

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

GABRIEL ROCHA DOMINGOS

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO
CONCEITUAL DE ESTRUTURAS DE CABOS SUJEITAS A
DEFORMAÇÕES FINITAS**

DISSERTAÇÃO

MACEIÓ
2021

GABRIEL ROCHA DOMINGOS

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO
CONCEITUAL DE ESTRUTURAS DE CABOS SUJEITAS A
DEFORMAÇÕES FINITAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas,
como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Estruturas

Linha de pesquisa: Otimização Topológica

Orientador: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior
Universidade Federal de Alagoas

MACEIÓ
2021

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

D671o Domingos, Gabriel Rocha.

Otimização topológica aplicada ao projeto conceitual de estruturas de cabos sujeitas a deformações finitas / Gabriel Rocha Domingos. - 2021.
85 f. : il.

Orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió.

Bibliografia: f. 83-85.

1. Otimização topológica. 2. Projeto conceitual. 3. Estruturas de cabos. I. Título.

CDU:624



**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO CONCEITUAL DE
ESTRUTURAS DE CABOS SUJEITAS A DEFORMAÇÕES FINITAS**

GABRIEL ROCHA DOMINGOS

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 16 do mês de dezembro do ano de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior
(Orientador – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
(Avaliador Interno - PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Anderson Pereira
(Avaliador Externo- PUC-RJ)

Prof. Dr. Fábio Martins Gonçalves Ferreira
(Avaliador Externo- UFAL)

A todos aqueles que sonham com o impossível.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre presente na minha vida.

À minha família, por prover condições de me dar a melhor educação possível, acreditar nos meus sonhos e me dar suporte nas horas difíceis.

Aos amigos do Mestrado, em especial João, Paulo Chagas e Téo, pelos momentos de estudo, pelos conselhos, pela troca de experiências, pelo apoio nas dificuldades e pela parceria e amizade.

A todos os colegas de trabalho do LCCV, em especial Léo, Paulo Victor e Ricardo, pela ajuda no desenvolvimento dos trabalhos no dia-a-dia, pelas valiosíssimas trocas de conhecimento e experiências e pelo exemplo de excelência profissional.

Ao meu orientador, Prof. Adeildo Ramos Jr., pela suave rotina de cooperação ao longo do que já são alguns anos de trabalho, e por todo suporte teórico e conhecimento repassado.

Aos membros da banca avaliadora, Prof. Anderson Pereira, Prof. Eduardo Nobre e Fábio Martins, pelo cuidado e detalhe na avaliação deste trabalho, sempre visando sua melhoria, e pelo suporte no desenvolvimento das atividades no projeto DYNASIM.

A todos os professores do PPGEC, em especial o Prof. Eduardo Toledo, por todo conhecimento compartilhado e pelo suporte e dedicação para transmitir o melhor conhecimento possível.

À minha namorada, Nath, por toda parceria, disponibilidade e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho, pelos momentos vividos e pelos momentos ainda por viver.

Aos amigos da vida, em especial Bruno, Caio, Pepe, Raissinha e Santa, por dividirem comigo momentos bons e ruins, e pela certeza de que não se dá pra fazer velhos amigos.

A todos os técnicos, seguranças, auxiliares de serviços gerais, servidores e funcionários do PPGEC e da Universidade Federal de Alagoas, pelo apoio e suporte nas atividades do dia-a-dia, e por através de seu trabalho me permitirem fazer o meu.

À PETROBRAS e à FUNDEPES, que através do projeto de pesquisa do qual fui bolsista, me proporcionaram condições de fazer ciência e desenvolver minha carreira acadêmica. E a todas as pessoas que me apoiaram, desejaram meu sucesso e acreditaram em mim.

A todos vocês, muitíssimo obrigado.

*“N3o deixe pra depois, valorize a vida.”
(Chor3o, 2007).*

RESUMO

DOMINGOS, Gabriel R. Otimização topológica aplicada ao projeto conceitual de estruturas de cabos sujeitas a deformações finitas. 2021. 85 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2021.

O projeto de estruturas de construção civil é comumente associado a três passos gerais: concepção estrutural, dimensionamento, e análise e verificação. Trata-se de uma abordagem que é influenciada pela experiência e criatividade do profissional projetista, e que está fortemente ligada a uma estratégia de tentativa e erro. Este trabalho visa formular e implementar modelos computacionais baseados em técnicas de otimização topológica para auxiliar na definição da concepção inicial de estruturas compostas por cabos. A formulação matemática proposta neste trabalho incorpora múltiplos casos de carregamento, custo nodal e um modelo constitutivo de cabos com resistência limite. Os resultados mostram que as ferramentas de otimização topológica podem ser usadas como ferramentas de concepção inicial de projeto, sugerindo topologias otimizadas por um método matemático, e que têm o potencial de fugir do padrão do que normalmente é projetado, destravando a criatividade do projetista. Entretanto, sistemas estruturais compostos apenas por cabos são raros, e portanto, para a aplicação direta na indústria, a formulação deste trabalho ainda precisa ser desenvolvida, incorporando também elementos resistentes a esforços de compressão.

Palavras-chave: Otimização Topológica. Projeto conceitual. Estruturas de cabos. Deformações finitas.

ABSTRACT

DOMINGOS, Gabriel R. Topology optimization applied on the conceptual design of cable-based structures subjected to finite strain. 2021. 85 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2021.

The design of civil construction structures is commonly associated to three general steps: structural conception, sizing, and analysis and verification. It is an approach highly dependent on the experience and creativity of the designer, and is tied to a trial and error strategy. This work aims to formulate and to implement computational models based on topology optimization to assist on the definition of initial structural conception of cable-based structures. The mathematical formulation proposed in this work incorporates multiple load cases, nodal cost and a constitutive model of cables with limit resistance. The results show that topology optimization tools can be used to suggest initial structural conception, assisted by a mathematical method, and with the potential of break the pattern of traditional topologies, unlocking designer's creativity. However, structural systems based solely on cables are rare, and therefore for the features presented in this work to have a direct application in industry, there is still the need to evolve the formulation presented here, also incorporating elements resistant to compression actions.

Palavras-chave: Topology Optimization. Conceptual design. Cable structures. Finite strain.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Martim-pescador e trem-bala Shinkansen 500, com sua nova locomotiva.	2
Figura 2 – Exemplo de otimização de forma em uma viga treliçada.	2
Figura 3 – Exemplo de otimização de tamanho em uma viga treliçada.	3
Figura 4 – Exemplo de otimização topológica em uma viga treliçada.	3
Figura 5 – Fluxograma de concepção de projeto segundo uma abordagem tradicional.	4
Figura 6 – Fluxograma de concepção de projeto segundo uma abordagem de otimização.	5
Figura 7 – Da esquerda para a direita: Lotte Tower, um arranha-céu projetado pela empresa americana SOM; a malha de elementos finitos que modela o contorno do edifício; e o resultado da otimização estrutural para o sistema de contraventamento do prédio.	6
Figura 8 – Estrutura metálica reticulada compondo a cobertura da Gare do Oriente, em Lisboa, Portugal, projeto do arquiteto e engenheiro espanhol Santiago Calatrava.	7
Figura 9 – Modelo 3D de uma estrutura em concreto armado e sua respectiva discretização na forma de pórtico espacial.	8
Figura 10 – Diferença entre as formulações de pequenos e grandes deslocamentos.	10
Figura 11 – Quantidades cinemáticas relacionadas à formulação de deformações finitas.	12
Figura 12 – Curva tensão-deformação do material com resistência limite $\bar{\sigma}_i$	13
Figura 13 – GS genérica com condições de suporte e carregamento antes e após o processo de otimização topológica.	17
Figura 14 – GS genérica com condições de suporte e carregamento antes e após o processo de otimização topológica.	17
Figura 15 – Exemplos de topologias finais obtidas por meio da otimização topológica com GS que são complexas demais para serem utilizadas na prática.	20
Figura 16 – Exemplo de otimização topológica e geométrica. Na estrutura do leiaute inicial são aplicadas diferentes restrições de estabilidade e deslocamento, que dão origem às estruturas apresentadas nos leiautes finais.	21
Figura 17 – Exemplo da diferença entre a aplicação de múltiplos casos de carregamento – situação a) – e de carregamentos simultâneos – situação b).	23
Figura 18 – Estrutura simulada para comparação de resultados.	31
Figura 19 – Arranjo final encontrado pela implementação realizada e por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), respectivamente, para a carga aplicada de $P = 10 \text{ kN}$	32

Figura 20 – Métricas da simulação feita na implementação realizada, para a carga aplicada de $P = 10 \text{ kN}$	33
Figura 21 – Arranjo final encontrado pela implementação realizada e por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), respectivamente, para a carga aplicada de $P = 1000 \text{ kN}$	34
Figura 22 – Métricas da simulação feita na implementação realizada, para a carga aplicada de $P = 1000 \text{ kN}$	35
Figura 23 – Arranjo final encontrado pela implementação realizada e por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), respectivamente, para a carga aplicada de $P = 2000 \text{ kN}$	36
Figura 24 – Métricas da simulação feita na implementação realizada, para a carga aplicada de $P = 2000 \text{ kN}$	37
Figura 25 – Raio de ancoragem e <i>pattern</i> de ancoragem.	38
Figura 26 – Modelo utilizado nas simulações, com configurações genéricas de suporte.	39
Figura 27 – Condições de contorno e domínio de projeto.	40
Figura 28 – GS 2D definida no domínio de projeto deste exemplo.	41
Figura 29 – Topologia final deste exemplo.	41
Figura 30 – Métricas da simulação deste exemplo.	42
Figura 31 – Topologia final considerando um limite máximo de 80% do máximo encontrado no caso sem restrição.	43
Figura 32 – Métricas da última simulação.	43
Figura 33 – GS 2D definida no domínio de projeto deste exemplo.	45
Figura 34 – Topologia final considerando um limite máximo das áreas de 80% do máximo encontrado no caso sem restrição.	46
Figura 35 – Métricas da última simulação.	46
Figura 36 – Nós e condições de suporte e carga desta simulação.	47
Figura 37 – Vista superior dos casos de carregamento deste exemplo.	48
Figura 38 – GS 3D inicial com complexidade suficiente para ligar todos os nós com todos os nós.	48
Figura 39 – Topologia final deste exemplo.	49
Figura 40 – Métricas desta simulação.	50
Figura 41 – Vista superior do caso de carregamento R deste exemplo, representado pela resultante dos casos $L1$, $L2$ e $L3$	51
Figura 42 – Topologia final deste exemplo.	51
Figura 43 – Métricas desta simulação.	52
Figura 44 – Vista superior dos casos de carregamento deste exemplo.	53
Figura 45 – Topologia final usando GS 3D com suportes simétricos.	53
Figura 46 – Métricas desta simulação.	54

Figura 47 – GS inicial do exemplo simulado com nós de suporte em posições randômicas.	55
Figura 48 – Topologia final usando GS 3D com suportes randômicos.	55
Figura 49 – Métricas desta simulação.	56
Figura 50 – Topologia final da simulação sem consideração de custo nodal.	57
Figura 51 – Métricas desta simulação.	57
Figura 52 – Topologia final da simulação com consideração de custo nodal.	58
Figura 53 – Métricas desta simulação.	59
Figura 54 – GS inicial e condições de contorno deste exemplo.	60
Figura 55 – Topologia final indeformada da simulação sem a consideração de custo nodal. A estrutura apresentou deslocamentos imperceptíveis a este nível de zoom, e portanto a configuração deformada e indeformada são praticamente as mesmas.	61
Figura 56 – Métricas desta simulação sem a consideração de custo nodal.	61
Figura 57 – Topologia final da simulação com a consideração de custo nodal igual a 5. A estrutura apresentou deslocamentos imperceptíveis a este nível de zoom, e portanto a configuração deformada e indeformada são praticamente as mesmas.	62
Figura 58 – Métricas desta simulação com a consideração de custo nodal igual a 5.	63
Figura 59 – Comparação das configurações deformada e indeformada da topologia final no caso onde não há parede lateral disponível para ancoragem.	64
Figura 60 – Tipos tradicionais de ponte estaiada.	65
Figura 61 – Ponte Octávio Frias de Oliveira, na cidade de São Paulo - SP.	66
Figura 62 – Ponte Juscelino Kubitschek, na cidade de Brasília - DF.	66
Figura 63 – GS e demarcação dos nós de força e suporte para o Exemplo 8.	67
Figura 64 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de $1 \times 10^{+8}$	68
Figura 65 – Métricas da simulação para a carga aplicada de $1 \times 10^{+8}$	68
Figura 66 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de $1.8 \times 10^{+8}$	69
Figura 67 – Métricas da simulação para a carga aplicada de $1.8 \times 10^{+8}$	70
Figura 68 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de $1 \times 10^{+9}$	70
Figura 69 – Métricas da simulação para a carga aplicada de $1 \times 10^{+9}$	71
Figura 70 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de $1 \times 10^{+8}$ e custo nodal $s = 0.25$	72
Figura 71 – Métricas da simulação para a carga aplicada de $1 \times 10^{+8}$ e custo nodal $s = 0.25$	73
Figura 72 – Vista isométrica e vista superior da GS e das condições de contorno deste exemplo.	74
Figura 73 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 1 \times 10^{-1}$ utilizando ambos os modelos constitutivos.	74

Figura 74 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 9 \times 10^{-2}$ utilizando ambos os modelos constitutivos. . . .	75
Figura 75 – Evolução das áreas dos elementos para a simulação com $A_{max} = 9 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.	75
Figura 76 – Diagramas tensão \times deformação para os elementos da simulação com $A_{max} = 9 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.	76
Figura 77 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 6 \times 10^{-2}$ utilizando ambos os modelos constitutivos. . . .	76
Figura 78 – Evolução das áreas dos elementos para a simulação com $A_{max} = 6 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.	77
Figura 79 – Diagramas tensão \times deformação para os elementos da simulação com $A_{max} = 6 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.	77
Figura 80 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 3.2 \times 10^{-2}$ utilizando ambos os modelos constitutivos. . .	78
Figura 81 – Evolução das áreas dos elementos para a simulação com $A_{max} = 3.2 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.	78
Figura 82 – Diagramas tensão \times deformação para os elementos da simulação com $A_{max} = 3.2 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Tensão encontrada nos elementos da topologia final da Figura 74. . . .	76
Tabela 2	–	Tensão encontrada nos elementos da topologia final da Figura 77. . . .	77
Tabela 3	–	Tensão encontrada nos elementos da topologia final da Figura 80. . . .	79

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Otimização topológica de cabos	28
--	----

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2 JUSTIFICATIVA	8
1.3 TEMA E OBJETIVOS	8
1.4 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO	8
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO	9
2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE CABOS	10
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	10
2.2 DEFORMAÇÕES FINITAS	10
2.3 MODELO CONSTITUTIVO DE CABOS	12
2.4 MODELO CONSTITUTIVO DE CABOS COM RESISTÊNCIA LIMITE	13
3 – OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	16
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	16
3.2 O PROBLEMA ESTRUTURAL	16
3.2.1 <i>Ground structures</i>	16
3.2.2 Equação de equilíbrio	17
3.2.3 Linearização da equação de equilíbrio	19
3.2.4 Matriz de rigidez tangente	19
3.3 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	20
3.3.1 Custo nodal	20
3.3.2 Múltiplos casos de carregamento	22
3.3.3 Formulação matemática de otimização topológica	23
3.3.3.1 Análise de sensibilidade	24
3.3.3.2 Convexidade	26
3.3.3.3 Condições de ótimo	26
4 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CABOS	28
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	28
4.2 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CABOS	28
4.2.1 Resolução do problema estrutural	29
4.2.2 Cálculo da função objetivo, restrição e suas sensibilidades	30
4.2.3 Soma das contribuições do caso de carga j	30
4.2.4 Resolução do processo de otimização topológica	30

4.3	RESULTADOS PRELIMINARES	31
5	– EXEMPLOS PROPOSTOS	38
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	38
5.2	SISTEMAS DE ANCORAGEM DE ESTRUTURA <i>OFFSHORE</i>	38
5.2.1	Exemplo 1 - Estrutura 2D com GS inicial simples	39
5.2.2	Exemplo 2 - Estrutura 2D com GS inicial complexa	44
5.2.3	Exemplo 3 - Três casos de carregamento	47
5.2.4	Exemplo 4 - Resultante dos três casos de carregamento	50
5.2.5	Exemplo 5 - Análise de simetria dos resultados	52
5.2.6	Exemplo 6 – Estrutura 2D com GS inicial complexa e custo nodal	56
5.2.7	Exemplo 7 – Estrutura 2D com GS inicial longa e custo nodal . .	59
5.3	PONTE ESTAIADA	65
5.3.1	Exemplo 8 - Ponte estaiada sem custo nodal	66
5.3.2	Exemplo 9 - Ponte estaiada com custo nodal	71
5.4	RESISTÊNCIA LIMITE	73
5.4.1	Exemplo 10 - Comparação entre as formulações de cabos	73
6	– CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
	Referências	83

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A palavra otimização pode ser definida como a ação de produzir condições apropriadas para o melhor desenvolvimento de alguma coisa (DICIO, 2020b). Um processo de otimização pode ser realizado em diferentes áreas do conhecimento, e está necessariamente relacionado à minimização (ou maximização) de um ou mais elementos envolvidos.

Por exemplo, empresas buscam excelência no oferecimento de serviços, e isto exige uma otimização de sua cadeia logística de fornecimento, transporte, estoque e administração de materiais e recursos, minimizando o tempo de produção.

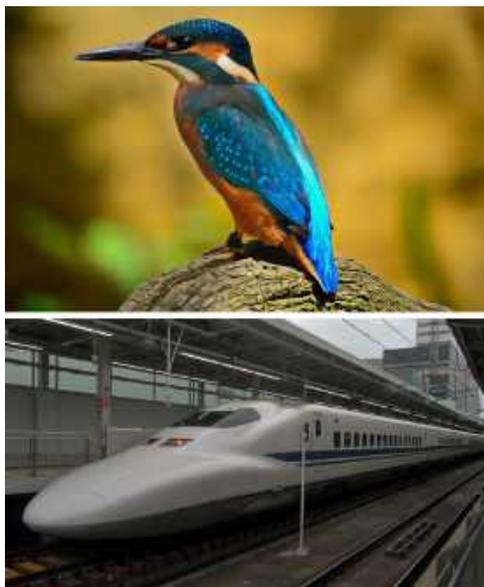
Já no mercado financeiro, usa-se a otimização para auxiliar os investidores na busca por “fundos” e “topos”, que indicam, respectivamente, os melhores momentos para compra e venda de ações, buscando uma maximização dos lucros.

Além do conceito de otimização em si, que pode ser aplicado a processos e decisões, o processo de otimização pode ser aplicado ao desenvolvimento de produtos. Esse tipo de otimização, geralmente desenvolvido dentro do escopo da Engenharia e do Design, pode ser subdividido em otimização topológica, otimização de forma e otimização de tamanho.

Na otimização de forma, como o próprio nome diz, altera-se a forma de regiões previamente especificadas buscando uma melhoria estrutural. Como exemplo de um processo de otimização de forma, considera-se o caso do trem-bala japonês Shinkansen 500, que apresentava um problema de projeto.

Ao sair de túneis, o trem produzia um barulho muito alto, por conta da forma com que a locomotiva comprimia o ar dentro dos mesmos. Isto limitava o desempenho do trem, que, para atender a padrões de conforto acústico nas vizinhanças, precisava limitar sua velocidade a cerca de 80% da máxima a qual fora projetado.

Figura 1 – Martim-pescador e trem-bala Shinkansen 500, com sua nova locomotiva.



Fonte: Adaptada de (PICK-UPAU, 2018).

Para resolver o problema, um engenheiro adotou uma solução inspirada no bico de uma ave. O martim-pescador tem um bico com formato aerodinâmico que o permite mergulhar na água durante a pesca quase sem espirrar água. A frente da locomotiva do trem foi então alterada para um formato baseado no bico da ave, e o problema foi resolvido (BBC Brasil, 2017). Este é um exemplo de otimização aplicada à forma de um produto baseado em uma abordagem biomimética, isto é, que cria soluções inspiradas e baseadas na observação da natureza.

Pensando em estruturas, um exemplo de otimização de forma de uma viga treliçada é apresentado na Figura 2.

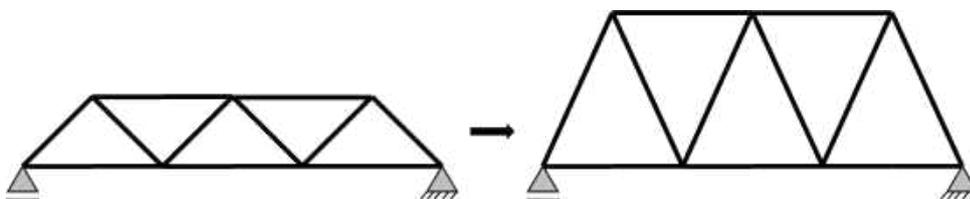


Figura 2 – Exemplo de otimização de forma em uma viga treliçada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na otimização de tamanho, busca-se alterar o tamanho de regiões já existentes buscando um melhor aproveitamento dos materiais, como mostra a Figura 3. Neste tipo de otimização, o material que já existia em peças da estrutura é deslocado para outras peças, sem alterar, contudo, o número de peças ou a topologia final.

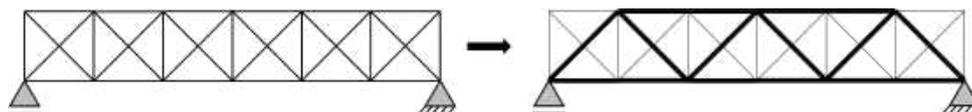


Figura 3 – Exemplo de otimização de tamanho em uma viga treliçada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já a otimização topológica vai além das anteriores. Nela, busca-se lançar a estrutura a partir de uma configuração genérica inicial, levando em consideração os elementos mais solicitados e eliminando os elementos que contribuem menos. O volume de material economizado com os elementos que contribuem menos é redistribuído para os elementos que permanecem na estrutura, visto que estes serão os mais solicitados. A Figura 4 mostra um exemplo de otimização topológica aplicada a uma viga treliçada.

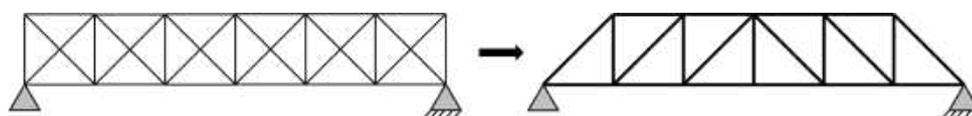


Figura 4 – Exemplo de otimização topológica em uma viga treliçada.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Engenharia Estrutural, a otimização vem ganhando cada vez mais espaço, sobretudo nas indústrias aeronáutica, aeroespacial e automobilística. Baseadas em técnicas de otimização topológica, de tamanho e de forma, estas indústrias vêm produzindo peças otimizadas para sua aplicação. Yang e Chahande (1995) mostram o exemplo de peças de automóveis otimizadas visando a minimização da *compliance*, isto é, a maximização da rigidez da peça. Já Krog, Tucker e Rollema (2011) apresentam o desenvolvimento de uma solução otimizada visando a minimização da massa final de uma das peças da asa do Airbus A380.

Na indústria da construção civil, o processo de concepção de projeto tradicionalmente se baseia no fluxograma ilustrado na Figura 5.

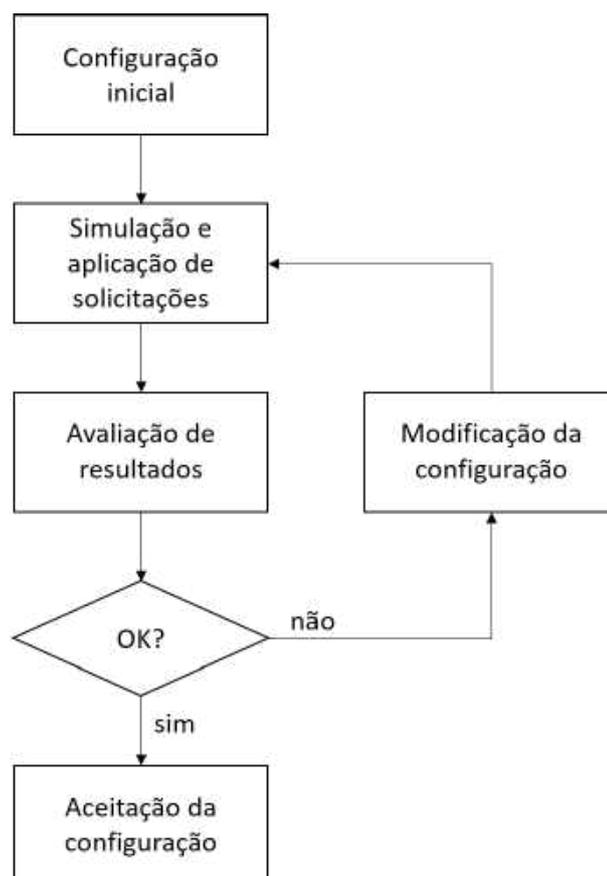


Figura 5 – Fluxograma de concepção de projeto segundo uma abordagem tradicional.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na abordagem tradicional de projeto, é necessário que se parta de uma configuração inicial, muitas vezes baseada na intuição e experiência do projetista. Este ponto em si já mostra um problema, visto que o ponto de partida obedece a critérios subjetivos, e que variam muito de profissional para profissional. Em seguida, aplicam-se as solicitações ao modelo inicial e avaliam-se os resultados em termos dos critérios de projeto.

Pensando em estruturas de construção civil, estes critérios podem estar relacionados ao estado limite último (escoamento, falha, ruptura...), ao estado limite de serviço (flecha, vibração, abertura de fissura...) ou simplesmente a algum outro critério executivo (disponibilidade de material, mão de obra necessária, orçamento de execução...) da estrutura, o que agrega mais um fator subjetivo ao processo de concepção de projeto. Caso os critérios sejam atendidos, a estrutura é aceita. Caso contrário, faz-se novamente um novo lançamento de estrutura, redimensionando peças e fazendo ajustes.

A abordagem tradicional de projeto baseia-se em tentativa e erro, recaindo na experiência do profissional projetista. Como uma nova configuração geralmente trabalha com objetivos conflitantes, como por exemplo reduzir a massa da estrutura e ao mesmo tempo garantir sua rigidez, o resultado final obtido é satisfatório do ponto de vista dos critérios de projeto, mas dificilmente será ótimo.

A abordagem de concepção de projeto baseada em otimização, por sua vez, baseia-se no fluxograma ilustrado na Figura 6.

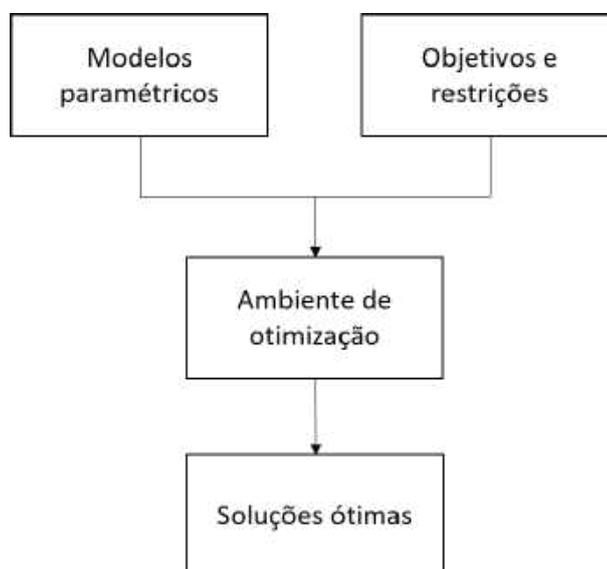


Figura 6 – Fluxograma de concepção de projeto segundo uma abordagem de otimização.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por “modelos paramétricos” entendem-se todas as informações a respeito das variáveis de projeto (áreas, alturas...), das variáveis de operação (carregamentos, influência de vento, temperatura...) e outras informações a respeito dos materiais e da discretização do domínio (mais sobre isso ao longo do texto). Já os objetivos e restrições incluem a função objetivo do problema a qual se deseja otimizar (encontrar o mínimo custo para execução, encontrar a estrutura mais resistente...) e os parâmetros de restrição (volume máximo de material, seções transversais máximas e mínimas...).

Diferente da biomimética, o ambiente de otimização utiliza um método científico baseado em algoritmos matemáticos para encontrar soluções otimizadas. Baseado na configuração do passo anterior, estes algoritmos localizam as variáveis que podem ser alteradas – e de que forma estas devem ser alteradas – com o objetivo de atingir um ponto ótimo da função objetivo, seja ele de máximo ou mínimo, a depender do problema. Assim, quando o problema é resolvido por completo, o produto obtido é uma configuração ótima dentro das restrições impostas. Desta maneira, não há tentativa e erro, o que é um ponto bastante positivo para esta abordagem.

Entretanto, não existem somente vantagens no processo de concepção de projeto baseado em otimização. Muitas vezes as configurações ótimas podem ser muito difíceis ou até impossíveis de executar usando os meios de manufatura convencionais. Por conta disso, o processo de otimização tem sido mais utilizado em uma concepção inicial de projeto, um ponto de partida que substitui aquele em que o projetista precisa usar sua intuição. Nesta modalidade, o processo de otimização acontece primeiro, e a configuração ótima se torna a

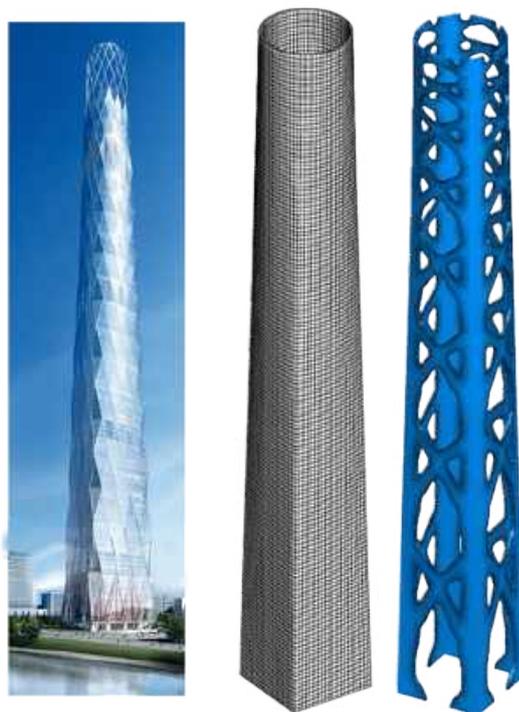


Figura 7 – Da esquerda para a direita: Lotte Tower, um arranha-céu projetado pela empresa americana SOM; a malha de elementos finitos que modela o contorno do edifício; e o resultado da otimização estrutural para o sistema de contraventamento do prédio.

Fonte: Adaptada de (STROMBERG et al., 2011).

configuração inicial do processo de concepção tradicional, que segue normalmente a partir desta.

Esta abordagem tem o poder de desvincular a subjetividade e a intuição do projetista do processo de criação – ou, no caso de estruturas de construção civil, lançamento da estrutura – substituindo o modelo inicial proposto por ele por uma configuração já otimizada por um método científico. Isto também permite que o processo de otimização apresente ao projetista formas não-convencionais de lançar uma estrutura, por exemplo, destravando sua criatividade e dando lugar a estruturas mais funcionais, originais e, porque não, mais elegantes.

A Figura 7 mostra o resultado do processo de otimização da estrutura de contraventamento de um arranha-céu. Vê-se que a configuração encontrada pelo processo de otimização é uma configuração não-trivial, mas com traços estéticos agradáveis que se destacam.

Ainda dentro das estruturas relacionadas à construção civil, podemos destacar as estruturas reticuladas, que são representadas pela união de barras por meio de nós. Pode-se pensar em barras como elementos que possuem duas dimensões de mesma ordem de grandeza bem menor do que a terceira, que se torna a dimensão axial (em geral, menores em 5 vezes ou mais).



Figura 8 – Estrutura metálica reticulada compondo a cobertura da Gare do Oriente, em Lisboa, Portugal, projeto do arquiteto e engenheiro espanhol Santiago Calatrava.

Fonte: (REBEL, 2011).

No cotidiano, as estruturas reticuladas são muito comuns, e costumam se apresentar executadas principalmente em aço e madeira. A Figura 8 é um exemplo de estrutura metálica reticulada, na qual as dimensões axiais das peças se mostram preponderantes com relação às outras dimensões. Vê-se também que os elementos são ligados por meio de nós, que concentram dois ou mais encontros de peças.

Estruturas de concreto também podem ser – e são – discretizadas em estruturas reticuladas, para efeitos de análise estrutural. Vigas e pilares são discretizados em barras lineares, lajes e elementos de fundação como radiers são discretizados por meio de grelhas. A união dessas estruturas é dada por meio de modelos diversos, sendo o de pórtico espacial um dos mais comuns, como mostra a Figura 9.

Dentro deste contexto, a proposta deste trabalho é formular e implementar modelos computacionais baseados em técnicas de otimização topológica para auxiliar na definição da disposição inicial das barras de uma estrutura reticulada.

Muito se estuda no que se diz respeito à otimização topológica de materiais com os mais diferentes modelos constitutivos. Para a abordagem deste trabalho, o modelo escolhido foi o modelo de cabos, priorizando trabalhar com estruturas reticuladas predominantemente compostas por cabos. Adota-se a definição de cabo como “fio grosso ou feixe de fios, geralmente de aço, usado como reforço, sustentação ou para tração” (DICIO, 2020a). Indo mais além, dentro de um contexto de Engenharia, trata-se de um material dúctil que resiste apenas a esforços de tração.



Figura 9 – Modelo 3D de uma estrutura em concreto armado e sua respectiva discretização na forma de pórtico espacial.

Fonte: Elaborada pelo autor.

1.2 JUSTIFICATIVA

Auxiliar no desenvolvimento de projetos de estruturas reticuladas mais bem ajustadas para cada situação em particular, desvinculando a fase de concepção estrutural do método tradicional de projeto – baseado na experiência do projetista – e introduzindo uma ferramenta que, por meio de um método científico, seja capaz de sugerir arranjos iniciais matematicamente otimizados.

1.3 TEMA E OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é formular e implementar um modelo computacional que possibilite a otimização topológica de estruturas reticuladas compostas por cabos.

Dentro dos objetivos específicos, apresentam-se:

- a) Estudar uma formulação matemática de cabos e propor melhorias a essa formulação;
- b) Validar a implementação da formulação proposta;
- c) Simular modelos de estruturas reticuladas diversas compostas por cabos e analisar os resultados encontrados;
- d) Sugerir encaminhamentos para trabalhos futuros.

1.4 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

Para este trabalho delimita-se a implementação computacional da formulação matemática de cabos e a simulação de modelos de otimização topológica de estruturas reticuladas diversas compostas predominantemente por cabos.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 2 faz-se uma revisão bibliográfica do estado da arte e estuda-se a formulação matemática de cabos proposta por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020). Em seguida, propõe-se um modelo matemático de cabos com resistência limite com base no modelo estudado.

No Capítulo 3 é feita uma revisão bibliográfica do estado da arte em conceitos de otimização topológica. Dedicar-se uma parte do capítulo à descrição da parte estrutural do problema de otimização, contemplando conceitos importantes como *ground structures* e matriz de rigidez tangente. Em seguida, dedica-se o resto do capítulo ao estudo e formulação de um modelo de otimização topológica de cabos, propondo a inclusão de custo nodal e múltiplos casos de carregamento.

No Capítulo 4 é feita uma descrição dos passos relacionados à implementação do modelo de otimização topológica, bem como às estratégias computacionais envolvidas necessárias à resolução do problema. No fim do capítulo é feita a apresentação de resultados preliminares, que tiveram como objetivo verificar a implementação realizada com o trabalho de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020).

No Capítulo 5 são simulados exemplos de estruturas reticuladas compostas por cabos, com o objetivo de validar matematicamente/qualitativamente as funcionalidades propostas no trabalho.

No Capítulo 6 são feitas considerações finais do trabalho e encaminhamentos para trabalhos futuros.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE CABOS

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Dedica-se este capítulo à apresentação do modelo matemático de cabos. Na Engenharia, cabos são estruturas que resistem somente a esforços de tração. Matematicamente, este comportamento é descrito por meio de um modelo constitutivo. Para o modelo constitutivo de cabos utilizado neste trabalho, toma-se como referência o modelo apresentado no trabalho de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020).

2.2 DEFORMAÇÕES FINITAS

Antes de se falar sobre o modelo constitutivo de cabos em si, vale a pena tratar das relações cinemáticas consideradas. Mais adiante ao longo do texto, ao tratarmos da formulação de otimização topológica, será detalhado o conceito de *ground structure*¹, na qual serão considerados elementos de cabo para discretizar o domínio de otimização. Estes elementos são ligados uns aos outros por meio de nós, onde se aplicam as condições de contorno do problema. Por ora, é necessário saber que estes elementos também estão sujeitos apenas a esforços axiais.

Como estamos tratando de cabos, a consideração de uma formulação cuja cinemática envolva deformações finitas é necessária. Para demonstrar essa necessidade, traz-se a ilustração da Figura 10.

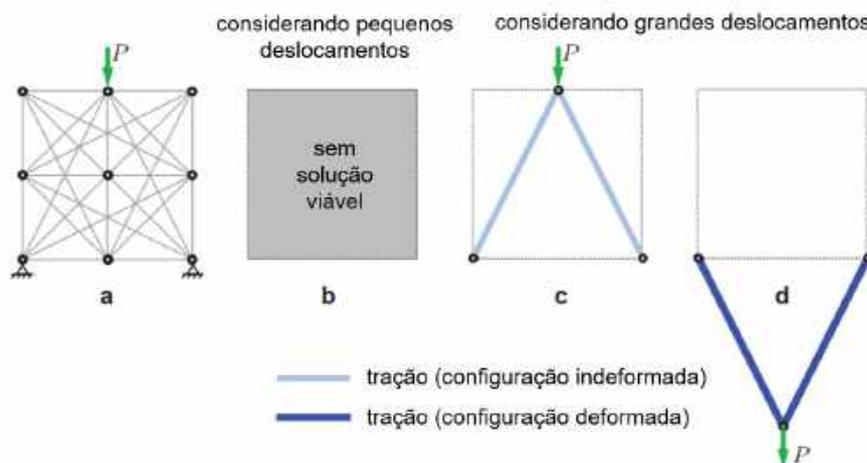


Figura 10 – Diferença entre as formulações de pequenos e grandes deslocamentos.

Fonte: Adaptada de (SANDERS; RAMOS JR.; PAULINO, 2020).

¹livremente traduzido pelo autor como “estrutura fundamental”.

Na situação a) da Figura 10, apresenta-se uma *ground structure* que descreve o problema, com uma carga aplicada no topo, e dois apoios na parte inferior. Se considerarmos uma formulação de pequenos deslocamentos, os nós da estrutura não serão capazes de se mover a fim de encontrar uma configuração de tração pura nos elementos de cabo. Dessa maneira, o problema não tem solução, como mostra a situação b), já que os cabos não resistem a esforços de compressão. Ao considerar grandes deslocamentos, temos uma solução para o problema, que tem sua configuração deformada apresentada na situação d), onde o equilíbrio é atingido por meio da tração nos elementos de cabo. Percebe-se que todos os outros elementos da estrutura original não trabalham, pois não estão sendo solicitados à tração, e, portanto, não fazem parte da topologia final após o processo de otimização.

Diante da necessidade apresentada, parte-se para a definição de algumas quantidades cinemáticas. A Figura 11 apresenta uma ilustração que ajuda a visualizar essas quantidades. Em um espaço tridimensional, os vetores posição das configurações indeformada e deformada de um elemento i são definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_i &= \sum_{j=1}^{n_d} X_i^j \mathbf{E}^j, \text{ e} \\ \mathbf{x}_i &= \sum_{j=1}^{n_d} x_i^j \mathbf{e}^j,\end{aligned}\tag{1}$$

nas quais $n_d = 3$ é o número de dimensões espaciais dos espaços tridimensionais indeformado (\mathbf{E}) e deformado (\mathbf{e}).

Baseado nas coordenadas dos pontos $P - Q$ e $p - q$, nós inicial e final do elemento i em suas posições indeformada e deformada, respectivamente, definem-se os comprimentos indeformado e deformado de um elemento i como:

$$\begin{aligned}L_i &= \left[\left(\mathbf{X}_i^Q - \mathbf{X}_i^P \right) \cdot \left(\mathbf{X}_i^Q - \mathbf{X}_i^P \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ e} \\ l_i &= \left[\left(\mathbf{x}_i^q - \mathbf{x}_i^p \right) \cdot \left(\mathbf{x}_i^q - \mathbf{x}_i^p \right) \right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{2}$$

Da mesma forma, os vetores diretores de um elemento i nas configurações indeformada e deformada, respectivamente, são:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_i &= \frac{\mathbf{X}_i^Q - \mathbf{X}_i^P}{L_i}, \text{ e} \\ \mathbf{n}_i &= \frac{\mathbf{x}_i^q - \mathbf{x}_i^p}{l_i}.\end{aligned}\tag{3}$$

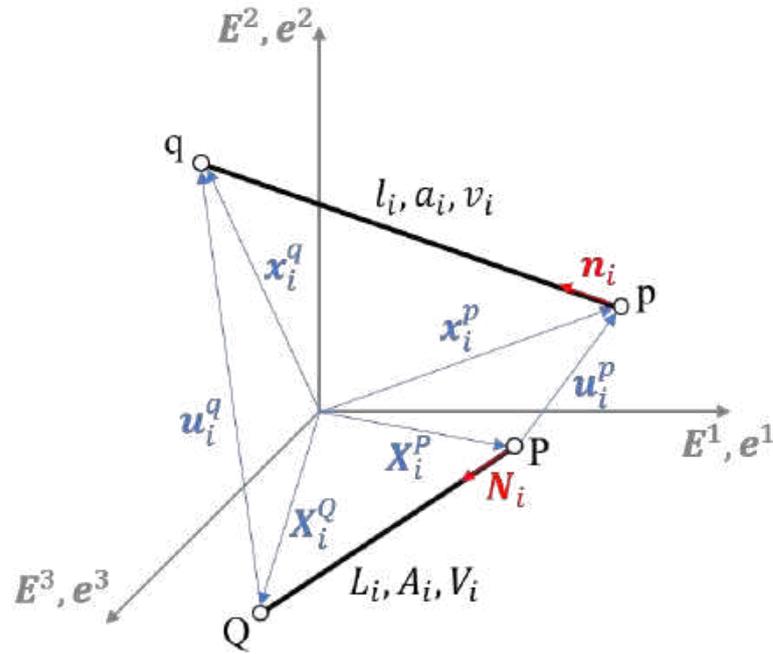


Figura 11 – Quantidades cinemáticas relacionadas à formulação de deformações finitas.

Fonte: Adaptada de (SANDERS; RAMOS JR.; PAULINO, 2020).

Define-se também o estiramento – λ_i – como a razão entre os tamanhos final e inicial de um elemento i . O estiramento, assim como a deformação, é uma medida cinemática tensorial. Entretanto, por estarmos tratando de elementos discretos caracterizados por deformações puramente axiais, assumimos os estiramentos principais transversos – λ_i^2 e λ_i^3 – como unitários. Sendo assim, o estiramento principal λ_i^1 é definido como:

$$\lambda_i = \frac{l_i}{L_i}. \quad (4)$$

Sabe-se que o Jacobiano é definido como a razão de medida entre os volumes deformado e indeformado, ou seja, $J_i = \lambda_i^1 \lambda_i^2 \lambda_i^3 = \lambda_i^1 = \lambda_i$. Sendo $v_i = a_i l_i$ o volume deformado e $V_i = A_i L_i$ o volume indeformado do elemento i , é correto afirmar que:

$$J_i = \frac{v_i}{V_i} = \frac{a_i l_i}{A_i L_i} \rightarrow \lambda_i = \frac{l_i}{L_i} = \frac{a_i l_i}{A_i L_i}, \quad (5)$$

e, portanto, $a_i = A_i$.

Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) ainda fazem uso, ao longo da formulação, de uma medida de deformação dada por $\varepsilon_i = \int_{L_i}^{l_i} \frac{dl_i}{L_i} = \lambda_i - 1$. Esta também é conhecida como a deformação de Engenharia rotacionada (CRISFIELD, 1991).

2.3 MODELO CONSTITUTIVO DE CABOS

Depois de definidas as quantidades cinemáticas relacionadas à consideração de deformações finitas, Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) definem o modelo constitutivo

de cabos propriamente dito.

Definindo-se inicialmente a magnitude da força interna em um elemento i como sendo $t_i = \sigma_i a_i$, na qual σ_i é o componente axial da tensão de Cauchy no elemento i , é possível escrever a energia de deformação acumulada por unidade de volume no elemento i como:

$$\Psi_i = \frac{1}{V_i} \int_{L_i}^{l_i} t_i dl_i = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i \frac{v_i}{V_i} \frac{L_i}{l_i} d\varepsilon_i = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i \frac{J_i}{\lambda_i} d\varepsilon_i, \quad (6)$$

de onde surge a relação constitutiva do modelo:

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{J_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda_i}. \quad (7)$$

Introduzindo o parâmetro E_i como sendo o módulo de Young do elemento i , Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) adotam a seguinte função de densidade de energia para o modelo de cabos:

$$\Psi_i = \begin{cases} \frac{E_i}{2} (\lambda_i - 1)^2 & \text{se } \lambda_i \geq 1 \\ 0 & \text{senão.} \end{cases} \quad (8)$$

Substituindo a Equação (8) na Equação (7), temos σ_i como:

$$\sigma_i = \begin{cases} E_i (\lambda_i - 1) & \text{se } \lambda_i \geq 1 \\ 0 & \text{senão,} \end{cases} \quad (9)$$

o que finalmente descreve o modelo constitutivo de cabos proposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020).

2.4 MODELO CONSTITUTIVO DE CABOS COM RESISTÊNCIA LIMITE

Partindo do modelo proposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), um modelo de cabos com a adoção de um limite para a resistência do material é proposto neste trabalho. O modelo também representa um material hiperelástico que só oferece resistência à tração axial.

Este modelo é baseado na curva tensão-deformação do material de um elemento i , idealizando-a da maneira apresentada na Figura 12.

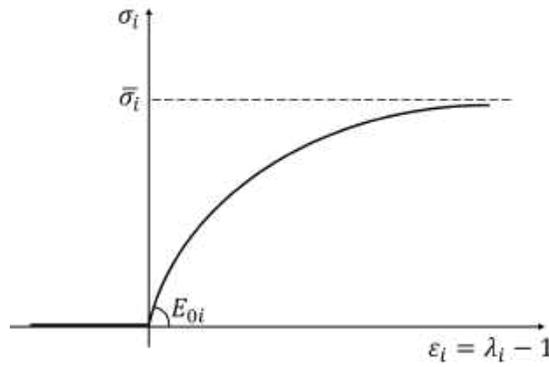


Figura 12 – Curva tensão-deformação do material com resistência limite $\bar{\sigma}_i$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 12 apresenta uma função definida de forma diferente para o lado positivo e para o lado negativo das deformações, devido ao comportamento de cabo. A equação para o lado positivo das deformações é estabelecida determinando as duas constantes, A e B , a seguir:

$$\sigma_i = \frac{A \varepsilon_i}{B + \varepsilon_i}. \quad (10)$$

A constante A é determinada por uma das condições de contorno do problema, tomando o limite da Equação (10) quando ε_i tende ao infinito positivo:

$$\bar{\sigma}_i = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow +\infty} \frac{A \varepsilon_i}{B + \varepsilon_i} = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow +\infty} \frac{A}{\frac{B}{\varepsilon_i} + 1} = A \implies A = \bar{\sigma}_i. \quad (11)$$

A constante B , por sua vez, é determinada observando o comportamento do módulo de elasticidade do material, que é definido como a derivada da tensão com relação à deformação:

$$E_i(\varepsilon) = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{A}{B + \varepsilon_i} - \frac{A \varepsilon_i}{(B + \varepsilon_i)^2}. \quad (12)$$

Usando a informação de que o módulo de elasticidade inicial do material, E_{0i} , é conhecido, tem-se:

$$E_i(0) = E_{0i} = \frac{A}{B} \implies B = \frac{\bar{\sigma}_i}{E_{0i}}, \quad (13)$$

assim, a Equação (10) se torna:

$$\sigma_i = \frac{\bar{\sigma}_i \varepsilon_i}{\frac{\bar{\sigma}_i}{E_{0i}} + \varepsilon_i}. \quad (14)$$

Da Equação (7) sabe-se que a função densidade de energia do elemento i é definida segundo a integral:

$$\Psi_i = \int \sigma_i d\lambda_i = \int \sigma_i d\varepsilon_i = \bar{\sigma}_i \varepsilon_i - \frac{\bar{\sigma}_i^2}{E_{0i}} \ln \left(\frac{\bar{\sigma}_i}{E_{0i}} + \varepsilon_i \right) + C, \quad (15)$$

na qual C é uma constante de integração.

Para definir a constante de integração C , usamos a condição de contorno do problema onde temos que para $\varepsilon_i = 0$ a energia de deformação acumulada é nula. Assim:

$$C = \frac{\bar{\sigma}_i^2}{E_{0i}} \ln\left(\frac{\bar{\sigma}_i}{E_{0i}}\right). \quad (16)$$

Desta forma, a função densidade de energia para este modelo é:

$$\Psi_i = \begin{cases} \bar{\sigma}_i (\lambda_i - 1) + \frac{\bar{\sigma}_i^2}{E_{0i}} \ln\left(\frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{\sigma}_i + E_{0i} (\lambda_i - 1)}\right) & \text{se } \lambda_i \geq 1 \\ 0 & \text{senão,} \end{cases} \quad (17)$$

e a tensão no elemento i é:

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}_i (\lambda_i - 1)}{\frac{\bar{\sigma}_i}{E_{0i}} + \lambda_i - 1} & \text{se } \lambda_i \geq 1 \\ 0 & \text{senão,} \end{cases} \quad (18)$$

o que finalmente descreve o modelo constitutivo de cabos com resistência limite proposto neste trabalho.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Dedica-se este capítulo à discussão da formulação de otimização topológica utilizada. A formulação utilizada neste trabalho é baseada naquelas apresentadas por Ramos Jr. e Paulino (2015) e Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), desenvolvidas para *ground structures* e elementos de cabo, sendo assim, portanto, formulações de otimização topológica (OT) discreta.

3.2 O PROBLEMA ESTRUTURAL

A formulação de otimização topológica resolve, antes de tudo, um problema estrutural. Afinal de contas, é necessário que a estrutura otimizada final esteja em equilíbrio para que o resultado do processo de otimização seja válido. Na formulação utilizada neste trabalho, resolvem-se problemas de otimização topológica discreta com o uso de *ground structures*. Também se utiliza um princípio energético para descrever o comportamento estrutural em termo de forças e deslocamentos. Portanto, dedica-se esta seção a esclarecer do que tratam essas considerações.

3.2.1 *Ground structures*

Ground structures (GS), ou “estruturas fundamentais” (tradução livre feita pelo autor), são basicamente grafos, que podem ser bi ou tridimensionais, com o papel de representar estruturas formadas por elementos de barra e ligados por meio de nós. Os elementos de barra apresentam propriedades mecânicas próprias e são eles que irão compor a estrutura final após o processo de otimização. Já os nós da estrutura acomodam as propriedades de suporte e/ou carga, e é neles que é feita a coerência de forças e deslocamentos.

Quando o processo de otimização se inicia, a área dos elementos vai sendo alterada, de forma a concentrar material naqueles que são mais importantes para a resolução do problema, que, a depender da função objetivo, visará aumentar a rigidez, diminuir o volume ou tornar a estrutura mais econômica.

Na Figura 13 apresenta-se um exemplo de uma GS simples com nós de suporte e carga, e o resultado do processo de otimização dessa estrutura, no qual somente as barras que são importantes para a resolução do problema permanecem na estrutura.

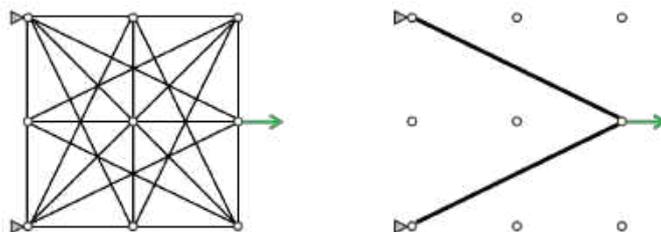


Figura 13 – GS genérica com condições de suporte e carregamento antes e após o processo de otimização topológica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A definição da GS é uma tarefa importante na resolução de um problema de OT discreta, pois a topologia final estará sempre inserida na GS inicial. Isto é, o problema de otimização topológica discreta é dependente da maneira que se define a GS inicial.

No exemplo da Figura 13, um nó é ligado não somente a seus vizinhos mais próximos, mas também aos vizinhos mais distantes. Essa diferença entre as conexões entre as barras é referida na literatura como o nível de conectividade das barras. Caso a GS fosse definida com um nível de conectividade menor, como na Figura 14, a topologia final também seria diferente:

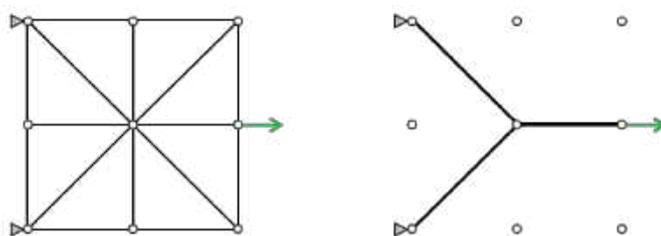


Figura 14 – GS genérica com condições de suporte e carregamento antes e após o processo de otimização topológica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Também, em alguns casos, a depender da GS inicial, o problema pode não apresentar solução, como foi mostrado na Figura 10.

3.2.2 Equação de equilíbrio

Equações de equilíbrio regem o problema estrutural do ponto de vista de forças e deslocamentos. Em alguns casos se torna difícil descrevê-las usando a metodologia de soma vetorial e diagramas de corpo livre, e nestes casos costuma-se apelar para princípios energéticos. Neste trabalho, o princípio energético utilizado é o da energia potencial total estacionária.

O princípio da energia potencial total estacionária estabelece que dentre todas as configurações admissíveis de um sistema conservativo, aquelas que satisfazem às equações

de equilíbrio produzem a energia potencial estacionária com respeito às pequenas variações admissíveis de deslocamentos.

A energia potencial total de uma estrutura, $\Pi(\mathbf{u})$, é assumida como a soma da sua energia de deformação, $U(\mathbf{u})$, e do potencial das cargas externas, $\Omega(\mathbf{u})$. Estas duas grandezas são avaliadas, respectivamente, como:

$$U(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \Psi_i(\mathbf{u}) dV = \sum_{i=1}^n V_i \Psi_i(\mathbf{u}) \quad (19)$$

e

$$\Omega(\mathbf{u}) = -\mathbf{F}^T \mathbf{u}, \quad (20)$$

nas quais n é o número de elementos presentes na GS do problema e \mathbf{F} é o vetor de cargas externas.

Portanto, para atender à condição de estacionariedade, é necessário que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} &= \frac{\partial U(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \Omega(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial \Psi_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial (\mathbf{F}^T \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \sum_{i=1}^n V_i \frac{\partial \Psi_i(\mathbf{u})}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (21)$$

O termo $\frac{\partial \Psi_i(\mathbf{u})}{\partial \lambda_i}$ foi definido na Equação (7), e o termo $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{u}}$ é definido como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{1}{L_i} \frac{\partial l_i}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{L_i} \frac{\partial l_i}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{L_i} \frac{\partial l_i}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{L_i} \mathbf{b}_i, \end{aligned} \quad (22)$$

tal que:

$$\mathbf{b}_i = \left\{ \dots \frac{\partial l_i}{\partial \mathbf{x}^p} \dots \frac{\partial l_i}{\partial \mathbf{x}^q} \dots \right\}^T = \{ \dots - \mathbf{n}_i \dots \mathbf{n}_i \dots \}^T, \quad (23)$$

de forma que as reticências indicam zeros e os vetores \mathbf{n}_i se encontram nas posições relativas aos nós p e q .

Trazendo os resultados das Equações (7) e (22) para a Equação (21), tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} &= \sum_{i=1}^n A_i L_i \frac{J_i}{\lambda_i} \sigma_i \frac{1}{L_i} \mathbf{b}_i - \mathbf{F} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \mathbf{b}_i - \mathbf{F} \\
&= \mathbf{T}(\mathbf{u}) - \mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{24}$$

que é a equação de equilíbrio do problema, na qual $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ é definido como o vetor de forças internas nos elementos e $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ é o vetor de forças residuais (que deve ser igualado a zero para garantir o equilíbrio da estrutura).

3.2.3 Linearização da equação de equilíbrio

Como o problema estrutural a ser resolvido é não-linear do ponto de vista físico (material hiperelástico) e geométrico (consideração de grandes deslocamentos na formulação de cabos), o mesmo é resolvido de forma iterativa, por meio do método de Newton amortecido, e para isso a Equação (24) é linearizada.

Dada uma estimativa de solução \mathbf{u}_k para a Equação (24) na iteração k , uma nova solução $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k$ é obtida em termos de um incremento $\Delta \mathbf{u}_k$. Assim, linearizando a Equação (24), tem-se:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{K}^t(\mathbf{u}_k) \Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \tag{25}$$

tal que

$$\mathbf{K}^t(\mathbf{u}_k) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_k) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_k), \tag{26}$$

na qual $\mathbf{K}^t(\mathbf{u}_k)$ é definida como a matriz de rigidez tangente global da estrutura.

Linearizada, a equação de equilíbrio do problema agora é:

$$\mathbf{K}^t(\mathbf{u}_k) \Delta \mathbf{u}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{F} - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k). \tag{27}$$

À Equação (27) ainda será adicionado um termo de regularização, conforme será discutido na seção 4.2.1. Este termo tem o objetivo de contornar situações de singularidade na matriz de rigidez tangente, causadas pelo processo de otimização topológica.

3.2.4 Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente global da estrutura pode ser montada a partir das matrizes tangentes de rigidez de cada elemento i , $\mathbf{k}_i^t(\mathbf{u}_k)$, dadas por:

$$\mathbf{k}_i^t(\mathbf{u}_k) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial t_i^p}{\partial \mathbf{u}_i^p} \right|_{\mathbf{u}_k} & \left. \frac{\partial t_i^p}{\partial \mathbf{u}_i^q} \right|_{\mathbf{u}_k} \\ \left. \frac{\partial t_i^q}{\partial \mathbf{u}_i^p} \right|_{\mathbf{u}_k} & \left. \frac{\partial t_i^q}{\partial \mathbf{u}_i^q} \right|_{\mathbf{u}_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_i^{pp} & \mathbf{k}_i^{pq} \\ \mathbf{k}_i^{qp} & \mathbf{k}_i^{qq} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

nas quais \mathbf{t}_i e \mathbf{u}_i são, respectivamente, os vetores de força interna e de deslocamento no elemento i , representados por:

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{t}_i^p \ \mathbf{t}_i^q\}^T = t_i \{-\mathbf{n}_i \ \mathbf{n}_i\}^T, \text{ e } \mathbf{u}_i = \{\mathbf{u}_i^p \ \mathbf{u}_i^q\}^T. \quad (29)$$

Segundo Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), o problema é simétrico e $\mathbf{k}_i^{pp} = \mathbf{k}_i^{qq} = -\mathbf{k}_i^{pq} = -\mathbf{k}_i^{qp}$. A partição \mathbf{k}_i^{qq} , por sua vez, é definida como:

$$\mathbf{k}_i^{qq} = \left. \frac{\partial \mathbf{t}_i^q}{\partial \mathbf{u}_i^q} \right|_{\mathbf{u}_k} = \frac{a_i}{L_i} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \lambda_i^2} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T + \frac{t_i}{l_i} (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^T) \quad (30)$$

na qual \mathbf{I} é uma matriz identidade de dimensões $n_d \times n_d = 3 \times 3$. No Apêndice A do artigo de Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) há uma demonstração detalhada para o resultado apresentado na Equação (30).

3.3 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A formulação de otimização topológica proposta neste trabalho busca a maximização da rigidez estrutural de uma GS formada por um material hiperelástico com resistência limite, considerando custo nodal e múltiplos casos de carregamento. A formulação utilizada aqui é baseada nas formulações apresentadas nos trabalhos de Zhang, Ramos Jr. e Paulino (2017) e Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020).

3.3.1 Custo nodal

Muitas vezes na resolução de um problema de otimização topológica com GS costuma-se deparar com a situação de topologias finais complexas demais para serem utilizadas na prática (TORII; LOPEZ; MIGUEL, 2016), como é o caso apresentado na Figura 15.

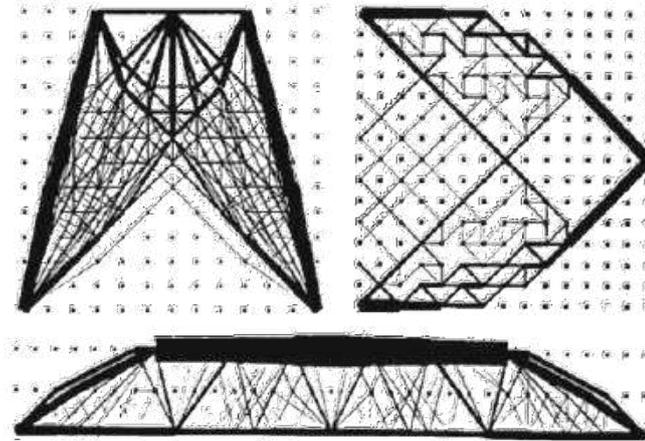


Figura 15 – Exemplos de topologias finais obtidas por meio da otimização topológica com GS que são complexas demais para serem utilizadas na prática.

Por causa disso, a literatura registra o esforço de diversos pesquisadores em solucionar este problema. Bendsøe, Ben-Tal e Zowe (1994), por exemplo, sugerem o controle do tamanho da GS e do nível de interligação das barras como forma de reduzir a complexidade da topologia final. Entretanto, essa abordagem não permite quantificação da complexidade, o que torna o processo subjetivo e dependente da intuição e experiência do projetista, o que, como foi discutido, não é desejado.

Já He e Gilbert (2015) sugerem aplicar técnicas de otimização geométrica juntamente com a topológica, isto é, colocar a posição dos nós da GS como variáveis de projeto. Isto faz com que a estrutura consiga atender a diferentes restrições de projeto sem necessariamente mudar sua topologia. A Figura 16 mostra um exemplo de otimização topológica e geométrica: um estudo de Pedersen (1972) no qual a topologia final é a mesma da inicial, variando apenas a posição dos nós da estrutura e a área das barras. Neste trabalho buscou-se minimizar a massa da estrutura final.

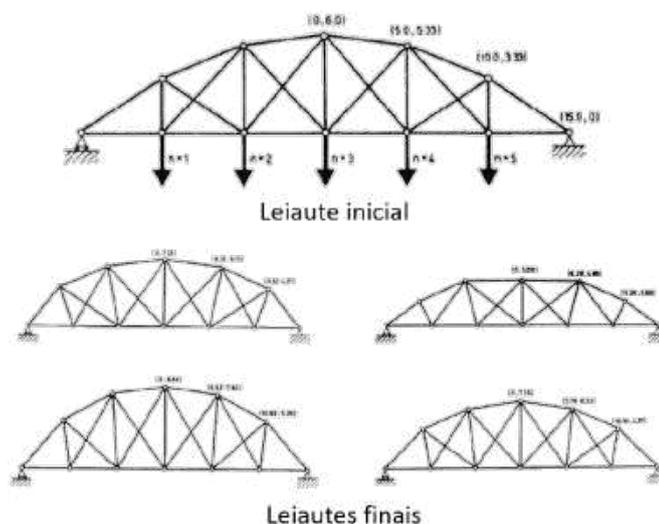


Figura 16 – Exemplo de otimização topológica e geométrica. Na estrutura do leiaute inicial são aplicadas diferentes restrições de estabilidade e deslocamento, que dão origem às estruturas apresentadas nos leiautes finais.

Fonte: Adaptada de (PEDERSEN, 1972).

Entretanto, essa abordagem pode não ser desejada em todos os casos, visto que não há como controlar ou priorizar a otimização topológica sobre a geométrica e vice-versa (ACHTZIGER, 2007 apud TORII; LOPEZ; MIGUEL, 2016).

Uma outra abordagem discutida por He e Gilbert (2015) é penalizar o comprimento das barras de forma que barras menores se tornem menos vantajosas durante o processo de otimização. Esta abordagem é conhecida como “Prager-Parkes *approach*” – livremente traduzida como “estratégia de Prager-Parkes” –, e foi introduzida nos trabalhos de Prager (1974) e Parkes (1975).

Com o uso desta técnica se consegue controlar o nível de penalização, e portanto

o processo de otimização se torna menos subjetivo. Apesar de ser uma técnica de fácil implementação, a mesma tem desvantagens quando se trata de uma GS com barras de tamanho muito parecido, pois a penalização se torna menos eficiente. Por se tratar de uma penalização aplicada ao volume das barras, esta técnica influencia na restrição de volume do processo de otimização topológica.

A estratégia de Prager-Parkes consiste em penalizar as barras menores de forma que as mesmas se tornem mais custosas para o processo de otimização e sejam naturalmente eliminadas. Matematicamente, essa ideia se traduz simplesmente na soma de uma parcela fixa s de custo ao comprimento das barras da GS. O volume original do sistema, $V = \sum_{i=1}^n L_i A_i$, então se torna:

$$V_m = \sum_{i=1}^n (L_i + s) A_i = \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{L_i}\right) L_i A_i = \sum_{i=1}^n \Phi(L_i) L_i A_i. \quad (31)$$

Estudando os limites da função $\Phi(L_i) = \left(1 + \frac{s}{L_i}\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{L_i \rightarrow +\infty} \Phi(L_i) &= 1 \\ \lim_{L_i \rightarrow 0} \Phi(L_i) &= +\infty, \end{aligned} \quad (32)$$

o que indica que barras menores tendem a apresentar um volume fictício maior – e são, portanto, mais penalizadas –, enquanto que as barras maiores tendem a apresentar um volume fictício igual ao inicial – sendo, portanto, menos penalizadas.

3.3.2 Múltiplos casos de carregamento

Quando falamos de uma formulação de otimização topológica que conta com a possibilidade de múltiplos casos de carregamento, estamos nos referindo à aplicação não-simultânea desses carregamentos.

Por exemplo, no projeto de um sistema de ancoragem para uma unidade produtora *offshore*, que estará submetida a condições naturais de vento, corrente e maré, existe a necessidade de considerar diferentes combinações desses carregamentos. Destaca-se entretanto a diferença que existe entre múltiplos casos de carregamento e a resultante desses casos de carregamento. A Figura 17 mostra um exemplo disso.

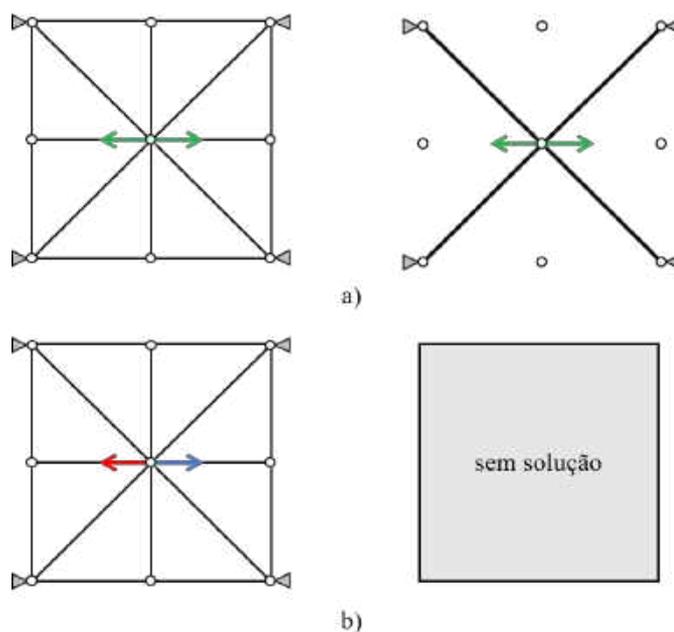


Figura 17 – Exemplo da diferença entre a aplicação de múltiplos casos de carregamento – situação a) – e de carregamentos simultâneos – situação b).

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 17 a) mostra um exemplo de GS solicitada por forças de mesmo módulo atuando em direções opostas, com a topologia final resultante do processo de otimização topológica apresentada em seguida. Neste caso, a formulação de múltiplos casos de carregamento foi considerada. Já na Figura 17 b), temos duas forças de mesmo módulo e direções opostas atuando simultaneamente, sem considerar a formulação de múltiplos casos de carregamento. Neste caso, não há solução para o problema, pois a resultante das forças é nula.

A formulação de múltiplos casos de carregamento basicamente resolve vários problemas estruturais submetidos a cada um dos casos de carregamento e combina o resultado da influência de cada um deles dentro do próprio processo de otimização topológica, de forma que a topologia final atenda a todos os casos.

3.3.3 Formulação matemática de otimização topológica

A função objetivo escolhida para este trabalho é a Energia Potencial Total da estrutura, por algumas razões específicas. Como discutido na seção 3.2.2, determinar o equilíbrio estrutural de uma GS usando um princípio energético tem muitas vantagens sobre a resolução do problema através de diagramas de corpo livre. Além disso, essa função não gera um problema adjunto de otimização durante o cálculo das sensibilidades, tornando a solução do problema de otimização mais trivial.

As variáveis de projeto do problema de otimização topológica, ou seja, as variáveis que desejamos encontrar ao final da resolução do problema, são as áreas transversais de

cada um dos cabos da GS inicial. Sendo assim, obtém-se uma topologia final na qual os cabos mais solicitados no problema estrutural serão reforçados com mais material, que será retirado dos cabos que contribuem menos para a resolução do problema.

Matematicamente, esta formulação é descrita como:

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{A}} f(\mathbf{A}) &= \min_{\mathbf{A}} \sum_{j=1}^m -w^j \Pi^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}(\mathbf{A})) \\
\text{su}j. \quad g(\mathbf{A}) &= \mathbf{L}_m^T \mathbf{A} - V^{max} \leq 0 \\
0 &\leq A_i \leq A_i^{max}, \text{ para } i = 1, \dots, n \\
\text{com } \mathbf{u}_j(\mathbf{A}) &= \arg \min_{\mathbf{u}} \Pi^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}(\mathbf{A})), \text{ para } j = 1, \dots, m,
\end{aligned} \tag{33}$$

na qual \mathbf{A} representa o vetor das áreas dos cabos – e é a variável de projeto do problema de otimização –, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais da GS, \mathbf{L}_m^T é o vetor ponderado de comprimentos dos elementos da GS – que incorpora o custo nodal na formulação –, Π^j é a energia potencial total equilibrada de um sistema sob a ação do caso de carga j e $w^j > 0$ é o peso correspondente atribuído ao caso de carga j .

Ou seja, trata-se de uma formulação aninhada, na qual se resolve primeiro o problema estrutural – encontrando o vetor de deslocamentos \mathbf{u} que minimiza a energia potencial total Π^j naquela iteração – e em seguida se busca otimizar as áreas das barras com base nas restrições do problema.

As restrições, por sua vez, tratam-se de um limite máximo para o volume de material a ser utilizado na topologia final e de um limite máximo e mínimo para o valor das áreas dos elementos da rede de cabos.

Klarbring e Strömberg (2012) mostram que minimizar o oposto da energia potencial total da estrutura é equivalente, para problemas lineares, a maximizar sua rigidez por meio da estratégia de minimização da *end-compliance* da estrutura, $\frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{A})$. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{A}} \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{A}) &= \max_{\mathbf{A}} \Pi(\mathbf{A}, \mathbf{u}(\mathbf{A})) \\
&= \max_{\mathbf{A}} \left(\min_{\mathbf{u}} \Pi(\mathbf{A}, \mathbf{u}(\mathbf{A})) \right) \\
&= \min_{\mathbf{A}} -\Pi_{min}(\mathbf{A}, \mathbf{u}(\mathbf{A})).
\end{aligned} \tag{34}$$

No trabalho de Ramos Jr. e Paulino (2015) há, no Apêndice 2, uma descrição da relação entre a *end-compliance*, a energia complementar e a energia de deformação da estrutura para um modelo de material hiperelástico na configuração de equilíbrio. Entretanto, a relação cinemática considerada envolve pequenos deslocamentos apenas.

3.3.3.1 Análise de sensibilidade

Em um problema de otimização topológica a análise de sensibilidade é responsável por indicar qual caminho o algoritmo deve seguir para encontrar um ponto estacionário.

No problema envolvido neste trabalho, isto significa determinar quais cabos da GS inicial terão suas áreas transversais aumentadas e quais as terão diminuídas. Essa análise é feita tanto na função objetivo quanto nas restrições do problema.

A sensibilidade é definida como a derivada parcial da função com relação às variáveis de projeto. As sensibilidades calculadas para a restrição de volume da Equação (33) são:

$$\frac{\partial g}{\partial A_i} = L_{m,i}, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Já as sensibilidades da função objetivo da Equação (33) são calculadas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial A_i} = & -\frac{\partial}{\partial A_i} \left(\sum_{j=1}^m w^j \Pi_{min}^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}^j(\mathbf{A})) \right) - \\ & \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^j} \left(\sum_{j=1}^m w^j \Pi_{min}^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}^j(\mathbf{A})) \right) \frac{\partial}{\partial A_i} \mathbf{u}^j(\mathbf{A}), \end{aligned} \quad (36)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Sabe-se que Π_{min}^j é a energia potencial da estrutura em um ponto de mínimo. Portanto, pelo princípio da energia potencial total estacionária apresentado na seção 3.2.2, temos que a parcela $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^j} \sum_{j=1}^m w^j \Pi_{min}^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}^j(\mathbf{A}))$ é nula, fugindo de uma formulação adjunta de otimização topológica. Escrevendo $\frac{\partial}{\partial A_i} \sum_{j=1}^m w^j \Pi_{min}^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}^j(\mathbf{A}))$ com base na definição, como a soma de $U(\mathbf{A}, \mathbf{u}(\mathbf{A}))$ e $\Omega(\mathbf{u}(\mathbf{A}))$, temos:

$$\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial A_i} = -\sum_{j=1}^m w^j \left(\frac{\partial}{\partial A_i} \left(U^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}^j(\mathbf{A})) \right) + \frac{\partial}{\partial A_i} \left(\Omega^j(\mathbf{u}^j(\mathbf{A})) \right) \right). \quad (37)$$

Como $\Omega^j(\mathbf{u}^j(\mathbf{A}))$ é explicitamente independente de \mathbf{A} , temos a sensibilidade da função objetivo definida como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial A_i} = & -\sum_{j=1}^m w^j \frac{\partial}{\partial A_i} U^j(\mathbf{A}, \mathbf{u}^j(\mathbf{A})) \\ = & -\sum_{j=1}^m w^j L_i \Psi_i(\mathbf{u}^j(\mathbf{A})), \end{aligned} \quad (38)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Observa-se que o produto $w^j L_i \Psi_i(\mathbf{u}^j(\mathbf{A}))$ é sempre não-negativo, ou seja, as sensibilidades da função objetivo serão sempre não-positivas, levando a uma direção de busca descendente. Além disso, apesar do modelo constitutivo não ser continuamente diferenciável para um valor de deformação nulo, isto não afeta as sensibilidades da função objetivo, pois as mesmas dependem apenas da função de densidade de energia, que é continuamente diferenciável para valores de deformação nulos.

3.3.3.2 Convexidade

Ramos Jr. e Paulino (2015) provaram a convexidade da função objetivo na Equação (33) para matrizes tangentes positivas definidas e Zhang, Ramos Jr. e Paulino (2017) estenderam a dedução incluindo matrizes tangentes positivas semi-definidas. Também foi provado por esses autores que o problema de otimização é convexo para modelos de materiais hiperelásticos não-estritamente convexos. Nesses trabalhos, entretanto, o regime cinemático considerado admitia apenas pequenas deformações.

Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) estudaram a formulação apresentada em seu trabalho, considerando o regime cinemático de deformações finitas e provaram que, para estruturas sob tensão pura e modelos de materiais hiperelásticos não-estritamente convexos, o problema de otimização também é convexo. Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) destacam ainda que essa afirmação considera a função de densidade de energia apresentada na Equação (8), deformações lineares e uniaxiais.

3.3.3.3 Condições de ótimo

As condições de ótimo de um problema de otimização são indicadores que identificam pontos de mínimo local e global em problemas de otimização convexa. Para tal, define-se inicialmente a função Lagrangiana (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009) como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}, \lambda) = f(\mathbf{A}) + \lambda g(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n L_{m,i} A_i - V^{max} \right), \quad (39)$$

na qual λ é um multiplicador de Lagrange.

As condições de “Karush-Kuhn-Tucker” – comumente conhecidas por “condições de KKT” – são testes que avaliam se a solução de um problema de otimização convexa é ótima. Segundo Ramos Jr. e Paulino (2015), como o problema de otimização em questão é convexo, as condições de KKT são condições de ótimo necessárias e suficientes. Estas são dadas por (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009):

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{A}^*, \lambda^*)}{\partial A_i} \leq 0, \text{ se } A_i^* = A_i^{max}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{A}^*, \lambda^*)}{\partial A_i} = 0, \text{ se } A_i^{min} < A_i^* < A_i^{max}, \text{ e} \quad (41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{A}^*, \lambda^*)}{\partial A_i} \geq 0, \text{ se } A_i^* = A_i^{min}. \quad (42)$$

A derivada da função Lagrangiana é dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{A}, \lambda)}{\partial A_i} = \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial A_i} + \lambda L_{m,i}, \quad (43)$$

na qual a parcela $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial A_i}$ é a sensibilidade da função objetivo, definida na Equação (38) como $-\sum_{j=1}^m w^j L_i \Psi_i(\mathbf{u}^j(\mathbf{A}))$. Usando este resultado nas Equações (40), (41) e (42), têm-se as seguintes condições para o ponto $(\mathbf{A}^*, \lambda^*)$:

$$\sum_{j=1}^m w^j \Psi_i(\mathbf{u}^j(\mathbf{A}^*)) \geq \lambda^* \left(1 + \frac{S}{L_i}\right), \text{ se } A_i^* = A_i^{max}, \quad (44)$$

$$\sum_{j=1}^m w^j \Psi_i(\mathbf{u}^j(\mathbf{A}^*)) = \lambda^* \left(1 + \frac{S}{L_i}\right), \text{ se } A_i^{min} < A_i^* < A_i^{max}, \text{ e} \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^m w^j \Psi_i(\mathbf{u}^j(\mathbf{A}^*)) \leq \lambda^* \left(1 + \frac{S}{L_i}\right), \text{ se } A_i^* = A_i^{min}. \quad (46)$$

Dado que o ponto $(\mathbf{A}^*, \lambda^*)$ é uma solução para o problema de otimização, e analisando a Equação (45) em particular, tem-se a interpretação física de que a soma das energias específicas de deformação em todos os casos de carga apresentam um valor constante para os membros da topologia final quando as restrições laterais não estão ativas e quando não é considerado custo nodal. Analogamente, baseado na Equação (7), tem-se que o quadrado da tensão atuante nos elementos também seguirá a mesma ideia caso isso aconteça.

Segundo Ramos Jr. e Paulino (2015), no caso linear, essa situação corresponde ao caso de “*full stress design*”. Este termo é apresentado por Haftka e Gürdal (1992) como: “para uma topologia ser ótima, cada membro da estrutura que não tem seção transversal mínima deve estar completamente carregado em pelo menos um dos casos de carregamento atuantes”.¹ Estruturas nessa situação não utilizam material além do necessário para resistir às solicitações atuantes, e são portanto mais desejáveis.

¹“For the optimum design each member of the structure that is not at its minimum gage is fully stressed under at least one of the design load conditions.”

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CABOS

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Dedica-se este capítulo à apresentação da implementação computacional do modelo de otimização topológica de cabos. A arquitetura do código é baseada na apresentada por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), acrescida de contribuições descritas neste texto.

Algumas destas contribuições – como a implementação do modelo de cabos com resistência limite e da formulação de múltiplos casos de carregamento – são contribuições de caráter matemático, com o objetivo de poder abordar mais especificidades físicas dos problemas.

Já outras contribuições como a implementação de novos geradores de malha e GS e a implementação da formulação de custo nodal têm o objetivo de expandir as possibilidades de modelagem de problemas, gerando condições iniciais específicas para cada tipo de problema, e ao mesmo tempo dar condições de se preocupar com o resultado final, de forma que este seja o mais exequível possível.

4.2 ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CABOS

O processo de otimização topológica trata-se de uma sequência detalhada de passos. Um pseudoalgoritmo, mais geral, é apresentado abaixo com o objetivo de detalhar os passos principais.

Algoritmo 1: Otimização topológica de cabos

Input: parâmetros físicos, geométricos e de simulação do modelo

```

1 while  $k < maxIter$  and  $change > tol$  do
2   for  $j = 1$  to  $nLoads$  do
3     resolva o problema estrutural e determine  $\Pi_{min}^j$  e  $\mathbf{u}^j$ 
4     calcule a função objetivo, a restrição e suas sensibilidades com base em
        $\Pi_{min}^j$  e  $\mathbf{u}^j$ 
5     some as contribuições do caso de carga  $j$ 
6     atualize  $j = j + 1$ 
7   end
8   resolva o processo de otimização topológica
9   atualize  $k = k + 1$ 
10 end
11 apresente resultados
```

No Algoritmo 1, a variável $maxIter$ é o número máximo de iterações especificado, $change$ é máxima diferença entre as variáveis de projeto nos passos k e $k - 1$, tol é a

tolerância especificada para esta diferença e $nLoads$ é o número de casos de carga do modelo.

As linhas 3, 4, 5 e 8 do Algoritmo 1 contêm passos muito específicos do processo de otimização topológica. Esses passos serão detalhados nas subseções a seguir.

4.2.1 Resolução do problema estrutural

A equação de equilíbrio não-linear do problema estrutural é resolvida utilizando o método de Newton amortecido. A utilização deste método é necessária pois a restrição lateral das variáveis de projeto admite valores de área nulos. Nos casos em que a restrição de área nula está ativa, a matriz de rigidez tangente global da estrutura se torna singular, impossibilitando resolver o sistema de equações.

Desta forma, o método de Newton amortecido realiza uma regularização na matriz de rigidez tangente global, transformando a mesma de positiva semi-definida para positiva definida, permitindo definir uma direção de busca adequada (neste caso, descendente).

A regularização é feita adicionando um termo à matriz de rigidez tangente global da estrutura. Usando a estratégia de linearização apresentada na Equação (25), temos:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{K}^{t,\eta}(\mathbf{u}_k)\Delta\mathbf{u}_k, \quad (47)$$

donde:

$$\mathbf{K}^{t,\eta}(\mathbf{u}_k) = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_k} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_k} + \eta \mathbf{I} = \mathbf{K}^t + \eta \mathbf{I}, \quad (48)$$

na qual η é o parâmetro de Newton amortecido, calibrado por um valor entre 10^{-12} e 10^{-8} multiplicado pela média da diagonal de \mathbf{K}^t . Esta regularização foi utilizada por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), que cita os trabalhos de Ramos Jr. e Paulino (2016), Zhang, Ramos Jr. e Paulino (2017) e Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017) como referências para estratégias de regularização similares.

Assim, a equação de equilíbrio linearizada considerando o método de Newton amortecido é:

$$\mathbf{K}^{t,\eta}(\mathbf{u}_k)\Delta\mathbf{u}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{F} - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k). \quad (49)$$

Para melhorar a convergência do algoritmo, Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) utilizam uma estratégia de busca linear inexata com a condição de Armijo, de forma a atender às condições de Wolfe¹. A busca linear inexata acelera o processo de convergência do método de Newton introduzindo uma escolha mais eficiente para o tamanho dos passos da iteração. Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) mostram os algoritmos utilizados neste trabalho no Apêndice C de seu texto.

¹Para mais detalhes, recomenda-se a leitura do trabalho de Wolfe (1969).

4.2.2 Cálculo da função objetivo, restrição e suas sensibilidades

O cálculo da função objetivo, restrição e suas sensibilidades foram apresentados nas seções 3.3.3 e 3.3.3.1.

4.2.3 Soma das contribuições do caso de carga j

Neste passo, algumas quantidades são acumuladas para que o processo de otimização utilize as contribuições de todos os casos de carregamento. As quantidades são: o valor da função objetivo, da restrição e de suas sensibilidades, o valor da função de densidade de energia para cada elemento e o valor da tensão ao quadrado dos elementos.

Os dois últimos não são utilizados durante processo de otimização topológica, mas sim ao fim dele, na visualização de resultados, com o objetivo de avaliar se as condições de ótimo são atendidas, segundo o que foi comentado na seção 3.3.3.3.

4.2.4 Resolução do processo de otimização topológica

O processo de otimização topológica é realizado de acordo com o método OC – *Optimality Criteria* – presente nos trabalhos de Bendsøe e Sigmund (2004) e Groenwold e Etman (2008). O método utiliza uma atualização recursiva baseada em subproblemas que são aproximações recíprocas do problema original. Por se tratar de uma aproximação, é necessário impor um limite para a mudança no valor das variáveis a cada iteração. O limite imposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) é dado por uma constante na ordem de 10^{+2} a 10^{+4} que multiplica o valor inicial das variáveis de projeto.

No Apêndice D de seu trabalho, Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) apresentam uma descrição detalhada da resolução do método OC dentro do processo de otimização topológica.

A convergência do processo de otimização topológica é atingida quando um critério de tolerância é atendido. Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) adotam este critério como:

$$\max \left(\frac{|A_i^{k+1} - A_i^k|}{1 + A_i^k} \right) \leq tol, \quad (50)$$

no qual tol é o parâmetro de tolerância calibrado na ordem de 10^{-9} a 10^{-7} .

Ao final do processo de otimização topológica, é realizado um processo de filtragem dos elementos, com o objetivo de eliminar membros com área transversal pequena e que influenciam pouco na resolução do problema estrutural. O filtro, proposto inicialmente por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017), é dado como:

$$A_i = \text{Filtro}(\mathbf{A}, \alpha_f) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{A_i}{\max(\mathbf{A})} < \alpha_f \\ A_i & \text{senão,} \end{cases} \quad (51)$$

no qual α_f é um valor de filtragem calibrado na ordem de 10^{-2} para o qual, após a filtragem, a estrutura continua satisfazendo o equilíbrio global e o salto no valor da função objetivo é controlado. Caso uma dessas condições não seja atendida, o filtro não é aplicado.

A estrutura “filtrada” é aceita para a condição de equilíbrio global se a equação abaixo for atendida:

$$\frac{\|\mathbf{R}^{filt}(\mathbf{u}_k)\|}{\|\mathbf{F}^{filt}\|} \leq \rho, \quad (52)$$

na qual $\mathbf{R}^{filt}(\mathbf{u}_k)$ é a resultante de forças da estrutura após a filtragem, \mathbf{F}^{filt} é o vetor de forças globais que atua apenas nos nós que permanecem na estrutura após o processo de filtragem e ρ é um parâmetro de tolerância calibrado na ordem de 10^{-4} .

Já o salto no valor da função objetivo é verificado de acordo com a seguinte condição:

$$\frac{(f^{filt} - f^{conv})}{f^{conv}} \leq f^{tol}, \quad (53)$$

na qual f^{filt} é o valor da função objetivo após o processo de filtragem, f^{conv} é o valor da função objetivo antes do processo de filtragem e f^{tol} é um parâmetro de tolerância calibrado na ordem de 10^{-2} .

4.3 RESULTADOS PRELIMINARES

Esta seção tem o objetivo de validar os resultados encontrados pela implementação computacional realizada pelo autor com os resultados apresentados por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), como forma de *benchmark*².

O exemplo escolhido está presente na seção 8.1 do trabalho de referência e trata-se de uma viga biengastada composta por uma malha de cabos na qual incidem dois carregamentos iguais em módulo e opostos em sentido.

²“Em computação, *benchmark* é o ato de executar um programa de computador, um conjunto de programas ou outras operações, a fim de avaliar o desempenho relativo de um objeto, normalmente executando uma série de testes padrão e ensaios nele” (WIKIPÉDIA, 2021).

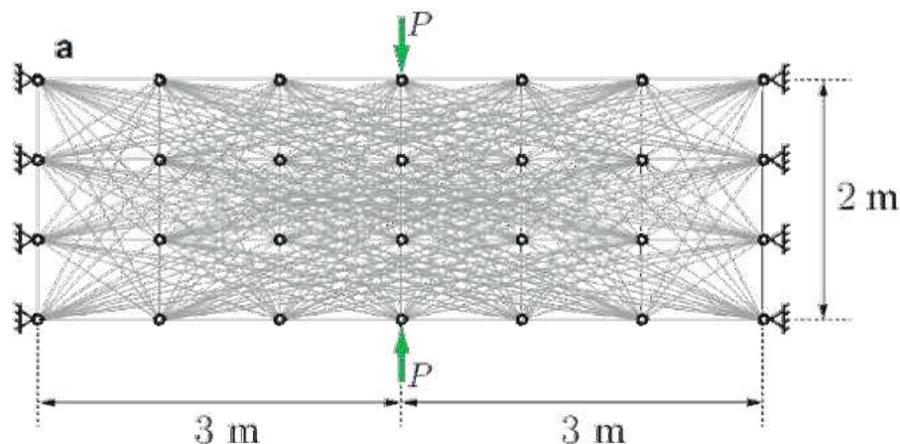


Figura 18 – Estrutura simulada para comparação de resultados.

Fonte: (SANDERS; RAMOS JR.; PAULINO, 2020).

Neste exemplo não foi considerada a formulação de múltiplos casos de carregamento, nem a inserção de custo nodal. Nesta situação particular, $j = 1$, $w^j = 1$ e $s = 0$. Sendo assim, a condição de KKT presente na Equação (45) impõe que, para um resultado ser considerado ótimo, os elementos da topologia final cuja restrição lateral de área não estiver ativa deverão ter o mesmo valor de energia específica de deformação, assim como o mesmo valor de tensão ao quadrado.

Destaca-se também que o modelo constitutivo utilizado neste exemplo é o modelo de cabos padrão, que não considera resistência limite.

Este exemplo é sensível à carga aplicada, e por isso Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) apresentam três arranjos finais diferentes, a depender do valor de carga utilizado. Na primeira situação, utilizando $P = 10 \text{ kN}$, os arranjos finais encontrados são apresentados na Figura 19.

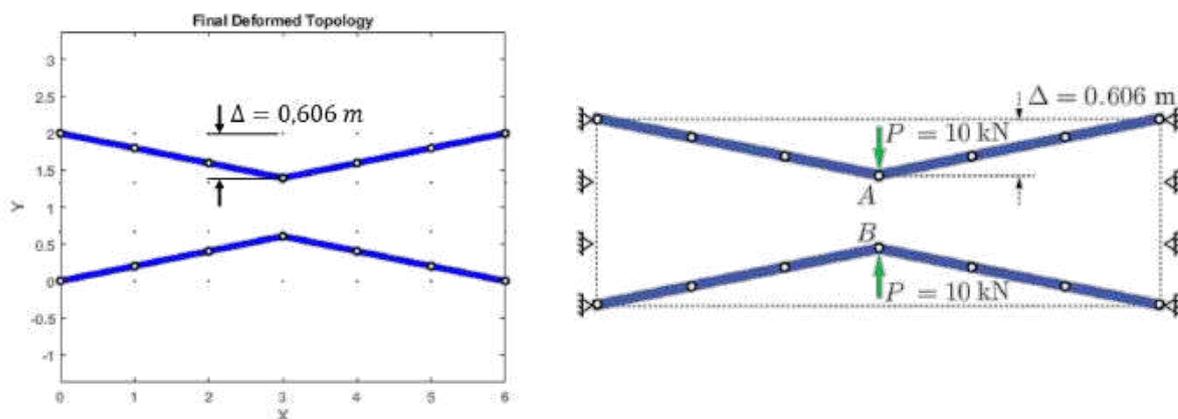


Figura 19 – Arranjo final encontrado pela implementação realizada e por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), respectivamente, para a carga aplicada de $P = 10 \text{ kN}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta primeira simulação, percebe-se que a estrutura buscou concentrar o material nos dois cabos mais externos, onde atuam as cargas concentradas. Os deslocamentos máximos obtidos para as duas implementações foram iguais. Analisando também as métricas da implementação realizada, temos os resultados apresentados na Figura 20.

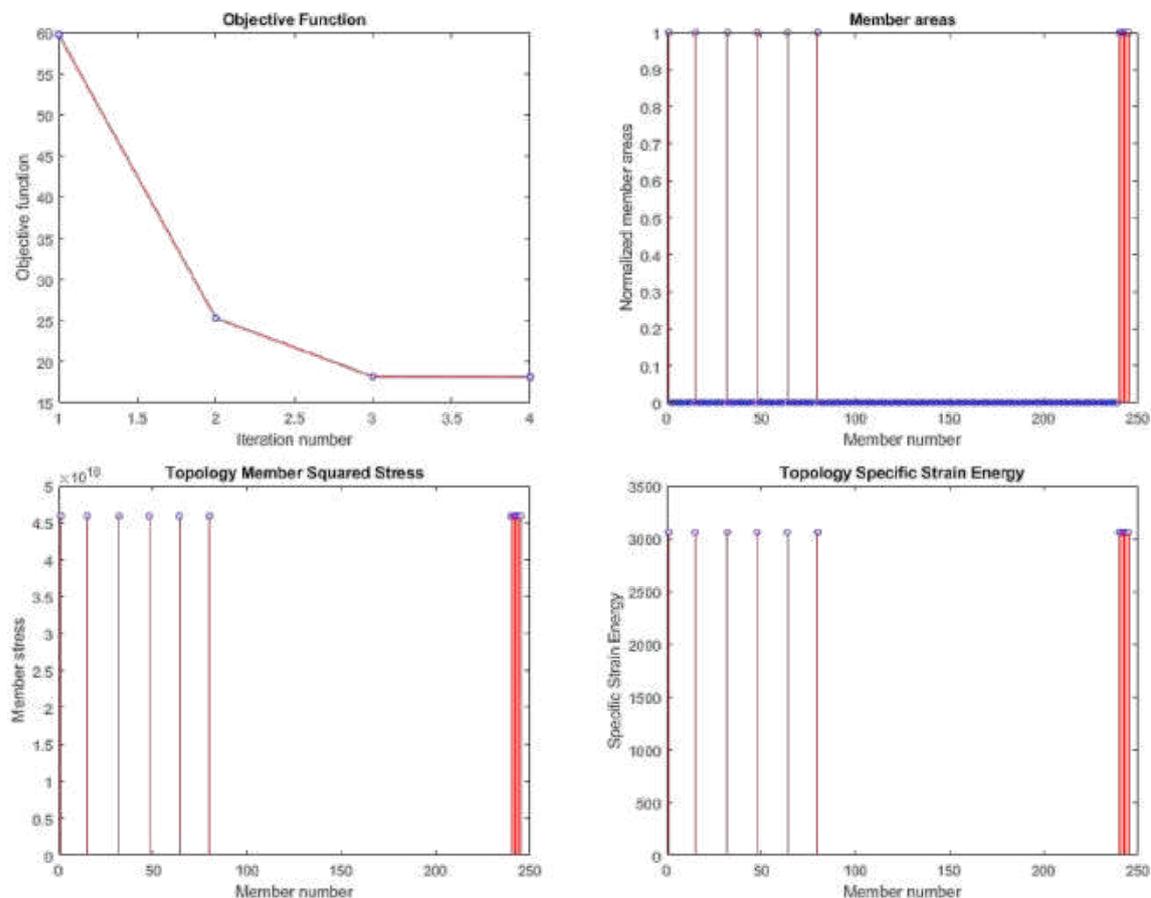


Figura 20 – Métricas da simulação feita na implementação realizada, para a carga aplicada de $P = 10 \text{ kN}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a função objetivo convergiu em 4 iterações, para um valor de *change* $< 10^{-8}$. As áreas de todos os membros apresentaram valores iguais, assim como o valor da energia específica de deformação e do quadrado da tensão. Nesta situação, as restrições laterais de área não estavam ativas, e como previsto, a estrutura estava em uma situação análoga a *full stress design*, como comentado na seção 3.3.3.3.

Na segunda situação o valor de carga utilizado foi $P = 1000 \text{ kN}$, e os arranjos finais encontrados são apresentados na Figura 21.

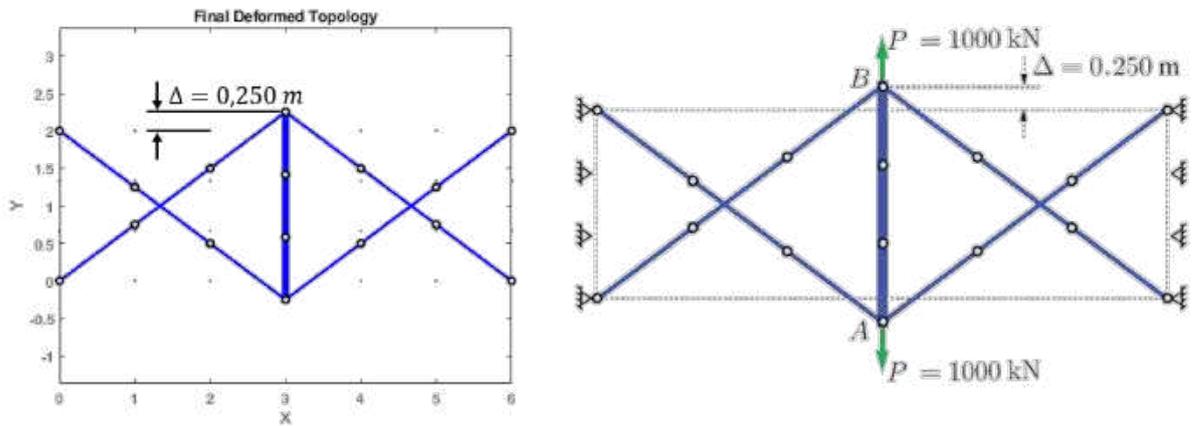


Figura 21 – Arranjo final encontrado pela implementação realizada e por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), respectivamente, para a carga aplicada de $P = 1000 \text{ kN}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que os arranjos também foram idênticos, juntamente com os valores de deslocamento máximo em ambas as implementações. Aqui, a estrutura se acomodou de uma maneira tal que o nó que estava embaixo passou para cima, e o nó que estava em cima passou para baixo, com um cabo central para reforçar a estrutura. Analisando as métricas da simulação, temos os resultados apresentados na Figura 22.

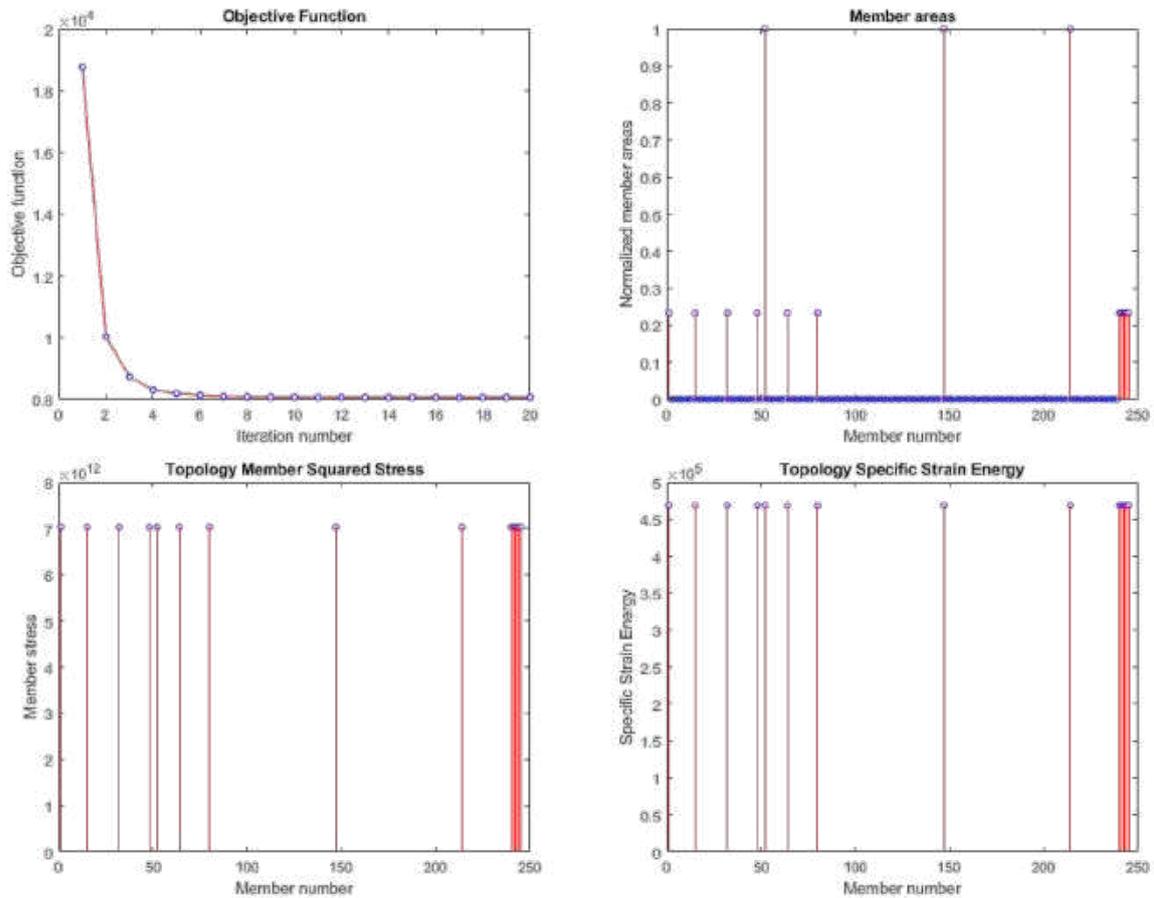


Figura 22 – Métricas da simulação feita na implementação realizada, para a carga aplicada de $P = 1000 \text{ kN}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vê-se que a função objetivo atingiu a convergência em 20 iterações, para o mesmo parâmetro de convergência. Neste caso tivemos áreas diferentes, com 3 elementos se destacando com área relativa cerca de 5 vezes maior que os demais. Estes elementos compõem o cabo central, que surgiu para reforçar a estrutura. Mesmo assim, as restrições laterais de área também não estavam ativas, e por isso o valor da energia específica de deformação e do quadrado da tensão se mantiveram constantes para todos os elementos do arranjo final.

Na terceira situação o valor de carga utilizado foi de $P = 2000 \text{ kN}$, e os arranjos finais encontrados são apresentados na Figura 23.

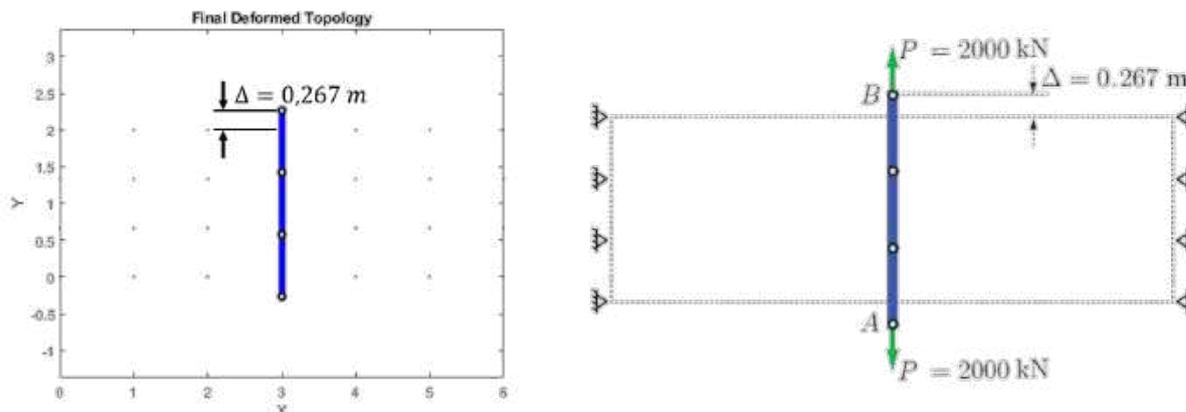


Figura 23 – Arranjo final encontrado pela implementação realizada e por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020), respectivamente, para a carga aplicada de $P = 2000 \text{ kN}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui também se percebe que os valores de deslocamento máximo para as duas implementações foram idênticos, indicando que a implementação realizada neste trabalho está condizente com a formulação apresentada em Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020). Neste caso, os nós também trocaram de lugar, fazendo com o que estava embaixo passasse para cima e vice-versa. Entretanto, a estrutura se tornou auto-equilibrada, visto que por existir um limite de volume máximo, o arranjo anterior consumia material demais nas barras da extremidade, e, portanto, o algoritmo buscou essa topologia para respeitar a restrição de volume e equilibrar a estrutura.

Analisando as métricas dessa simulação, têm-se os resultados apresentados na Figura 24.

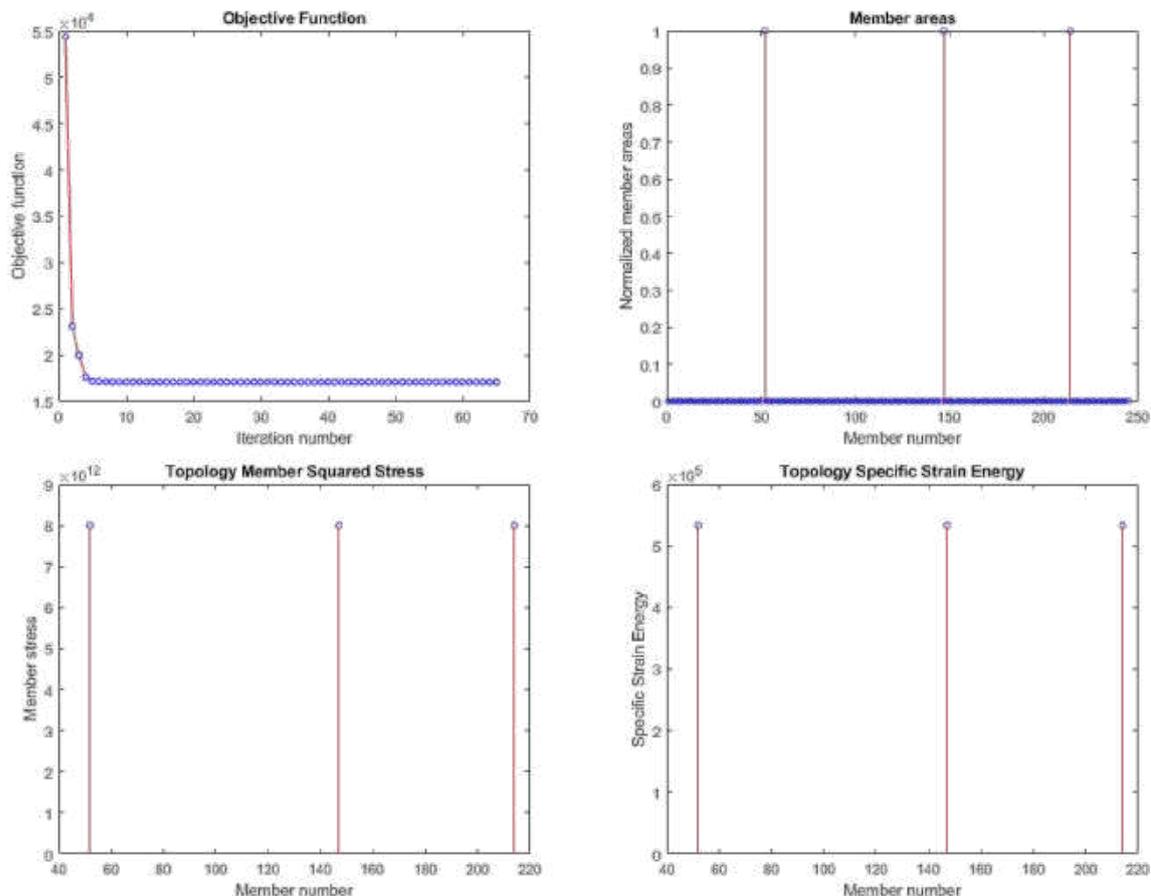


Figura 24 – Métricas da simulação feita na implementação realizada, para a carga aplicada de $P = 2000 \text{ kN}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A função objetivo precisou de mais de 60 iterações para convergir, utilizando o mesmo valor para o parâmetro de convergência. Neste caso, o arranjo final foi composto apenas dos 3 elementos que compõem o cabo central, visto que o arranjo final é auto-equilibrado. Como as restrições laterais não estavam ativas, o valor da energia específica de deformação e do quadrado da tensão também se mantiveram constantes.

A partir da validação de resultados usando o modelo proposto pela referência, o próximo capítulo tratará dos exemplos originais deste trabalho em específico, com uma formulação de otimização topológica que incorpora os elementos discutidos ao longo do texto: o modelo constitutivo de cabos com resistência limite – proposto na seção 2.4 –, a estratégia de custo nodal – apresentada na seção 3.3.1 – e a formulação de múltiplos casos de carregamento – presente na seção 3.3.2.

5 EXEMPLOS PROPOSTOS

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo serão avaliados alguns exemplos originais propostos pelo autor. Tratam-se de exemplos envolvendo um sistema de ancoragem de uma estrutura *offshore*, um exemplo envolvendo uma ponte estaiada e outros exemplos mais abstratos, para demonstrar as funcionalidades da implementação realizada.

5.2 SISTEMAS DE ANCORAGEM DE ESTRUTURA *OFFSHORE*

A indústria de óleo e gás (O&G) tem demandas que podem ser encaradas do ponto de vista da concepção de projeto baseada em otimização. Sabe-se que o projeto de sistemas de ancoragem em estruturas navais *offshore* é uma atividade que envolve alta complexidade e altos custos. Nos critérios de projeto considerados, estão condições ambientais tais como forças de onda, corrente e vento, além da topografia do relevo submarino e das características mecânicas do solo e das próprias linhas de ancoragem.

Existe ainda dependência do projeto de sistemas de ancoragem com relação à interação com outros sistemas estruturais envolvidos com o processo de produção de hidrocarbonetos. Dois conceitos, ilustrados na Figura 25, são importantes para entender algumas dessas dependências: raio de ancoragem e *pattern* de ancoragem.

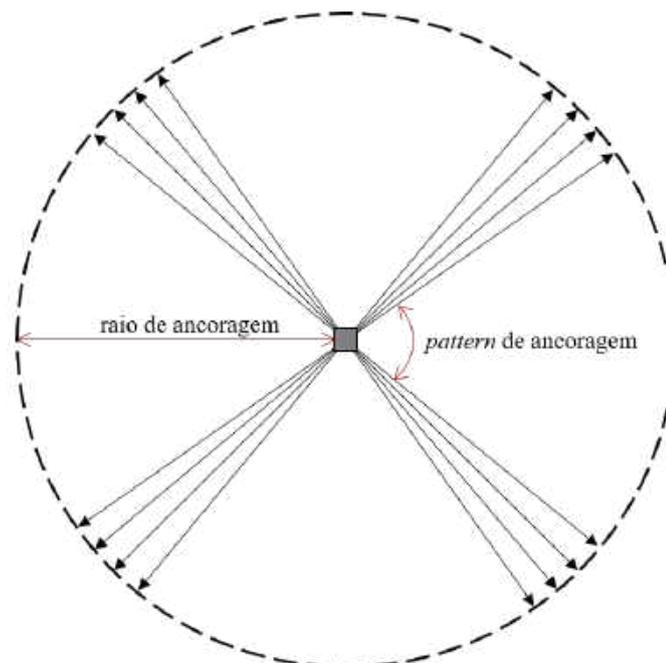


Figura 25 – Raio de ancoragem e *pattern* de ancoragem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para fixação de uma estrutura *offshore* são usadas séries de linhas de ancoragem que ligam as âncoras à plataforma. O raio de ancoragem é a projeção horizontal dessas linhas. Em algumas situações de campo, é comum ter a necessidade de se instalar mais de uma unidade produtora para realizar a exploração de uma área. Sendo assim, diminuir o raio de ancoragem significa diminuir interferências dos sistemas de ancoragem entre unidades próximas.

As linhas de um sistema de ancoragem, por sua vez, são distribuídas em feixes. O *pattern* de ancoragem nada mais é que o ângulo que esses feixes fazem entre si. Como, além do sistema de ancoragem, existem também os sistemas de produção – compostos por *risers* –, é desejável que haja uma abertura no *pattern* de ancoragem. Quanto maior for essa abertura, menor a probabilidade de interferência entre os sistemas de ancoragem e de produção de uma mesma unidade.

Tomando como inspiração a problemática apresentada, algumas situações serão simuladas. Em todas elas, será criada uma malha de pontos que seguirá a ideia apresentada na Figura 26.

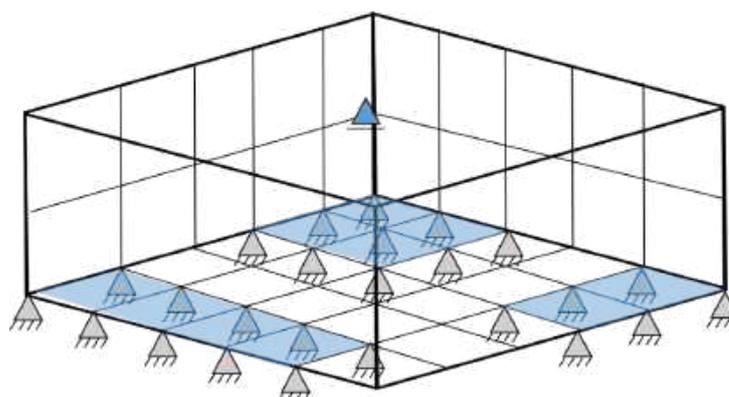


Figura 26 – Modelo utilizado nas simulações, com configurações genéricas de suporte.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dada uma embarcação representada por um nó com um suporte de primeiro gênero (simulando o empuxo exercido pela água), definem-se possíveis regiões de ancoragem. A partir desta definição, diferentes geradores de GS podem ser utilizados para buscar uma configuração ótima das linhas de ancoragem.

5.2.1 Exemplo 1 - Estrutura 2D com GS inicial simples

Neste primeiro exemplo, modela-se uma GS em 2D com as condições de contorno indicadas na Figura 27.



Figura 27 – Condições de contorno e domínio de projeto.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foram inseridos na base apoios do segundo gênero, de forma a simular a condição de vinculação das linhas de ancoragem ao solo. No ponto de aplicação da carga, foi inserido um apoio do primeiro gênero na direção vertical, de forma a simular o empuxo exercido pela água na embarcação. Utilizou-se apenas um caso de carga, que é aplicado na horizontal, da direita para a esquerda. O valor da carga é de 5×10^{-1} .

O módulo de elasticidade do material é $E = 2.5 \times 10^{+6}$. O exemplo não considera custo nodal. As restrições laterais de área são dadas pelo intervalo $[0, 1.5 \times 10^{-1}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos é dado como 1×10^{-5} . O volume máximo de material a ser utilizado é 2×10^{-1} e o parâmetro de convergência foi calibrado em $tol = 2.5 \times 10^{-5}$.

Dentro do domínio de projeto apresentado na Figura 27 foi criada uma GS com um nível de conectividade simples, de forma que os nós sejam ligados apenas aos seus vizinhos mais próximos, como mostra a Figura 28.

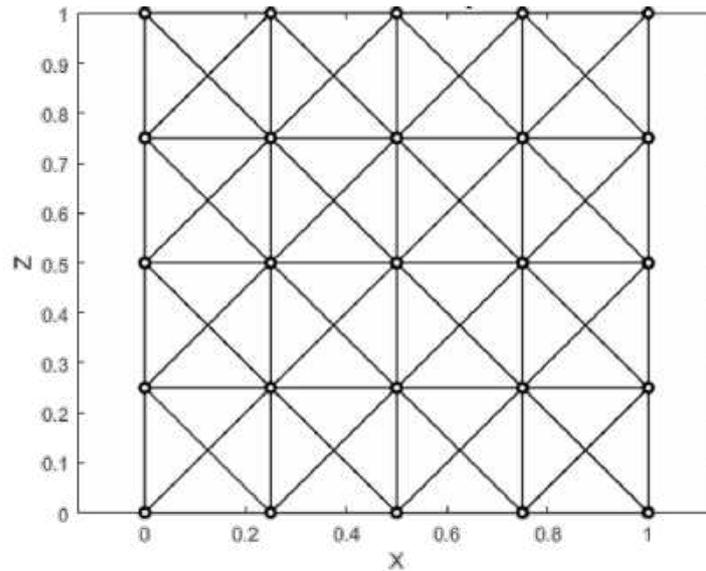


Figura 28 – GS 2D definida no domínio de projeto deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste exemplo não foi considerado um limite máximo das áreas – isto é, o limite de áreas máximo imposto não fica ativo ao final da simulação –, apenas um limite de volume total, deixando o algoritmo livre para distribuir o material da melhor maneira possível. Após o processo de otimização e filtragem da topologia final, o resultado encontrado foi o indicado na Figura 29.

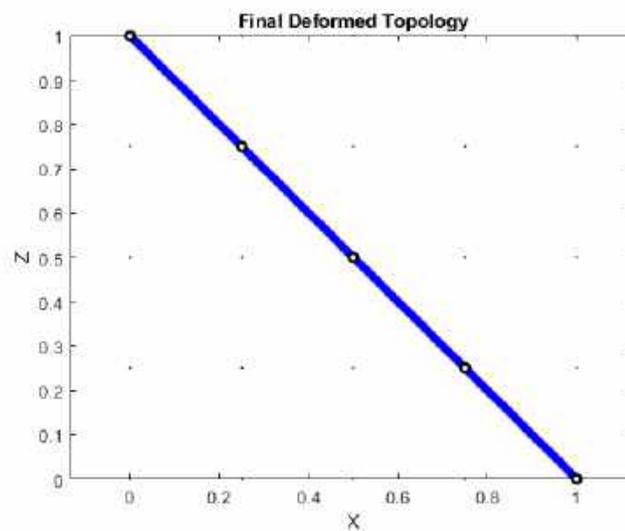


Figura 29 – Topologia final deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a topologia final se resume a um cabo ligado no ponto de suporte mais distante, o que é razoável do ponto de vista estrutural, visto que quanto menor o ângulo entre o cabo e a horizontal, maior será o componente da força de tração no cabo a

equilibrar a solicitação na embarcação. As métricas da simulação pelas quais são avaliadas as condições de ótimo são apresentadas na Figura 30.

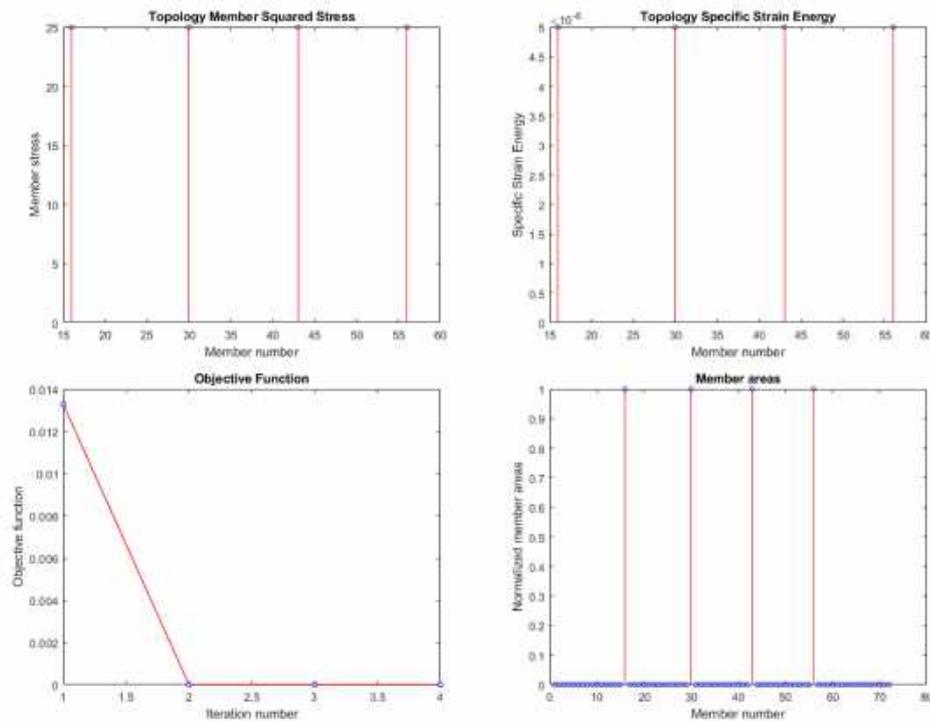


Figura 30 – Métricas da simulação deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como se pode observar, o valor da função objetivo caminhou para uma redução, o que indica que a topologia encontrada se tornou cada vez mais rígida ao longo do processo de otimização. Seu valor final foi na ordem de 1.0×10^{-6} . Observa-se que a área normalizada dos cabos é constante, o que é razoável de se pensar, visto que são quatro cabos ligados um ao outro, agindo como um único grande cabo. As condições de ótimo também foram atendidas. Vê-se que a tensão ao quadrado e a energia específica de deformação nos cabos são constantes. Portanto, a topologia encontrada para o problema é ótima.

Utilizando os mesmos parâmetros anteriores, buscou-se, agora, testar a influência do parâmetro de limite das áreas, impondo um valor que não permita que a estrutura tenha a mesma área final encontrada no exemplo apresentado. Impondo um limite máximo de 80% do encontrado para a situação apresentada, a topologia final foi a indicada na Figura 31, que é idêntica a do caso anterior, com o limite de área máximo inativo.

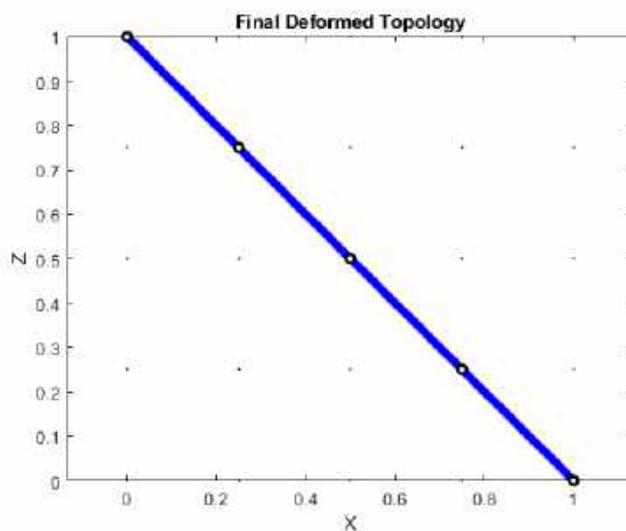


Figura 31 – Topologia final considerando um limite máximo de 80% do máximo encontrado no caso sem restrição.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso, as métricas da simulação serão discutidas com base na Figura 32.

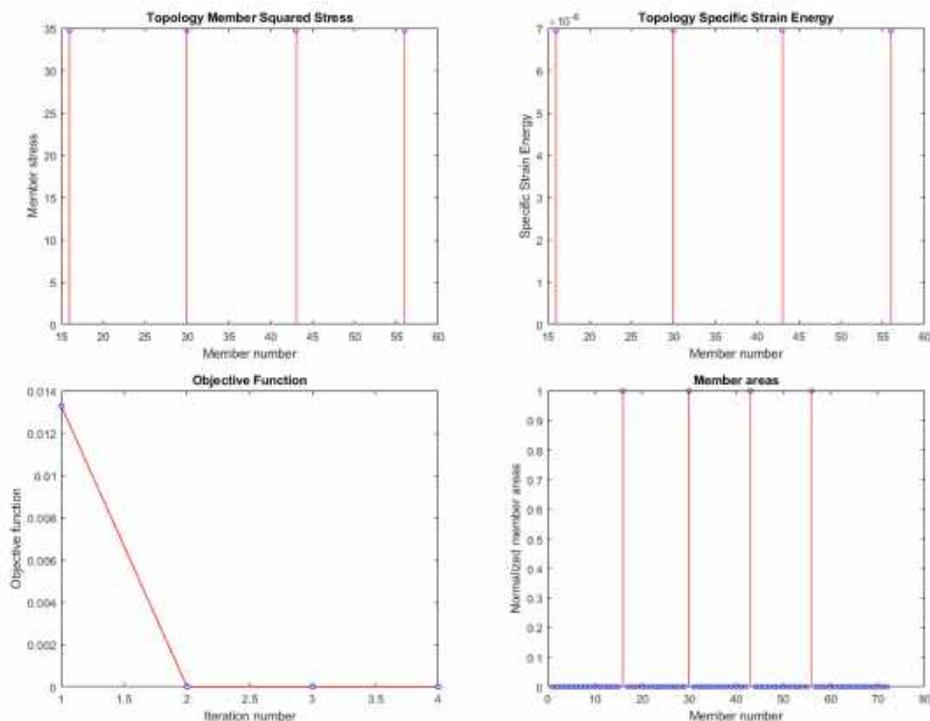


Figura 32 – Métricas da última simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui, percebe-se que a função objetivo também caminhou para um mínimo, e que, portanto, nossa estrutura se tornou mais rígida a cada iteração. Seu valor final foi de 1.79×10^{-6} . O valor da energia específica de deformação e da tensão ao quadrado foi

o mesmo para todos os cabos, mesmo com a restrição de área máxima ativa. Quando normalizadas, as áreas dos elementos da topologia final se mostram iguais, e 20% menores que as áreas dos elementos no caso anterior, conforme imposto.

De acordo com a Equação (44), uma estrutura em condição de ótimo também pode ter seus valores de energia específica de deformação e tensão ao quadrado constantes para todos os elementos da topologia final. Neste caso, foi isso que aconteceu.

Analisando o valor da função objetivo nas duas métricas apresentadas, vê-se que impondo uma restrição no limite das áreas de 80% da área máxima do exemplo sem restrição, o valor da função objetivo aumentou de 1.0×10^{-6} para 1.79×10^{-6} , um aumento de aproximadamente 80%. Apesar de terem a mesma topologia final, os dois casos têm elementos com áreas diferentes. Naturalmente, o segundo caso configura uma estrutura menos rígida que a primeira, já que as áreas dos elementos é menor. Sendo assim, as estruturas encontradas nos dois casos foram ótimas para cada um dos casos, consideradas as restrições específicas.

Com uma mesma topologia e áreas finais menores, a estrutura no caso com restrição poderia buscar uma nova topologia, de forma a se associar com outros cabos e usar o volume de material restante. Entretanto isso não aconteceu, devido à “falta de opções” que a própria GS inicial forneceu. No exemplo seguinte, veremos um caso onde essa situação mudou.

5.2.2 Exemplo 2 - Estrutura 2D com GS inicial complexa

Este exemplo é bastante parecido com o anterior. Entretanto, busca-se aqui avaliar os efeitos da escolha da complexidade da GS inicial. Neste caso, a GS inicial foi definida como indicada na Figura 33.

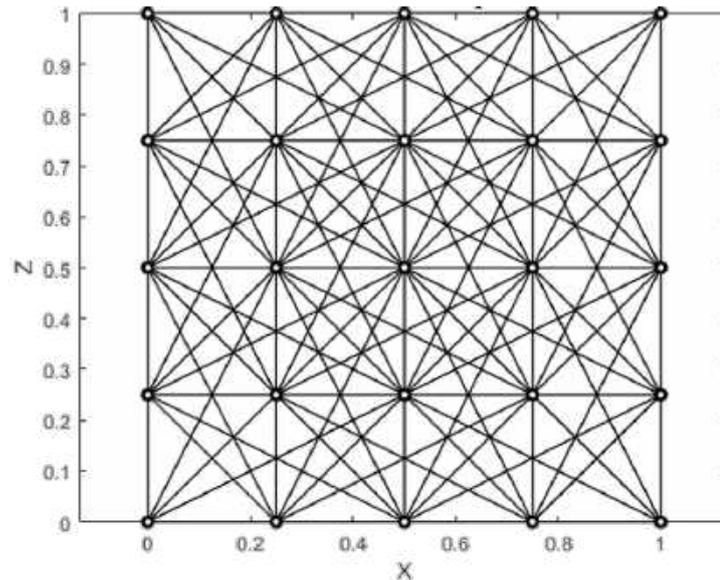


Figura 33 – GS 2D definida no domínio de projeto deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor da carga foi de 5×10^{-1} e as posições dos suportes se mantiveram as mesmas do exemplo anterior. O módulo de elasticidade do material foi $E = 2.5 \times 10^{+6}$. O exemplo não considerou custo nodal. As restrições laterais de área foram dadas pelo intervalo $[0, 1.5 \times 10^{-1}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos foi dado como 1×10^{-5} . O volume máximo de material a ser utilizado foi 2×10^{-1} e o parâmetro de convergência foi calibrado em $tol = 2.5 \times 10^{-5}$.

Inicialmente, sem restrição de área, o resultado da topologia final encontrado foi exatamente o mesmo encontrado no Exemplo 1 na situação sem restrição de área. O valor da função objetivo também foi o mesmo, como era esperado.

Entretanto, quando se impõem restrições no limite máximo das áreas, as topologias encontradas passam a se beneficiar da complexidade adotada para buscar soluções mais otimizadas. Com um limite de 80% da área máxima encontrada no problema sem restrição, a topologia final foi a indicada na Figura 34.

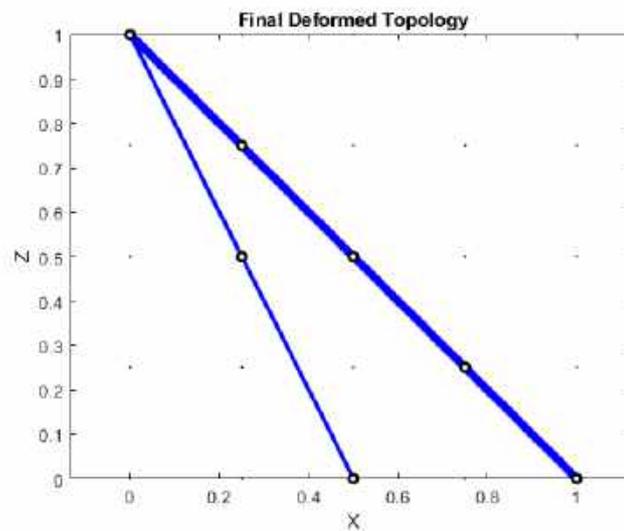


Figura 34 – Topologia final considerando um limite máximo das áreas de 80% do máximo encontrado no caso sem restrição.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para este caso, as métricas da simulação foram as indicadas na Figura 35.

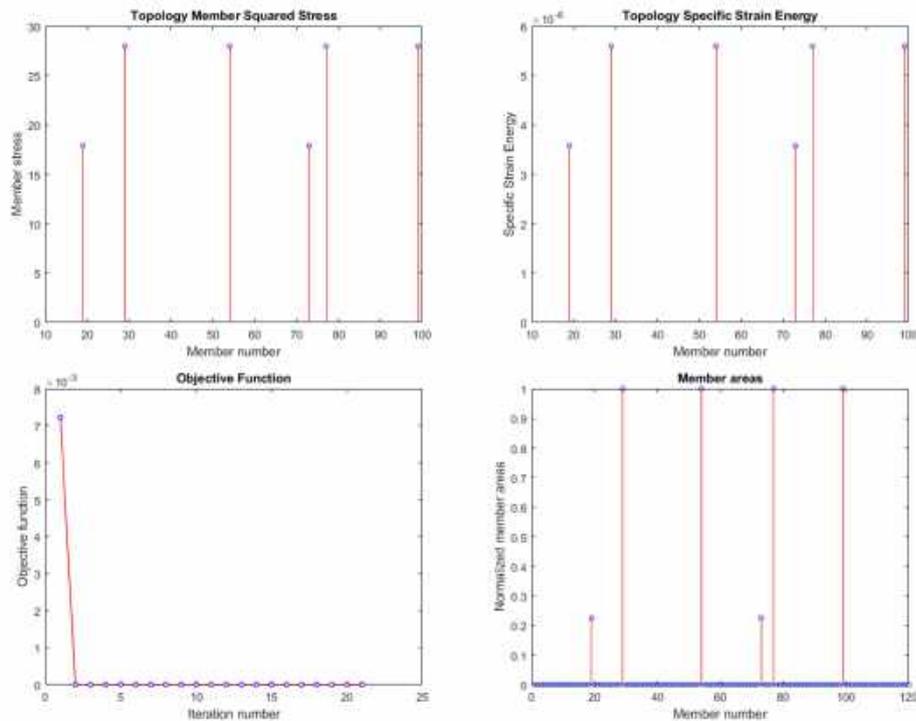


Figura 35 – Métricas da última simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 35 vê-se que, devido às restrições impostas, o valor das áreas das barras foi diferente, assim como a tensão ao quadrado e a energia específica de deformação das mesmas. Uma análise cuidadosa permite observar também que, apesar da restrição ativa,

os cabos menores que compõem cabos maiores têm valores constantes entre si em todas as métricas. Isto é um indicativo de que os resultados são coerentes. Além disso, o histórico da função objetivo aponta que a mesma diminuiu para todas as iterações, sendo a estrutura final uma estrutura mais rígida. Seu valor final foi de 1.06×10^{-6} .

Comparando o valor da função objetivo para este último caso e o caso sem restrições, observou-se um aumento de cerca de 6%. Dessa forma, comparando a GS do Exemplo 2 em seus dois casos – sem e com restrição de área máxima, respectivamente –, vê-se que a estrutura com restrição é menos rígida que aquela que não oferece limite de área máximo.

Já observando os resultados entre GS's iniciais diferentes, no caso com restrição de área máxima, nota-se uma grande diferença entre os resultados do exemplos 1 e 2, sendo a estrutura deste último cerca de 40% mais rígida. Isto mostra que a complexidade de definição da GS também é um fator importante para o processo de otimização topológica.

5.2.3 Exemplo 3 - Três casos de carregamento

Neste exemplo, foi utilizada a configuração de suportes representada na Figura 36 pelos quadrados vermelhos. O nó no qual são aplicados os casos de carregamento está localizado ao centro, na coordenada $z = 1$.

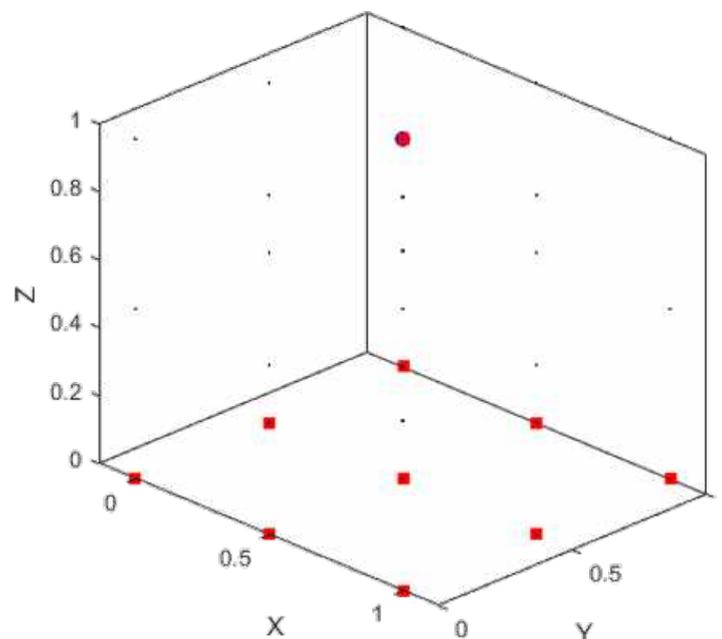


Figura 36 – Nós e condições de suporte e carga desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vista superior dos três casos de carregamento desta simulação é apresentada na Figura 37.

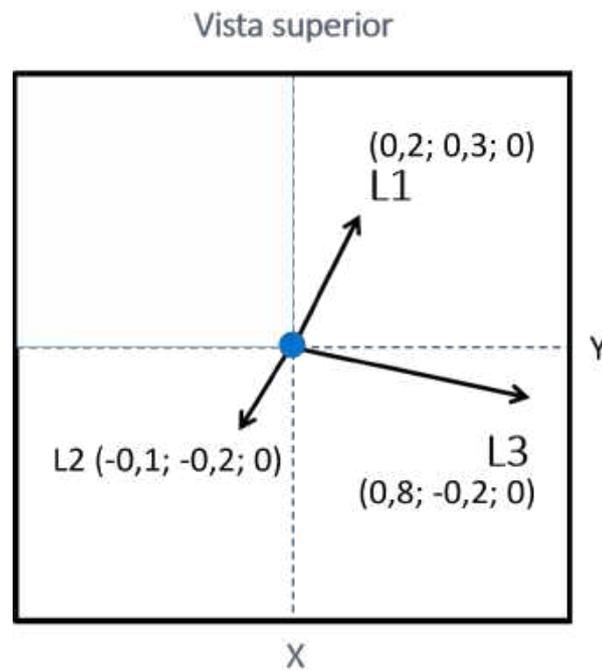


Figura 37 – Vista superior dos casos de carregamento deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A GS inicial foi definida ligando todos os nós com todos os outros, de forma a dar a maior liberdade possível para o processo de otimização buscar a melhor solução. Uma visualização da GS inicial é apresentada na Figura 38.

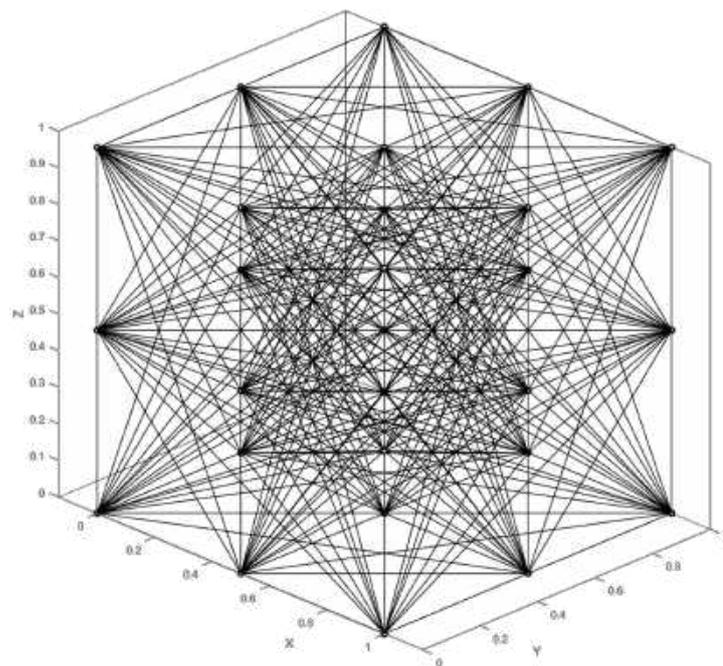


Figura 38 – GS 3D inicial com complexidade suficiente para ligar todos os nós com todos os nós.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O módulo de elasticidade do material é $E = 2.5 \times 10^6$. O exemplo conta com os três casos de carga apresentados na Figura 37, e não considera custo nodal. As restrições laterais de área são dadas pelo intervalo $[0, 1 \times 10^{+10}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos é dado como 1×10^{-3} . O volume máximo de material a ser utilizado é 2×10^{-1} e o parâmetro de convergência foi calibrado em $tol = 2 \times 10^{-5}$.

Após o processo de otimização e filtragem, a topologia final encontrada é apresentada na Figura 39.

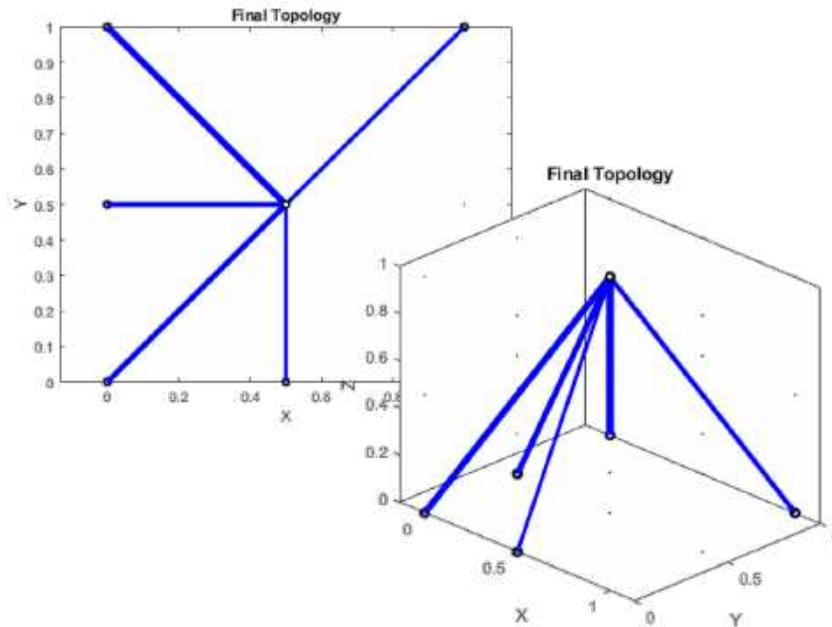


Figura 39 – Topologia final deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As métricas da simulação que gerou a topologia da Figura 39 são apresentadas na Figura 40.

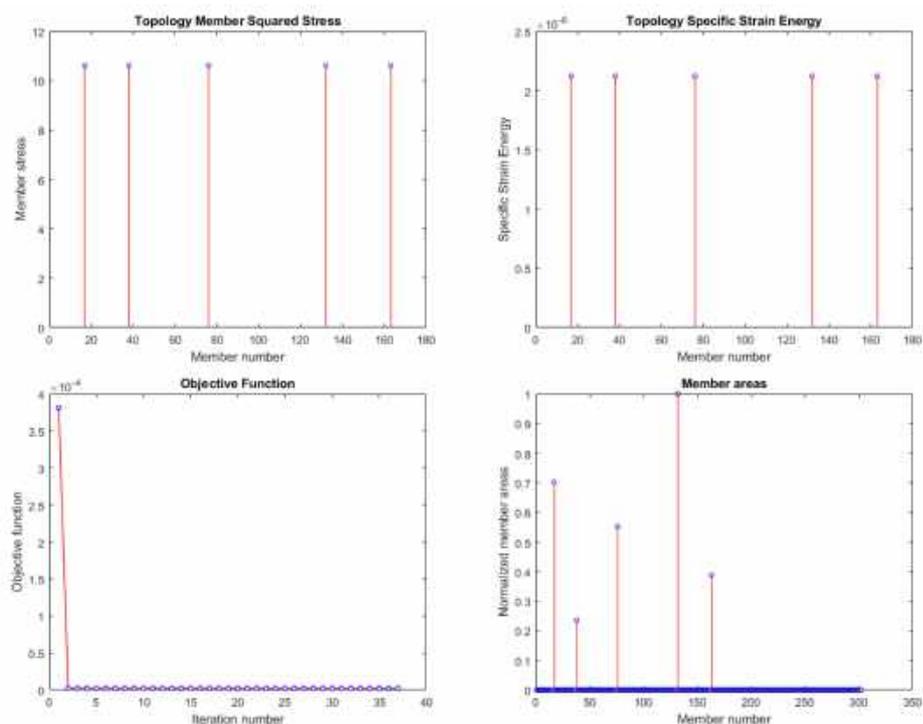


Figura 40 – Métricas desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar de serem considerados três casos de carregamento e das áreas das barras serem obviamente diferentes, a tensão ao quadrado e a energia específica de deformação das mesmas se mantém constante, atendendo à condição de ótimo. Isto significa que, para a GS inicial e para as condições de carga e suporte especificadas, a topologia final encontrada é ótima. O valor da função objetivo também é apresentado, mostrando que houve uma redução da energia potencial total estacionária do sistema, garantindo uma estrutura mais rígida a cada iteração.

5.2.4 Exemplo 4 - Resultante dos três casos de carregamento

Neste exemplo, considera-se apenas um caso de carregamento, determinado pela resultante dos três casos de carregamento do exemplo anterior. A GS, as condições de suporte e os parâmetros de simulação continuam exatamente os mesmos. Uma vista superior do carregamento é apresentada na Figura 41.

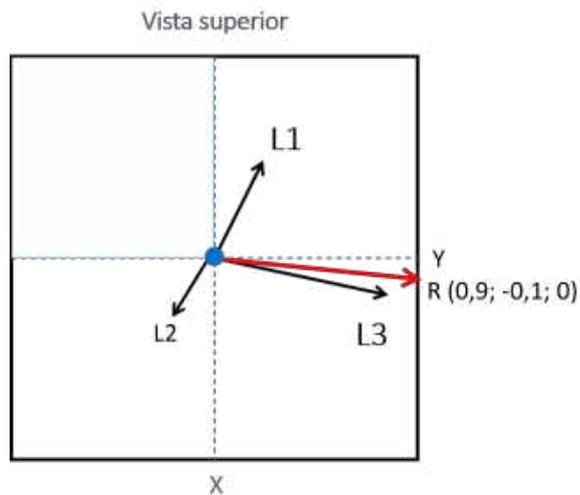


Figura 41 – Vista superior do caso de carregamento R deste exemplo, representado pela resultante dos casos $L1$, $L2$ e $L3$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após o processo de otimização e filtragem, a topologia final encontrada é a indicada na Figura 42.

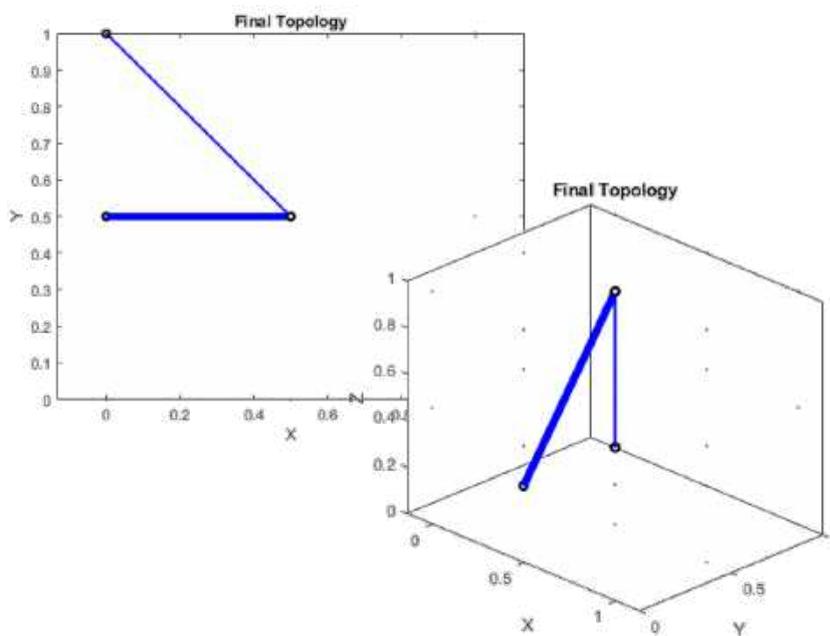


Figura 42 – Topologia final deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o exemplo em pauta, as métricas da simulação são as indicadas na Figura 43.

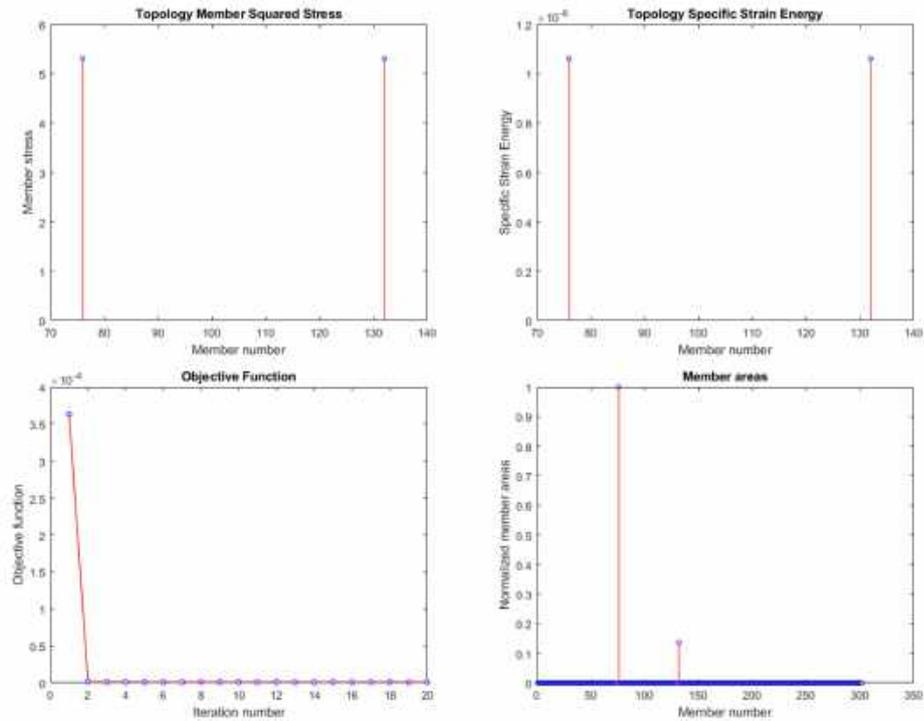


Figura 43 – Métricas desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente se observa que a condição de ótimo foi atendida, bem como a condição de aumento de rigidez da estrutura. As áreas das barras da topologia final também foram diferentes, e o que se observa neste exemplo em comparação ao outro é que a consideração de diversos casos de carga gera resultados completamente diferentes da consideração da resultante dos mesmos.

5.2.5 Exemplo 5 - Análise de simetria dos resultados

Este exemplo tem o objetivo de mostrar que para uma GS com condições de suporte e casos de carga simétricos, o resultado será simétrico. A GS utilizada aqui foi a mesma utilizada no exemplo anterior, alterando somente os casos de carga, que foram considerados conforme a Figura 44.

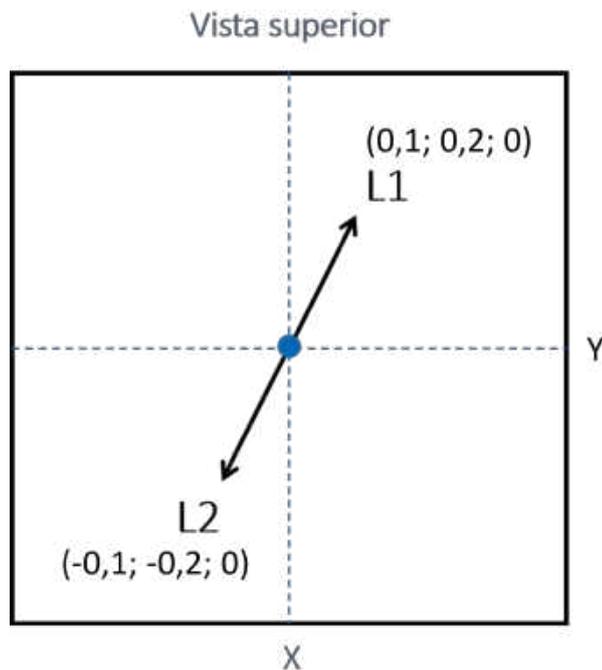


Figura 44 – Vista superior dos casos de carregamento deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após o processo de otimização e filtragem, a topologia final encontrada é a indicada na Figura 45.

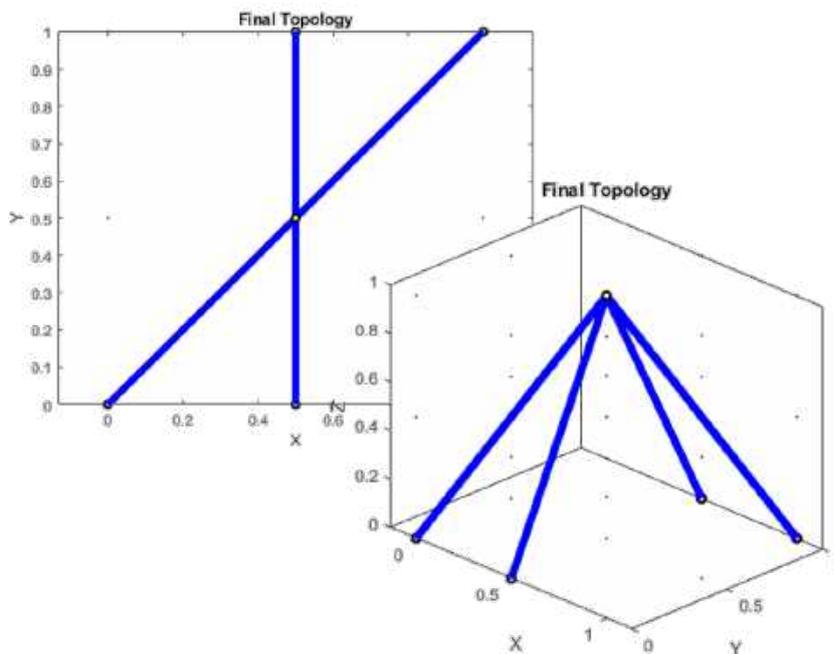


Figura 45 – Topologia final usando GS 3D com suportes simétricos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mostra a Figura 45, a topologia encontrada é simétrica, como previsto.

Destaca-se que, para este exemplo, se for considerado apenas um caso de carga com as duas forças, a resultante seria nula e sequer haveria topologia final. Assim, mais uma vez, fica clara a importância da formulação que contempla múltiplos casos de carregamento.

As métricas dessa simulação são apresentadas na Figura 46.

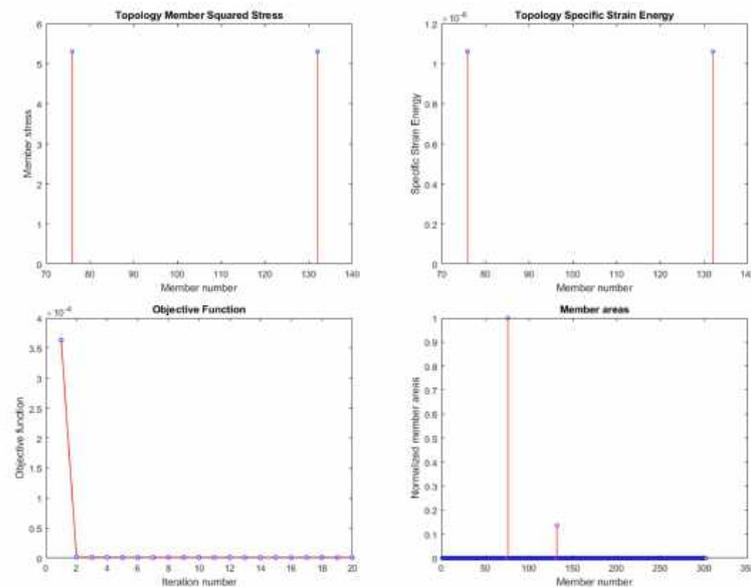


Figura 46 – Métricas desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar, simulou-se um exemplo com a mesma condição de carga aqui apresentada, mas variando a posição dos apoios e do ponto de carregamento, como mostra a Figura 47.

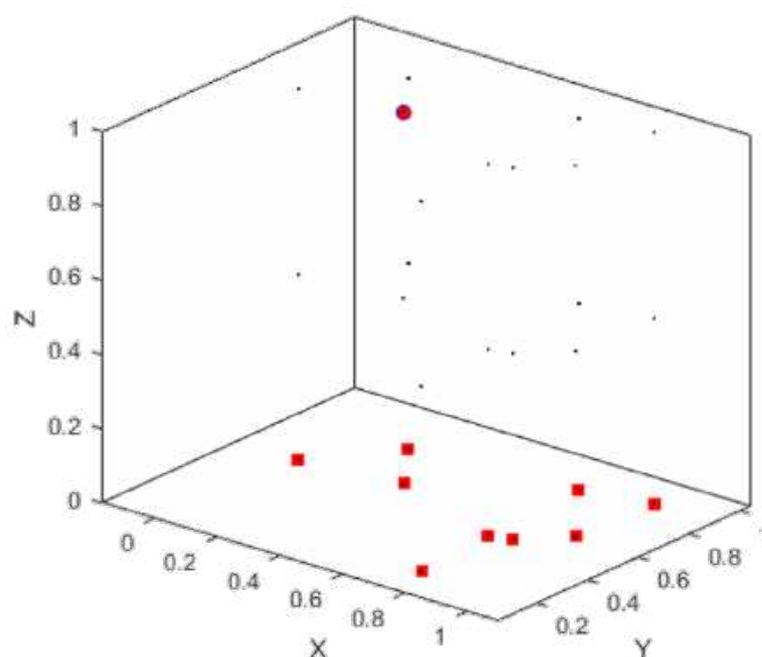


Figura 47 – GS inicial do exemplo simulado com nós de suporte em posições randômicas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A posição dos apoios foi escolhida de maneira randômica, de forma a testar a influência dos mesmos na simetria da topologia final. Nesta situação, a topologia final foi a indicada na Figura 48.

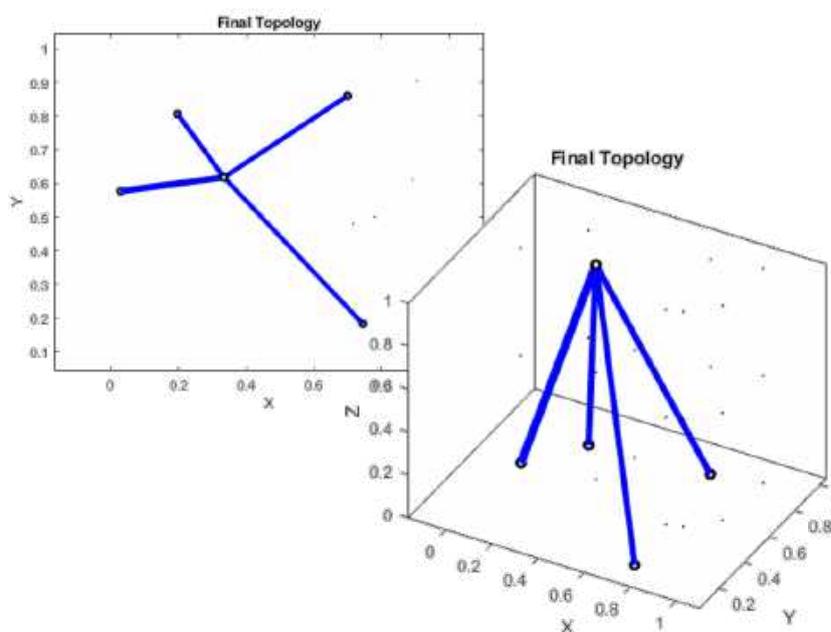


Figura 48 – Topologia final usando GS 3D com suportes randômicos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar dos casos de carregamento considerados neste exemplo serem simétricos, a topologia final não foi simétrica, por conta da posição dos suportes. Mesmo assim, a condição de ótimo foi atendida, como mostram as métricas dessa simulação na Figura 49.

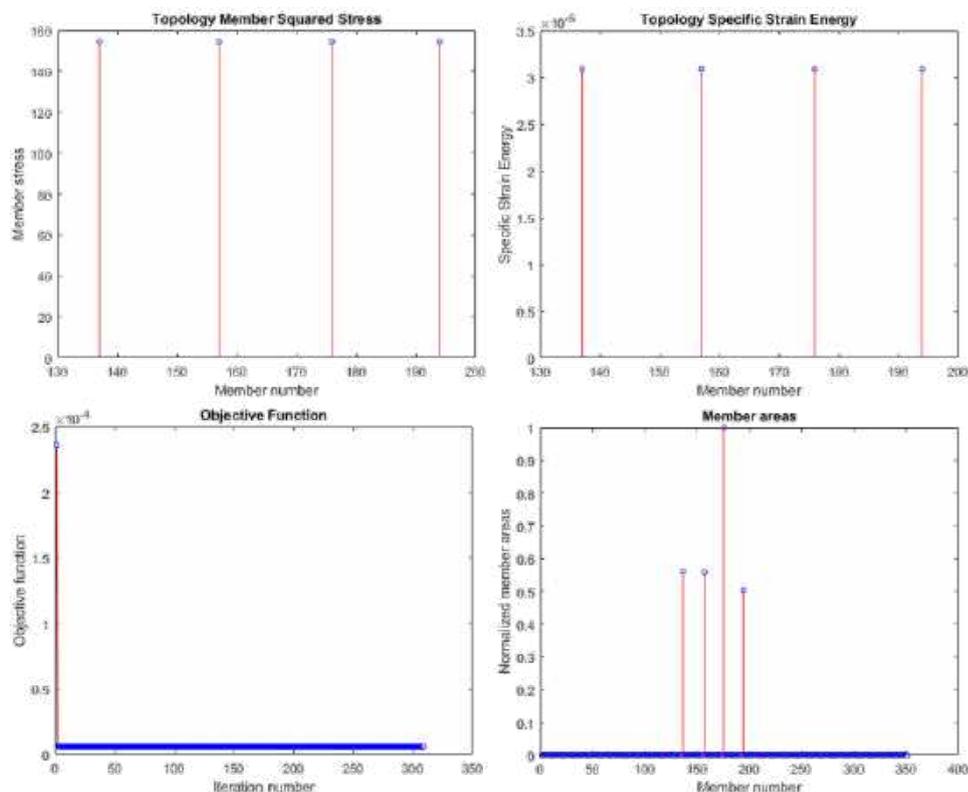


Figura 49 – Métricas desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aqui, gerou-se o caso de uma barra ter uma área muito maior que as outras, forçada pelas condições de suporte disponíveis. A função objetivo, por sua vez, também apresenta uma convergência para um valor de mínimo.

5.2.6 Exemplo 6 – Estrutura 2D com GS inicial complexa e custo nodal

Este exemplo tem o objetivo de mostrar a influência da formulação de custo nodal nos resultados das simulações, utilizando como base a GS da Figura 33 e as condições de contorno do Exemplo 2.

O módulo de elasticidade do material é $E = 2.5 \times 10^6$. A força aplicada tem módulo igual a 5×10^{-1} . As restrições laterais de área são dadas pelo intervalo $[0, 1.5 \times 10^{-3}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos é dado como 1×10^{-9} . O volume máximo de material a ser utilizado é 2×10^{-1} e o parâmetro de convergência foi calibrado em $tol = 9 \times 10^{-5}$.

Dada uma primeira simulação, sem o uso de custo nodal ($s = 0$), e após o processo de otimização e filtragem, a topologia final encontrada é a indicada na Figura 50.

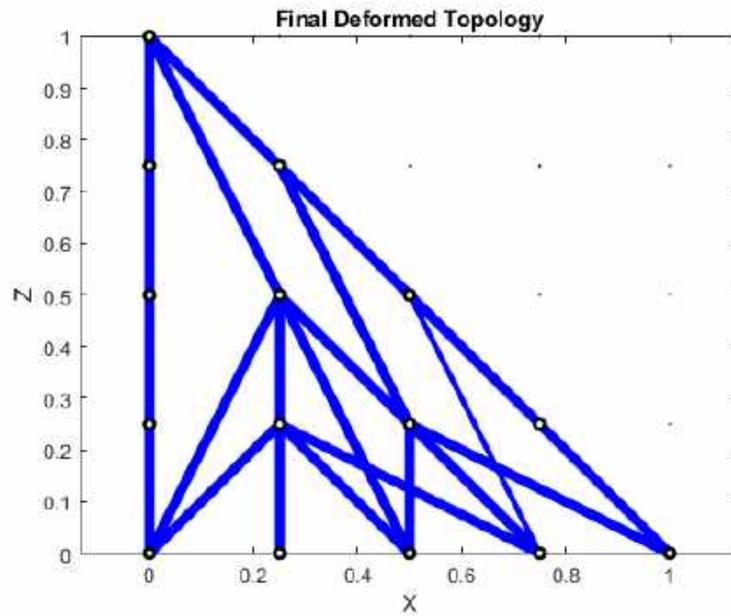


Figura 50 – Topologia final da simulação sem consideração de custo nodal.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As métricas da simulação são apresentadas abaixo, na Figura 51.

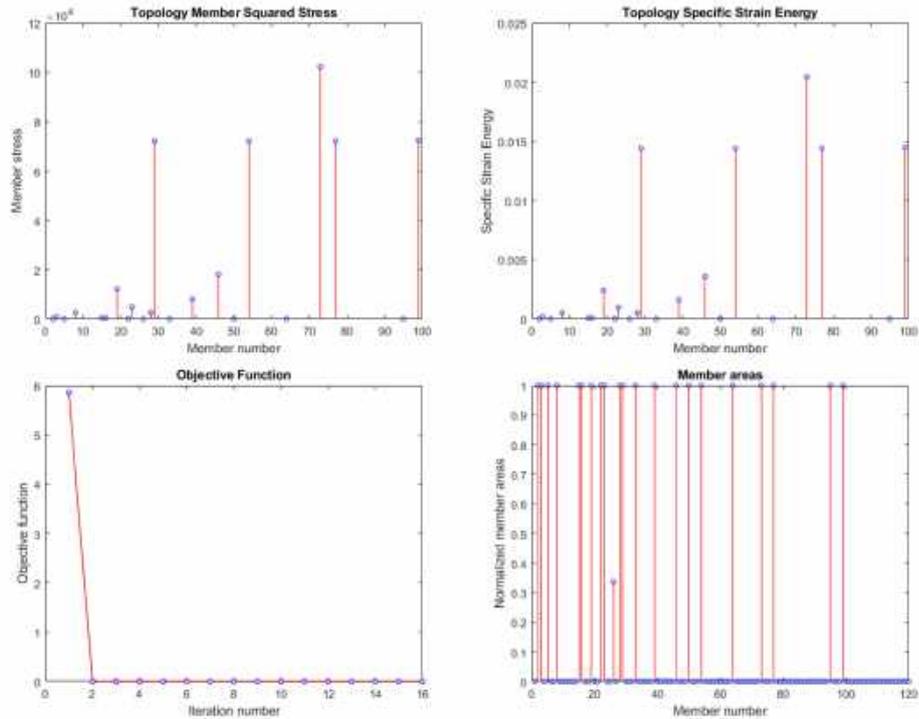


Figura 51 – Métricas desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que a topologia final encontrada nesse caso é complexa do ponto de vista de execução. Há diversas barras conectadas entre si e ancoradas em diferentes apoios.

Dado este resultado, o caso foi simulado novamente com uma única alteração: inserindo a formulação de custo nodal (atribuindo $s = 100$), penalizando o uso de barras menores. O resultado encontrado é apresentado nas Figuras 52 e 53, juntamente com suas métricas de simulação.

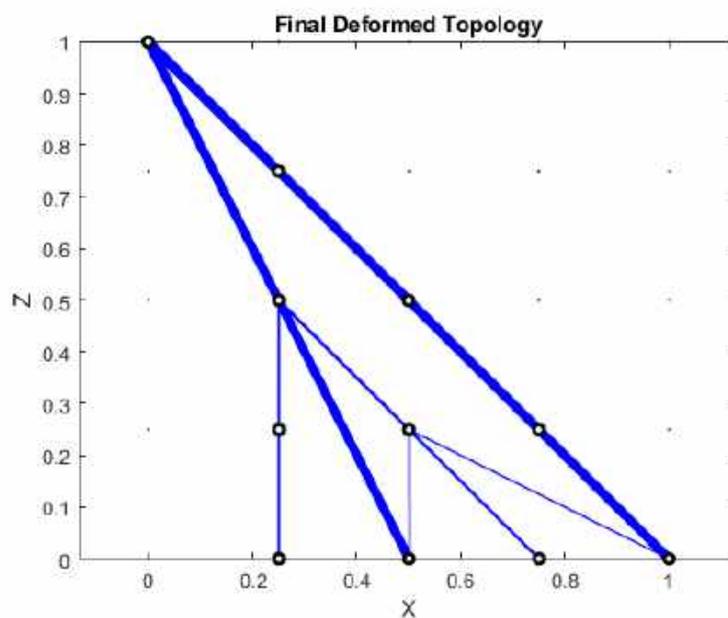


Figura 52 – Topologia final da simulação com consideração de custo nodal.

Fonte: Elaborada pelo autor.

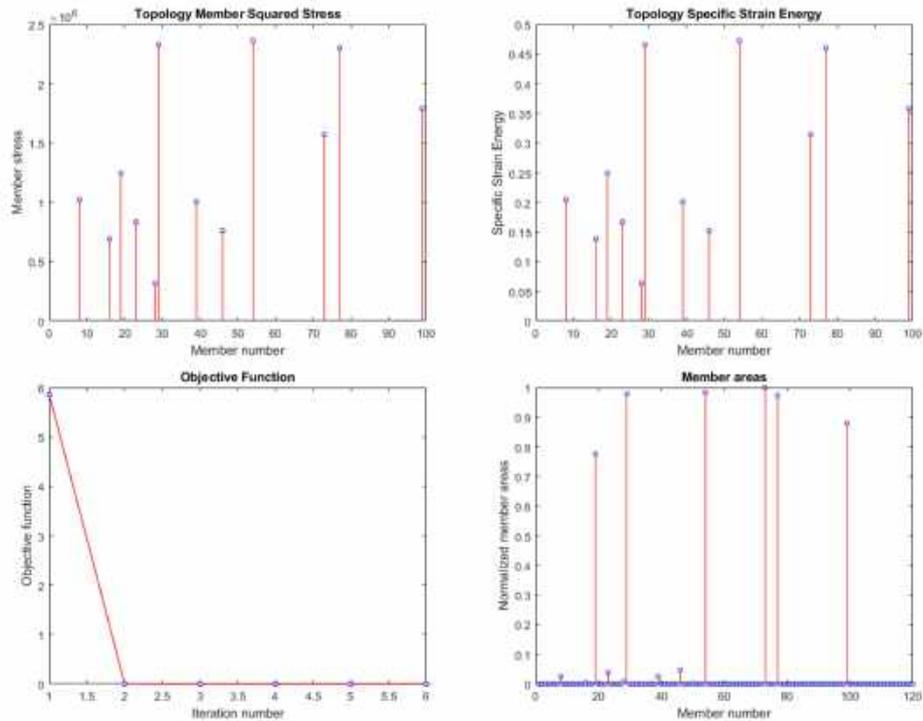


Figura 53 – Métricas desta simulação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que a topologia final encontrada agora é mais enxuta e menos complexa que a anterior. Além disso, nesta simulação, os valores de tensão ao quadrado e energia específica de deformação não se mantiveram constantes para todos os elementos da topologia final, apenas para os elementos com mesmo comprimento. Como mostra a Equação (45), para o mesmo valor de L_i , as grandezas de energia e tensão ao quadrado serão constantes na condição de ótimo. Desta forma, a estrutura encontrada é ótima e tem-se a confirmação que o algoritmo funciona e entrega resultados compatíveis com a formulação a qual foi desenvolvido.

5.2.7 Exemplo 7 – Estrutura 2D com GS inicial longa e custo nodal

Neste exemplo, modela-se uma GS com as condições de contorno tais quais apresentados na Figura 54.

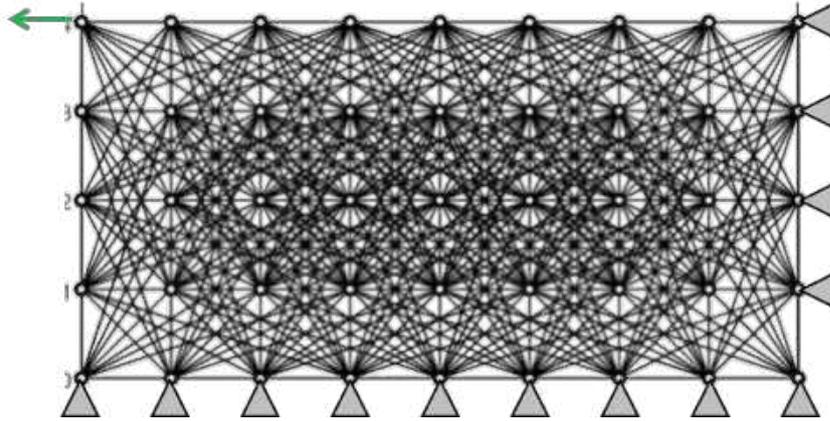


Figura 54 – GS inicial e condições de contorno deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso em específico a relação largura x altura é de 2. Visto que a carga aplicada é horizontal, a tendência inicial desta simulação é buscar ancoragem na parede à direita, já que essa configuração oferecerá maior resistência à carga aplicada. Entretanto, para isso será necessário o uso de diversas barras pequenas conectando o ponto de aplicação à parede. Espera-se que ao introduzir a formulação de custo nodal, a topologia final seja diferente da prevista, buscando evitar o uso de barras pequenas.

Sendo assim, a primeira simulação é feita sem a utilização de custo nodal. O módulo de elasticidade do material é $E = 1 \times 10^{+7}$. A força aplicada tem módulo igual a $1 \times 10^{+1}$. As restrições laterais de área são dadas pelo intervalo $[1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{+4}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos é dado como 1×10^{-5} . O volume máximo de material a ser utilizado é 2×10^{-1} e o parâmetro de convergência foi calibrado em $tol = 1 \times 10^{-6}$.

A topologia final e as métricas da simulação são apresentadas a seguir.

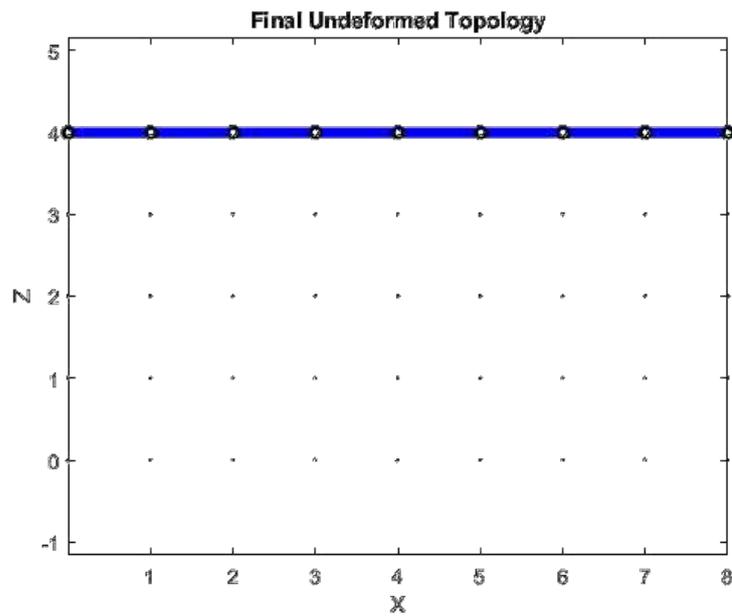


Figura 55 – Topologia final indeformada da simulação sem a consideração de custo nodal. A estrutura apresentou deslocamentos imperceptíveis a este nível de zoom, e portanto a configuração deformada e indeformada são praticamente as mesmas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

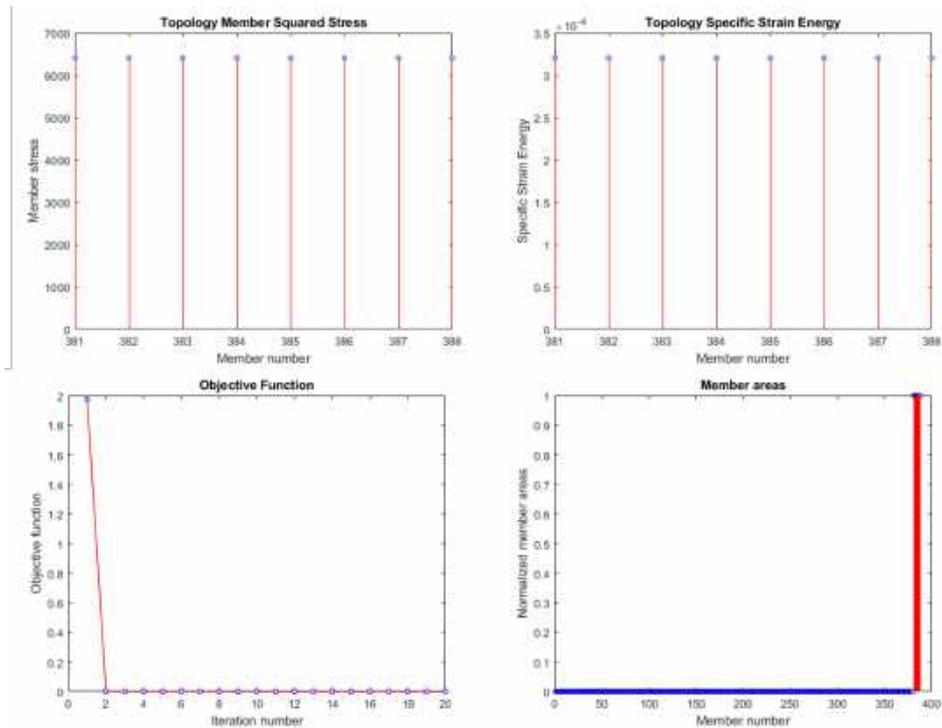


Figura 56 – Métricas desta simulação sem a consideração de custo nodal.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como foi inicialmente previsto, a topologia final buscou ancoragem na parede à

direita, visto que nessa configuração, toda força aplicada é absorvida axialmente pelos elementos tracionados.

Analisando as métricas, percebe-se que os valores de tensão ao quadrado e energia específica de deformação são constantes para todos os elementos da topologia final.

Inserindo agora uma parcela de custo nodal $s = 5$, temos os resultados mostrados nas Figuras 57 e 58.

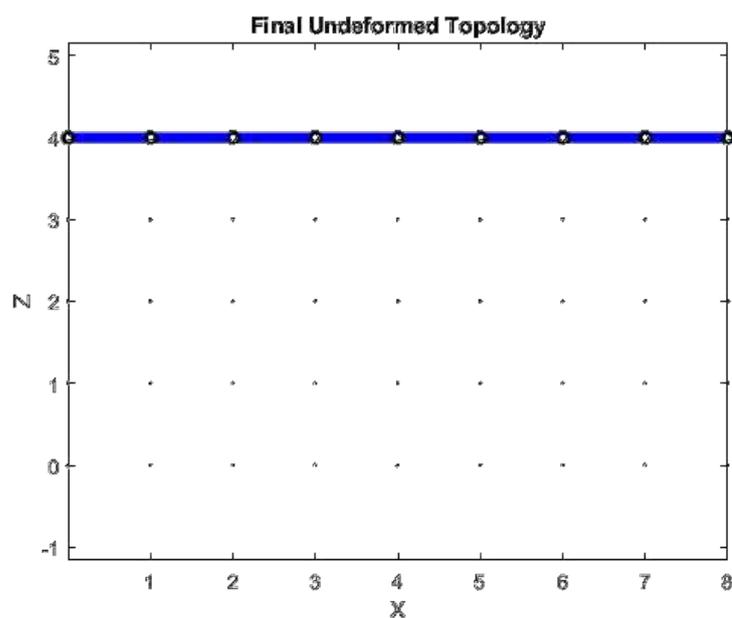


Figura 57 – Topologia final da simulação com a consideração de custo nodal igual a 5. A estrutura apresentou deslocamentos imperceptíveis a este nível de zoom, e portanto a configuração deformada e indeformada são praticamente as mesmas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

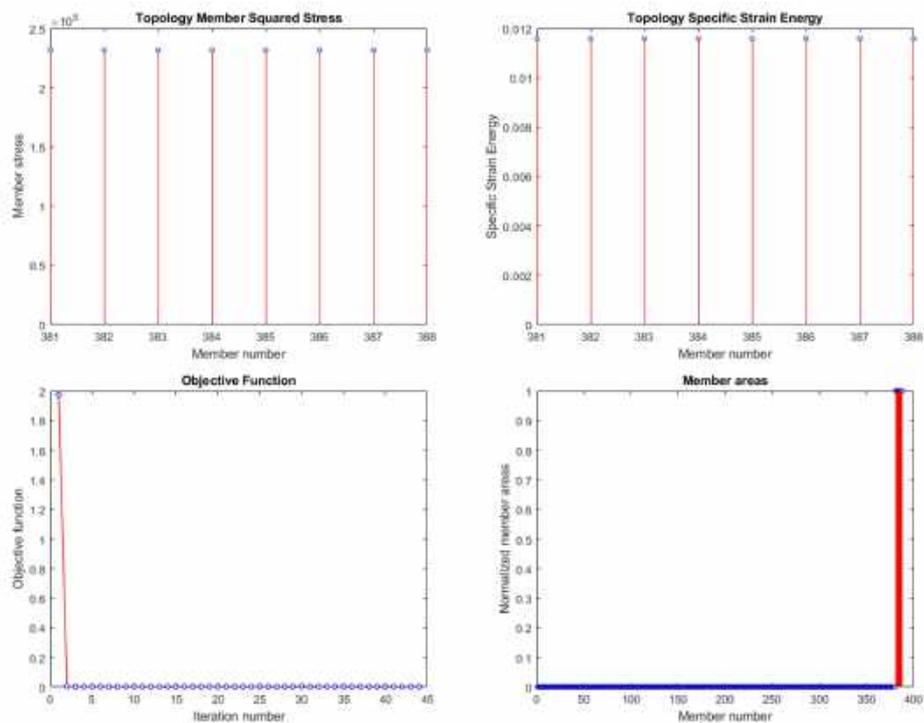


Figura 58 – Métricas desta simulação com a consideração de custo nodal igual a 5.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta simulação, mesmo ao considerarmos custo nodal, a topologia final não mudou. O mesmo se observa ao considerar outros valores de custo nodal. A explicação para esse fato é que apesar de haver outros elementos maiores e mesmo ao penalizar a utilização de elementos menores, a topologia final ainda assim oferece a melhor rigidez à estrutura.

Nos exemplos apresentados anteriormente, sempre se considerou um apoio de primeiro gênero no nó de aplicação da carga horizontal, simulando o efeito do empuxo da água em uma possível situação de linha de ancoragem. Nesta simulação, entretanto, este suporte no ponto de aplicação da carga não foi considerado. Como estamos tratando de uma simulação que considera deformações finitas, caso não houvesse a parede lateral onde a estrutura buscou um ponto de ancoragem, este ponto seria buscado em algum dos pontos de ancoragem inferiores.

Entretanto, isto acarretaria em um deslocamento excessivo da estrutura, devido à natureza da formulação de cabos com deformações finitas. Isto foi testado e é apresentado na Figura 59.

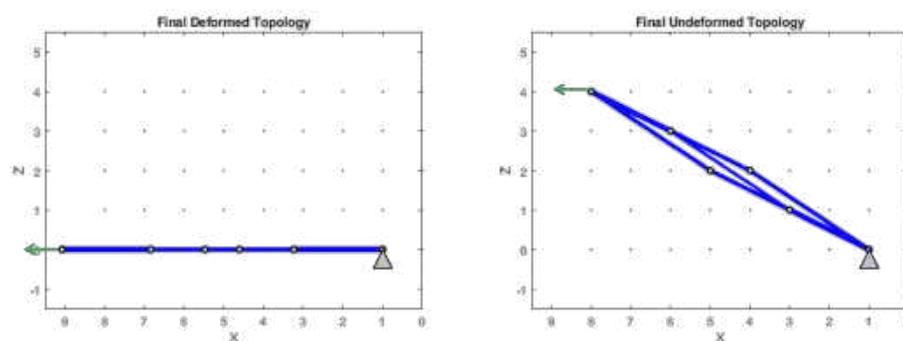


Figura 59 – Comparação das configurações deformada e indeformada da topologia final no caso onde não há parede lateral disponível para ancoragem.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 59 é clara no que diz respeito ao nível de deslocamento da topologia quando não há a parede lateral como opção para ancoragem. Isto justifica a mesma topologia encontrada nos casos das Figuras 55 e 57.

Voltando às métricas apresentadas na Figura 58, percebe-se um resultado muito semelhante ao obtido na situação com custo nodal nulo, apresentada na Figura 56. Analisando o valor da função objetivo, percebe-se que foi encontrado um valor igual a 1.93×10^{-3} , em comparação ao valor de 3.20×10^{-4} obtido no caso onde não se considerou custo nodal.

Esta diferença é justificada pela natureza da formulação de custo nodal. Como apresentado na seção 3.3.1, a estratégia de Prager-Parkes utilizada interfere na restrição de volume do problema de otimização. Isto quer dizer que, apesar da restrição de volume inicial ser a mesma para os dois casos, ao considerar custo nodal o volume dos elementos é alterado pela parcela de penalização, resultando em um volume fictício maior do que o elemento realmente tem. O processo de otimização considera então esse volume fictício no cálculo das sensibilidades do problema, e para que o volume fictício respeite a restrição de volume imposta, gera-se o efeito colateral de diminuição nas áreas transversais dos elementos.

Ao final do processo de otimização, o volume fictício atende à restrição de volume, mas a topologia final tem um volume real que é menor que o especificado na restrição de volume. Além disso, pelo fato das áreas transversais serem diminuídas, a estrutura se torna menos rígida e portanto sofre mais deslocamentos. Quanto maior é a razão $\frac{s}{L_i}$, mais esses efeitos são percebidos.

Assim, mais uma vez, percebe-se que a estrutura mais rígida foi encontrada no caso em que há menos restrições impostas.

5.3 PONTE ESTAIADA

As pontes, dentro do âmbito da Engenharia, são apelidadas de “obras de arte”, devido, muitas vezes, ao elevado grau de complexidade e especificidade de cada projeto. Para projetar uma ponte, deve-se avaliar, entre muitos outros aspectos, o vão a ser vencido pela estrutura. A depender do comprimento deste vão, um tipo ou outro de ponte se torna preferível. Dentre os tipos de ponte existentes, destaca-se o objeto de estudo deste exemplo: a ponte estaiada.

As pontes estaiadas são caracterizadas por terem sua sustentação garantida por meio de mastros de onde partem tirantes que se ligam ao tabuleiro da ponte. São tidas como pontes de vão médio, onde uma ponte fixa se tornaria muito pesada, e uma ponte pênsil se tornaria muito cara. Esse tipo de ponte pode ser concebido em vários formatos, sendo os formatos de leque e harpa os mais comuns, como mostra a Figura 60.

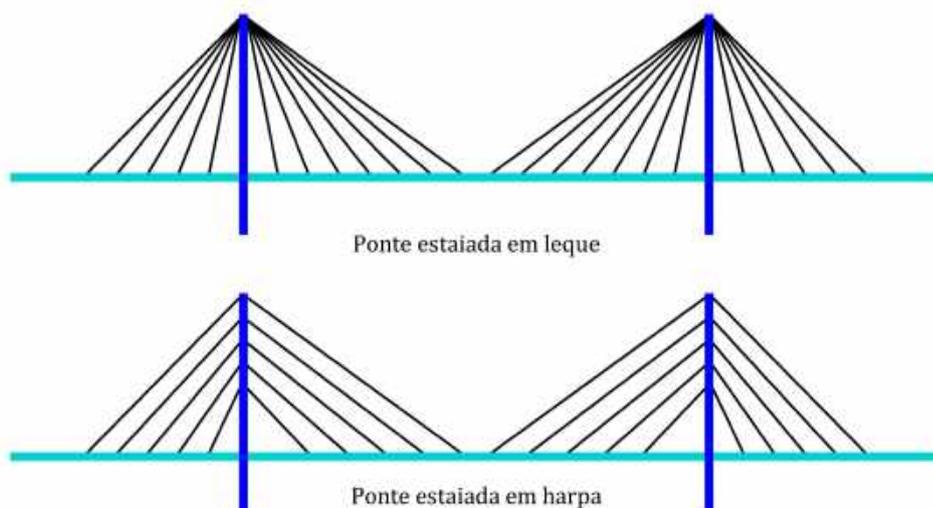


Figura 60 – Tipos tradicionais de ponte estaiada.

Fonte: Adaptada de (TIZIO, 2007).

A ponte Octávio Frias de Oliveira, localizada na cidade de São Paulo - SP e a ponte Juscelino Kubitschek, localizada na cidade de Brasília - DF, são talvez as pontes estaiadas mais famosas do Brasil, e fogem aos padrões tradicionais de leque e harpa, como mostram as Figuras 61 e 62.



Figura 61 – Ponte Octávio Frias de Oliveira, na cidade de São Paulo - SP.

Fonte: (LEAL, 2008).



Figura 62 – Ponte Juscelino Kubitschek, na cidade de Brasília - DF.

Fonte: (ORTIZ, 2007).

5.3.1 Exemplo 8 - Ponte estaiada sem custo nodal

Para o exemplo desta simulação, considera-se um modelo de GS em um grid 11×4 , tal qual apresentado na Figura 63, composto de 43 elementos.

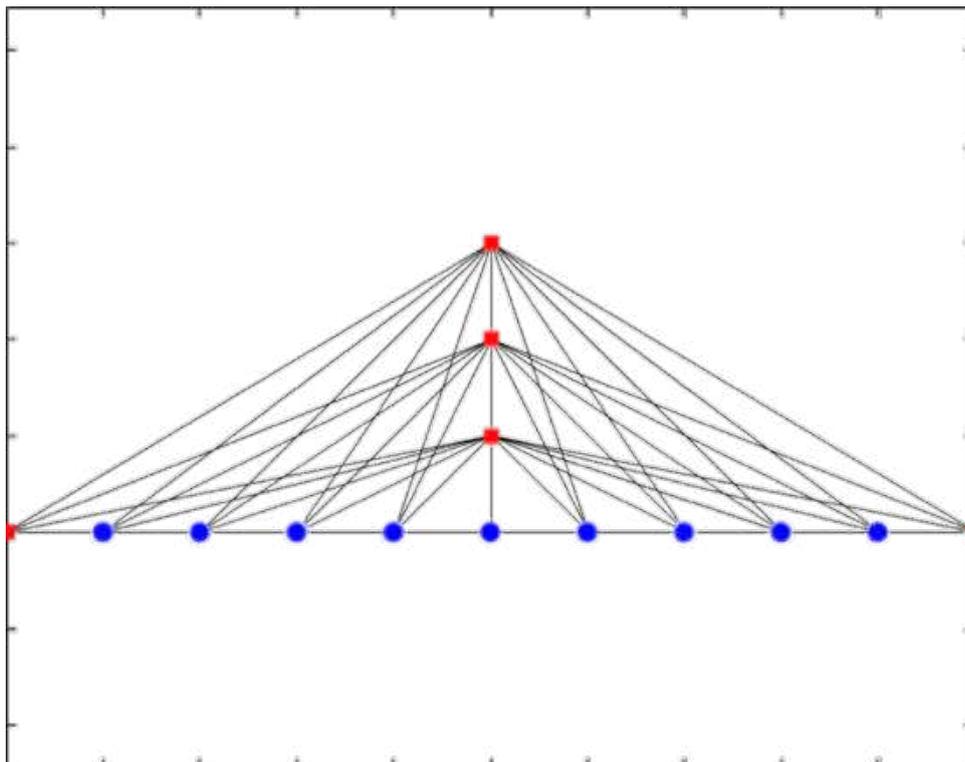


Figura 63 – GS e demarcação dos nós de força e suporte para o Exemplo 8.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos quadrados em vermelho são aplicados os suportes, que são do segundo gênero. Nos nós marcados por um círculo azul, são aplicadas forças com sentido vertical para baixo. Todos os elementos do modelo são elementos de cabo sem resistência limite, sem custo nodal aplicado, submetidos a apenas um caso de carga e com $E = 2 \times 10^{+6}$. As restrições laterais de área são dadas pelo intervalo $[0, 1 \times 10^{-6}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos é dado como 5×10^{-8} . O volume máximo de material a ser utilizado é 1×10^{-6} .

Este exemplo, assim como o apresentado na seção 4.3, é sensível à carga aplicada, e por isso serão apresentados três arranjos finais diferentes, a depender do valor de carga utilizado. Neste primeiro resultado, a força aplicada em cada nó identificado teve módulo igual a $1 \times 10^{+8}$, e os arranjos finais encontrados são apresentados na Figura 64.

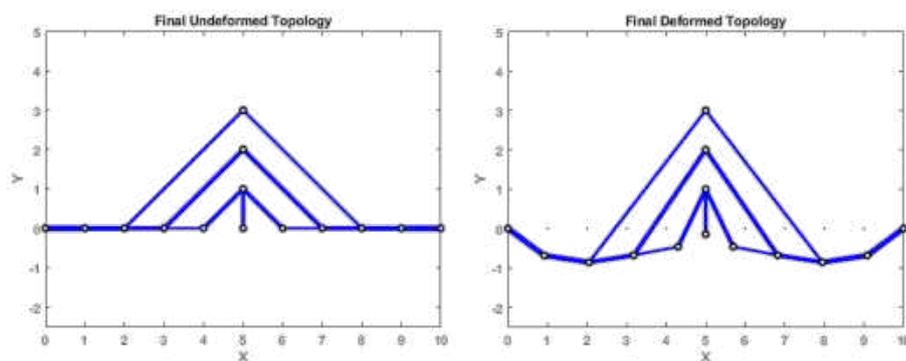


Figura 64 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de 1×10^8 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se pelo resultado da Figura 64 que a topologia encontrada se assemelha com uma ponte estaiada em formato harpa. Por se tratar de um modelo no qual foram inseridos apenas elementos resistentes à tração, os resultados tornam-se um pouco diferentes da realidade, no sentido de que ao carregar a estrutura, podem surgir configurações nas quais as barras seriam solicitadas à compressão, caso resistissem a tal esforço. Dessa forma, o algoritmo acaba contornando essa característica do material e buscando topologias nas quais seja possível resolver o problema da forma que foi modelado.

Analisando também as métricas da simulação, temos os resultados apresentados na Figura 65.

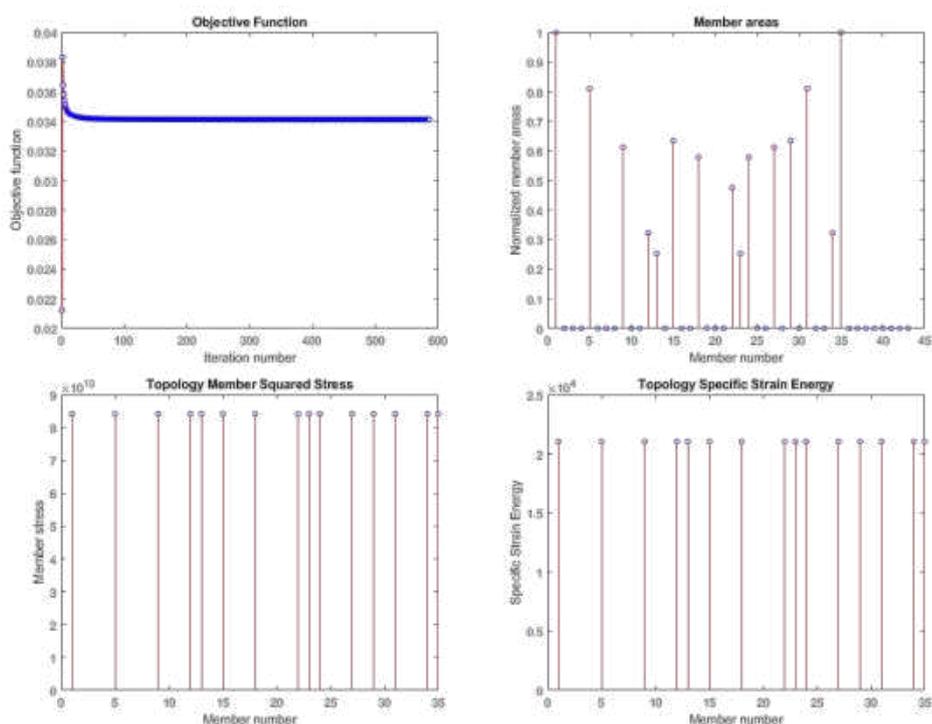


Figura 65 – Métricas da simulação para a carga aplicada de 1×10^8 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a função objetivo convergiu em cerca de 585 iterações, para um valor de $tol = 10^{-12}$. As áreas de todos os membros apresentaram valores bastante desiguais – devido à própria natureza da topologia encontrada –, direcionando material para as extremidades do tabuleiro, por exemplo. O valor da energia específica de deformação e do quadrado da tensão se mostraram constantes. Como as restrições laterais de área não estão ativas na topologia final, isto indica que a solução é ótima.

Em seguida, a mesma simulação é executada novamente, trocando apenas o módulo da carga aplicada para 1.8×10^8 . Na nova situação o resultado da topologia final é apresentado na Figura 66.

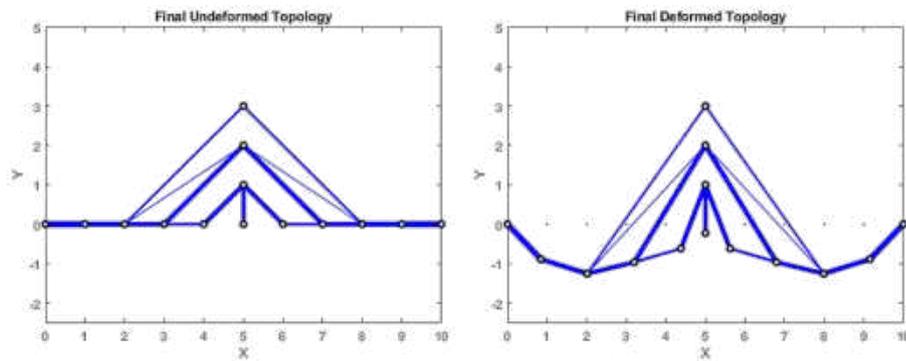


Figura 66 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de 1.8×10^8 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso, foram necessárias 1750 iterações para que o problema convergisse, utilizando o mesmo valor de tol da situação anterior. Percebe-se que agora a topologia passou a mudar um pouco, acrescentando elementos que não estavam presentes na situação anterior, resultando em um arranjo que passa a ser um misto de harpa com leque.

Analisando as métricas desta simulação, temos os resultados a seguir, apresentados na Figura 67.

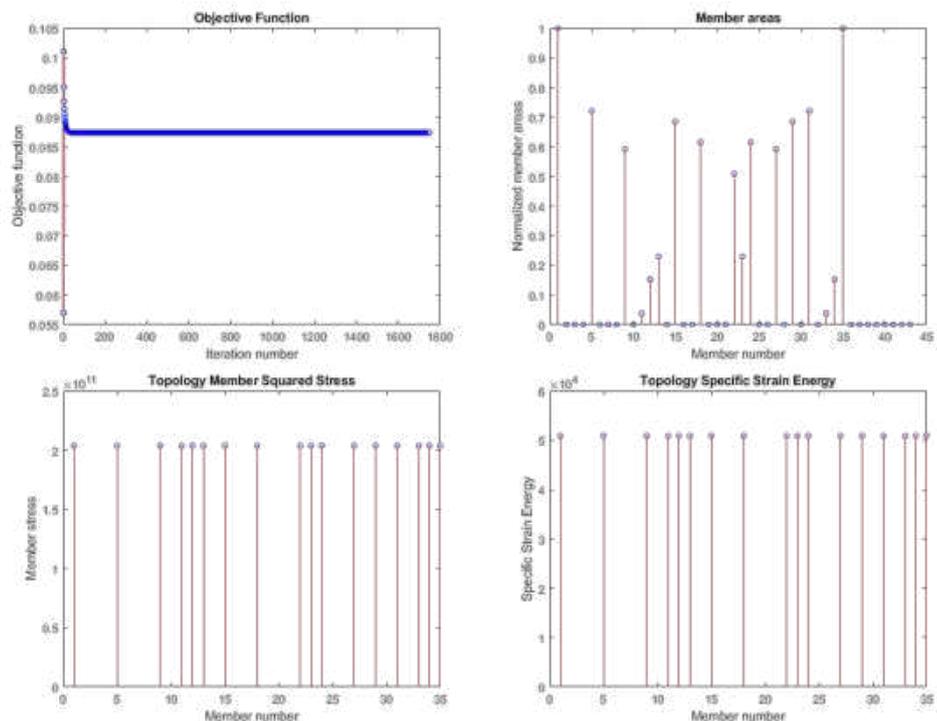


Figura 67 – Métricas da simulação para a carga aplicada de $1.8 \times 10^{+8}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As áreas de todos os membros se mostraram novamente bastante desiguais, pelo mesmo motivo discutido na situação anterior. O valor da energia específica de deformação e do quadrado da tensão se mantiveram constantes para todos os elementos da topologia final, novamente indicando que a solução encontrada é ótima, pois as restrições laterais de área continuaram inativas.

Aumentando mais uma vez o valor da carga aplicada para $1 \times 10^{+9}$, encontra-se a topologia apresentada na Figura 68.

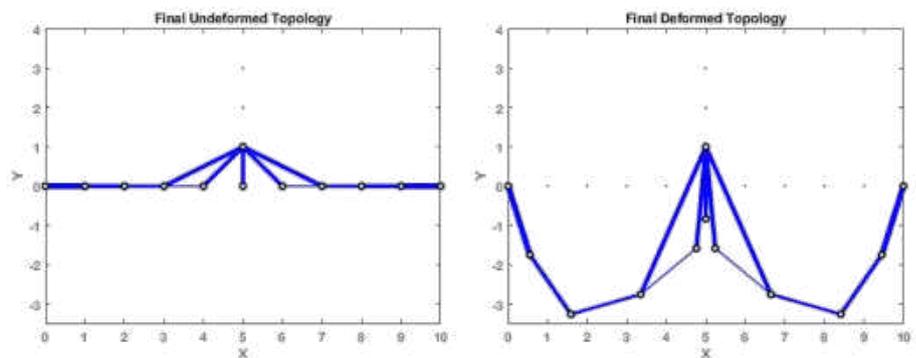


Figura 68 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de $1 \times 10^{+9}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que, devido ao módulo da carga ter aumentado em uma ordem de

grandeza entre a primeira situação e esta, a configuração deformada encontrada sofre deslocamentos extremos. Além disso, o algoritmo levou a uma configuração na qual, por ter um volume máximo limitado, foi preferível diminuir o número de tirantes e aumentar a seção daqueles mais próximos ao mastro. As métricas da simulação, apresentadas na Figura 69, mostram mais detalhes.

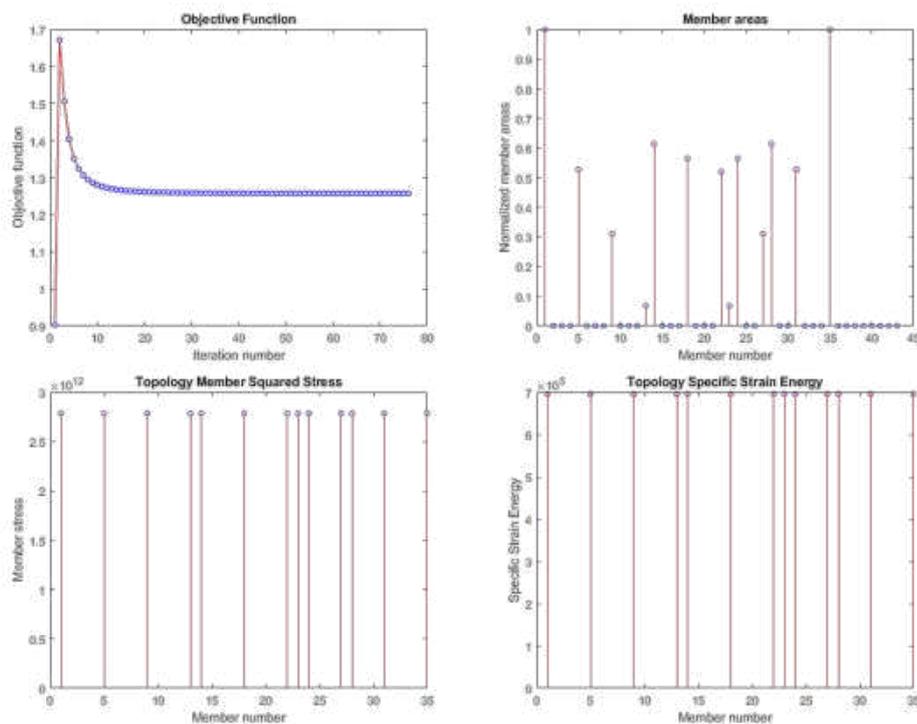


Figura 69 – Métricas da simulação para a carga aplicada de 1×10^9 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso foram necessárias 76 iterações. Percebe-se que o número de iterações não está diretamente ligado à carga aplicada – o que poderia fazer sentido, pois os deslocamentos seriam maiores e seriam necessárias mais iterações para a convergência. A quantidade de iterações está ligada, na verdade, à condição inicial do sistema. Ainda analisando as métricas desta simulação, vemos áreas distintas assim como nas outras situações. Também vemos que a solução encontrada é ótima, visto que as condições de KKT previstas na Equação (45) foram atendidas.

Destaca-se que em todas as três situações, o volume de material utilizado foi máximo, igual a 1×10^{-6} .

5.3.2 Exemplo 9 - Ponte estaiada com custo nodal

Para avaliar os efeitos da estratégia de custo nodal, decidiu-se estudar um exemplo exatamente igual ao anterior, com a carga aplicada de 1×10^8 , conforme a primeira situação. A parcela de custo nodal utilizada foi de $s = 0.25$. Os resultados da topologia final, a serem comparados com a topologia da Figura 64, são mostrados abaixo.

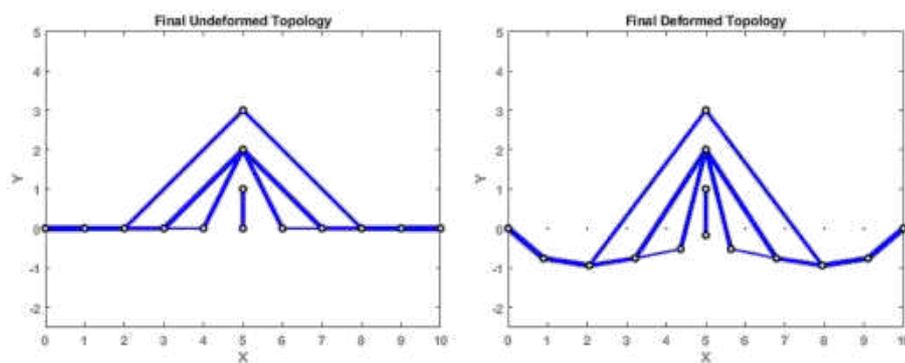


Figura 70 – Arranjo final encontrado para a carga aplicada de $1 \times 10^{+8}$ e custo nodal $s = 0.25$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando os resultados da Figura 64 com os da Figura 70, a primeira diferença notável é que os tirantes mais curtos, próximos à base do mastro, foram eliminados, sendo substituídos por tirantes mais longos, presos ao meio do mastro, em forma de leque. Nas métricas da simulação, presentes abaixo, vê-se que a função objetivo deu um salto com relação à situação sem custo nodal. Isto se deve ao fato que o algoritmo precisa se adaptar à inserção de mais uma restrição ao sistema, e a topologia encontrada neste caso é ótima do ponto de vista das restrições deste problema, mas é menos rígida que a situação com menos restrições (sem custo nodal). Vale destacar mais uma vez que podem existir situações onde seja mais desejável sacrificar um pouco da rigidez do sistema para trazer benefícios do ponto de vista executivo ou orçamentário, por exemplo.

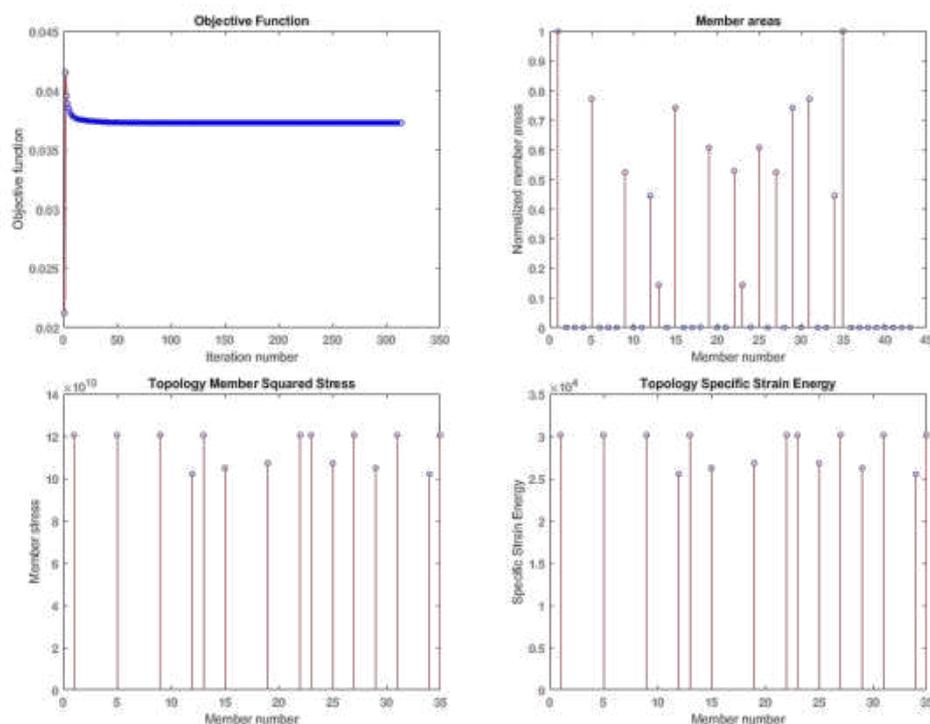


Figura 71 – Métricas da simulação para a carga aplicada de 1×10^8 e custo nodal $s = 0.25$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste exemplo, chama-se mais uma vez atenção para o valor da energia específica de deformação e o valor da tensão ao quadrado. Como visto na Equação (45), para o caso onde $s \neq 0$, o valor destas grandezas não será constante para as barras da topologia final. Destaca-se também que o volume de material utilizado neste exemplo foi menor que o máximo estabelecido. Isto acontece pois a estratégia de custo nodal interfere na restrição de volume, fazendo com que a penalização das barras menores seja feita pelo aumento fictício do seu comprimento, e conseqüentemente do seu volume.

5.4 RESISTÊNCIA LIMITE

5.4.1 Exemplo 10 - Comparação entre as formulações de cabos

Neste seção será feito um exemplo com o objetivo de comparar a formulação de resistência limite proposta neste trabalho com a formulação de cabos proposta por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020). A GS e as condições de contorno do problema são apresentadas na Figura 72.

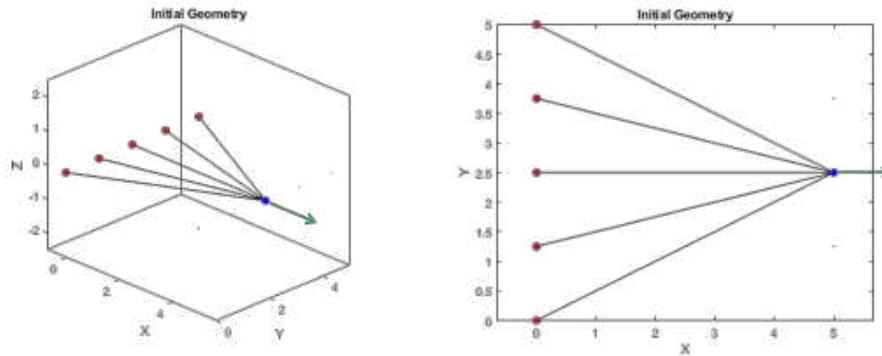


Figura 72 – Vista isométrica e vista superior da GS e das condições de contorno deste exemplo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os quadrados em vermelho são suportes do segundo gênero e o círculo azul é o ponto de aplicação da carga, com direção e sentido ilustrados pela seta em verde. A GS é composta dos cinco elementos apresentados. O módulo de elasticidade para os dois casos é $E = 7 \times 10^{+5}$ e a tensão limite para o modelo constitutivo proposto neste trabalho é $\bar{\sigma}_i = 1.2 \times 10^{+2}$. O exemplo conta apenas com um caso de carga, e não considera custo nodal. As restrições laterais de área são dadas pelo intervalo $[0, \text{variável}]$ em todos os elementos. O valor inicial das áreas dos elementos é dado como 1.7×10^{-2} . O volume máximo de material a ser utilizado é 5×10^{-1} , a carga aplicada foi $F = 10$ e o parâmetro de convergência foi calibrado em $tol = 2 \times 10^{-8}$.

Foram realizadas quatro simulações com valores de A_{max} diferentes, utilizando os dois modelos constitutivos. Percebeu-se que as topologias finais e os valores de áreas transversais dos elementos se mantiveram os mesmos para os dois modelos constitutivos para cada valor de A_{max} , como será mostrado a seguir. Inicialmente, utilizando a restrição lateral de área máxima igual a $A_{max} = 1 \times 10^{-1}$, a topologia encontrada para os dois casos é apresentada na Figura 73.

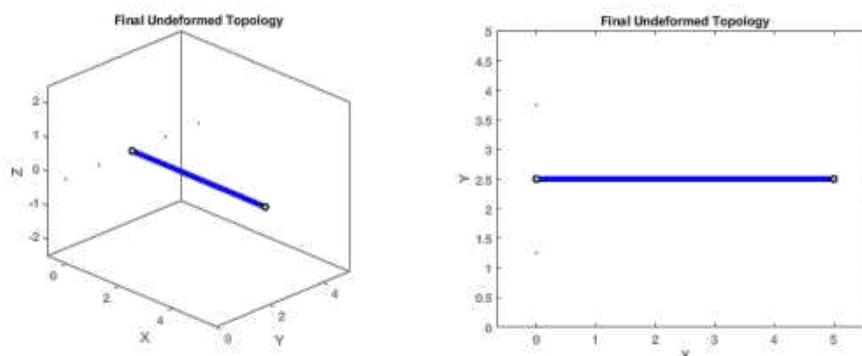


Figura 73 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 1 \times 10^{-1}$ utilizando ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A área final do elemento foi 1×10^{-1} para ambos os modelos. Os valores da função objetivo para os modelos constitutivos foram: sem resistência limite = 3.571×10^{-3} , e com resistência limite = 9.858×10^{-3} . Uma diferença de 176%.

Nas simulações seguintes, as topologias encontradas são apresentadas nas Figuras 74, 77 e 80, juntamente com a evolução das áreas nas respectivas simulações – Figuras 75, 78 e 81 – e os diagramas tensão \times deformação das respectivas simulações – Figuras 76, 79 e 82.

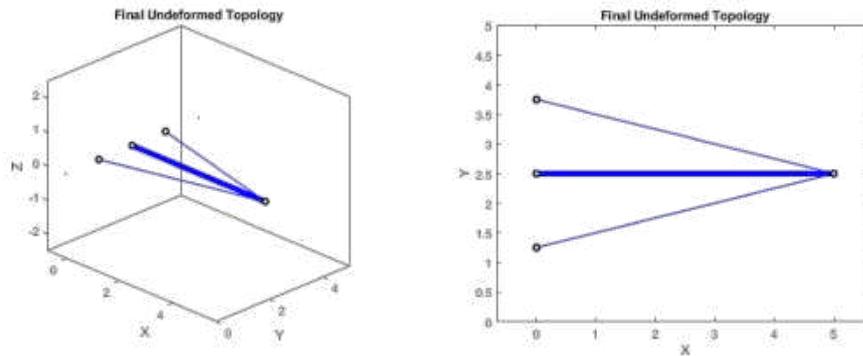


Figura 74 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 9 \times 10^{-2}$ utilizando ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

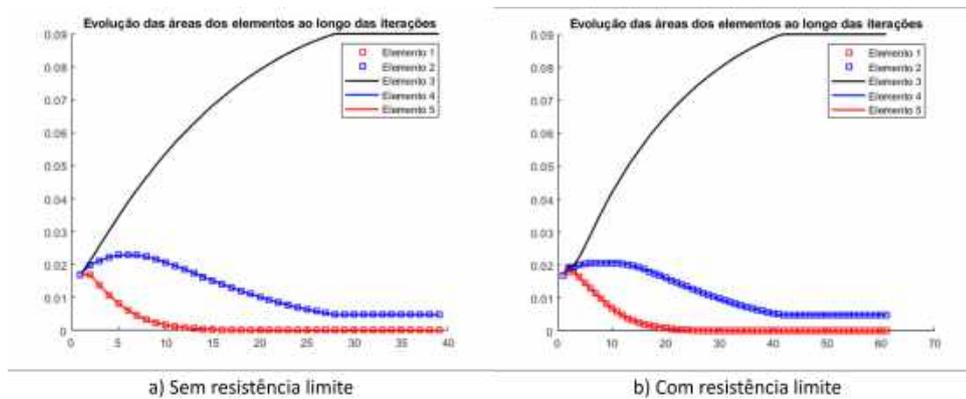


Figura 75 – Evolução das áreas dos elementos para a simulação com $A_{max} = 9 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

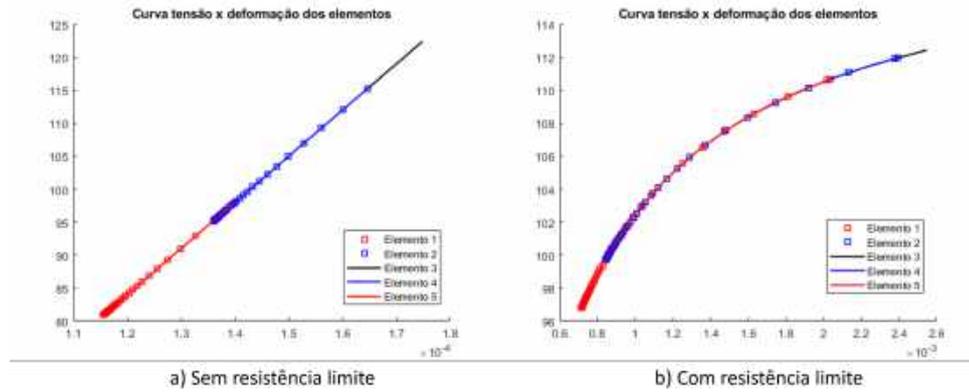


Figura 76 – Diagramas tensão × deformação para os elementos da simulação com $A_{max} = 9 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 1 – Tensão encontrada nos elementos da topologia final da Figura 74.

Elemento	Modelo com resistência limite	Modelo sem resistência limite
2	99.6836	95.2047
3	100.6859	101.1545
4	99.6836	95.2047
Média	100.0177	97.1879
Desvio padrão	0.58	3.44
COV	0.6%	3.5%

As áreas encontradas para os elementos foram as mesmas para os dois modelos constitutivos: $[0, 4.9 \times 10^{-3}, 9.0 \times 10^{-2}, 4.9 \times 10^{-3}, 0]$. Os valores da função objetivo para os modelos constitutivos foram: sem resistência limite = 3.613×10^{-3} , e com resistência limite = 1.012×10^{-2} . Uma diferença de 180%.

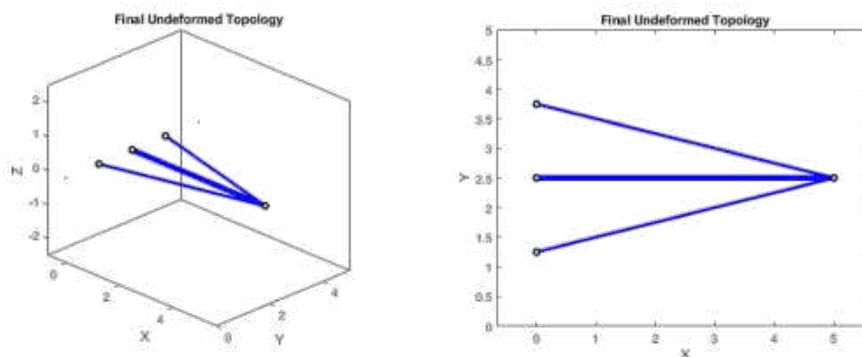


Figura 77 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 6 \times 10^{-2}$ utilizando ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

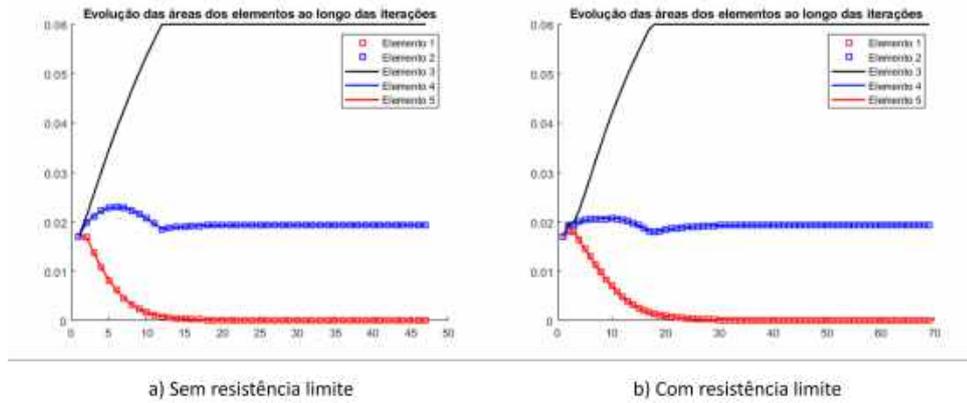


Figura 78 – Evolução das áreas dos elementos para a simulação com $A_{max} = 6 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

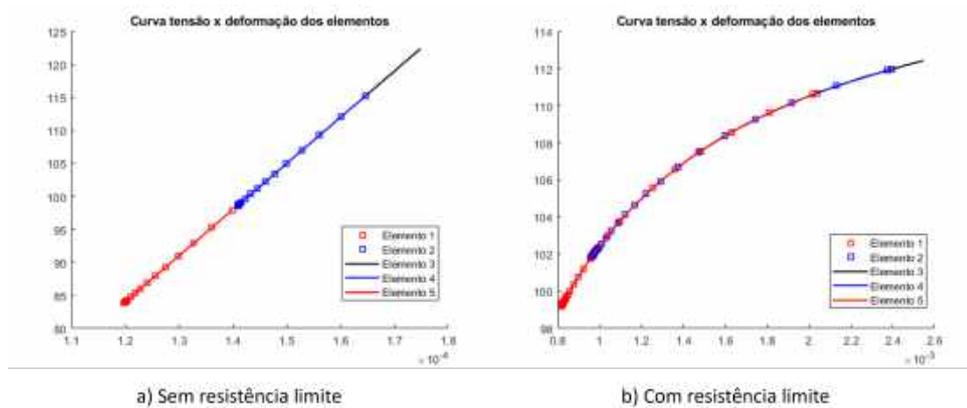


Figura 79 – Diagramas tensão \times deformação para os elementos da simulação com $A_{max} = 6 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Tensão encontrada nos elementos da topologia final da Figura 77.

Elemento	Modelo com resistência limite	Modelo sem resistência limite
2	101.8455	98.6219
3	102.7595	104.7853
4	101.8455	98.6219
Média	102.1501	100.6763
Desvio padrão	0.53	3.56
COV	0.5%	3.5%

As áreas encontradas para os elementos foram as mesmas para os dois modelos constitutivos: $[0, 1.94 \times 10^{-2}, 6.0 \times 10^{-2}, 1.94 \times 10^{-2}, 0]$. Os valores da função objetivo

para os modelos constitutivos foram: sem resistência limite = 3.742×10^{-3} , e com resistência limite = 1.097×10^{-2} . Uma diferença de 193%.

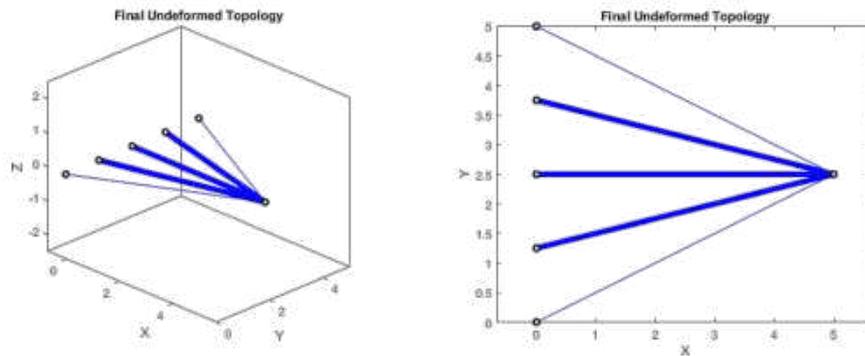


Figura 80 – Vista isométrica e vista superior da topologia final para a simulação com $A_{max} = 3.2 \times 10^{-2}$ utilizando ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

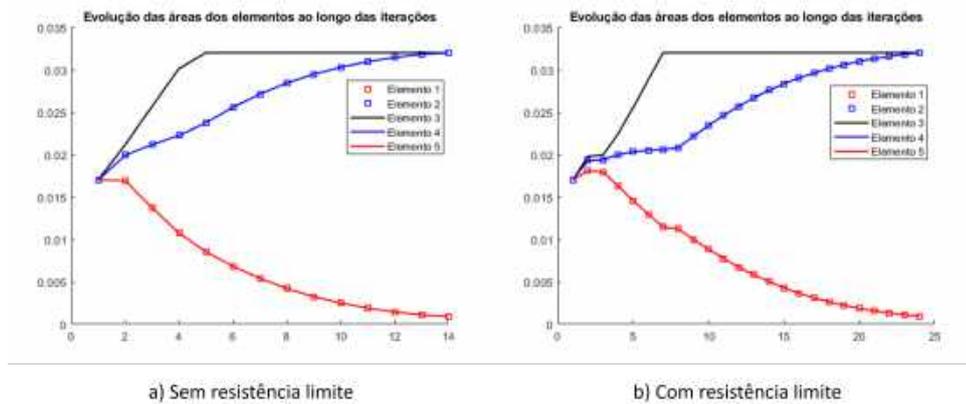


Figura 81 – Evolução das áreas dos elementos para a simulação com $A_{max} = 3.2 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

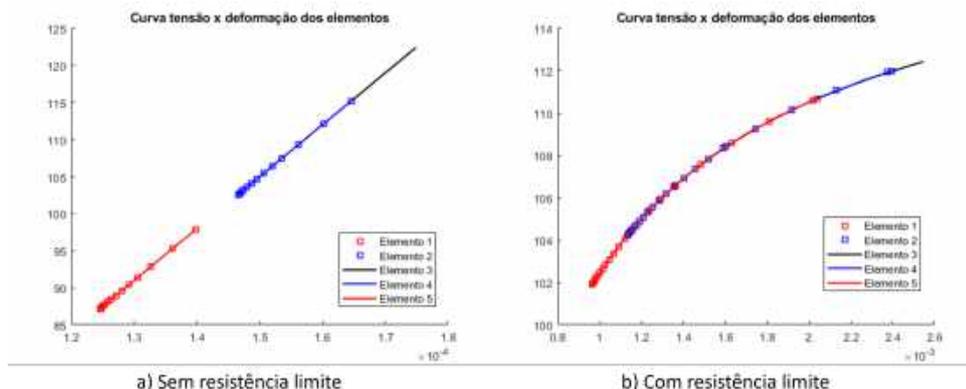


Figura 82 – Diagramas tensão × deformação para os elementos da simulação com $A_{max} = 3.2 \times 10^{-2}$ em ambos os modelos constitutivos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Tensão encontrada nos elementos da topologia final da Figura 80.

Elemento	Modelo com resistência limite	Modelo sem resistência limite
1	101.8817	87.2059
2	104.2414	102.5941
3	105.0525	109.0057
4	104.2414	102.5941
5	101.8817	87.2059
Média	103.4597	97.7211
Desvio padrão	1.48	9.95
COV	1.4%	10.2%

As áreas encontradas para os elementos foram as mesmas para os dois modelos constitutivos: $[9.0 \times 10^{-4}, 3.2 \times 10^{-2}, 3.2 \times 10^{-2}, 3.2 \times 10^{-2}, 9.0 \times 10^{-4}]$. Os valores da função objetivo para os modelos constitutivos foram: sem resistência limite = 3.893×10^{-3} , e com resistência limite = 1.207×10^{-2} . Uma diferença de 210%.

Em cada uma das simulações o valor de A_{max} foi diminuindo, com o intuito de obrigar o algoritmo a encontrar topologias diferentes que equilibrem a estrutura dado o aumento da esbelteza dos elementos. Em todos os casos, com ambos os modelos constitutivos, o elemento mais carregado foi o elemento central, que naturalmente oferece mais resistência à estrutura, dada sua posição. A diferença mais notável entre os modelos constitutivos se deu na tensão nos outros elementos, como mostram as Tabelas 1, 2 e 3.

Percebe-se que para esse exemplo o modelo com resistência limite distribuiu melhor os esforços em todos os elementos, dado que as tensões obtidas nas topologias finais tiveram um coeficiente de variação menor, sendo 1.4% o valor máximo encontrado para os exemplos. Já no modelo sem resistência limite, o coeficiente de variação medido no pior caso foi de

10.2%, o que mostra que esse modelo tende a atribuir mais responsabilidade estrutural a alguns elementos do que a outros.

Além disso, o modelo com resistência limite obteve estruturas menos rígidas que o modelo proposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2020) em todos os casos deste exemplo. Essa situação está de acordo com o que se espera, visto que materiais reais têm limites de falha, e portanto não podem oferecer resistência a todas as solicitações que forem sujeitos. A diferença nos valores das funções objetivos torna evidente a importância de se considerar modelos mais próximos à realidade para análises mais cuidadosas. Desta forma, pode-se dizer que o modelo constitutivo proposto neste trabalho é uma alternativa mais adequada para simular materiais levando em consideração sua capacidade resistiva.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A otimização topológica é uma técnica de grande relevância para a engenharia de estruturas. Com base nela é possível conceber projetos de estruturas com características específicas potencializadas, como o menor uso de volume, o menor custo monetário, a menor complexidade executiva, entre outros.

Dado que o método tradicional de projeto de estruturas baseia-se na intuição e experiência do profissional projetista e em uma abordagem de tentativa e erro, as ferramentas de otimização topológica podem ser uma forma de quebrar esse paradigma, tornando a concepção de projeto menos vinculada ao projetista e mais vinculada ao projeto.

A formulação matemática envolvida no processo de otimização topológica permite obter topologias otimizadas de acordo com os critérios definidos, que seguem uma estrutura matemática de busca pela potencialização dessas características, e que inclusive permite – de forma qualitativa – avaliar se os resultados obtidos são ótimos ou não do ponto de vista dos critérios estabelecidos.

Neste trabalho, dentro da otimização de estruturas, destacam-se as estruturas compostas por cabos, que são elementos de barra que resistem somente a esforços de tração axial. Essas estruturas estão presentes na construção civil na forma, sobretudo, de tirantes.

Na literatura disponível sobre o assunto foram encontradas referências que apresentaram a formulação de otimização topológica de cabos considerando deformações finitas. Neste trabalho buscou-se, a partir dessas referências, desenvolver uma formulação topológica de cabos considerando deformações finitas, que considera também a possibilidade de múltiplos casos de carregamento, cabos com resistência limite e também uma estratégia para tornar as topologias encontradas menos complexas, mencionada aqui como estratégia de custo nodal.

A estratégia de múltiplos casos de carregamento se mostra muito útil para as situações reais de projeto de Engenharia, nas quais as estruturas são solicitadas por diversas combinações de ações, de forma a avaliar seus Estados Limite Último e de Serviço.

A estratégia de custo nodal também se mostra importante para a obtenção de estruturas o mais exequíveis possível, pois apesar de não ser o objetivo principal deste trabalho, as formulações de otimização topológica têm o potencial de serem usadas já como estruturas finais, e não como concepção inicial de projeto, como este trabalho se propõe a estudar. De todas as formas, a estratégia de custo nodal se mostra válida para o controle da complexidade da topologia final otimizada.

Já a formulação de cabos com resistência limite se mostrou excelente na comparação com a formulação de cabos proposta pelas referências, no que diz respeito ao comportamento real dos materiais. A formulação com resistência limite obteve as mesmas topologias e

elementos com os mesmos valores de área da formulação de referência, mas com a vantagem de ser uma formulação que leva em consideração o limite de resistência dos materiais, se mostrando uma formulação mais adequada para o uso em projetos reais de Engenharia.

Após validar resultados da implementação realizada com os resultados de referência, foram incorporadas as melhorias citadas nos parágrafos anteriores e realizados exemplos de teste para explorar as funcionalidades da nova formulação. Os resultados mostraram que as ferramentas de otimização topológica podem ser usadas como ferramentas de concepção inicial de projeto, sugerindo topologias otimizadas por um método matemático, e que têm o potencial de fugir do padrão do que normalmente é projetado, destravando a criatividade do projetista.

Destaca-se que sistemas estruturais compostos somente por elementos de cabo são muito raros, e que o mais comum é que os mesmos sejam aplicados nesses sistemas associados a materiais com grande resistência à compressão, como é o caso do aço e concreto. Dessa forma, os exemplos avaliados neste trabalho são naturalmente limitados. Entretanto, os resultados encontrados nos exemplos mostram que a formulação proposta está condizente matematicamente, e que permite a aplicação em situações mais elaboradas e associadas à prática de projeto.

Portanto, a formulação proposta neste trabalho pode ser utilizada como ponto de partida em projetos de construção civil como pontes estaiadas e torres de telecomunicação com ressalvas, e tem o potencial de ser desenvolvida, incluindo elementos que resistam também à compressão e explorando mais possibilidades práticas.

Referências

- ACHTZIGER, W. On simultaneous optimization of truss geometry and topology. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 285 – 304, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-015-1260-x>>. Citado na página 21.
- BBC Brasil. **Como o hobby de um engenheiro japonês solucionou um grande problema no trem-bala**. 2017. Online; acesso em 18 de Maio de 2020. Disponível em: <<https://www.bbc.com/portuguese/geral-42193691#orb-banner>>. Citado na página 2.
- BENDSØE, M. P.; BEN-TAL, A.; ZOWE, J. Design complexity control in truss optimization. **Structural optimization**, p. 141 – 159, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01742459>>. Citado na página 20.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. ISBN 978-3-642-07698-5,978-3-662-05086-6. Citado na página 30.
- CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009. ISBN 978-1-4020-8666-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8666-3_1>. Citado na página 26.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 1. Citado na página 12.
- DICIO. **Cabo**. 7Graus, 2020. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/cabo/>>. Citado na página 7.
- DICIO. **Otimização**. 7Graus, 2020. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/otimizacao/>>. Citado na página 1.
- GROENWOLD, A. A.; ETMAN, L. F. P. On the equivalence of optimality criterion and sequential approximate optimization methods in the classical topology layout problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 73, n. 3, p. 297–316, 2008. Citado na página 30.
- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. Dordrecht: Springer-Science+Business Media, 1992. ISBN 978-0-7923-1505-6. Citado na página 27.
- HE, L.; GILBERT, M. Rationalization of trusses generated via layout optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 677 – 694, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-015-1260-x>>. Citado na página 21.
- KLARBRING, A.; STRÖMBERG, N. A note on the min-max formulation of stiffness optimization including non-zero prescribed displacements. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 45, p. 147 – 149, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-011-0674-3>>. Citado na página 24.
- KROG, L.; TUCKER, A.; ROLLEMA, G. Application of topology, sizing and shape optimization methods to optimal design of aircraft components. In: . [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 3.

- LEAL, M. **Ponte Octavio Frias de Oliveira em São Paulo, no Brasil**. 2008. Online; acesso em 26 de Agosto de 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Ponte_estaiada_Octavio_Frias_-_Sao_Paulo.jpg>. Citado na página 66.
- ORTIZ, M. R. D. **Bridge Juscelino Kubitschek (Ponte JK), Brasilia, D.F. Brazil, 2007**. 2007. Online; acesso em 26 de Agosto de 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:BSB_Ponte_JK_Panorama_05_2007_266.jpg>. Citado na página 66.
- PARKES, E. Joints in optimum frameworks. **International Journal of Solids and Structures**, p. 1017 – 1022, 1975. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90044-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90044-X)>. Citado na página 21.
- PEDERSEN, P. On the optimal layout of multi-purpose trusses. **Computers & Structures**, p. 695 – 712, 1972. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(72\)90032-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(72)90032-6)>. Citado na página 21.
- PICK-UPAU. **A tecnologia vinda da natureza**. 2018. Online; acesso em 18 de Maio de 2020. Disponível em: <https://www.pick-upau.org.br/ong/noticias/noticias_2018/2018.05.06_ong-materia-biomimetica-martim-pescador/materia-biomimetica-martim-pescador.htm>. Citado na página 2.
- PRAGER, W. A note on discretized michell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, p. 349 – 355, 1974. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90019-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90019-X)>. Citado na página 21.
- RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Convex topology optimization for hyperelastic trusses based on the ground-structure approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 287 – 304, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-014-1147-2>>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 24, 26 e 27.
- RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Filtering structures out of ground structures – a discrete filtering tool for structural design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 95 – 116, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-015-1390-1>>. Citado na página 29.
- REBEL, W. **Gare do Oriente, Lisboa, Portugal**. 2011. Online; acesso em 24 de Agosto de 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gare_do_Oriente#/media/Ficheiro:Gare_do_Oriente_0540.jpg>. Citado na página 7.
- SANDERS, E. D.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. A maximum filter for the ground structure method: An optimization tool to harness multiple structural designs. **Engineering Structures**, v. 151, p. 235 – 252, 2017. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029617303322>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- SANDERS, E. D.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Topology optimization of tension-only cable nets under finite deformations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 1615 – 1488, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-020-02513-7>>. Citado 17 vezes nas páginas , 9, 10, 12, 13, 16, 20, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 73 e 80.
- STROMBERG, L. et al. Application of layout and topology optimization using pattern gradation for the conceptual design of buildings. **Structural and Multidisciplinary**

Optimization, v. 43, p. 165 – 180, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-010-0563-1>>. Citado na página 6.

TIZIO. **Schematic view of a harp-type bridge**. 2007. Online; acesso em 26 de Agosto de 2021. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bridge-harp-cable-stayed.svg>>. Citado na página 65.

TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Design complexity control in truss optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 289 – 299, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-016-1403-8>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

WIKIPÉDIA. **Benchmark (computação) — Wikipédia, a enciclopédia livre**. 2021. Online; acesso em 26 de Agosto de 2021. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Benchmark_\(computa%C3%A7%C3%A3o\)&oldid=61821323](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Benchmark_(computa%C3%A7%C3%A3o)&oldid=61821323)>. Citado na página 31.

WOLFE, P. Convergence conditions for ascent methods. **SIAM Review**, v. 11, n. 2, p. 226–235, 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1011036>>. Citado na página 29.

YANG, R. J.; CHAHANDE, A. I. Automotive applications of topology optimization. **Structural optimization**, v. 9, p. 245–249, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01743977>>. Citado na página 3.

ZHANG, X.; RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Material nonlinear topology optimization using the ground structure method with a discrete filtering scheme. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 2045 – 2072, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-016-1627-7>>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 26 e 29.