

Universidade Federal de Alagoas  
Centro de Tecnologia  
Doutorado em Materiais

Christiano Augusto Ferrario Várady Filho

**Análise Elastoplástica de Meios Bidimensionais com  
Microestrutura Porosa Periódica**

Maceió  
2021

Christiano Augusto Ferrario Várady Filho

**Análise Elastoplástica de Meios Bidimensionais com  
Microestrutura Porosa Periódica**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado  
em Materiais da Universidade Federal de  
Alagoas como requisito para obtenção do título  
de Doutor em Ciência dos Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Márcio André Araújo  
Cavalcante

Maceió

2021

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

V287a Várady Filho, Christiano Augusto Ferrario.  
Análise elastoplástica de meios bidimensionais com microestrutura porosa  
periódica / Christiano Augusto Ferrario Várady Filho. – 2021.  
97 f. : il.

Orientador: Márcio André Araújo Cavalcante.  
Tese (doutorado em Materiais) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de  
Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Materiais. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 93-97.

1. *Transformation Field Analysis*. 2. Materiais porosos - Microestrutura. 3.  
Modelagem de materiais. I. Título.

CDU: 62-181.48

**Christiano Augusto Ferrario Várady Filho**

**Análise Elastoplástica de Meios Bidimensionais com  
Microestrutura Porosa Periódica**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Materiais da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 31 de Agosto de 2021.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante (Orientador – PPGMateriais/UFAL)



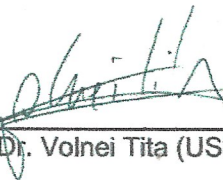
---

Prof. Dr. William Wagner Matos Lira (CTEC/UFAL)



---

Prof. Dr. Francisco Patrick Araújo Almeida (CTEC/UFAL)



---

Prof. Dr. Volnei Tita (USP)



---

Prof. Dr. José Júlio de Cezqueira Pituba (UFG)

*“Cumpro saber que o vento é compósito. Acredita-se que o vento é simples; engano. Essa força não é somente dinâmica, é química; não somente é química, é magnética. [...] O vento é tão elétrico quando aéreo.”*

*Victor Hugo, Os Trabalhadores do Mar.*

# RESUMO

Os avanços da tecnologia permitiram o surgimento de uma nova geração de materiais compósitos avançados, projetados para atendimento de requisitos bastante específicos da indústria moderna. Nos últimos anos, percebe-se um grande esforço voltado para o entendimento e a descrição do comportamento de materiais compósitos/porosos periódicos ou estatisticamente homogêneos por meio de diversas técnicas de simulação computacional. No contexto da descrição do comportamento mecânico, pode-se citar como um desafio a relação entre o desempenho e precisão da técnica e o custo computacional da análise realizada. Nesse sentido, o presente trabalho visa analisar o comportamento mecânico elastoplástico de meios bidimensionais com microestrutura porosa periódica empregando a abordagem da *Transformation Field Analysis* (TFA) como uma alternativa à análise convencional em elementos finitos, além de avaliar seu custo-benefício. Além do estudo das formulações necessárias, implementa-se um ambiente computacional em elementos finitos acoplado à TFA e realiza-se uma avaliação da sua precisão e do tempo computacional dispendido. As análises realizadas consideram a micromecânica do material, com obtenção dos parâmetros constitutivos efetivos do material heterogêneo periódico e tensões e deformações médias nos elementos finitos que compõem a malha do domínio discretizado de análise. Para tal, calculam-se os Tensores de Concentração de Deformações e os Tensores de Influência, necessários às análises realizadas via TFA. Também é realizado um estudo sobre as superfícies de plastificação de meios bidimensionais com microestrutura porosa periódica, considerando-se diferentes geometrias e arranjos para os furos. Com isso, pode-se observar cenários interessantes de aplicação da técnica bem como seu desempenho na obtenção do campo de deformações plásticas locais. Além disso, pode-se constatar que houve um ganho significativo no tempo de processamento necessário para geração de superfícies de plastificação em comparação à análise convencional empregando o método dos elementos finitos.

**Palavras-chaves:** *Transformation Field Analysis*, Microestrutura porosa, Modelagem de Materiais.

# ABSTRACT

Advances in technology allowed the development of a new generation of advanced composite materials designed to meet particular requirements created by modern industry. In recent years, there has been a great effort to understand and describe the behavior of periodic or statistically homogeneous composite and porous materials through various computer simulation techniques. Regarding mechanical behavior evaluation, it can be mentioned the challenge of relating the performance and accuracy of the numerical technique and the computational cost of the analysis. The present work evaluates the elastoplastic mechanical behavior of two-dimensional media with periodic porous microstructure using the Transformation Field Analysis (TFA) approach as an alternative to FEM and assesses its cost-effectiveness. A finite element computational environment is implemented, integrated with the formulation mentioned above, and an evaluation of its accuracy and computational time is carried out. The analyzes take into account the micromechanics of the material, obtaining the effective constitutive parameters of the periodic heterogeneous material and average stresses and strains in the finite elements that compose the mesh of the discretized domain of analysis. For this purpose, we assessed the Strain Concentration and Influence Tensors, which are necessary for applying the TFA. Next, a study is conducted on the plastic surfaces of two-dimensional media with periodic porous microstructure, considering different geometries and arrangements for the holes. Thus, it was possible to observe interesting scenarios for applying the technique and its performance in obtaining local plastic strain fields. In addition, it can also be seen that there was a significant gain in the processing time needed to generate plastic surfaces compared to conventional analysis using the finite element method.

**Keywords:** Transformation Field Analysis; Porous microstructure; Materials modelling.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Macroetapas da tese. . . . .	19
Figura 2.1 – Esquema do problema a ser avaliado. . . . .	31
Figura 2.2 – Exemplo de malha em elementos finitos de uma RUC para arranjo quadrangular. . . . .	33
Figura 2.3 – Elemento finito de treliça com 2 graus de liberdade por nó. . . . .	34
Figura 2.4 – Elemento finito isoparamétrico deformado. . . . .	36
Figura 2.5 – Esquemática da Superposição de campos na TFA. . . . .	40
Figura 2.6 – Decomposição da superposição de campos no TFA. . . . .	41
Figura 2.7 – Apresentação do cálculo dos tensores de concentração de deformação. . . . .	43
Figura 2.8 – Apresentação do cálculo dos tensores de influência. . . . .	44
Figura 2.9 – Fluxograma da análise elastoplástica. . . . .	45
Figura 3.1 – Discretizações do domínio com elementos quadrilaterais. . . . .	49
Figura 3.2 – Elemento quadrilateral de grau 5. . . . .	50
Figura 3.3 – Restrições de deslocamentos dos modelos. . . . .	50
Figura 3.4 – Carregamentos macroscópicos para tração uniaxial e cisalhamento puro. . . . .	51
Figura 3.5 – Resposta macroscópica para tração uniaxial empregando análise convencional em MEF e integração TFA/MEF. . . . .	52
Figura 3.6 – Campos de deformações plásticas efetivas para tração uniaxial. . . . .	53
Figura 3.7 – Campos de tensões normais horizontais para tração uniaxial. . . . .	54
Figura 3.8 – Campos de tensões cisalhantes para tração uniaxial. . . . .	55
Figura 3.9 – Resposta macroscópica para cisalhamento puro empregando análise convencional em MEF e integração TFA/MEF - Cisalhamento Puro. . . . .	56
Figura 3.10–Campos de deformações plásticas efetivas para cisalhamento puro. . . . .	57
Figura 3.11–Campos de tensões normais horizontais para cisalhamento puro. . . . .	58
Figura 3.12–Campos de tensões cisalhantes para cisalhamento puro. . . . .	59
Figura 3.13–Base do experimento feito em Öchsner e Lamprecht (2003). . . . .	60
Figura 3.14–Malhas geradas para a fração de vazios de 19% com as distribuições de elementos lineares (pretos), quadráticos (vermelhos) e de quinta ordem (azuis). . . . .	61
Figura 3.15–Razão volumétrica de 19% . . . . .	62
Figura 3.16–Razão volumétrica de 28% . . . . .	62
Figura 3.17–Custo computacional em segundos das análises numéricas baseadas no experimento de Ochsner. . . . .	64
Figura 4.1 – Meios porosos e suas respectivas células unitárias. . . . .	69
Figura 4.2 – Superfícies de plastificação geradas pelo MEF e pela TFA para arranjo hexagonal com furo circular. . . . .	70



Figura 4.3 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	71
Figura 4.4 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	72
Figura 4.5 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°. . . . .	72
Figura 4.6 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°. . . . .	72
Figura 4.7 – Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular. . . . .	73
Figura 4.8 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	73
Figura 4.9 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	74
Figura 4.10–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°. . . . .	74
Figura 4.11–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°. . . . .	74
Figura 4.12–Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo hexagonal com furo hexagonal. . . . .	75
Figura 4.13–Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	75
Figura 4.14–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	76
Figura 4.15–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°. . . . .	76
Figura 4.16–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°. . . . .	76
Figura 4.17–Superfícies de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo quadrado. . . . .	77
Figura 4.18–Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	77
Figura 4.19–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	78
Figura 4.20–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°. . . . .	78
Figura 4.21–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°. . . . .	78
Figura 4.22–Superfícies de plastificação geradas empregando TFA. . . . .	79
Figura 4.23–Superfícies de plastificação geradas pelo MEF e TFA para arranjo hexagonal com furo circular. . . . .	80
Figura 4.24–Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	81
Figura 4.25–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	82
Figura 4.26–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°. . . . .	82
Figura 4.27–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°. . . . .	82
Figura 4.28–Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular. . . . .	82
Figura 4.29–Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	83
Figura 4.30–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	83
Figura 4.31–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°. . . . .	83
Figura 4.32–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°. . . . .	83
Figura 4.33–Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular. . . . .	84
Figura 4.34–Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . .	84
Figura 4.35–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°. . . . .	85

Figura 4.36–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45° . . . . .	85
Figura 4.37–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60° . . . . .	85
Figura 4.38–Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular. . . . .	86
Figura 4.39–Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos. . . . .	86
Figura 4.40–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30° . . . . .	87
Figura 4.41–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45° . . . . .	87
Figura 4.42–Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60° . . . . .	87
Figura 4.43–Superfícies de plastificação geradas usando TFA. . . . .	88

# LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Propriedades do material usado na análise elastoplástica. . . . .	48
Tabela 3.2 – Quantidade de nós para cada malha por tipo de elemento. . . . .	49
Tabela 3.3 – Divergência relativa entre análise convencional em MEF e integração TFA/MEF - Tração Uniaxial. . . . .	52
Tabela 3.4 – Divergência relativa entre análise convencional em MEF e integração TFA/MEF - Cisalhamento Puro. . . . .	56
Tabela 3.5 – Níveis de discretização e subdivisões do domínio por elemento. . . . .	60
Tabela 3.6 – Diferenças relativas entre resultados numéricos e experimentais para fração de vazios de 19%. . . . .	62
Tabela 3.7 – Diferenças relativas entre resultados numéricos e experimentais para fração de vazios de 28%. . . . .	63
Tabela 3.8 – Tempo computacional em segundos das análises com fração de vazios de 19%. . . . .	64
Tabela 3.9 – Valores percentuais dos custos em relação ao tempo da análise convencional para frações de vazios de 19%. . . . .	64
Tabela 3.10–Tempo computacional em segundos das análises com fração de vazios de 28%. . . . .	65
Tabela 3.11–Valores percentuais dos custos em relação ao tempo da análise convencional para frações de vazios de 19%. . . . .	65
Tabela 3.12–Tempo computacional gasto no cálculo dos tensores de concentração de de- formações e de influência (em segundos). . . . .	66

# LISTA DE SÍMBOLOS

$e/\hat{e}$	Designação de um elemento finito
$A$	Área
$dA$	Elemento infinitesimal de área
$A^{(e)}$	Tensor de concentração de deformações de um elemento $e$ (Tensor de Hill)
$B^{(e)}$	Tensor de concentração de tensões de um elemento $e$
$\bar{B}^{(e)}$	Tensor de deformação média de um elemento $e$
$b_i$	Forças de corpo
$C$	Tensor constitutivo
$C^*$	Tensor constitutivo macroscópico/efetivo
$D^{(e,\hat{e})}$	Tensor de influência de um elemento $e$ em relação a um elemento $\hat{e}$
$d$	Distância característica de célula unitária
$f_e$	Razão volumétrica de inclusão/vazios
$Err_{abs}$	Erro absoluto
$Err_{rel}$	Erro relativo
$k$	Índice associado a uma iteração
$N(x)$	Funções interpoladoras do elemento finito / Polinômios de Lagrange
$i, m$	Indicativos de inclusão e matriz
$N_k$	Designação das funções de interpolação de um elemento finito
$S$	Tensor de conformidade do material
$T$	Tensão de superfície
$t_i$	Forças de superfície
$u$	Vetor deslocamento
$\bar{u}$	Vetor deslocamento homogêneo

$\tilde{u}$	Vetor deslocamento flutuante
V	Volume
W	Trabalho
$x, y$	Sistema de coordenadas
$\Gamma$	Contorno do modelo
$\Gamma^\sigma$	Contorno do modelo onde existem tensões aplicadas
$\delta$	Operador virtual
$\epsilon$	Deformação
$\bar{\epsilon}$	Deformação média
$\tilde{\epsilon}$	Deformação flutuante
$\epsilon^P$	Deformação plástica
$\bar{\epsilon}^P$	Tensor deformação plástica macroscópica
$\bar{\epsilon}_{eq}^P$	Deformação plástica equivalente macroscópica
$d\bar{\epsilon}_{ef}$	Incremento de deformação macroscópica efetiva
$\eta, \xi$	Sistema de coordenadas local de um elemento finito
$\lambda$	Autotensão
$\mu$	Autodeformação
$\sigma$	Tensão
$\bar{\sigma}$	Tensão média
$\bar{\sigma}^P$	Tensor tensão plástica macroscópica

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>18</b>
1.1.1	Objetivos Específicos	18
<b>1.2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>18</b>
<b>1.3</b>	<b>Revisão de Literatura</b>	<b>20</b>
1.3.1	Método dos Elementos Finitos (MEF)	20
1.3.2	Micromecânica de Materiais	22
1.3.3	<i>Transformation Field Analysis</i> - TFA	25
<b>1.4</b>	<b>Contribuições da Tese</b>	<b>27</b>
<b>1.5</b>	<b>Estrutura</b>	<b>27</b>
<b>1.6</b>	<b>Delimitação do Trabalho</b>	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Micromecânica dos Campos Médios</b>	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Descrição do Problema</b>	<b>31</b>
2.2.1	Condições de Contorno Periódicas	32
<b>2.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos - MEF</b>	<b>33</b>
2.3.1	Elemento Finito Lagrangeano Quadrilateral Generalizado	35
2.3.2	MEF para Condições de Contorno Periódicas	36
<b>2.4</b>	<b><i>Transformation Field Analysis</i> - TFA</b>	<b>39</b>
2.4.1	Princípio da Superposição de Efeitos	39
2.4.2	Autotensões e Autodeformações	39
<b>2.5</b>	<b>Integração da TFA com Elementos Finitos</b>	<b>42</b>
2.5.1	Avaliação dos Tensores de Concentração	43
2.5.2	Cálculo dos Tensores de Influência	43
2.5.3	Formulação da Análise Elastoplástica	44
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES E DISCUSSÃO</b>	<b>48</b>
<b>3.1</b>	<b>Verificação Numérica</b>	<b>51</b>
3.1.1	Tração Uniaxial	51
3.1.2	Cisalhamento Puro	55
<b>3.2</b>	<b>Verificação Macroscópica Experimental</b>	<b>59</b>
<b>3.3</b>	<b>Custo Computacional</b>	<b>63</b>
<b>4</b>	<b>SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO</b>	<b>67</b>
<b>4.1</b>	<b>Definição</b>	<b>67</b>

<b>4.2</b>	<b>Resultados</b> . . . . .	<b>69</b>
4.2.1	Superfícies de Plastificação para Tensões Normais . . . . .	70
4.2.2	Superfícies de Plastificação para Tensões Normal e de Cisalhamento	79
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>5.1</b>	<b>Sugestões de Trabalhos Futuros</b> . . . . .	<b>91</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>93</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os avanços da tecnologia motivaram o aparecimento de uma nova geração de materiais estruturais avançados, fabricados para atendimento das necessidades específicas dos modernos setores industriais. Nesse contexto, são encontrados materiais fabricados a partir da composição de outros materiais (chamados materiais compósitos) ou fabricados a partir da inclusão de porosidades em materiais inicialmente maciços (chamados materiais porosos). Em ambos os casos, busca-se otimizar algum aspecto relevante para uma determinada aplicação.

A principal vantagem dos materiais compósitos consiste na sua capacidade de integrar as melhores qualidades de seus constituintes, assim como características desejáveis não apresentadas por cada constituinte individualmente. Por exemplo, materiais compósitos estruturais apresentam como principal característica as suas altas relações resistência/ peso e rigidez/ peso, o que justifica, nas últimas décadas, o seu intenso emprego nas indústrias aeroespacial, automobilística e naval. Exemplos comuns desse tipo de material são aqueles que possuem uma matriz em material polimérico e apresentam frações volumétricas de fibras entre 30% a 70% do volume total.

Da mesma forma, materiais porosos buscam otimizar as mesmas relações, atendendo uma característica estratégica para o projeto mecânico. A aplicação de processos avançados de fabricação permite a geração de peças estruturais mais leves que ainda são capazes de atender aos critérios de resistência necessários para sua utilização. Além das vantagens na relação rigidez/ peso, supressão acústica e filtração, materiais desse tipo podem ser usados para fins arquitetônicos, melhorando a passagem de luz e ar. Exemplos estruturais consistem no concreto super-leve, onde bolhas de ar são inseridas em sua composição, ou em chapas de metais porosos, onde diversos furos são inseridos para diminuição do peso do elemento. Por outro lado, aumenta o número de picos de tensão, o que contribui para o desgaste do material. São tipicamente fabricados com padrões uniformes de perfuração de furos com variadas formas e arranjos.

Perfurações reduzem a rigidez do material, pois com a diminuição da quantidade de matéria disposta no meio dificulta a transmissão de esforços internos causados por aplicações de carregamento externo, com ocorrência de concentrações de tensões (KHATAM et al., 2009). Dentro deste contexto, e considerando o bom desempenho dos materiais avançados e consequente interesse do setor industrial nas suas aplicações, nota-se um grande esforço direcionado ao entendimento e a descrição do comportamento desse tipo de material nos últimos anos. Nesse sentido, observa-se o crescimento de pesquisas voltadas para o projeto e desenvolvimento de novos materiais porosos que apresentam melhores características para aplicações cada vez mais sofisticadas.



A avaliação da resistência de materiais avançados, sejam eles porosos ou compósitos, pode ser realizada a partir de formulações semelhantes dentro da área de Micromecânica de Materiais Heterogêneos. Tais formulações, baseadas nos conceitos de elemento de volume representativo (*Representative Volume Element - RVE*) e célula unitária repetida (*Repeating Unit Cell - RUC*), serão detalhadas nas seções seguintes do presente trabalho. Em outro aspecto, diversos modelos computacionais e analíticos vêm sendo empregados para avaliação do comportamento de materiais avançados. Dentre os procedimentos empregados na modelagem computacional de tais materiais, destacam-se aqueles baseados nos métodos dos elementos finitos (MEF) (ZIENKIEWICZ; CHEUNG, 1967) (COOK et al., 1988) (PITUBA et al., 2016) e nos métodos de elementos de contorno (MEC) (EISCHEN; TORQUATO, 1993) (CROZARIOL; FERNANDES, 2020). Ambos dividem o domínio em diversos subdomínios e analisam o comportamento mecânico global a partir das avaliações locais.

Sabe-se que a microestrutura do material possui grande influência na resposta elasto-plástica de meios porosos, assim como a forma e o arranjo do furo possuem impacto significativo na resposta pós-escoamento (KHATAM; PINDERA, 2011). Assim, técnicas avançadas de micromecânica são necessárias para avaliar esses efeitos localizados com precisão. Naturalmente, a avaliação de efeitos locais empregando o MEF e o MEC é influenciada pela quantidade de subdivisões do domínio de análise. O aumento na discretização do domínio gera soluções mais precisas, porém afetam o tempo de processamento da análise (em outras palavras, aumenta o custo computacional). Na literatura, há linhas de pesquisas associadas à otimização dos métodos numéricos que buscam manter ou aumentar a precisão do método sem elevar consideravelmente o custo computacional. Na análise mecânica de materiais compósitos ou porosos, uma alternativa consiste na *Transformation Field Analysis (TFA)*, desenvolvida por Dvorak e que avalia campos inelásticos a partir da superposição de efeitos em cada elemento da discretização ou em cada fase do material.

Nesse cenário, o presente trabalho busca avaliar o comportamento mecânico de meios elastoplásticos porosos empregando uma integração entre a TFA e o MEF. Nesse processo, avalia-se a relação entre a acurácia dos resultados e o custo computacional associado visando apresentar modelagens onde a aplicação da TFA produz respostas satisfatórias quando comparada aos métodos numéricos tradicionais.

Adicionalmente, estuda-se a capacidade resistiva para diversos estados de tensão, avaliando-se a superfície de plastificação destes meios porosos empregando a integração entre TFA e MEF. Sua utilização no cálculo de envoltórias de plastificação de materiais é interessante pelos ganhos em desempenho que se pode obter na execução de repetidas análises. Nesse contexto, identificam-se modos característicos de deformação plástica, cujos comportamentos não podem ser descritos por uma única função contínua. Ressalta-se que, conforme demonstra-se na revisão de literatura, a integração TFA/MEF para análise mecânica elastoplástica de meios porosos é pouco encontrada na literatura, assim como são raros os estudos que verifiquem condições

interessantes de aplicação desta técnica em um contexto de avaliação de meios porosos periódicos.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho consiste em avaliar o comportamento plástico de meios porosos periódicos bidimensionais empregando a *Transformation Field Analysis* integrada ao Método dos Elementos Finitos.

### 1.1.1 Objetivos Específicos

Para obtenção do objetivo global, os seguintes objetivos específicos foram executados:

- Desenvolver estudos de casos de meios porosos para realização da análise elastoplástica por meio da TFA baseada em elementos finitos;
- Avaliar a eficiência computacional (convergência de resultados e tempo de processamento) da *Transformation Field Analysis* em comparação com análise convencional em elementos finitos;
- Analisar o comportamento resistivo plástico com geração de envoltórias de plastificação.

Complementando os objetivos, a metodologia apresentada na Seção a seguir define as etapas do presente trabalho.

## 1.2 Metodologia

A execução do trabalho foi realizada em três etapas, baseadas na ordem de execução dos objetivos específicos. A Figura 1.1 apresenta as macroetapas que foram realizadas para alcançar o objetivo principal do trabalho.



Figura 1.1 – Macroetapas da tese.

Fonte: Autor (2021).

A primeira macroetapa do trabalho consistiu na implementação de um ambiente computacional que integre a TFA com uma análise em elementos finitos e um outro ambiente computacional de análise convencional em elementos finitos. Nesse sentido, além da formulação elastoplástica, houve necessidade de implementação de elementos lagrangeanos de grau arbitrário. Com isso, verificou-se a precisão e desempenho dos modelos para elementos finitos que empregam funções interpoladoras de ordem superior. Nesse sentido, foram desenvolvidos modelos computacionais empregando elementos finitos de ordem superior para análise mecânica de materiais periódicos com base no conceito de célula unitária, além do emprego de condições de contorno periódicas com base numa teoria de homogeneização de ordem zero.

A segunda macroetapa foi uma simulação e análise de estudos de casos de meios porosos visando averiguar a ocorrência de fenômenos em nível microestrutural a partir da análise do comportamento macroscópico do material para os cenários de tração uniaxial e cisalhamento puro e dos tensores de concentração de deformações e de influência. Ao mesmo tempo, avaliou-se as vantagens do uso de elementos finitos de ordem mais alta em relação a maiores discretizações empregando-se elementos finitos convencionais. Nesse sentido, foram executadas análises comparativas entre os resultados usando a *Transformation Field Analysis* e os resultados das análises convencionais em Elementos Finitos. Em adição, os resultados foram validados com experimentos encontrados na literatura, bem como executadas análises de desempenho computacional para avaliação de ganhos em tempo de processamento.

A terceira e última macroetapa correspondeu à geração de envoltórias de resistência plástica por meio de uma combinação de malhas e elementos na TFA capaz de gerar resulta-

dos semelhantes à análise convencional em Elementos Finitos. Como a geração da envoltória consiste na aplicação de uma combinação de análises não-lineares em diversos estados de carregamento, conseguiu-se observar o potencial da técnica quanto à precisão e velocidade de processamento.

Para avaliação do caráter de ineditismo do trabalho, apresentam-se revisões de literatura sobre as principais temáticas do trabalho (*transformation field analysis*, micromecânica de materiais heterogêneos e método dos elementos finitos). Diante da abrangência de parte dos temas, as revisões foram direcionadas para aspectos inerentes a este trabalho.

## 1.3 Revisão de Literatura

A área de Micromecânica Computacional de Materiais é cada vez mais abrangente, com diferentes formulações para homogenização, modelagem computacional, análise do comportamento mecânico, entre outras linhas de pesquisa. O Método dos Elementos Finitos, pela sua popularidade e abrangência de linhas de pesquisa, é revisado em algumas das suas principais variações de análise mecânica e respectivas aplicações.

A revisão de materiais compósitos contempla as principais formulações de homogenização e análise mecânica. Ressalta-se que um material poroso pode ser abordado como um material compósito onde há ausência de um segundo tipo de material. Em seguida, apresentam-se os trabalhos referentes à TFA, bem como o estado da arte das temáticas relacionadas à técnica e os principais desafios investigados atualmente.

### 1.3.1 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O emprego do Método de Elementos Finitos para análise do comportamento mecânico de elementos estruturais ocorreu durante os anos 1970. Dentre os primeiros trabalhos, pode-se citar o clássico trabalho de Zienkiewicz et al. (1977), com a formulação e indicações para o emprego do Método. Sua formulação pode ser obtida pelo método de aproximação de Galerkin ou, a partir de uma abordagem energética, empregando-se, por exemplo, o funcional de Rayleigh-Ritz (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Dentre outros pesquisadores que trabalham com o método, pode-se destacar Cook et al. (1988) e Bathe (1996).

A divisão de domínios em elementos e nós sujeitos a deslocamentos finitos seguiu como um passo lógico iniciado com o Método dos Deslocamentos. Sua abordagem matricial facilitou a programação do método em algoritmos computacionais, acelerando a análise de variadas estruturas, com a possibilidade de modelagens nunca antes cogitadas. A escolha do elemento finito a ser utilizado depende da necessidade do modelo e garante ao método uma flexibilidade de aplicação, possibilitando análises termo-mecânicas, de fluxos laminares de fluidos (JOHN, 2016) e de propagações de ondas (OSTACHOWICZ et al., 2012). É interessante ressaltar que a

formulação permite que um modelo complexo seja reduzido a um sistema de equações lineares, que pode ser resolvido usando diversas técnicas diferentes.

Em análises mecânicas, a obtenção de campos de tensões e deformações com grau de precisão aceitável envolve dois tipos de abordagem: a primeira consiste no aumento da quantidade de divisões do domínio, refinando a malha de elementos finitos (refino tipo  $h$ ). Nesse caso, ocorre o aumento da quantidade de nós a serem calculados, o que gera maiores matrizes de rigidez global que precisam ser invertidas para a avaliação dos deslocamentos (COOK et al., 1988). Inicialmente, quando os computadores apresentavam baixo desempenho, esse tipo de refino se tornava rapidamente um impeditivo.

Uma alternativa consistia no aumento do grau dos polinômios usados para a realização das análises (refino tipo  $p$ ). O uso de funções de forma baseadas em funções lagrangeanas permitiu a aplicação de elementos finitos não-lineares para avaliações dos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões mais sofisticados, sem aumentar muito a quantidade de nós e de elementos da malha. Ainda assim, o custo computacional era um gargalo nestas análises, pois o algoritmo para resolução do sistema de equações é custoso. Babuška e Guo (1992), em seu trabalho seminal, apresentaram uma abordagem integrada conhecida como  $hp$ -FEM para o uso dos dois tipos de refino de acordo com a complexidade do campo de tensões.

Dentro do aspecto das análises não lineares empregando o método dos elementos finitos, outras formulações foram desenvolvidas. A não-linearidade pode ser geométrica, com relações cinemáticas não-lineares entre os campos de deslocamentos e de deformações e satisfação das equações de equilíbrio na configuração deformada; material, com relações constitutivas não-lineares (plasticidade com encruamento, por exemplo); de contato, com não-linearidades normal e tangencial; ou relações dependentes do tempo (viscoelasticidade e fluência) (BORST et al., 2012).

A não-linearidade geométrica em análise mecânica pode ser inicialmente definida ao levar-se em consideração a contribuição da parcela não-linear no tensor de deformações de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}), \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{H}$  é o tensor gradiente de deslocamentos. Quando a parcela não-linear  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  é muito pequena, esse termo pode ser desprezado. Essa simplificação é conhecida como o regime de pequenos deslocamentos e de pequenas deformações (MALVERN, 1969).

A eficiência da modelagem não linear geométrica depende da complexidade das funções de forma usadas para caracterizar os campos de deslocamentos, bem como da relação que existe entre os nós de um mesmo elemento. Nesse sentido, além dos elementos lagrangeanos, foi desenvolvido o Método dos Elementos Finitos Espectrais (*Spectral Finite Element Method* - SEM) que integra métodos espectrais na resolução numérica de equações diferenciais par-

ciais (OSTACHOWICZ et al., 2012). No caso do SEM, as soluções são baseadas em séries de Fourier ou polinômios aproximadores, como os polinômios de Chebyshev ou de Lobatto-Gauss-Legendre. Como análise de erros, Schmicker et al. (2014) mostraram as diferenças entre diferentes espaçamentos nodais empregando funções de forma lagrangeanas.

Uma outra abordagem interessante adotada no desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos consiste na sua utilização em múltiplas escalas (*Multiscale Finite Element Method*). Abordagens multiescalares são geralmente utilizadas para resolução de equações diferenciais a partir da decomposição do problema em diferentes níveis de detalhamento (HOU; WU, 1997). Para esse efeito, as funções base são adaptativas às propriedades locais. Geralmente, são utilizados operadores de regularização como o de Tikhonov (NADEEM et al., 2017). Há também o acoplamento do método multiescala com o Método dos Elementos Finitos Ampliados (*Extended Finite Element Method - XFEM*), conforme apresentado em Ren et al. (2017).

O XFEM, como definido em Belytschko et al. (2009), apresenta ferramentas úteis para a análise do comportamento de problemas caracterizados por descontinuidades, singularidades, deformações localizadas e geometrias complexas. Uma das principais vantagens desse método é a independência da morfologia das descontinuidades, uma vez que as fraturas, quando ocorrem, são independentes da malha utilizada. Dessa forma, não há necessidade de nova geração de malha. Conforme apresentado na revisão de Abdelaziz e Hamouine (2008), trata-se de uma adaptação da técnica com base na aplicação da função salto de Heaviside.

No desenvolvimento do *hp*-FEM, Solin et al. (2010) apresentaram uma técnica de desacoplamento das malhas associadas aos elementos mecânicos e térmicos, com processos adaptativos individuais de refino e aumento do grau do elemento. Uma forma interessante de definir a geometria do elemento finito consiste no uso de *Non-Uniform Rational Basis Spline* (NURBS) cuja trajetória foi revisada por Sevilla et al. (2011). Pela sua alta capacidade de conformação aos contornos, o uso de *splines* permite uma maior precisão do modelo. Sevilla et al. (2011) também apresentaram um conjunto de métodos visando o emprego de elementos isoparamétricos.

Uma outra variação do FEM é descrita por Fries (2018), que apresenta o *High-order conformal decomposition FEM* (CDFEM) como uma alternativa ao XFEM. Nesse caso, o domínio do modelo é inserido em uma malha composta por elementos de alta ordem. A geração dessa malha é automática e adaptativa de acordo com a geometria do modelo. O método foi testado com elementos de grau máximo 6 e é estável, eficiente e converge rapidamente em modelos bi e tridimensionais.

### 1.3.2 Micromecânica de Materiais

Pindera et al. (2009), em seu artigo revisional, comenta que a análise micromecânica de meios heterogêneos facilita a compreensão da influência do arranjo e das propriedades físicas das fases do material no seu comportamento macroscópico. Hashin (1983) define material

compósito como uma combinação de dois ou mais materiais que formam regiões grandes o suficiente para serem modelados com um meio contínuo único. Kaw (2006) define materiais compósitos como materiais estruturais compostos por dois ou mais constituintes combinados a nível macroscópico e que não são solúveis entre si. Ainda segundo Kaw (2006), um constituinte é denominado material de reforço, sendo este envolvido pela matriz. Dvorak (2012) complementa dizendo que a heterogeneidade de um compósito é função da escala de mensuração usada para resolver um problema particular, de acordo com os tamanhos dos constituintes do meio.

Segundo Pindera et al. (2009), os materiais compósitos são divididos em duas categorias, de acordo com sua configuração microestrutural. O primeiro caso consiste em no Elemento de Volume Representativo, onde materiais estatisticamente homogêneos apresenta inclusões distribuídas aleatoriamente na matriz, sem apresentar segregação. Dessa forma, pode-se definir o menor volume de material necessário que, quando homogeneizado, possua as mesmas características do meio completo. Nesse sentido, o EVR é passível de modelagem via técnicas de homogeneização. Dessa forma, torna-se possível o emprego do conceito de elemento de volume representativo na avaliação das propriedades macroscópicas destes materiais.

A segunda categoria é a dos materiais compósitos periódicos. Nesse caso, o compósito é constituído por repetições de um padrão de fases, permitindo a avaliação das propriedades macroscópicas por meio de um problema de valor de contorno em uma célula unitária, empregando condições de contorno que refletem a periodicidade do material. A definição de geometrias e materiais avançados, bem como a sofisticação das formulações desenvolvidas, levam ao emprego de ferramentas computacionais capazes de lidar com a complexidade do comportamento mecânico a ser analisado. Os primeiros trabalhos de modelagem de materiais compósitos periódicos buscavam analisar uma única célula contendo fibras circulares organizadas em arranjos retangulares ou hexagonais.

As primeiras análises de materiais compósitos foram realizadas entre os anos 60 e 70, podendo-se destacar os artigos de Hashin e Rosen (1964) e Hill (1963) que contemplam avanços significativos quando comparados aos trabalhos de Voigt (1889) e Reuss (1929). Nessa época, Hill lançou seus artigos clássicos sobre a análise de propriedades mecânicas elásticas (HILL, 1964a) e inelásticas (HILL, 1964b) de materiais reforçados com fibras, culminando com a apresentação do modelo Auto-Consistente (HILL, 1965) aplicado a compósitos unidirecionais. Outra técnica de homogeneização de materiais compósitos é o Método de Mori-Tanaka (MORI; TANAKA, 1973), cuja premissa consiste na deformação média da matriz de um material heterogêneo ser a deformação média do compósito.

Com base em uma abordagem estatística, Gusev (1997) usou o método de Monte Carlo para gerar modelos independentes de compósitos periódicos elásticos e verificou a estacionariedade dos valores médios calculados com o aumento da quantidade de células em um mesmo Elemento de Volume Representativo. Na teoria, essa condição é conhecida como Condição de

Hill (HILL, 1963) na definição de um EVR que emprega uma abordagem energética, tem-se a seguinte relação entre tensão  $\sigma$  e deformação  $\epsilon$  para um material elástico linear:

$$\overline{\sigma} : \overline{\epsilon} = \overline{\sigma} : \overline{\epsilon}, \quad (1.2)$$

onde a barra superior ( $\overline{\sigma}$ , por exemplo) indica uma média espacial no domínio de análise e  $:$  o duplo produto tensorial. Em outros termos, a média do produto das grandezas é igual ao produto das grandezas médias (HAZANOV, 1998). Em uma abordagem mais avançada, Savvas et al. (2016) apresentam um procedimento para determinação do EVR para materiais aleatoriamente heterogêneos. O processo é baseado na solução do problema de valores múltiplos de contorno sob condições de contorno homogêneas em tensão e deformação acoplando o Método de Monte Carlo ao Método dos Elementos Finitos Estendido (*Extended Finite Element Method - XFEM*). São analisadas imagens geradas computacionalmente com disposição aleatória das fibras e cálculo da variação das frações volumétricas localmente. Com isso, este procedimento apresenta uma robustez necessária à avaliação de EVR estatisticamente determinados.

Em outra abordagem, Huet (1990) apresenta uma revisão das principais suposições necessárias à análise micromecânica do material, além de propor um procedimento geral baseado em uma formulação energética para a análise dos parâmetros efetivos de um material heterogêneo quando o conceito de elemento de volume representativo não pode ser aplicado, apresentando diferentes comportamentos com a variação do tamanho do elemento.

As análises costumavam ser restritas a estados de carregamentos para geração de respostas elásticas e inelásticas específicas do material estudado. Para contornar essas limitações, métodos semi-analíticos e soluções numéricas foram desenvolvidos. Um exemplo é o Método Generalizado de Células (*Generalized Cell Method - GMC*), de Paley e Aboudi (1992), posteriormente reformulado por Pindera e Bednarczyk (1999). O GMC foi desenvolvido para permitir a modelagem de células unitárias complexas com incorporação de diferentes leis constitutivas para a resposta local do material.

Outra técnica de homogeneização que pode ser citada trata-se da Teoria de Homogeneização Localmente Exata (*Locally Exact Homogenization Theory - LEHT*), apresentada em Drago e Pindera (2008). O método calcula parâmetros efetivos de células periódicas com base em soluções de problemas elásticos aplicadas localmente. Drago e Pindera (2008) se limitaram a análise de materiais compósitos periódicos com fibras de seção transversal circular orientadas unidirecionalmente, isotrópicas e inseridas em um arranjo quadrilateral. Para a análise paramétrica de materiais transversalmente isotrópicos ou ortotrópicos, necessita-se de um domínio com arranjo hexagonal, problema endereçado em Wang e Pindera (2016).

Outra técnica de homogeneização consiste na *Generalized Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics (GFVDAM)*, apresentada em Cavalcante e Pindera (2016). Em sua versão generalizada, esta técnica emprega um campo de deslocamentos de quarta ordem com o intuito



de promover compatibilidades estática e cinemática entre os subvolumes do domínio discretizado de análise. Esta técnica se baseia na teoria da elasticidade linear e permite a adoção de diferentes relações constitutivas para os materiais que compõem os subvolumes do domínio discretizado.

Para o presente trabalho, a técnica baseada em abordagem micromecânica usada consiste na *Transformation Field Analysis* conforme desenvolvida em Dvorak et al. (1994), que mostra como integrar a técnica para uso em conjunto com o Método dos Elementos Finitos, sendo assim uma alternativa à formulação convencional. A TFA baseia-se no Princípio da Superposição de Efeitos e define campos inelásticos uniformes para avaliação do comportamento mecânico de um modelo.

### 1.3.3 *Transformation Field Analysis* - TFA

A TFA consiste em uma técnica de avaliação de campos inelásticos a partir da superposição de campos uniformes relacionados entre si por tensores de influência. Inicialmente, ela surge como uma alternativa para avaliação não-linear de materiais compósitos nos quais os tensores de influência estavam relacionados com as fases do material. O método foi desenvolvido por Dvorak e é apresentado em um conjunto de artigos publicados no final dos anos 80. Posteriormente, o autor desenvolveu uma integração com o método dos elementos finitos, calculando um tensor para cada elemento.

Dvorak (1986) apresenta um procedimento de decomposição que mostra que campos de deformação elástica uniformes podem ser gerados a partir da superposição de campos uniformes de autodeformações. Com isso, ele mostra a existência de uma relação entre carregamentos térmicos e mecânicos quando as propriedades das fases não dependem de variações da temperatura. Essa correspondência é melhor descrita em Benveniste e Dvorak (1990). Nesse sentido, buscava-se a redução do número de variáveis calculadas e, portanto, a otimização da relação custo-benefício computacional.

A apresentação da formulação baseada na superposição de efeitos é melhor descrita em Dvorak (1990), onde a existência de campos uniformes em meio bifásico é avaliada. Nesse caso, a geometria das fases é arbitrária e são descritos os tensores de influência das fases gerados por autodeformações unitárias e suas principais relações. Nele, também são apresentadas restrições sobre os tipos de inclusões onde ocorrem campos de deformações uniformes. Adicionalmente, Benveniste e Dvorak (1992) fazem algumas observações sobre campos uniformes em compósitos. Ainda no mesmo ano, Dvorak e Benveniste (1992) expandem a formulação para compósitos multifásicos e Dvorak (1992) define o termo *Transformation Field Analysis* para designar a formulação, e uma implementação baseada no Método dos Elementos Finitos é apresentada em Dvorak et al. (1994).

Publicações seguintes consistiram em desenvolvimentos e aplicações da formulação.

Em 2003, Michel e Suquet (2003) propuseram uma metodologia onde a superposição é realizada com campos não uniformes (*Non-Uniform Transformation Field Analysis* - NTFA). Essa modificação visava reduzir a quantidade de subdivisões necessárias ao cálculo das relações constitutivas efetivas do material. Essas subdivisões atuavam como uma forma de modelar a não-uniformidade do campo de deformações plásticas existentes. Uma aplicação foi apresentada em Michel e Suquet (2004) onde uma chapa de alumínio com fibras em boro foi submetida a tensões macroscópicas e as diferenças entre as formulações foi avaliada para uma mesma malha. Adicionalmente, Roussette et al. (2009) aplicaram a NTFA e a decomposição de Karhunen-Loève em materiais porosos e compósitos em regime viscoelastoplástico.

Na sequência, evoluções da NTFA são apresentadas em Fritzen e Leuschner (2013) e Sepe et al. (2013). O primeiro adota uma abordagem variacional para resolver o problema de redução de bases do regime plástico e o segundo se diferencia da NTFA pelo uso de combinações lineares dos campos inelásticos para cada elemento finito. Sepe et al. (2013) testam seu procedimento em ligas com memória de forma (*shape memory alloy* - SMA). Uma comparação entre os dois métodos é apresentada em Fritzen et al. (2015) e as situações onde cada método se destaca são ressaltadas. Por outro lado, Addessi et al. (2010) adaptam a TFA para análises numéricas em alvenaria e Cavalcante e Pindera (2013) propõem a TFA baseada na *Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics Theory* (FVDAM), obtendo bons resultados para o comportamento macroscópico elastoplástico de materiais periódicos.

Mais recentemente, Covezzi et al. (2017) propuseram outra complementação ao método, onde ao invés de aproximar o campo de deformações inelásticas, este é derivado a partir da aproximação de um campo de tensões. Em Covezzi et al. (2018) são realizadas as investigações propostas em Fritzen et al. (2015), mas empregando esta nova abordagem baseada em uma aproximação do campo de tensões. Nesse aspecto, Yang et al. (2020) propõem uma técnica de homogenização com fatores reduzidos em segunda ordem que é baseada na TFA e aplicada em configurações axissimétricas.

Uma técnica interessante apresentada em Alaimo et al. (2019) refere-se à otimização no emprego da TFA onde pré-análises de um modelo são realizadas e campos de deformação são avaliados e decompostos usando a técnica dos componentes principais (*Principal Component Analysis* - PCA), com o intuito de identificar a melhor abordagem (análise básica em Elementos Finitos ou TFA) para diferentes subdivisões do domínio de análise. Esse método foi aplicado na análise de materiais periódicos com constituintes viscoelásticos.

A integração com modelos multi-escala pode ser vista em Khattab e Sinapius (2019) e Barral et al. (2020). O primeiro aplica a formulação para compósitos poliméricos em escala nanométrica, enquanto o segundo integra a TFA com o modelo Mori-Tanaka de homogenização para análise de compósitos viscoelastoplásticos.

Neste cenário, é importante ressaltar que dois grandes desafios continuam sendo objetos de pesquisa: a aproximação do campo inelástico (as hipóteses que são adotadas para sua

definição) e a solução do problema de evolução temporal do comportamento do material nas diferentes escalas, que está diretamente relacionado com o número de variáveis que precisam ser determinadas por instante de tempo. Como pode ser visto, diversas investigações foram desenvolvidas endereçando os dois problemas, mas suas resoluções, apesar de estarem em um bom estágio de desenvolvimento, ainda são desafiadoras. Ressalta-se que estes trabalhos, e outros mais recentes, aplicam versões diferentes da TFA ou da NTFA aplicando análises inelásticas com variações da abordagem tangente e, as que usam elementos finitos, focam em elementos finitos lineares. A seguir, serão apresentadas as principais contribuições da tese.

## 1.4 Contribuições da Tese

Dentre as contribuições da tese, destaca-se inicialmente a aplicação da análise elasto-plástica baseada em abordagem secante empregando de elementos finitos de alta ordem para minimizar a tendência de resposta mais rígida do elemento finito a nível local quando da aplicação das autodeformações em conjunto com a TFA. Esse tipo de análise não foi encontrado na literatura.

Em complementação ao estudo usando TFA/MEF para elementos finitos de alta ordem, a tese contribui com uma análise do custo computacional da técnica usando esse tipo de elemento finito. Nesse sentido, e também fazendo uso de características da formulação da TFA (no caso, o somatório das contribuições inelásticas) para aplicação de abordagem em processamento paralelo. Poucas avaliações de custo computacional da técnica foram encontradas e nenhuma delas avaliava esse tipo de relação.

Ressalta-se também a aplicação da TFA na geração de superfícies de plastificação de meios porosos periódicos bidimensionais para diferentes tipos de arranjos e furos em regime de encruamento não-linear, seguindo a lei potencial. Encontraram-se análises semelhantes com variação geométrica do modelo, mas nenhuma aplicando o regime plástico adotado.

As contribuições, em conjunto, mostram o ineditismo do trabalho ao aprofundar-se em variados aspectos da análise inelástica de meios porosos empregando a *Transformation Field Analysis* integrada ao Método dos Elementos Finitos com funções interpoladoras de alto grau e avaliação aprofundada do custo computacional. A estrutura da tese é descrita a seguir.

## 1.5 Estrutura

A estrutura do trabalho é baseada na metodologia adotada. O primeiro capítulo apresenta a estrutura da tese, com apresentação de conteúdo introdutório para contextualização do leitor, justificativa, objetivos e metodologia do trabalho.

O segundo capítulo introduz a formulação da *Transformation Field Analysis* e sua aplicação em análises elastoplásticas de materiais periódicos. Também é apresentada uma intro-

dução ao Método dos Elementos Finitos e como a *Transformation Field Analysis* se integra ao método. Além disso, esse capítulo também apresenta o procedimento de análise não-linear adotado para avaliação do comportamento mecânico dos meios porosos.

O terceiro capítulo apresenta os estudos de casos analisados, suas principais diferenças e resultados. Adicionalmente, é realizada uma comparação com dados experimentais da literatura e a avaliação do desempenho computacional das diferentes abordagens.

O quarto capítulo apresenta a geração das superfícies de plastificação para alguns tipos de estudos de casos, bem como a discussão sobre os resultados e algumas respostas sobre a precisão e custo computacional do conjunto de análises realizado.

O quinto capítulo consiste na conclusão da tese, com um resumo das discussões realizadas e proposição de trabalhos futuros.

## 1.6 Delimitação do Trabalho

Visando facilitar o entendimento do trabalho, é importante destacar também as atividades que não participam do escopo do presente trabalho. Destaca-se inicialmente que todas as análises de comportamento mecânico foram realizadas no âmbito bidimensional para o Estado Plano de Tensões.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo apresenta as principais formulações usadas neste trabalho para avaliação do comportamento mecânico de meios porosos periódicos. Desta forma, introduzem-se:

1. Conceitos fundamentais da Teoria Micromecânica de Campos Médios, que definem as condições de contorno homogêneas;
2. Conceitos e formulações associados às condições de contorno periódicas nas quais uma célula unitária é sujeita;
3. Fundamentação e formulação da *Transformation Field Analysis*;
4. O Método dos Elementos Finitos e sua integração com a TFA.

Para aprofundamentos, recomendam-se Malvern (1969), Shames e Cozzarelli (1997) e Kaw (2006).

### 2.1 Micromecânica dos Campos Médios

No Capítulo anterior, definiu-se a Condição de Hill (Equação 1.2), aqui repetida por conveniência

$$\overline{\sigma} : \overline{\epsilon} = \overline{\sigma} : \overline{\epsilon} . \quad (2.1)$$

Esta condição indica a equivalência energética e mecânica das propriedades homogeneizadas (também chamadas efetivas) de um meio heterogêneo (HAZANOV, 1998). Assim, mostra-se a estacionariedade dos valores médios da energia global acumulada no elemento de maneira que a relação é útil na consideração do efeito de escala e a influência das condições de contorno impostas.

Essa condição foi usada para definição das condições de contorno homogêneas descritas na Seção seguinte e desenvolver a teoria de propriedades efetivas. Nesse contexto, define-se tensão macroscópica média como a razão entre o volume total  $V$  e a tensão média  $\overline{\sigma}_{ij}^{(e)}$  que ocorre no elemento

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \sum_{e=1}^N \frac{V_e}{V} \overline{\sigma}_{ij}^{(e)} = \sum_{e=1}^N f_e \overline{\sigma}_{ij}^{(e)} , \text{ onde} \quad (2.2)$$

$$\overline{\sigma}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \sigma_{ij}^{(e)} dV_e = \overline{\sigma}_{ij}^{(e)} . \quad (2.3)$$

para fração volumétrica  $f_e$  referente ao material e volume do elemento  $V_e$ . Analogamente à tensão macroscópica média, há a deformação macroscópica média, definida como

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV = \sum_{e=1}^N f_e \bar{\epsilon}_{ij}^{(e)}, \text{ onde} \quad (2.4)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \epsilon_{ij}^{(e)} dV_e = \epsilon_{ij}^{(e)} \quad (2.5)$$

Associa-se a deformação média à tensão média de um elemento através dos tensores de flexibilidade  $S_{ijkl}^{(e)}$  e rigidez  $C_{ijkl}^{(e)}$  do elemento

$$\epsilon_{ij}^{(e)} = S_{ijkl}^{(e)} \sigma_{ij}^{(e)} \quad e \quad \sigma_{ij}^{(e)} = C_{ijkl}^{(e)} \epsilon_{kl}^{(e)}. \quad (2.6)$$

A relação entre tensão macroscópica média da célula e tensão média de cada elemento finito é apresentada como

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{e=1}^N f_e \bar{\sigma}_{ij}^{(e)} = \sum_{e=1}^N f_e C_{ijkl}^{(e)} \bar{\epsilon}_{kl}^{(e)}. \quad (2.7)$$

A relação entre a tensão macroscópica média e a deformação macroscópica média elástica global existe e pode ser definida através do Tensor Constitutivo Efetivo

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl}. \quad (2.8)$$

O tensor constitutivo efetivo apresenta características gerais do comportamento do meio compósito/poroso, como se o material fosse homogêneo. Em outro aspecto, define-se o Tensor de Concentração de Deformações (também conhecido como Tensor de Hill (1963)), que relaciona o tensor deformação média do elemento com o tensor deformação média global

$$\bar{\epsilon}_{kl}^{(e)} = A_{klmn}^{(e)} \bar{\epsilon}_{mn} \quad (2.9)$$

Assim, consegue-se relacionar diretamente a tensão média macroscópica com a deformação macroscópica média usando o artifício

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{e=1}^N f_e C_{ijkl}^{(e)} \bar{\epsilon}_{kl}^{(e)} = \sum_{e=1}^N f_e C_{ijkl}^{(e)} A_{klmn}^{(e)} \bar{\epsilon}_{mn} = \left( \sum_{e=1}^N f_e C_{ijkl}^{(e)} A_{klmn}^{(e)} \right) \bar{\epsilon}_{mn} \quad (2.10)$$

Portanto, pode-se calcular o tensor constitutivo efetivo a partir do tensor de concentração de deformações

$$C_{ijkl}^* = \left( \sum_{e=1}^N f_e C_{ijkl}^{(e)} A_{klmn}^{(e)} \right). \quad (2.11)$$

A seguir, apresenta-se a definição do problema de valor de contorno adotado e sujeito às condições de contorno homogêneas.

## 2.2 Descrição do Problema

O presente trabalho avalia o comportamento mecânico de meios bidimensionais com porosidade periódica sujeito a condições de contorno homogêneas de deformação. A Figura 2.1 apresenta um esquema do problema para um arranjo periódico hexagonal sujeito a uma condição de contorno homogênea em deslocamentos com uma deformação macroscópica média  $\bar{\varepsilon}$ .

A homogeneidade das condições de contorno, caso o modelo fosse constituído de material maciço, geraria um estado de tensões também homogêneo. No entanto, a constituição periódica do material gera campos de tensões periódicos associados à repetição da distribuição do material. De maneira análoga, caso fossem aplicadas condições de contorno homogêneas em tensão, campos de deformação periódica surgiriam.

As condições de contorno para meios periódicos podem ser vistas nos locais mais distantes de aplicação da carga onde, conforme o princípio de Saint-Venant, a distribuição das tensões tende a se uniformizar. Dessa forma, a avaliação de todo meio pode ser reduzida à unidade periódica de distribuição do material, também chamada Célula Unitária de Repetição (*Repeating Unit Cell* - RUC).

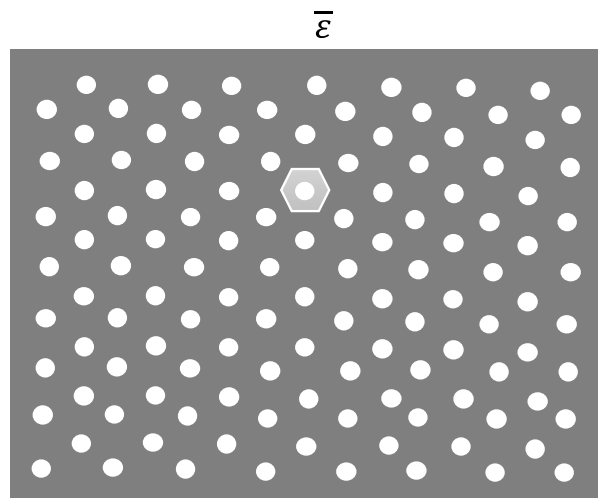


Figura 2.1 – Esquema do problema a ser avaliado.

Fonte: Autor (2021).

## 2.2.1 Condições de Contorno Periódicas

O conceito de módulo elástico efetivo de materiais porosos é baseado no módulo de elasticidade já conhecido em materiais homogêneos. De acordo com o tipo de material, diferentes módulos de elasticidade podem ser encontrados para variações na direção da força aplicada. Define-se a aplicação da condição de contorno homogênea em deslocamentos  $u_i$  a partir do tensor deformação macroscópica  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  para coordenadas  $x_j$

$$u_i(x_j) = \bar{\varepsilon}_{ij}x_j \quad (2.12)$$

com  $x_j \in A$ , onde  $A$  é o domínio bidimensional do modelo estudado. Nesse caso, as condições de contorno homogêneas produzem campos de tensões que se relacionam pela Lei de Hooke Generalizada  $\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{kl}$ , onde  $C_{ijkl}$  é o tensor constitutivo.

A aplicação de condições de contorno homogêneas em um meio poroso gera, pela periodicidade do material, condições de contorno que se repetem pelas células unitárias que compõem o padrão do material. Essas condições de contorno periódicas podem ser estabelecidas pela imposição da deformação homogênea de um meio periódico.

Desta forma, existindo a repetição de padrão (denominado célula unitária), as medições de deslocamentos apresentarão mesmo comportamento com repetições periódicas separadas por uma distância característica  $d_j$ . Essas distâncias características, que separam os mesmos deslocamentos, indicam a escala da microestrutura. Em termos matemáticos,

$$u_i(x_j + d_j) = u_i(x_j) + \bar{\varepsilon}_{ij}d_j \quad (2.13)$$

onde  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  são as componentes de deformação média da célula unitária. Nas fronteiras da célula unitária analisada, os deslocamentos entre dois pontos equivalentes (separados pelas distâncias características) podem ser relacionados com a deformação média. Também, as tensões de superfície  $T_i$  devem ser contínuas ao longo de células unitárias adjacentes em pontos equivalentes de maneira que

$$T_i(h_j + d_j) - T_i(h_j) = 0 \text{ para } h_j \in \Gamma \quad (2.14)$$

com  $h_j$  representando um ponto do contorno  $\Gamma$  do modelo. As Equações 2.13 e 2.14 definem condições de contorno periódicas que devem ser aplicadas em uma célula unitária na análise micromecânica de materiais.

Assim, a modelagem do comportamento periódico em termos de deslocamentos e deformações pode ser realizada com a separação das grandezas em duas partes: homogêneas e flutuantes. Naturalmente, as condições de contorno de deslocamentos homogêneas  $\bar{u}$  existem como resposta às condições homogêneas e as deformações flutuantes  $\tilde{\varepsilon}$  são provenientes das



mudanças internas no material. Nesse caso, os deslocamentos e deformações podem ser decompostos em componentes médias e flutuantes

$$u_i = \bar{u}_i + \tilde{u}_i \mathbf{e} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij} . \quad (2.16)$$

As condições de contorno periódicas podem ser obtidas a partir de um campo de deformações dentro de um material de heterogeneidade periódica baseado em uma expansão em dupla-escala no desenvolvimento da teoria de homogeneização. Para maiores detalhes, consultar Xia et al. (2003). Uma das formas mais comuns de modelagem computacional para avaliação do comportamento mecânico é o Método dos Elementos Finitos (MEF), forma adotada no presente trabalho e descrita a seguir.

## 2.3 Método dos Elementos Finitos - MEF

Por ser bastante documentado, as formulações abaixo apresentadas servem para contextualização do método e aplicação nas metodologias previamente discutidas. Além disso, como as análises do presente trabalho são bidimensionais, o desenvolvimento a seguir é restrito à duas direções. Aprofundamentos dos conceitos relacionados ao Método dos Elementos Finitos podem ser vistos em Bathe (1996), Zienkiewicz e Taylor (2005), Belytschko et al. (2009), entre outros.

Um dos diferenciais do MEF consiste na discretização do domínio de estudo em subdomínios menores, definidos através de uma malha de nós (pontos) e elementos com formas geométricas pré-estabelecidas. No caso da célula unitária, esta pode ser discretizada em uma malha de elementos finitos quadrilaterais, como a apresentada na Figura 2.2.

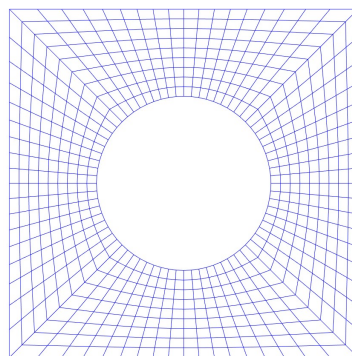


Figura 2.2 – Exemplo de malha em elementos finitos de uma RUC para arranjo quadrangular.

Fonte: Autor (2021).

Em análise mecânica empregando o MEF, o método é baseado nas equações de equilíbrio estático dos subdomínios em função dos graus de liberdade de um elemento. Dessa forma,

cada grau de liberdade representa uma possibilidade de aplicação de condição de contorno (em forças ou deslocamentos) (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Empregando a Formulação em Deslocamentos do MEF, os deslocamentos associados aos graus de liberdade livres (sem condições de contorno) são incógnitas (VAZ, 2011). A Figura 2.3 apresenta um elemento finito com dois graus de liberdade por nó capaz de avaliar deslocamentos nodais nas duas direções.



Figura 2.3 – Elemento finito de treliça com 2 graus de liberdade por nó.

Fonte: Autor (2021).

Dessa forma, aproveitando o exemplo do elemento finito de treliça, para cada  $n$  nós da malha, existem  $2n$  graus de liberdade globais. A relação entre forças e deslocamentos para condições de contorno periódicas, necessária para avaliação dos deslocamentos associados aos graus de liberdade aplicados, será detalhada a seguir. Calculados os deslocamentos nodais  $d_i$  associados a um dos elementos finitos, os deslocamentos  $u_i$  dentro do domínio de um elemento são obtidos por interpolação

$$u_i(x_j) = \sum_{p=1}^n N_p(x_j) d_{pi} \quad (2.17)$$

onde  $p = 1 \dots n$  são as componentes do vetor de deslocamentos globais,  $i = 1, 2$  são as direções consideradas na formulação e  $N_p(x_j)$  são as  $n$  funções de interpolação relacionadas ao elemento finito nas duas direções avaliadas no ponto com coordenadas  $x_j$ . A partir dessa definição, o cálculo das deformações  $\epsilon_i$  é feito utilizando o operador matricial gradiente simétrico  $\nabla_S$ ,

$$\nabla_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

aplicado às funções de interpolação  $N_p$  de um elemento  $N_p$

$$\epsilon_i(x_j) = \nabla_S N_p(x_j) d_n = B_{mn} d_n. \quad (2.19)$$

de maneira que  $B_{mn}$  é a matriz deformação-deslocamento, que apresenta o gradiente simétrico das funções de interpolação em um ponto  $x_i$ , e  $d_m$  é a matriz deslocamento reordenada em um vetor. Aproveita-se para definir, dentro do contexto da Teoria de Campos Médios, a matriz deformação-deslocamento média de um elemento  $\overline{\mathbf{B}}^{(e)}$ ,

$$\overline{\mathbf{B}}^{(e)} = \frac{1}{V^e} \int_V \mathbf{B}(x_j) dV. \quad (2.20)$$

A avaliação da tensão é realizada de acordo com o regime elástico-linear e, para um ponto  $x_j$ , as tensões serão

$$\sigma_i(x_j) = C_{klij}\epsilon_i(x_j) = C_{klij}B_{mn}d_n. \quad (2.21)$$

Assim, as funções interpoladoras associadas aos grau de liberdade de um elemento finito definem o comportamento mecânico da região onde ele se encontra. Por exemplo, o emprego de um elemento finito com funções interpoladoras lineares para avaliação dos deslocamentos gera deformações constantes dentro do elemento finito. Nesse sentido, e dependendo da complexidade das condições de contorno aplicadas no modelo, o tamanho do subdomínio gerado é essencial pois um campo de deformações constante pode não representar bem as deformações reais que ocorrem na região. Conforme será apresentado no Capítulo seguinte, os campos de deformações plásticas do problema tratado apresentam regiões localizadas com gradientes de deformação significativos.

Neste sentido, e para o presente trabalho, optou-se pelo emprego de elementos finitos quadrilaterais com funções interpoladoras lagrangeanas associadas aos seus graus de liberdade. As causas resumem-se ao fato do trabalho focar em análises bidimensionais, além da facilidade na geração de funções interpoladoras polinomiais de qualquer ordem. Com isso, consegue-se avaliar campos de tensões e deformações mais sofisticados e, portanto, capazes de representar regiões onde o campo de deformação plástica apresente maior variação. Dessa forma, apresenta-se a seguir o elemento finito quadrilateral com funções interpoladoras lagrangeanas.

### 2.3.1 Elemento Finito Lagrangeano Quadrilateral Generalizado

O elemento finito quadrilateral lagrangeano é gerado a partir do emprego da interpolação de Lagrange para cada grau de liberdade. Segundo Oñate (2009), as funções interpoladoras para elementos lagrangeanos bidimensionais  $N_{ij}$  são obtidas pelo produto dos polinômios unidimensionais de Lagrange  $N_i$  para um sistema de coordenadas  $\eta, \xi$

$$N_{ij}(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_j(\eta), \text{ de maneira que} \quad (2.22)$$

$$N_i(\xi) = \sum_{j=0}^n \xi_j \psi_j(\eta), \text{ onde} \quad (2.23)$$

$$\psi_j(\xi) = \prod_{\substack{0 < m < n \\ m \neq k}} \frac{\xi - \xi_m}{\xi_j - \xi_m}. \quad (2.24)$$

As funções  $\psi_j$  são chamadas de lagrangeanos. Uma das principais vantagens desse tipo de interpolação consiste na facilidade de criar polinômios interpoladores de qualquer grau, desde que associados a uma quantidade de nós (e, por consequência, graus de liberdade) suficientes para geração do elemento finito. Com isso, para gerar um elemento finito com funções

interpoladoras de graus  $m$  e  $n$  em cada direção, deve inserir  $m - 1$  e  $n - 1$  nós, assumindo um grau de liberdade por direção em cada nó. Assim, as funções interpoladoras que ponderam o cálculo dos deslocamentos internos do elemento também podem servir para definir a forma geométrica na qual o elemento se comporta. Segundo Fish e Belytschko (2007), um elemento finito cujas funções interpoladoras também definem suas coordenadas geométricas é chamado elemento isoparamétrico. A Figura 2.4 ilustra um elemento finito quadrilateral generalizado isoparamétrico em seus estados indeformado e deformado.



(a) Elemento finito isoparamétrico indeformado. (b) Sistema de coordenadas do elemento deformado.

Figura 2.4 – Elemento finito isoparamétrico deformado.

Fonte: Autor (2021).

Dessa forma, utiliza-se a relação entre a quantidade de nós em uma direção para definir o maior grau do polinômio que pode ser interpolado. De forma inversa, a definição do grau do polinômio indica a quantidade de nós que certa direção deve ter. Segundo Oñate (2009), a utilização de elementos lagrangeanos isoparamétricos com graus diferentes em cada direção leva a geração de polinômios interpoladores incompletos, o que afeta a aproximação da geometria do elemento, que é limitada pelo menor grau do polinômio interpolado. Assim, optou-se por utilizar elementos finitos com mesma quantidade de nós nas duas direções.

O maior problema no aumento da quantidade de graus dos polinômios de interpolação consiste no fenômeno de Runge, que Ostachowicz et al. (2012) definem como o aparecimento de erros nas soluções por causa da oscilação dos polinômios interpoladores perto das bordas do elemento finito (erros proporcionais a ordem da função usada). Técnicas que podem mitigar esses efeitos consistem na utilização de integração reduzida ou aplicação de funções interpoladoras ou quadraturas alternativas na integração numérica para a determinação da matriz de rigidez do sistema.

A seguir, desenvolve-se a relação entre forças e deslocamentos globais no MEF para condições de contorno periódicas.

### 2.3.2 MEF para Condições de Contorno Periódicas

O desenvolvimento dessa Seção parte do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Nesse contexto, o deslocamento virtual de um ponto consiste em um deslocamento fictício tal que as forças atuando no corpo continuem idênticas. O trabalho realizado por essas forças é deno-

minado trabalho virtual e, para sistemas em equilíbrio, o trabalho virtual total é nulo (SADD, 2009).

Dessa forma, a aplicação de equações integrais onde o PTV iguala o trabalho virtual interno decorre do processo de deformação do sólido ao trabalho virtual externo causado pelos carregamentos aplicados. Em um sistema sujeito a tensões  $\sigma_{ij}$ , deformações internas  $\varepsilon_{ij}$ , forças volumétricas  $b_i$ , superficiais  $t_i$  e deslocamentos  $u_i$ , pode-se definir os trabalhos virtuais interno  $W_{INT}$  e externo  $W_{EXT}$  aplicados ao corpo como

$$\delta W_{INT} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad \text{e} \quad (2.25)$$

$$\delta W_{EXT} = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S^\sigma} t_i \delta u_i d\Gamma^\sigma. \quad (2.26)$$

onde  $W$  representa o trabalho, seja ele interno ou aplicado ao corpo,  $\Gamma^\sigma$  é o contorno de aplicação das tensões e  $\delta$  indica que o trabalho é virtual. Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais,  $\delta W_{INT} = \delta W_{EXT}$ .

Na análise de meios porosos periódicos sujeitos a condições de contorno homogêneas, para avaliação dos deslocamentos flutuantes, o trabalho do material pode ser reduzido ao trabalho virtual interno exercido em RUC, independentemente do tipo de célula considerada. Isso decorre do fato de não haver aplicação de forças volumétricas (o que anula  $b_i$ ) e da aplicação das condições de contorno periódicas (anulando-se a contribuição do trabalho virtual externo realizado pelas forças de superfície). Dessa forma, a equação 2.26 resume-se a

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (2.27)$$

Aplicando a decomposição em suas partes homogêneas e flutuantes, conforme apresentado na Equação 2.16, na deformação virtual, ela pode ser tratada apenas pela deformação virtual flutuante, uma vez que essa é a única parte arbitrária. Como a parte homogênea da deformação é definida seguindo a Equação 2.13, seu trabalho também é definido (portanto, não há deformação virtual). Assim,  $\delta \varepsilon_{ij} = \delta \tilde{\varepsilon}_{ij}$ . Portanto, a equação de trabalho fica

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV = 0. \quad (2.28)$$

Seguindo a suposição de que as fases atuam dentro do regime plástico

$$\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{kl} + \tilde{\varepsilon}_{kl} - \varepsilon_{kl}^P) \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV \quad (2.29)$$

$$= \int_V C_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^P \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV \quad (2.30)$$

$$= 0 \quad (2.31)$$

Como a deformação homogênea é constante, pode ser retirada da integral. Reorganizando os termos, tem-se

$$\int_V C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV = - \int_V C_{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV \bar{\varepsilon}_{kl} + \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^P \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV. \quad (2.32)$$

Assim, após aplicação da Equação 2.19 (associada a parcela do deslocamento virtual) na Equação 2.32 e algumas manipulações matemáticas,

$$\delta \tilde{u}_i \int_V B_{ji} C_{jk} B_{kl} \tilde{u}_l dV = - \delta \tilde{u}_i \int_V B_{ji} C_{jl} dV \bar{\varepsilon}_l + \delta \tilde{u}_i \int_V B_{ji} C_{jl} \varepsilon_{il}^P dV \quad (2.33)$$

que, em notação matricial, fica

$$\delta \tilde{\mathbf{u}} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \tilde{\mathbf{u}} = - \delta \tilde{\mathbf{u}} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} dV \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \tilde{\mathbf{u}} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^P dV. \quad (2.34)$$

Cancelando o termo virtual  $\delta \tilde{\mathbf{u}}$  de cada lado, a equação resume-se a

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^P \quad (2.35)$$

onde

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{f} = - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} dV \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{f}^P = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^P dV. \quad (2.38)$$

de maneira que  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}^P$  são as parcelas associadas às forças macroscópicas e plásticas e  $\mathbf{K}$  é chamada matriz de rigidez, que relaciona as forças aos deslocamentos flutuantes. A equação apresentada é aplicada para o cálculo dos deslocamentos flutuantes em uma célula unitária sujeita a condições de contorno periódicas. A avaliação desse campo de deslocamentos permite a modelagem do comportamento mecânico em cada elemento finito apresentado no domínio.

A seguir, apresenta-se o método *Transformation Field Analysis* que, integrado ao Método dos Elementos Finitos, constitui-se como uma alternativa para avaliação de campos de tensões e deformações plásticas.

## 2.4 Transformation Field Analysis - TFA

A TFA consiste em uma metodologia de cálculo que é integrada ao MEF para avaliação de tensões e deformações inelásticas empregando a superposição de campos uniformes de autotensão e autodeformação associados às fases de um material compósito ou aos elementos obtidos na decomposição do domínio. Com isso, as tensões e deformações de um elemento são obtidas empregando os tensores de concentração e de influência de cada elemento, conforme descrito a seguir. São apresentados também o princípio da superposição dos efeitos e o conceito de autotensão e autodeformação.

### 2.4.1 Princípio da Superposição de Efeitos

Conforme apresentado em Sadd (2009), baseando-se nas premissas de regime elástico linear e pequenas deformações, todas as equações governantes do problema são lineares, o que permite o emprego do Princípio da Superposição de Efeitos, que diz:

- Dados dois problemas elásticos com aplicação de forças prescritas  $F_i^1$  e  $F_i^2$  e tensões superficiais  $T_i^1$  e  $T_i^2$ ;
- Se as soluções dos dois problemas consistem nos estados de deslocamento  $u_i^1$  e  $u_i^2$ ; tensão  $\sigma_i^1$  e  $\sigma_i^2$  e deformação  $\varepsilon_i^1$  e  $\varepsilon_i^2$ ;
- Então, os campos de deslocamento  $u_i^1 + u_i^2$ , tensão  $\sigma_i^1 + \sigma_i^2$  e deformação  $\varepsilon_i^1 + \varepsilon_i^2$  são soluções para um problema que aplique as forças prescritas  $F_i^1 + F_i^2$  e tensões superficiais  $T_i^1 + T_i^2$ .

Este princípio é utilizado na formulação da *Transformation Field Analysis* para o cálculo da deformação média a partir de campos uniformes de autotensão e autodeformação do elemento.

### 2.4.2 Autotensões e Autodeformações

O conceito de autodeformação (em inglês, *eigenstrain*) é definido por Dvorak (2012) como quaisquer deformações que existam independentes de carregamentos mecânicos e podem apresentar diferentes causas físicas. Alguns exemplos consistem nas deformações térmicas, plásticas (após descarregamento), piezoelétricas, entre outras. Por envolverem relações diferentes das constitutivas, também são chamadas de deformações transformacionais.

Uma autodeformação uniforme aplicada em corpos livres de forças gera deformações uniformes livres de tensão. No entanto, caso o corpo esteja sujeito a restrições mecânicas, a autodeformação gera autotensões (em inglês, *eigenstress*) ou tensões transformacionais. Nesse caso, se o material for homogêneo, as autotensões serão uniformes.

Campos transformacionais podem ser de origem física ou modelos equivalentes. Autodeformações do primeiro tipo ocorrem na fabricação e operação de materiais compósitos, sendo causadas por mudanças térmicas, variações na umidade do material da fase ou deformações inelásticas, por exemplo. É importante ressaltar que as deformações causadas por tensões superiores a tensão de escoamento do material podem ser divididas em suas partes elásticas e inelásticas e apenas as últimas são consideradas autodeformações. Nesse caso, as mudanças nas deformações inelásticas dependem do histórico de tensões. Nesse sentido, a divisão das deformações em duas partes permite a avaliação da autodeformação em caso de descarregamento das cargas aplicadas.

Em materiais heterogêneos, pode-se dividir a atuação de campos de tensão e deformação em três: elástica, autodeformacional e residual. Esta última surge a partir da interação de um conjunto de autodeformações aplicadas em um mesmo sólido. Esses campos residuais são superposições de campos elásticos e de transformação que garantem atendimento às equações de equilíbrio e de compatibilidade do material. Assim, a deformação em uma fase do material é dada pela composição da deformação elástica homogênea causada por carregamentos externos, pela autodeformação na inclusão devido aos campos transformacionais na inclusão e pela deformação residual na matriz.

A diferenciação entre os três campos pode ser explanada pelas deformações ocorridas no sólido e em suas fases, conforme ilustrado pela Figura 2.5. As três deformações, em conjunto, geram campos de autodeformação distintos e incompatíveis entre si de tal forma que, para reorganização do modelo, são necessárias cargas externas para restauração da continuidade entre tensões e deformações. Esses carregamentos geram os campos elásticos e residuais.

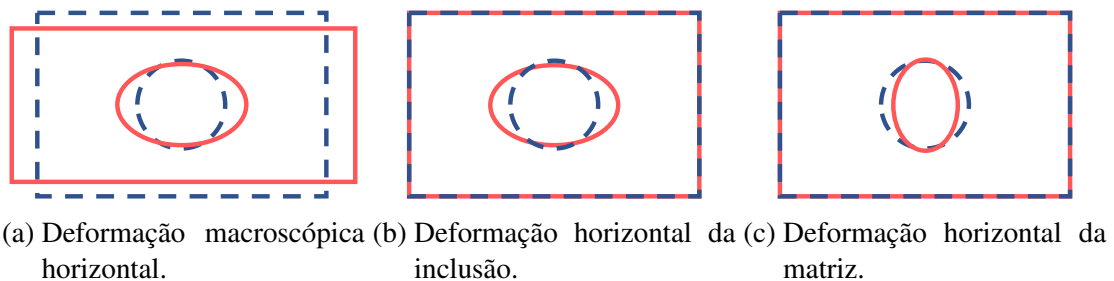


Figura 2.5 – Esquemática da Superposição de campos na TFA.

Fonte: Autor (2021).

A presença de autodeformações  $\mu^{(r)}$  e autotensões  $\lambda^{(r)}$  para r-ésima fase incrementa as relações constitutivas da seguinte forma:



$$\boldsymbol{\sigma}^{(r)} = \mathbf{C}^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} + \boldsymbol{\lambda}^{(r)} \longleftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} = \mathbf{S}^{(r)} \boldsymbol{\sigma}^{(r)} + \boldsymbol{\mu}^{(r)}, \text{ com} \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(r)} = -\mathbf{C}^{(r)} \boldsymbol{\mu}^{(r)} \text{ e } \boldsymbol{\mu}^{(r)} = -\mathbf{S}^{(r)} \boldsymbol{\lambda}^{(r)}, \text{ assim} \quad (2.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(r)} = \mathbf{C}^{(r)} [\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} - \boldsymbol{\mu}^{(r)}] \longleftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} = \mathbf{S}^{(r)} [\boldsymbol{\sigma}^{(r)} - \boldsymbol{\lambda}^{(r)}]. \quad (2.41)$$

Nesse caso,  $\boldsymbol{\sigma}^{(r)}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}$  representam as tensões e deformações totais e  $\mathbf{C}^{(r)}$  e  $\mathbf{S}^{(r)}$  as matrizes constitutivas e de conformidade para a fase  $r$  do material.

Conforme proposto em Dvorak (1990), uma forma de representar os campos de tensão/deformação locais em um meio heterogêneo consiste na substituição de variáveis de transformação em distribuições uniformes. Dessa forma, a avaliação da tensão e deformação na heterogeneidade é representada por

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)} = \mathbf{A}^{(r)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{s=1}^N \mathbf{D}^{(r,s)} \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(s)} \text{ e } \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = \mathbf{B}^{(r)} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{s=1}^N \mathbf{F}^{(r,s)} \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(s)}, \quad (2.42)$$

onde  $\mathbf{A}^{(r)}$  e  $\mathbf{B}^{(r)}$  são os tensores de concentração de deformações e tensões, respectivamente. As matrizes  $\mathbf{D}^{(r,s)}$  e  $\mathbf{F}^{(r,s)}$  são chamadas de matrizes de influência de transformação para deformação e tensão, respectivamente, entre as fases  $r$  e  $s$ . Elas mensuram as tensões/deformações residuais causadas pelos campos residuais na fase  $r$  por  $\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(s)}$  e  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{(s)}$  aplicadas em um modelo de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$  e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ , respectivamente. Incluem-se também as matrizes de influência  $\mathbf{D}^{(r,r)}$  e  $\mathbf{F}^{(r,r)}$ , que representam as influências autoinduzidas. A Figura 2.6 ilustra a superposição desses efeitos.

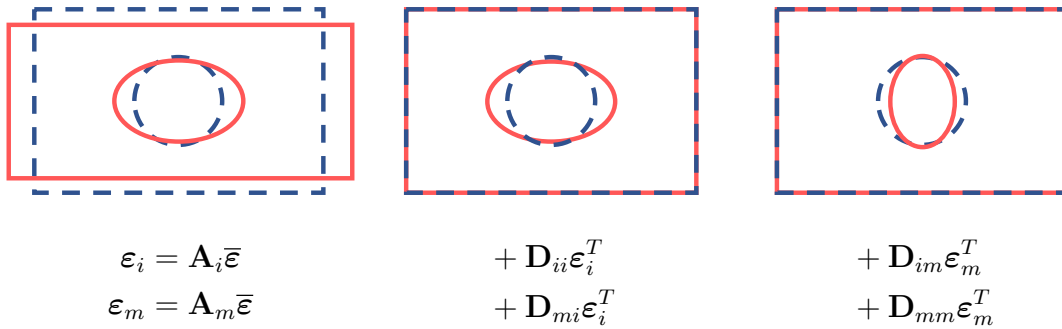


Figura 2.6 – Decomposição da superposição de campos no TFA.

Fonte: Autor (2021).

Em materiais bifásicos (matriz e inclusões de mesmo tipo de material), as matrizes de influência podem ser calculadas como

$$\mathbf{D}^{(r,m)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(r)}) (\mathbf{C}^{(m)} - \mathbf{C}^{(i)})^{-1} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{e} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{D}^{(r,i)} = - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(r)}) (\mathbf{C}^{(m)} - \mathbf{C}^{(i)})^{-1} \mathbf{C}^{(i)} \text{ para} \quad (2.44)$$

$$r = m, i. \quad (2.45)$$

De maneira análoga, encontram-se as matrizes de influência para tensão

$$\mathbf{F}^{(r,m)} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{(r)}) (\mathbf{S}^{(m)} - \mathbf{S}^{(i)})^{-1} \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{e} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{F}^{(r,i)} = - (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{(r)}) (\mathbf{S}^{(m)} - \mathbf{S}^{(i)})^{-1} \mathbf{S}^{(i)} \text{ para} \quad (2.47)$$

$$r = m, i. \quad (2.48)$$

As matrizes de influência transformacional surgiram como uma alternativa para a avaliação do comportamento inelástico causado por diversos tipos de carregamento e podem ser avaliadas a partir dos tensores de concentração de tensão e de deformação. No entanto, a TFA tende a apresentar respostas mais rígidas para o comportamento macroscópico do material heterogêneo quando empregados os tensores de influência associados aos valores médios apresentados pelas duas fases do material bifásico. Uma alternativa para resolver este problema é subdividir as fases e calcular os tensores de influência associados às subdivisões das fases.

Nesse contexto, a integração entre MEF e TFA aproveita as principais vantagens de cada técnica em modelos que sejam capazes de extrair bons resultados com custo computacional relativamente baixo (DVORAK et al., 1994) (YVONNET, 2019).

A Seção seguinte explica a integração entre o MEF e a TFA, bem como o procedimento para avaliação dos tensores de concentração e influência e a metodologia de avaliação do comportamento elastoplástico dos modelos.

## 2.5 Integração da TFA com Elementos Finitos

Com o intuito de viabilizar a aplicação da TFA na análise elastoplástica de meios porosos periódicos, faz-se necessária a decomposição das fases em regiões (elementos finitos) onde os campos plásticos serão assumidos uniformes e com valores iguais às suas médias volumétricas, adotando-se uma abordagem semelhante àquela utilizada na micromecânica de meios efetivos (QU; CHERKAOUI, 2006).

Assim, os tensores de concentração e de influência são associados aos vários elementos finitos que compõem o domínio de análise ao invés dos mesmos estarem associados exclusivamente às fases que compõem o material compósito.

### 2.5.1 Avaliação dos Tensores de Concentração

O cálculo dos tensores de concentração é realizado em etapas, onde cada etapa preenche os valores de uma parte (uma coluna) do tensor. Cada etapa consiste na solução de modelos com aplicação de componentes macroscópicas (homogêneas) de tensão e deformação ( $\bar{\epsilon}_k = \mathbf{i}_k$  ou  $\bar{\sigma}_k = \mathbf{i}_k$ ) onde  $\mathbf{i}_k$  é a k-ésima coluna da matriz identidade.

A Figura 2.7 apresenta um fluxograma para o cálculo dos tensores de concentração de deformações bem como uma ilustração da aplicação de uma deformação macroscópica horizontal no modelo.

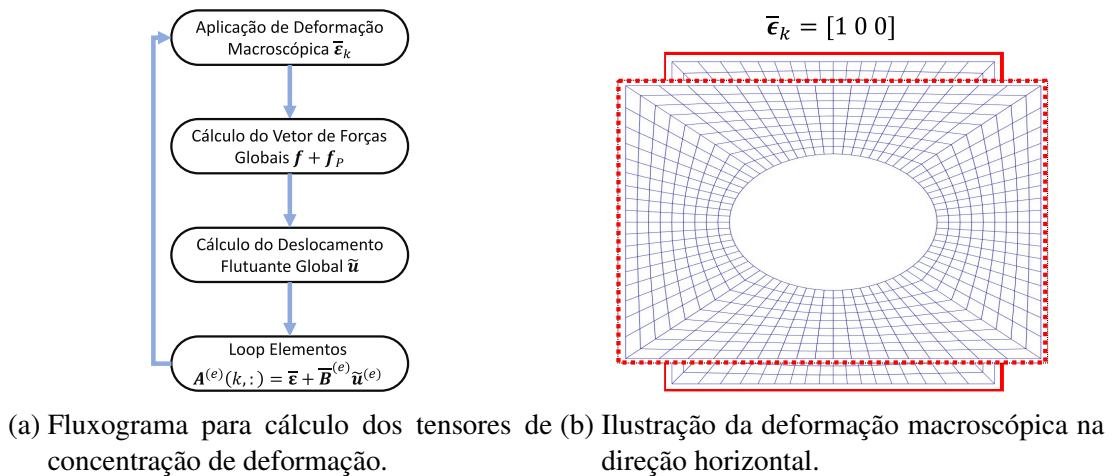


Figura 2.7 – Apresentação do cálculo dos tensores de concentração de deformação.

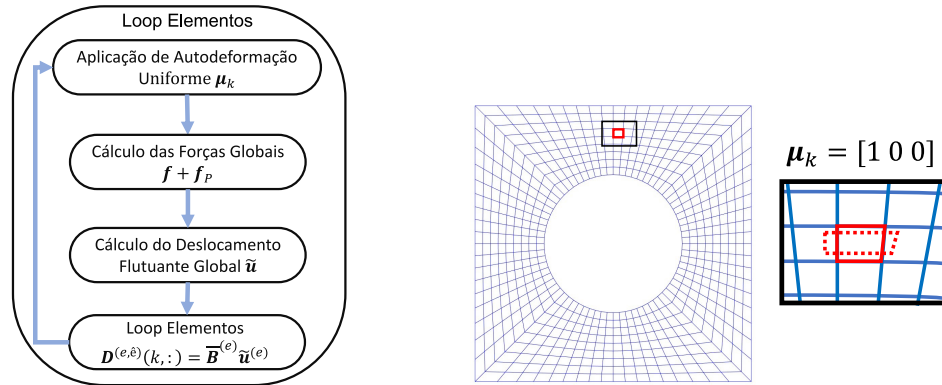
Fonte: Autor (2021).

Para cada solução calculada, as deformações locais médias compõem as colunas dos tensores de concentração de deformação. Com a aplicação da deformação macroscópica, deve-se calcular o vetor de forças globais correspondente e avaliar os deslocamentos flutuantes do modelo usando a Equação 2.35.

Cada coluna dos tensores de concentração de deformações está associada à aplicação da deformação macroscópica em uma direção. Assim, o cálculo da primeira coluna dos tensores de concentração de deformação de cada elemento é obtido ao somar a deformação homogênea com o produto entre o tensor de deformação média (a matriz deformação-deslocamento média apresentada na Equação 2.20) com o vetor local do deslocamento flutuante.

### 2.5.2 Cálculo dos Tensores de Influência

Para o cálculo dos tensores de influência, o processo é semelhante. Aplicam-se deformações ou tensões macroscópicas (homogêneas) nulas ( $\bar{\epsilon} = \mathbf{0}$  ou  $\bar{\sigma} = \mathbf{0}$ ), mas submete-se cada elemento do modelo a valores unitários para cada componente de autodeformação uniforme  $\bar{\mu}_k^{(\hat{e})} = \mathbf{i}_k$  para o elemento  $\hat{e}$  em etapas.



(a) Fluxograma para cálculo dos tensores de influência. (b) Ilustração da autodeformação na direção horizontal aplicada em um elemento.

Figura 2.8 – Apresentação do cálculo dos tensores de influência.

Fonte: Autor (2021).

Em outras palavras, o processo de obtenção dos tensores de influência entre elementos consiste em aplicar em cada elemento da matriz as autodeformações unitárias em cada direção. Para cada autodeformação aplicada em um elemento, calculam-se os vetores globais de força, seguido pelo cálculo dos deslocamentos flutuantes globais usando a Equação 2.35. Com os valores dos deslocamentos globais, avalia-se a primeira coluna de cada tensor de influência a partir do produto entre o tensor médio de deformações do elemento com o vetor de deslocamentos flutuantes locais.

Dessa forma, apresentam-se os conceitos e formulações para o desenvolvimento da análise elastoplástica de materiais compósitos periódicos com base na TFA e no Método dos Elementos Finitos, com cálculo dos respectivos tensores de concentração de deformações, tensores de influência, além das relações constitutivas efetivas da RUC. A Seção seguinte apresenta o procedimento de análise não-linear adotado para avaliação do comportamento mecânico.

### 2.5.3 Formulação da Análise Elastoplástica

Esta Seção apresenta a formulação baseada no Método de Soluções Elásticas Sucessivas desenvolvido por Mendelson (1968) para avaliação elastoplástica de qualquer modelo e requer que o carregamento externo seja aplicado de forma incremental, distribuído dentro de uma quantidade de passos pequena o suficiente para garantir convergência do método. Ela calcula a resposta plástica local usando as relações de Prandtl-Reuss para encruamento isotrópico.

Mendelson (1968) reformulou as equações em termos de tensores de deformação total modificada ao invés de usar tensões desviadoras para acelerar o processo de convergência do método. A Figura 2.9 apresenta um fluxograma da formulação, mostrando as diferenças entre a análise convencional em MEF e a integração TFA/MEF. As principais equações utilizadas serão apresentadas e maiores informações sobre o método podem ser encontradas no trabalho

de Mendelson (1968).

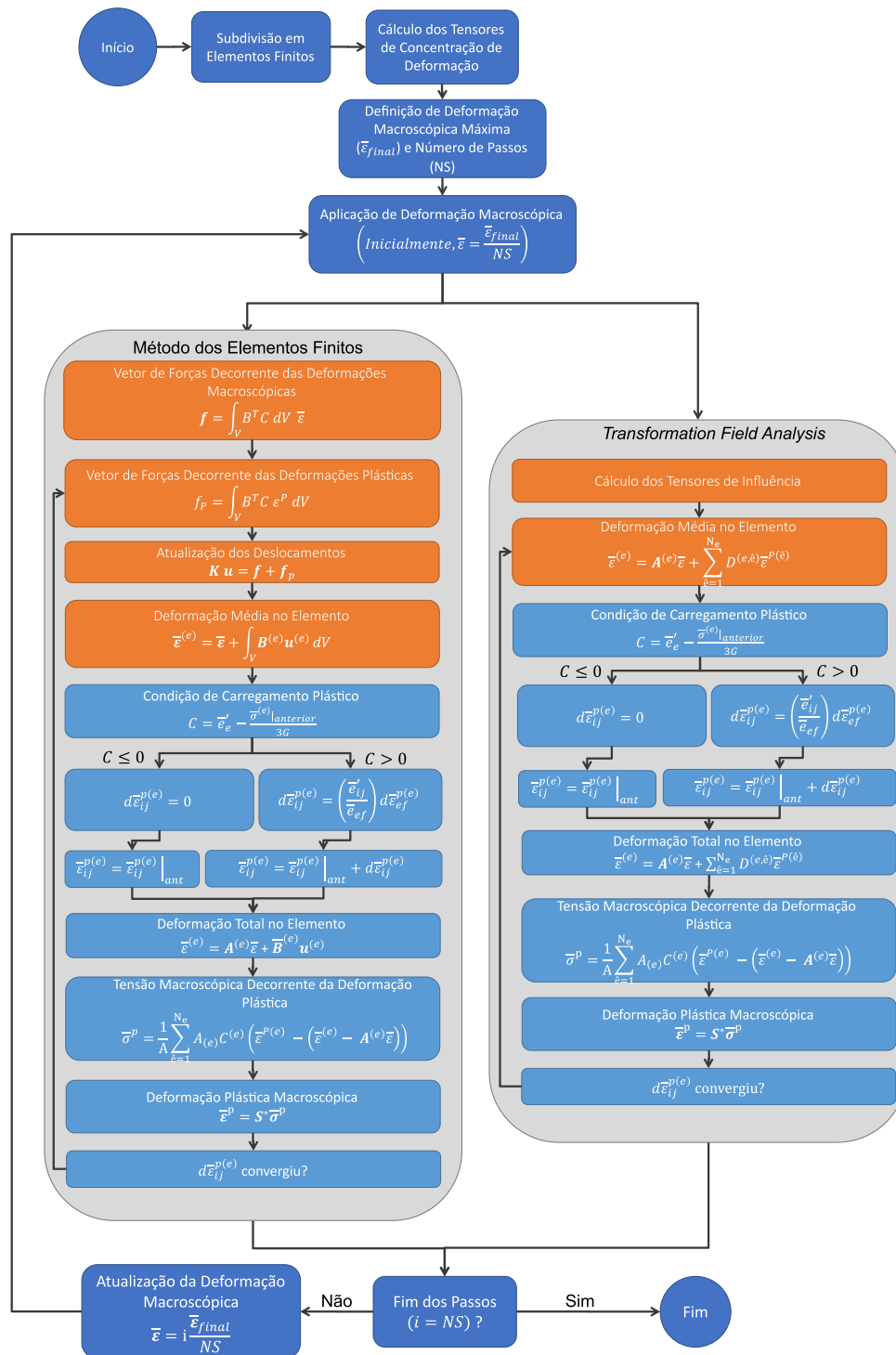


Figura 2.9 – Fluxograma da análise elastoplástica.

Fonte: Autor (2021).

A avaliação dos tensores de concentração de deformação e de influência plástica permite o cálculo do comportamento elastoplástico homogenizado para um material poroso em todos os passos da análise. A determinação do comportamento mecânico é realizada em sucessivas inte-

grações incrementais da deformação plástica homogenizada usando as equações de localização. O incremento de deformação plástica homogênea é avaliado como

$$d\bar{\epsilon}^p = \sum_{e=1}^{N_e} f_e \mathbf{B}^{(e)} d\bar{\epsilon}^{p(e)} \quad (2.49)$$

onde o tensor elástico de concentração de tensões é calculado por  $\mathbf{B}^{(e)} = [\mathbf{C}^*]^{-1}[\mathbf{A}^{(e)}]^T \mathbf{C}^{(e)}$  e o incremento de deformação plástica local  $d\bar{\epsilon}^{p(e)}$  é determinado usando a reformulação das equações de Prandtl-Reuss realizada por Mendelson em termos dos tensores de deformação desviadoras  $e'_{ij}$  (MENDELSON, 1968)

$$d\bar{\epsilon}_{ij}^{p(e)} = \left( \frac{\bar{e}'_{ij}}{\bar{e}_{ef}} \right)^{(e)} d\bar{\epsilon}_{ef}^{p(e)} \quad \text{onde} \quad (2.50)$$

$$\bar{e}_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{e}'_{ij} \cdot \bar{e}'_{ij}} \quad (2.51)$$

$$\bar{e}'_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3\bar{\epsilon}_{kk}} \delta_{ij} - \bar{\epsilon}_{ij}^p|_{\text{anterior}} \quad (2.52)$$

onde se empregam as deformações plásticas do passo anterior  $\bar{\epsilon}_{ij}^p|_{\text{anterior}}$ . O incremento de deformações plásticas efetivas é

$$d\bar{\epsilon}_{ef}^{p(e)} = \bar{e}_{ef}^{(e)} - \frac{\bar{\sigma}_{ef}^{(e)}}{3G} \quad (2.53)$$

onde  $\bar{\sigma}_{ef}^{(e)}$  é a tensão efetiva de von Mises no elemento  $e$ . O histórico de carregamento é definido pelo incremento de deformação homogênea  $d\bar{\epsilon}$  e as deformações plásticas do subdomínio são calculadas iterativamente usando o método das soluções elásticas sucessivas proposto em Mendelson (1968), pela decomposição das deformações plásticas uniformes locais nas partes anterior e incremental

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{p(e)} = \bar{\epsilon}_{ij}^{p(e)}|_{\text{anterior}} + d\bar{\epsilon}_{ij}^{p(e)}. \quad (2.54)$$

Em complementação ao fluxograma, apresenta-se um pseudo-algoritmo para cada passo de carregamento:

1. Definição do incremento de deformação homogênea  $d\bar{\epsilon}$ ;
2. Avaliação da deformação total homogênea em cada elemento  $e$ :

Aplicar a relação localizada  $\bar{\epsilon}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \bar{\epsilon} + \sum_{\hat{e}=1}^{N_e} \mathbf{D}^{(e,\hat{e})} \bar{\epsilon}^{p(\hat{e})}$ . Inicialmente,  $\bar{\epsilon}_{ij}^{p(\hat{e})} = \bar{\epsilon}_{ij}^{p(\hat{e})}|_{\text{anterior}}$ ;

$$\text{Calcular } d\bar{\varepsilon}_{ij}^{p(e)} = \left( \frac{\bar{\varepsilon}'_{ij}}{\bar{\varepsilon}'_{ef}} \right)^{(e)} d\bar{\varepsilon}_{ef}^{p(e)} ;$$

$$\text{Avaliar } \bar{\varepsilon}_{ij}^{p(e)} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{p(e)}|_{\text{anterior}} + d\bar{\varepsilon}_{ij}^{p(e)} ;$$

Repetir os passos até  $d\bar{\varepsilon}_{ij}^{p(e)}$  convergir.

3. Calcular o incremento de deformações plásticas homogenizado  $d\bar{\varepsilon}^p = \sum_{e=1}^{N_e} c_{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\bar{\varepsilon}^{p(e)} ;$
4. Atualizar  $\bar{\varepsilon}$  e  $\bar{\varepsilon}^p$  e calcular a tensão homogênea  $\bar{\sigma} = \mathbf{C}^*(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^p) .$

São apresentados todas as formulações e métodos usados na análise elastoplástica de células unitárias sob condições de contorno periódicas e que representam o comportamento de um meio bidimensional regularmente poroso. No Capítulo seguinte, a formulação é aplicada em diversos estudos de casos para avaliação de acurácia e desempenho em análises numéricas. Também, comparam-se os desempenhos da análise clássica em elementos finitos *versus* a TFA para um caso com resultados experimentais.

### 3 APLICAÇÕES E DISCUSSÃO

A análise elastoplástica de meios porosos com configuração periódica foi realizada empregando os conceitos discutidos no Capítulo anterior com o objetivo de analisar a capacidade da TFA de representar o comportamento mecânico desse tipo de elemento estrutural. Nesse contexto, adotou-se um domínio com diversos níveis de discretização e aplicações de diferentes elementos finitos. Análise semelhante pode ser vista em Cavalcante e Pindera (2013), mas empregando outros tipos de elementos finitos para uma análise comparativa com a Teoria de Volumes Finitos. Esta análise também pode ser consultada em Várady Filho e Cavalcante (2021).

Todas as análises foram realizadas em ambiente Matlab 2019a (THE MATHWORKS INC., 2019) com um processador Intel Core i7-7700HQ funcionando a 2.80 GHz com 16 GBs de memória RAM. O material modelado apresenta comportamento elástico-linear com lei potencial de encruamento seguindo as propriedades apresentadas na Tabela 3.1 e avaliado em integração completa para todos os modelos.

Tabela 3.1 – Propriedades do material usado na análise elastoplástica.

Módulo de Elasticidade Linear (MPa)	72700
Coefficiente de Poisson	0.34
Tensão de Escoamento (kPa)	240
Coefficiente de Resistência Plástica	457.5891
Expoente do Encruamento	0.4218

O domínio adotado consiste em uma célula unitária de arranjo hexagonal e espessura constante em regime de estado plano de tensão com uma fração volumétrica de vazios de 25%. As discretizações adotadas definem os números de elementos nas direções angular e radial: 18x3 (54 elementos), 30x5 (150 elementos) e 90x15 (1350 elementos). A Figura 3.1 mostra as discretizações adotadas.



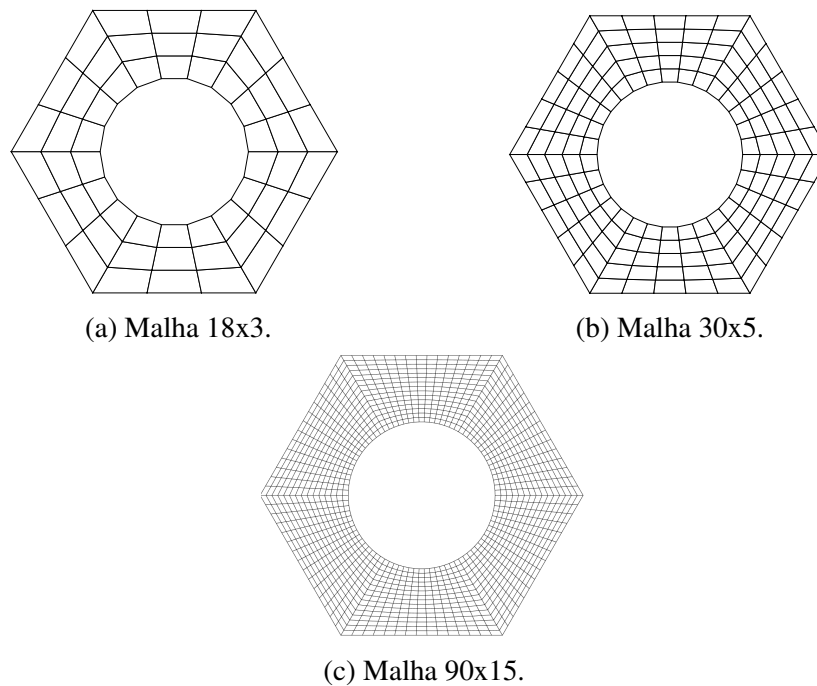


Figura 3.1 – Discretizações do domínio com elementos quadrilaterais.

Fonte: Autor (2021).

Os elementos quadrilaterais lagrangeanos lineares (denominados Q4), por usarem polinômios interpoladores de primeiro grau, são os que apresentam menor qualidade de resultados. Assim, para obter resultados mais precisos empregando esse tipo de elemento, é necessário um maior nível de discretização.

Complementar ao uso de elementos quadrilaterais lagrangeanos lineares, também é realizado um estudo usando elementos quadrilaterais lagrangeanos quadráticos (denominados Q9). Nesse caso, o elemento é capaz de representar campos de tensões e deformações lineares, possivelmente garantindo melhores resultados que o elemento linear para uma mesma discretização. Também emprega-se um elemento quadrilateral lagrangeano de alta ordem, com polinômios interpoladores de quinto grau (denominados Q36), conforme apresentado na Figura 3.2. Neste caso, a quantidade de graus de liberdade aumenta significativamente usando o mesmo número de elementos e os campos de tensões e deformações podem apresentar melhores resultados. A Tabela 3.2 mostra uma comparação entre a quantidade de nós para cada uma das malhas estudadas.

Tabela 3.2 – Quantidade de nós para cada malha por tipo de elemento.

	Malhas		
	18x3	30x5	90x15
Elementos	54	150	1350
Nós El. Linear	72	180	1440
Nós El. Quadrático	252	660	5580
Nós El. Quinto Grau	1440	3900	34200

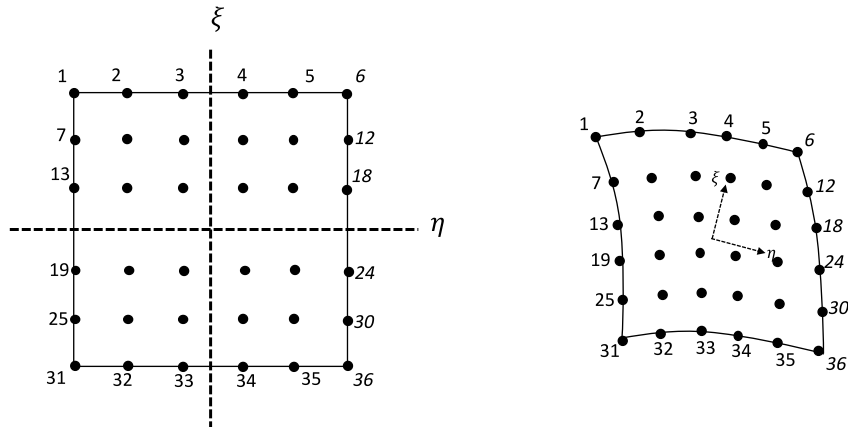


Figura 3.2 – Elemento quadrilateral de grau 5.

Fonte: Autor (2021).

Todos os modelos foram sujeitos às condições de contorno periódicas nos deslocamentos flutuantes, aplicadas de maneira gradual (em incrementos de 0.1%) até atingirem a deformação macroscópica homogênea de 3% em condições que representassem os cenários de tração uniaxial e cisalhamento puro. As condições de contorno periódicas de deslocamento são estabelecidas conforme a Figura 3.3, onde as restrições estão representadas na figura por meio de apoios do segundo gênero, impedindo deslocamentos flutuantes e de corpo rígido em ambas as direções.

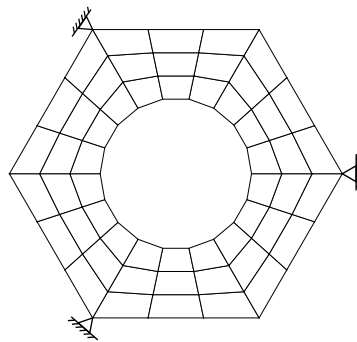


Figura 3.3 – Restrições de deslocamentos dos modelos.

Fonte: Autor (2021).

É importante ressaltar os dois critérios de convergência associados a esse tipo de análise. O primeiro critério corresponde ao Erro Absoluto Médio por Elemento, que consiste na integral dentro do elemento da variação entre incrementos de deformação plástica efetiva

$$\overline{Err}_{abs}^{(e)} = \frac{1}{A^{(e)}} \int_S |d\varepsilon_{k+1}^P - d\varepsilon_k^P| dS \quad (3.1)$$

para cada iteração  $k+1$ . Dessa forma, o Erro Absoluto Médio  $\overline{Err}_{abs}$  será o somatório dos erros em todos os elementos ponderados pelas respectivas frações volumétricas. O outro indicador

é o Erro Relativo Total, que é normalizado pelo incremento de deformação plástica efetiva macroscópica

$$\overline{Err}_{rel} = \frac{\overline{Err}_{abs}}{d\bar{\varepsilon}_{ef}}, \text{ onde} \quad (3.2)$$

$$d\bar{\varepsilon}_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3}d\bar{\varepsilon}_{ij}d\bar{\varepsilon}_{ij}} \quad (3.3)$$

e que deve ser menor que a tolerância de  $10^{-4}$  para um número máximo de 200 iterações. Todos os modelos são comparados com os resultados obtidos em uma análise elastoplástica convencional usando o Método dos Elementos Finitos.

### 3.1 Verificação Numérica

São executadas análises para os cenários macroscópicos de tração uniaxial e cisalhamento puro. Observam-se dois aspectos: comparação entre os modelos para um mesmo tipo de elemento finito considerando diferentes discretizações e; comparação entre diferentes tipos de elementos finitos para uma mesma discretização. A Figura 3.4 ilustra os carregamentos macroscópicos aplicados.

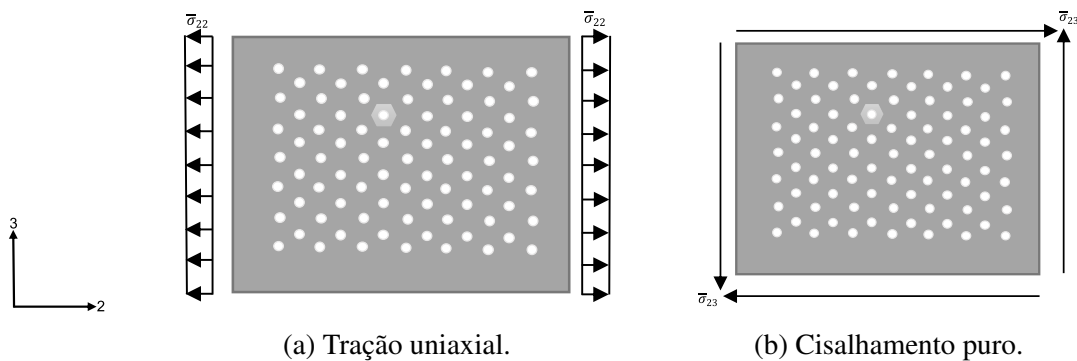


Figura 3.4 – Carregamentos macroscópicos para tração uniaxial e cisalhamento puro.

Fonte: Autor (2021).

Nesse sentido, o objetivo foi destacar a influência da discretização para um mesmo tipo de elemento e a ordem do elemento finito adotado para um mesmo número de nós (ou graus de liberdade).

#### 3.1.1 Tração Uniaxial

Os resultados apresentados consistem nas curvas de tensão macroscópica média normal da RUC  $\bar{\sigma}_{22}$  na direção horizontal obtidas para cada incremento de deformação macroscópica  $\bar{\varepsilon}_{22}$  correspondente. A Figura 3.5 ilustra os resultados dos modelos com todas as malhas usando

os elementos Q4, Q9 e Q36 para a análise convencional (*Finite Element Analysis* - FEA) e a integração TFA/MEF.

Os dados obtidos empregando TFA são comparados com os resultados usando análise clássica em MEF. A Tabela 3.3 mostra as diferenças relativas entre as análises para os mesmos tipos de elementos e discretização.

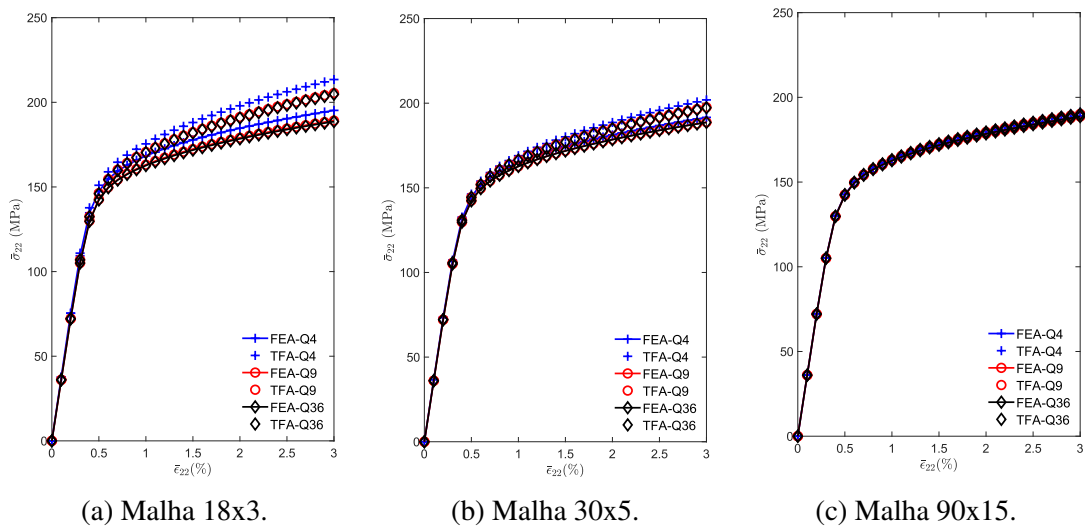


Figura 3.5 – Resposta macroscópica para tração uniaxial empregando análise convencional em MEF e integração TFA/MEF.

Fonte: Autor (2021).

Tabela 3.3 – Divergência relativa entre análise convencional em MEF e integração TFA/MEF - Tração Uniaxial.

Tração Uniaxial						
Deformação Macroscópica	0.5%	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
Q4 18x3	2.50%	4.23%	5.78%	7.17%	8.34%	9.34%
Q4 30x5	1.11%	2.35%	3.26%	4.06%	4.77%	5.40%
Q4 90x15	0.16%	0.40%	0.61%	0.81%	0.98%	1.14%
Q9 18x3	2.57%	4.60%	5.80%	6.86%	7.79%	8.59%
Q9 30x5	1.42%	2.35%	3.10%	3.70%	4.22%	4.68%
Q9 90x15	0.17%	0.34%	0.49%	0.61%	0.73%	0.83%
Q36 18x3	2.58%	4.69%	5.89%	6.90%	7.78%	8.55%
Q36 30x5	1.44%	2.28%	3.02%	3.62%	4.13%	4.58%
Q36 90x15	0.18%	0.34%	0.48%	0.60%	0.72%	0.82%

Como a TFA aproxima campos de tensão e deformação assumindo distribuição uniforme em cada elemento, esperava-se que os resultados dessa análise convergissem para os resultados da análise clássica para maiores níveis de discretização. Isso ocorre pois maiores discretizações permitem melhor captura dos campos locais de deformação plástica. O elemento finito quadrático apresentou resultados similares quando comparado com o elemento finito de quinto grau. Elementos finitos de ordem mais alta apresentam respostas macroscópicas mais

flexíveis para a TFA, pois conseguem capturar melhor o comportamento local quando uma autodeformação uniforme é imposta ao elemento. Para o menor nível de discretização, a maior diferença relativa foi menor que 10% para uma deformação macroscópica de 3% e, para malhas mais refinadas, as diferenças foram menores que 1.5%.

As distribuições de tensão e deformação plástica média dos elementos são apresentadas nas Figuras 3.6 a 3.8 para as malhas 90x15 de todos os elementos finitos. Esses campos apresentam distribuições médias uniformes por elemento para comparar mais diretamente os resultados obtidos entre as duas análises. Em termos qualitativos, para esse nível de discretização, a resposta local obtida pela TFA é muito semelhante a resposta local obtida empregando análise clássica em MEF para todos os tipos de elementos finitos adotados.

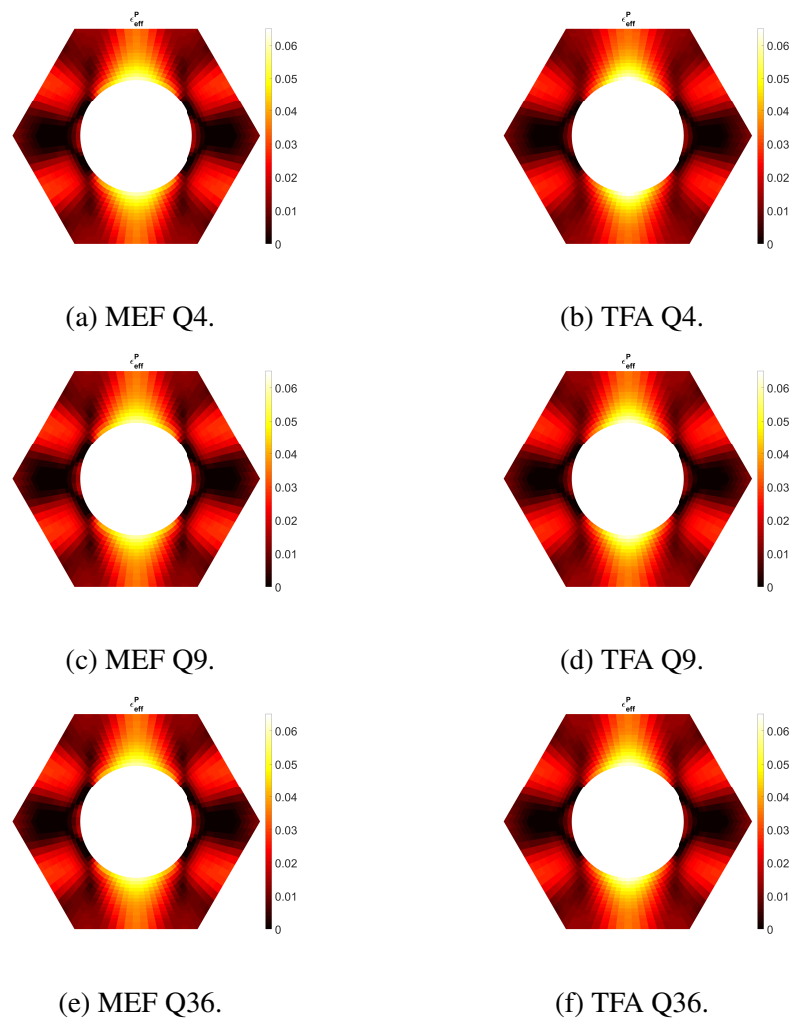


Figura 3.6 – Campos de deformações plásticas efetivas para tração uniaxial.

Fonte: Autor (2021).

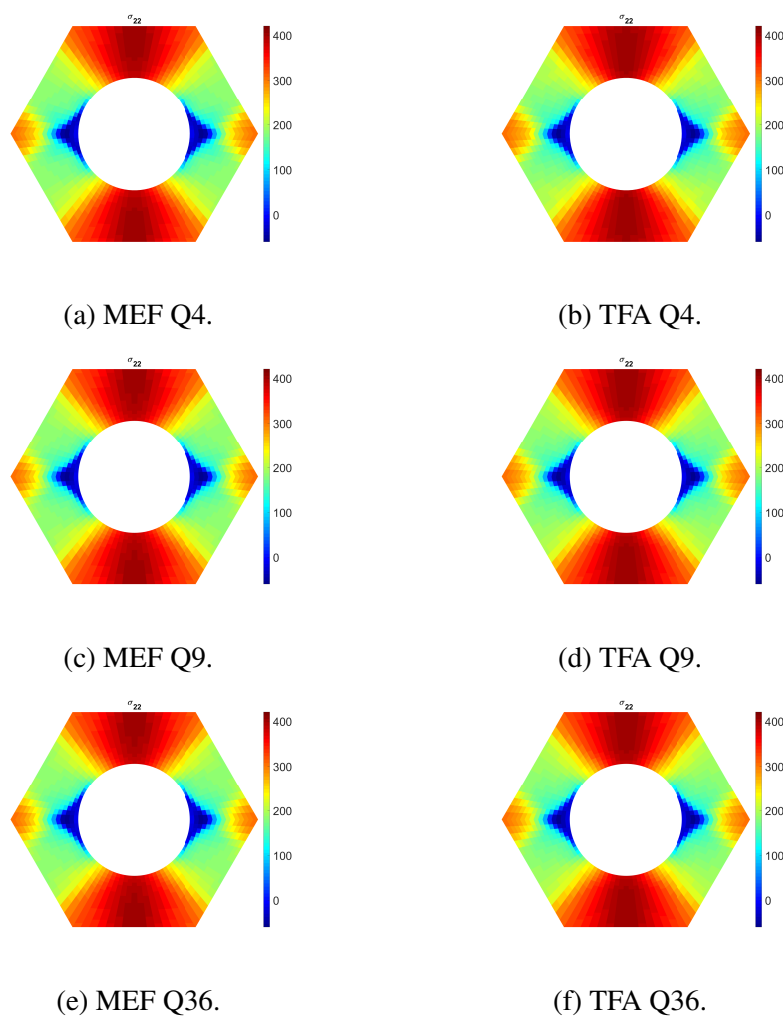


Figura 3.7 – Campos de tensões normais horizontais para tração uniaxial.

Fonte: Autor (2021).

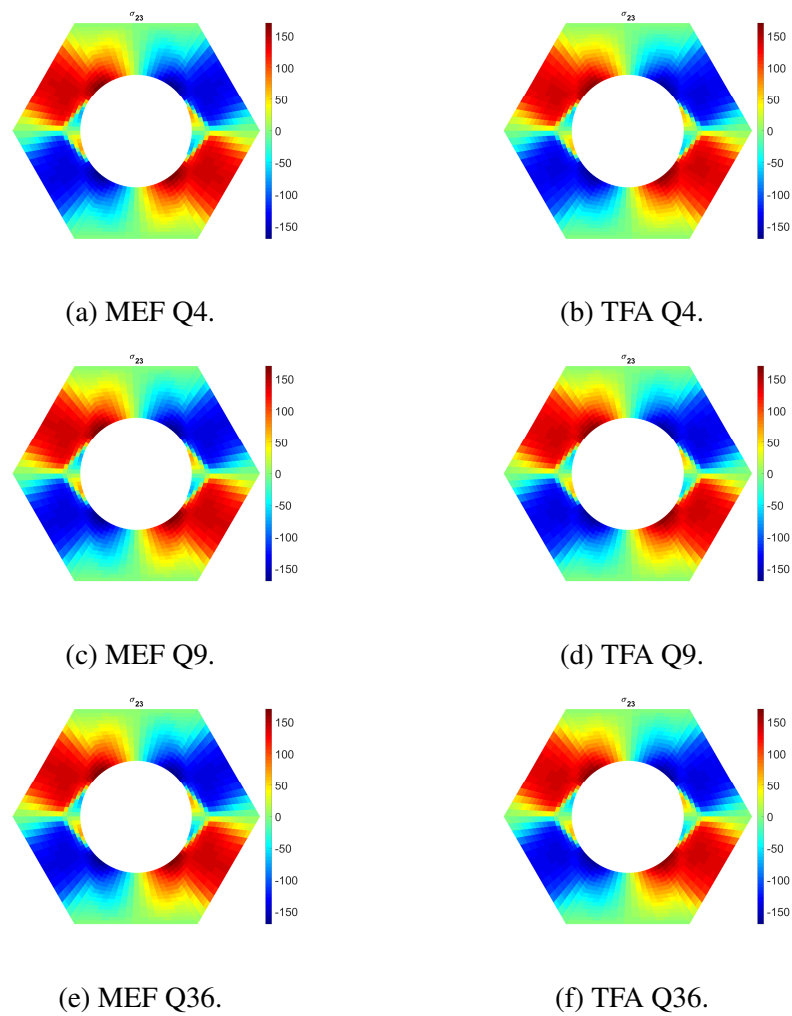


Figura 3.8 – Campos de tensões cisalhantes para tração uniaxial.

Fonte: Autor (2021).

### 3.1.2 Cisalhamento Puro

Da mesma forma, a Figura 3.9 e a Tabela 3.4 mostram os resultados das tensões e deformações macroscópicas médias da RUC para cisalhamento puro. As respostas macroscópicas apresentam tendências semelhantes àsquelas observadas para o caso de tração uniaxial. No entanto, observou-se que, para esse caso, a resposta macroscópica foi mais influenciada pelo nível de discretização e pelo tipo de elemento finito empregado.

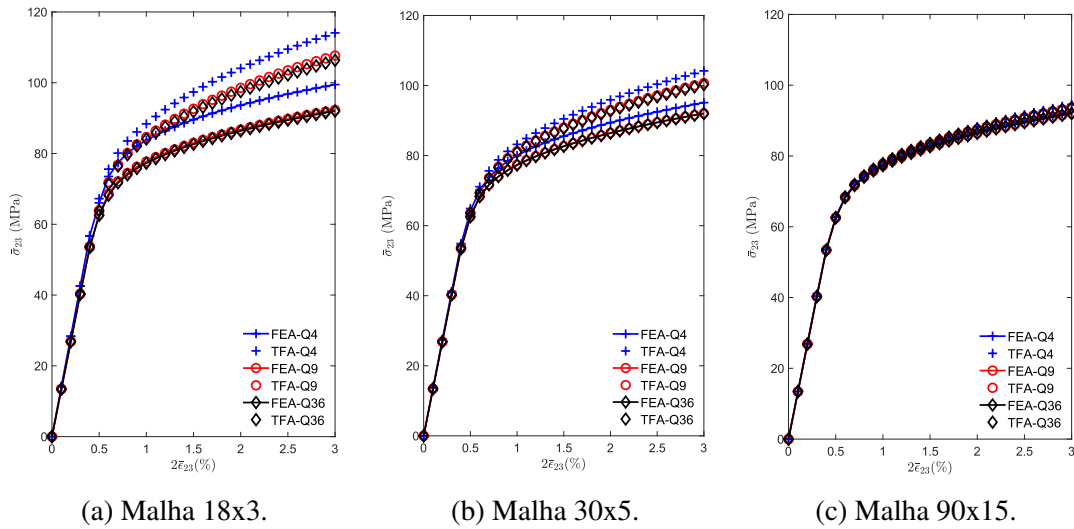


Figura 3.9 – Resposta macroscópica para cisalhamento puro empregando análise convencional em MEF e integração TFA/MEF - Cisalhamento Puro.

Fonte: Autor (2021).

Tabela 3.4 – Divergência relativa entre análise convencional em MEF e integração TFA/MEF - Cisalhamento Puro.

Cisalhamento Puro						
Deformação Macroscópica	0.5%	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
Q4 18x3	1.81%	5.56%	8.69%	11.14%	13.08%	14.66%
Q4 30x5	1.02%	3.98%	5.77%	7.31%	8.52%	9.53%
Q4 90x15	0.15%	0.77%	1.29%	1.70%	2.05%	2.35%
Q9 18x3	1.89%	8.90%	11.58%	13.59%	15.29%	16.60%
Q9 30x5	1.72%	4.96%	6.41%	7.59%	8.55%	9.38%
Q9 90x15	0.19%	0.73%	1.11%	1.40%	1.64%	1.85%
Q36 18x3	2.03%	8.87%	11.15%	12.86%	14.29%	15.59%
Q36 30x5	1.72%	4.84%	6.21%	7.30%	8.20%	8.98%
Q36 90x15	0.19%	0.72%	1.08%	1.37%	1.60%	1.81%

Como visto para tração uniaxial, o aumento na quantidade de elementos resulta em menores diferenças entre as análises. Nesse caso, a diferença relativa máxima para o maior nível de discretização é menor que 3%, enquanto que, para o menor nível, a diferença alcançou valor máximo de aproximadamente 17%. Esses resultados corroboram o emprego da TFA para maiores níveis de discretização e com elementos finitos de maior ordem.

Para o cisalhamento puro macroscópico, campos de deformação plástica efetiva e de tensões são apresentados nas malhas 90x15 para todos os tipos de elementos empregados (Figuras 3.10 a 3.12). Esses campos apresentam distribuições médias uniformes por elemento para comparar com os resultados obtidos na análise clássica com o MEF. Para esse nível de discretização, a resposta localizada obtida pela TFA é tão boa quanto a resposta localizada obtida pela análise clássica para todos os elementos finitos avaliados.



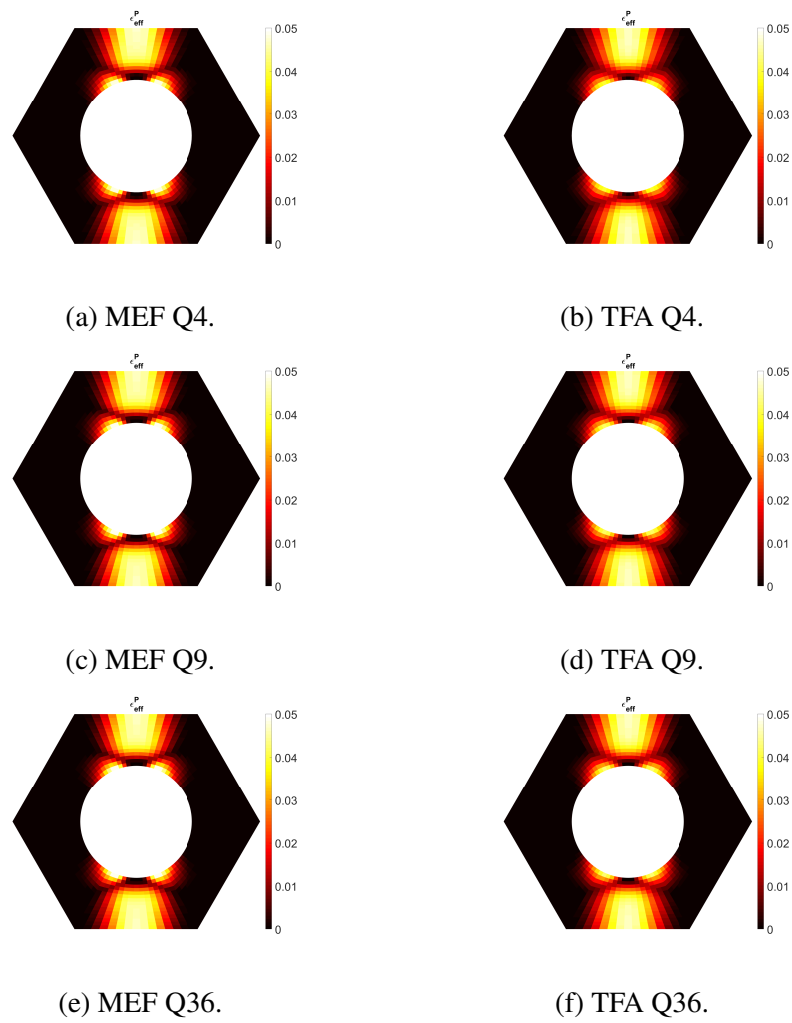


Figura 3.10 – Campos de deformações plásticas efetivas para cisalhamento puro.

Fonte: Autor (2021).

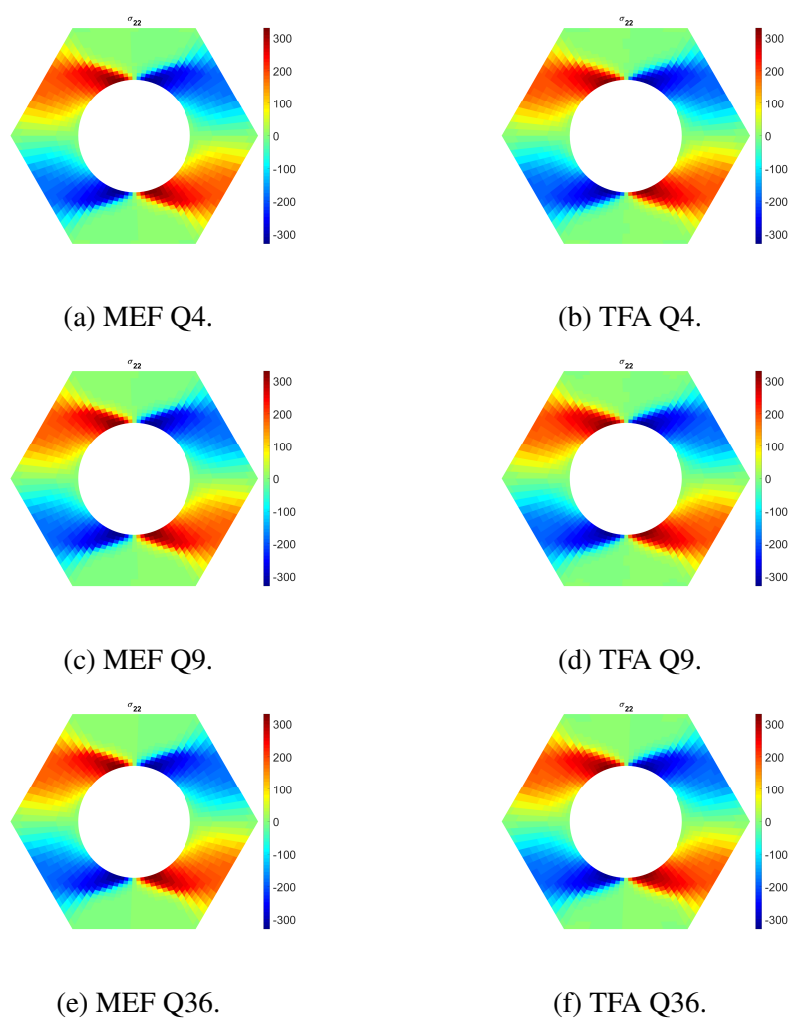


Figura 3.11 – Campos de tensões normais horizontais para cisalhamento puro.

Fonte: Autor (2021).

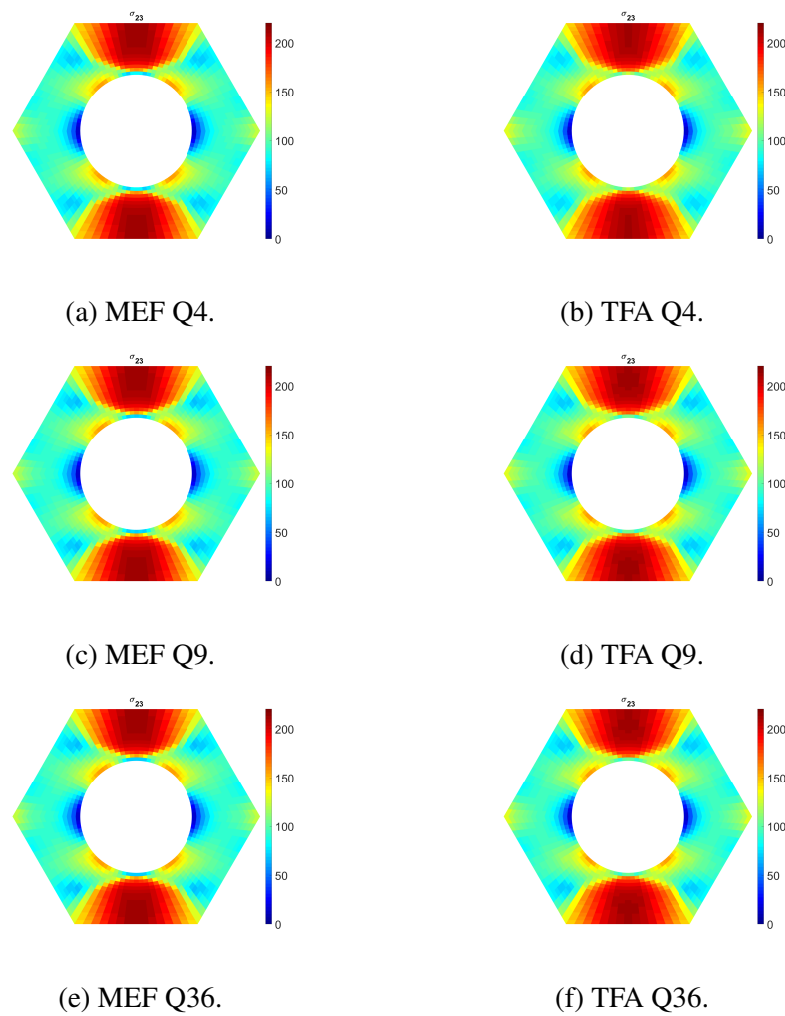


Figura 3.12 – Campos de tensões cisalhantes para cisalhamento puro.

Fonte: Autor (2021).

## 3.2 Verificação Macroscópica Experimental

A comparação entre a integração TFA/MEF e a análise convencional também é realizada por meio de um experimento encontrado em Öchsner et al. (2001) e Öchsner e Lamprecht (2003) para análise elastoplástica de chapas perfuradas sob tração uniaxial, como mostrado na Figura 3.13. Os experimentado empregaram frações de vazios de 19% e 28%.

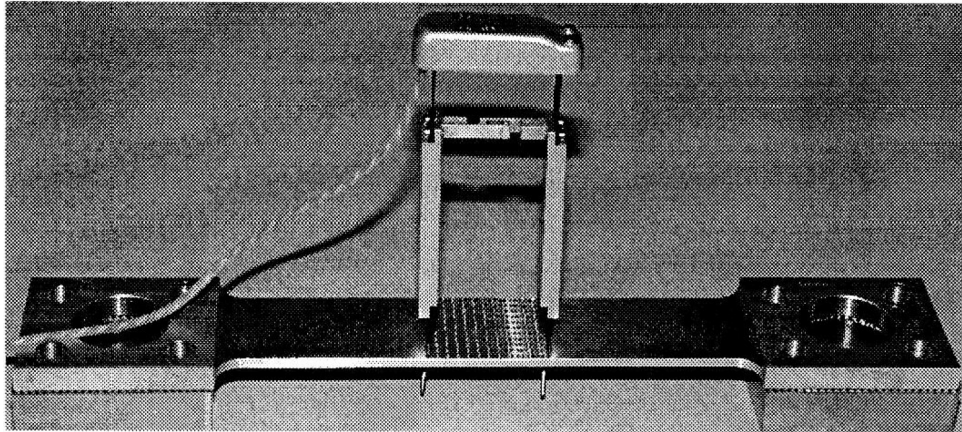


Figura 3.13 – Base do experimento feito em Öchsner e Lamprecht (2003).

Fonte: Öchsner e Lamprecht (2003).

Para execução do estudo numérico, três disposições nodais foram adotadas: o nível mais baixo tem 1680 nós e o mais refinado, 3720 nós. Tais disposições foram montadas de tal forma que elementos de primeira, segunda e quinta ordem pudessem ser utilizados para montagem das malhas. A Tabela 3.5 mostra os níveis de discretização adotado para cada tipo de elemento empregado.

Todas as malhas para a fração de vazios de 19% são mostradas com as respectivas distribuições de elementos na Figura 3.14 e, por semelhança, as malhas referentes à outra fração volumétrica foram omitidas. A deformação macroscópica de 3% foi aplicada em incrementos de 0.033% (90 passos de aplicação)

Tabela 3.5 – Níveis de discretização e subdivisões do domínio por elemento.

	Menor nível	Nível intermediário	Maior nível
Quantidade de nós	440	1680	3720
Elementos lineares	400	1600	3600
Elementos quadráticos	100	400	900
Elementos de quinta ordem	16	64	144

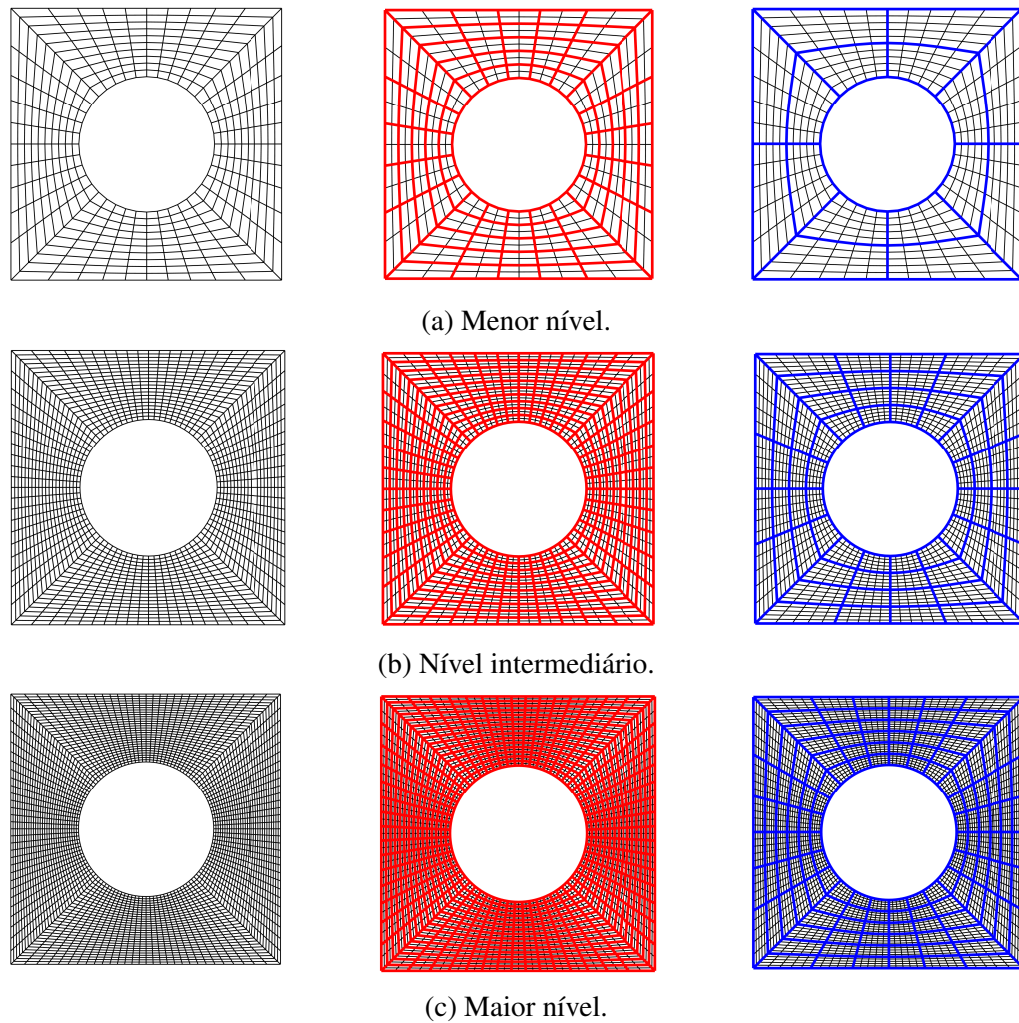


Figura 3.14 – Malhas geradas para a fração de vazios de 19% com as distribuições de elementos lineares (pretos), quadráticos (vermelhos) e de quinta ordem (azuis).

Fonte: Autor (2021).

As Figuras 3.15 e 3.16 mostram as diferenças relativas entre os resultados macroscópicos numéricos e experimentais para todos os níveis de discretização e as Tabelas 3.6 e 3.7 apresentam apenas os valores relativos aos maiores níveis de discretização.

Como esperado, MEF e TFA apresentaram respostas macroscópicas mais rígidas devido ao efeito de borda causado nas superfícies livres de tração. Outra razão para a flexibilidade da peça real são as imperfeições inerentes ao processo de fabricação do teste experimental. Em todos os casos, a integração TFA/MEF apresentou tensões macroscópicas superiores às apresentadas pelo MEF convencional, favorecendo a segurança no dimensionamento.

A diferença entre tensões macroscópicas aumenta com a evolução da deformação macroscópica, chegando a uma divergência máxima de 4% entre TFA e MEF para o elemento finito de quinto grau para a célula com fração de vazios de 19%. A diferença relativa entre MEF e TFA para as malhas usando elementos finitos lineares e quadráticos ficou abaixo de 1%.

Como os resultados mostram, existem situações onde a integração entre TFA e MEF pode apresentar resultados precisos quando comparados com a abordagem clássica do MEF. Neste sentido, é essencial avaliar o custo computacional dessas análises para entender o potencial da TFA como uma alternativa viável ao MEF clássico.

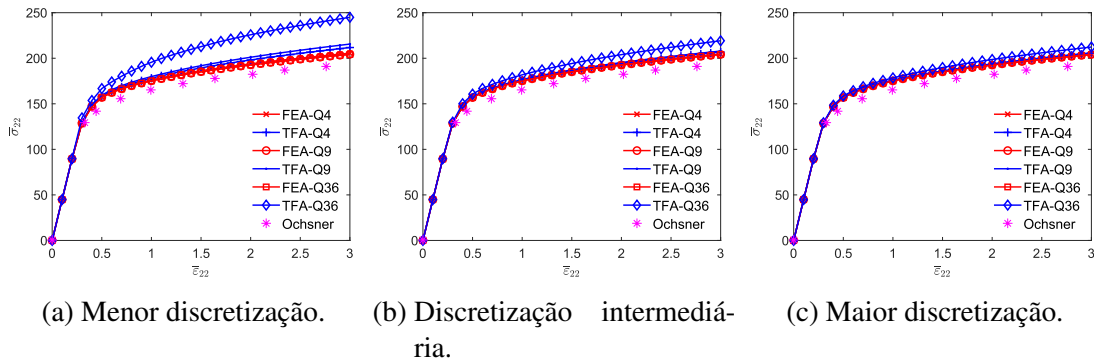


Figura 3.15 – Razão volumétrica de 19%

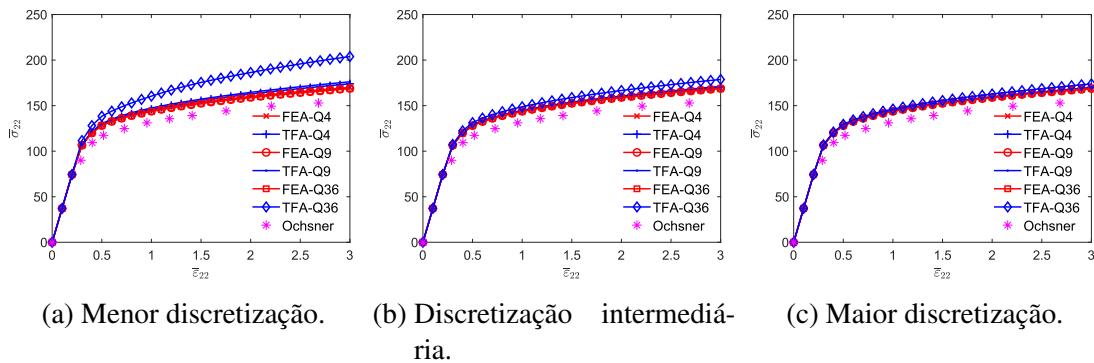


Figura 3.16 – Razão volumétrica de 28%

Fonte: Autor (2021).

Tabela 3.6 – Diferenças relativas entre resultados numéricos e experimentais para fração de vazios de 19%.

Deformação Macroscópica (%)	Análise Convencional			TFA			Diferença (TFA-MEF)		
	Q4	Q9	Q36	Q4	Q9	Q36	Q4	Q9	Q36
0.4	3.64%	3.57%	3.56%	3.70%	3.77%	4.59%	0.06%	0.19%	1.03%
0.7	7.01%	6.95%	6.94%	7.12%	7.23%	8.51%	0.10%	0.29%	1.57%
1.0	6.06%	5.99%	5.98%	6.23%	6.38%	7.98%	0.17%	0.40%	1.99%
1.3	5.55%	5.47%	5.47%	5.79%	5.97%	7.87%	0.24%	0.49%	2.40%
1.6	5.08%	5.00%	5.00%	5.39%	5.58%	7.81%	0.31%	0.58%	2.81%
2.0	5.65%	5.57%	5.57%	6.05%	6.26%	8.88%	0.39%	0.69%	3.32%
2.3	5.12%	5.03%	5.03%	5.57%	5.80%	8.63%	0.45%	0.77%	3.60%
2.8	5.88%	5.79%	5.79%	6.42%	6.68%	9.85%	0.55%	0.89%	4.06%

Tabela 3.7 – Diferenças relativas entre resultados numéricos e experimentais para fração de vazios de 28%.

Deformação Macroscópica (%)	Análise Convencional			TFA			Diferença (TFA-MEF)		
	Q4	Q9	Q36	Q4	Q9	Q36	Q4	Q9	Q36
0.4	9.69%	9.60%	9.58%	9.73%	9.81%	10.56%	0.04%	0.20%	0.98%
0.5	9.16%	9.07%	9.06%	9.21%	9.29%	10.28%	0.05%	0.23%	1.22%
0.7	9.08%	8.99%	8.98%	9.16%	9.29%	10.57%	0.08%	0.30%	1.58%
1.0	9.74%	9.65%	9.65%	9.88%	10.02%	11.52%	0.13%	0.37%	1.87%
1.2	8.92%	8.83%	8.82%	9.08%	9.24%	10.81%	0.16%	0.41%	1.99%
1.4	8.62%	8.53%	8.52%	8.81%	8.97%	10.66%	0.19%	0.45%	2.14%
1.8	8.59%	8.49%	8.49%	8.83%	9.01%	10.93%	0.25%	0.51%	2.44%
2.2	7.93%	7.83%	7.83%	8.23%	8.41%	10.54%	0.30%	0.58%	2.71%
2.7	8.74%	8.64%	8.64%	9.11%	9.30%	11.71%	0.38%	0.66%	3.08%

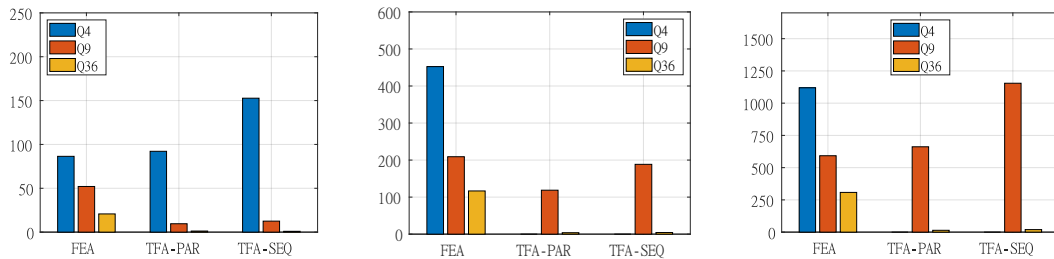
### 3.3 Custo Computacional

A análise do custo computacional é importante para avaliar o custo-benefício referente ao aumento da discretização do domínio e adoção de elementos de alta ordem. É essencial não apenas avaliar a precisão de ambos os métodos (conforme apresentado na Seção anterior), mas medir o tempo computacional das duas abordagens (TFA/MEF e análise convencional). É importante ressaltar que todo esforço computacional mensurado considera apenas o processo de análise elastoplástica. Isto é, o tempo computacional aplicado no cálculo dos tensores de concentração e influência para emprego da TFA não foram contabilizados, pois, uma vez calculados os tensores, qualquer estado de carregamento macroscópico pode ser imposto ao modelo. Um exemplo consiste na geração de superfícies de plastificação.

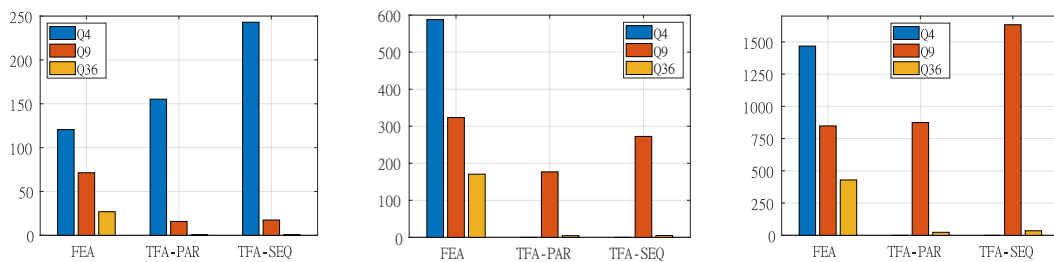
A aplicação da TFA integrada ao MEF altera a formulação usada para calcular a resposta macroscópica do meio poroso periódico. A análise clássica em elementos finitos monta e resolve um sistema de equações lineares para encontrar os deslocamentos nodais e, a partir daí, os campos de tensão e deformação - passo este considerado o "gargalo" do método. A TFA avalia campos de deformação por meio de somatórios de um produto entre os tensores pré-calculados com o campo de deformação uniforme de cada elemento finito do domínio de análise discretizado. As duas operações podem ser custosas dependendo do tamanho do modelo: a vantagem da TFA pode se tornar um problema caso a discretização do domínio seja muito alta, pois para  $N$  elementos existem  $N^2$  tensores de influência. Para complementar a análise, também mede-se o desempenho da TFA com a aplicação de uma técnica de paralelização na operação do somatório do produto. A seguir, o custo computacional da abordagem clássica é comparado com o custo da TFA sequencial e paralela para as análises numéricas empregadas para simular o experimento de Ochsner.

Todas as análises foram realizadas no ambiente Matlab 2019a (THE MATHWORKS INC., 2019) com um processador Intel Core i7-7700HQ (que possui 4 cores físicos e 4 virtuais) rodando a 3.8GHz com 16GBs de RAM. A Figura 3.17 mostra os tempos computacionais gastos em todas as simulações para os modelos de Ochsner, exceto os custos computacionais da TFA

com as malhas mais discretizadas que empregam elementos finitos lineares, pois impediam boa visualização gráfica. Complementando os gráficos, as Tabelas 3.8 e 3.10 mostram todos os tempos computacionais mensurados e as Tabelas 3.9 e 3.11 mostram os valores percentuais em relação aos respectivos tempos obtidos com a análise convencional (*Finite Element Analysis - FEA*).



(a) Menor discretização - 19%. (b) Discretização intermediária (c) Maior discretização - 19%.



(d) Menor discretização - 28%. (e) Discretização intermediária (f) Maior discretização - 28%.

Figura 3.17 – Custo computacional em segundos das análises numéricas baseadas no experimento de Ochsner.

Fonte: Autor (2021).

Tabela 3.8 – Tempo computacional em segundos das análises com fração de vazios de 19%.

	Discretização baixa			Discretização intermediária			Discretização alta		
	MEF	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	MEF	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	MEF	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR
Q4	86.40	153.00	92.00	452.40	3116.00	1906.00	1119.20	18124.00	25324.00
Q9	52.06	12.50	9.56	209.07	188.50	118.68	592.34	1154.50	661.75
Q36	21.11	0.69	0.79	133.86	4.64	4.20	334.67	20.05	14.69

Tabela 3.9 – Valores percentuais dos custos em relação ao tempo da análise convencional para frações de vazios de 19%.

	Discretização Baixa		Discretização Intermediária		Discretização Alta	
	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR
Q4	177.08%	106.48%	688.77%	421.31%	1619.37%	2262.69%
Q9	24.01%	18.37%	90.16%	56.77%	194.91%	111.72%
Q36	3.29%	3.76%	3.46%	3.14%	5.99%	4.39%



Tabela 3.10 – Tempo computacional em segundos das análises com fração de vazios de 28%.

	Discretização baixa			Discretização intermediária			Discretização alta		
	MEF	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	MEF	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	MEF	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR
Q4	120.60	243.000	155.000	588.00	4512.000	2854.000	1467.10	24536.000	41281.000
Q9	71.35	17.400	15.838	323.47	272.500	176.808	848.31	1632.700	874.656
Q36	26.02	0.773	0.696	162.12	4.832	4.699	459.14	33.185	24.309

Tabela 3.11 – Valores percentuais dos custos em relação ao tempo da análise convencional para frações de vazios de 19%.

	Discretização Baixa		Discretização Intermediária		Discretização Alta	
	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR	TFA/MEF SEQ	TFA/MEF PAR
Q4	201.49%	128.52%	767.35%	485.37%	1672.41%	2813.78%
Q9	24.39%	22.20%	84.24%	54.66%	192.47%	103.11%
Q36	2.97%	2.68%	2.98%	2.90%	7.23%	5.29%

Naturalmente, o custo computacional da TFA aumenta com a discretização, o que pode ser visto para as duas frações de vazios. Além disso, para o caso dos elementos finitos lineares, considerando o maior nível de discretização, a comunicação entre os núcleos do processador tornou-se tão custosa que o uso da TFA sequencial apresentou menor custo computacional. Esse problema pode ser minimizado aumentando a quantidade de núcleos disponíveis ou empregando processadores mais potentes ou placas gráficas.

Nas análises empregando os elementos finitos quadráticos, para os níveis de discretização baixo e intermediário, as abordagens sequencial e paralela para a TFA apresentaram menores custos computacionais que a análise clássica em MEF. Para a discretização mais alta, a TFA em paralelo apresentou tempos um pouco mais altos que àqueles observados na análise clássica. A TFA em paralelo teve desempenho superior à TFA sequencial para todas as malhas, exceto a de maior discretização empregando elementos finitos lineares.

Em termos do custo computacional, os melhores resultados empregando a TFA foram obtidos na aplicação de elementos de alta ordem, como observado para o elemento de quinta ordem. Entregando um máximo de 4% de diferença relativa à análise clássica, a abordagem sequencial da TFA entregou resultados usando apenas 7% do tempo. Usando a abordagem em paralelo, o custo cai para 5%. No entanto, é necessário refinar a malha para obter resultados mais precisos sem aumentar substancialmente o custo computacional.

É importante ressaltar que o tempo computacional gasto para cálculo dos tensores de concentração de deformação e de influência plástica não foram levados em consideração nas análises anteriores. A Tabela 3.12 apresenta os valores do custo computacional para essa etapa. Observa-se que, mesmo somando este tempo computacional ao tempo da análise elastoplástica, a integração TFA/MEF apresenta valores de performance semelhantes para os casos de discretização intermediária e valores inferiores para os casos de discretização alta ao empregar elementos finitos de grau 5.

Tabela 3.12 – Tempo computacional gasto no cálculo dos tensores de concentração de deformações e de influência (em segundos).

	Fração de Vazios 19%			Fração de Vazios 28%		
	Disc. Baixa	Disc. Int.	Disc. Alta	Disc. Baixa	Disc. Int.	Disc. Alta
Q4	23	348	2323	26	402	2258
Q9	4	48	300	4	57	282
Q36	2	21	107	2	24	120

Com isso, apresentam-se os principais resultados em termos de acurácia das análises elastoplásticas baseadas na TFA e o custo computacional envolvido na realização destas análises. Ressalta-se também a comparação realizada com valores obtidos experimentalmente por Öchsner et al. (2001). Conforme dito anteriormente, as análises numéricas podem, por exemplo, serem empregadas para avaliação de superfícies de plastificação do material. Nesse sentido, o Capítulo seguinte apresenta os resultados da geração das superfícies de plastificação para diferentes arranjos e furos usando a integração TFA/MEF.

## 4 SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO

No processo de caracterização do comportamento de um meio poroso, sua avaliação em regimes inelásticos é essencial. A presença de estados de deformação permanente influencia a distribuição de tensões locais no meio quando sujeito a carregamentos, gerando novos picos de tensão que podem causar problemas estruturais. Identificar modos característicos de deformação plástica objetiva reduzir o problema de avaliação da célula unitária analisando o meio sob diversos estados de tensão diferentes. A avaliação de regiões de ocorrência de escoamento também é interessante para otimização de análises numéricas

Segundo Khatam e Pindera (2011), a presença de porosidades circulares produzem um estado de tensões altamente não uniforme (alguns desses estados foram apresentados no Capítulo 3). A distribuição das deformações plásticas no meio decorrem de um escoamento localizado e suas direções preferenciais de evolução dependem do carregamento aplicado. Para determinar as superfícies de plastificação, encontram-se estados macroscópicos de tensões que atendam a algum critério de deformação plástica. Um exemplo é a superfície de escoamento, que é definida como o lugar geométrico no espaço de tensões macroscópicas onde as tensões locais atingem o patamar de escoamento. Outro exemplo, este sendo o aplicado no presente trabalho, resume-se ao critério de deformação plástica macroscópica equivalente, a ser melhor descrito a seguir.

Neste contexto, o presente capítulo apresenta a definição de superfície de plastificação, o critério adotado para geração das superfícies e os resultados numéricos obtidos a partir da integração TFA/MEF. Estes resultados são comparados com superfícies geradas empregando análise clássica elastoplástica do MEF, bem como os tempos computacionais de geração de dois estudos de caso.

### 4.1 Definição

Entre os principais critérios de escoamento, o de Von Mises pode ser apresentado como

$$\frac{1}{2}S_{ij}S_{ji} = \frac{1}{3}\sigma_{ef}^2 \quad (4.1)$$

onde  $S_{ij}$  e  $\sigma_{ef}$  são o tensor de tensões desviadoras e a tensão efetiva, respectivamente. Assim como outros critérios, este define um local geométrico no espaço de tensões macroscópicas de valor fixo, associado à tensão efetiva para um dado histórico de deformação plástica efetiva em cada ponto da RUC. A Equação 4.2 mostra a relação local entre tensão  $\sigma^{(e)}$  e deformação total  $\varepsilon^{(e)}$  e deformação plástica  $\varepsilon_e^P$  em um elemento

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{P(e)}]. \quad (4.2)$$

Analogamente, a relação macroscópica é escrita como

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^*[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P] \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{C}^*$  é o tensor constitutivo macroscópico. Em adição, o cálculo das deformações locais e a relação base da TFA estão registradas na Equação 2.42, aqui adaptada para elementos finitos

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{\hat{e}=1}^N \mathbf{D}^{(e,\hat{e})}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{P(\hat{e})} \quad (4.4)$$

com  $\mathbf{A}^{(e)}$  e  $\mathbf{D}^{(e,\hat{e})}$  sendo respectivamente o tensor de concentração de deformações do elemento  $e$  e o tensor de influência entre os elementos  $e$  e  $\hat{e}$ . Por meio de algumas manipulações das três equações anteriores, obtém-se a relação entre tensões locais e globais

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{B}^{(e)}\bar{\mathbf{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + \mathbf{C} \left[ \left[ \sum_{\hat{e}=1}^N \mathbf{D}^{(e,\hat{e})}\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\hat{e})} \right] - \boldsymbol{\varepsilon}^{P(e)} \right] \quad (4.5)$$

sendo  $\mathbf{B}^{(e)} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{A}^{(e)}[\bar{\mathbf{C}}]^{-1}$  o tensor de concentração de tensões. Assim, as componentes desviadoras do campo de tensão podem ser avaliadas e inseridas no critério de Von Mises. A superfície de escoamento calculada para cada ponto do espaço de tensões macroscópicas é uma elipse cuja geometria é definida pelos tensores de concentração de tensões e cujo centro e tamanho dependem das deformações plásticas locais acumuladas (KHATAM; PINDERA, 2011).

Carregamentos além dos limites elásticos expandem a zona plástica desenvolvida, transladando e expandindo as superfícies nos pontos que se encontram no regime plástico da célula unitária. Conforme apresentado na Equação 4.5, a contribuição plástica é avaliada em todos os elementos. A medida que as zonas plásticas se expandem na célula unitária, novos pontos caracterizados por superfícies locais de escoamento são acrescentados à superfície de escoamento global. Dentro desse contexto, soluções aproximadas baseadas na discretização da célula unitária reduzem o problema à uma situação discreta.

No processo de geração de superfícies de escoamento, podem-se definir outros níveis de plastificação de acordo com a necessidade do projetista. Enquanto a superfície de escoamento apresenta uma envoltória inicial do início da plastificação da célula unitária, é possível gerar superfícies de plastificação associadas, por exemplo, a um patamar de deformação plástica equivalente máxima visando encontrar as superfícies de plastificação quando a deformação plástica equivalente macroscópica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^P$  atinge um determinado valor para um tensor macroscópico de deformação plástica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^P$ , onde

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^P = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_{ij}^P \bar{\varepsilon}_{ij}^P}. \quad (4.6)$$

Neste sentido, os ensaios numéricos com variação do estado de tensão macroscópica foram aplicados em quatro tipos de modelos: furo circular em arranjo hexagonal e quadrangular, furo hexagonal em arranjo hexagonal e furo quadrado em arranjo quadrado. A Figura 4.1 apresenta os meios periodicamente porosos avaliados, destacando-se as respectivas células unitárias de repetição.

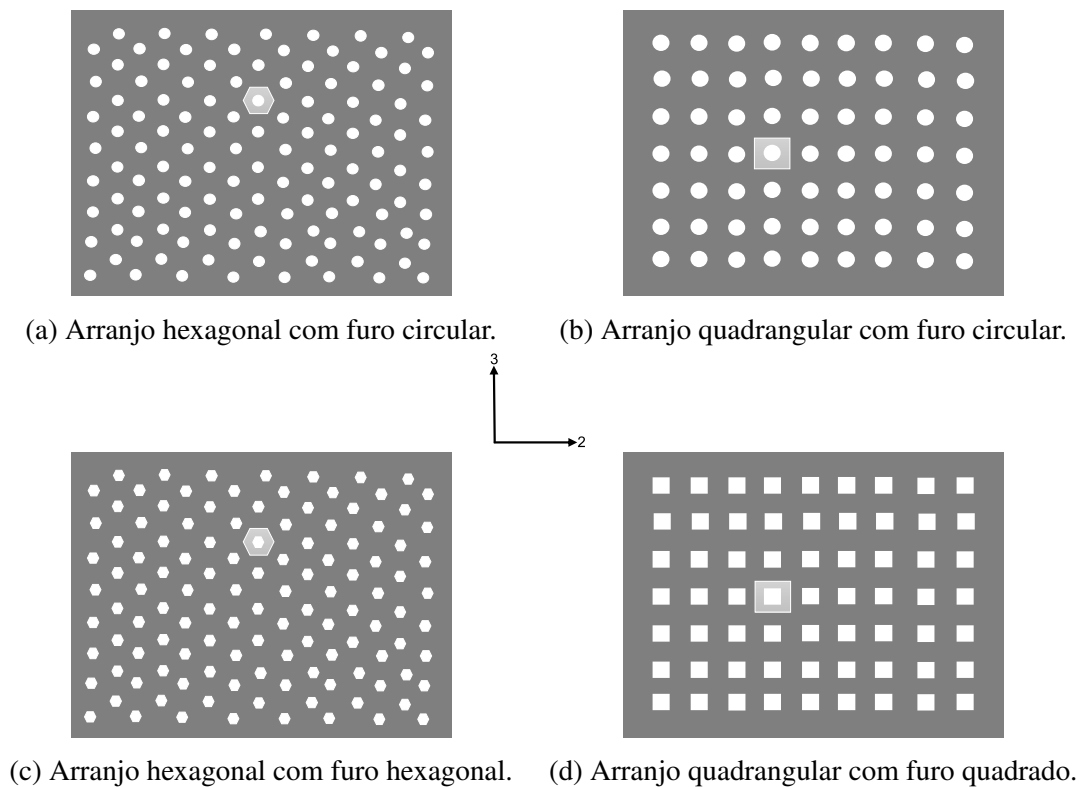


Figura 4.1 – Meios porosos e suas respectivas células unitárias.

Fonte: Autor (2021).

## 4.2 Resultados

Para garantir aderência aos valores obtidos na abordagem clássica do MEF, fez-se uma análise de uma célula unitária com porosidade de 30% em um arranjo hexagonal e com um furo circular, semelhante às análises numéricas apresentadas no Capítulo anterior. A discretização usada na análise clássica do MEF foi 90x15 em um elemento finito quadrilateral quadrático (Q9), empregando-se dos modelos já adotados no Capítulo anterior. A discretização empregada na abordagem da TFA integrada ao MEF foi 48x8 com elementos finitos quadrilaterais de grau 5 (Q36) para o arranjo hexagonal e 32x8 para o arranjo quadrangular. O material adotado foi o mesmo do Capítulo 3, seguindo a lei da potência para o encruamento plástico.

Foram realizadas 36 análises para cada modelo, com aplicação de estados de deformações crescentes até atingir a deformação plástica macroscópica equivalente de 1% ou um limite de deformação macroscópica de 3%, seguindo o limite adotado também no Capítulo anterior. Foram geradas duas superfícies de plastificação: para as componentes de tensões normais no plano  $x_2 - x_3$  ( $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\sigma}_{33}$ ) e para as componentes de tensões normal e cisalhante no plano  $x_2 - x_3$  ( $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\sigma}_{23}$ ). Para garantir a convergência do modelo, a deformação macroscópica máxima foi incrementada dentro de um intervalo de 350 passos e cada passo com um número máximo de 150 iterações.

#### 4.2.1 Superfícies de Plastificação para Tensões Normais

A Figura 4.2 mostra as duas envoltórias que foram geradas fazendo o ângulo de aplicação das tensões variar entre  $-\frac{\pi}{2}$  a  $\frac{\pi}{2}$  em intervalos de 0.1. Os valores foram rebatidos nos outros quadrantes pela simetria das tensões aplicadas. Nesse caso, a divergência relativa máxima atingiu o valor máximo de 3.93% entre as superfícies geradas pela integração TFA/MEF e pelo MEF, com a TFA/MEF favorecendo a segurança no dimensionamento. O custo computacional da análise clássica pelo MEF foi de 18 horas, 24 minutos e 17 segundos e para a TFA, 3 horas, 27 minutos e 49 segundos (18.82% do tempo).

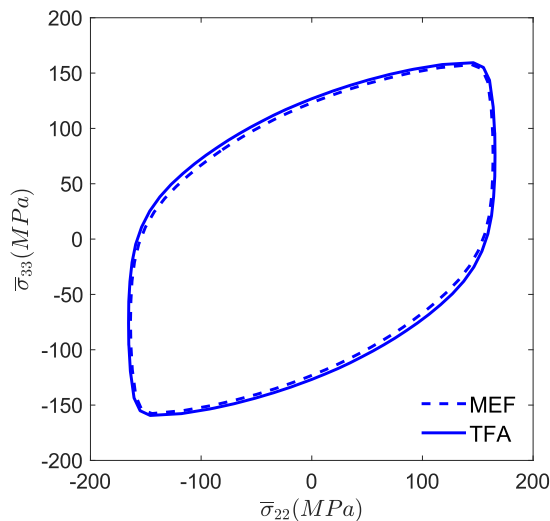
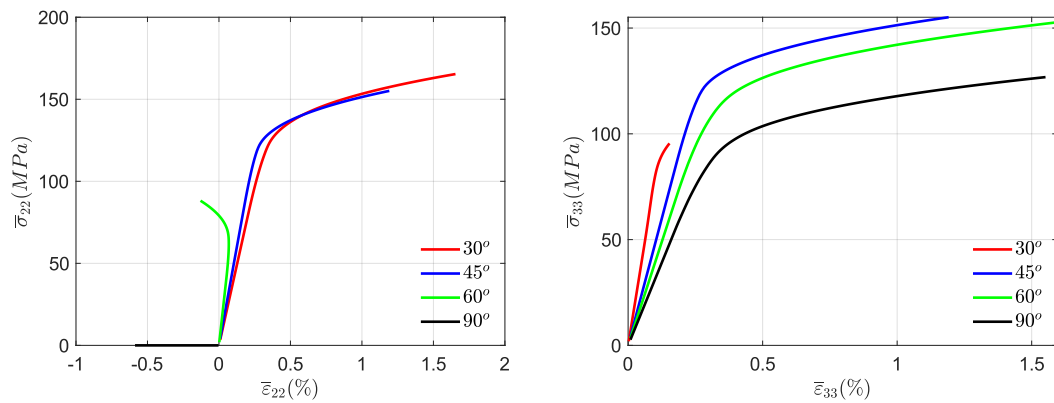


Figura 4.2 – Superfícies de plastificação geradas pelo MEF e pela TFA para arranjo hexagonal com furo circular.

Fonte: Autor (2021).

A superfície de plastificação no espaço das tensões  $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\sigma}_{33}$  mostram quatro partes separadas por cantos distintos. Para carregamentos biaxiais, o canto permanece a  $45^\circ$ , observa-se que a região de transição apresenta maior suavidade para carregamentos de intensidades semelhantes envolvendo tensões positivas e negativas. A Figura 4.3 apresenta as curvas de tensão-deformação macroscópica para os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ .



(a) Curvas para  $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\epsilon}_{22}$  para arranjo hexagonal com furo circular. (b) Curvas para  $\bar{\sigma}_{33}$  e  $\bar{\epsilon}_{33}$  para arranjo hexagonal com furo circular.

Figura 4.3 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

Observam-se tipos diferentes de comportamento de acordo com o ângulo aplicado. Para os ângulos de 30° e 45°, notam-se comportamentos semelhantes em suas curvas, com mesmo direcionamento de acordo com o aumento da deformação. O aumento do ângulo leva ao crescimento da tensão macroscópica na direção vertical e, quando a inclinação ultrapassa os 45°, os valores das tensões macroscópicas na direção horizontal tendem a diminuir, assim como uma deformação de encurtamento começa a aparecer, culminando no ângulo de 90°, onde a tensão macroscópica na direção vertical é máxima.

De forma a estabelecer algumas relações entre modos de deformação plástica e as diferentes regiões da superfície de plastificação, campos de deformação plástica efetiva foram avaliados em quatro níveis de deformação macroscópica. As Figuras 4.4 a 4.6 apresentam a evolução dos campos de deformação plástica efetiva, mostrando diferentes modos de deformação plástica associados a diferentes regiões da superfície de plastificação.

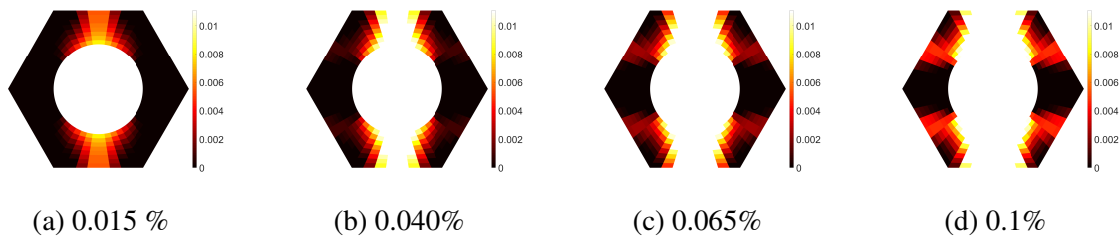


Figura 4.4 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°.

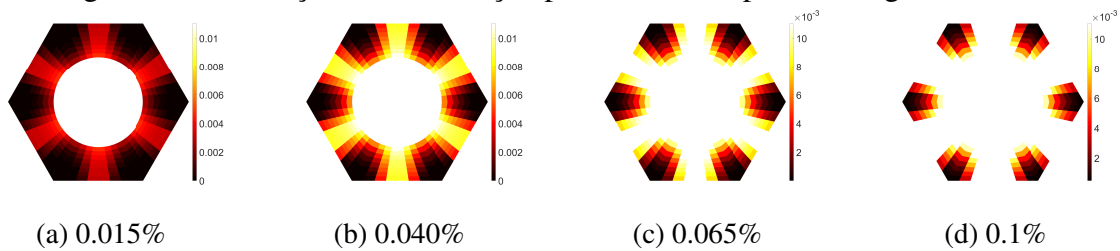


Figura 4.5 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°.

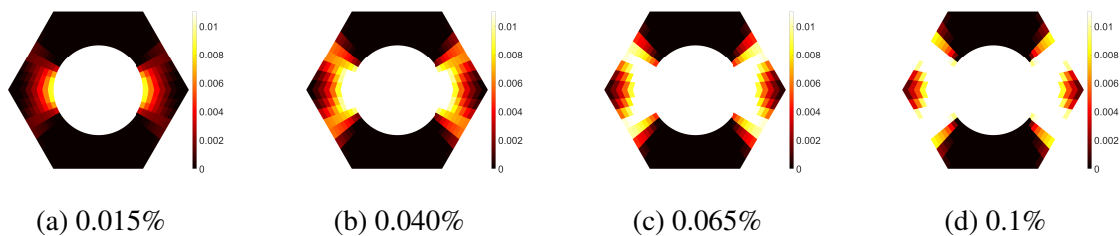


Figura 4.6 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°.

Fonte: Autor (2021).

Notam-se três modos distintos nos estágios da plastificação, evoluindo de locais diferentes de acordo com o início do escoamento. Para o ângulo de 30°, a plastificação ocorre a partir da fronteira do furo, na direção vertical. Para pontos da superfície de plastificação com ângulo menor que 45°, o escoamento ocorre a partir dos furos, na direção vertical. Quando a tensão atinge valores iguais nas duas componentes, observa-se o escoamento em seis locais diferentes, próximos à borda interna do furo. Para ângulos maiores que 45°, nota-se o escoamento ocorrendo em 2 pontos, simetricamente distribuídos em relação ao eixo horizontal.

De maneira semelhante, avaliou-se o modelo com furo circular em um arranjo quadrangular. A discretização dessa malha apresentou uma configuração diferente da vista no modelo em arranjo hexagonal com furo circular (32x8). O objetivo, no entanto, era manter o padrão de 64 elementos por quadrante do modelo. Para este caso, o comportamento é muito semelhante ao visto no modelo anterior, com furo circular e arranjo hexagonal. A Figura 4.7 apresenta a superfície de plastificação gerada.



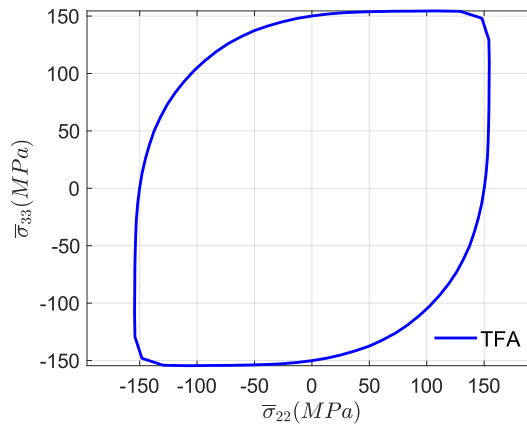
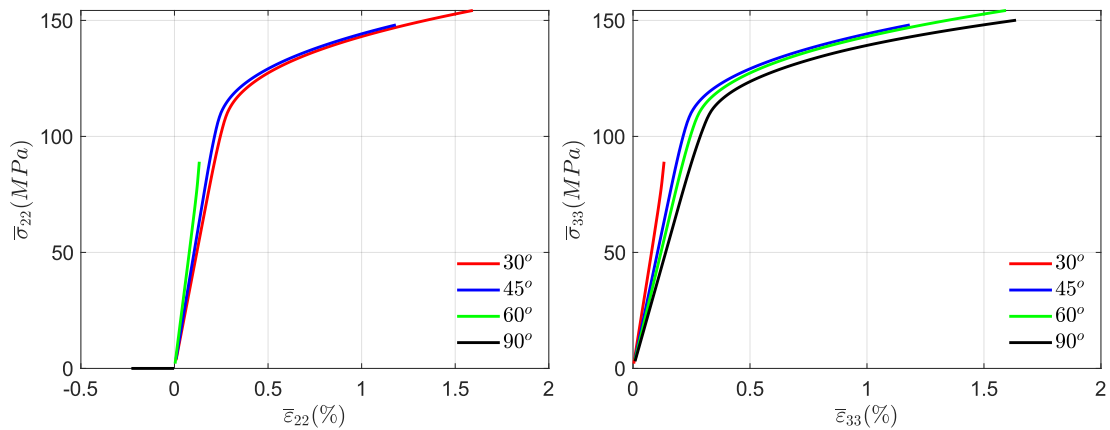


Figura 4.7 – Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular.

Fonte: Autor (2021).

Assim como o modelo anterior, esta superfície pode ser dividida em quatro regiões, nos ângulos de  $\pm 45^\circ$  e  $\pm 135^\circ$ , com picos de tensão nas regiões onde  $\bar{\sigma}_{22}$  se assemelha a  $\bar{\sigma}_{33}$ . A Figura 4.8 mostra as curvas tensão-deformação macroscópica para diferentes ângulos. Novamente, o comportamento foi semelhante ao modelo com arranjo hexagonal e furo circular.



(a) Curvas para  $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\epsilon}_{22}$  para arranjo quadrangular com furo circular. (b) Curvas para  $\bar{\sigma}_{33}$  e  $\bar{\epsilon}_{33}$  para arranjo quadrangular com furo circular.

Figura 4.8 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

As Figuras 4.9 a 4.11 apresentam os modos de deformação plástica para os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

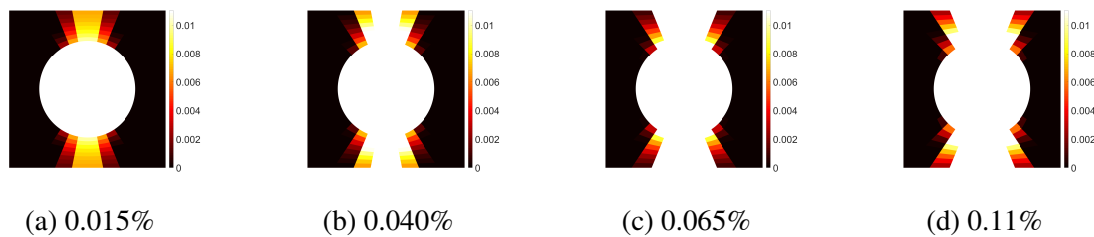


Figura 4.9 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $30^\circ$ .

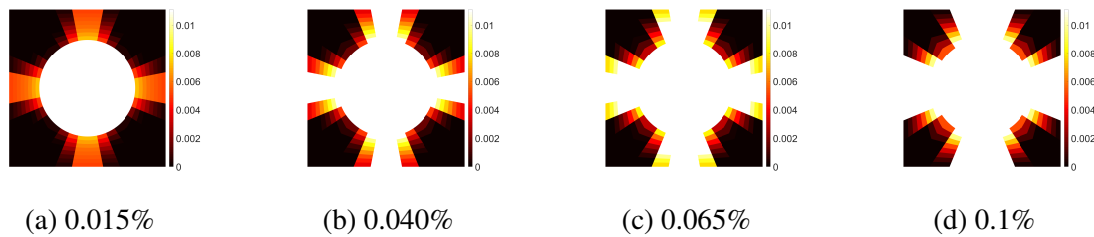


Figura 4.10 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $45^\circ$ .

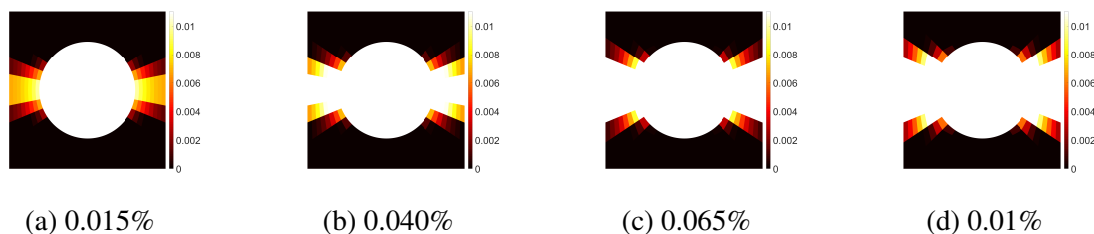


Figura 4.11 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $60^\circ$ .

Fonte: Autor (2021).

A aplicação de tensões nas direções  $30^\circ$  e  $60^\circ$  geram modos característicos de plastificação com deformação plástica efetiva iniciando nas bordas internas nos eixos vertical e horizontal, respectivamente e, para o caso da aplicação de tensões iguais, a deformação plástica é visível nos dois eixos. Para a direção de  $45^\circ$ , no caso do arranjo quadrangular, observam-se 4 eixos de distribuição do escoamento referentes aos caminhos de menor distância entre as bordas interna e externa da célula unitária periódica.

Para o modelo com arranjo hexagonal e furo hexagonal, a presença de quinas gera picos de tensão locais para estados macroscópicos de tensões relativamente baixos. Assim, a plastificação inicia-se mais cedo do que no caso do furo circular. A Figura 4.12 mostra a superfície de plastificação atingida para uma deformação plástica macroscópica equivalente de 1%.

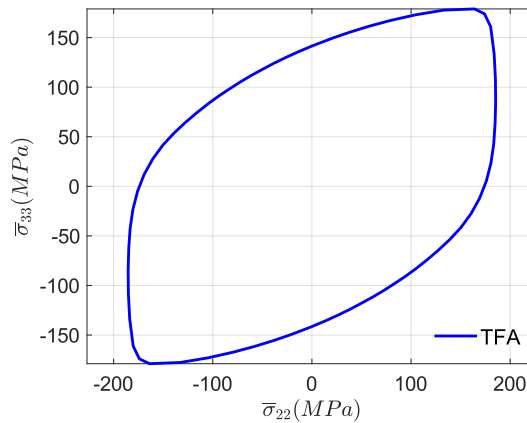


Figura 4.12 – Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo hexagonal com furo hexagonal.

Fonte: Autor (2021).

Assim como no modelo com arranjo hexagonal e furo circular, observam-se quatro divisões na superfície de plastificação. O furo hexagonal permite uma melhor distribuição de tensões quando comparado com o furo quadrado, a ser apresentado mais adiante. Assim, apesar de haver quinas, elas não geram picos de tensão tão altos. Podem ser observados cantos para os ângulos de  $45^\circ$  e  $-135^\circ$ . Em complemento, a Figura 4.13 apresenta as curvas tensão-deformação macroscópica para os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ .

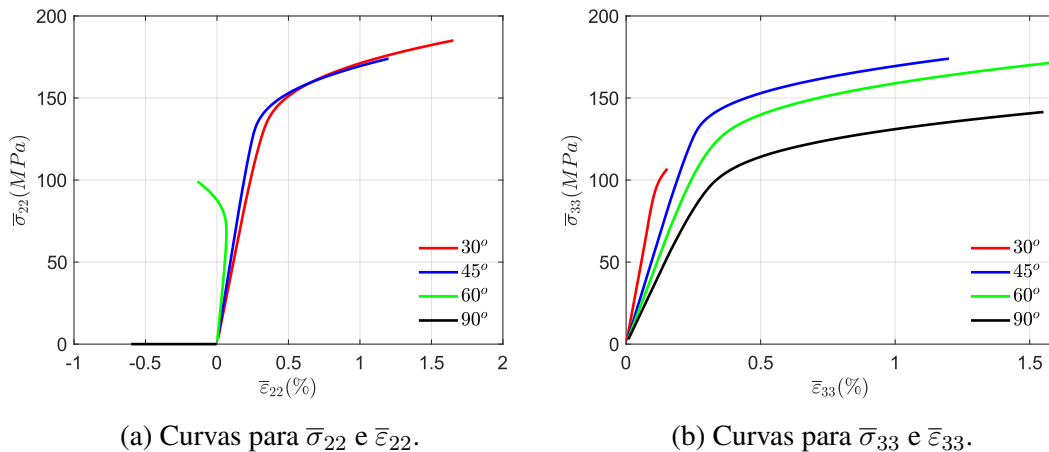


Figura 4.13 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

As curvas apresentam um aspecto semelhante ao visto no modelo de arranjo hexagonal apresentado anteriormente, apesar da geometria distinta entre os furos. Novamente, a deformação macroscópica na direção horizontal para o ângulo de  $60^\circ$  se inverte ao longo do processo de deformação para encurtamento. As Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 apresentam a evolução de três modos de deformação plástica característicos.

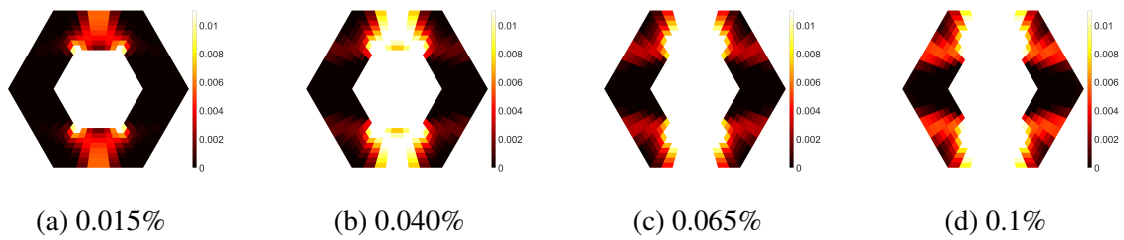


Figura 4.14 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $30^\circ$ .

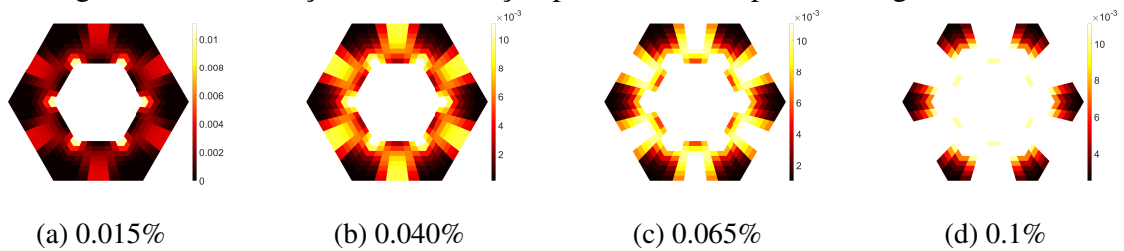


Figura 4.15 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $45^\circ$ .

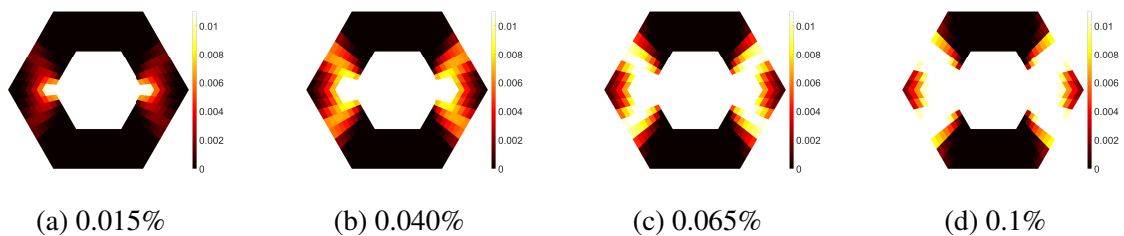


Figura 4.16 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $60^\circ$ .

Fonte: Autor (2021).

Os primeiros locais a plastificarem são as quinas do hexágono e a plastificação se distribui de acordo com o estado de carregamento. Para o caso do ângulo de  $30^\circ$ , a distribuição do escoamento ocorre na direção vertical, começando no furo e indo até a borda. Comportamento semelhante é observado para o ângulo de  $60^\circ$ , onde o escoamento começa nas quinas que se encontram no eixo central horizontal do modelo e espalham-se na direção perpendicular à borda do elemento. O comportamento da plastificação para o estado de tensões macroscópicas em um ângulo de  $45^\circ$  é uma combinação dos outros dois comportamentos.

Para o arranjo quadrangular com furo quadrado, a Figura 4.17 apresenta a superfície de plastificação calculada para uma deformação plástica macroscópica equivalente de 1%.

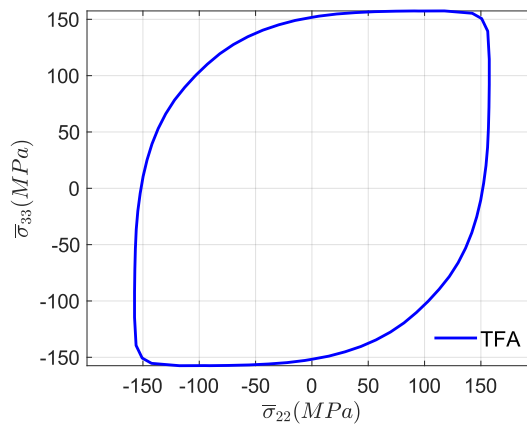
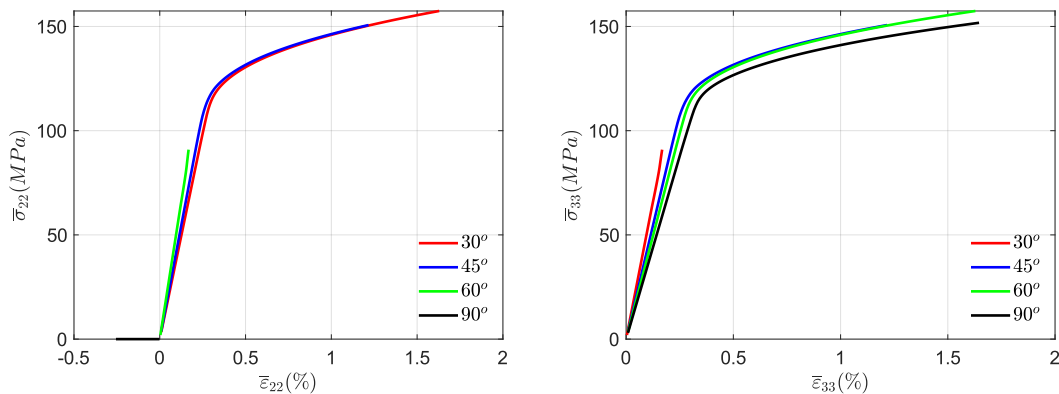


Figura 4.17 – Superfícies de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo quadrado.

Fonte: Autor (2021).

Observa-se que a presença de quinas nos furos, bem como os tamanhos deles em relação ao modelo, facilita a geração de picos de tensão mesmo em estados de tensões mais baixos, o que rapidamente leva a presença de escoamento. Nesse sentido, nota-se uma suavidade maior (quando comparado com a superfície de plastificação do modelo anterior) nas regiões separadas pelos ângulos de  $45^\circ$  e  $-135^\circ$ . Em outra análise, as curvas para os ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$  são mostradas na Figura 4.18.



(a) Curvas para  $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\epsilon}_{22}$  para arranjo quadrangular com furo quadrado. (b) Curvas para  $\bar{\sigma}_{33}$  e  $\bar{\epsilon}_{33}$  para arranjo quadrangular com furo quadrado.

Figura 4.18 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

O comportamento geral das tensões macroscópicas assemelha-se às do arranjo quadrangular com furo circular, porém com diferentes intensidades. Observa-se que a curva referente à deformação macroscópica na direção horizontal para o caso com ângulo de  $60^\circ$  não inverte para encurtamento, mas apresenta comportamento simétrico ao apresentado para o ângulo de  $30^\circ$ .

As Figuras 4.19 a 4.21 apresentam a evolução de três modos de deformação plástica efetiva de acordo com a variação angular da aplicação das tensões.

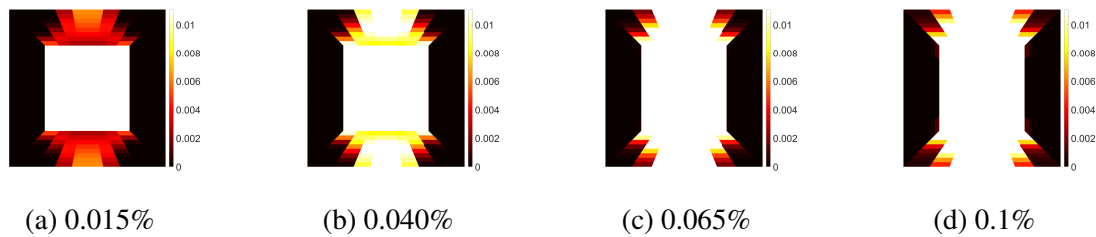


Figura 4.19 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°.

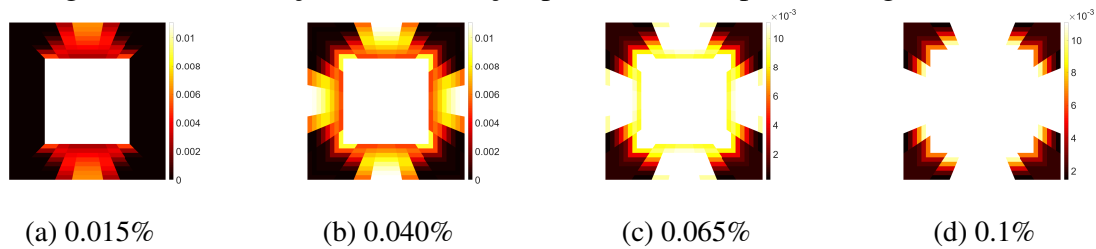


Figura 4.20 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°.

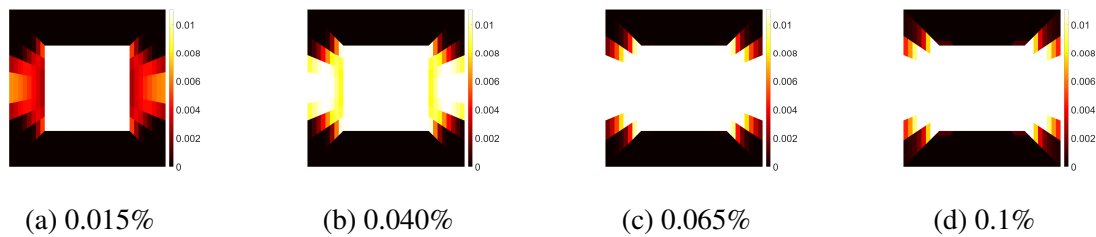


Figura 4.21 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°.

Fonte: Autor (2021).

Percebem-se estados de deformações plásticas efetivas semelhantes aos apresentados para o arranjo quadrangular com furo circular. Ressalta-se que, por conta das quinas dos furos, que geram picos de tensão, percebe-se uma deformação plástica mais uniforme nas arestas superiores e inferiores (para o caso com ângulo de 30°) e direita e esquerda (para o caso com ângulo de 60°). Como as tensões aplicadas para o ângulo de 45° são iguais, percebe-se uma distribuição mais uniforme das tensões entre as arestas e, com o avanço da plastificação, as quinas deixam de ser pontos de escoamento.

Com o intuito de comparar as superfícies de plastificação, apresentam-se todas em uma mesma figura. Dessa forma, a Figura 4.22 apresenta todas as superfícies de plastificação geradas para uma combinação de tensões normais.

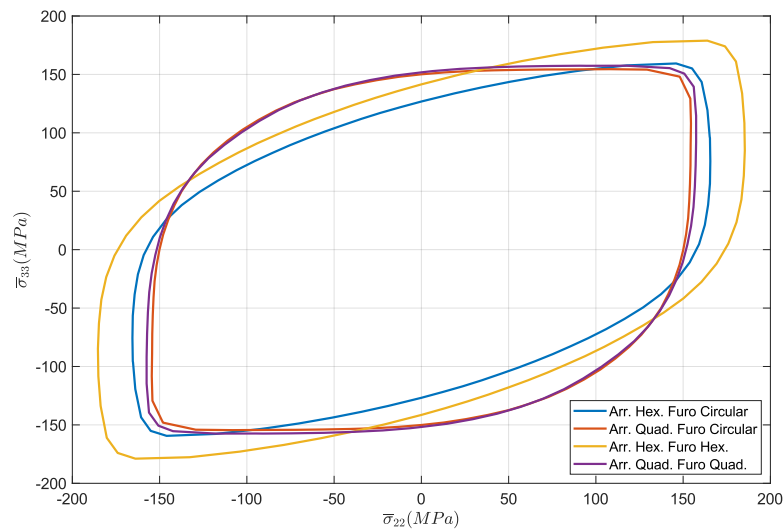


Figura 4.22 – Superfícies de plastificação geradas empregando TFA.

Fonte: Autor (2021).

Observa-se que, para a região delimitada aproximadamente por  $-23^\circ$  e  $75^\circ$ , o arranjo hexagonal com furo hexagonal apresentou os melhores resultados, enquanto os outros três modelos apresentaram desempenhos semelhantes, com uma vantagem para o arranjo hexagonal com furo circular. Este resultado foi diferente do esperado, pois esperava-se que o arranjo hexagonal com furo circular apresentasse um melhor desempenho, uma vez que a transmissão de tensões dentro da célula é mais uniforme, pois não há singularidades na borda interna.

O arranjo hexagonal, dentro do regime elástico, já apresenta melhores resultados de tensão macroscópica que o arranjo quadrangular. Supõe-se que o melhor desempenho do arranjo hexagonal com furo hexagonal aconteça também no regime plástico, pois mesmo que a presença da quina promova um pico de tensões locais, sua geometria é mais suave que a quina do furo quadrangular (que, por consequência, gera um pico de tensões maior). Em complemento, o caminho de menor energia percorrido pela deformação plástica (da quina da borda interna ao meio da aresta externa) é mais longo que no caso do modelo com arranjo hexagonal e furo circular.

Os arranjos quadrilaterais apresentaram desempenhos muito semelhantes para os dois tipos de furos: os piores desempenhos para estados de tensões semelhantes e os melhores para o caso de tensões com intensidades semelhantes mas com sinais diferentes.

#### 4.2.2 Superfícies de Plastificação para Tensões Normal e de Cisalhamento

Assim como no caso anterior, verificou-se a precisão dos resultados para uma discretização de  $48 \times 8$  para o arranjo hexagonal e  $32 \times 8$  para o arranjo quadrangular usando elementos

finitos com funções interpoladoras de quinto grau. Todo o procedimento foi repetido seguindo o mesmo padrão, porém alterando as componentes do estado de tensões. Dessa forma, todas as informações são apresentadas para o espaço de tensões  $\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{23}$ .

A Figura 4.23 mostra as superfícies de plastificação do arranjo hexagonal com furo circular obtidas utilizando o MEF e a integração TFA/MEF. O custo computacional da análise clássica em MEF foi de 20 horas, 51 minutos e 43 segundos e o custo empregando a integração TFA/MEF foi de 3 horas, 18 minutos e 37 segundos (15.87% do tempo), com a integração TFA/MEF favorecendo a segurança. A divergência relativa máxima foi de 4.4%.

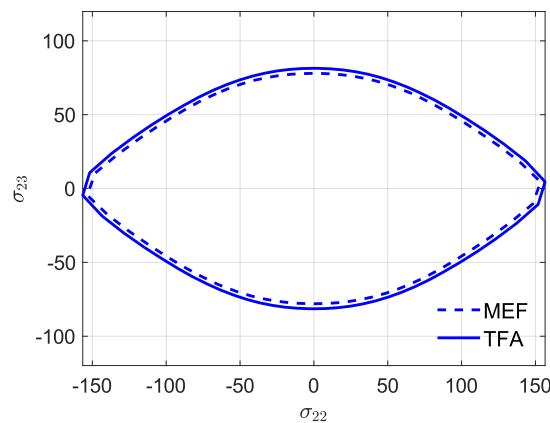


Figura 4.23 – Superfícies de plastificação geradas pelo MEF e TFA para arranjo hexagonal com furo circular.

Fonte: Autor (2021).

As curvas de tensão-deformação macroscópica associadas aos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$  são apresentadas na Figura 4.24. Observa-se a diminuição das tensões máximas com o aumento do ângulo para a tensão macroscópica  $\bar{\sigma}_{22}$ , atingindo o valor nulo para o ângulo de  $90^\circ$ . O comportamento oposto ocorre para a tensão macroscópica de cisalhamento  $\bar{\sigma}_{23}$ , onde há o crescimento da tensão máxima até o ângulo de  $90^\circ$ , quando ela atinge seu valor máximo.



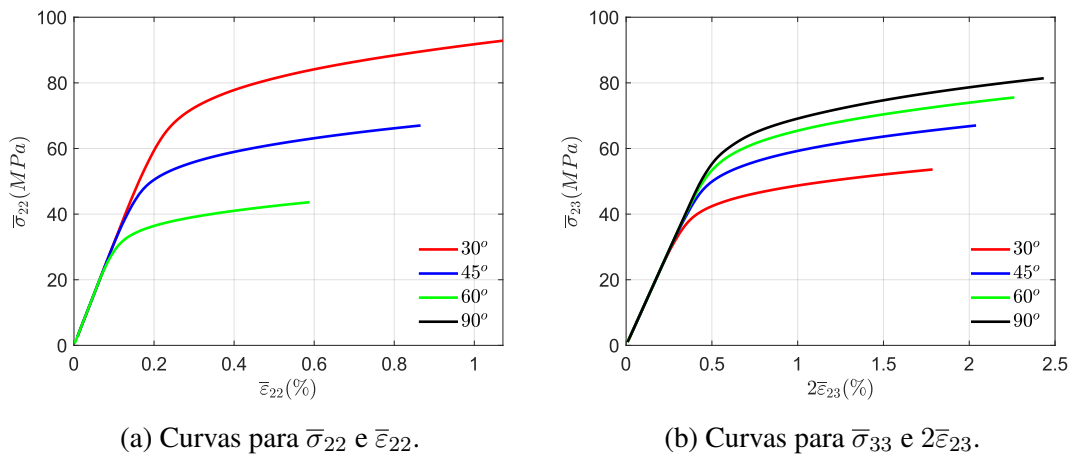


Figura 4.24 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

Apresentam-se também os campos de deformação plástica efetiva para estados de tensões aplicadas aos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  nas Figuras 4.25 a 4.27, respectivamente. Percebe-se que a região de plastificação tem seu início na borda interna do modelo em um eixo diagonal a  $45^\circ$  no sentido anti-horário a partir do eixo vertical com uma bifurcação, onde parte da plastificação evolui em direção à aresta diagonal mais próxima à esquerda e outra parte evolui ao longo do eixo vertical. Com o aumento do ângulo, nota-se o aumento da deformação plástica efetiva na direção vertical e a diminuição da deformação no eixo diagonal citado. Ao atingir os  $60^\circ$ , a deformação plástica no eixo vertical é superior à deformação encontrada no eixo diagonal.

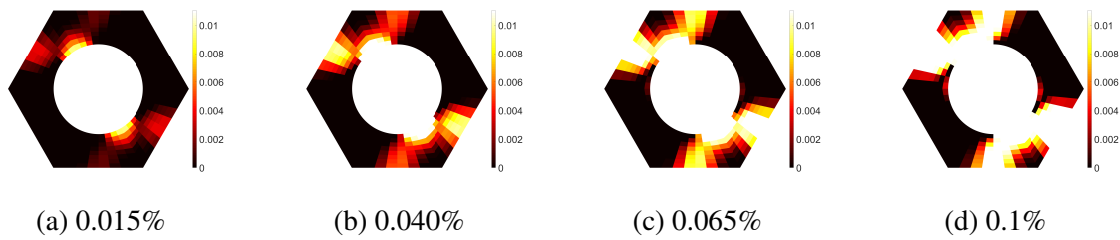


Figura 4.25 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°.

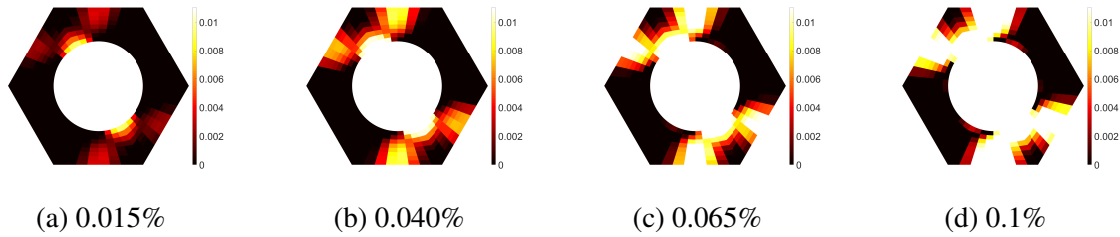


Figura 4.26 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°.

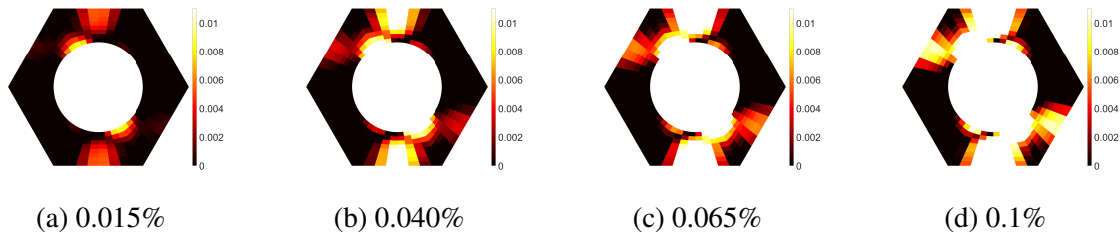


Figura 4.27 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°.

Fonte: Autor (2021).

Para o modelo de arranjo quadrangular com furo circular, a Figura 4.28 apresenta a superfície de plastificação para uma deformação plástica macroscópica equivalente de 1%. As curvas tensão-deformação macroscópicas são apresentadas na Figura 4.29.

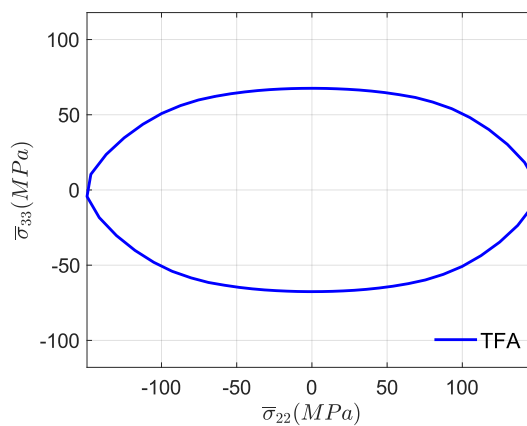


Figura 4.28 – Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular.

Fonte: Autor (2021).

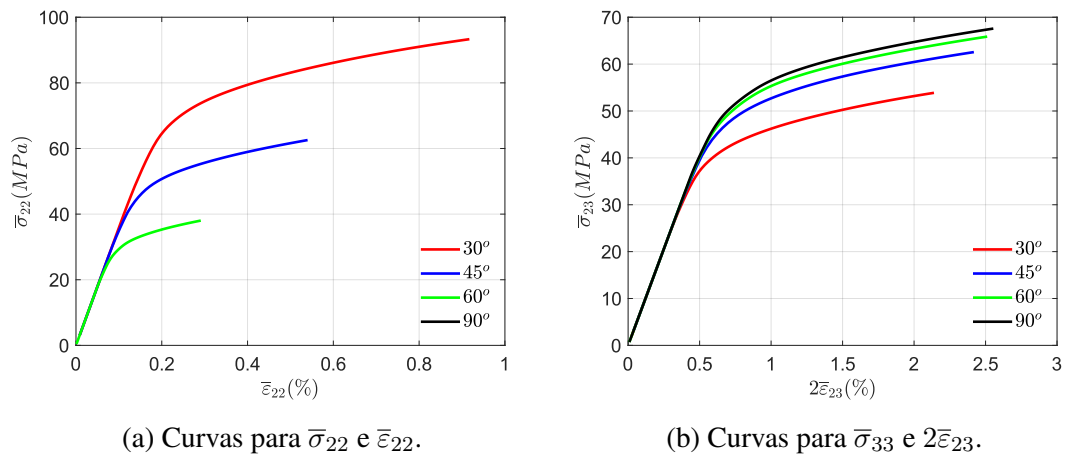


Figura 4.29 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

As curvas apresentam um comportamento semelhante ao visto no modelo com arranjo hexagonal e furo circular. O crescimento do ângulo diminui a tensão macroscópica  $\bar{\sigma}_{22}$ , cujo valor máximo ocorre no ângulo  $0^\circ$ , e aumenta a tensão de cisalhamento  $\bar{\sigma}_{23}$ , que atinge seu valor máximo para o ângulo  $90^\circ$ . Também observam-se os modos característicos a partir dos campos de deformação plástica efetiva, apresentados nas Figuras 4.30 a 4.32.

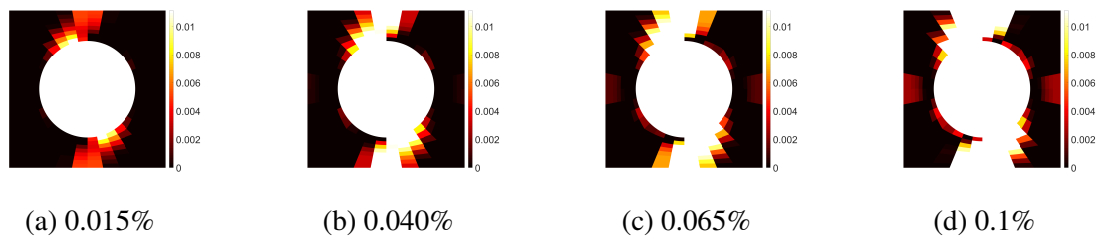


Figura 4.30 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $30^\circ$ .

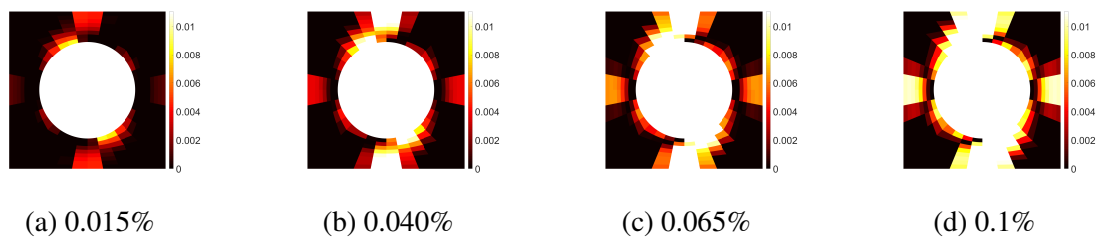


Figura 4.31 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $45^\circ$ .

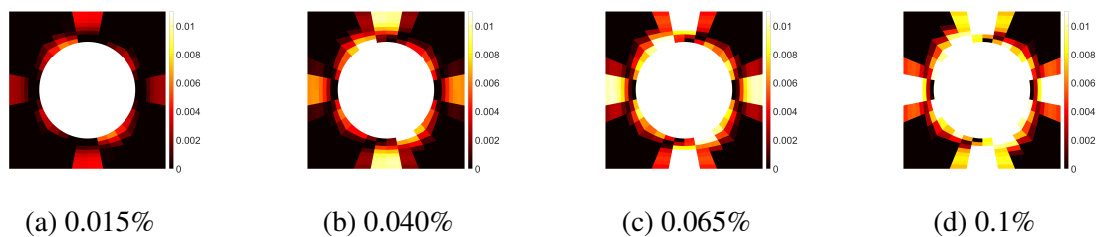


Figura 4.32 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $60^\circ$ .

Fonte: Autor (2021).

Os modos de deformação plástica característicos estão distribuídos pelos eixos horizontal, vertical e um eixo a  $45^\circ$  no sentido anti-horário em relação ao eixo vertical. O escoamento inicia-se na borda interna do modelo e a plastificação distribui-se por esses eixos. Para o ângulo de  $30^\circ$ , observa-se a totalidade do escoamento surgindo no eixo diagonal e vertical. Com o aumento do ângulo, aumenta-se a distribuição do escoamento na direção do eixo horizontal. Com o aumento da deformação plástica macroscópica equivalente, observa-se distribuição de plastificação na direção horizontal.

Para o modelo com arranjo quadrangular e furo circular, a Figura 44 mostra a superfície de plastificação gerada. A Figura 4.34 ilustra o comportamento das tensões macroscópicas para alguns ângulos. Assim como no caso com arranjo hexagonal e furo circular, o comportamento das tensões foi semelhante em relação à variação do ângulo para as componentes normal e de cisalhamento das tensões macroscópicas.

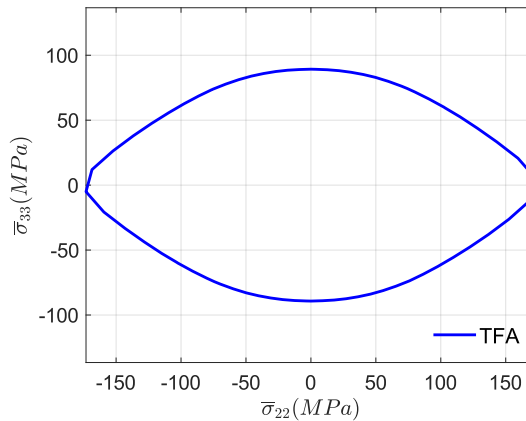
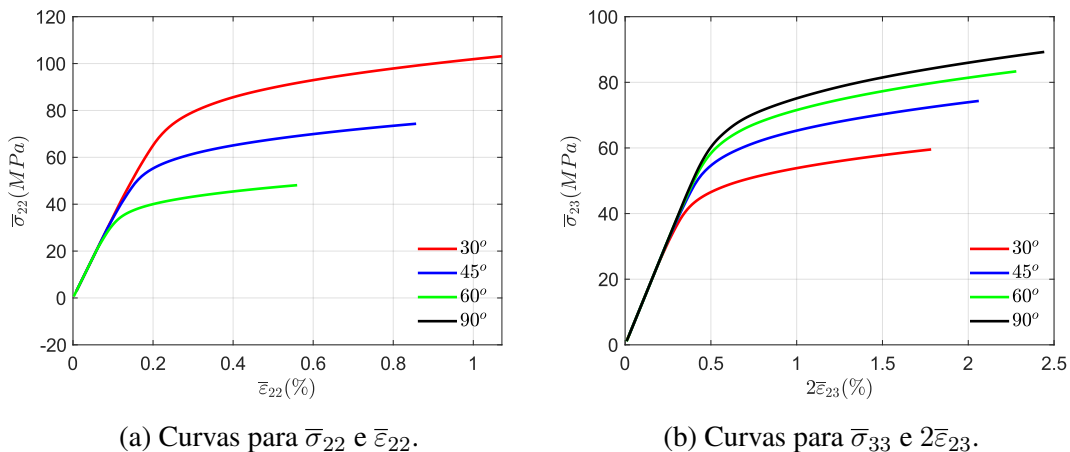


Figura 4.33 – Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular.

Fonte: Autor (2021).



(a) Curvas para  $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\epsilon}_{22}$ .

(b) Curvas para  $\bar{\sigma}_{33}$  e  $2\bar{\epsilon}_{23}$ .

Figura 4.34 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

Os campos de plastificação efetiva são apresentados nas Figuras 4.35 a 4.37. Observam-se as quinas como pontos de singularidade, onde as tensões tendem a crescer rapidamente. Esse fato pode ser visto na evolução da plastificação de regiões da célula unitária. O escoamento começa na borda interna, em duas quinas simétricas, bifurca-se e evolui para as arestas mais próximas, buscando os menores caminhos até as bordas externas. Com o aumento do ângulo, percebe-se que há uma mudança no perfil da distribuição do escoamento, aumentando a plastificação em uma das regiões da bifurcação e diminuindo na outra.

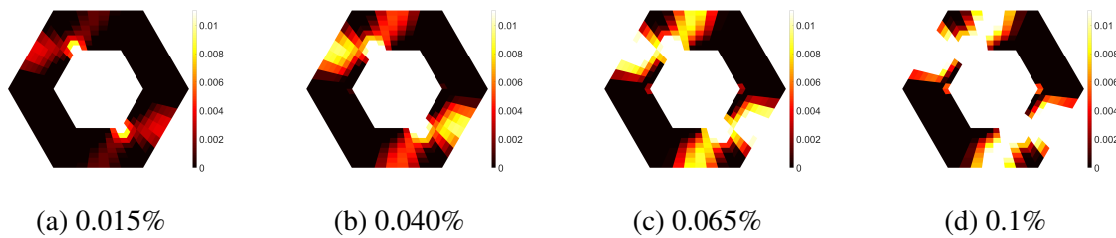


Figura 4.35 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $30^\circ$ .

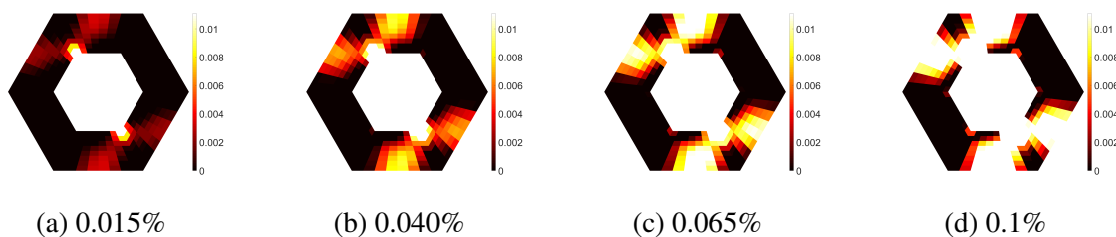


Figura 4.36 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $45^\circ$ .

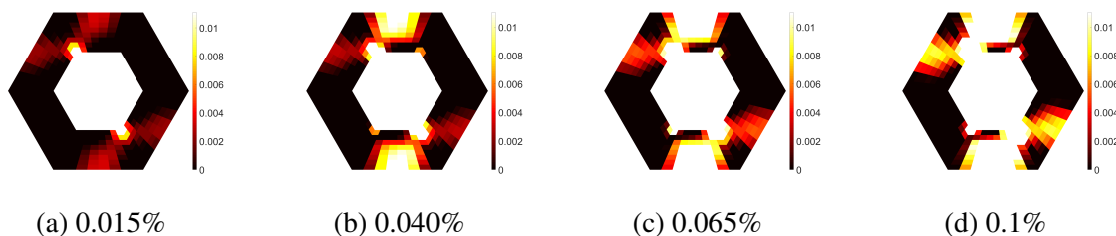


Figura 4.37 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de  $60^\circ$ .

Fonte: Autor (2021).

O modelo com arranjo e furo quadrangular apresentou a superfície de plastificação ilustrada na Figura 4.38 e as curvas são apresentadas na Figura 4.39. Observa-se que as tensões também apresentaram um comportamento semelhante em relação à variação do ângulo, com aumento das tensões macroscópicas de cisalhamento e diminuição da tensão macroscópica normal.

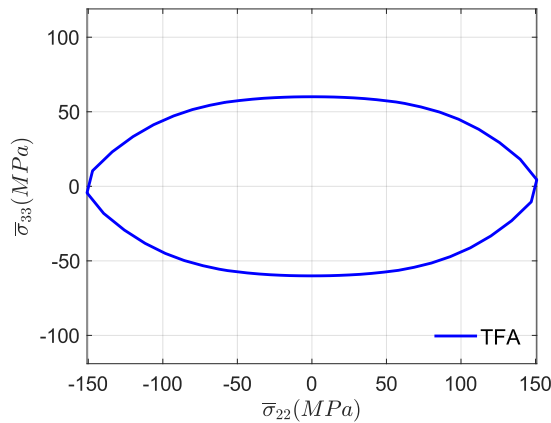


Figura 4.38 – Superfície de plastificação empregando TFA para arranjo quadrangular com furo circular.

Fonte: Autor (2021).

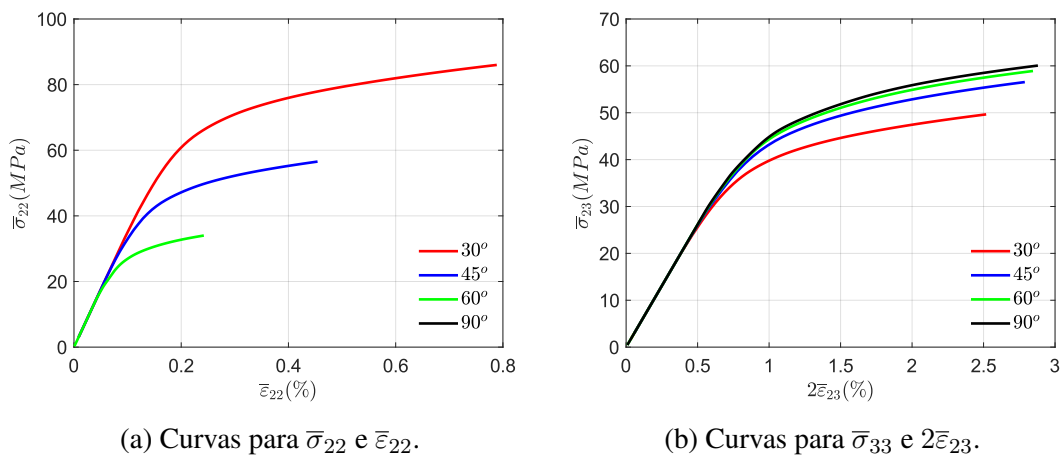


Figura 4.39 – Curvas de tensão e deformação macroscópicas para diferentes ângulos.

Fonte: Autor (2021).

Os modos característicos de deformação são ilustrados nas Figuras 4.40, 4.41 e 4.42. Nota-se o início do escoamento na borda interna do furo, próximo às quinas. A variação brusca na geometria do furo consiste em uma singularidade que gera um pico de tensão na vizinhança, fazendo com que o escoamento surja em um estado de tensões macroscópico menor. Com o aumento do ângulo, ocorre a distribuição da plastificação pelo vértice superior até atingir a borda externa.

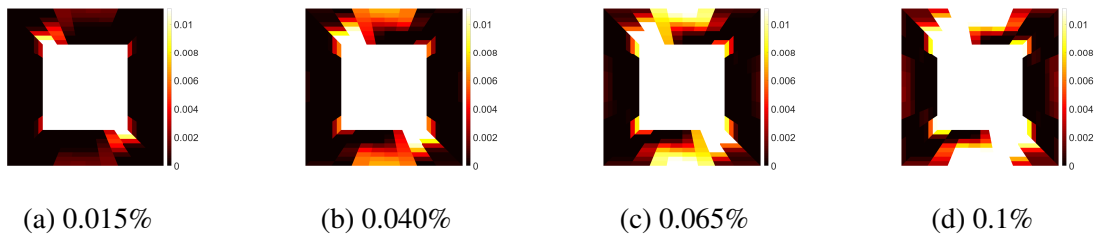


Figura 4.40 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 30°.

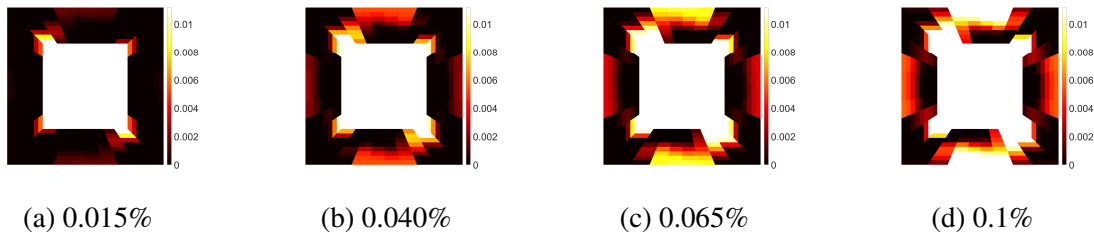


Figura 4.41 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 45°.

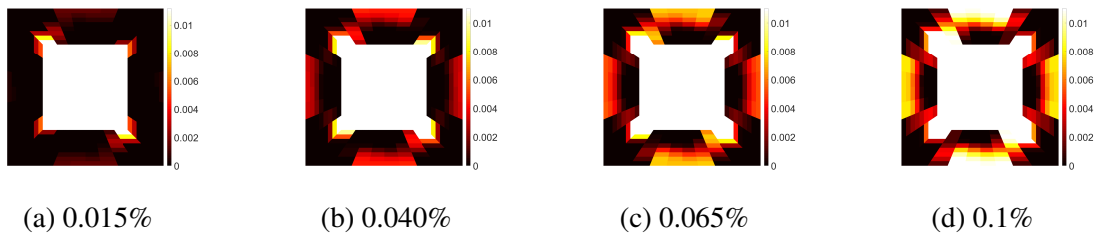


Figura 4.42 – Evolução da deformação plástica efetiva para um ângulo de 60°.

Fonte: Autor (2021).

A comparação entre as superfícies de plastificação é apresentada na Figura 4.43, que contém todas as superfícies calculadas com a integração TFA/MEF para o espaço de tensões macroscópicas  $\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{23}$ .

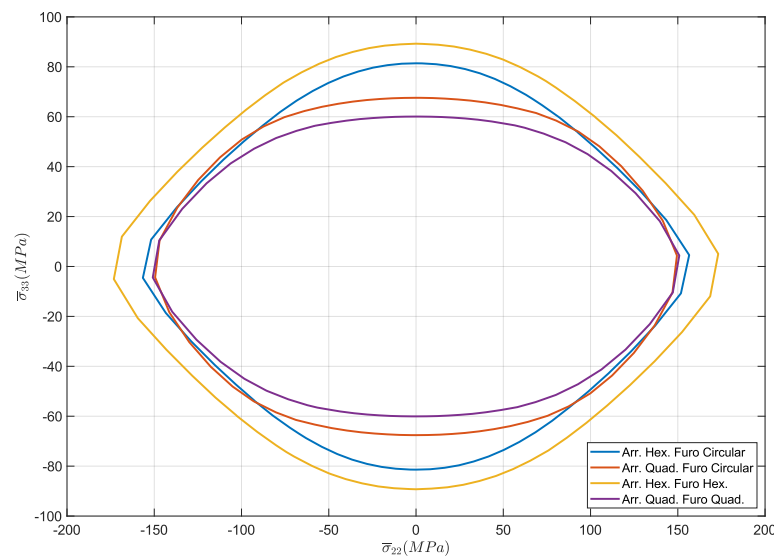


Figura 4.43 – Superfícies de plastificação geradas usando TFA.

Fonte: Autor (2021).

Assim como no caso dos modelos sujeitos a estados de tensões macroscópicas normais, o arranjo hexagonal com furo hexagonal apresentou o melhor desempenho, com maiores tensões macroscópicas para um mesmo nível de plastificação equivalente, causado pelo maior caminho percorrido pela deformação plástica. Para o ângulo de  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , o modelo com arranjo hexagonal e furo circular apresentou bons resultados quando comparado com os valores obtidos com outros modelos. Para os ângulos de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , os modelos de arranjo quadrangular e de arranjo hexagonal com furo circular apresentaram desempenho semelhante, com pouca vantagem para este último modelo.

Dessa forma, apresentaram-se as superfícies de plastificação, o comportamento de curvas tensão-deformação macroscópica para alguns ângulos característicos e os modos de plastificação de quatro tipos de células unitárias para duas variações de componentes de estados de tensões macroscópicas. O início do escoamento sempre começou pela borda do furo e apresentou diferentes regiões de distribuição da plastificação de acordo com o tipo de furo. Observou-se também que a geometria do arranjo e do furo afetam a resistência às tensões e que, dependendo da combinação de tensões a ser aplicada, um ou outro arranjo pode ser mais vantajoso. Por exemplo, para o caso de tensões normais muito semelhantes, recomenda-se a utilização de furo hexagonal em arranjo hexagonal.

Ressalta-se o emprego da integração TFA/MEF para a realização das análises. Para esse caso, duas análises foram realizadas para verificar o resultado da discretização usada para o modelo empregando o elemento finito com funções interpoladoras de quinto grau. Para as análises, encontrou-se uma divergência relativa máxima de 4.4% a um custo computacional menor que 20% do tempo gasto pela análise convencional.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foram apresentadas as principais fundamentações e formulações necessárias à análise de materiais periodicamente porosos, avaliando-se o comportamento de células unitárias e empregando-se condições de contorno periódicas. A formulação foi testada para avaliação do comportamento elastoplástico homogeneizado de uma célula unitária para uma chapa de metal perfurada.

A relação entre a discretização da malha e a precisão do resultado do MEF é bem conhecida e está associada com a capacidade do elemento de representar a deformação local, que é simplificada com a diminuição do tamanho do elemento e, portanto, demanda menos do elemento finito para representar a resposta local. Essa relação é primordial para explicar parte das conclusões obtidas.

Durante a verificação da integração TFA/MEF, observou-se que o emprego de elementos finitos de alta ordem melhora a aderência com os resultados da análise clássica do MEF. No entanto, o emprego de elementos finitos de alta ordem precisa ser combinado com uma boa discretização do domínio. Para obtenção de bons resultados usando a TFA, a discretização da malha é mais crítica que o uso de elementos finitos de ordens mais altas. Portanto, avaliar a deformação plástica localizada com uma malha mais refinada é mais importante que a tendência de obter resultados mais rígidos por causa da limitação do elemento finito em representar a resposta local quando se utiliza um elemento finito com funções interpoladoras de menor ordem.

Os resultados numéricos obtidos foram comparados com dados experimentais disponíveis na literatura. Essa investigação considerou cargas macroscópicas de tração uniaxial em chapas metálicas periodicamente perfuradas com duas frações de vazios. Apesar de todas as simulações apresentarem respostas mais rígidas por causa do efeito de borda causado pelas superfícies livres de tensão observadas no experimento, os resultados numéricos apresentaram razoável aderência aos valores experimentais. Além disso, os piores resultados numéricos obtidos mostraram uma diferença de 4% na tensão macroscópica entre a análise convencional e a integração TFA/MEF para o maior nível de discretização adotado.

Visando avaliar a relação custo-benefício da técnica, mensurou-se também o custo computacional das abordagens. A TFA adota a simplificação por campos uniformes em elementos do domínio e o custo computacional apresentou dependência da quantidade de elementos e do tipo de elemento adotado. Para os elementos finitos com funções interpoladoras de ordem mais baixa, a integração apresentou tempos mais rápidos, mas sem nenhuma precisão. Por outro lado, o aumento da quantidade de elementos finitos de ordem mais alta gerou resultados satisfatórios com um custo computacional muito menor que àquele apresentado usando análise convencional. De maneira geral, malhas mais refinadas apresentaram resultados melhores e ní-

veis satisfatórios de precisão foram alcançados. Observou-se uma diferença relativa máxima de 4% para os elementos finitos de alta ordem com um custo de 7% daquele obtido empregando a análise clássica para abordagem sequencial e 5% para abordagem paralela. Além disso, a abordagem paralela da TFA usando elementos finitos quadráticos apresentou desempenho similar ou melhor quando comparado com a técnica clássica do MEF.

As vantagens da TFA para análises elastoplásticas de meios bidimensionais periodicamente porosos foram destacadas: encontraram-se casos onde as análises apresentaram resultados satisfatórios empregando menor custo computacional quando comparado com a análise clássica em MEF. Dessa forma, a TFA pode ser empregada em casos onde a discretização da malha e a ordem do elemento permitam a produção de bons resultados entregando um tempo computacional menor. Em todos os casos, o tempo de processamento para gerar os tensores de concentração de deformação e de influência não foi considerado. Porém, foram apresentados os valores dos custos para cada modelo e o acréscimo do custo torna o tempo semelhante ao da análise convencional para o nível intermediário de discretização adotada. Para o maior nível de discretização empregado, o custo computacional das duas etapas ainda foi menor que o tempo da análise convencional. Nesse sentido, para análises pontuais que utilizem a integração TFA/MEF, recomenda-se o emprego de malhas muito discretizadas com elementos finitos de ordem mais altas. Após o cálculo dessas relações, qualquer carregamento macroscópico pode ser imposto ao domínio, incluindo àqueles necessários para geração de superfícies de plastificação.

Para ilustrar o desempenho da integração TFA/MEF em uma simulação de múltiplas análises, gerou-se a superfície de plastificação para quatro tipos de modelos de células unitárias sujeitos à variados estados de tensões macroscópicas em duas orientações diferentes. Para verificação da discretização adotada em ambas as orientações adotadas, avaliou-se também o respectivo resultado em MEF para medição de divergência relativa entre valores e seu custo computacional associado. Para as duas verificações realizadas empregando o modelo descrito no Capítulo 3, a integração TFA/MEF conseguiu uma diferença máxima de 4.4% a um custo computacional inferior a 20% do custo da análise clássica.

Para os modelos com furo circular sob carregamento nas direções normais, o escoamento inicia-se em locais distintos de acordo com o espaço de tensões macroscópicas aplicado. Para os modelos com furos quadrado e hexagonal, a presença de singularidades afetam o comportamento plástico do modelo, gerando diferentes modos de plastificação característicos. Observou-se também que, para os casos estudados, o modelo de arranjo hexagonal com furo hexagonal apresentou o melhor desempenho, o que não era esperado. Nesse sentido, dois aspectos são considerados para causar esse melhor desempenho: a quina mais suave em comparação ao furo quadrangular, o que gera um pico de tensão menor; o caminho de menor energia que a deformação plástica precisa percorrer é maior quando comparado com o caso com furo circular.

A avaliação das superfícies de plastificação permitiu a caracterização de modos de plas-

tificação para cada modelo avaliado, trazendo uma compreensão da rigidez do material para diferentes estados de tensões macroscópicas. Nesse estudo, destaca-se o resultado do modelo hexagonal com furo de mesmo formato, que mostrou-se capaz de resistir a maiores estados de tensões macroscópicas para uma grande variação de carregamentos.

## 5.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

Os possíveis estudos posteriores complementam as análises já realizadas visando diferentes objetivos. Todas as análises foram realizadas adotando-se o Estado Plano de Tensões, então, realizar as análises no Estado Plano de Deformações Generalizado forneceria um conjunto adicional de informações que incluiriam o comportamento da célula unitária periódica nos planos perpendiculares ao plano de simetria. Nesse sentido, recomenda-se também gerar superfícies de plastificação de materiais compósitos empregando a integração TFA/MEF com elementos finitos de alta ordem. Outros tipos de estudos possíveis envolvem encontrar uma relação custo-benefício mais interessante para aplicação da TFA. Algumas possibilidades envolvem a aplicação de outros níveis de discretização e elementos mais refinados.

Existe também a possibilidade de aplicação de técnicas de processamento paralelo para aceleração do cálculo, com possíveis comparações de *speed-up*, dentre outros indicadores. A implementação da TFA, seja para uso em múltiplos *cores* ou em placas gráficas, deve acelerar substancialmente o processamento. Outra opção seria explorar o emprego da TFA com elementos finitos de alta ordem e processamento paralelo na análise de meios bidimensionais periódicos considerando o comportamento viscoelástico linear (ou outro regime inelástico) dos constituintes e do meio efetivo homogeneizado. Por fim, sugere-se também usar alguma variação da TFA, como sua versão não-uniforme, por exemplo, para avaliação de custo-benefício na geração de superfícies de plastificação.



# REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, Y.; HAMOUINE, A. A survey of the extended finite element. *Comput. Struct.*, v. 86, n. 11-12, p. 1141–1151, jun. 2008.
- ADDESSI, Daniela et al. Cosserat model for periodic masonry deduced by nonlinear homogenization. *Eur. J. Mech. A/Solids*, Elsevier Masson SAS, v. 29, n. 4, p. 724–737, 2010.
- ALAIMO, Gianluca et al. Optimization clustering technique for PieceWise Uniform Transformation Field Analysis homogenization of viscoplastic composites. *Comput. Mech.*, Springer Berlin Heidelberg, v. 64, n. 6, p. 1495–1516, 2019.
- BABUŠKA, I.; GUO, B. Q. The h, p and h-p version of the finite element method: basis theory and applications. *Adv. Eng. Softw.*, v. 15, n. 3-4, p. 159–174, 1992.
- BARRAL, Mathilde et al. Homogenization using modified Mori-Tanaka and TFA framework for elastoplastic-viscoelastic-viscoplastic composites: Theory and numerical validation. *Int. J. Plast.*, Elsevier Ltd, v. 127, 2020.
- BATHE, Klaus-Jurgen. *Finite element procedures*. 1. ed. New-Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BELYTSCHKO, Ted et al. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.*, v. 17, n. 4, 2009.
- BENVENISTE, Y.; DVORAK, G. J. On a Correspondence Between Mechanical and Thermal Effects in Two-Phase Composites. In: *MICROMECHANICS and Inhomogeneity*. New York, NY: Springer New York, 1990. P. 65–81.
- \_\_\_\_\_. Some Remarks on a Class of Uniform Fields in Fibrous Composites. *J. Appl. Mech.*, v. 59, n. 4, p. 1030–1032, dez. 1992.
- BORST, René de et al. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. First Edit. Sussex: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- CAVALCANTE, Marcio A. A.; PINDERA, Marek-Jerzy. Finite-volume enabled transformation field analysis of periodic materials. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, v. 9, n. 2, p. 153–179, 2013.
- \_\_\_\_\_. Generalized FVDAM theory for elastic–plastic periodic materials. *Int. J. Plast.*, Elsevier Ltd, v. 77, p. 90–117, fev. 2016.
- COOK, R.D. et al. Concept and Application of Finite Element Analysis. *October*, October, 1988.
- COVEZZI, F. et al. Comparison of reduced order homogenization techniques: pRBMOR, NUTFA and MxTFA. *Meccanica*, Springer Netherlands, v. 53, n. 6, p. 1291–1312, 2018.
- COVEZZI, F. et al. Homogenization of elastic-viscoplastic composites by the Mixed TFA. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Elsevier B.V., 2017.

- CROZARIOL, Luís Henrique de Rezende; FERNANDES, Gabriela Rezende. Análise da resposta constitutiva de materiais heterogêneos pelo Método dos Elementos de Contorno, considerando-se diferentes microestruturas para o EVR. *Matéria (Rio Janeiro)*, v. 25, n. 1, 2020.
- DRAGO, Anthony S.; PINDERA, Marek-Jerzy. A Locally Exact Homogenization Theory for Periodic Microstructures With Isotropic Phases. *J. Appl. Mech.*, v. 75, n. 5, p. 051010, 2008.
- DVORAK, G. J. *Micromechanics of Composite Materials*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 186, p. 1–460.
- \_\_\_\_\_. On uniform fields in heterogeneous media. In: THE ROYAL SOCIETY, 1881. PROC. R. Soc. London A Math. Phys. Eng. Sci. [S.l.: s.n.], 1990. v. 431, p. 89–110.
- \_\_\_\_\_. Thermal Expansion of Elastic-Plastic Composite Materials. *J. Appl. Mech.*, v. 53, n. 4, p. 737–743, dez. 1986.
- \_\_\_\_\_. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc. R. Soc. London. Ser. A Math. Phys. Sci.*, v. 437, n. 1900, p. 311–327, mai. 1992.
- DVORAK, G. J.; BENVENISTE, Y. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proc. R. Soc. London. Ser. A Math. Phys. Sci.*, v. 437, n. 1900, p. 291–310, mai. 1992.
- DVORAK, G. J. et al. Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite materials. *Comput. Mech.*, v. 14, n. 3, p. 201–228, jun. 1994.
- EISCHEN, J. W.; TORQUATO, S. Determining elastic behavior of composites by the boundary element method. *J. Appl. Phys.*, v. 74, n. 1, p. 159–170, 1993.
- FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. *A first course in finite elements*. [S.l.]: Wiley, 2007. v. 0.
- FRIES, T. P. Higher-order conformal decomposition FEM (CDFEM). *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Elsevier B.V., v. 328, p. 75–98, 2018.
- FRITZEN, Felix; LEUSCHNER, Matthias. Reduced basis hybrid computational homogenization based on a mixed incremental formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Elsevier B.V., v. 260, p. 143–154, 2013.
- FRITZEN, Felix et al. Reduced order modeling in nonlinear homogenization: A comparative study. *Comput. Struct.*, Elsevier Ltd, v. 157, p. 114–131, 2015.
- GUSEV, Andrei A. Representative volume element size for elastic composites: A numerical study. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 45, n. 9, p. 1449–1459, set. 1997.
- HASHIN, Z. *Analysis of Composite Materials*. v. 50. [S.l.: s.n.], 1983. P. 481–505.
- HASHIN, Z.; ROSEN, B. W. The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials. *J. Appl. Mech.*, v. 31, n. 2, p. 223, 1964.
- HAZANOV, S. Hill condition and overall properties of composites. *Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch.)*, v. 68, n. 6, p. 385–394, jul. 1998.

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 11, n. 5, p. 357–372, set. 1963.

\_\_\_\_\_. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials—III. self-consistent model. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 13, n. 4, p. 189–198, ago. 1965.

\_\_\_\_\_. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. Elastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 12, n. 4, p. 199–212, set. 1964.

\_\_\_\_\_. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: II. Inelastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 12, n. 4, p. 213–218, set. 1964.

HOU, Thomas Y.; WU, Xiao-hui. A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media. *J. Comput. Phys.*, v. 189, n. 1, p. 169–189, 1997.

HUET, C. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 38, n. 6, p. 813–841, jan. 1990.

JOHN, Volker. *Finite Element Methods for Incompressible Flow Problems*. Edição: R. E. Bank. 1. ed. Cham: Springer International Publishing, 2016. v. 51. (Springer Series in Computational Mathematics).

KAW, Autar K. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd Editio. Boca Raton: CRC press, 2006.

KHATAM, Hamed; PINDERA, Marek Jerzy. Plastic deformation modes in perforated sheets and their relation to yield and limit surfaces. *Int. J. Plast.*, Elsevier Ltd, v. 27, n. 10, p. 1537–1559, 2011.

KHATAM, Hamed et al. Elastic and plastic response of perforated metal sheets with different porosity architectures. *J. Eng. Mater. Technol. Trans. ASME*, v. 131, n. 3, p. 0310151–03101514, 2009.

KHATTAB, I. Al; SINAPIUS, M. Multiscale modelling and simulation of polymer nanocomposites using transformation field analysis (TFA). *Compos. Struct.*, Elsevier Ltd, v. 209, p. 981–991, 2019.

MALVERN, Lawrence E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc, 1969.

MENDELSON, Alexander. *Plasticity, theory and application*. First Edit. Malabar, FL: Robert E. Krieger Publishing Company, 1968.

MICHEL, J. C.; SUQUET, P. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 193, n. 48–51, p. 5477–5502, 2004.

\_\_\_\_\_. Nonuniform transformation field analysis. *Int. J. Solids Struct.*, v. 40, n. 25, p. 6937–6955, dez. 2003.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, v. 21, n. 5, p. 571–574, 1973.

- NADEEM, Aamir et al. On sequential multiscale inversion and data assimilation. *J. Comput. Appl. Math.*, Elsevier B.V., 2017.
- ÖCHSNER, Andreas; LAMPRECHT, Klaus. On the uniaxial compression behavior of regular shaped cellular metals. *Mech. Res. Commun.*, v. 30, n. 6, p. 573–579, 2003.
- ÖCHSNER, Andreas et al. Elastic-plastic Behaviour of Perforated Aluminium under Tension and Compression. *Tech. Mech.*, v. 21, n. 2, p. 101–108, 2001.
- OÑATE, Eugenio. *Structural Analysis with the Finite Element Method*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 1, p. 472.
- OSTACHOWICZ, Wieslaw et al. *Guided Waves in Structures for SHM*. [S.l.: s.n.], 2012.
- PALEY, M.; ABOUDI, J. Micromechanical analysis of composites by the generalized cells model. *Mech. Mater.*, v. 14, n. 2, p. 127–139, dez. 1992.
- PINDERA, Marek-Jerzy; BEDNARCYK, Brett A. An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phased composites with complex microstructures. *Compos. Part B Eng.*, v. 30, n. 1, p. 87–105, jan. 1999.
- PINDERA, Marek-Jerzy et al. Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches. *Compos. Part B Eng.*, Elsevier Ltd, v. 40, n. 5, p. 349–378, jul. 2009.
- PITUBA, José J. de C. et al. Modeling of Cohesive Fracture and Plasticity Processes in Composite Microstructures. *J. Eng. Mech.*, v. 142, n. 10, p. 04016069, 2016.
- QU, Jianmin; CHERKAOUI, Mohammed. *Fundamentals of Micromechanics of Solids*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., ago. 2006.
- REN, Mingfa et al. Extended multiscale finite element method for small-deflection analysis of thin composite plates with aperiodic microstructure characteristics. *Compos. Struct.*, v. 160, p. 422–434, jan. 2017.
- REUSS, A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM - Zeitschrift für Angew. Math. und Mech.*, v. 9, n. 1, p. 49–58, 1929.
- ROUSSETTE, S. et al. Nonuniform transformation field analysis of elastic-viscoplastic composites. *Compos. Sci. Technol.*, Elsevier Ltd, v. 69, n. 1, p. 22–27, 2009.
- SADD, M. H. *Elasticity - Theory, Applications, and Numerics*. 2. ed. Oxford: Elsevier, 2009. P. 533.
- SAVVAS, Dimitrios et al. Determination of RVE size for random composites with local volume fraction variation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Elsevier B.V., v. 305, p. 340–358, jun. 2016.
- SCHMICKER, D. et al. Testing of Higher Order Finite Element Based on Lagrange Polynomials in Dependence of the Underlying Nodal Grid. *Blucher Mech. Eng. Proc.*, v. 1, May, 2014.



- SEPE, Valentina et al. A nonuniform TFA homogenization technique based on piecewise interpolation functions of the inelastic field. *Int. J. Solids Struct.*, Elsevier Ltd, v. 50, n. 5, p. 725–742, 2013.
- SEVILLA, Ruben et al. NURBS-Enhanced Finite Element Method (NEFEM). *Arch. Comput. Methods Eng.*, v. 18, n. 4, p. 441–484, nov. 2011.
- SHAMES, Irving H.; COZZARELLI, Francis A. *Elastic And Inelastic Stress Analysis*. [S.l.]: CRC Press, 1997.
- SOLIN, P. et al. Monolithic discretization of linear thermoelasticity problems via adaptive multimesh hp-FEM. *J. Comput. Appl. Math.*, Elsevier B.V., v. 234, n. 7, p. 2350–2357, 2010.
- THE MATHWORKS INC. *Matlab 2019a*. [S.l.: s.n.], 2019.
- VÁRADY FILHO, C. A. F.; CAVALCANTE, M. A. A. Elastoplastic Analysis of Perforated Metal Sheets using Transformation Field Analysis and Finite Element Method. *Lat. Am. J. Solids Struct.*, v. 18, n. 6, p. 1–20, 2021.
- VAZ, Luiz Eloy. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. [S.l.]: Elsevier, 2011. P. 273.
- VOIGT, W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Ann. Phys.*, v. 274, n. 12, p. 573–587, 1889.
- WANG, Guannan; PINDER, Marek Jerzy. Locally-exact homogenization theory for transversely isotropic unidirectional composites. *Mech. Res. Commun.*, Elsevier Ltd., v. 78, p. 2–14, 2016.
- XIA, Zihui et al. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *Int. J. Solids Struct.*, v. 40, n. 8, p. 1907–1921, abr. 2003.
- YANG, Zhiqiang et al. A novel second-order reduced homogenization approach for nonlinear thermo-mechanical problems of axisymmetric structures with periodic micro-configurations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Elsevier B.V., v. 368, 2020.
- YVONNET, Julien. *Solid Mechanics and Its Applications Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. *The finite element method in structural and continuum mechanics: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1967. v. 1.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *The finite element method*. [S.l.]: McGraw-hill London, 1977. v. 3.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. *The finite element method for solid and structural mechanics*. 6. ed. [S.l.]: Elsevier, 2005. P. 631.