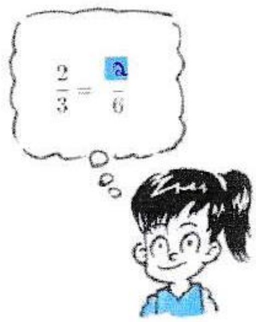
Soma $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}=\underline{3}$$

Soma $\frac{2}{3}$ com $\frac{1}{6}$.





$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{6}$$

Aluno C

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

***FRAÇÃO** – Relação Parte Todo*

01. Observe as imagens.

Imagem 01

$\frac{1}{4}$ do quadrado está colorido.

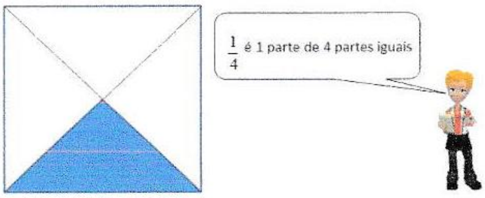
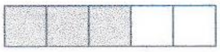
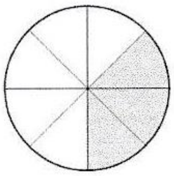


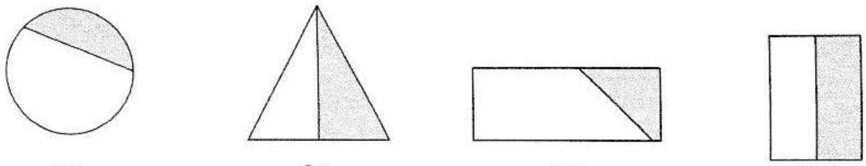
Imagem 02

$\frac{4}{10}$ da pizza foi retirada.

02. De acordo com as figuras abaixo responda:

FIGURAS	Em quantas partes iguais é dividido o todo?	Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar?	FRAÇÃO
Figura 1 	4	2	$\frac{2}{4}$ Significado: 2 partes de 4 partes iguais
Figura 2 	5	3	$\frac{3}{5}$ Significado: 3 partes de 5 partes iguais
Figura 3 	8	3	$\frac{3}{8}$ Significado: 3 partes de 8 partes iguais

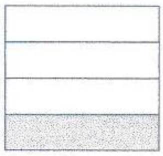
03. Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$? B e D

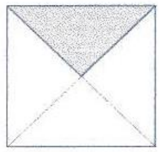


(A) (B) (C) (D)

04. Observe as figuras e responda:

Figura 1 **Figura 2**





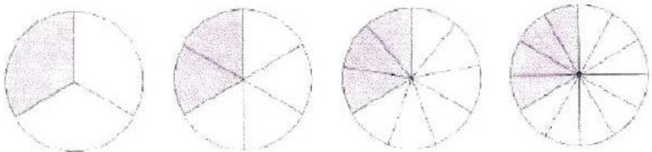
a) Que fração tem em cada figura?

Figura 1: $\frac{1}{4}$ Figura 2: $\frac{1}{4}$

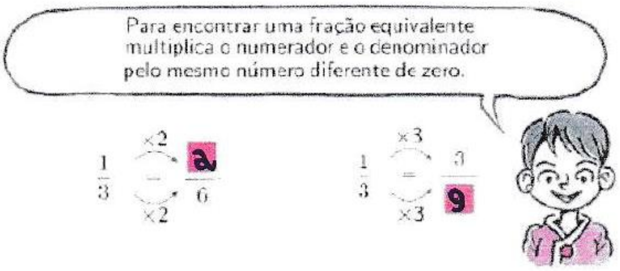
b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

iguais, porque possuem a mesma quantidade

05. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

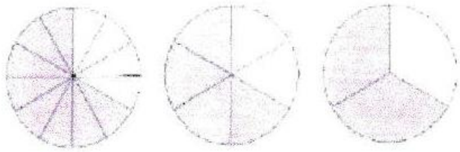


$$\frac{1}{3} = \frac{\boxed{2}}{6} = \frac{3}{\boxed{9}} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{12}}$$

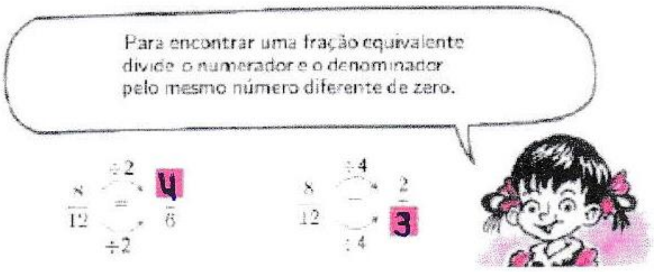


$$\frac{1}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{\boxed{2}}{6} \qquad \frac{1}{3} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{3}{\boxed{9}}$$

06. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

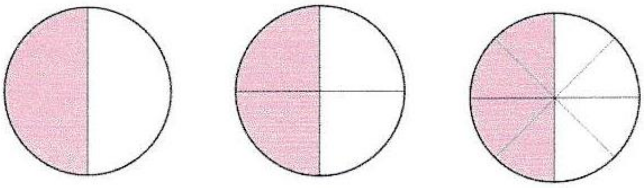


$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{4}}{6} = \frac{2}{\boxed{3}}$$



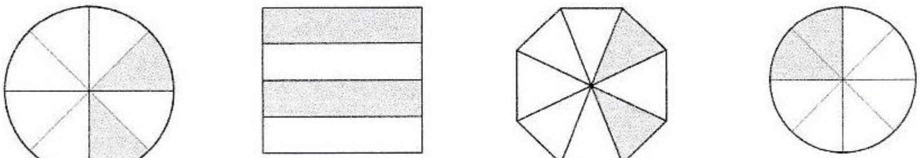
$$\frac{8}{12} \xrightarrow[\div 2]{\div 2} \frac{\boxed{4}}{6} \qquad \frac{8}{12} \xrightarrow[\div 4]{\div 4} \frac{2}{\boxed{3}}$$

07. Complete os retângulos nas relações de igualdades abaixo:

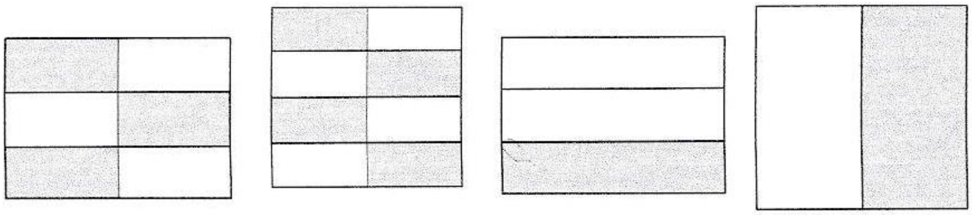


$$\frac{1}{2} = \frac{\boxed{2}}{4} = \frac{4}{\boxed{8}}$$

08. Agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)

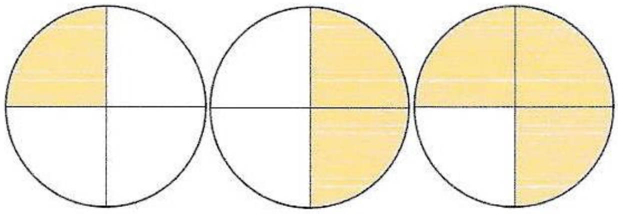


(E) (F) (G) (H)

Resposta: E e G

08. Soma de fração com mesmo denominador:

Figura 01



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\boxed{3}}{4}$$

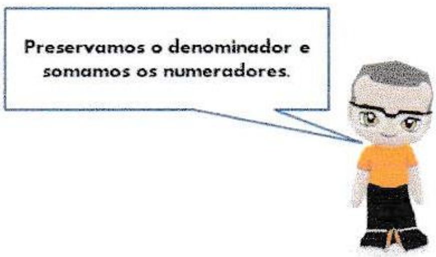
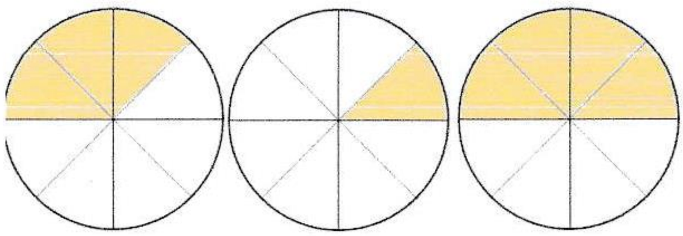
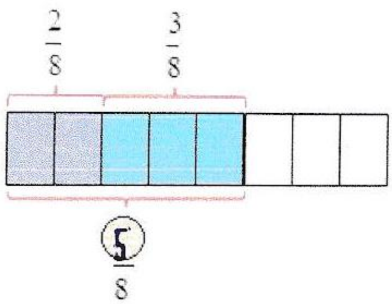


Figura 02



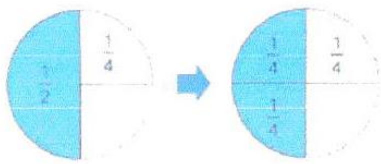
$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\boxed{4}}{8}$$

Figura 03



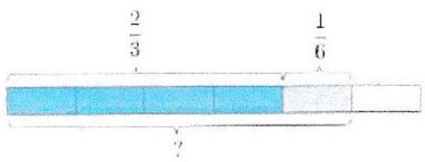
10. Soma de frações com denominadores diferentes:

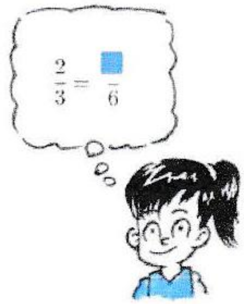
Soma $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Soma $\frac{2}{3}$ com $\frac{1}{6}$.





$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{6}$$

Aluno D

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR

***FRAÇÃO** – Relação Parte Todo*

01. Observe as imagens.

Imagem 01

$\frac{1}{4}$ do quadrado está colorido.

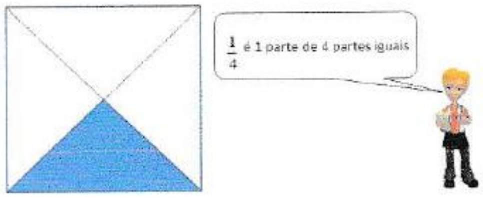
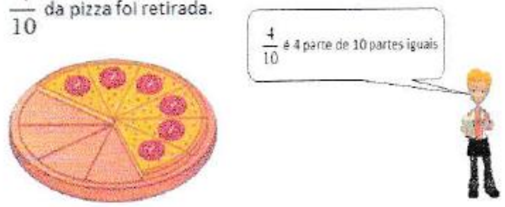
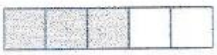
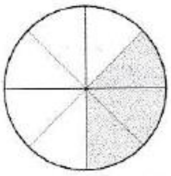


Imagem 02

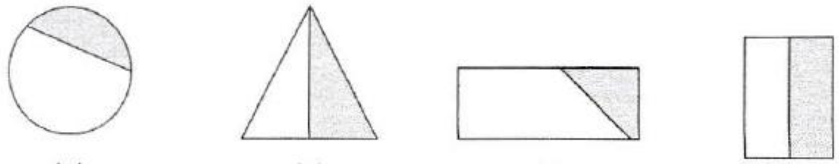
$\frac{4}{10}$ da pizza foi retirada.



02. De acordo com as figuras abaixo responda:

FIGURAS	Em quantas partes iguais é dividido o todo?	Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar?	FRAÇÃO
Figura 1 	4	2	Significado: $\frac{2}{4}$ duas partes de 4 partes iguais
Figura 2 	5	2	Significado: $\frac{2}{5}$ duas partes de 5 partes iguais
Figura 3 	8	5	Significado:

03. Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?



(A) (B) (C) (D)

B e D

04. Observe as figuras e responda:

Figura 1 **Figura 2**

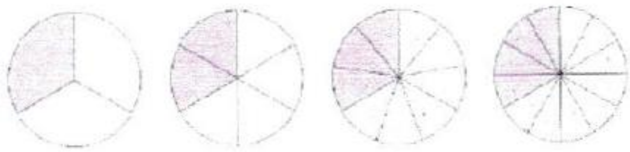
a) Que fração tem em cada figura?

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê?

iguais

05. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

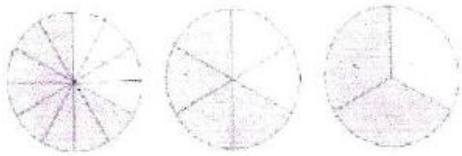


$$\frac{1}{3} = \frac{\boxed{2}}{6} = \frac{3}{\boxed{9}} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{12}}$$

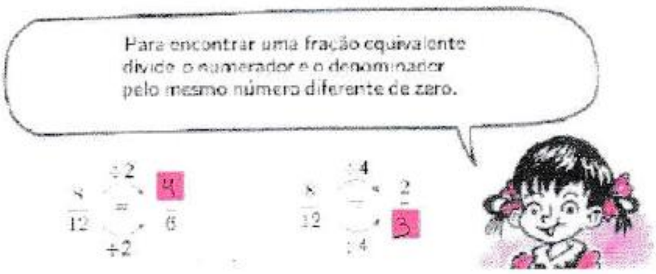
Para encontrar uma fração equivalente multiplica o numerador e o denominador pelo mesmo número diferente de zero.

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{\boxed{2}}{6} \qquad \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{\boxed{9}}$$

06. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

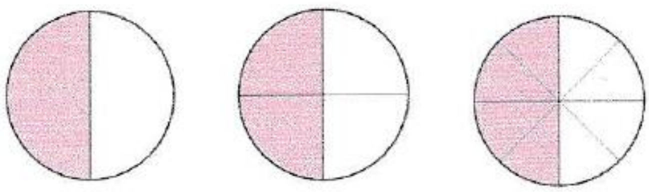


$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{4}}{6} = \frac{2}{\boxed{3}}$$



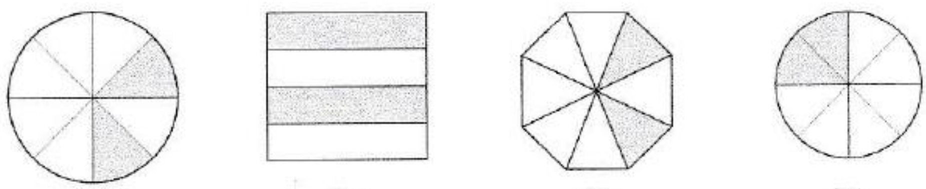
$$\frac{8}{12} \xrightarrow[\div 2]{\div 2} \frac{\boxed{4}}{6} \qquad \frac{8}{12} \xrightarrow[\div 4]{\div 4} \frac{2}{\boxed{3}}$$

07. Complete os retângulos nas relações de igualdades abaixo:

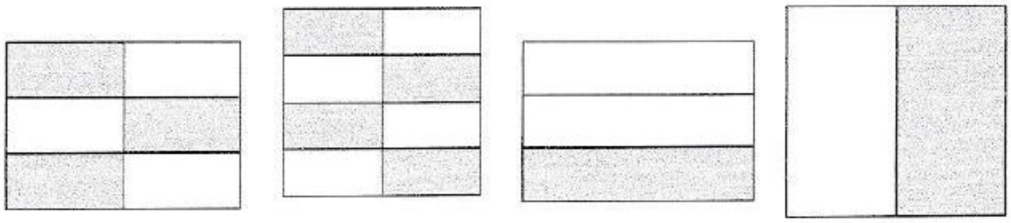


$$\frac{1}{2} = \frac{\boxed{2}}{4} = \frac{4}{\boxed{8}}$$

08. Agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)

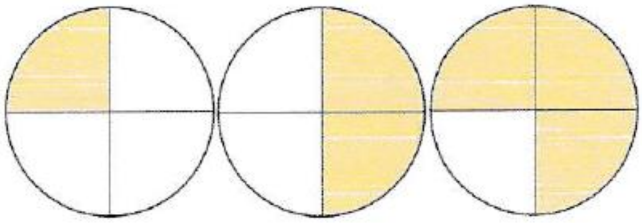


(E) (F) (G) (H)

Resposta:

. Soma de fração com mesmo denominador:

Figura 01



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\boxed{3}}{4}$$

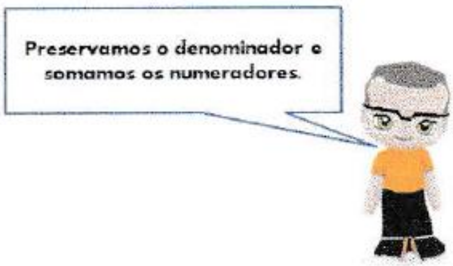
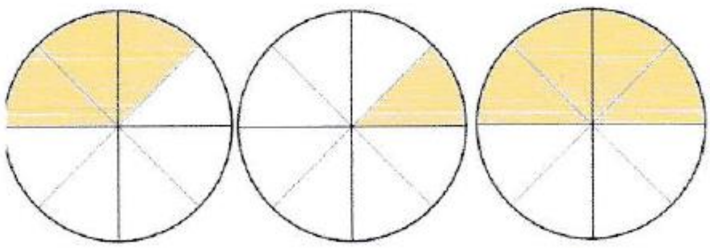
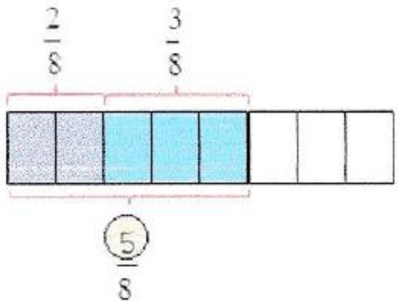


Figura 02



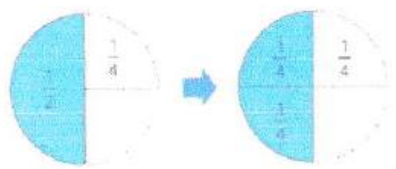
$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\boxed{4}}{8}$$

Figura 03



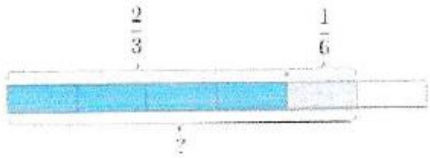
10. Soma de frações com denominadores diferentes:

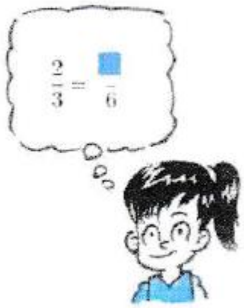
Soma $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{4}$.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Soma $\frac{2}{3}$ com $\frac{1}{6}$.





$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{\boxed{4}}{6}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{\boxed{5}}{6}$$

Aluno E

ESCOLA ESTADUAL DOM OTÁVIO AGUIAR
***FRAÇÃO** – Relação Parte Todo*

01. Observe as imagens.

Imagem 01

$\frac{1}{4}$ do quadrado está colorido.

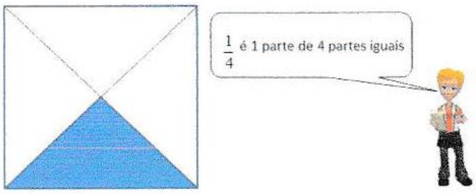
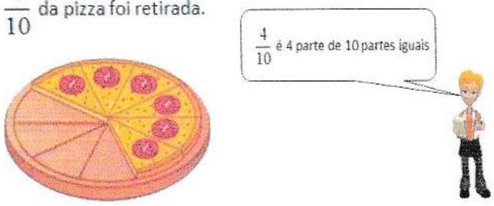
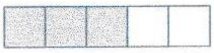
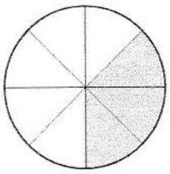


Imagem 02

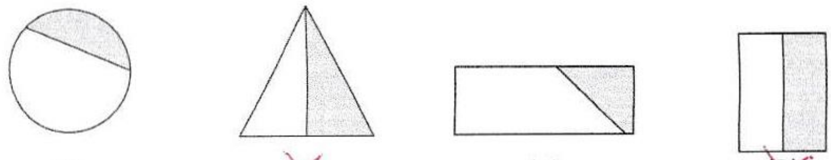
$\frac{4}{10}$ da pizza foi retirada.



02. De acordo com as figuras abaixo responda:

FIGURAS	Em quantas partes iguais é dividido o todo?	Quantas dessas partes constituem a quantidade que se deseja destacar?	FRAÇÃO
Figura 1 	4	2	$\frac{2}{4}$ Significado: 2 partes de 4 partes iguais
Figura 2 	5	3	$\frac{3}{5}$ Significado: 3 partes de 5 partes iguais
Figura 3 	8	3	Significado: $\frac{3}{8}$ é 3 partes de 8 partes iguais.

03. Quais das figuras mostram $\frac{1}{2}$?



(A) ~~(B)~~ (C) ~~(D)~~

04. Observe as figuras e responda:

Figura 1

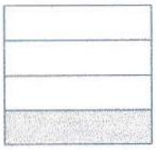
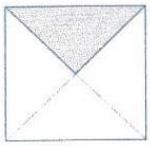


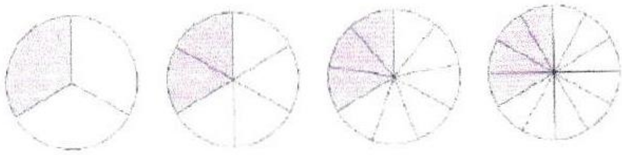
Figura 2



a) Que fração tem em cada figura? $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$

b) Essas frações são diferentes ou iguais? Por quê? iguais, mesma figura, mesmo todo.

05. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

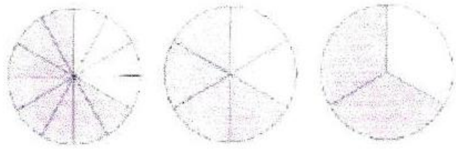


$$\frac{1}{3} = \frac{\boxed{2}}{6} = \frac{3}{\boxed{9}} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{12}}$$

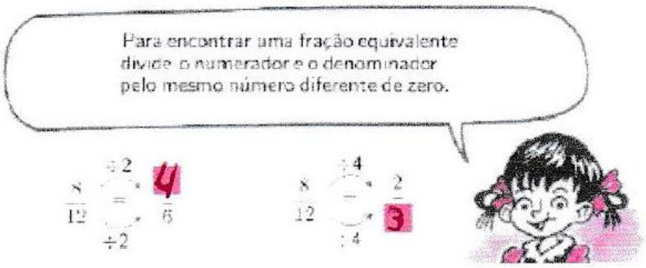
Para encontrar uma fração equivalente multiplica o numerador e o denominador pelo mesmo número diferente de zero.

$$\frac{1}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{\boxed{2}}{6} \qquad \frac{1}{3} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{3}{\boxed{9}}$$

06. Complete os retângulos em vermelho nas relações de igualdades abaixo:

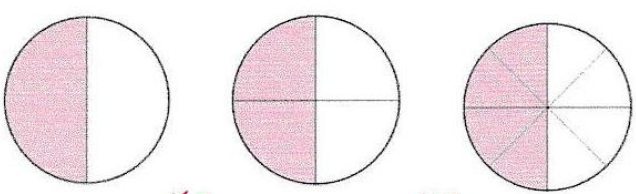


$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{4}}{6} = \frac{2}{\boxed{3}}$$



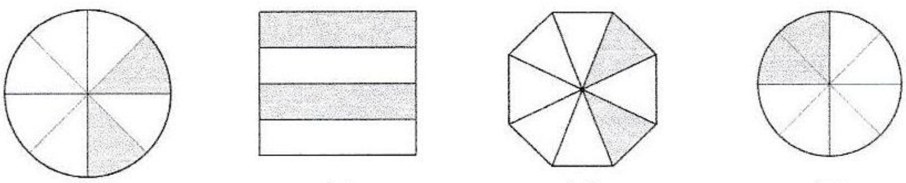
$$\frac{8}{12} \xrightarrow{\div 2} \frac{\boxed{4}}{6} \qquad \frac{8}{12} \xrightarrow{\div 4} \frac{2}{\boxed{3}}$$

07. Complete os retângulos nas relações de igualdades abaixo:



$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{\boxed{2}}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{\boxed{8}}$$

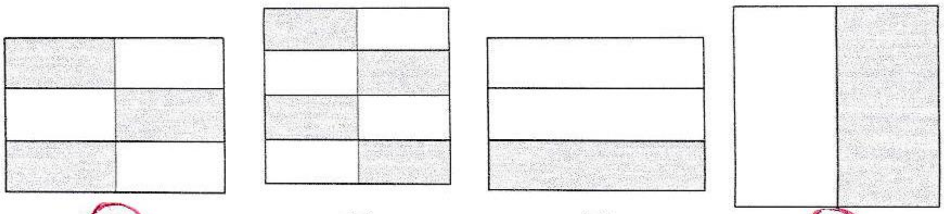
08. Agrupe as letras nas quais as figuras representam frações equivalentes?



(A) (B) (C) (D)

B e F

E e H



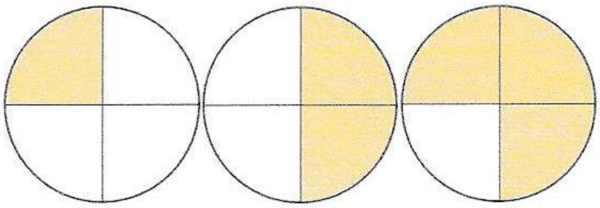
(E) (F) (G) (H)

Resposta:

B e F , E e H

08. Soma de fração com mesmo denominador:

Figura 01



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\boxed{3}}{4}$$

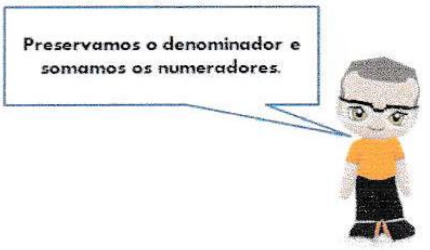
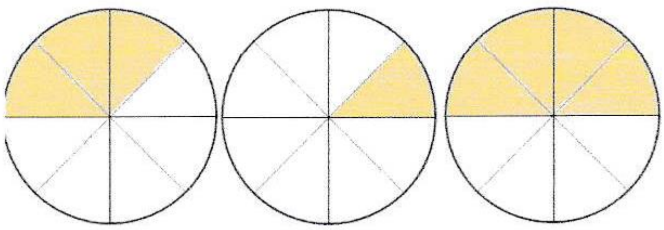
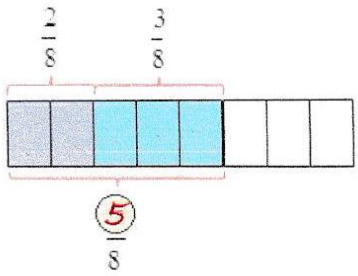


Figura 02

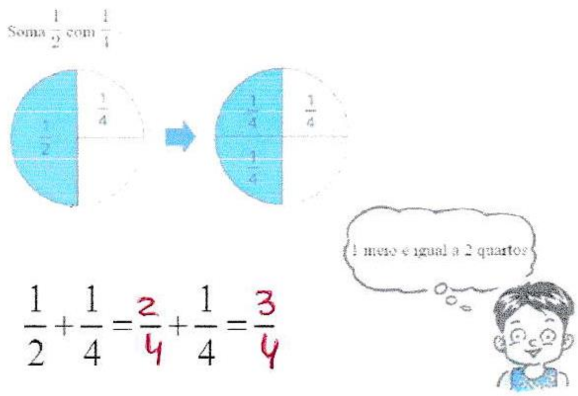


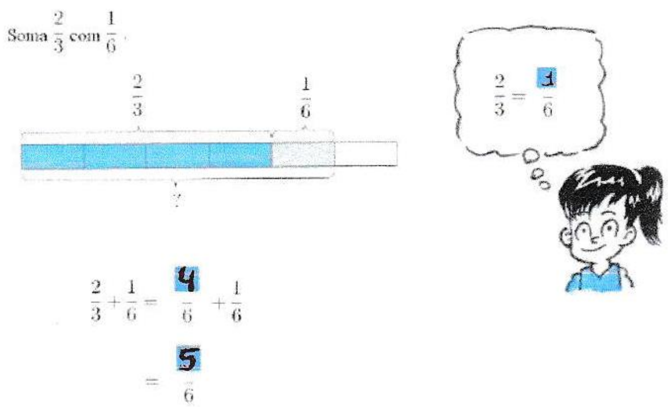
$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\boxed{4}}{8}$$

Figura 03



10. Soma de frações com denominadores diferentes:





3.4 Comparação dos Resultados

Observando a tabela 01 e a tabela 02, temos que os números de acertos cresceram significativamente, principalmente no quesito frações equivalentes. Isso é notório na amostragem que expomos.

4. COLETÂNIA DE PROBLEMAS DE FRAÇÕES NA OBMEP, ENEM, PROVA BRASIL E CONCURSOS.

Neste capítulo vamos mostrar alguns problemas envolvendo frações de provas anteriores da OBMEP, ENEM, PROVA BRASIL, CONCURSOS PÚBLICOS ENTRE OUTROS. Comentando as questões e possíveis soluções, seguindo o modelo pictórico. Neste trabalho o modelo de barra. Antes vamos resolver o problema apresentado neste trabalho, retirado do livro o “Homem que Calculava” escrito por Júlio César de Mello e Souza sob o pseudônimo de Malba Tahan. Vejamos:

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande alento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

- Não pode ser!

- Isto é um roubo!

- Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

- Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte, e, ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, e, a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas?

- É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. – Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que em boa hora aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

- Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viajem se ficássemos sem o camelo?

- Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! – replicou-me em voz baixa Beremiz – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar. Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, que imediatamente foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

- Vou, meus amigos.

– disse ele, dirigindo-se aos três irmãos.

- fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é 11 e pouco.

Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse por fim ao mais moço:

E tu jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4, O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence como sabem ao bagdáli, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido a contento de todos. O complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó estrangeiro! – exclamou o mais velho dos três irmãos.

– Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

- Poderás agora, meu amigo, continuar a viajem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!
E continuamos nossa jornada para Bagdá.

Como o “homem que calculava" conseguiu resolver o problema dos três irmãos, que aparentemente saíram no lucro, e ainda assim ganhou um camelo extra?

A resposta para o mistério do conto é a seguinte: observe que a soma das partes que seriam destinadas às heranças dos três irmãos não somam 1, porque

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}<1$$

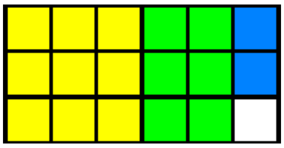
Para verificar tal fato, lembre-se primeiro de que, antes de somar frações com denominadores diferentes, devemos substituir essas frações por suas respectivas frações equivalentes, tendo um mesmo denominador.

Dessa forma,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}=\frac{17}{18}<1$$

Podemos, então, representar a divisão da herança utilizando a seguinte figura de um retângulo dividido em 18 partes iguais:

Figura 70 – camelos



Fonte: do autor

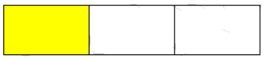
A região amarela representa a herança que foi prometida ao primeiro filho: $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$. A região verde representa a herança prometida ao filho do meio $\frac{1}{3}=\frac{6}{18}$ e a região azul representa a herança do filho mais jovem $\frac{1}{9}=\frac{2}{18}$. Perceba que, por um erro cometido pelo pai, $\frac{1}{18}$ da herança não foi designada a ninguém. E exatamente essa parte que o homem que calculava tomou para si. Veja que do grupo de 36 camelos corresponde a 2 camelos.

Outro problema que possui uma linha de raciocínio semelhante à do problema anterior é o do exemplo a seguir.

Maria foi trabalhar e deixou dinheiro para seus três filhos, com este bilhete: Dividam o dinheiro igualmente. Beijos! O primeiro filho chegou, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O segundo filho chegou e não viu ninguém. Pensando que era o primeiro, pegou sua parte do dinheiro e saiu. O terceiro encontrou quatro notas de 5 reais. Achou que era o último, pegou tudo e saiu. Quanto em dinheiro a mãe havia deixado para seus filhos?

Vamos representar o valor em dinheiro deixado pela mãe por uma barra. O primeiro filho pega para si, a terça parte do valor total deixado pela mãe. Isso é representado pela região amarela, mostrada na figura a seguir:

Figura 71 – um terço



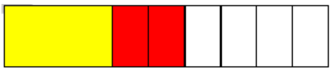
Fonte: do autor

Dessa forma, ele deixa $\frac{2}{3}$ (dois terços) do valor para os irmãos. Porém, o próximo filho pega $\frac{1}{3}$ do valor restante. Ou seja,

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Isso pode ser ilustrado como:

Figura 72 – dois nonos



Fonte: do autor

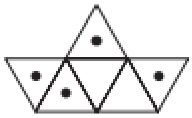
Dessa forma, cada região vermelha representa $\frac{1}{9}$ da barra inicial. Portanto, fica fácil perceber que o terceiro filho recebe $\frac{4}{9}$ do valor inicial. Como é dito no enunciado que ele recebe 20 reais, isso significa que cada região que equivale a $\frac{1}{9}$ da barra corresponde ao valor de 5 reais. Logo, a mãe deixou um total de 45 reais.

Comentário: Problema como esse provoca e instiga a curiosidade dos alunos. Assim, o aluno sente-se chamado a entender e estudar matemática.

4.1 NA OBMEP

PROBLEMA 01 (*OBMEP2008*): Nesta questão todas as figuras são formadas por triângulos iguais. Veja como Chico Bento marcou $\frac{2}{3}$ dos triângulos da figura a baixo.

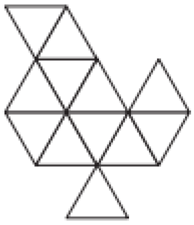
Figura 73 – pontos



Fonte:obm

(a) Agora, marque você $\frac{3}{4}$ dos triângulos da figura ao lado. Quantos triângulos você marcou?

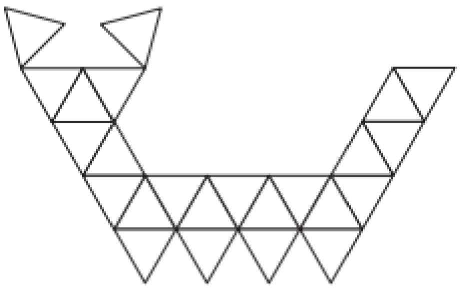
Figura 74 – triângulos 01



Fonte:obm

(b) Ajude Chico Bento marcando mais que $\frac{1}{4}$ e menos que $\frac{1}{3}$ dos triângulos da figura a baixo. Quantos triângulos você marcou?

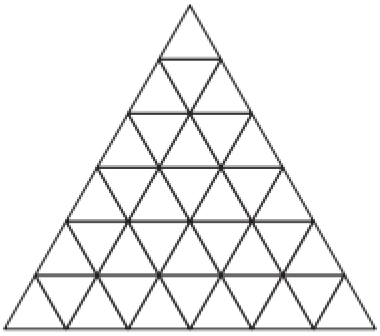
Figura 75 – triângulos 02



Fonte:obm

(c) Chico Bento marcou $\frac{7}{12}$ dos triângulos da figura com a letra C e Doralina, por sua vez, marcou $\frac{3}{4}$ dos triângulos com a letra D, de modo que todos os triângulos ficaram marcados. O número de triângulos marcados com duas letras corresponde a qual fração do número total de triângulos?

Figura 76 – triângulos 03



Fonte:obm

Comentário: observe que a problema exige do aluno conhecimento do conceito de fração e conceito de frações equivalentes. Portanto, podemos classificar o problema em conceitual.

PROBLEMA 02 (*OBMEP 2018*): Luísa pagou R$ 4,50 por $\frac{3}{8}$ de um bolo, e João comprou o resto do bolo. Quanto João pagou?

A) R$ 6,00

B) R$ 6,50

C) R$ 7,00

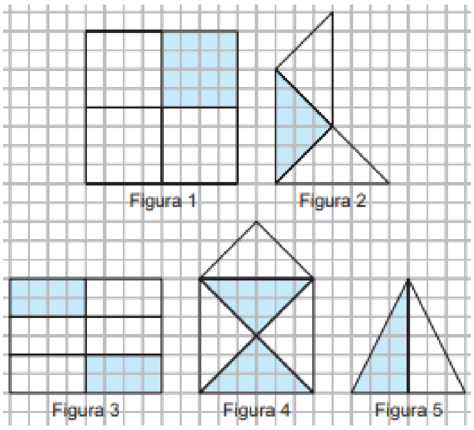
D) R$ 7,50

E) R$ 8,00

Comentário: Temos nesse problema uma aplicação do conceito de fração, pois o aluno deve ter a habilidade de relacionar a fração com valores correspondentes a cada fração indicada.

PROBLEMA 03 (OBMEP 2018): Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?

Figura 77 – unidade de área



Fonte: obmep

A) Figura 1

B) Figura 2

C) Figura 3

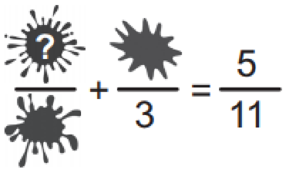
D) Figura 4

E) Figura 5

Comentário: Observe que a problema exige do aluno conhecimento doo conceito de fração e conceito de frações equivalentes. Portanto, podemos classificar o problema em conceitual.

PROBLEMA 04: A figura mostra a fração $\frac{5}{11}$ como a soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração?

Figura 78 – completando



Fonte: obmep

A) 1

B) 2

C) 3

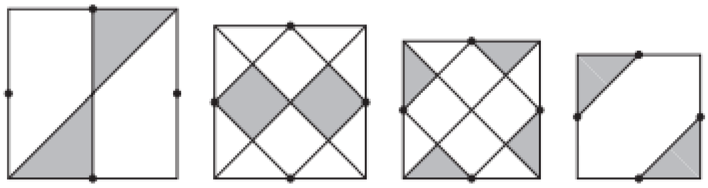
D) 4

E) 5

Comentário: Observe que a problema exige do aluno conhecimento do conceito de fração e conceito de frações equivalentes. Portanto, podemos classificar o problema em conceitual. Mas que inevitavelmente exige do aluno raciocínio.

PROBLEMA 05: Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados.

Figura 79 – um quarto



Fonte: obmep

Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a $\frac{1}{4}$ de sua área?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Comentário: Observe que a problema exige do aluno conhecimento do conceito de fração. Portanto, podemos classificar o problema em conceitual. Mas que inevitavelmente exige do aluno raciocínio e sem dúvida um pouco de criatividade.

PROBLEMA 06: Ângela tem uma caneca com capacidade para $\frac{2}{3}$ L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com $\frac{1}{2}$ L de água?

A) $\frac{7}{12}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{4}{3}$

Comentário: O problema trabalha o conceito de divisão de frações no sentido de saber quantas vezes meio cabe em dois terços.

PROBLEMA 07: A figura mostra uma reta numerada na qual estão marcados pontos igualmente espaçados. Os pontos A e B correspondem, respectivamente, aos números $\frac{7}{6}$ e $\frac{19}{6}$. Qual é o número que corresponde ao ponto C?

Figura 80 – entre A e B

Fonte: obmep

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) 1

Comentário: O problema trabalha o conceito de subtração e divisão de frações.

PROBLEMA 08: Em uma escola, $\frac{1}{6}$ das meninas usam um único brinco; das meninas restantes, metade usa dois brincos e a outra metade não usa brincos. O número de brincos usados pelas meninas é:

A) igual ao número de meninas.

B) o dobro do número de meninas.

C) a metade do número de meninas.

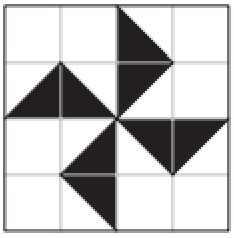
D) dois terços do número de meninas.

E) um terço do número de meninas

Comentário: O problema trabalha o conceito de frações e o conceito de subtração frações.

PROBLEMA 09: A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?

Figura 81 – cata-vento



Fonte: obmep

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{8}$

E) $\frac{1}{16}$

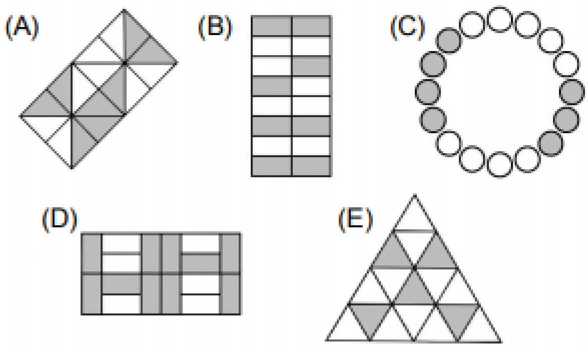
Comentário: O problema trabalha o conceito de frações e o conceito de frações equivalentes.

PROBLEMA 10: Em qual das alternativas aparece um número que fica entre $\frac{19}{3}$ e $\frac{55}{7}$?

Figura 82 – Que numero é esse?

Fonte: obmep

PROBLEMA 11: Cada uma das figuras está dividida em 16 partes iguais. Em qual delas a parte cinza corresponde a $\frac{5}{8}$ da área total?



Comentário: O problema trabalha o conceito de frações e o conceito de frações equivalentes.

PROBLEMA 12: Diadorim, Mimita e Riobaldo dividiram todo o conteúdo de uma garrafa de suco em três copos iguais, enchendo metade do copo de Diadorim, um terço do copo de Mimita e um quarto do copo de Riobaldo.

(a) Como cada um queria um copo cheio de suco, eles abriram outras garrafas iguais a primeira ate encher completamente os copos. Quantas garrafas a mais eles tiveram que abrir?

(b) Se o suco de uma garrafa tivesse sido dividido igualmente entre eles, que fração de cada copo conteria suco?

PROBLEMA 13: A professora da Dorinha passou para seus alunos um questionário com duas perguntas: (1) “Você come peixe?” e (2) “Você come verdura?”. Todos os alunos responderam às duas perguntas e a professora, depois de ler as respostas, calculou as frações.

$$\frac{\text{número de alunos que comem peixe}}{\text{total de alunos}} = \frac{13}{18} \quad \text{e} \quad \frac{\text{número de alunos que comem verdura}}{\text{total de alunos}} = \frac{5}{12}.$$

(a) Ajude a professora, completando a tabela com as frações que estão faltando.

	peixe	*verdura*
sim	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{12}$
não		

(b) Observando a tabela, Dorinha afirmou que havia alunos que comiam tanto peixe como verdura. Explique como ela chegou a essa conclusão.

Comentário: O problema trabalha o conceito de frações e adição de frações.

PROBLEMA 14: Alberto, Beatriz, Carlos, Dulce e Eduardo ainda dormiam quando sua mãe saiu e deixou uma vasilha com jabuticabas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Alberto acordou primeiro, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas e saiu. Beatriz acordou depois, mas pensou que era a primeira a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{5}$ das jabuticabas restantes e também saiu. Os outros três irmãos acordaram juntos, perceberam que Alberto e Beatriz já haviam saído e dividiram as jabuticabas restantes igualmente entre eles.

a) Que fração do total de jabuticabas coube a Beatriz?

b) Quem ficou com a menor quantidade de jabuticabas? Quem ficou com a maior quantidade de jabuticabas?

c) Ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 20 jabuticabas. Quantas jabuticabas havia na vasilha?

Comentário: O problema trabalha o conceito de multiplicação de frações e subtração de frações.

PROBLEMA 15: André, Bernardo e Carlos retiraram, respectivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{14}$ do total de doces de um pacote.

a) Quem retirou o menor número de doces?

b) A quantidade de doces que restou no pacote corresponde a que fração do total?

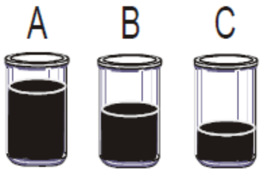
c) André deu 15 doces a Carlos e ficou com o mesmo número de doces que Bernardo. Quantos doces havia inicialmente no pacote?

Comentário: o problema trabalha o conceito de fração, equivalência de frações, soma e subtração de frações.

PROBLEMA 16: Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração ao lado. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume de líquido contido nos frascos A, B e

C, nesta ordem?

Figura 83 – Três frascos



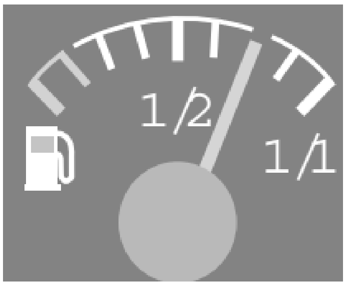
Fonte: obmep

A) $\frac{3}{7};\frac{4}{9};\frac{2}{5}$ B) $\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3};\frac{4}{6};\frac{2}{4}$ D) $\frac{2}{3};\frac{4}{7};\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{3};\frac{4}{5};\frac{2}{3}$

4.2 NO ENEM

PROBLEMA 17: No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

Figura 84 – Três quartos



Fonte: obmep

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150km, 187 km, 450km, 500km e 570km do ponto de partida. Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

A) 570

B) 500

C) 450

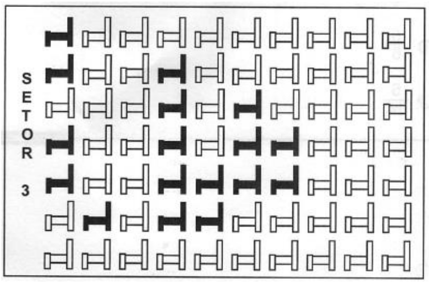
D) 187

E) 150

Comentário: A questão avalia se o aluno consegue manipular bem o conceito de fração.

PROBLEMA 18: Em certo teatro, as poltronas S50 divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

Figura 85 – Três quartos



Fonte - ENEM

A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

A) 17/70

B) 17/53

C) 53/70

D) 53/17

E) 70/17

Comentário: A questão avalia se o aluno entende razão como fração.

PROBLEMA 19: No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Figura 86 – Cartas

Fonte: ENEM

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

A) 9

B) 7

C) 5

D) 4

E) 3

Comentário: A questão avalia a capacidade de identificar números racionais equivalentes entre eles as frações equivalentes.

PROBLEMA 20: Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

A) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

B) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

C) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{3}{2}$ dos chutes.

D) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

E) O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.

PROBLEMA 21: (ENEM) Durante um jogo de futebol foram anunciados os totais do público presente e do público pagante. Diante da diferença entre os dois totais apresentados, um dos comentaristas esportivos presentes afirmou que apenas 75% das pessoas que assistiam àquele jogo no estádio pagaram ingresso. Considerando que a afirmativa do comentarista está correta, a razão entre o público não pagante e o público pagante naquele jogo foi

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{3}$

E) 3

PROBLEMA 22: Para se construir um contra piso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m3 de concreto. Qual é o volume de cimento, em m^3 , na carga de concreto trazido pela betoneira?

A) 1,75

B) 2,00

C) 2,33

D) 4,00

E) 8,00

4.3 NA PROVA BRASIL

As matrizes de Matemática estão estruturadas por anos e séries avaliadas. Para cada um deles são definidos os descritores que indicam uma determinada habilidade que deve ser desenvolvida nessa fase de ensino. Os descritores não contemplam todos os objetivos de ensino, mas apenas aqueles considerados mais relevantes e possíveis de serem mensurados em uma prova para, com isso, obter informações que forneçam uma visão real do ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais.

Os temas são: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação.

A Prova Brasil avalia o ensino e aprendizagem nas escolas públicas segundo o desenvolvimento das habilidades destacadas nos descritores que serão elencados.

Vejamos agora os descritores e exemplos de problemas relacionados ao tema fração:

Descritor 21: Reconhecer diferentes representações de um número racional. Neste descritor pretende-se desenvolver: A habilidade de o aluno identificar números racionais nas suas diversas representações: fracionária, decimal ou percentual.

Problema 23: No Brasil, ¾ da população vive na zona urbana. Quais as outras formas que podemos representar esta fração?

Descritor 22: Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados. Neste descritor pretende-se desenvolver**:** A habilidade de o aluno reconhecer frações em diversas representações como, por exemplo, partes de um inteiro, relação entre conjuntos, razão entre medidas etc.

Problema 24: Dos 11 jogadores de um time de futebol, apenas 5 têm menos de 25 anos de idade. Qual a fração de jogadores desse time, com menos de 25 anos de idade?

Descritor 23: Identificar frações equivalentes. Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno reconhecer que uma fração pode também ser representada por um conjunto infinito de outras frações equivalentes a ela.

Problema 25: Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou 6/8 do caminho; Pedro andou 9/12; Ana, 3/8 e Maria, 4/6. Quais os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho?

Descritor 25: Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno efetuar cálculos de expressões com diferentes representações dos números racionais e envolvendo as operações básicas do conjunto dos racionais.

Problema 26: A professora de matemática propôs como exercício a expressão

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

Os alunos que resolveram corretamente a expressão encontraram que resultado?

Descritor 26: Resolver problemas com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). Neste descritor pretende-se desenvolver a habilidade de o aluno resolver problemas utilizando-se das cinco operações com números racionais.

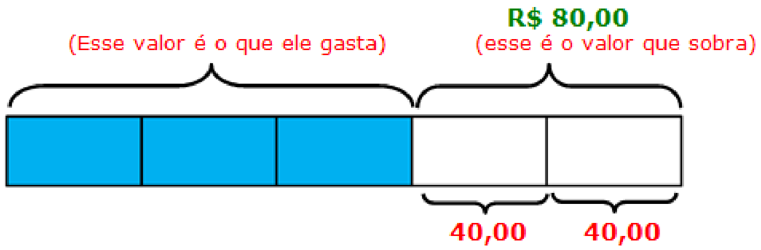
Problema 27: Uma horta comunitária será criada em uma área de 5100m^2. Para o cultivo de hortaliças, serão destinados 2/3 desta área. Quantos metros quadrados serão utilizados neste cultivo?

4.4 EM CONCURSOS

Frações é um tema muito presente em concursos públicos no Brasil e o que temos é certa dificuldade em problemas dos mais simples ao mais complicado. Vamos agora expor alguns desses problemas:

PROBLEMA 28: João gastou em compras diversas três quintos da quantia que possuía e ainda lhe resta o valor de R$ 80,00. Quanto João tinha inicialmente?

Figura 87 – valor de João



Fonte: do autor

Comentário: Esse é um problema que o aluno resolve a partir da fração que sobra, fazendo correspondência com o valor que sobra.

PROBLEMA 29: Dois quintos de meu salário são reservados para o aluguel e a metade que sobra para alimentação. Descontados o dinheiro do aluguel e o da alimentação, coloco um terço do que sobra na poupança, restando então R$ 1.200,00 para gastos diversos. Qual é meu salário?

Comentário: Esse é um problema que o aluno vai retirando frações do que sobra ate que faça correspondência da fração que sobra com o seu valor correspondente.

PROBLEMA 30: Uma pessoa investiu $\frac{1}{2}$ de seu dinheiro em ações, $\frac{1}{4}$ em caderneta de poupança, $\frac{1}{5}$ em outro e os restantes R$10.000,00 em "commodities".

O total investido foi (em R$):

A) R$ 100.000,00

B) R$ 150.000,00

C) R$ 200.000,00

D) R$ 500.000,00

E) R$ 2.000.000,00

Comentário: Esse é um problema que o aluno vai retirando frações sempre do total, até que ele precisa saber quanto do total foi retirado, para isso ele soma as frações indicada, por fim faz correspondência da fração que sobra com o seu valor correspondente.

PROBLEMA 31: Suponha que na lavanderia uma torneira enche um tanque em 6 horas. Outra torneira encha o mesmo tanque em 10 horas. As duas torneiras funcionando juntas encherão o mesmo tanque em:

A) 2 horas e 30 minutos

B) 2 horas e 45 minutos

C) 3 horas e 30 minutos

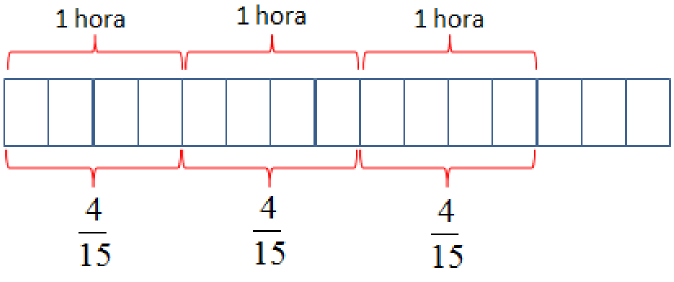
D) 3 horas e 45 minutos

E) 4 horas e 30 minutos

Comentário: Esse é um problema clássico em provas que com uma boa manipulação dos conceitos básicos de fração chegamos ao resultado sem dificuldades. Vejamos a solução:

Temos que a primeira torneira enche o tanque em 6 horas. Sendo assim ela enche $\frac{1}{6}$ do tanque em uma hora e analogamente a segunda torneira enche $\frac{1}{10}$ do tanque em uma hora. Segue que juntas elas enchem $\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$ em uma hora. Agora temos o passo conclusivo do problema. Vejamos a figura:

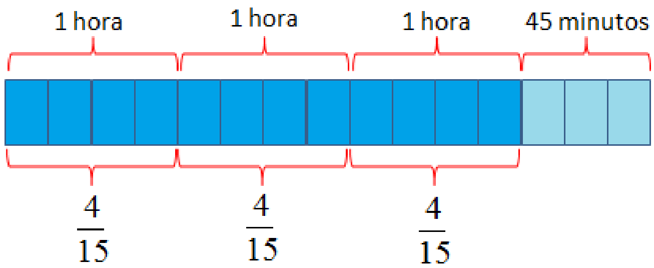
Figura 88– torneiras 01



Fonte: do autor

Observando a figura acima temos que para cada $\frac{4}{15}$ avos da figura corresponde a 1 hora, mas ao final temos um problema de preenchimento, pois sobram 3 partes das 15. Assim, se pensarmos em uma hora como sendo 60 minutos o que temos é que, como cada quatro partes correspondem a 60 minutos, cada parte corresponde a 15 minutos. Concluímos que as três partes que sobraram correspondem à 45 minutos. Portanto temos 3 horas e 45 minutos. Vejamos a figura abaixo:

Figura 89– torneiras 01



Fonte: do autor

PROBLEMA 32: Num reservatório há duas torneiras, a primeira enche-o em 3 horas, a segunda em 6 horas; porém há um sifão que o esvazia em 12 horas. Funcionando as torneiras e o sifão simultaneamente em quanto tempo o reservatório se encherá?

A) 2h e 40min.

B) 2h e 24s.

C) 2h e 30min.

D) 2h e 12min.

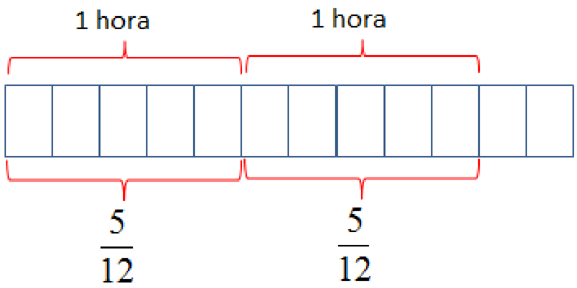
E) 2h e 24min.

Comentário: Esse é outro problema clássico em provas que com uma boa manipulação dos conceitos básicos de fração chegamos ao resultado sem dificuldades. Vejamos a solução:

Temos que a primeira torneira enche o tanque em 3 horas. Sendo assim ela enche $\frac{1}{3}$ do tanque em uma hora e analogamente a segunda torneira enche $\frac{1}{6}$ do tanque em uma hora. Segue que juntas elas enchem $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ em uma hora. Porém há um sifão que o esvazia em 12 horas, assim em uma hora é retirado $\frac{1}{12}$. Seque que em uma hora é colocado $\frac{1}{2}$ e retirado $\frac{1}{12}$ logo o que fica de água é $\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$.

Agora temos o passo conclusivo do problema. Vejamos a figura:

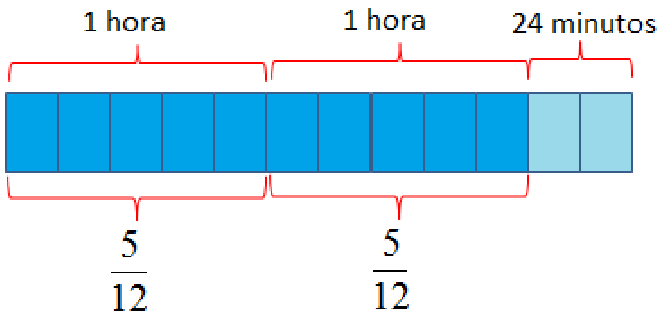
Figura 90– torneiras 02



Fonte: do professor

Observando a figura acima temos que para cada $\frac{5}{12}$ avos da figura corresponde a 1 hora, mas ao final temos um problema de preenchimento, pois sobram 2 partes das 12. Assim, se pensarmos em uma hora como sendo 60 minutos o que temos é que, como cada cinco partes correspondem a 60 minutos, cada parte corresponde a 12 minutos. Concluímos que as duas partes que sobraram correspondem à 24 minutos. Portanto temos 2 horas e 24 minutos. Vejamos a figura abaixo:

Figura 91– torneiras 03



Fonte: do autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a delicadeza com que deve ser tratado o ensino de frações, este trabalho teve como objetivo mostrar à importância do Método de Singapura no ensino de frações e sua teoria em especial a abordagem Concreto - Pictórico - Abstrata (APC).

Pelo que foi desenvolvido ao longo de todo trabalho podemos concluir que o Método de Singapura tem como chave para o sucesso do ensino de frações a construção dos conceitos em vários contextos, destacando-se “Os princípios de variabilidade matemática e perspectiva” de Zoltan Paul Dienes e que o desenvolvimento desses conceitos devem ser desenvolvido por uma série de atividades conectadas entre si e a outros conceitos já desenvolvidos, onde temos a importância de se estabelecer conexões Segundo Richard Skemp.

Vimos que a teoria que da base ao ensino de Singapura está ligada a algumas ideias defendidas pelo psicólogo francês Piaget. Vimos que uma ferramenta importantíssima para o ensino de frações em Singapura é o modelo de barra e assim usamos esse modelo para desenvolver os conceitos de frações e operações. Percebemos que muitas coisas do método de Singapura já são utilizadas no Brasil, para tirar essa conclusão tivemos como apoio as informações retiradas dos PCN’s e da BNCC. Para apreciar o método o aplicamos em uma turma de 7º ano. Onde aplicamos testes diagnósticos e teste pós-aula, comparando os resultados e percebemos que os números foram muito satisfatórios após a aula explorando o modelo de barra.

Para finalizar disponibilizamos uma coletânea de problemas de fração da OBMEP, Concurso, ENEM e PROVA BRASIL.

Esperamos com esse trabalho contribuir para que a sala de aula seja um ambiente provocador e de construção dos conceitos de maneira eficaz e sólida.

Referências

ANTUNES, C. **Como desenvolver competências em sala de aula**. Ed. Vozes. Petrópolis, 2001.

BRASIL, **Prova Brasil**. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 02, junho de 2018.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, vol 3, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03/pdf > . Acesso em: 09 de jun. 2018.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br /ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 20 de abril.2018.

BRASIL (2000). **Documento Básico – ENEM**. Brasília: Imprensa Oficial.
CAVALCANTE. CANDICE .A.S. **Aplicação das atividades estruturadas de Skemp para a construção do conhecimento matemático**. NATAL. 2007.

FRANÇA**.** Denise M. A.**;** VILLELA. Lucia M. A. **Sistemas de numeração e valor posicional: Do antes das experiências de Dienes às atuais propostas.** XII Seminário Temático. Local: Auditório Tristão de Athayde, Escola de Educação e Humanidades – PUCPR Data: 8, 9 10 e 11 de abril de 2015.

HOLANDA, A. B. Disponível em: http: <//www. Dicionariodoau relio.com/Competencia.html>. Acesso em: 20 de abril.2018.

IMPA, **Dez questões do professor de matemática... e como o PISA pode ajudar a respondê-las;** trad. Thiago Pandim. Rio de janeiro: SBM, 2018.

IMPA. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 01, junho de 2018.

IMPAR. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2018.pdf>. Acesso em: 18, junho de 2018.

LIMA, E. L. **O Ensino Médio da Matemática**. Revista Gazeta de Matemática, Rio de Janeiro 2003, n° 144 p. 44-45, Janeiro 2003.

LIMA, E. L. **Conceituação, manipulação e aplicação**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro 1999, n° 41 p.01- 02. Disponível: < http://rpm.org. br/cdrpm/41/1.htm >. Acesso em: 14 de julho de 2018.

PERRENOUD, P. **Construir competências desde a escola**; trad. Bruno Charles Magne. – Porto Alegre: Artmed, 1999.

ROPÉ, F; TANGUY, L. **Saberes e competências: o uso de tais noções na escola e na empresa**. São Paulo: Papirus, 1997.
RODA VIVA. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=t-Io2ZfqUtU>. Disponível em: 10 de janeiro de 2019. Acesso em: 17horas 10minutos e 23 segundos.

SANTOS, C. P; TEIXEIRA, R. C**. Jornal das Primeiras Matemáticas Frações (parte 1).**

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. Rio de Janeiro, 300 p. 79° ed. Record, 2010. https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/biologia/teoria-cognitivista-de-jean-piaget/42384.

TEIXEIA. Ricardo C. **Ensino da Matemática: O Método de Singapura.** Atlântico Expresso. Segunda-feira, 19 de Outubro de 2015.

Santos, Thiago Wagner Oliveira dos. **O desenvolvimento de habilidades do pensamento através da resolução de problemas de raciocínio lógico-matemático**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018.