UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ADRIANA FREIRE DA SILVA LÓS

A VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: dos percursos teóricos à resolução de problemas do ENEM

Maceió

2021

ADRIANA FREIRE DA SILVA LÓS

A VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: dos percursos teóricos à resolução de problemas do ENEM

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior

Maceió

2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário: Cláudio César Temóteo Galvino – CRB4/1459

L879v Lós, Adriana Freire da Silva.
A visualização matemática na educação básica: dos percursos teóricos à resolução de problemas do ENEM / Adriana Freire da Silva Lós. – 2021.
122 f.: il.

Orientador: Rinaldo Vieira da Silva Júnior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática da Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 119-122.

1. Visualização matemática. 2. Resolução de problemas. 3. ENEM. I. Título.

CDU: 51:372

Folha de Aprovação

ADRIANA FREIRE DA SILVA LÓS

A VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: dos percursos teóricos à resolução de problemas do ENEM

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 18 de junho de 2021.

Rinaldo V. da S. Júnior

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Adina Rocha dos Santos

Profa. Dra. ADINA ROCHA DOS SANTOS – IFAL (Examinador Interno)

Fábio J. Bertoloto

Prof. Dr. Fábio José Bertoloto – UFU (Examinador Externo)

A Deus, por nunca me abandonar e ser meu guia; à minha família, em especial aos meus pais, Ivone e Antônio, por todo o incentivo e por sempre acreditarem em mim; a meu esposo, Dayvid, pela compreensão, força e compartilhamento de saberes; aos meus filhos, Isabel e Samuel, vocês são o motivo da minha existência e me dão a força necessária para nunca desistir; e ao meu anjinho, que partiu antes de que eu pudesse conhecer o seu rostinho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a sabedoria necessária para enfrentar as inúmeras dificuldades para conclusão do Mestrado e realização desse trabalho.

Aos meus pais, Ivone e Antônio, que com sua simplicidade plantaram a semente; e aos meus irmãos. Edivânia, Adriano, José, Andreza e Wallison, juntos crescemos, amadurecemos e compartilhamos experiências que foram fundamentais na constituição do meu ser.

Ao meu esposo, Dayvid, que esteve literalmente ao meu lado nas dificuldades enfrentadas.

Aos colegas do mestrado, pelo compartilhamento de experiências e aprendizagem conjunta. Aos amigos de Arapiraca, Denise, Gabriel, Vitor e os demais, pelos momentos de descontração, aprendizagem e companheirismo.

Aos professores do PROFMAT, pelas contribuições sem medida na minha formação Matemática, profissional e humana.

Ao professor orientador, Dr. Rinaldo, pela presteza, paciência e compreensão para que este trabalho fosse possível.

Aos professores da banca examinadora, Dra. Adina e Dr. Fábio, pelas contribuições para o fortalecimento dessa pesquisa.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram de alguma maneira para realização dessa pesquisa.

A todos o meu sincero obrigada!

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê. SCHOPENHAUER, Arthur.

RESUMO

No estágio atual do ensino no Brasil, a configuração do currículo escolar, as metodologias empregadas, os princípios norteadores das práticas educativas do Ensino Médio, são campos constantes de debates intensos, com o objetivo de que a escola possa desempenhar de forma consistente e adequada o seu papel social e de cidadania. Nesse cenário, o ensino e aprendizagem de Matemática, principalmente, no que se refere ao currículo e metodologias de ensino, rotineiramente é motivo de estudos e investigações, tendo em vista a problemática que insistentemente assola os processos de aprender e ensinar dessa ciência, qual seja: ensino de matemática engessado numa prática algebrizada. Essa preocupação aparente pode ser comprovada a partir dos diversos eventos que englobam o ensino e aprendizagem de Matemática como tema de estudo, livros que tratam da temática, publicações variadas e as recomendações dos documentos normativos do país, tais como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), PCN+, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Nesse cenário, a visualização matemática constitui-se como meio de desenvolver nos sujeitos habilidades relevantes, não só para o entendimento amplo e significativo dos conhecimentos matemáticos, mas para a vida em sociedade. Nessa conjuntura, esse trabalho se propõe a compreender como está se dando o ensino e aprendizagem de matemática, por meio da visualização matemática atrelada a resolução de problemas, no país. Assim, surgiu a intensão de analisar as seleções do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), tendo como foco os problemas com maior percentagem de erro e que demonstram carecer da visualização para resolução. A resolução de problemas se constitui, nesse universo, como método a ser seguido para a aprendizagem significativa da Matemática. Ainda, à medida que resolvemos os problemas selecionados, disponibilizamos um material que pode ser útil a quem tiver interesse, principalmente ao professor da Educação Básica, como meio de auxílio e estímulo para o uso da visualização em sala de aula.

Palavras-chave: visualização matemática, resolução de problemas, ENEM.

ABSTRACT

In the current stage of teaching in Brazil, the configuration of the school curriculum, the methodologies employed, the guiding principles of high school educational practices, are constant fields of intense debate, with the aim that the school will seek consistently and appropriately the its social and citizenship role. In this scenario, the teaching and learning of Mathematics, especially with regard to the curriculum and teaching methodologies, is routinely the subject of studies and investigations, in view of the problem that insistently plagues the processes of learning and using this science, whatever it may be. : mathematics teaching cast in an algebraized practice. This apparent concern can be proven from the various events that include the teaching and learning of Mathematics as a subject of study, books dealing with the theme, varied publications and the recommendations of the country's normative documents, such as National Curriculum Parameters (PCN), PCN +, Law of Guidelines and Bases for National Education (LDBEN), and the National Curriculum Guidelines for Basic Education. In this scenario, mathematical visualization is a means of developing relevant subjects, not only for a broad and meaningful understanding of mathematical knowledge, but for life in society. At this juncture, this work aims to understand how mathematics teaching and learning is taking place, through mathematical visualization linked to problem solving, in the country. Thus, the intention arose to analyze the selections of the National High School Exam (ENEM) focusing on the problems with the highest percentage of error and which demonstrate the lack of visualization for resolution. Problem solving constitutes, in this universe, as a method to be followed for the approximate learning of Mathematics. Also, as we solve the selected problems, we provide material that can be useful to anyone who is interested, especially to the Basic Education teacher, as a means of assistance and encouragement for the use of visualization in the classroom.

Keyword: mathematical visualization, problem solving, ENEM.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino e aprendizagem de Matemática, desde a Educação Básica à Educação Superior, é campo fértil de estudos, tendo em vista problemáticas que estão em torno dessa ciência e estão relacionadas diretamente no modo de conceber, ensinar e aprender Matemática, isto é, relacionadas aos aspectos currículo e metodologia de ensino.

Nesse cenário, apesar dos esforços advindos das pesquisas que buscam compreender o processo de ensino e aprendizagem dessa ciência e propõem modos diversos de metodologias de ensino, como tentativa de atingir públicos também diversos, como se constituem os ambientes de sala de aula, e das recomendações dos órgãos oficiais governamentais, os quais procuram satisfazer as demandas sociais, o desempenho dos estudantes não se mostra satisfatório. Para a Educação Básica, esse fato que pode ser comprovado em avaliações de escala nacional, como prova Brasil, Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e ENEM, e por meio dos índices, como Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), entre outros, bem como por meio das avaliações internacionais como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

Particularmente, o IDEB funciona como um indicador nacional que possibilita o monitoramento da qualidade do ensino na Educação Básica, contemplando os níveis Fundamental e Médio, podendo ser utilizado para mobilização de melhorias do ensino nesses níveis por todos os envolvidos ou pelos que tenham interesse na educação nacional.

O cálculo do IDEB se dá por meio da multiplicação de dois indicadores. O primeiro deles é o Indicador de Rendimento (P), o qual é a média (harmônica) das taxas de aprovação das séries da etapa (anos iniciais, anos finais e ensino médio), que, em percentual, varia de 0 (zero) a 100 (cem); enquanto o segundo é a Nota Média Padronizada. Esta, por sua vez, é a média das notas das provas de língua Portuguesa e Matemática, as quais são padronizadas em uma escala de 0,0 (zero) a 10,0 (dez) (BRASIL, 2021).

Assim, o cálculo do IDEB depende de 3 fatores: a aprovação dos estudantes, desempenhos em Língua Portuguesa e em Matemática.

De maneira a demonstrar o desempenho dos estudantes da Educação Básica, são apresentados tabelas e gráficos com dados relacionados ao IDEB[1] dos anos de 2005 a 2019.

---

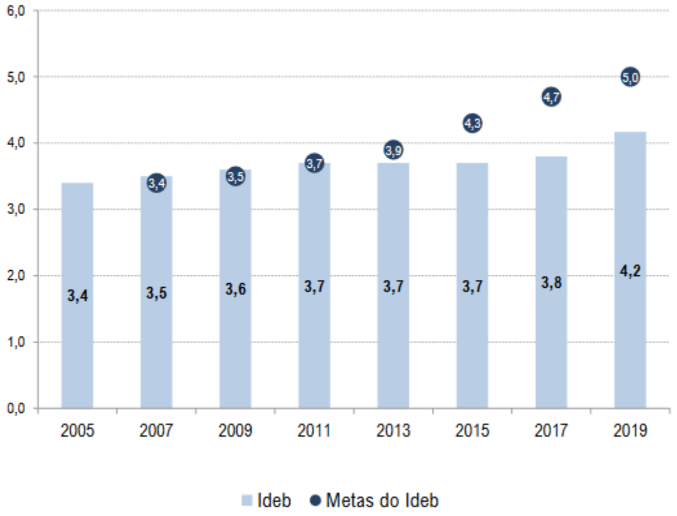
[1] IDEB é o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino.

Tabela 1 - IDEB Total – Ensino Médio – Brasil 2005 - 2019

Ano	Indicador de Rendimento (P)	Nota Média Padronizada (N)	Ideb (NxP)	Metas do Ideb
2005	0,77	4,36	3,4	
2007	0,78	4,44	3,5	3,4
2009	0,80	4,57	3,6	3,5
2011	0,80	4,57	3,7	3,7
2013	0,82	4,44	3,7	3,9
2015	0,83	4,46	3,7	4,3
2017	0,84	4,51	3,8	4,7
2019	**0,87**	**4,79**		**5,0**

Fonte: MEC/Inep.

Gráfico 1 - IDEB Total – Ensino Médio – Brasil 2005 - 2019



Fonte: MEC/INEP

Observa-se que desde 2013 a meta para o IDEB não é atingida. Fatores como frequência, reprovação e abandono (Indicador de rendimento) e desempenho dos estudantes em Língua Portuguesa e Matemática estão diretamente relacionados ao não atingimento das metas.

Depreende-se da tabela 1 que, para melhorar o resultado do IDEB, em qualquer âmbito, deve-se simultaneamente haver a melhoria dos dois indicadores, isto quer dizer que, o Indicador de rendimento não é suficiente para garantir um índice desejável. Enquanto, na nota média padronizada, os rendimentos de Língua Portuguesa e Matemática são igualmente relevantes na composição no resultado final do IDEB, visto que o cálculo desse indicador se trata basicamente da média simples entre as notas dos estudantes no SAEB nessas áreas do conhecimento.

Diante disso, o ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, seja por parte de quem ensina, seja por parte de quem aprende: de um lado, tem-se a constatação de que se trata de uma área de conhecimento notavelmente importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem (BRASIL, 1997). Neste último caso, os resultados negativos podem ser sentidos seja no dia a dia escolar, seja em exames nacionais, tais como SAEB e ENEM.

Especificamente o SAEB, por exemplo, os dados publicados sobre essa avaliação apontam um baixo rendimento dos estudantes, alcançando, no máximo, o nível 4 nos anos iniciais do Ensino Fundamental e o nível 2 no fim do Ensino Médio, como mostra a tabela a seguir:

Tabela 2 – Escala de Proficiência de Matemática SAEB 2019

Ano	**Proficiência**	**Nível**	**Escala**
5 Ano do Ensino Fundamental	224,1	4 - Desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225	0 a 10
9 Ano Ensino do Fundamental	258,36	3 - Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	1 a 9
3ª Série do Ensino Médio	269,74	2 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	1 a 10

Fonte: MEC/2019

Ao se analisar as escalas de proficiência citadas, disponibilizadas no documento do Ministério da Educação (MEC), intitulado como Escalas de Proficiência do SAEB, observa-se que os dados da tabela 2 mostram um estado crítico da educação em Matemática no país. No Ensino Médio, em relação aos aspectos relacionados à Geometria, por exemplo, os estudantes, nesse nível de ensino, são capazes de apenas: “associar uma tabela de até duas entradas a informações apresentadas textualmente ou em um gráfico de barras ou de linhas” (Brasil, 2020, p. 33) e, em termos de espaço e forma, “reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante” (BRASIL, 2020, p. 33). O estado crítico citado é ainda mais perceptível ao se constatar que determinar medidas de segmentos por meio de semelhança entre polígonos; associar um sólido geométrico simples a uma planificação usual dada; calcular o volume de um paralelepípedo, são habilidades que os estudantes são capazes de ter apenas a partir dos níveis 5 e 6 (BRASIL, 2020).

No PISA, o desempenho dos estudantes em Matemática não é diferente. A média dos participantes, na aplicação de 2018, foi de 384, enquanto que a média da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) é 489, estando o país no *Ranking*[2] 69 – 72 dentre os 79 países participantes da avaliação.

Esse cenário mostra a fragilidade que se encontra a aprendizagem de Matemática, uma vez que são conhecimentos básicos para se resolver problemas cotidianos em Matemática e que estão relacionados à dinâmica de vida de todos em sociedade.

Assim, a constatação da importância da aprendizagem da Matemática apoia-se no fato de que essa ciência desempenha papel não só importante, mas decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem diversas aplicações no mundo do trabalho e, por ser relacional, funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas do conhecimento. Do mesmo modo, interfere sobremaneira na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na formalização do raciocínio dedutivo dos aprendizes (BRASIL, 1997).

Nesse sentido, com o desenvolvimento histórico das sociedades, com profundas e significativas mudanças ocorridas em seus mais variados contextos, dentre eles, os contextos econômico, ambiental e outros, mobiliza mudanças igualmente significativas no âmbito educacional, principalmente pelas novas demandas sociais geradas, por exemplo, em face ao contato dos sujeitos com as novas tecnologias e com as novas formas de comunicação delas provenientes.

Diante desse cenário cada vez mais veloz e dinâmico, destaca-se o papel da educação, dada a sua importância para a construção e a promoção, por exemplo, via ambiente escolar e universitário, de situações didáticas capazes de oferecer aos sujeitos em formação (inicial e continuada) - sejam eles professores, estudantes ou gestores -, condições de nela se manterem ativos e produtivos.

---

[2] Ranking: intervalo no ranking considerando todos os países/economias participantes.

Ainda mais, a facilidade de acessar, selecionar e processar informações, resultante dos avanços tecnológicos,

> está permitindo descobrir novas fronteiras do conhecimento, nas quais este se revela cada vez mais integrado. Integradas são também as competências e habilidades requeridas por uma organização da produção na qual criatividade, autonomia e capacidade de solucionar problemas serão cada vez mais importantes, comparadas à repetição de tarefas rotineiras (BRASIL, 2000. p. 58).

Nesse sentido, busca-se, então, a integração, em oposição à fragmentação e segmentação, as quais, insistentemente, mantêm-se no ensino de disciplinas tais como a Matemática.

A Matemática está inserida nessa conjuntura, seja pelas demandas sociais, seja pelos índices negativos, resultantes do desempenho dos estudantes em sala de aula e nas avaliações nacionais.

Em oposição às práticas relacionadas à repetição e memorização, e a procura de algum modo de diminuir as dificuldades que rotineiramente estão relacionadas à aprendizagem e ensino de Matemática, surgem práticas educativas que estimulam a criatividade, espírito inventivo e a curiosidade. Nesse bojo, a Visualização Matemática, como um modo de ver e pensar matematicamente, está incluída na medida em que "sua relevância na exploração e resolução de problemas é incontornável permitindo a utilização de estratégias intuitivas e eficazes que inspiram descobertas criativas" (Zimmermann & Cunnigham, 1991, apud Barbosa, 2009, p. 37).

"Uma das razões para investir na implementação da visualização nas salas de aula está associada às habilidades mentais e visuais que os alunos vão desenvolver e adquirir" (SANTOS, 2014, p. 21). Costa (2000) acrescenta que a visualização é parte essencial da inteligência humana. No entanto, o uso das estratégias da Visualização Matemática no ensino e aprendizagem dessa ciência encontra empecilhos.

Santos (2014) aponta que esse modo de estruturar o pensamento parece ser pouco praticado por alguns educadores, sendo classificada como simples instrumento de ensino e/ou auxílio da aprendizagem.

Godenberg et al (1995), nesse sentido, afirma que um currículo que ignora a visualização falha não somente no desenvolvimento de uma parte substancial do pensamento dos alunos a serviço do raciocínio matemático, mas, principalmente, no que diz respeito à capacidade de visualização para explorar e argumentar visualmente (GOLDENBERG et al, 1995, apud LOUREIRO, 2009).

Deduz-se da Tabela 2 que pode existir uma relação entre a pouca valorização dessa forma de pensar matematicamente e o baixo aproveitamento dos estudantes nessa avaliação. Ainda, outra inferência é possível: a falta de utilização da visualização no ensino de Matemática, aliada ao pouco conhecimento dos estudantes sobre conceitos básicos da Geometria, dificultam sobremaneira a resolução de problemas cotidianos, tais como os presentes no dia a dia escolar, como as avaliações citadas; e aqueles relacionados à vida fora do ambiente escolar, como as situações diárias da vida em sociedade.

Estudiosos afirmam que a visualização, no sentido exposto neste texto, não pode ser reduzida

> à mera produção ou apreciação de figuras ou desenhos, ou mesmo ao desenvolvimento de conhecimentos no âmbito da geometria, pelo contrário, permite ter uma intuição que contribui para a clarificação das ideias matemáticas e para a interiorização de conceitos em diversas áreas da matemática (DREYFUS, 1991; HERSHKOWITZ, PARZYSZ & DORMOLEN, 1996 apud BARBOSA,2009, P 60).

Nesse sentido, sabendo que o pensamento visual é difícil de ser desenvolvido,

> parece que é imprescindível que os processos cognitivos que o acompanham devam ser clarificados e tornados explícitos, para que se possa não só diminuir os problemas de aprendizagem que normalmente o acompanham como também identificar os modos de pensamento visual com que os alunos lidam. (COSTA, 2000, p. 180).

Outra metodologia de ensino que está diretamente relacionada com o desenvolvimento de habilidades importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático é a Resolução de Problemas. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, parte III, existe a recomendação de utilizar essa estratégia para o ensino e aprendizagem de matemática, uma vez que

> "A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas é finalidade da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de conhecimentos, bens e serviços". (BRASIL, 2000, p. 20).

Além do que, centra o estudante na sua aprendizagem e estimula a aprimoramento de habilidades como criatividade, inovação, raciocínio lógico, criticidade, capacidade de argumentação, entre outras.

Entendendo que a Visualização Matemática e a Resolução de Problemas compartilham da capacidade desenvolver nos estudantes habilidades importantes para aprendizagem de Matemática e cruciais para a vida em sociedade na contemporaneidade, essas metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática foram o objeto de estudo deste trabalho. Assim, esse trabalho se propõe a compreender como está se dando o ensino e aprendizagem de matemática, por meio da visualização matemática atrelada a resolução de problemas no país.

Para tanto, foram analisadas as seleções do ENEM, tendo como foco os problemas com maior percentagem de erro e que demonstram carecer da visualização para resolução. A resolução de problemas se constitui, nesse universo, como método a ser seguido. Ainda, à medida que resolvemos os problemas selecionados, disponibilizamos um material que pode ser útil a quem tiver interesse, principalmente ao professor de matemática da Educação Básica, como meio de auxílio e estímulo para o uso da visualização em sala de aula.

De maneira geral, este trabalho procurou discutir sobre currículo da educação básica, por intermédio da análise do desempenho dos estudantes no ENEM, no que diz respeito a visualização matemática. Para tanto, discutiu-se sobre resolução de problemas, realizou a resolução de problemas selecionados e, ao fim, como citado, foi disponibilizado um material com a resolução dos problemas selecionados.

A presente investigação foi assim descrita: no capítulo Introdução são apresentados os elementos fundamentes da pesquisa, os objetivos, uma breve justificativa e anúncio dos aspectos metodológicos.

Na sequência, três capítulos de fundamentação teórica:

- No capítulo 2, são apresentadas breves considerações sobre a educação em Matemática no País, partindo das orientações nacionais e pesquisas que falam sobre o tema.

- O capítulo 3 aborda os aspectos gerais sobre Visualização Matemática, a partir de pesquisas sobre o tema.

- Já o capítulo 4 buscou discorrer sobre resolução de problemas na visão de Larson (1983).

Nos capítulos seguintes são explicitados os aspectos metodológicos; o item Resultados e Discussão - que prevê o confronto da fundamentação teórica com os dados encontrados na pesquisa; as Considerações Finais e as Referências utilizadas.

2 ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Neste capítulo discorremos sobre o ensino da matemática na educação básica, com foco, principalmente, na legislação vigente e na visualização matemática. Expressões como representação geométrica e representação visual são utilizadas e entendidas como inclusas na visualização matemática, a qual será melhor discutida no capítulo seguinte.

2.1 Orientações Curriculares para o Ensino de Matemática: Documentos Oficiais

Os objetivos do ensino e aprendizagem em Matemática, como das outras ciências, estão diretamente relacionados ao que a sociedade espera dos sujeitos que participam desse processo de ensino. Assim, esses objetivos refletem aspectos de ordem social e política, como também traduzem os saberes científicos, bem como relacionam-se com as teorias educacionais que se consolidam e se refazem ao longo da história da sociedade.

Historicamente, o ensino de Matemática é considerado engessado numa prática que privilegia a memorização de algoritmos e aplicação deles por meio de exercícios, sem atingir a representação simbólica do conhecimento matemático que está por trás dessa aplicação. O mesmo se aplica ao estudo dos axiomas, postulados, proposições e teoremas, os quais são constituídos de forte teor histórico, e que se consolidaram em anos de estudos e pesquisas das diversas sociedades pelo mundo. Assim, a abstração que integra o escopo próprio da Matemática não é atingida e, dessa forma, é favorecida a aplicação dos símbolos que são exprimidos do conhecimento matemático.

Segundo Lorenzato (1995), esse engessamento pode estar relacionado à formação de professores que privilegiam uma formação centrada, semelhante ao que ocorre na Educação Básica, em procedimentos de técnicas algebrizadas, na utilização exclusiva e ingênua do livro didático como material de ensino e, provavelmente o mais relevante, a concepção de uma Matemática como ciência rígida, lógica e algorítmica. Constata-se, assim, que o ensino de Matemática tem se caraterizado como uma aritmetização do raciocínio.

Nesse sentido, as instituições de ensino, sejam elas Universidades, Institutos ou Escolas, são por excelência, locais que permitem aos sujeitos ter contato com os saberes cientificamente organizados, ainda mais, permite que se faça a "mediação entre os conceitos cotidianos e científicos" (MORAES e MOURA, 2009, p. 99). Isto é, "pela mediação da escola, dá-se a passagem do saber espontâneo ao saber sistematizado, da cultura popular à cultura erudita". (SAVIANI, 1991, apud MORAES e MOURA, 2009, p.99).

A partir desses pressupostos, é inevitável se pensar no currículo de matemática para Educação Básica. Em consonância com o exposto acima, Brasil (2000), afirma que, faz-se necessário uma reforma curricular, pois, até a proposta desse novo parâmetro curricular, tinha-se a escola com um currículo que pretende formar os sujeitos

> por meio da imposição de modelos, de exercícios de memorização, da fragmentação do conhecimento, da ignorância dos instrumentos mais avançados de acesso ao conhecimento e da comunicação. Ao manter uma postura tradicional e distanciada das mudanças sociais, a escola como instituição pública acabará também por se marginalizar (BRASIL, 2000, p. 12).

Espera-se, de modo geral, que a aprendizagem de Matemática, bem como o seu ensino, permita aos sujeitos se reconhecerem numa sociedade em profundas mudanças, com forte aparato tecnológico, competitiva e que saiba utilizar os conhecimentos matemáticos para o desenvolvimento dessa mesma sociedade. Assim, os sujeitos tornam-se ativos e conscientes do seu papel social diante das suas relações com o meio.

Portanto, almeja-se um ensino que favoreça “o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização” (BRASIL, 2000, p. 5). Além disso, espera-se também desse ensino “a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação”(BRASIL, 2000, p. 5).

Nesse sentido, busca-se uma formação na Educação Básica que estimule a criatividade, o espírito inventivo, curiosidade e posicionamento crítico a fim de se formar identidades que sejam capazes de conviverem com o incerto e o imprevisível de forma a sempre estar inquieto diante das imposições sociais.

Os parâmetros curriculares citados demonstram com argumentos sólidos que a sociedade exige um padrão de ensino e aprendizagem diferente do tradicional, e afirma que

> A nova sociedade, decorrente da revolução tecnológica e seus desdobramentos na produção e na área da informação, apresenta características possíveis de assegurar à educação uma autonomia ainda não alcançada. Isto ocorre na medida em que o desenvolvimento das competências cognitivas e culturais exigidas para o pleno desenvolvimento humano passa a coincidir com o que se espera na esfera da produção. (BRASIL, 2000. p. 11).

Podemos alargar o significado do termo produção do fim da última citação, a fim de alcançar relações sociais que vão além do sentido trabalho, vez que a Matemática surgiu no seio dos problemas cotidianos e reflete a beleza da natureza em suas múltiplas formas.

Não é objetivo deste trabalho aprofundar quais conhecimentos Matemáticos têm relação direta com a vida em sociedade, mas, diante dessa discussão, é pertinente citar alguns deles, tais como: cálculos de porcentagem – compras diversas com desconto e parcelamento; exponencial e matemática financeira – compra de imóveis, aplicações bancárias; entre outras infinidades de aplicações e análise e previsão de fenômenos naturais ou sociais.

Além do que, a

> Matemática é uma ciência que estuda relações. É também uma maneira de pensar. Ao longo da história, a Matemática desenvolveu sistemas de representação e modelos de análise que nos permitem pensar sobre os eventos e fenômenos, fazendo análises que não seriam possíveis sem esses sistemas de representação. Por isso, o ensino da Matemática não interessa apenas aos matemáticos ou aos futuros matemáticos, mas a todos (Campos e Nunes, 1994, p. 2).

Assim, apesar de ser uma ciência abstrata, a Matemática também é concreta, isto é, busca dar conta de aspectos do real, ainda mais por se constituir como uma linguagem formal de expressão de diversas ciências. Logo, deve-se considerar a necessidade de o currículo escolar contemplar competências que perpassam a aprendizagem pura e seca dos conhecimentos matemáticos, alcançando patamares superiores e necessários à vida em sociedade, para o exercício da cidadania e desempenho, inclusive, das atividades profissionais. Nesse bojo estão incluídos os saberes tecnológicos e científicos.

O PCN do Ensino Médio – bases legais- (Brasil, 2000, p 11) esclarece que competências devem ser desenvolvidas nessa etapa de ensino. Podemos citar:

1) Da capacidade de abstração;
2) do desenvolvimento do pensamento sistêmico, ao contrário da compreensão parcial e fragmentada dos fenômenos;
3) da criatividade;
4) da curiosidade;
5) da capacidade de pensar múltiplas alternativas para a solução de um problema, ou seja, do desenvolvimento do pensamento divergente;
6) da capacidade de trabalhar em equipe;
7) da disposição para procurar e aceitar críticas;

8) da disposição para o risco;
9) do desenvolvimento do pensamento crítico;
10) do saber comunicar-se;
11) da capacidade de buscar conhecimento.

Nota-se que todas essas competências estão relacionadas ao se aprender Matemática. Uma vez que, quando o aprendiz está diante de uma situação nova, de um determinado conhecimento matemático, é comum que se percorra todas as competências elencadas acima. Assim, essa ciência, no seu cerne, tem a capacidade natural de desenvolver nos sujeitos as competências citadas. Basta para isso, o aprendiz ter os estímulos necessários.

Nesse contexto, percebe-se que essas competências são transpostas do ambiente de sala de aula para todos os contextos sociais, como por exemplo o político, do exercício da cidadania e o produtivo, entre outros. Logo, são situações aprendidas nas instituições de ensino e aplicadas na vida em sociedade.

A linguagem Matemática, como outras linguagens verbais e não verbais, expressa-se como meio de "partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo" (BRASIL, 2018, p. 8).

Esse discurso está de acordo com o preconizado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Básica (LDB), em seu artigo 35, seção V, onde se diz que as metodologias e as formas de avaliação serão organizadas de tal modo que o educando demonstre:

> I - domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;
> II - conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;
> III - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Dando ênfase ao inciso III, a almejada autonomia intelectual e do pensamento crítico são habilidades que se pretendem alcançar no ensino e aprendizagem de Matemática, tendo em vista que são características necessárias para o entendimento dessa ciência e fazem parte de uma formação coerente e aceitável para vida em sociedade como exposto pelos PCNs.

Ainda mais, reforçamos que, a Matemática como ciência do cotidiano, que modela diversas situações reais e imaginárias, traz consigo uma relação direta com a vida em sociedade, seja em relação aos seus conhecimentos ou a sua relação com as outras ciências. Além do mais,

> possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2000, p.9).

A procura de alcançar a educação proposta acima, a resolução CNE/98 aponta que as competências ditas essenciais, que o educando deve desenvolver, estão relacionadas diretamente com a Matemática. Habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico são claramente expressas em seus objetivos educacionais. (BRASIL, 2000).

Os PCNs também enumeram caraterísticas que o ensino de Ciências, Matemática e Suas Tecnologias devem possuir, dentre elas temos:

> 1) Ler e interpretar textos de Matemática.
> 2) Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).
> 3) Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
> 4) Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
> 5) Produzir textos matemáticos adequados.
> 6) Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
> 7) Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. (BRASIL, 2000, p.46)

Daremos ênfase aos itens 1,3 e 7, vez que são pontos chaves deste trabalho.

A partir dos itens elencados, percebe-se que os PCNs deixam claro a necessidade de uma visão geométrica dos problemas matemáticos, sejam eles de qualquer natureza, com exceção daqueles que possuem notadamente a expressão algébrica como seu cerne.

Mais especificamente no item 3) os legisladores demonstram que a passagem da linguagem simbólica para a geométrica, entre outras, bem como inverso, deve ser prática comum entre os estudantes. Entendemos linguagem geométrica, como será melhor explicado no capítulo 3, deste texto, como sendo toda representação visual de um problema ou conhecimento matemático, sejam eles: gráficos, tabelas, figuras, etc.

A partir desse momento, nos referiremos ao termo representação visual como sendo toda representação geométrica de problemas e conceitos matemáticos. No capítulo 3, incluiremos o termo Visualização Matemática, que engloba a representação geométrica.

O item 1), por si só já orienta a utilização dos recursos visuais – representação geométrica/ visualização Matemática.

Nesse sentido, os PCN+[3], igualmente, citam características do ensino de Matemática, as quais são complementares às encontradas nos PCNs. Uma delas diz que é objetivo a ser alcançado no Ensino Médio que os estudantes possam "Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos, árvores de possibilidades, desenhos e representações geométricas" (BRASIL, 2002, p. 114).

No entanto, esse documento mostra que essa competência vai além de usar uma ou outra representação matemática, visto que se espera que os estudantes possam refletir criticamente sobre esse uso, visto que, eles devem ser capazes de transitar entre uma forma de representação e outra, além de julgar qual das formas de representação é mais pertinente diante da situação problema, reconhecendo os limites e possibilidades do uso de cada representação, como assinala o PCN+.

Não somente os PCNs do ensino médio têm a representação visual como objetivo a ser alcançado pelo ensino e aprendizagem de Matemática, há outros documentos oficiais que igualmente orientam quanto à utilização desse recurso em sala de aula

Antes de mostramos que os PCNs do ensino fundamental também seguem essa ótica, a fim de familiarizar o leitor que não tenha tido acesso a esses parâmetros, informamos que este documento é composto, em linhas gerais, por dois documentos. O primeiro contempla as séries iniciais, 1ª a 4ª, e o segundo, as finais, 5ª a 8ª[4]. Os parâmetros para séries iniciais são subdivididos em primeiro e segundo ciclos, além de fornecer análises sobre o ensino e aprendizagem de matemática e oferecer orientações didáticas.

Nos dois documentos citados, encontram-se a mesma orientação quanto a visualização para o ensino e aprendizagem de matemática, indicando que é objetivo do ensino fundamental, em qualquer ciclo, que os estudantes sejam capazes, dentre outras habilidades de utilizar as

[3] Este documento nacional traz de orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.
[4] Nesse texto citamos séries iniciais, 1ª a 4ª, e séries finais, 5ª e 8ª, pois o documento foi publicado anteriormente à alteração de 8 séries para 9 anos como composição do Ensino Fundamental.

diferentes linguagens, dentre elas a verbal, matemática, gráfica, corporal, entre outras, como veículo para expressar ideia, interpretar e usufruir das produções culturais. (BRASIL, 1997).

Mais ainda, ao longo dos documentos, os PCNs trazem menções ao uso desse recurso nas aulas de matemática, por exemplo os parâmetros do Ensino Fundamental séries iniciais enunciam que, ao fim do primeiro ciclo e do segundo ciclo, os estudantes devem utilizar diferentes registros gráficos, sejam eles desenhos, esquemas ou a própria escrita numérica, para expressar ideias, ter subsídios para resolução de problemas e comunicar estratégias e resultados. (BRASIL, 1997).

Interpreta-se que, desde os primeiros contatos do estudante com a Matemática escolar, há a preocupação dos legisladores de que esse sujeito tenha experiências que favoreçam o uso da visualização como veículo e suporte para compreensão dos aspectos inerentes aos conceitos matemáticos e resolução de problemas. Além disso, fica evidente que ao utilizar esses recursos, o estudante aprende a utilizar o raciocínio lógico matemático e transpor para o seu dia a dia, na resolução dos problemas diários, as estruturas mentais que foram desenvolvidas a partir do contato com esses meios de raciocínio.

Ainda, ao longo desse documento, em consonância com esse pensamento, entende-se que no ensino de Matemática destacam-se dois aspectos centrais básicos: o primeiro deles consiste em observações do mundo real com representações diversas, por exemplo, figuras, tabelas, gráficos; e o segundo consiste em relacionar essas representações com os princípios e conceitos que norteiam a Matemática em suas múltiplas formas. Assim sendo, o estudante deve utilizar com eficiência representações gráficas, desenhos, construções e aprender a organizar e tratar os dados matemáticos advindos dessas representações. E, para tanto, esse sujeito deve utilizar o conhecimento matemático e fazer o maior número possível de relações entre eles, além de selecionar, organizar e produzir informações relevantes e interpretá-las e avaliá-las com a criticidade necessária (BRASIL, 1997, p. 15).

Acredita-se que o contato com as diversas formas de representar o saber matemático (algumas delas foram citadas nos parágrafos anteriores) proporciona aos estudantes realizar relações importantes. Nesse sentido, as relações citadas, as quais são resultantes das suas experiências acadêmicas, podem ampliar os significados que esses sujeitos possuem acerca do mundo e do conhecimento matemático, aprimorando o potencial de abstração que se faz necessário para aprendizagem dessa ciência.

Ao contrário da forma que, insistentemente, o ensino de aprendizagem de Matemática se dá - privilégio de atividades de memorização que, por muitas vezes, são desprovidas da compreensão que se faz necessária para aprendizagem de Matemática -, acredita-se que a aprendizagem dessa ciência deve estar centrada na construção de significados, no pensamento criativo, em desenvolver o pensamento dedutivo/indutivo, no trabalho com analogia e em fazer observações sistemáticas.

De forma semelhante, para os ciclos 3 e 4, contidos nos PCNs do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries), temos que os estudantes devem, nessa etapa de ensino, no campo da álgebra, ser capazes de realizar traduções de aspectos visuais como tabelas e gráficos e fazer a transposição para linguagem algébrica e vice e versa. Ainda, a partir dessa tradução, devem ser capazes de generalizar regularidades percebidas nesse processo. (BRASIL, 1998).

Observa-se que, independentemente do conhecimento matemático a ser estudado, seja no campo da Álgebra, da Geometria, entre outras áreas da Matemática, há a orientação de que o uso da visualização favorece o desempenho dos estudantes. Essa orientação tem como objetivo principal favorecer ambientes de aprendizagem que permitam aos aprendizes serem capazes de estabelecer relações e abstrações necessárias para a compreensão do conhecimento matemático.

A partir das relações citadas, o aprendiz pode realizar observações sistematizadas, selecionar, organizar e produzir informações que julga ser relevantes, para, por fim, interpretá-las criticamente. Como resultado dessa prática, espera-se que esse sujeito possa dar significados relevantes ao conhecimento estudado.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, no campo espaços, tempos, quantidades, relações e transformações, reservado à educação infantil, informa que os educandos dessa etapa de ensino devem, entre outros, "identificar e registrar quantidades por meio de diferentes formas de representação (contagens, desenhos, símbolos, escrita de números, organização de gráficos básicos)" (Brasil, 2018, p. 56). Isto é, desde a educação infantil a representação geométrica está presente na interpretação dos saberes matemáticos, neste caso, do mundo físico.

No Ensino Fundamental, neste mesmo documento, não é diferente. O estudo da Matemática, nesta etapa de ensino, é subdividido em Unidades Temáticas, quais sejam: 1) Números, 2) Álgebra, 3) Geometria, 4) Grandezas e Medidas e 5) Proporcionalidade e Estatística. Cada uma possui uma finalidade especifica, no entanto, todas citam o pensamento geométrico/representação visual quando da definição e o que se pretende estudar nessas unidades. Com exceção da temática Números, vez que, diz-se que na verdade essa temática deve estar presente nas outras aqui citadas.

Por exemplo, para Unidade Temática Álgebra, os legisladores afirmam que, para o alcance das habilidades que são fins dessa Unidade, os alunos devem identificar regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações (BRASIL, 2018).

Quanto ao ensino médio, nesse documento, evidenciam que as competências que os estudantes devem desenvolver nessa etapa de ensino devem estar associadas ao termo representar. Que neste caso, pressupõe a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apontam, ainda, que apesar de essa ação não ser exclusividade da Matemática, vez que todas as áreas do conhecimento têm suas formas de representar os saberes sistematizados, nessa área é possível verificar de forma evidente e inequívoca a importância das representações para o entendimento de fatos, ideias e conceitos (BRASIL, 2018).

Notoriamente, o acesso ao saber matemático se dá por meio da representação, tendo em vista que, em Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário ou essencial para a compreensão, resolução e a comunicação de resultados de uma atividade ou, ainda, dos conceitos próprios dessa ciência.

Por esse motivo, a BNCC reforça que é esperado dos estudantes o conhecimento dos diversos registros de representação e que sejam capazes de utilizá-los eficientemente e com flexibilidade para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática, verificando quais recursos são mais apropriados na busca de soluções dos problemas e, conjuntamente, alcançar o desenvolvimento do próprio raciocínio. (BRASIL, 2018)

Entendemos que a representação citada diz respeito a todo registro matemático disponível para a compreensão e resolução dos problemas, incluindo, neste caso, os de representação visual/geométricos. Inclusive, para reforçar o nosso entendimento e posicionamento, ao longo do mesmo documento, os legisladores citam como registros de representações matemáticas: o algébrico, o geométrico, o estatístico, o computacional, entre outros.

A partir dos documentos citados, podemos perceber que desde 1995 existem orientações para o uso da representação visual em matemática, demonstrando que não é um tema novo. No entanto, como vimos no início desse capítulo, não é uma prática corriqueira no ensino básico, vez que o ensino de matemática ainda está enraizado numa metodologia tradicionalmente focada na realidade do conhecimento segmentado, no privilégio da memorização indiscriminada de algoritmos e falta da construção efetiva das abstrações necessárias.

Conclui-se também que as orientações não se resumem a uma etapa específica da educação básica, pelo contrário, está presente desde a educação infantil até o ensino médio. Isso mostra que se efetivas, práticas que favoreçam contextos educativos como os que a representação visual esteja presente, os estudantes seriam familiarizados com essas práticas desde o início da educação formal e, consequentemente, poderiam, com maior probabilidade, ser capazes de utilizá-las e aproveitar os benefícios que desse uso podem suscitar.

Reforçamos que não é de interesse deste trabalho propor uma solução para todos os problemas do ensino e aprendizagem de Matemática, mas disponibilizar uma proposta, de acordo com a legislação vigente da educação básica, que aumente o rol das possibilidades desse ensino, no que se refere ao modo que insistentemente ainda acontece atualmente. Entendemos que à medida que formas diferentes de apresentar os saberes matemáticos são utilizadas em seu ensino, pode-se atingir um maior número de sujeitos que necessitam de aprender de modo diferente do usual e, assim, desmitificar a ideia de que a Matemática dita básica é inatingível.

É possível, inclusive, fazermos uma relação com a falta de utilização de recursos diversos na educação básica nas aulas de Matemática, com a também falta ou escassa utilização desses recursos em cursos de formação de professores. Nesse sentido, torna-se dificultoso que o professor que não teve contato com esses recursos em sua formação seja capaz, por si só, de utilizá-los com propriedade e confiança.

Acreditamos que pesquisas como esta que nos propusemos a fazer, sejam meios de divulgar esse saber matemático e que podem servir de inspiração para professores e alunos que se interessem pelo tema.

A seguir, discutiremos sobre as definições e tipos de visualizações matemáticas.

3 VISUALIZAÇÃO MATEMÁTICA: TEORIAS, CONCEPÇÕES E TIPOLOGIA

3.1 Considerações sobre visualização matemática

A visualização matemática é tema fértil de pesquisas há algum tempo. Pesquisadores como Cifuentes e Santos (2019), Flores, Wagner e Buratto (2012), Alencar, Cândido e Farias (2019), Leivas (2009), entre outros, estudam esse método de pensar matemático e demonstram sua aplicabilidade.

Esse campo de pesquisa não é de interesse apenas nacionalmente, tendo pesquisas como as de Barbosa (2009) e Gordo (1993), realizadas internacionalmente, evidenciando a necessidade e sucesso da aplicação da visualização no ensino básico Português.

No banco de dissertações do Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, por exemplo, temos pesquisadores que se debruçaram sobre esse estudo. Dentre eles podemos citar Albuquerque (2017), Santana (2019), Nicotera Junior (2017), e Santos (2015).

Como vimos no capítulo anterior, a legislação da educação básica orienta quanto à utilização desse recurso nas aulas de matemática. Argumentos como os de que a Matemática dispõe de ferramentas de visualização que por si sós permitem a compreensão ou demonstração de relações, regularidades ou propriedades (BRASIL, 1998, p 45), isto é, imagens são repletas de significados matemáticos, foram evidenciados em capítulos anteriores deste texto, mas se torna pertinente deixar claro essa orientação para o encadeamento lógico desse capítulo.

Assim, há o reconhecimento de que

> a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. (BRASIL, 1998, p. 46)

Esse pensamento está de acordo com o raciocínio de Cifuentes (2010), ao argumentar que se torna possível, por meio de técnicas de visualização, diagnosticar conceitos, formas, simetrias, semelhanças, bem como argumentar, utilizando o raciocínio visual. Isto quer dizer que, visualizar não é apenas ver o visível, é principalmente tornar visível, usando o raciocínio visual e abstração, isto é, a representação simbólica do conhecimento matemático.

O teorema de Pitágoras é um exemplo amplamente conhecido no meio matemático e dispomos hoje de algumas maneiras que usam a geometria[5] como forma de demonstrá-lo[6].

Se transpormos para sala de aula, perceberemos que é frequente a algebrização de conhecimentos geométricos, como o teorema de Pitágoras, citado anteriormente, em que este teorema se traduz da seguinte forma:

Teorema de Pitágoras:

Dado um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Sendo a, b e c, as medidas da hipotenusa e dos catetos, respectivamente, de um triângulo retângulo, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (1).$$

No entanto, esquece-se que por trás desse resultado existe a geometria que, historicamente, foi a responsável para consolidação desse e de tantos outros conhecimentos matemáticos. Podemos citar também as construções com régua e compasso de Euclides, como visto nos estudos de Roque (2012).

Lorenzato (1995) afirma que, em uma parcela considerável de casos, a Geometria é apresentada como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desconectada de qualquer aplicação ou explicação histórica ou lógica ou, ainda, é reduzida a poucas formas banais de representação do mundo.

A perspectiva que tomamos neste trabalho é a da apresentação do pensamento matemático por meio da geometria, de modo a que seja possível a geometrização do pensamento matemático, como defende Cifuentes (2010). Assim, a geometria, ou geometrização do pensamento matemático, mostra-se como forma interessante de enxergar muitos conceitos matemáticos, articulando aspectos formais e intuitivos.

Diante desse contexto, Lorenzato (1995, p 5) lança um questionamento muitíssimo pertinente, o qual para nós traduz a situação do ensino tanto da geometria, quanto do uso da visualização matemática, nas aulas de matemática e que a resposta não se concebe facilmente. Vejamos: “Onde colocar o ponto de equilíbrio dinâmico entre o intuitivo e o dedutivo, o

---

[5] Quando citamos geometria, incluímos a visualização matemática como meio de compreensão e demonstração de teoremas, proposições, entre outros, no vasto campo da Matemática.

[6] Mostraremos uma maneira da demonstração dessas formas para que o leitor se familiarize como o tema, caso não seja de conhecimento de demonstrações desse tipo.

concreto e o abstrato, o experimental e o lógico, tendo em vista uma aprendizagem significativa da Geometria" (Lorenzato, 1995, p. 5).

Como afirmamos, conceber uma resposta para o questionamento apontado não é fácil, entretanto, o pesquisador aponta uma necessidade de reestruturação do ensino da Geometria (Lorenzato, 1995), o que perpassa, também, pelo ensino com uso da visualização matemática, uma vez que, esses conhecimentos matemáticos possuem relação estreita e de dependência. Essa reestruturação pode favorecer contextos de ensino e aprendizagem que podem desmitificar a dualidade existente entre os aspectos citados por Lorenzato, mitigando a distância entre eles.

Esse pensamento direciona, como aponta Santos (2014), para a compreensão de uma geometria, como linguagem de conceitos analíticos, algébricos e, por si só, geométricos, conduzida pelo pensar matematicamente, na busca de desenvolver um ensino com significados, rico em argumentação e com conexão entre o saber matemático (seja ele algébrico, analítico, entre outros), o geométrico e a visualização.

Ainda, Flores, Buratto e Sztajn (2011) ressaltam que o ensino e aprendizagem de matemática, pautado na relação entre os conhecimentos geométricos e as práticas visuais, poderia construir uma educação matemática significativa e crítica e alcançar patamares desejáveis para a educação que se faz necessária numa sociedade cada vez mais dinâmica e que proporcionam problemas cada vez mais complexos.

Uma aprendizagem crítica, nesse sentido, constitui-se como objetivo primeiro ao se utilizar a visualização matemática como recurso de ensino. Trata-se não somente de apresentar o problema visualmente, mas entender os aspectos cognitivos que podem suscitar ao fazer com que os estudantes tenham contato com as representações matemáticas da realidade e, principalmente, as relações (matemáticas, lógicas, dedutivas, do cotidiano, dos conhecimentos prévios, etc) que são advindas desse processo.

Além disso, permite que os estudantes entendam de onde advém a aplicação de um algoritmo e, acima de tudo, possibilita uma resolução mais construtiva e dedutiva, sem perder, é claro, o rigor matemático que é o cerne dessa ciência.

Ao se falar em resolução construtiva, a autonomia que resulta dessa prática não pode deixar de ser mencionada, uma vez que é inegável que construções e pensamentos diversificados podem surgir do ensino de matemática que tenham como base a visualização matemática. Essa diversidade está diretamente relacionada com a vivência e experiência dos estudantes com a própria matemática, pois é sabido que essa ciência é feita de relações, isto é, os saberes matemáticos estão relacionados de alguma forma entre si. Assim, a criatividade de cada estudante suscita formas matemáticas distintas de resolver os problemas.

Dessa forma, autonomia e criticidade andam juntas no fazer e entender matemática por meio da visualização matemática. Esse pensamento está de acordo com os PCNs do Ensino Médio, parte I, (Brasil, 2000) ao esperar que a educação deve propiciar desenvolvimento da capacidade de aprender, como processo contínuo, da autonomia intelectual e do pensamento crítico, isto é, a flexibilidade deve estar presente na adaptação diante dos problemas matemáticos, a qual, como vimos anteriormente, reflete sobremaneira na vida do estudante e sua ação na sociedade.

Logo, pensar em implementar contextos em que a visualização esteja presente, parece suscitar nos estudantes capacidades matemáticas e cognitivas relevantes, ao ponto de fazer conexão entre o aprendido na escola e o cotidiano.

Diante do exposto até o momento, é pertinente mostrarmos algumas definições de visualização, bem como indicarmos a que tomaremos como base para esta investigação.

3.2 Definição de visualização

Como mencionamos, a visualização matemática tem sido rotineiramente estudada, tendo como resultado uma multiplicidade de conceitos relacionada a esse termo. Santos (2014) em suas pesquisas, inclusive, traz, entre 1986 a 2010, algumas abordagens de conceitos.

Os conceitos se mostram não lineares, mas se resumem, de alguma forma a

> Processos de construção e transformação de imagens visuais mentais; uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica; processo de formação de imagens (mentais, com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática; forma de pensamento que torna visível aquilo que se vê, extraindo padrões das representações (FLORES, WAGNER e BURATTO, 2012 p. 40).

Corradi e Franco (2020, p.33) observam que em um levantamento realizado por Buratto (2012), foram listadas dezoito concepções de visualização em educação Matemática, entendendo que a visualização perpassa o simples ato de ver ou da percepção.

Destacamos, a partir dessas interpretações da visualização matemática, que a capacidade visual se relaciona não somente com a forma, mas com o processo em si, que vai desde uma questão puramente mental a uma figura, ou representação de um problema, escrito. Isso quer dizer que, essa capacidade visual “envolve a visualização e a translação de relações abstractas em formação não figurativa para termos visuais. Inclui também a manipulação e transformação de representações e imagens visuais” (BISHOP, 1980, p. 184 apud GORDO, 1993, p.32).

Para fins desse trabalho, utilizaremos a concepção de visualização segundo os pesquisadores Duval e Gutiérrez. Conforme Corradi e Franco (2020) as ideias desses pesquisadores sobre a temática se complementam, além de ambos entenderem que se trata de um processo matemático que deve ser incentivado. Vejamos a seguir as concepções dos autores.

Para Duval (1999b) a visualização é entendida como “uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica” (DUVAL, 1999b, p. 13, apud CORRADI e FRANCO, 2020, p.34). Além disso, Duval (2015) afirma para que visualização seja efetiva, deve existir uma integração entre duas funções: a heurística, que se relaciona a uma desconstrução dimensional, e a discursiva, relacionada às propriedades matemáticas. Ainda, para ser consubstanciada, a visualização, quando necessário, passa por uma função de suporte para verificações concretas, como por exemplo, medições, cálculos, etc. (CORRADI e FRANCO, 2020, p.34).

Enquanto, Gutiérrez amplia o significado de visualização, ao considerá-la como “um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico” (GUTIÉRREZ, 1996[a], p. 10, apud CORRADI e FRANCO, 2020, p.34). Tal ampliação integra quatro elementos: imagens mentais, as representações externas; as ações de interpretação de informações para geração de imagens e também a “leitura” de imagens para obtenção de informações a partir dessa leitura; e as habilidades para a visualização. (CORRADI e FRANCO, 2020).

Dessa forma, os pensamentos dos autores estão de acordo com os objetivos dessa pesquisa, uma vez que, consideram a visualização como uma atividade que dá sentido aos saberes matemáticos, e que está correlacionada com a arte inventiva, discursiva, em que o raciocínio é peça chave na interação com as representações visuais, sejam mentais ou físicas.

Assim, consideraremos a visualização matemática como sendo o raciocínio/ abstração dos saberes matemáticos por intermédio da visualização, seja mental, seja física (escrita, por exemplo), desses saberes.

Para Cifuentes e Santos (2019) há três tipos de visualização: geométrica, contextualizada e algorítmica. Neste texto, discutiremos a visualização geométrica, visto que, acreditamos, que os problemas aqui tratados relacionam-se mais diretamente com esse tipo.

3.2.1 Visualização Geométrica

Está é o tipo de visualização amplamente conhecido. Trata-se tão somente de utilizar os conceitos e construções próprios da geometria, com o intuito de fazer relações tanto geométricas como algébricas.

Historicamente, foi com os trabalhos geométricos de Euclides que a relação íntima entre a visualização e a geometria foi evidenciada. Os teoremas, proposições, entre outros, tiveram suas demonstrações realizadas com régua e compasso, demonstrando a importância fundamental da visualização no processo de demonstração matemática. A seguir vem a geometria analítica, que, mesmo com sua questão geométrica evidente, o aspecto algébrico toma espaço na Matemática. Neste caso “os aspectos formais foram separados dos visuais, esse último é conservado até hoje, chamado usualmente de modelo ou interpretação” (CIFUENTES, 2003, p. 70, apud SANTOS, 2014, p. 27).

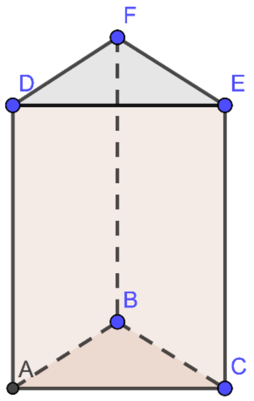
Assim, a visualização dita geométrica é aquela relacionada diretamente aos aspectos próprios da Geometria. Alguns deles são: congruência, semelhança, forma, ponto, reta, plano, entre outros. Cifuentes (2003, apud Santos, 2014) adiciona que os conceitos para serem geométricos necessitam de propriedades, transformações e correspondências.

Nesse contexto da visualização geométrica, faz-se necessário refletir sobre o significante papel do correto entendimento dos conceitos geométricos para que a visualização geométrica seja efetiva e passível de dirimir os possíveis equívocos. A recíproca, neste caso, é verdadeira, uma vez que uma visualização equivocada direciona ao erro e o entendimento também equivocado do conhecimento geométrico.

A visualização de sólidos no plano é exemplo clássico de grande dificuldade por parte dos alunos, tanto para a realização do desenho da figura que representa o sólido, quanto da interpretação de figuras prontas.

Temos como exemplo, o sólido a seguir

Figura 1 – Prisma de bases triangulares



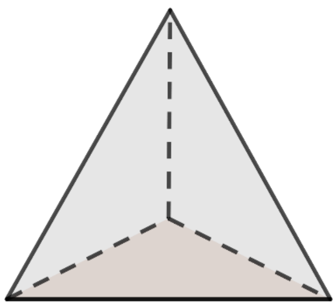
Fonte: Elaborado pela autora

A dificuldade de interpretação da imagem espacialmente permite com que sejam realizadas diversas conclusões, muitas delas equivocadas. Pode-se citar a dificuldade em observar a profundidade da imagem, apenas se verificando a existência de polígonos triangulares e retângulos.

Aos olhos de um indivíduo que usa a visualização matemática com frequência, interpretações como a citada parecem ser distantes da realidade dos estudantes, uma vez que se enxerga, sem sombra de dúvidas, um prisma regular de bases triangulares. Entretanto, alguns pesquisadores discutem em suas pesquisas a existência dessa dificuldade e exemplificam com situações como a citada.

Ainda como exemplo, tem-se um tetraedro regular.

Figura 2 - Tetraedo regular



Fonte: Elaborado pela autora

Santos (2014) argumenta que a visualização do tetraedro em seu desenho no plano está associada pelos alunos a um triângulo, tendo como um dos motivos o foco nas faces, que são triangulares, sem a devida visualização da profundidade da imagem.

O leitor, professor da educação básica, poderá relembrar interpretações diversas de variados contextos, como as expostas aqui, no seu dia a dia de sala de aula. Interpretações essas que dificultam a compreensão dos conhecimentos matemáticos, nestes casos, relacionados a Geometria.

Como mencionamos, conclusões errôneas de situações como as apresentadas, refletem a inabilidade de utilizar a visualização matemática. Tal inabilidade está relacionada a fatores como: pouco ou nenhum contato com esse método de enxergar a matemática em sala de aula, atrelada a pouca familiaridade do professor em sua formação, e no privilégio da aplicação de algoritmos prontos, além de um favorecimento da aplicação de problemas em que o uso dos algoritmos prontos acontece naturalmente.

A seguir, apresentamos a Prova Sem Palavras - PSP, definida assim por utilizar apenas imagens para demonstração de conceitos Matemáticos. Como discutido por Mathias, Silva e Leivas (2019) ao afirmarem que pesquisadores como Hanna e Sidoli, 2007; Giaquinto, 2007; Nóbriga, 2019 (apud Mathias, Silva e Leivas (2019)) considerarem a premissa de que representações visuais devem ser tratadas como um acompanhamento figurativo nas demonstrações, ou como parte integrante da prova ou como a própria demonstração.

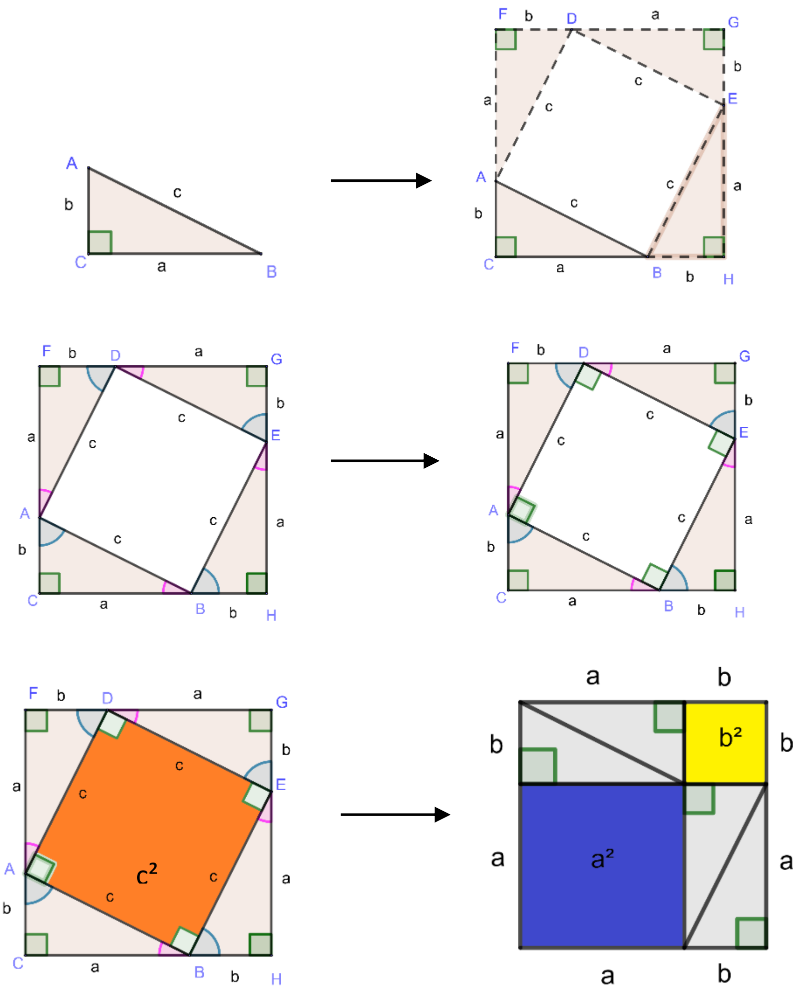
3.2.1.1 Prova Sem Palavras

Um ramo grandioso da visualização geométrica é o que pesquisadores denominam de provas sem palavras. Destacamos pesquisadores como Alencar, Cândido e Farias (2019), Mathias, Silva e Leivas (2019) e Albuquerque (2017). Estes pesquisadores vêm contribuindo sobremaneira na divulgação desse modo de enxergar a matemática e a educação básica.

A seguir, mostraremos dois exemplos que demonstram como a prova sem palavras ou a visualização Matemática fornece meios de demonstrar resultados importantes da Matemática. Inicialmente, mostraremos as imagens e em seguida, uma breve explicação do que representa cada passo encontrado nas figuras.

Iniciaremos exibindo uma demonstração do conhecido **Teorema de Pitágoras**, citado no terceiro capítulo desse texto.

Figura 3 - Solução visual do Teorema de Pitágoras



Fonte: Alencar, Cândido e Farias , 2019. Adaptado

As imagens dispensam explicações, entretanto, como esta pesquisa tem foco na educação básica, esclareceremos os passos para visualização do teorema em questão.

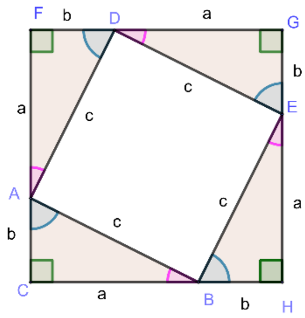
Inicialmente, para que seja possível compreender essa demonstração visual, faz-se necessário que o sujeito tenha conhecimento de áreas de figuras planas, congruência de triângulos e tipos de ângulos.

Passemos agora a um esclarecimento da demonstração.

Passo 1: Constrói-se o quadrado ADEB, de lado *c*, sobre a hipotenusa do triângulo retângulo ABC;

Passo 2: Prolongam-se os catetos de comprimentos *a* e *b*; traçam-se as perpendiculares a esses prolongamentos, de modo que interceptem os vértices D e E do quadrado construído. Obtém-se um novo quadrado CFGH, de lado $a + b$, conforme figura a seguir:

Figura 4 - Construção do quadrado de lado a + b.



Fonte: Elaborado pela autora.

Mostremos que os lados do quadrado maior é $a + b$. Vejamos:

Pela construção, os triângulos formados sobre os lados do quadrado de lado *c* são retângulos, pois construímos um quadrado, por meio das perpendiculares e prolongamentos citados acima, isto é, os ângulos ∠ACB, ∠BHE, ∠EGD e ∠DFA são retos. Ainda, os ângulos ∠BAD, ∠ADE, ∠DEB e ∠EBA também são retos, pois, ADEB é um quadrado.

Analisemos os triângulos ABC e AFD. Note que eles são congruentes, visto que, possuem um lado comum, qual seja *c*, e ângulos congruentes. Note ainda que a soma dos ângulos ∠CAB + ∠BAD + ∠DAF = 180º, mas, ∠BAD = 90º, logo

∠CAB + ∠DAF = 90º, entretanto,

∠CAB + ∠ABC = 90^0, logo

∠ABC = ∠DAF e, consequentemente,

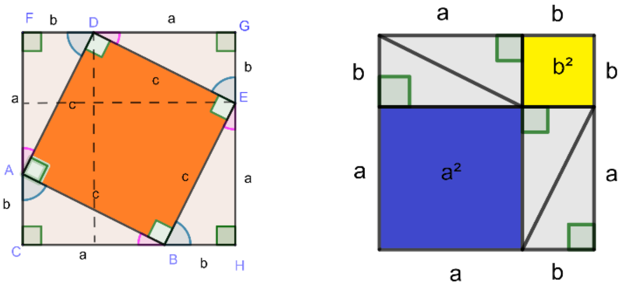
∠CAB = ∠FDA, o que demonstra que os ângulos desses triângulos são iguais.

O mesmo se aplica aos triângulos restantes.

Portanto, os quatro triângulos são congruentes e os lados do quadrado CFGH são dados por $a + b$.

Passo 3: Faz-se a área do quadrado inicialmente construído (c^2); constroem-se os quadrados de lados *a* e *b*, conforme figura 5, isto é, tais quadrados têm áreas iguais a^2 e b^2, respectivamente.

Figura 5 - Resultado do Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pela autora

Para tanto, traçam-se as perpendiculares aos lados do quadrado passando por B e D, o que resulta em dois quadrados de áreas a^2 e b^2.

Note que a primeira figura do passo 3 denota um quadrado maior de área $(a + b)^2$, um quadrado de área c^2 e quatro triângulos de área, cada um, $\frac{ab}{2}$. Assim,

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \tag{1}$$

Enquanto a segunda figura, do mesmo modo, denota três quadrados, quais sejam: um de área $(a + b)^2$, um de área a^2, e um de área b^2; e quatro triângulos de área, cada um, $\frac{ab}{2}$. Assim, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\frac{ab}{2} \tag{2}$$

Dessas igualdades segue que

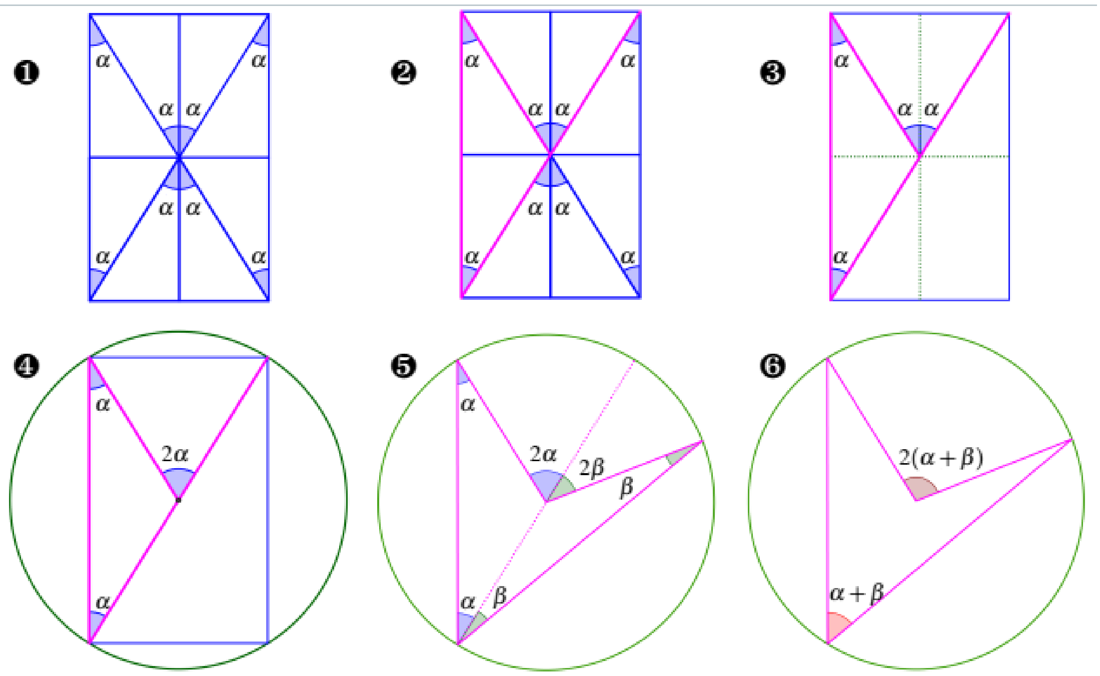
$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3}$$

Essa forma não esgota as possibilidades de mostrar o teorema de Pitágoras, tendo na literatura maneiras variadas (encontram-se, na literatura, mais de 300 formas distintas de demostrar o teorema citado). Nosso objetivo foi o de mostrar uma forma relativamente simples, com conteúdos ministrados na educação básica e que, desse modo, pode, sem grandes dificuldades, ser aplicada em sala de aula nesse nível de ensino.

A seguir, realizaremos a visualização geométrica da relação entre o **ângulo inscrito e o ângulo central.**

Para que seja possível a compreensão efetiva da visualização a seguir, faz-se necessário o conhecimento de congruência de triângulos, tipos de triângulos e suas características, ângulo externo a um triângulo, ângulo inscrito e ângulo central.

Figura 6 - Resolução visual relação entre ângulo inscrito e ângulo central



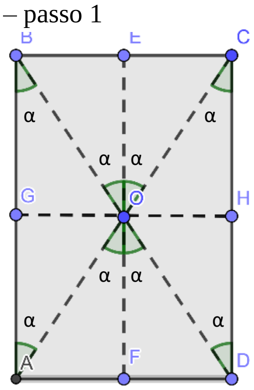
Fonte:Albuquerque, 2015

Novamente, as imagens são suficientes para o entendimento da relação citada. No entanto, realizaremos um breve esclarecimento dos passos.

Para entendimento da demonstração o sujeito deve conhecer os conceitos de congruência de triângulos, ângulo externo de um triângulo e ângulos opostos pelo vértice.

Passo 1: **Observar figura 7 e comparar com a figura 6**. Desenhemos um retângulo e suas diagonais. Pelo centro, tracemos as perpendiculares aos lados do retângulo.

Figura 7 - Inclusão de ângulos no retângulo – passo 1



Fonte: Elaborado pela autora

Note que, como construímos um retângulo, os triângulos ABO e CDO são isósceles, portanto, os ângulos ∠OAB e ∠ABO são congruentes, assim como, os ângulos ∠OCD e ∠CDO também são congruentes. Mas, os ângulos ∠AOB e ∠COD são opostos pelo vértice, logo, são congruentes. Então, os ângulos ∠OAB, ∠ABO, ∠OCD e ∠CDO igualmente são congruentes. Ainda, os segmentos AB e CD possuem o mesmo comprimento, visto que ABCD é um retângulo. Com esses dados concluímos que os triângulos ABO e CDO são congruentes (pelo caso de congruência lado, ângulo, ângulo). Chamemos esses ângulos de α**.** Observe que ∠BOC é ângulo externo do triângulo ABO, em relação ao ângulo ∠AOB, bem como é ângulo externo ao triângulo CDO, em relação ao ângulo ∠COD, então

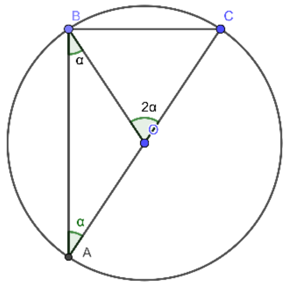
$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = \angle OCD + \angle ODC = 2\alpha$

Passo 2: Evidencia-se a parte superior da diagonal AC do retângulo, conforme figura 6.

Passo 3: Retira-se a parte inferior da diagonal AC.

Passo 4: Constrói-se o círculo de centro em O e raio $\frac{AC}{2}$., conforme figura 08. Assim, esse círculo contém os vértices do triângulo ABC. Portanto, ∠BOC é ângulo central e mede 2α e ∠BAO é ângulo inscrito e mede α. Logo, o ângulo central mede o dobro do ângulo inscrito que o contém.

Figura 8 - Resultado ângulo central e ângulo inscrito.



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 5: De modo análogo, pode-se proceder para um triângulo ADC, obtendo o resultado desse passo.

Reiteramos que esses são alguns exemplos de visualizações que resultam de figuras que por si sós traduzem ou demonstram importantes resultados matemáticos. Na literatura encontramos algumas pesquisas que trazem problemas como esses e discutem a importância de utilizar essa forma de demonstração ou explicação de resultados matemáticos em sala de aula. Principalmente, no que se refere a dar sentido a conceitos vistos como puramente algébricos ou para alcançar, em alguma medida, sujeitos que percebem a matemática de forma visual.

Nesse capítulo trouxemos argumentos que incluem a visualização matemática como ferramenta importante para, além de fornecer significados aos conceitos matemáticos, aproximar o estudante com a matemática, vez que esse modo de ensinar e aprender matemática necessita de habilidades que centra o sujeito na sua aprendizagem, tais como: criatividade, criticidade, imaginação, poder argumentativo, analogias, intuição, entre outras, aprimorando-as e criando contextos que favorecem o desenvolvimento de novas habilidades, vez que o processo de aprender matemática não é estático, ao contrário, possui uma dinamicidade própria.

A seguir, discutiremos a resolução de problemas, como método de aprender Matemática e que, para nós, com a visualização matemática, constituí um excelente meio de tornar a Matemática da educação básica significativa, atrativa e atingível.

4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO MEIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, argumentamos sobre a resolução de problemas na visão de dois grandes pesquisadores do tema: Polya e Larson. Evidenciando a concepção e etapas desse método nas visões desses célebres matemáticos. Ainda, discorremos sobre o que a legislação nacional da educação básica fornece sobre essa temática.

4.1 Concepções sobre a resolução de problemas

A resolução de problema teve sua difusão como campo de estudo com as pesquisas de Polya, na década de 80. Atualmente, os seus entendimentos sobre estudar matemática, por intermédio dessa teoria, encontram-se largamente difundidos.

Por intermédio dessa metodologia de ensino, habilidades do sujeito são evidenciadas enquanto capacidades diversas são aprimoradas ou adquiridas, uma vez que a “tentativa de solucionar um problema conduz ao desenvolvimento intelectual, além de potencializar habilidades como o raciocínio lógico, tenacidade, disciplina, paciência, visão geométrica, entre outras” (ALENCAR, CÂNDIDO e FARIAS , 2019. p. 2).

Os PCNs sobre o estudo de matemática, como uma ciência que se debruça sobre o mundo físico e natural, na educação básica discorrem que:

> “A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas é finalidade da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de conhecimentos, bens e serviços”. (BRASIL, 2000, p. 20).

Dessa forma, a resolução de problemas em matemática pressupõe que os sujeitos são detentores do conhecimento científico, que está relacionado ao que se deseja resolver, e carece de criatividade, inovação, abstração e outras capacidades que são inerentes a esse processo e a própria matemática.

Ainda, nesse sentido, ao se resolver um problema, o aluno constrói e reconstrói significações sobre o que está sendo estudado, através de aproximações sucessivas de um conceito, utiliza o que aprendeu ao resolver outro problema, o que exige analogias, criticidade, criatividade e retificações.

Essa metodologia de ensino está de acordo com o preconizado na BNCC, principalmente no que se refere ao ensino e aprendizagem na educação básica, devendo este possibilitar ao estudante o exercício da curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, neste caso, da Matemática, incluindo a investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade. (BRASIL, 2018, p. 8).

Assim, o objetivo primeiro da educação nessa etapa é a resolução de problemas, criação de soluções coerentes, por meio da investigação, elaboração e testagem de hipóteses, vez que são características próprias da Matemática. Logo, suscitar habilidades e capacidades nos estudantes que envolvam essas características, pode, acreditamos, favorecer um melhor entendimento dos saberes matemáticos, a aproximação desses sujeitos com essa ciência e uma visão mais ampla e integrada da Matemática.

O próprio nome da teoria em tela revela a base da sua metodologia de ensino e aprendizagem matemática. Resta, então, entender o que os investigadores dessa área definem como problema em matemática.

É consenso, que um problema matemático se distingue de um exercício. O primeiro, constitui-se um desafio, que possui certo grau de dificuldade para quem pretende resolvê-lo, enquanto o segundo, trata-se de um questionamento que, para ser resolvido, basta aplicar procedimentos de rotina, sem grandes dificuldades na execução da resolução.

Nesse mesmo sentido, um problema deve ser desafiador, exigir que o aluno interprete o enunciado e estruture a situação apresentada. Enquanto, os exercícios que possam ser resolvidos de forma mecânica, a partir da aplicação de uma fórmula ou procedimento decorado, não caracterizam problemas.

Logo, a resolução de problemas não se constitui um meio de testagem de que o aluno incorporou certo conteúdo matemático, mas sim uma forma importante de compreensão do conhecimento matemático e de descoberta. Nesse contexto, esse método não é o fim, mas o meio de se estabelecer uma relação positiva entre os estudantes a matemática.

Entretanto, como destacam Alencar, Cândido e Farias (2019, p. 2), um problema pode ser um exercício para um indivíduo, enquanto um exercício pode ser um problema para um outro indivíduo. Dependerá do nível de maturidade do sujeito em relação ao problema apresentado, isto é, das experiências que o sujeito tem com o tema que está relacionado ao problema.

De todo modo, para que ocorram descobertas de novos resultados em Matemática, ou até a compreensão daqueles resultados já demonstrados, pressupõe, no olhar da resolução de problemas, um caminho investigativo, de criatividade e crítico.

Nesse cenário de investigação e análise, Polya (1981), em seus estudos, enuncia quatro fases que devem nortear o processo de resolução de problemas, a saber:

- **Compreender o problema** e a pergunta enunciada, além de querer respondê-la, identificar as partes principais do problema, incógnitas, os dados, os condicionantes, adotar a notação adequada, fazer uma figura, o que já conhece e o que desconhece e as condições nele presentes;
- Resgatar seus conhecimentos previamente adquiridos, suas experiências passadas com um problema semelhante já resolvido, teoremas anteriormente provados ou utilizar várias abordagens experimentais antes de se comprometer com uma que se pareça promissora**, elaborando um plano de ação**;
- **Executar o plano de ação**, realizar cálculos, colocar em prática os procedimentos para resolver o problema; no caso de um impasse, deve retornar à elaboração do plano e fazer os ajustes necessários;
- Conferir os resultados obtidos no desenvolvimento do plano e sua execução, verificando se este segue as informações apontadas no problema; com isso, valida o plano e chega a uma solução para o problema. Esta fase recebe o nome de retrospecto.

Para que os propósitos da educação em matemática se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades, das quais algumas foram citadas anteriormente nesse texto, relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**.** Para que isso seja possível, esses sujeitos devem mobilizar seu modo “próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (BRASIL, 2018, p. 529).

Fazendo uma correspondência com as fases da resolução de problemas de Polya (1981), nota-se que a argumentação extraída da BNCC traz relações evidentes com a teoria em tela, principalmente no que se refere ao centrar o estudante como ator principal da sua aprendizagem. Ainda, ao citar o desenvolvimento de habilidades próprias relativas ao modo de raciocinar, argumentar e representar um saber matemático, faz relação com as fases apresentadas, uma vez que, esse é o principal objetivo da resolução de problemas, a qual se baseia na construção pelo sujeito de respostas próprias, adequadas e relacionadas à vivência dos estudantes.

Podemos, inclusive, relacionar esses argumentos à discussão dos capítulos anteriores, no tocante à investigação relacionada a estratégias de visualização e de resolução de problemas. Posto que, ambas as estratégias mobilizam habilidades e capacidades relevantes para a aprendizagem matemática. Habilidades essas atinentes à criatividade, criticidade, análise, mobilização dos conhecimentos prévios e analogias.

Investigadores veem alguma relação entre a solução de um problema e a visualização. Alencar, Cândido e Farias (2019, p. 2), por exemplo, como citamos anteriormente, enunciam que a tentativa de "solucionar um problema conduz ao desenvolvimento intelectual, além de potencializar habilidades como o raciocínio lógico, tenacidade, disciplina, paciência, visão geométrica, entre outras".

Larson (1983), pesquisador célebre da resolução de problemas, enuncia doze estratégias para resolução de problemas, as quais mostraremos ainda nesse capítulo. O autor, em seu livro intitulado Problem-Solving Through Problems (Resolução de problemas por meio de problemas), além de descrever as estratégias citadas, utiliza variados problemas, das diversas áreas da matemática, para exemplificar e justificar cada uma das doze estratégias definidas por ele.

Apesar de ambos os pesquisadores investigarem o mesmo tema, o modo de resolução de problemas de Larson difere do modo de resolução de Polya, uma vez que, o primeiro define doze estratégias, não necessariamente cumulativas ou dependentes, que se adequam a variados contextos que podem suscitar no processo de resolução e problemas. Enquanto, Polya enuncia quatro fases que o resolvedor de problemas deve seguir, a fim de ter maior probabilidade de ter êxito nesse processo.

Ambos inovam quanto à forma de conceber o processo de resolução de problemas, e trazem meios que traduzem ferramentas importantes para os sujeitos interessados em resolver problemas diversos em Matemática.

A seguir, mostraremos as estratégias de Larson (1983) para resolução de problemas e alguns problemas que se encontram em sua obra como exemplos que evidenciam as estratégias citadas.

4.2 As estratégias de Larson

Essa seção se dedica a expor, brevemente, as doze estratégias estudas por Larson para resolução de problemas. O autor afirma que todas as estratégias não necessariamente devem ser utilizadas para resolução de um problema, como receita de um bolo, podendo, dessa forma, ser utilizada, uma ou outra, a depender da natureza da situação problema a ser estudada.

As estratégias citadas são:

4.2.1 Procure por um padrão

Praticamente, todos os sujeitos que buscam resolver um problema iniciam sua análise gerando um sentimento sobre o problema, convencendo-se sobre a plausibilidade do resultado.

Normalmente, esses sujeitos lançam mão do seu conhecimento prévio, experiências e situações semelhantes, realizam analogias e comparações à procura de compreender o problema e encontrar soluções viáveis.

Esse pesquisador argumenta que isso é feito da melhor maneira examinando-se os casos particulares mais imediatos. Quando essa exploração é empreendida de um modo sistemático, podem surgir padrões que irão suscitar ideias sobre como proceder na resolução do problema.

Podemos inferir, a partir dos argumentos de Larson, que as experiências que o sujeito obtém a partir do seu contato com a Matemática, constituem-se como ferramenta fundamental para resolução de problemas. Assim, o contato com problemas semelhantes, técnicas diversas, o conhecimento dos saberes matemáticos (axiomas, proposições, lemas, etc) contribuem significativamente no sucesso da resolução de problemas e favorece, sobremaneira, a reflexão sobre a própria matemática, permitindo a realização de novas relações e aprendizagens.

4.2.2 Trace uma figura

Descrever um problema pictoricamente, sempre que possível, é uma tarefa de grande utilidade na resolução de problemas.

Figuras, diagramas, gráficos, entre outros, são mecanismos que auxiliam na compreensão e resolução dos problemas, quando não, por si sós, são suficientes para demonstração do problema em estudo, como na Prova sem Palavras, discutida no capítulo anterior.

Assim, uma representação por diagramas, geralmente, torna mais fácil a assimilação de dados relevantes e a percepção de relações e dependências.

4.2.3 Formule um problema equivalente

As estratégias anteriores mostram que a primeira etapa de resolver problemas reside na reunião de dados, explorar, compreender, relacionar, conjecturar, analisar. No entanto, há casos que essa etapa não ocorre facilmente. A partir dessa percepção, Larson (1983) lança um questionamento e em seguida sugere uma resposta plausível. O questionamento é o seguinte:

"Mas o que acontece quando não é possível fazer isso [fazendo referência a primeira etapa citada no parágrafo anterior] em uma forma significativa, seja porque os cálculos se tornam muito complicados ou porque o problema simplesmente não admite nenhum caso especial que elimine qualquer discernimento?" (Larson, 1983, p. 15, tradução nossa, grifo nosso).

Larson recomenda tentar reformular o problema numa forma equivalente, mais simples, sendo utilizada a imaginação e criatividade, ou seja, novamente, o modo do problema ser resolvido tem dependência direta com o resolvedor. Afirma ainda que, algumas técnicas de reformulação padrão envolvem álgebra ou manipulação trigonométrica, substituição ou mudança de variável, uso de correspondência um a um e reinterpretação da linguagem matemática em outra linguagem também matemática (por exemplo, álgebra, geometria, análise, combinatória, etc.).

4.2.4 Modifique o problema

Na tentativa de resolver um problema, chamemos esse problema de A, podemos ser levados, intuitivamente, a considerar outro problema (auxiliar), agora, chamemos esse novo problema de B. Larson evidencia algumas características que sugerem a mudança nos problemas. Essas mudanças são enunciadas por frases como: "basta mostrar que" ou "podemos supor que" ou "sem perda de generalidade".

Nesse sentido, a solução do problema modificado (ou auxiliar), denominada problema B como escrito acima, implica a solução de A, mas não necessariamente vice-versa. Isto quer dizer, que os problemas citados (A e B) não necessitam ser equivalentes. Basta que o problema auxiliar implique na solução do problema original.

4.2.5 Escolha uma notação efetiva

Larson argumenta que, uma das primeiras etapas para trabalhar um problema de matemática reside na tradução do problema em linguagem simbólica, isto é, em notação própria.

Inicialmente, todos os conceitos-chave devem ser identificados e rotulados. Nesse processo, as redundâncias na notação podem surgir à medida que novas relações são descobertas.

4.2.6 Explore as simetrias

A presença de simetria em um problema normalmente significa a redução de trabalho na resolução do problema. Por exemplo, ao realizarmos o produto $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ vemos que ambas as parcelas são simétricas com relação aos símbolos a, b e c, ou seja, se realizarmos uma permutação qualquer entre os símbolos a, b e c, a expressão permanece inalterada.

Assim, é de se esperar que, se o termo a^3 aparece no produto, os fatores b^3, c^3 também apareçam. Se a^2b aparecer, os termos a^2c, ab^2, ac^2, b^2c, bc^2 também deverão aparecer com os mesmos coeficientes.

Assim, uma verificação rápida mostra o produto terá a forma

$$A\ (a^3 + b^3 + c^3) + B\ (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + C\ (abc).$$

Assim, $A = 1$, $B = 0$ e $C = -3$.

4.2.7 Divida em casos

Muitas vezes acontece que um problema pode ser dividido em um pequeno número de subproblemas, cada um dos quais pode ser estudado separadamente. Isso é especialmente verdadeiro quando o problema contém um quantificador (“para todo x”). Por exemplo, a prova de uma proposição da forma “para todos os inteiros...” pode ser analisado separadamente os casos dos números ímpares e pares. Da mesma forma, um teorema sobre triângulos pode ser provado dividindo-o em três casos, dependendo se o triângulo é reto, agudo ou obtuso. Ocasionalmente, os subproblemas podem ser organizados hierarquicamente, de modo que os primeiros casos, uma vez estabelecidos, possam ser usados para verificar os estágios seguintes. Esse procedimento é chamado de escalada alta.

Nos estágios iniciais da análise, é bom pensar sobre como um problema pode ser subdividido em um pequeno número de subproblemas (esperançosamente) mais simples. A heurística desta estratégia é frequentemente entendida da seguinte forma: “Se você não consegue resolver o problema, encontre um problema relacionado mais simples e resolva-o”.

4.2.8 Raciocine de trás para frente.

Raciocinar de trás para frente significa assumir a conclusão e, em seguida, extrair deduções da conclusão até chegarmos a algo conhecido ou algo que pode ser facilmente provado. Após chegarmos ao dado que é conhecido, isto é, as hipóteses, invertemos as etapas do argumento e avançamos para a conclusão, isto é, a afirmação do problema. Este procedimento é comum na álgebra e trigonometria do ensino médio. Por exemplo, para encontrar todos os números reais que satisfaçam $2x + 3 = 7$, argumentamos como segue.

Suponha que x satisfaça $2x + 3 = 7$. Então, subtraia 3 de cada lado da equação e divida cada lado por 2, para obter $x = 2$.

Concluímos que 2 realmente satisfaz a equação dada.

4.2.9 Argumente por contradição

Argumentar por contradição significa assumir que a conclusão não é verdadeira e em seguida, tirar deduções até chegarmos a algo que é contraditório tanto para o que é dado (forma contrapositiva) ou para o que é conhecido como verdadeiro (redução ao absurdo). Assim, por exemplo, para provar que $\sqrt{2}$ é irracional, nós podemos assumir que é racional e deduzir daí um absurdo.

O método é frequentemente apropriado quando a conclusão é facilmente negável, quando as hipóteses oferecem muito pouca informação para manipulação, ou quando há uma escassez de ideias sobre como proceder para solução do problema.

Como um exemplo simples deste método de prova, considere o seguinte argumento que mostra que a série harmônica diverge. Suponha o contrário, que converge, digamos para r. Então

$$
\begin{aligned}
r &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \ldots \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \ldots \\
&= 1 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$= r$$

Uma contradição, pois $r > r$ foi obtido. Concluímos que a série diverge.

4.2.10 Procure por paridade

A ideia simples de paridade - uniformidade e estranheza - é um poderoso conceito de solução de problemas com uma ampla variedade de aplicações.

Por exemplo, muitos problemas podem ser resolvidos observando a invariância da paridade e imparidade dos números inteiros que aparecem nas informações do problema.

Exemplo: Sejam nove pontos da rede no espaço euclidiano tridimensional. Mostre que há um ponto de rede no interior de um dos segmentos de reta que unem dois desses pontos.

Existem apenas oito padrões de paridade diferentes para os pontos da rede:

(par, par, par), (par, par, ímpar), (par, ímpar, par), (ímpar, par, par), (ímpar, ímpar, par), (ímpar, par, ímpar), (par, ímpar, ímpar) e (ímpar, ímpar, ímpar).

Pelo princípio das casas dos pombos, uma vez que existem nove pontos dados, dois deles têm o mesmo padrão de paridade. Seu ponto médio é um ponto de rede, e a prova é completa.

4.2.11 Considere os casos extremos

Nos estágios iniciais da exploração do problema, frequentemente é útil considerar as consequências da variação dos parâmetros entre casos extremos. Isso ocorre frequentemente com o uso das frases "Na pior (melhor) das hipóteses ..."e "No pior (melhor) dos casos ...".

4.2.12 Generalize

Isto pode parecer paradoxal, mas é frequente o caso em que um problema pode ser simplificado e tornado mais tratável e inteligível depois de generalizado. Esse fato é bem apreciado por matemáticos. Com efeito, generalizações são características básicas da

Matemática. Uma abordagem mais geral fornece uma perspectiva mais clara, elimina informações não essenciais e providencia um arsenal inteiro de novas técnicas.

Aqui, concluímos as 12 estratégias de Larson (1983).

Retomando as fases de Polya e as estratégias de Larson, elas constituem, cada uma a sua maneira, métodos relevantes que podem suscitar na resolução adequada dos problemas matemáticos.

Para os fins desse trabalho, optamos pelas estratégias de Larson, como melhor esclarecido nos capítulos Introdução e Metodologia deste texto.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

O presente capítulo expõe as motivações e caminhos que impulsionaram a necessidade de se estudar a visualização matemática e a resolução de problemas no ensino e aprendizagem de Matemática, com foco principal a Educação Básica, além de buscar apresentar o universo dessa investigação, bem como a estrutura deste trabalho.

5.1 A gênese da pesquisa

Inicialmente, esclarecemos que as impressões relatadas neste tópico se relacionam a um conhecimento empírico da pesquisadora, porém foram decisivos para o surgimento da necessidade de entender melhor os fenômenos subjacentes a esta pesquisa.

A essência dessa pesquisa se deu com as experiências e inquietações que foram suscitadas durante a participação nas disciplinas do PROFMAT da Universidade Federal de Alagoas/ Campus A. C. Simões. Principalmente nas disciplinas em que os problemas estudados nos levavam, à princípio, a fazer uma figura, um diagrama, ou um gráfico, entre outros, seja para melhor entendimento do que se pretendia resolver, seja como meio de resolução do problema estudado. Além de, diversas vezes, ser necessária a criação de imagens como as citadas para explicação ou demonstração de determinado fato matemático.

A partir dessa vivência, surgiu a inquietação de serem feitos estudos sobre a visualização matemática na Educação Básica. Após iniciar as leituras sobre o tema, imediatamente, foi possível relacionar esse método de estudar matemática com a resolução de problemas, vez que compartilham de objetivos semelhantes, tais como: centrar o estudante na sua aprendizagem e desenvolver habilidades e competências relevantes para a aprendizagem de Matemática, com reflexos significativos para vida em sociedade, como vimos nos capítulos anteriores.

Os capítulos que constituem o estudo sobre os temas citados (visualização matemática e resolução de problemas) apontam uma problemática que vem sendo discutida há anos na educação matemática brasileira e que refletem sobremaneira no desempenho dos estudantes. A problemática citada envolve questões como a aritmetização dos conteúdos matemáticos (Lorenzato, 1995). Corrobora com essa problemática os dados do desempenho dos estudantes, via SAEB e IDEB, presentes na Introdução desse texto.

A partir desses condicionantes e problemática, pensamos sobre como compreender como está se dando o ensino e aprendizagem de matemática por meio da visualização atrelada a resolução de problemas no país. Assim, surgiu a intensão de analisar as seleções do ENEM tendo como foco os problemas com maior percentagem de erro e que demonstram carecer da visualização para resolução. A resolução de problemas se constitui, nesse universo, como método a ser seguido para auxiliar no processo de resolução.

De maneira geral, espera-se ter sido possível, com este trabalho, realizar uma discussão sobre currículo da educação básica, por intermédio da análise do desempenho dos estudantes no ENEM, no que diz respeito a visualização matemática. Ao passo que, à medida que resolvemos os problemas selecionados, disponibilizamos um material que pode ser útil a quem tiver interesse, principalmente ao professor da Educação Básica, como meio de auxílio e estímulo para o uso da visualização em sala de aula.

5.2 Opção metodológica/paradigma da pesquisa

A presente pesquisa procurou investigar aspectos curriculares relacionados ao uso da visualização matemática na Educação Básico do país. Para tanto, adotou-se nesse estudo a abordagem de pesquisa qualitativa, uma vez que está investigação tem cunho interpretativo, como demonstra Alves-Mazzotti (2003, p. 31):

> [...] a principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição 'compreensiva' ou 'interpretativa'. Isto significa que essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado.

No entanto, aspectos da pesquisa do tipo quantitativa também foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho, uma vez que a análise quantitativa dos dados disponibilizados pelo INEP (falaremos melhor a seguir) revelaram questões importantes relacionadas ao desempenho dos estudantes, tais como: quais conteúdos matemáticos que os alunos mais erraram por ano de aplicação, se há relação entre os problemas com maior percentagem de erro e a visualização matemática, entre outros.

5.3 Coleta de dados

Na presente investigação, para além das fontes bibliográficas, os dados coletados foram provenientes do datascience[7] do INEP, no que se refere ao ENEM.

Para abertura do banco de dados, organização dos dados necessários e calcular os percentuais de acertos por questões, utilizamos o editor de planilhas Excel. A versão utilizada foi a 2016.

Para resolução dos problemas e análise dos conteúdos matemáticos com menor percentual de acertos, igualmente, utilizamos o banco de dados do INEP, o qual disponibiliza as provas aplicadas nas seleções do ENEM.

5.4 Análise dos dados

Consonante os objetivos dessa pesquisa, a análise dos dados se deu por meio da verificação da existência de problemas que poderiam ser solucionados com intermédio da visualização matemática. Em seguida, discriminadas, em cada problema, as estratégias de Larson (1983) igualmente utilizadas na resolução. Ainda, os dados encontrados foram confrontados com a fundamentação.

Mais especificamente, os dados coletados foram concatenados e realizada análise quantitativa com intermédio do Excel. Em seguida, comparados os dados quantitativos com os problemas advindos das provas do ENEM. A partir da obtenção dos problemas com menor percentual de acertos, procedeu-se com a resolução daqueles problemas que julgamos ser melhor compreendidos, interpretados e/ou ser totalmente resolvidos, quando possível, com base na visualização matemática e nas estratégias de Larson (1983) para resolução de problemas.

[7] Para ter acesso aos dados brutos e as provas na íntegra, basta acessar <https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/microdados/enem>

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo é dedicado a realizar um levantamento dos problemas com menor percentual de acertos do ENEM, relacionar esses problemas com os conteúdos da Educação Básica, verificar quais problemas a visualização matemática pode ser aliada na resolução e disponibilizar em algumas soluções, propostas por nós, dos problemas selecionados a partir do levantamento citado.

Como visto no capítulo reservado aos aspectos metodológicos, foram selecionados problemas com maior percentual de erro e que acreditamos que a visualização matemática, de alguma maneira, possa auxiliar no processo de solução. Ainda, acreditamos que outros sujeitos podem enxergar em outras questões, diferentes das que apresentaremos, formas de aplicação da visualização, além de perceber formas diversas de conceber a visualização nas questões resolvidas neste texto.

Além disso, utilizaremos as estratégias de Larson, citadas no Capítulo 4 deste texto, como norteadoras na resolução dos problemas selecionados.

6.1 Sobre o aproveitamento dos candidatos do ENEM em problemas que envolvem Visualização Matemática

Como discutido na metodologia deste texto, foram verificadas as porcentagens de acertos dos problemas de Matemática e suas Tecnologias no interstício de 2015 a 2019. Em seguida, verificado quais dos problemas a Visualização Matemática pode auxiliar na resolução e, a partir dessas duas informações, investigar se esses problemas estão entre aqueles com menor percentual de acertos. Assim, foi possível analisar, de certa maneira, o aproveitamento dos candidatos em relação aos problemas citados.

Os dados foram concatenados em quadros, por ano de aplicação dos exames, os quais serão mostrados posteriormente, ainda nesta seção.

Ainda sobre os quadros 1 a 5, neles se encontram as descrições dos problemas, porcentagens de acertos dos candidatos do ENEM nos anos de 2015 a 2019, classificação por menor percentual de acerto e tema geral dos problemas. Os problemas destacados em negrito, tratam-se daqueles os quais julgamos que a visualização matemática pode auxiliar positivamente na resolução. Reafirmamos que, o leitor pode perceber a visualização como meio de resolução de outros problemas diferentes dos destacados aqui. O que dependerá da vivência dos sujeitos com a Matemática, igualmente com a visualização.

Ao conjunto dos problemas que podem ter a solução com auxílio da visualização, não foram inseridos os problemas os quais se resumem a análise de gráfico. Problemas esses que são considerados por pesquisadores como Santos (2015) como pertencentes ao rol do que poderíamos citar como visualização matemática, uma vez que a visualização é peça chave para entendimento e obtenção de dados decisivos à resolução de problemas desse tipo. No entanto, este trabalho se concentrou em examinar os problemas que a visualização está presente na resolução, mas não se resume necessariamente a análises de gráficos.

As análises se deram por meio do estudo dos exames realizados nas aplicações regulares do ENEM, as quais ocorreram no segundo dia de aplicação. Para os anos de 2016 a 2019 foram estudados os problemas da prova Azul do item Matemática e suas Tecnologias, enquanto para o ano de 2015 foram estudados os problemas da prova Amarela do mesmo item.

A seguir, são apresentados os quadros citados.

Quadro 1 - Porcentagens de acertos e tema geral dos problemas do ENEM ano 2019

(continua)

Posição / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
1	168	351228	11,94	Funções de 1ºgrau
2	173	388965	13,22	Probabilidade condicional
3	**142**	**416759**	**14,16**	**Área do círculo**
4	159	448850	15,25	Probabilidade
5	137	451516	15,34	Intervalo numérico, potência de 10 e logaritmo
6	**145**	**456768**	**15,52**	**Proporcionalidade e comprimento do círculo**
7	146	469020	15,94	Análise de gráfico
8	152	479763	16,30	Proporcionalidade
9	**175**	**489402**	**16,63**	**Volume de cilindros**
10	174	515574	17,52	Análise de gráficos e intervalo numérico
11	**157**	**523636**	**17,79**	**Semelhança de triângulos**
12	138	544616	18,51	Porcentagem
13	172	548277	18,63	Média aritmética
14	163	550683	18,71	Intervalo numérico
15	141	576762	19,60	Proporcionalidade
16	156	587224	19,95	Combinatória
17	171	588999	20,02	Combinatória
18	177	603103	20,49	Função seno
19	161	629051	21,38	Média aritmética
20	150	650168	22,09	Juros compostos
21	158	659717	22,42	Conversão de unidades
22	164	692537	23,53	Volume

(conclusão)

Posição / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
23	170	695994	23,65	Volume e conversão de unidade de medida
24	169	704308	23,93	Interpretação de gráficos
25	176	705225	23,96	Porcentagem
26	166	727316	24,72	Teorema de Pitágoras
27	160	740803	25,17	Média aritmética e equação 1º grau
28	162	749872	25,48	Conversão de unidade de medida
29	155	774618	26,32	Divisão Euclidiana
30	148	797237	27,09	Volume e conversão de unidade de medida
31	165	815463	27,71	Inequações
32	178	816616	27,75	Interpretação de gráficos e equações com 3 incógnitas
33	139	833390	28,32	Interpretação de gráficos
34	180	896961	30,48	Conversão de moedas
35	154	901494	30,63	Equação º1 grau e logaritmo
36	151	923149	31,37	Porcentagem
37	**147**	**938923**	**31,91**	**Áreas**
38	153	958726	32,58	Porcentagem
39	179	1001453	34,03	Interpretação de gráficos
40	167	1134095	38,54	Média, mediana e moda
41	143	1135773	38,60	Interpretação de gráficos
42	136	1439885	48,93	Projeção
43	140	1454345	49,42	Base 10
44	149	1635123	55,56	Progressão aritmética
45	144	1816488	61,73	Matrizes

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro fornece que, dos 45 problemas disponibilizados nessa aplicação, 5 podem ser resolvidos com base na visualização, isto é, mais de 10% do exame de Matemática e suas Tecnologias pode ser resolvida utilizando as ideias da visualização matemática, excluídos os casos em que se resumem a interpretação de gráficos, como considera Santos (2015), incluída na visualização matemática e os PCNs ao citar o tema. Caso isso fosse incluída na contagem, esse número teria um aumento significativo.

Além disso, e talvez o dado mais importante a ser verificado, é que dos cinco problemas destacados, quatro deles, estão entre os com menor percentual de acerto, mais especificamente, estão entre os 11 problemas mais errados pelos candidatos.

Seguiremos com as mesmas análises aos anos anteriores a 2019, como veremos a seguir.

Quadro 2 - Porcentagens de acertos e tema geral dos problemas do ENEM ano 2018

(continua)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
1	**161**	**452335**	**11,59**	**Distância entre dois pontos**
2	156	639493	16,39	Probabilidade
3	139	647165	16,58	Distância entre dois pontos
4	157	663004	16,99	Mudança de unidade de medida
5	**154**	**693562**	**17,77**	**Probabilidade**
6	178	701974	17,99	Conjuntos e sistema de equações
7	**138**	**721879**	**18,50**	**Equações da circunferência e da reta**
8	170	759688	19,47	**Função seno e interpretação do gráfico da função**
9	152	766057	19,63	Interpretação de gráficos
10	176	797524	20,44	Probabilidade e interpretação de gráfico
11	173	808583	20,72	Interpretação de gráfico
12	158	833786	21,37	Exponencial
13	167	837923	21,47	Probabilidade
14	179	838327	21,48	Teorema de Pitágoras
15	136	842135	21,58	Matrizes
16	155	844515	21,64	Tipos de triângulos
17	166	853835	21,88	Média ponderada
18	**180**	**861452**	**22,07**	**Tangente de um ângulo e comprimento da circunferência**
19	137	882715	22,62	Juros compostos/ valor presente
20	142	937450	24,02	Interpretação de gráfico
21	141	967406	24,79	Progressão aritmética
22	143	969873	24,85	Equação 1° grau 2 incógnitas
23	**153**	**975762**	**25,00**	**Teorema de Pitágoras e área do círculo**
24	169	983165	25,19	Escala
25	148	991241	25,40	Equações com 2 incógnitas
26	145	993625	25,46	Média aritmética
27	162	1021956	26,19	Progressão geométrica
28	171	1028352	26,35	Quadrantes e ângulos
29	165	1040173	26,65	Combinatória
30	174	1091923	27,98	Exponencial
31	151	1138241	29,17	Proporcionalidade e área
32	149	1166966	29,90	Proporcionalidade
33	175	1206030	30,90	Equação de 1ºgrau com 2 incognitas
34	146	1216601	31,18	Comparação de grandezas
35	160	1219770	31,26	Análise de gráficos
36	147	1221447	31,30	Juros compostos
37	**140**	**1303882**	**33,41**	**Volume**
38	177	1337287	34,27	Porcentagem
39	150	1353949	34,69	Probabilidade

(conclusão)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
40	144	1370258	35,11	Comparação entre dados
41	164	1407914	36,08	Sequências
42	168	1513659	38,79	Função 1 grau
43	172	1878954	48,15	Frequência de eventos
44	**159**	**2902925**	**74,39**	**Completar figura com quadrados**

Fonte: Dados da pesquisa

Inicialmente, diferente do quadro que relata os problemas do exame de 2019, o quadro a cima traz 44 problemas. Isso se deve ao fato de que o problema 168 foi anulado nesse exame. Dentre os 44 problemas, elegemos 7 deles, nos quais a visualização pode auxiliar positivamente na resolução, isto quer dizer que, um pouco mais de 15% do exame pode ser resolvido por intermédio da visualização Matemática, um número significativo.

Ainda mais, observa-se que, dentre os 7 problemas, 3 deles estão entre os problemas com menor porcentagem de acertos, sendo o problema 161, o com menor percentual de acertos do exame.

Quadro 3 - Porcentagens de acertos e tema geral dos problemas do ENEM ano 2017

(continua)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
1	160	353019	7,41	Combinatória
2	143	560807	11,77	Combinatória
3	**140**	**590780**	**12,40**	**Área**
4	172	614659	12,90	Análise de gráfico
5	141	632104	13,27	Equação 1° grau 2 incógnitas
6	165	664626	13,95	Análise de gráficos
7	162	694568	14,58	Gráfico de funções
8	169	749489	15,74	Análise de gráficos
9	**167**	**774867**	**16,27**	**Teorema de Pitágoras**
10	136	776403	16,30	Valor presente
11	180	823578	17,29	Proporcionalidade
12	**153**	**834703**	**17,52**	**Altura do triângulo equilátero**
13	137	845917	17,76	Logaritmo
14	166	863854	18,14	Função cosseno
15	142	1047056	21,98	Volume
16	156	1085014	22,78	Lei dos senos
17	174	1129454	23,71	Mediana

(conclusão)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
18	158	1134958	23,83	Conversão de unidade de medida
19	145	1145938	24,06	Intervalo numérico
20	175	1146911	24,08	Probabilidade
21	176	1153279	24,21	Equação de 1 grau
22	151	1161829	24,39	Média ponderada
23	146	1164752	24,45	Comparação entre dados
24	179	1236012	25,95	Probabilidade
25	138	1257532	26,40	Porcentagem
26	159	1271827	26,70	Comparação entre dados
27	168	1282230	26,92	Semelhança de triângulos
28	163	1303875	27,37	Comparação entre dados
29	173	1327573	27,87	Equação 1° grau
30	161	1351188	28,37	Equação 1° grau 2 incógnitas
31	177	1355965	28,47	Combinatória
32	147	1362560	28,61	Análise de gráfico e porcentagem
33	149	1363339	28,62	Probabilidade
34	171	1363784	28,63	Comprimento da circunferência e velocidade
35	148	1458487	30,62	Tipos de forma geométrica
36	144	1464077	30,74	Volume e transformação de unidade de medida
37	170	1550209	32,55	Análise de dados
38	152	1781918	37,41	Análise de gráficos
39	157	1805314	37,90	Intervalo numérico
40	**150**	**1831229**	**38,45**	**Círculo trigonométrico**
41	164	1937312	40,67	Porcentagem
42	139	1984267	41,66	Análise de gráficos
43	155	2293414	48,15	Média aritmética
44	154	2716961	57,04	Análise de dados
45	178	2732292	57,36	Sequência

Fonte: Dados da pesquisa

Semelhante ao que ocorreu nas aplicações de 2018 e 2019, a aplicação de 2017 conteve problemas, que a visualização pode estar auxiliando na resolução, entre os com menor percentual de acertos. Neste caso, especificamente, o problema 140 ocupa o 3º lugar entre os problemas mais errados pelos candidatos.

Dentre os 45 problemas destinados à Matemática e suas tecnologias, 5 deles podem ser resolvidos com auxílio da visualização, isto é, mais de 11% do exame os candidatos poderiam fazer uso da visualização em suas reflexões sobre o problema e resoluções.

Seguimos para aplicação de 2016.

Quadro 4 - Porcentagens de acertos e tema geral dos problemas do ENEM ano 2016

(continua)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
1	**178**	**645979**	**11,36**	**Projeção ortogonal**
2	156	829925	14,59	Densidade e Progressão aritmética
3	168	850952	14,96	Combinatória
4	**175**	**880131**	**15,47**	**Formas geométricas**
5	162	903299	15,88	Análise de gráficos
6	165	916139	16,10	Progressão Aritmética
7	170	931234	16,37	Moda
8	163	958187	16,84	Intervalo numérico
9	141	982580	17,27	Proporção
10	171	1024142	18,00	Porcentagem
11	143	1088058	19,13	Semelhança de triângulos e áreas
12	169	1091120	19,18	Área e porcentagem
13	147	1104251	19,41	Combinatória
14	152	1164012	20,46	Probabilidade
15	159	1164845	20,48	Média aritmética
16	180	1205523	21,19	Logaritmo
17	158	1258415	22,12	Análise de gráficos
18	173	1262869	22,20	Análise de gráficos
19	160	1266026	22,25	Exponencial
20	164	1293221	22,73	Proporcionalidade
21	176	1316475	23,14	Análise de gráficos
22	**172**	**1364942**	**23,99**	**Formas geométricas**
23	145	1376013	24,19	Porcentagem
24	150	1415702	24,89	Proporcionalidade
25	148	1427262	25,09	Sistema posicional
26	139	1434915	25,22	Análise de gráficos
27	**161**	**1442516**	**25,36**	**Volume**
28	151	1443392	25,37	Porcentagem
29	177	1514762	26,63	Porcentagem
30	166	1525510	26,82	Distância entre dois pontos no sistema xOy
31	149	1628334	28,62	Coeficiente angular
32	167	1637164	28,78	Área, ponto máximo e raízes da parábola
33	136	1706349	30,00	Volume
34	174	1717018	30,18	Volume
35	179	1733565	30,47	Intervalo numérico
36	146	1738765	30,56	Equação 1° grau

(conclusão)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
37	140	1776625	31,23	Desvio padrão
38	157	1960962	34,47	Média aritmética
39	137	2028110	35,65	Escala
40	144	2060100	36,21	Média aritmética
41	142	2123823	37,33	Distância entre pontos
42	138	2143818	37,69	Conversão e unidade de medida
43	154	2382093	41,87	Porcentagem
44	153	2594518	45,61	Média aritmética
45	**155**	**3507373**	**61,65**	**Projeção ortogonal**

Fonte: Dados da pesquisa

Observa-se que, na aplicação de 2016 houve problemas que poderiam ser solucionados com auxílio da visualização, semelhante as aplicações posteriores a 2016, como visto anteriormente.

Além disso sob a mesma ótica de análise realizada anteriormente, pudemos selecionar 5 problemas, dentre os 45 do exame, os quais compreendem o conjunto de problemas que julgamos ter suas soluções passíveis de utilizar a visualização ou que esta forma de analisar a matemática se constitui como essencial para entendimento e resolução do problema. Isto quer dizer que, mais de 11% do exame poderia ter sido solucionado com a visualização, uma parcela considerável caso se compare a dimensão de temas que a Matemática contém e podem ser abordados nesses tipos de seleções.

Quadro 5 - Porcentagens de acertos e tema geral dos problemas do ENEM ano 2015

(continua)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
1	158	598963	10,66	Probabilidade e porcentagem
2	**165**	**664822**	**11,83**	**Função logarítmica**
3	166	687533	12,24	Média aritmética
4	149	689382	12,27	Probabilidade
5	**145**	**694121**	**12,35**	**Equações, áreas e porcentagem**
6	155	772926	13,76	Equações e porcentagem
7	159	857286	15,26	Exponencial

(continuação)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
8	160	968952	17,25	Mediana
9	176	975084	17,35	Função cosseno
10	146	996008	17,73	Máximo divisor comum
11	**179**	**1107997**	**19,72**	**Volume e porcentagem**
12	142	1117756	19,89	Combinatória
13	137	1123278	19,99	Sistema de equações
14	153	1142375	20,33	Casas decimais
15	**168**	**1148961**	**20,45**	**Distância entre dois pontos**
16	174	1172993	20,88	Conversão de unidade de medida
17	170	1177612	20,96	Combinatória
18	167	1189358	21,17	Volume e conversão de unidades de medida
19	175	1236650	22,01	Probabilidade
20	**164**	**1240456**	**22,08**	**Áreas**
21	136	1294532	23,04	Máximo de uma função
22	**156**	**1329974**	**23,67**	**Combinatória**
23	**171**	**1345319**	**23,94**	**Área do setor circular**
24	**140**	**1364061**	**24,28**	**Área**
25	157	1370741	24,40	Máximo de funções
26	**148**	**1432248**	**25,49**	**Figuras geométricas**
27	147	1492703	26,57	Equações
28	**163**	**1500185**	**26,70**	**Volume**
29	169	1508740	26,85	Intervalo numérico
30	139	1545552	27,51	Análise de gráficos
31	162	1550691	27,60	Máximo divisor comum
32	152	1567814	27,90	Juros compostos
33	144	1733358	30,85	Proporcionalidade
34	161	1819621	32,39	áreas
35	141	1829545	32,56	Análise de gráficos
36	151	1859007	33,09	Áreas

(conclusão)

Classificação / menor acerto	Problema	Total de Acertos	Percentual de acertos	Tema geral do problema
37	150	1866227	33,22	Análise de gráficos
38	**143**	**1878641**	**33,44**	**Áreas**
39	173	1932352	34,39	Conversão de unidade de medida
40	154	2044795	36,39	Equação 1° grau
41	177	2227301	39,64	Conversão de unidade de medida
42	172	2264166	40,30	Conversão de unidade de medida
43	138	2747754	48,90	Análise de gráficos
44	180	3180934	56,61	Probabilidade
45	178	3337459	59,40	Análise de gráficos

Fonte: Dados da pesquisa

O quadro 5 fornece que alguns problemas podem ter suas soluções encontradas por meio da visualização. Nota-se que uma parcela considerável dos problemas do exame, no total 11, compreendem o conjunto dos problemas citadas, isso corresponde à mais de 25% dos problemas destinados à Matemática. Além disso, um dado ainda mais relevante, como visto nas aplicações posteriores a este ano, parte desses problemas estão dentre os mais errados pelos candidatos.

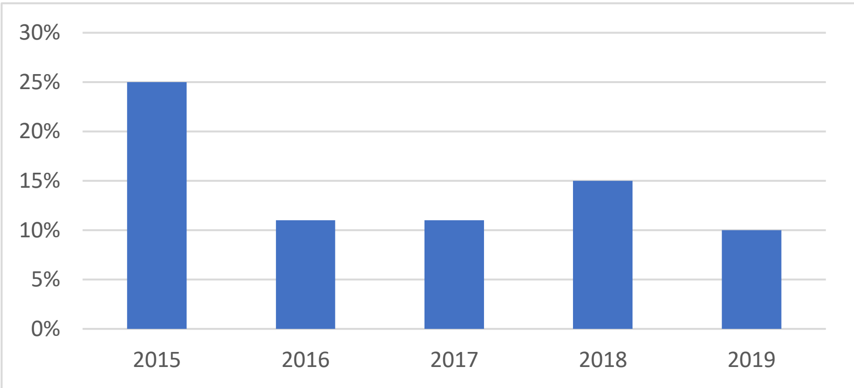
De maneira geral, temos que os quadros de 1 a 5 demonstram que os problemas destacados, isto é, aqueles que podem ser resolvidos com auxílio da visualização, estão entre os mais errados pelos candidatos nas 5 aplicações mais recentes do ENEM. Provavelmente, esse dado se repete nas aplicações mais antigas às analisadas aqui. Ainda mais, os problemas não estão somente entre aqueles com menor percentual de acerto, mas também, há exames que problemas como citados foram os mais errados pelos candidatos, como ocorreu nos anos de 2019 e 2016.

Ademais, ao analisar o percentual de acerto de problemas que estão entre maior percentual de acerto, observa-se que esse percentual é relativamente pequeno. Por exemplo, o 38º problema com menor percentual de acerto da aplicação de 2015 (quadro 5, problema 143 dessa aplicação), mostra que em torno de 66% dos participantes erraram esse problema, isto é, mais da metade dos candidatos não conseguiram êxito na sua resolução. De forma semelhante, encontram-se problemas na mesma situação nas aplicações seguintes, como pode ser visto nos quadros de 1 a 4 apresentados anteriormente,

Era previsto que esses tipos de problemas estivessem presentes nesse tipo exame, uma vez que a política da própria seleção privilegia situações problemas que estejam relacionadas com o cotidiano dos candidatos, no que se refere a exigência de ter a análise multifacetada da matemática, como uma ciência relacional que é, e por seguir as orientações disponibilizadas nos documentos nacionais no que diz respeito ao que se espera da Educação Básica.

O gráfico a seguir concatena o percentual, por ano, dos problemas de visualização matemática evidenciados nos quadros apresentados. Os dados do gráfico mostram uma certa constância da presença desse tipo de problema nas aplicações no interstício estudado, com leve aumento em 2018. A aplicação de 2015 é uma exceção, tendo em vista apresentar um número relativamente maior de problemas nesse exame.

Gráfico 2 - Percentual de problemas de Visualização Matemática – ENEM 2015 a 2019



Fonte: Dados da pesquisa

Entretanto, como citado anteriormente, nesse estudo não foram introduzidos no conjunto dos problemas analisados aqueles que tinham como base a análise de gráficos. Caso esse tipo de problema tivesse sido contemplado, o quantitativo estudado e, consequentemente, o percentual apresentado no gráfico teria um aumento significativo, demonstrando que, mesmo excluindo os problemas que se resumem em análise de gráficos, de alguma maneira, houve nos exames a existência de alguns problemas que poderiam ter suas soluções encontradas a partir da visualização matemática.

Um dado relevante diz respeito aos temas tratados nos problemas elencados como passíveis de serem solucionados pela visualização. O quadro a seguir traz os temas dos problemas os quais foram apresentados nos quadros expostos nessa seção.

Quadro 6 – Problemas de visualização ENEM 2015 a 2019

Ano	**Problema**	**Tema geral do problema**	**Ano**	**Problema**	**Tema geral do problema**
2019	142	Área do círculo	2016	178	Projeção ortogonal
	145	Proporcionalidade e comprimento do círculo		175	Formas geométricas
	175	Volume de cilindros		172	Formas geométricas
	157	Semelhança de triângulos		161	Volume
	147	Áreas		155	Projeção ortogonal
2018	161	Distância entre dois pontos	2015	165	Função logarítmica
	154	Probabilidade		145	Equações, áreas e porcentagem
	138	Equações da circunferência e da reta		179	Volume e porcentagem
	170	Função seno e interpretação do gráfico da função		168	Distância entre dois pontos
	180	Tangente de um ângulo e comprimento da circunferência		164	Áreas
	153	Teoremas das cordas e Pitágoras		156	Combinatória
	140	Volume		171	Área do setor circular
	159	Completar figura com quadrados		140	Área
2017	140	Área		148	Figuras geométricas
	167	Teorema de Pitágoras		163	Volume
	153	Altura do triângulo equilátero		143	Áreas
	150	Círculo trigonométrico			

Fonte: Dados da pesquisa

Ao examinar os dados presente no quadro 6, acima, constata-se que os problemas selecionados se tratam basicamente de problemas relacionados à Geometria, sejam eles com dados estritamente geométricos ou geométricos relacionados às áreas diversas da Matemática. Tem-se como exceção os problemas 154 e 156 das aplicações de 2018 e 2015, respectivamente. No entanto, os dois problemas citados utilizam de formas geométricas na sua constituição.

Todavia, o que se busca compreender através deles são os temas Probabilidade e Combinatória, deixando o aspecto geométrico como suporte para o estabelecimento das situações expostas pelos problemas.

Assim, tem-se que não apenas problemas de Geometria puderam ter suas soluções concebidas por intermédio da visualização.

A partir dos dados expostos nesta seção, pode-se inferir que, de maneira geral, nas aplicações analisadas, os estudantes não têm um bom desempenho nos problemas que podem ser resolvidos com auxílio da visualização. Visto que, problemas desses tipos estão entre os mais errados pelos estudantes e quando não está nesse conjunto (os problemas mais errados) o percentual de acerto é pequeno, considerando pelo menos que metade dos candidatos não tem logrado êxito nas resoluções desses problemas.

Na seção a seguir, serão mostrados dados que corroboram com a inferência descrita anteriormente.

Findo essa discussão, a seguir são apresentados alguns problemas resolvidos pelos autores, dentre os expostos no quadro acima.

6.2 Resolução dos problemas selecionados

Nesta seção, serão apresentados 10 problemas selecionados, dois de cada ano de aplicação. O critério utilizado para seleção foi selecionar e propor uma solução dos problemas com menor percentual de acertos e que fosse possível utilizar a visualização na resolução.

Inicialmente, são apresentados os 5 problemas com menor percentual de acertos, um por ano de aplicação. A seguir, são apresentados outros 5 problemas, igualmente, um por cada ano de aplicação.

No corpo do texto das soluções propostas, são listadas as estratégias de Larson (1983) para resolução dos problemas.

As soluções propostas estão descritas a seguir.

6.2.1 Problema 142 (ENEM 2019 – caderno azul)

Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m^2 de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

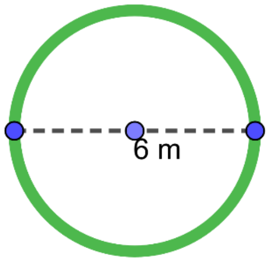
A) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m^2.
B) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m^2.
C) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m^2.
D) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m^2.
E) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m^2.

Para resolução desse problema, utilizaremos as estratégias intituladas por Larson (1983) como: 1) procure por um padrão, 2) faça uma figura, 5) use uma notação efetiva e 7) divida em casos.

Observe que, inicialmente, devemos entender o problema, realizando análises que de alguma forma resulte em algum padrão (estratégia 1: procure por um padrão). O problema fornece que se deve calcular áreas de círculos e setor circular e, por fim, decidir se é possível realizar o que se pede no problema: pavimentar o setor circular com material disponível.

Traçamos, então, figuras que modelem o problema (estratégia 2: trace uma figura):

Figura 9 – Área pavimentada inicialmente



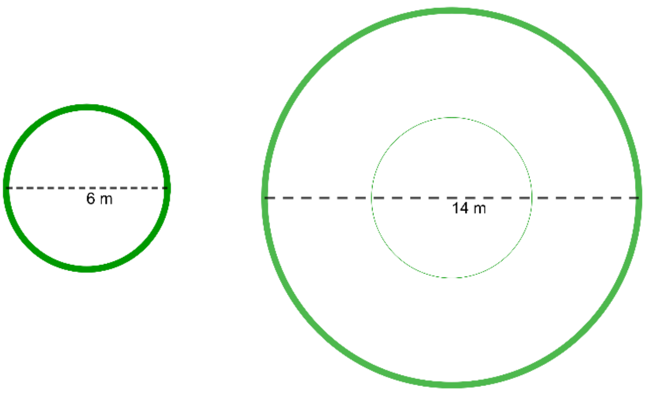
Fonte: Elaborado pela autora

Seja a Figura 9 a representação da área pavimentada, de 6cm de diâmetro, e cercada por grama.

Queremos aumentar a área desse círculo, da região pavimentada, de modo que o diâmetro do círculo original aumente em 8 m, isto é, tenha um diâmetro de 14 m (6 + 8).

Seja a Figura 10, a seguir, a representação do contexto citado.

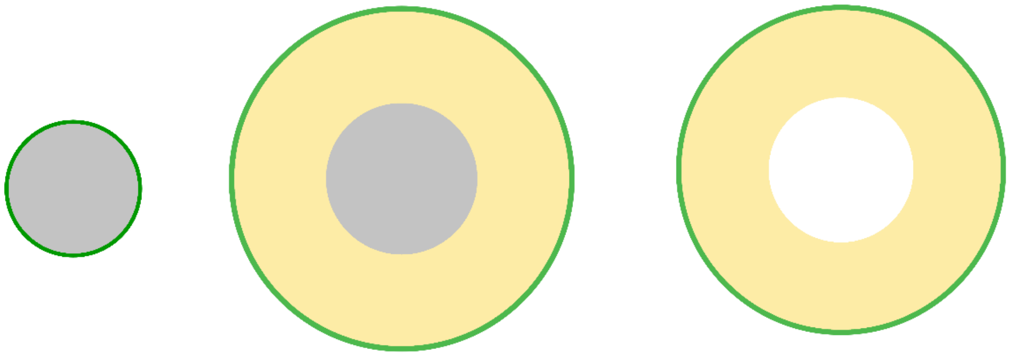
Figura 10 – Aumento da área pavimentada



Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, calcular a área que se pretende aumentar: o setor circular que citamos anteriormente (área em bege):

Figura 11 - Área pedida no problema



Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 11 demonstra, intuitivamente, e sem sombra de dúvidas, que, para solucionar o problema, basta calcular a área do círculo de diâmetro 6m e subtrair da área do círculo de 14 m de diâmetro, encontrando a área do setor circular (estratégia 7: divida em casos).

Resta-nos escolher a notação (estratégia 5: escolha uma notação efetiva) que melhor se adeque ao problema.

Assumamos, então, que a área do círculo de diâmetro 6m é dada por:

$$C_1 = \pi {r_1}^2, \tag{1}$$

em que $\pi = 3$, dado do enunciado e $r_1 = 3$, vez que é o raio do círculo e raio de qualquer círculo é dado por $\frac{diâmetro}{2}$.

Assim,

$$C_1 = \pi {r_1}^2 = 3 \, . \, 3^2 = 27 \, m^2 \, . \tag{2}$$

Assumamos, agora, que a área do círculo de diâmetro 14m seja dada por

$$C_2 = \pi {r_2}^2, \tag{3}$$

em que $\pi = 3$ e $r_2 = 7$.

Assim,

$$C_2 = \pi {r_2}^2 = 3 \, . \, 7^2 = 147 m^2. \tag{4}$$

Portanto, utilizando o raciocínio da Figura 11, devemos ter:

Área procurada = $C_2 - C_1 = 147 - 27 = 120m^2$

Analisando as alternativas, concluímos que a correta a ser marcada pelos candidatos deve ser a E.

Um questionamento vem à mente quando nos deparamos com o dado de que esse problema foi o terceiro mais errado pelos candidatos nesta seleção: por que os candidatos erraram um problema relativamente simples como o apresentado?

Inicialmente, observemos que conhecimentos matemáticos os candidatos, isto é, concluintes ou egressos do Ensino Médio, devem conhecer para resolução do problema: 1) calcular área do círculo e 2) subtrair áreas. Observa-se que são conhecimentos que não refletem dificuldades para aplicação e devem ser de amplo conhecimento pelos alunos do Ensino Médio.

Nessa conjuntura, podemos inferir que, existem duas situações que podem estar diretamente relacionadas à dificuldade de resolver corretamente o problema, quais sejam: ensino algoritmizado da matemática e a dificuldade de visualização do problema. Tais fatos foram discutidos nesse texto.

O ensino algoritmizado, favorecendo a aplicação de fórmulas, sem o devido entendimento do saber matemático, dificulta, se não, impossibilita, a interpretação correta de problemas diversos, inclusive, aqueles com baixo nível de dificuldade.

Igualmente, o pensamento visual deficiente, não permite ou dificulta a interpretação do que se pede no problema. Uma vez que, como afirmam Flores, Wagner e Buratto (2012), entendendo que visualização e pensamento visual como sinônimos, que a visualização é um meio para o entendimento de conceitos matemáticos.

Assim, pensar nas dificuldades que os estudantes apresentam na resolução de problemas Matemáticos, leva-nos a estabelecer uma relação entre essa dificuldade e a inabilidade em articular os conceitos Matemáticos, carregados de abstração, com a visualização (SANTOS, 2014).

6.2.2 Problema 161 (ENEM 2018 – caderno azul)

Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

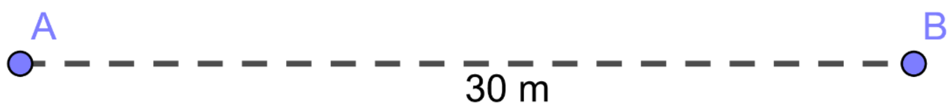
Nestas condições, a maior distância, em metros, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

A) 30.
B) 40
C) 45
D) 60.
E) 68.

Inicialmente, deve-se pensar nas possibilidades para localização dos dois bombeiros (estratégia 7: divida em casos).

Fixemos sem perda de generalidade, inicialmente, os pontos *A* e *B*, com *A* antes de *B* (estratégia 2: faça uma figura):

Figura 12 - Distância entre os focos de incêndio A e B



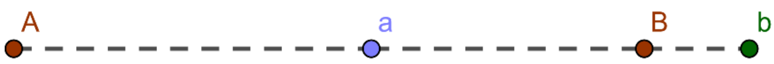
Fonte: Elaborado pela autora

Fixados os pontos *A* e *B*, onde se localizam os focos de incêndio, temos 3 possibilidades:

1) Um dos bombeiros está entre *A* e *B* e o segundo depois de *B* (estratégia 4: modifique o problema):

Sejam *a* e *b* os dois bombeiros. Sem perda de generalidade, consideremos que o bombeiro *a* está entre A e B e o bombeiro *b* está depois de B, conforme figura a seguir:

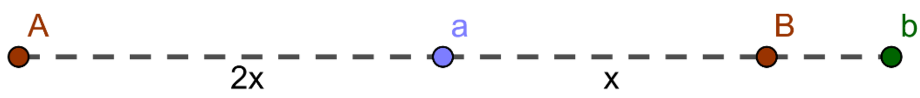
Figura 13 - Posição dos bombeiros a e b, com a entre A e B e b depois de B



Fonte: Elaborado pela autora

Retomamos que, a distância do bombeiro *a* ao foco *A*, deve ser o dobro da distância desse bombeiro ao foco *B*, o mesmo ocorre com o bombeiro *b*. Sendo $2x$ a distância do bombeiro a ao foco *A* e x a distância desse bombeiro ao foco *B*, pode-se construir a figura 14 a seguir, com os dados aqui exposto.

Figura 14 - Distância do bombeiro a aos focos de incêndio

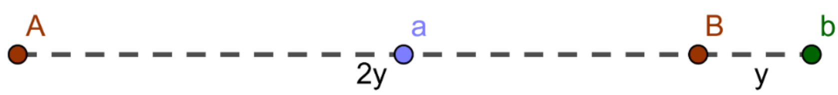


Fonte: Elaborado pela autora

Como a distância de *A* e *B* é 30m, analisando o bombeiro *a*, temos que ele deve estar a uma distância 2x de *A* e x de *b*, onde $2x + x = 30$, isto é, a distância entre *A* e *B*. Assim, $x = 10$. Logo, a distância do bombeiro *a* ao foco *A* é 20, e a distância do mesmo bombeiro ao foco *B* é 10.

Analisemos, nesse momento, a posição o bombeiro *b*.

Figura 15 - Distância do bombeiro b aos focos de incêndio



Fonte: Elaborado pela autora

Utilizando o mesmo dado solicitado no problema, temos que a distância do bombeiro *b* ao foco *A* é o dobro da distância desse bombeiro ao foco *B*. Assim, tomemos como $2y$ a distância do bombeiro ao foco *A* e y a distância do bombeiro ao foco *B*. Como o bombeiro *b* está à direita do foco *B*, então, a distância desse bombeiro ao foco *A* é dada por $30 + y = 2y$. Daí, segue-se que, $y = 30$. Logo, a distância do bombeiro *b* ao foco *B* é 30 e a distância do bombeiro *b* ao foco *A* é 60.

Assim, pela construção da situação problema, a distância entre os bombeiros é dada pela distância do bombeiro *a* ao foco *A* e do bombeiro *B* ao foco *b*, isto é,

$$x + y = 10 + 30 = 40 \tag{5}$$

2) Um dos bombeiros está entre *A* e *B* e o outro antes de *A*. (estratégia 4: modifique o problema).

Sejam *a* e *b* os dois bombeiros. Sem perda de generalidade, consideremos que o bombeiro *a* está à esquerda de *A* e o bombeiro *b* está entre *A* e *B*.

Figura 16 - Posição dos bombeiros a e b, com a à esquerda de A e b entre A e B

Fonte: Elaborado pela autora

Considerando o fato de que a distância de o bombeiro *a* ao foco *A* é o dobro da distância desse bombeiro ao foco *B*, tem-se que essa afirmação não pode ocorrer. Pois, conforme figura 16, o bombeiro em questão está situado à esquerda de *A*, isto é, mais próximo de *A* do que de *B*.

3) Os dois bombeiros estão entre *A* e *B*. (estratégia 4: modifique o problema).

Sejam *a* e *b* os dois bombeiros. Sem perda de generalidade, consideremos que os bombeiros estão situados entre *A* e *B*.

Figura 17 - Distância do bombeiro b aos focos de incêndio

Fonte: Elaborado pela autora

Depreende-se da figura e da afirmação de que os bombeiros estão entre *A* e *B*, e ambos devem estar em um ponto que satisfaça a condição de estarem a uma distância do foco *A* que seja o dobro da distância deles ao foco *B*, então, esse ponto coincide, isto é, os bombeiros *a* e *b* estão no mesmo ponto.

O problema solicita a distância entre eles, que neste caso, em particular, é 0 (zero).

Portanto, de acordo com o fato de que se pretende localizar os bombeiros com a maior distância possível entre eles e com as condições apresentadas nas possibilidades apresentas, a alterativa a ser marcada é a B.

Observou-se que o problema em tela trata basicamente da distância entre dois pontos. Utilizando para sua resolução equações de primeiro grau com duas incógnitas. O problema traz temas que são comumente vistos na Educação Básica. A maior dificuldade de resolução, provavelmente, resida no fato de "enxergar" o posicionamento dos bombeiros entre os focos de incêndio, o que não possibilita o raciocínio e análise de possibilidades de resolução, trata-se não somente de aplicar o conhecimento adquirido sobre equações, mas compreender uma situação narrada a partir de um contexto visual.

O que se vê, então, é uma dificuldade relacionada a pouca capacidade de visualizar as soluções a partir dos dados postos no problema, e, posteriormente, aplicar o conhecimento matemático exigido para a solução adequada.

O exposto até o momento está de acordo com o discutido na introdução e fundamentação desse texto. No que diz respeito aos níveis atingidos pelos estudantes na avaliação do SAEB, os estudantes não possuem as habilidades relacionadas ao conhecimento visual e, consequentemente, podem não ter o necessário para resolução de problemas como os citados neste texto.

Skemp (1993) evidencia uma relação entre a imaginação visual, como um meio de favorecer a integração de ideias, com o fato de que as pessoas têm se sobressaído por sua contribuição matemática e cientifica por usarem mais da imaginação visual que outros meios de pensar matematicamente. O mesmo pesquisador utiliza o termo *insight* à experiência da imaginação visual (SKEMP, 1993, apud LEIVAS, p. 19).

Em termos do ensino e aprendizagem de Matemática, a provável dificuldade encontrada na resolução desses problemas evidencia uma outra dificuldade aqui já discutida: o pouco uso desse recurso no ensino e aprendizagem de Matemática em todos os níveis de ensino.

6.2.3 Problema 140 (ENEM 2017 - caderno azul)

Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente

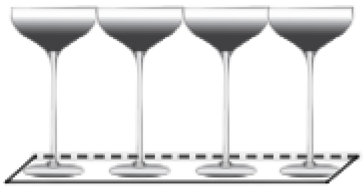
A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a

A 192.
B 300.
C 304.
D 320.
E 400.

Para resolução do problema, o candidato pode, incialmente, imaginar a disposição das taças na bandeja e, em seguida, analisar as possibilidades de ser a bandeja desejada, isto é, a de área mínima.

A figura 18 representa a situação enunciada no problema (Estratégia 1: Faça uma figura).

Figura 18 - Representação inicial do problema



Fonte: Elaborado pela autora

Observando a figura, temos que, para a bandeja tenha área mínima, as taças devem ocupar o menor espaço possível. Então para, que isso ocorra, as taças devem estar tão próximas quanto possível. Neste caso, devem estar tocando-se duas a duas.

Novamente, observando a imagem, o diâmetro da base superior da taça é maior que o diâmetro da base inferior. Logo, as taças devem se tocar pela base superior, enquanto as bases inferiores devem estar separadas duas a duas.

A partir dessas inferências pode-se proceder de duas maneiras:

i) Considerando as bases superiores das taças, tem-se que analisar duas situações (Estratégia 7: divida em casos):

1) Cálculo do comprimento da base menor da bandeja:

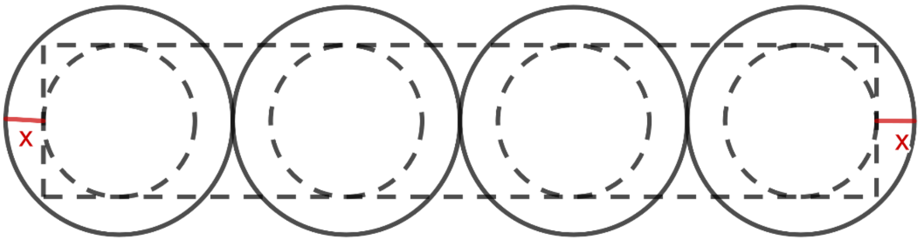
Inicialmente, a partir da figura 18, o valor da base menor da bandeja, que se configura como um retângulo, possui como dimensão o diâmetro da base inferior da taça, neste caso, é de 8 cm.

2) Cálculo do comprimento da base maior da bandeja:

Para que a área da bandeja seja mínima, basta proceder como realizado para definir a medida da base menor, isto é, considerar que as bases menores das taças devem ser consideradas em detrimento da medida das bases superiores.

Isto é, pode-se somar os diâmetros das taças e em seguida, subtrair desse valor, o correspondente ao que ultrapassa, das taças laterais em relação a base superior, das laterais da bandeja.

Figura 19 - Visão da região superior das taças na bandeja, com valor x em evidência.

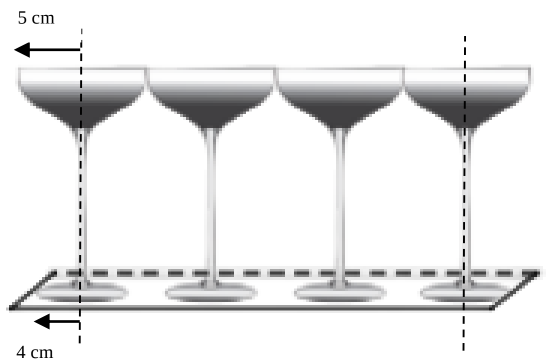


Fonte: Elaborado pela autora

Isso quer dizer, basta encontrar o valor de *x* da figura 19.

Realizando uma secção vertical em uma taça lateral da bandeja, passando pelo centro dessa taça - figura 20 -, tem-se que a secção, nesses moldes, passa pelos centros das bases superior e inferior.

Figura 20 - Representação do problema com as secções verticais



Fonte: Elaborado pela autora

Comparando, dessa forma, os raios das bases superiores e inferiores da taça, tem-se que, a parte superior da taça ultrapassa em 1 cm a base superior da mesma taça. Esse é o valor de x procurado (estratégia 5: escolha uma notação efetiva).

Empregando o mesmo raciocínio para a taça lateral oposta em relação às bases maiores da bandeja, temos que a base superior, em termos de raio, ultrapassa em 1 cm a base inferior dessa mesma taça. Logo, somando-se os diâmetros das quatro taças (40 cm), basta diminuir, desse valor, o que ultrapassa, neste caso 2 cm, o que resulta no comprimento da base maior da bandeja. Neste caso: 38.

Portanto, a área pedida é 38 x 8 = 304 cm².

ii) Considerando as bases inferiores das taças, tem-se duas situações:

1) Cálculo do comprimento da base menor da bandeja:

Análogo à situação 1) do item i).

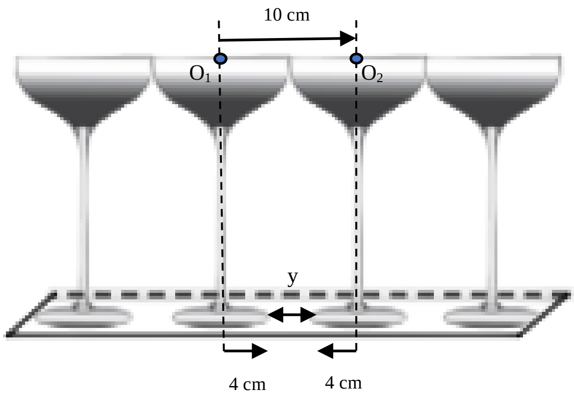
2) Cálculo do comprimento da base maior da bandeja:

Retomando a figura 20, como as bases superiores possuem um diâmetro maior do que as bases inferiores das taças, então, as bases superiores ocupam um espaço maior do que as bases inferiores, isto é, as taças se tocam na parte superior, fazendo com que as taças fiquem separadas por suas bases inferiores. Assim, deve-se saber, inicialmente, o valor correspondente a essa separação. Chamaremos de *y* o valor dessa separação.

Ainda, como queremos a bandeja de menor área, as taças que estão posicionadas mais lateralmente na bandeja tocam as bases menores da bandeja tangencialmente. Assim, as bases superiores das taças ultrapassam a bandeja.

Assim, concluímos que uma figura que retrata a situação problema é dada por:

Figura 21 - Secções verticais em taças adjacentes com localização de y



Fonte: Elaborado pela autora

A figura 21 fornece que, considerando que as taças se tocam nas bases superiores duas a duas e que os raios dessas bases são 5 cm, enquanto o raio das bases inferiores são 4 cm, temos que, ao seccionar verticalmente duas taças adjacentes, a partir do centro das bases, isto é, a secção vertical divide a taça ao meio, tem-se que a distância de um centro de uma das taças, chamemos de O_1, ao centro da outra taça adjacente, chamemos de O_2, é 10 cm (5 cm + 5 cm). Igualmente, esse é o comprimento entre os centros das bases inferiores das taças adjacentes, resultante da secção vertical. Então, o *y* descrito na figura equivale a 2.

Logo, para calcular o comprimento da base maior da bandeja basta somar o diâmetro das 4 taças aos valores que correspondem aos espaços vazios entre essas mesmas taças, os quais são 3 espaços de 2cm cada. Então, tem-se que o comprimento é dado por: (4 x 8) + (3 x 2) = 38

Portanto, a área procurada é 38 x 8 = 304 cm².

Apresentamos uma possível solução de um problema que se enquadra como o terceiro com menor percentual de acertos entre os candidatos que realizaram o exame de 2017. Trata-se de um problema geométrico que necessita de conhecimentos básicos de Geometria: diâmetro e raio de uma circunferência, e área de um retângulo.

Resta-nos refletir sobre os motivos que levaram a cerca de 87,6% dos candidatos não conseguirem, a partir desses conhecimentos matemáticos, chegar à alternativa correta do problema.

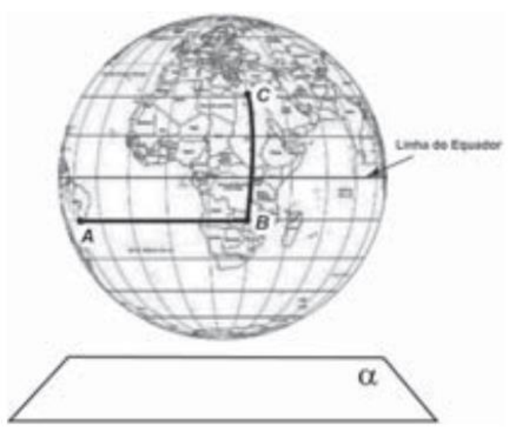
Como se tratam de conhecimentos que não são avançados, leva-nos a inferir que a dificuldade está centrada na pouca capacidade visual dos candidatos para compreensão geral do próprio problema, abstrair os condicionantes teóricos relacionados ao problema e aplicá-los de maneira efetiva.

Além do mais, o problema carece de uma compreensão visual que é difícil ser estudada no plano, sendo necessário uma visão espacial da situação problema, fato que pode dificultar ainda mais o processo de abstração e é decisiva para o alcance de uma solução favorável.

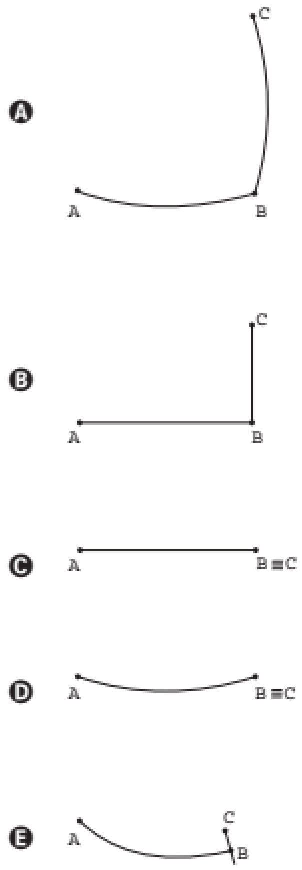
Nesse sentido, Barbosa (2009) aponta que as dificuldades associadas ao raciocínio visual, residem, entre outros motivos elencados pela pesquisadora, na incapacidade dos estudantes de Matemática de visualizar ou completar espacialmente contextos matemáticos diversos, não somente aqueles relacionados diretamente à Geometria.

6.2.4 Problema 178 (ENEM 2016 – caderno azul)

A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



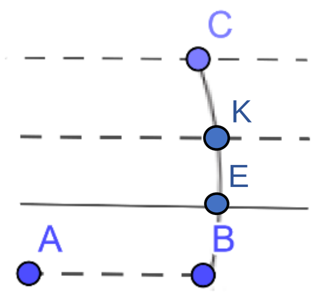
A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por



O problema nos fornece que, o plano α é paralelo a linha do equador, enquanto o trajeto de *A* à *B* também é paralelo à essa mesma linha. Ainda, o trajeto citado se dá pela superfície do globo. Então, ao realizar a projeção ortogonal a esse trajeto, isto é, ao se traçar retas perpendiculares ao trajeto, as quais também são perpendiculares a α, a imagem que é projetada sobre α deve ser semelhante ao trajeto de *A* à *B*. Como o globo se assemelha à uma esfera, então a imagem projetada deve ser uma curva.

Para realizar a projeção ortogonal do trajeto *B* à *C*, analisemos a figura 22 a seguir, extraída da figura dada no problema:

Figura 22 - Situação problema - Imagem extraída do problema 178 de 2016



Fonte: Elaborado pela autora

Observe que, os pontos *B* e *K* são simétricos em relação a linha do Equador. Pois, *B* e *K* estão situados em dois paralelos simétricos a esse paralelo. Daí decorre que, os trajetos *B* à *E* e *E* à *K* são simétricos. Assim, na projeção a ser realizada, os pontos *B* e *K*, bem como todos os pontos entre os trajetos *B* à *E* e *E* à *K*, coincidem.

Ainda, decorre dessa última afirmação, que os pontos *B* e *C* não podem coincidir na projeção. Além disso, como o ponto *C*, em relação ao ponto *B*, está mais próximo de um dos polos no globo, então, esse ponto se localiza em um local um pouco mais à esquerda da curva formada pelo meridiano que os pontos *B* e *C* se localizam, como representado na Figura 22. Então, na imagem formada pela projeção, o ponto *C* deve, necessariamente, estar localizado um ponto um pouco mais para trás em relação à *B*.

Além disso, como a superfície do globo é curva, então, as retas perpendiculares a cada ponto pertencente a esse trajeto, que também são perpendiculares sobre α, devem projetar sobre esse plano pontos que coincidem, nas localizações sobre o globo que as curvas, abaixo e acima do equador. Isto é, nas localizações simétricas em relação à linha do equador, as quais citamos anteriormente (tal como fechar uma folha de papel, na metade, que tem um segmento de reta, o qual é perpendicular à reta que se forma na dobradura da folha). E pontos que não coincidem, especificamente no trajeto *K* à *C*, conforme figura 22. Portanto, teremos, na imagem formada pela projeção, uma linha, contínua, abaixo de *B*, visto se tratar do trajeto *B* à *K*. Essa linha passa por *B*, em seguida, e atinge *C*.

Resta-nos saber se a linha citada que representa o trajeto *B* a *C* é uma linha reta ou outro tipo de curva. Acreditamos, que o discutido até o momento é suficiente para concluir que a imagem projetada do trajeto entre *B* e *C* se trata de uma reta.

Portanto, diante dos argumentos expostos, resta como alternativa a ser marcada a letra E.

As estratégias de resolução de problemas que foram utilizadas para solução foram: 1) 1 – procure por um padrão; 2) 2- trace uma figura; 3) 6 – explore as simetrias e 4) 7 – divida em casos.

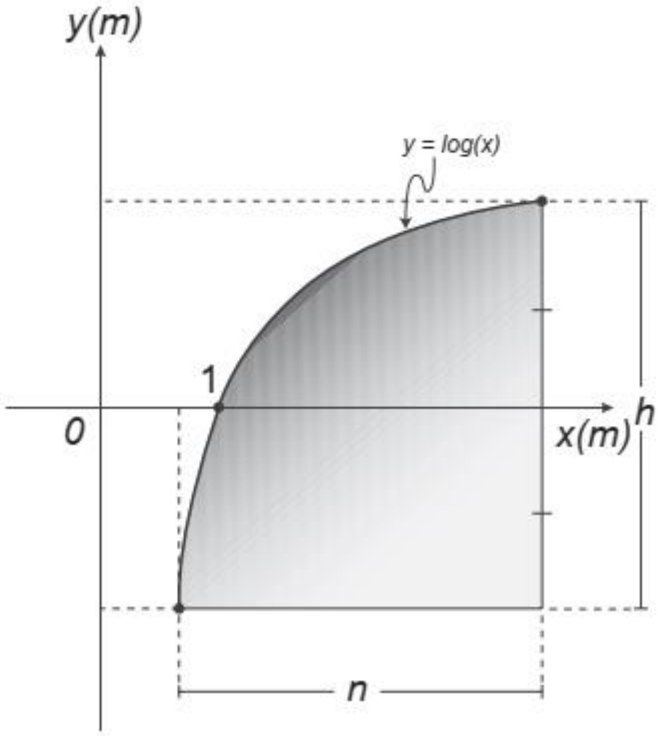
Observa-se que o conhecimento matemático necessário para resolução do problema se resume ao entendimento de paralelismo, perpendicularismo e projeção ortogonal.

Entretanto, este problema, dentre os aqui discutidos, provavelmente, constitua-se como um dos problemas que para sua solução carece exclusivamente da visualização e, consequentemente, da habilidade bem desenvolvida dos candidatos sobre o assunto. Este talvez seja o grande motivo para que cerca de 90% dos candidatos não tenham conseguido chegar à alternativa correta.

Este é um dado preocupante, pois espera-se, dentre outras habilidades, o desenvolvimento da capacidade visual dos estudantes da Educação Básica, tendo em vista que a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas (BRASIL, 1998).

6.2.5 Problema 165 (ENEM 2015 – caderno amarelo)

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $\mathrm{y} = \log x$, conforme figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo *x* sempre divida ao meio a altura *h* do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo *x*. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura *h* do vidro em função da medida *n* de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

A) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

B) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

C) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

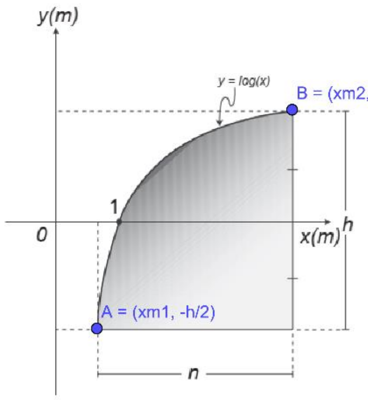
D) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

E) $2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

Todas as informações necessárias para resolução do problema estão presentes no gráfico da função disponibilizada no caderno de questões. Bastando, para tanto, a interpretação desses dados e aplicar a teoria sobre logaritmo.

A figura disponibilizada no enunciado do problema fornece os dados evidenciados na figura a seguir (estratégia 2: trace uma figura e estratégia 5: escolha uma notação efetiva):

Figura 23 – Coordenadas dos pontos A e B



Fonte: Enem 2015 - editado pela autora

Os dados foram adquiridos da seguinte forma:

Como o eixo *x* divide ao meio altura *h* do vidro, então, a coordenada *y* do ponto B é $\frac{h}{2}$ (estratégia 6: explore as simetrias). Assim, temos que:

$$\log(x_{m2}) = \frac{h}{2} \tag{6}$$

Sendo x_{m1} e x_{m2} as abcissas dos pontos *A* e *B*, destacados na figura 23, então

$$x_{m2} = x_{m1} + n.$$

Dessa forma,

$$\log(x_{m2}) = \log(x_{m1} + n) = \frac{h}{2} \tag{7}$$

O que implica em

$$2\log(x_{m1} + n) = h \tag{8}$$

Analogamente, como o eixo *x* divide ao meio a altura *h* do vidro, então, a coordenada *y* do ponto A é $\frac{h}{2}$. Entretanto, abaixo do eixo *x*, a função torna-se negativa, logo, isto é, $-\frac{h}{2}$ (estratégia 6: explore as simetrias):

$$\log(x_{m1}) = -\frac{h}{2} \tag{9}$$

O que implica em

$$-2\log(x_{m1}) = h \tag{10}$$

Resolvendo o sistema de equações composto pelas equações (7) e (9), temos que:

$$\log(x_{m1}) + \log(x_{m1} + n) = 0 .$$

Daí resulta:

$$\log[(x_{m1})(x_{m1} + n)] = 0 .$$

Assim,

$$(x_{m1})(x_{m1} + n) = 1. \tag{11}$$

Resolvendo a equação de segundo grau, obtemos:

$$(x_{m1}) = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}. \tag{12}$$

Como a função logarítmica possui o domínio composto pelos números reais positivos, com exceção do zero, então, os valores que x_{m1} podem assumir só podem ser positivos. Analisando as duas possibilidades decorrentes da conclusão (12), necessariamente,

$$(x_{m1}) = \frac{-n + \sqrt{n^2+4}}{2}. \tag{13}$$

Pois,

$$\sqrt{n^2 + 4} > \text{n}. \tag{14}$$

Substituindo o valor de x_{m1} equação (10), obtemos:

$$h = -2\log\left(\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$$

$$h = 2\log\left(\frac{2}{-n+\sqrt{n^2+4}}\right). \tag{15}$$

Multiplicando a numerador e denominador da fração nos parênteses por $n + \sqrt{n^2 + 4}$, obtemos:

$$h = 2\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right). \tag{16}$$

Portanto, a alternativa a ser marcada é a E.

Observe que, para resolução do problema, não basta ter conhecimento apenas das propriedades de logaritmo, necessitando, para isso, a análise do gráfico da função, identificando os elementos que caracterizam a função logarítmica. Assim, ambos os entendimentos foram fundamentais e decisivos para que uma parcela pequena dos participantes conseguissem chegar a alternativa a ser marcada.

Ainda, no início da resolução do problema em questão, afirmamos que todas as informações para a sua solução se encontrava na figura disponibilizada no enunciado do problema. No entanto, os dados ali presentes, por si sós, não fornecem todos os elementos para resolução adequada, necessitando que o candidato consiga ler, interpretar e ver os elementos necessários para resolução presentes nas informações disponibilizadas na figura.

Assim, não é suficiente a busca de informações prontas na figura em questão, devendo-se analisar os dados ali contidos, enxergar os condicionantes necessários para resolução e, por fim, utilizar o conhecimento da função logarítmica.

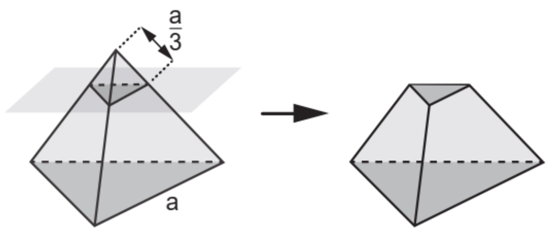
Esse fato está de acordo com o discutido por Santos (2014) ao compreender que a visualização, “mesmo sendo fundamentalmente considerada como uma predisposição relacionada ao ato de ver, corresponde também às propriedades mentais, a percepção espacial, não somente ao que está posto diante aos olhos” (SANTOS, 2014, p. 22).

Além do mais, trata-se, muitas vezes, de um tema que, infelizmente, não é estudado de forma suficiente na Educação Básica, rede pública, por vários motivos. Tal fato aliado à necessidade de visualizar a resolução do problema, por meio de dados expostos em um gráfico, provavelmente, resultou na dificuldade encontrada pelos candidatos em desenvolver um raciocínio que fosse suficiente para lograr êxito na resolução do problema.

Aqui encerram-se as soluções dos 5 problemas com menor percentual de acertos das cinco aplicações estudadas. A seguir, serão expostos os outros problemas solucionados nessa investigação.

6.2.6 Problema 157 (ENEM 2019 – caderno azul)

As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura.



Essa luminária terá por faces

A) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

B) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

C) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

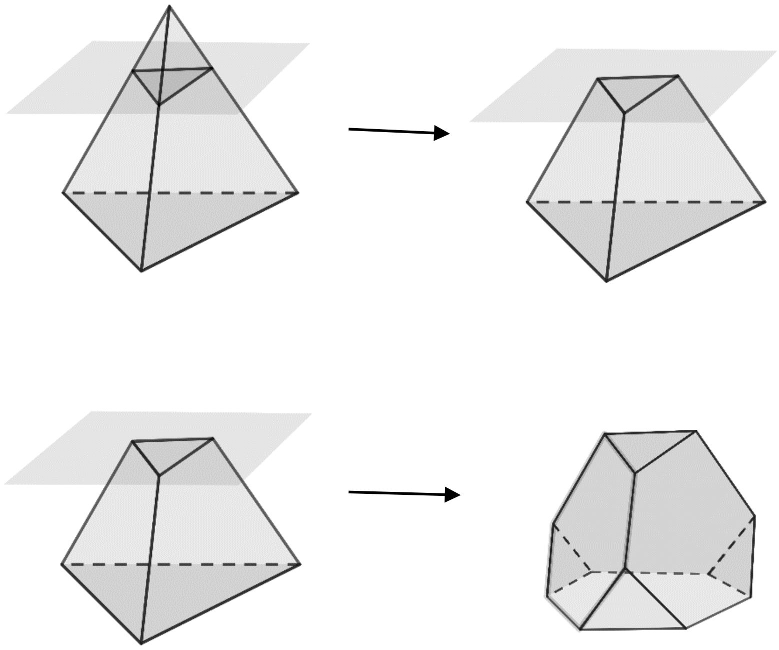
D) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

E) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Para resolução do problema, é suficiente que se proceda como orientado na figura disponibilizada no enunciado. O candidato deve imaginar como será o sólido resultante das secções citadas no enunciado do problema.

A figura a seguir mostra o sólido gerado a partir das secções paralelas às bases do tetraedro (estratégia 2: trace uma figura).

Figura 24 - Solução visual do problema 157 – ENEM 2019 – caderno azul



Fonte: Elaborado pela autora

Um raciocínio plausível para resolução do problema está descrito a seguir.

Inicialmente, faz-se as secções paralelas às faces do tetraedro, conforme a figura 24.

Observa-se que, a partir dessas secções, são retirados 4 sólidos, uma vez que o tetraedro inicial possui 4 faces. Sólidos esses que possuem, também, 4 faces, as 3 laterais, que pertenciam ao tetraedro original, e a face seccionada. Então, esses 4 sólidos são pirâmides, cuja base é um triângulo, pois as secções foram realizadas paralelamente às bases do tetraedro.

Ainda, pelo mesmo motivo (as secções foram realizadas paralelamente às faces do tetraedro), tem-se que os triângulos formados pelas secções são semelhantes aos triângulos de cada face do tetraedro e, por isso, são equiláteros, visto que o tetraedro é regular.

Assim, concluímos que, a luminária, formada pelo tetraedro truncado, terá 4 faces compostas por triângulos equiláteros. Observe que serão 4 faces adicionais, que surgiram após as secções paralelas às faces do tetraedro. Ainda se faz necessário analisar como ficaram as 4 faces que pertenciam ao tetraedro.

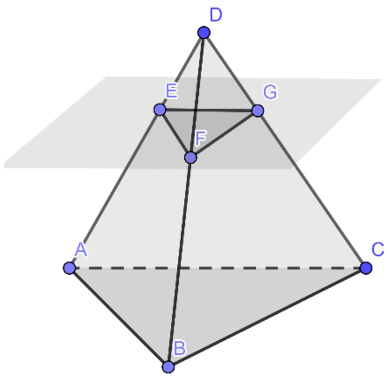
Observe que as secções foram realizadas em um ponto específico: à uma distância de $\frac{a}{3}$ de cada vértice. Assim, cada aresta lateral foi dividida em três partes que medem $\frac{a}{3}$ cada uma.

Logo, as faces laterais do tetraedro truncado, isto é, após as secções e retiradas das pirâmides de base triangulares, são compostas por três arestas que medem $\frac{a}{3}$ (as arestas citadas aqui são as arestas laterais do tetraedro original, após as secções paralelas às bases do tetraedro) e três arestas que são comuns às arestas das bases das pirâmides retiradas após as secções paralelas às bases do tetraedro.

Portanto, tem-se que as faces laterais, que são 4, visto serem as faces do tetraedro, possuem 6 arestas, 3 que medem $\frac{a}{3}$, e 3 que devemos analisar o valor das suas medidas.

Analisando uma face do tetraedro, temos que, como as secções foram feitas paralelas as faces do trapézio, as quais são triangulares, ver figura 25 a seguir.

Figura 25 - Tetraedro com os pontos dos vértices.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 25, os triângulos ABD e EFD são semelhantes (visto que o ângulo ∠ADB é comum e os ângulos ∠ABD e ∠EFD são correspondentes, assim como os ângulos ∠BAD e ∠FED igualmente também são correspondentes. Mas, o triângulo ABD é equilátero, logo o triângulo EFD também o é. Assim, os lados do triângulo EFG medem $\frac{a}{3}$.

Analogamente, isso se estende aos triângulos formados pelas secções paralelas, ocorrendo nas 4 faces do tetraedro.

Portanto, as 6 arestas citadas terão a mesma medida, neste caso $\frac{a}{3}$. Isto quer dizer que as faces que restam do tetraedro truncado serão as faces laterais do tetraedro original após a secção paralela as faces do tetraedro, que são compostas por 4 hexágonos de lados de medida $\frac{a}{3}$.

Assim, a luminária terá 4 faces composta por triângulos equiláteros e 4 faces compostas por hexágonos regulares.

Logo, a alternativa a ser marcada é a A.

Na resolução desse problema, além da estratégia 2- trace uma figura, foram utilizadas as estratégias 1- procure por um padrão e 7- divida em casos.

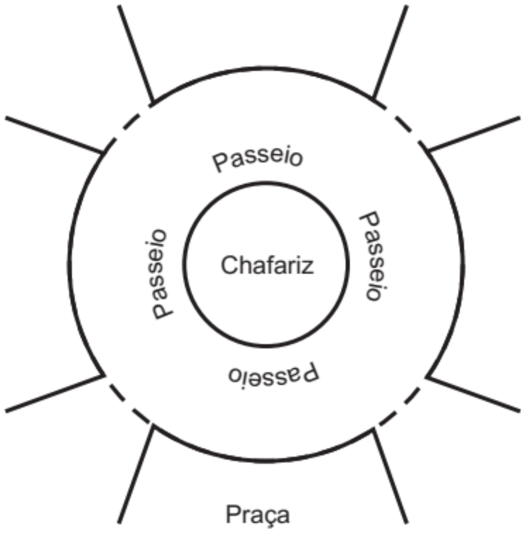
Para resolução do problema, o candidato deve conhecer paralelismo entre retas e planos e semelhança de triângulos.

Igualmente como vimos nos problemas anteriores, a resolução do problema não se resume ao conhecimento dos temas matemáticos citados. Sendo crucial a visualização das secções paralelas e as figuras geométricas geradas a partir dessas secções são essenciais para uma resolução aceitável do problema. Isto quer dizer que, o conhecimento matemático dos temas citados, por si só, não garante a resolução de problemas como os citados, sendo necessário que o candidato tenha habilidades de visualizar o problema espacialmente. Como já discutido neste texto, essas habilidades são de grande importância para solução de problemas diversos no dia a dia em sociedade e são difíceis de serem estimuladas no modelo atual de ensino da Matemática.

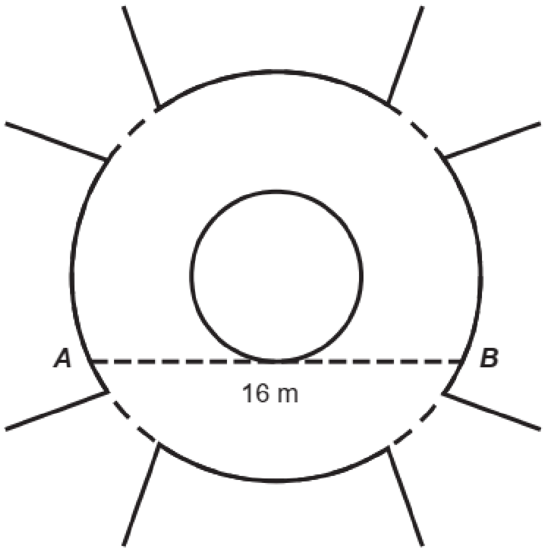
Essas inferências podem justificar o fato de que cerca 83% dos candidatos erraram o problema em tela.

6.2.7 Problema 153 (ENEM 2018 – caderno azul)

A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB: 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi

A) 4π

B) 8π

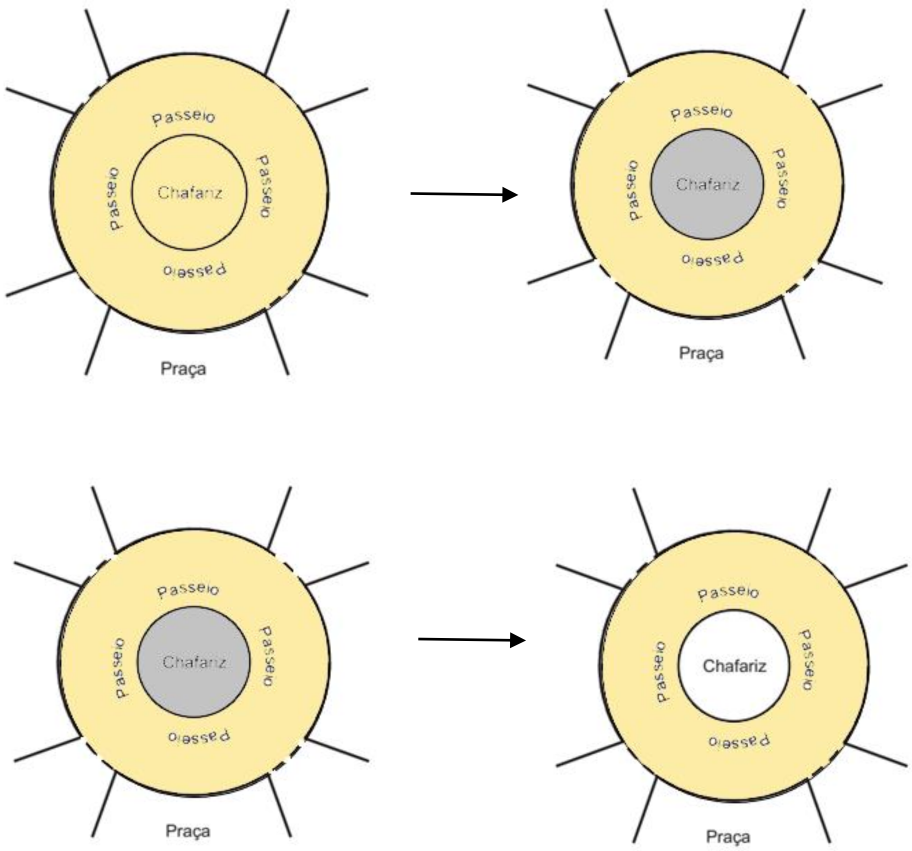
C) 48π

D) 64π

E) 192π

A figura 26 a seguir representa uma possível solução do problema em tela (estratégia 2: trace uma figura).

Figura 26 - Resolução visual do problema 153 (ENEM 2018).



Fonte: Elaborado pela autora

Da figura depreende-se que se deve calcular a área da região em bege e, em seguida, subtrair dessa região a área da região em cinza, resultando na área do passeio, como pedido no problema.

Então, resta-nos calcular o valor dessas regiões.

Chamemos de A_1 a área da região em bege e denotemos por R o seu raio. Assim, sua área é dada por:

$$A_1 = \pi R^2 \quad ..(17)$$

Analogamente, chamemos de A_2 a área da região em cinza de denotemos por r o seu raio. Assim, sua área é dada por:

$$A_2 = \pi r^2 \quad (18)$$

Subtraindo as áreas, conforme figura 25, obtemos:

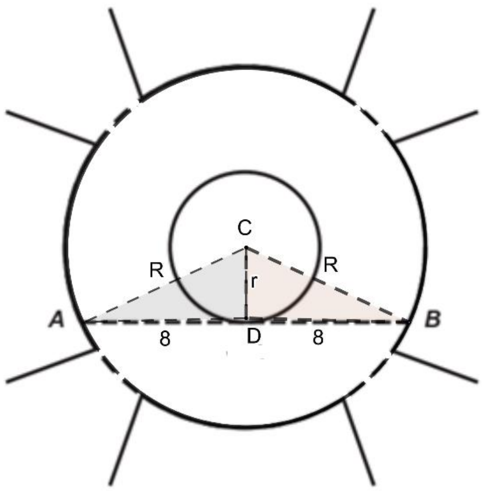
$$A_1 - A_2 = \pi(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2) \quad (19)$$

Observe que, a subtração é possível, visto que as circunferências estudas são concêntricas.

Resta-nos encontrar alguma relação entre os raios para atingir o resultado esperado.

A figura 27 fornece os dados necessários para conclusão da solução do problema.

Figura 27 - Ilustração do triângulo ABC sobre as circunferências de centro C



Fonte: Elaborado pela autora

Sendo C o centro das circunferências do problema, tracemos o triângulo ABC, conforme figura 27. Observe que os lados AC e CB são congruentes, pois correspondem ao raio da circunferência maior. Logo, o triangulo ABC é isósceles de base AB.

Assim, a altura desse triângulo também é sua mediana. Tracemos, então, a altura CD do triângulo ABC, em relação ao lado AB. Como essa altura e a mediana coincidem, então, o seguimento CD divide o lado AB ao meio. Portanto, AD = DB = 8 m.

Assim, o triângulo ACD é retângulo, cujo ângulo reto é ∠ADC.

Mas, CD é o raio da circunferência menor. Então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$8^2 + r^2 = R^2 \tag{20}$$

Substituindo esse resultado em (19), obtemos que:

$$A_1 - A_2 = 64\pi m^2$$

Portanto, a alternativa a ser marcada deve ser a D.

O problema em tela, tem sua solução semelhante o problema 142 – ENEM 2019-, o qual tivemos a oportunidade de disponibilizar uma possível solução nesse texto. Ambos os problemas abordam áreas de círculos. E para solução necessitam de realizar a subtração entre dois círculos concêntricos. No entanto, o problema em tela, inova na necessidade de ser necessária a construção de um triângulo para que se possa chegar à uma solução plausível.

Nesse sentido, o problema mostra que o candidato necessita dispor da habilidade de visualizar a existência do triângulo citado, perceber as características desse triângulo para, por fim, utilizar o conhecimento matemático que relaciona o Teorema de Pitágoras à área do círculo.

Logo, o candidato encontra alguns percalços para resolução, a maioria envolvendo aspectos de visualização, isto é, de imaginar, relacionar e criar hipóteses, sobre os temas citados.

Em termos das estratégias para resolução do problema, para além da estratégia 2 – trace uma figura, foram utilizadas as estratégias: 1 – procure por um padrão, 5 – escolha uma notação efetiva, 6 – explore as simetrias e 7 – divida em casos.

6.2.8 Problema 153 (ENEM 2017 – caderno azul)

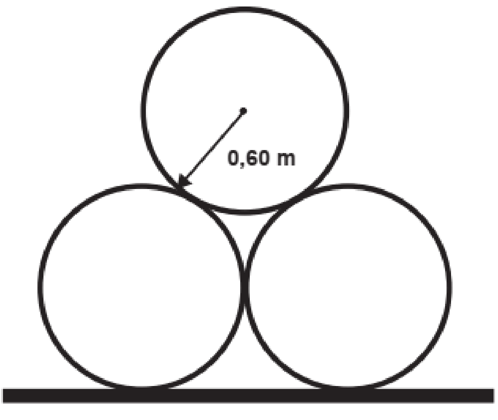
A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

A) 2,82

B) 3,52

C) 3,70

D) 4,02

E) 4,20

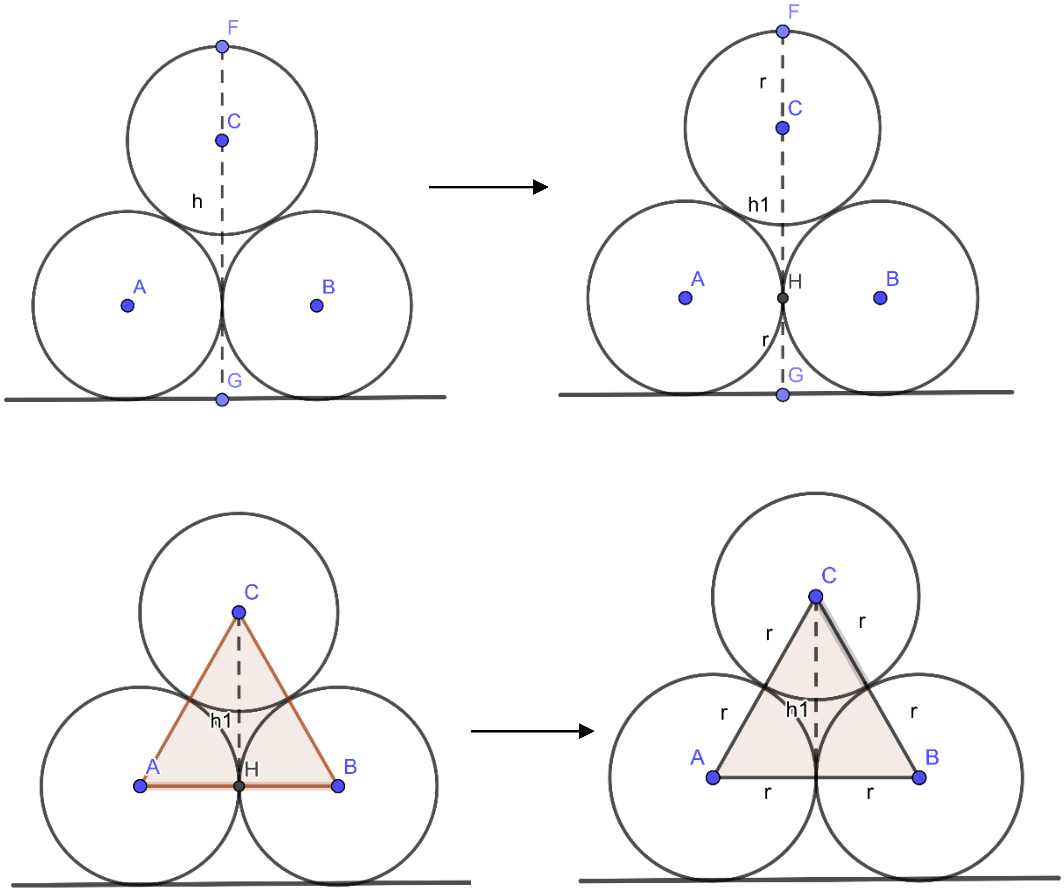
O enunciado do problema informa que altura total do veículo com a carga deve ser, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto. Então, para encontrarmos a altura mínima do viaduto, devemos encontrar a altura total do veículo e adicionarmos, a essa altura, o valor de 0,50 m.

Ainda, o valor total do veículo é dado pela altura da carga adicionada à altura carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo.

Assim, para resolver o problema, é suficiente que se calcule o valor da altura da carga e se adicione os valores de 0,50 m e 1,30m, isto é, 1,80m.

As imagens a seguir propõem uma solução para encontrar a altura faltante (estratégia 2: trace uma figura).

Figura 28 - Resolução visual para encontrar a altura h do empilhamento dos canos.



Fonte: Elaborado pela autora, 2021.

Seja o empilhamento dos canos representado pela figura 28, em que os pontos A. B e C denotam os centros das circunferências que representam os canos e o seguimento FG representa a altura procurada, a qual chamaremos de h.

Analisando atentamente a Figura 28, pode-se inferir que a altura h é composta da seguinte maneira (estratégia 5: escolha uma notação efetiva):

$$h = r + h_1 + r. \tag{21}$$

Assim, basta encontrarmos o valor de h_1 e o problema está resolvido (estratégia 4: modifique o problema).

Observe que os pontos A, B e C formam um triângulo, cujos os lados são compostos pelos raios das circunferências tangentes duas a duas. Logo, o triângulo ABC é equilátero de lado $2r$ e altura h_1 (neste caso, h_1 é altura visto que o triângulo é equilátero).

Dessa forma, o triângulo ACH é reto em H.

De posse dessas informações, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ACH que encontraremos o valor procurado.

Assim.

$$h_1{}^2 = 3r^2. \tag{22}$$

Mas, $r = 0{,}60$, então,

$$h_1 = \sqrt{3(0{,}6)^2} = 1{,}02. \tag{23}$$

Sabendo que, $\sqrt{3} = 1{,}7$, como informado o enunciado do problema, então, $h = 2{,}22$.

Portanto, a altura do vão é:$2{,}22 + 1{,}80 = 4{,}02$.

A alternativa a ser marcada deve ser a D.

Observou-se que para resolução do problema se faz necessário o conhecimento do Teorema de Pitágoras. No entanto, como demonstrado na figura 28, o essencial para resolução reside na necessidade de “enxergar” a existência do triângulo ABC, entender que se trata de um triângulo equilátero, visualizar a altura h e compreender que h pode ser decomposto como mostrado na resolução.

Um dado importante diz que, entre os problemas dessa aplicação, mais de 82% dos candidatos não chegaram à resposta correta. Esse fato mostra que há uma regularidade de percentual de erros entre os problemas aqui discutidos, pois, mesmo se tratando de um problema que está na décima segunda posição entre os problemas com menor percentual de acertos, esses percentuais não variam consideravelmente entre os problemas aqui discutidos.

6.2.9 Problema 175 (ENEM 2016- caderno azul)

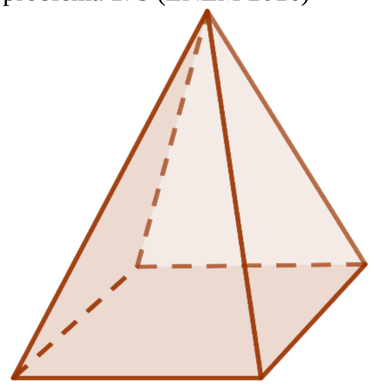
É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

A) Quadrados, apenas.
B) Triângulos e quadrados, apenas.
C) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
D Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
E) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

Seja a Figura 29 a representação da pirâmide de base quadrada:

Figura 29 - Representação da pirâmide de base quadrada – problema 175 (ENEM 2016)



Fonte: Elaborado pela autora.

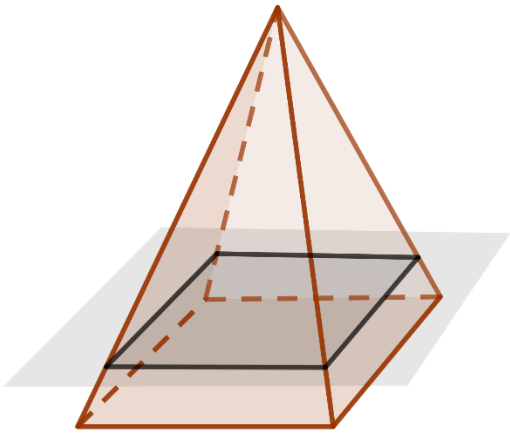
Deve-se, então, proceder as intersecções dos possíveis planos que podem intersectar a pirâmide citada e assim analisar os polígonos resultantes dessas intersecções.

Dividiremos em casos: Planos paralelos às faces e planos não paralelos às faces. A partir desses casos, decorrem outros: planos paralelos à base da pirâmide; planos paralelos às faces laterais; planos que intersectam a base, mas não são paralelos às faces laterais e planos que intersectam as faces laterais, mas não são paralelos à base. Os casos serão demonstrados a seguir:

1 – Planos paralelos às faces:

1.1 - Plano paralelo à base da pirâmide:

Figura 30 - Plano paralelo à base da pirâmide intersectando esse sólido.

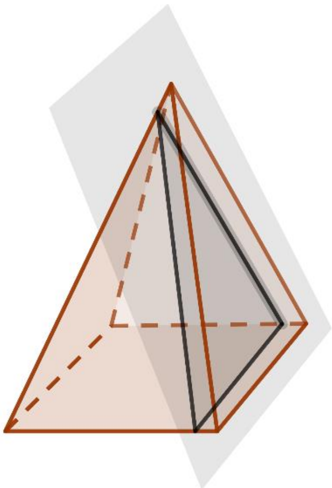


Fonte: Elaborado pela autora.

Como plano é paralelo à base da pirâmide, a qual é um quadrado, então, o polígono formado deve ser semelhante a esse quadrado. Portanto, tem-se um quadrado formado pela intersecção entre o plano e a pirâmide.

1.2 - Plano paralelo às faces triangulares.

Figura 31- Plano paralelo à uma face lateral da pirâmide intersectando esse sólido



Fonte: Elaborado pela autora.

Analogamente ao caso anterior, como o plano é paralelo à uma face lateral, a qual é um triângulo, então, o polígono deve ser semelhante a esse triângulo. Portanto, tem-se um triângulo formado pela intersecção entre o plano e a pirâmide.

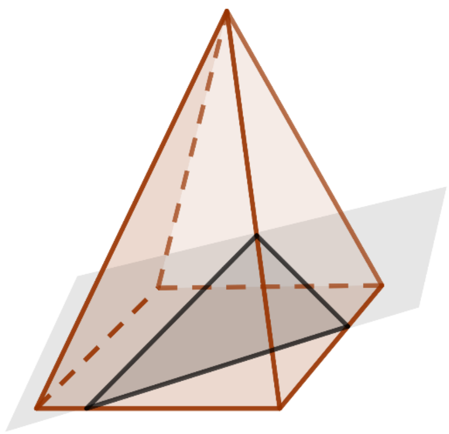
O caso é análogo para as outras faces laterais da pirâmide.

2 – Planos não paralelos às faces:

2.1 – Planos intersectando a base, mas não paralelos às faces laterais:

2.1.1 Plano intersectando a base da pirâmide e duas faces laterais.

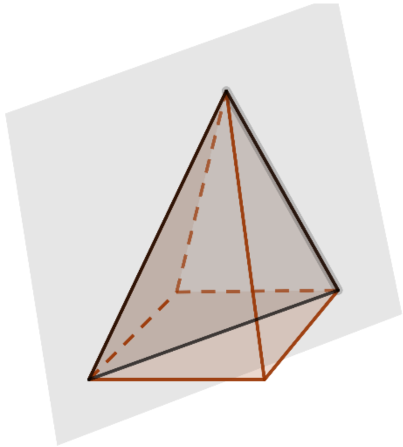
Figura 32- Plano intersectando a base e duas faces laterais da pirâmide



Fonte: Elaborado pela autora,

A Figura 32 mostra um plano intersectando uma aresta lateral e a base da pirâmide, o polígono formado é um triângulo. Observe que, seja qual for o plano nessas condições, até o limite de o plano dividir a pirâmide ao meio e se tornar perpendicular à base e passar pelo topo da pirâmide, conforme Figura 33, a polígono formado continua sendo um triângulo.

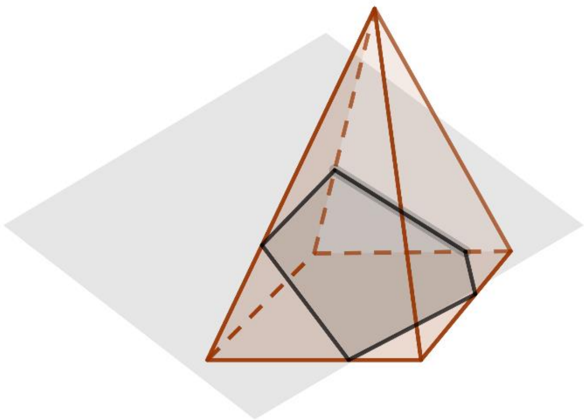
Figura 33 - Plano perpendicular à base intersectando a base e duas faces laterais da pirâmide



Fonte: Elaborado pela autora.

2.1.2 – Plano intersectando todas as faces.

Figura 34 - Plano intersectando todas faces da pirâmide

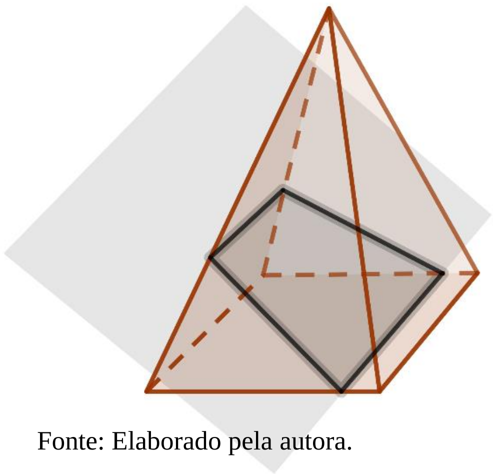


Fonte: Elabora pela autora,

Como a pirâmide contém cinco faces, incluindo a base, então, o plano intersectará a pirâmide em cinco vezes, formando um pentágono.

2.1.3 – Plano intersectando três faces laterais e a base, de forma paralela a uma aresta da base.

Figura 35 - Plano intersectando três faces laterais e a base, de forma paralela a uma aresta da base

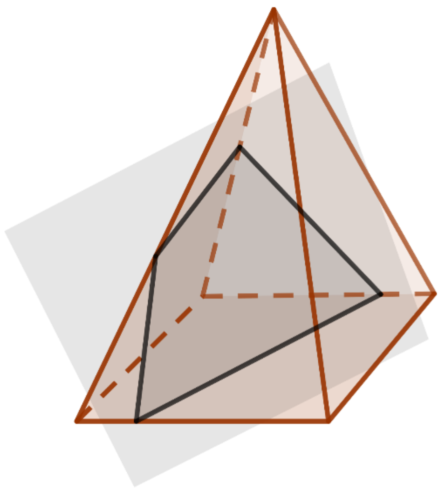


Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, a figura 35, mostra que, nessas condições, o polígono gerado a partir da intersecção do plano à pirâmide é um trapézio, pois, o plano intersecta a base paralelamente a uma das arestas da base. Assim, intersecta a face oposta a essa aresta também paralelamente.

2.1.4 – Plano intersectando quatro faces, sendo uma delas a base.

Figura 36 - Plano intersectando quatro faces, sendo uma delas a base



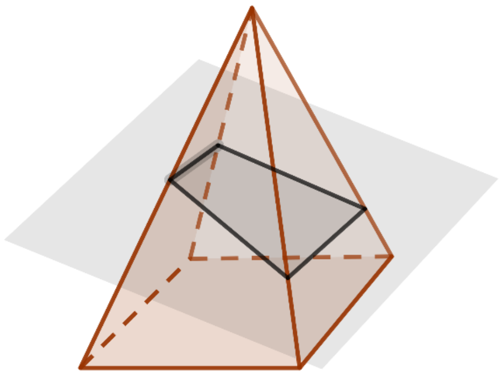
Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que, o que diferencia as situações mostradas nos itens 2.1.3 e 2.1.4, notadamente, é o fato de o plano ser paralelo a uma das bases laterais. Como resultado, tem-se dois polígonos diferentes originados dessas formas de intersectar a pirâmide. No caso aqui exposto, trata-se de um quadrilátero irregular.

2.2 – Planos intersectando as faces laterais, mas não paralelos à base.

2.2.1 – Plano intersectando as quatro faces laterais apenas, sendo as alturas entre as faces laterais do trapézio formado iguais entre si.

Figura 37 - Plano intersectando as quatro faces laterais apenas, sendo as alturas entre as faces laterais do trapézio formado iguais entre si

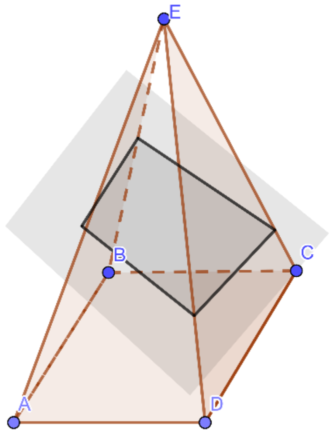


Fonte: Elaborado pela autora.

A partir da intersecção do plano às faces laterais da pirâmide, observa-se que um trapézio é formado. Neste caso específico, os pontos, dois a dois, de intersecção das faces laterais do trapézio com as retas do plano, que são paralelas às bases do trapézio, estão à mesma distância da base da pirâmide. Isto é, o plano está a uma mesma altura da base da pirâmide, em relação às duas faces da pirâmide, nas quais, a intersecção do plano com essas faces, formam as arestas laterais do trapézio.

2.2.2 - Plano intersectando as quatro faces laterais apenas.

Figura 38 - Plano intersectando as quatro faces laterais apenas



Fonte: Elaborado pela autora.

Comparando-se as figuras 37 e 38, nota-se que, o diferencial de uma para outra reside no fato de que o plano está inclinado para a parte frontal da figura. A intersecção do plano com as faces laterais ADE e BCE não permite que a altura entre do plano e a base da pirâmide seja a mesma, em relação aos lados opostos do polígono formado a partir dessa intersecção. Assim, não mais se tem um trapézio, mas sim, um quadrilátero irregular.

Por aqui, encerramos os casos comentados no início dessa resolução.

Por tanto, a alternativa a ser marcada deve ser a E.

Quando dividimos em casos, foram utilizadas as estratégias 1 – procure por um padrão e 7 – divida em casos. Ainda, utilizamos as estratégias 2 – trace uma figura e 6 – explore as simetrias na resolução desse problema.

O problema cuja proposta de solução foi aqui apresentada está entre aqueles que teve baixo aproveitamento dos candidatos, com cerca 85% dos candidatos não chegaram a alternativa correta.

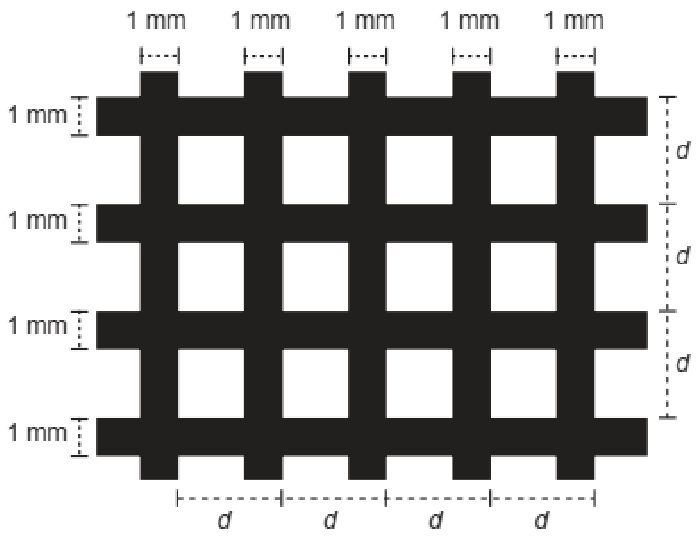
Trata-se de um problema que necessita sobremaneira que o resolvedor visualize as possibilidades de formação de polígonos a partir da intersecção de planos com uma pirâmide. Neste caso, o resolvedor precisa conhecer as características dos polígonos, para caracterizá-los, visualizar as possíveis posições dos planos no espaço e as intersecções decorrentes do cruzamento dos planos com a pirâmide.

Basicamente, a impossibilidade ou dificuldade de visualizar as informações aqui descritas foram decisivas para que os candidatos não obtivessem êxito na resolução. Novamente, esse dado segue a mesma linha de raciocínio discutida até o momento: há pouca valorização do conhecimento visual nas aulas de matemática que decorre, muitas vezes, na inabilidade do professor, fruto também do pouco contato que deve durante a sua formação, e na pouca valorização desse conhecimento, sendo visto como secundário para a aprendizagem dessa ciência, tendo em vista a valorização da algebrização do conhecimento matemático.

6.2.10 Problema 145 (ENEM 2015 – caderno amarelo)

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d - 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.

A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

A) 2

B) 1

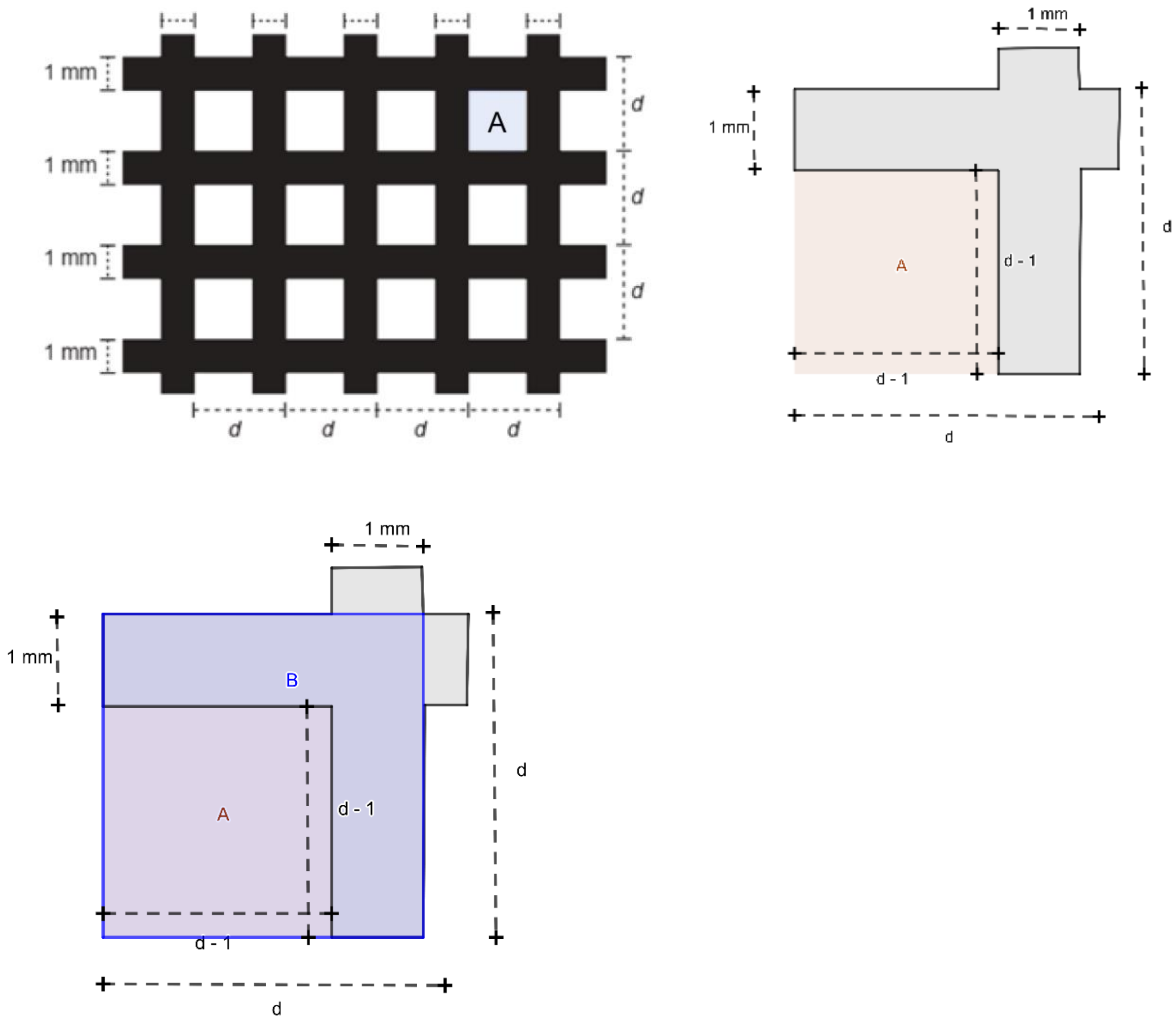
C)$\frac{11}{3}$

D) $\frac{4}{3}$

E)$\frac{2}{3}$

Queremos encontrar o valor de *d* para que a taxa de cobertura da malha seja de 75%. Utilizando a contrapositiva, queremos encontrar *d*, de modo que, a taxa de luz solar que ultrapassa o vidro seja de 25% (estratégia 4 – modifique o problema).

Figura 39 - Solução visual do problema 145 – ENEM 2015



Fonte: Elaborado pela autora

Observando a figura 39, nota-se que a área *A* do quadrado em evidência, representa uma parte dos 25% que permite a passagem de luz pela janela. Assim, pode-se concluir que, basta encontrarmos a área *A* do quadrado evidenciado na figura, e relacionar com a quantidade total de quadrados com a mesma característica – permitir a passagem de luz pela janela, chamaremos tal quantidade de *n*, para encontrarmos uma relação que possa fornecer o valor *d*.

Ainda sobre a figura 39, pode-se deduzir que, como teremos *n* quadrados de áreas iguais a *A*, igualmente, teremos *n* quadrados de área *B* (área em azul na figura 39).

A partir desses dados, temos que:

$$A = (d-1)^2. \tag{24}$$

$$B = d^2. \tag{25}$$

Assim,

$$n\frac{(d-1)^2}{d^2} = \frac{1}{4}\,45. \tag{26}$$

$$nd^2 = 45. \tag{27}$$

Logo,

$$\frac{(d-1)^2}{d^2} = \frac{1}{4} \quad . \tag{28}$$

Portanto,

$$d = 2\,mm. \tag{29}$$

Dessa forma, a alternativa a ser marcada deve ser a A.

Sobre as estratégias de resolução de problemas que foram utilizadas na solução apresentada, podemos citar: estratégia 2 – trace uma figura; estratégia 4 – modifique o problema e estratégia 5 – procure uma notação efetiva.

A resolução aqui apresentada se fundamenta em observar que as áreas A e B fornecem informações sobre a medida d procurada. E, partir disso, proceder com os cálculos matemáticos necessários. Os conhecimentos matemáticos necessários estão baseados, dessa forma, no cálculo de áreas de quadrados e na resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

Igualmente ao que temos defendido neste texto, durante a resolução dos outros problemas, a principal dificuldade para uma resolução conveniente reside na visualização de dados, relacionados as figuras expostas, que possam resultar em modos satisfatórios de encontrar o resultado procurado.

De maneira geral, este capítulo mostrou que no interstício estudado, 5 aplicações do ENEM, não houve mudanças significativas para o desempenho dos candidatos em problemas como os aqui discutidos. A partir desse dado, podemos inferir que existe pouca mudança no modo que é concebida a visualização matemática nas práticas de ensino e aprendizagem dessa ciência.

Esse fato está de acordo com o estudado por pesquisadores como Santos (2014), Costa (2000), Cifuentes (2010) e Lorenzato (1995). E demonstra a problemática que insistentemente assola o ensino e aprendizagem de Matemática, quando não considera que práticas educativas que privilegiem situações que possam desenvolver a capacidade visual dos estudantes como primordial para aprendizagem de Matemática.

Assim, habilidades relacionadas com essa forma de pensar matematicamente não são aprimoradas ou desenvolvidas nos estudantes. Como consequência, os dados negativos mostrados nesse texto, em termos do desempenho dos candidatos do ENEM, terão continuidade nos anos posteriores de aplicação.

Reafirmamos que esse estudo não tem como objetivo puramente pensar apenas no desempenho dos candidatos do ENEM. Ao contrário, acredita-se que os dados aqui mostrados propõem uma relação entre esse desempenho e as práticas educativas que esses estudantes vivenciaram e, como consequência maior, a relação dessas práticas com as diversas demandas sociais, incluindo exames como o citado.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica ainda se constitui como um desafiador campo de estudo, e que merece atenção diferenciada, não somente pela dificuldade insistentemente relatada pelos estudantes em aprender essa ciência, mas também pelos resultados pouco satisfatórios do desempenho desses sujeitos nas avaliações nacionais e internacionais, tais como SAEB e PISA.

Há uma discussão crescente sobre métodos e técnicas a serem utilizadas para que ocorra uma mudança estrutural no modo que os estudantes concebem a Matemática. A visualização Matemática, como discutido nesse texto, constitui-se como modo de enxergar a Matemática que se opõe a um ensino e aprendizagem tradicionalmente aritmetizado dessa Ciência, com o intuito de aproximar os estudantes ao pensamento crítico e reflexivo.

Esse pensamento é corroborado com as discussões de Buratto, Flores e Sztajn (2011), quando discutem a relação entre os sujeitos das práticas educativas com os conhecimentos geométricos e com as práticas visuais, no ensino e aprendizagem da Matemática, “poderia, portanto, ser construída sobre um patamar que fosse desejável para uma educação matemática significativa e crítica” (BURATTO, FLORES e SZTAJN, 2011, p. 2).

O professor nesse cenário tem papel relevante, tendo em vista se tratar de um sujeito multiplicador de ideias e concepções. Nesse contexto, a sua formação inicial está diretamente relacionada as suas práticas pedagógicas. Assim, se o professor não teve contato durante a sua formação, com práticas educativas diferenciadas, incluindo a visualização matemática, provavelmente durante a sua atividade como docente não fará uso dos métodos citados, tendo em vista a sua pouca experiência para isso.

Voltando o olhar para a Educação Básica, com esta investigação, procurou-se entender, a partir dos problemas do ENEM, como está se dando o ensino e aprendizagem de matemática, por meio da visualização matemática atrelada a resolução de problemas. Para tanto, foi-se analisado o desempenho dos estudantes da Educação Básica na resolução de problemas que necessitam de uma visualização, a princípio, geométrica.

Como resultado, verificou-se que, no interstício de 2015 a 2019, período de investigação deste trabalho, os problemas de Visualização, a qual denominamos de Visualização Matemática, estavam presentes naqueles problemas com menor percentual de acertos pelos candidatos às vagas do ENEM. Pode-se inferir, a partir desses dados, que os candidatos não estão preparados o suficiente para lidar com problemas desse tipo. Fato que está estritamente relacionado às práticas educativas que tiveram contato nas aulas de Matemática que participaram.

Ainda mais, apesar de entendermos que esse tipo de exame não mede satisfatoriamente o desempenho global dos estudantes da Educação Básica em Matemática. Entretanto, acreditamos que, o ENEM, por se tratar de um exame de abrangência nacional, permite algum entendimento sobre o desempenho citado.

Nesse contexto, ao analisar os problemas que tiveram os maiores percentuais de acertos, incluindo aqueles problemas que não se tratam especificamente de visualização para resolução, percebeu-se que o quantitativo de candidatos que marcaram acertadamente a alternativa pedida nos problemas é pequeno, devido ao percentual de acertos também ser pequeno, demonstrando a persistente problemática em torno do ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Soma-se a essa conjuntura o fato de que, a maioria dos problemas que foram solucionados nesse texto, não necessitam de um entendimento matemático complexo para sua resolução, tendo em vista que os temas centrais dos problemas relatam situações matemáticas que necessitam de conhecimentos básicos de Geometria, em sua maioria.

Dessa forma, infere-se que o problema de resolução reside na dificuldade de visualizar o problema geometricamente e, com isso, entender a aplicação do conhecimento matemático necessário para solucionar os problemas adequadamente.

Para além da contestação de, no período investigado, existir problemas que podem ter suas soluções a partir da visualização matemática, pôde-se igualmente verificar que uma fração importante dos exames desse período corresponde a problemas nos quais a visualização pode ser utilizada para resolução. Ainda mais, é parte significativa para o atingimento de uma solução razoável dos problemas encontrados nos exames.

Aliada as recomendações de pesquisas da área e dos documentos oficiais, os fatos relatados aqui demonstram a necessidade de se considerar a utilização da visualização matemática no processo de ensino e aprendizagem dessa ciência, com o intuito de fornecer subsídios e habilidades que essa forma de enxergar a Matemática permite aos sujeitos participantes do processo educativo desenvolver.

Os subsídios e habilidades citados estão diretamente relacionados ao poder analítico, reflexivo, crítico, argumentativo e à capacidade visual, que favorecem sobremaneira à resolução de problemas diários desses sujeitos, sejam eles em seleções como as do ENEM, avaliações como o SAEB ou na vida cotidiana, como o trabalho, entre outros, como já argumentado ao longo desse texto.

Não se buscou com esse trabalho argumentar que as práticas educativas como as convencionais devem ser abandonadas e outras práticas como que envolvem tecnologias, visualização, ensino por resolução de problemas, devem ser utilizadas em oposição às práticas tidas tradicionais.

Procurou-se, no entanto, discutir sobre o ensino e aprendizagem de Matemática e mostrar que, apesar dos esforços gerais, o desempenho dos estudantes da Educação Básica em Matemática ainda não atingiu os patamares julgados como suficientes, como por exemplo no IDEB e Pisa. Ainda mais, refletiu-se sobre as práticas de ensino e aprendizagem, concluindo que, práticas diversas devem ser pensadas e analisadas não somente para melhorar os índices citados, mas para permitir aos públicos diversos o contato com metodologias também diversas que favoreçam o contato dos sujeitos do processo educativo com possibilidades de entendimento da Matemática que se aproximem mais das suas realidades e capacidades de enxergar o mundo.

Acreditamos que está pesquisa não foi suficiente para o entendimento amplo de como como está se dando o ensino e aprendizagem de matemática, por meio da visualização matemática atrelada à resolução de problemas, uma vez que outros condicionantes estão relacionados ao tema, tais como: formação do professor que leciona na Educação Básica, condições de trabalho do professor, experiência dos estudantes com Geometria, entre outros, que limitam sobremaneira o desempenho dos estudantes em situações que necessitam da visualização matemática para solucionar problemas diversos.

Todavia, esta investigação sugere que nas práticas educativas de Matemática na Educação Básica há pouco estímulo do desenvolvimento da capacidade visual dos estudantes, tendo em vista o baixo desempenho desses sujeitos em problemas que necessitam desse conhecimento no ENEM, favorecendo práticas didáticas que possuem caráter mais algorítmico ou algebrizado, como definido por Lorenzato (1995).

Dessa forma, para que os estudantes obtenham sucesso na resolução dos problemas da vida cotidiana, faz-se necessário repensar que formação Matemática os sujeitos do processo educativo precisam ter. Acreditamos, que essa formação deve ser a mais ampla possível e a Visualização Matemática pode estar auxiliando positivamente nesse processo.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, F. A. **Visualizando e Dinamizando Temas no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=97561738749&d=20210601123906&h=7dcd4ce7761bc0902dcdd1b437d6398e21d849f5. Acesso em: 05 dez. 2020.

ALENCAR, H.; CÂNDIDO, L.; FARIAS, M. Resoluções Visuais de Alguns Problemas de Matemática da Educação Básica. **PMO**, v. 7, n. 1, 2019. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/03/art1_vol7_2019_PMO_SBM-1-1.pdf. Acesso em: 10 dez. 2020.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Naturais e Sociais. *In*: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Editora Pioneira. Parte II, 2003, p.107-131.

BARBOSA, A. C. C. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais**: um estudo longitudinal com alunos do 2.o ciclo do ensino básico. Dissertação (Doutoramento Estudos da Criança) – Instituto de Educação, Universidade do Minho, Braga, 2009. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/10561. Acesso em: 05 dez. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica: resumo técnico. Brasília: Inep, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resultados_indice_desenvolvimento_educacao_basica_2019_resumo_tecnico.pdf. Acesso em 05 mar. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em 15 dez. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. ESCALAS DE PROFICIÊNCIA DO SAEB. Brasília: Inep/MEC, 2020. Disponível em: http://inep.gov.br/informacao-da-publicacao/-/asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/6957597. Acesso em 10 dez. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. BRASIL NO PISA 2018. Brasília: Inep, 2020. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/informacao-da-publicacao/-/asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/6976803. Acesso em 15 dez. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. Bases Legais. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em 15 dez. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Brasília: Inep, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 04 dez. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros curriculares nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 05 dez. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros curriculares nacionais +. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 10 dez. 2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais. Matemática: 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 10 dez. 2020.

BURATTO, I. C. F.; FLORES, C. R.; SZTAJN, P. Visualização Matemática na Formação Inicial de Professores. *In*: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Recife/PE. **Anais do XIII CIAEM-IACME**, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/390/502. Acesso em: 04 dez. 2020.

CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T. TENDÊNCIAS ATUAIS DO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, 1994. Disponível em: http://www.rbep.inep.gov.br/ojs3/index.php/emaberto/article/view/2266. Acesso em: 05 dez. 2020.

CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. DA PERCEPÇÃO À IMAGINAÇÃO: ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS E ONTOLÓGICOS DA VISUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA. **Educare et Educare**, v. 15, n. 33, 2019. Disponível em: http://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/article/view/22530. Acesso em: 15 dez. 2020.

CIFUENTES, J. C. Do conhecimento matemático à educação matemática: uma 'odisséia espiritual'. *In*: Filosofia, Matemática e Educação Matemática, Editora UFJF, 2010.

CORRADI, R. P.; FRANCO, V. S. Visualização em Geometria, aproximações entre as perspectivas de Duval e Gutiérrez: um estudo com acadêmicos de um curso de licenciatura em Matemática. **Boletim online de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 16, p. 32-51, 2020.

COSTA, C. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. *In*: SARAIVA, M. J. (org.); COELHO, M. I. (org.); MATOS, J. M. (org.). Ensino e Aprendizagem da Geometria. 2000. p. 157-184. Disponível em LINK. Acesso em: 05 dez. 2020.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educ. Matem. Pesq.**, v. 14, n. 1,

p. 31-45, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/202549. Acesso em: 04 dez. 2020.

GORDO, M. F. P. C. M. **A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática**: Um estudo no 1" Ciclo do Ensino Básico. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) – Instituto de Educação, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 1993. Disponível em: https://run.unl.pt/bitstream/10362/278/1/gordo_1993.pdf. Acesso em: 15 dez. 2020.

JUNIOR, E. N. **CÁLCULO VISUAL**: UMA APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE MAMIKON. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=29157244820&d=20210601151652&h=808c147fb09321418f28dc767921823665bbc0b0. Acesso em: 05 dez. 2020.

LARSON, L. C. Problem-Solving Through Problems. Springer, New York, 1983.

LEIVAS, J. C. P. **IMAGINAÇÃO, INTUIÇÃO E VISUALIZAÇÃO**: A RIQUEZA DE POSSIBILIDADES DA ABORDAGEM GEOMÉTRICA NO CURRÍCULO DE CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009. Disponível em: http://www.ppge.ufpr.br/teses/D09_leivas.pdf. Acesso em: 15 dez. 2020.

LORENZATO, S. A. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau: SBEM, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

LOUREIRO, C. Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Contributos para uma gestão curricular reflexiva. **Educação e Matemática**, n. 105, 61-66 Lisboa, 2009. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1819/1860. Acesso em: 05 jan 2020.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra**, São Paulo, v. 8, n.2, p. 62-77, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/44701. Acesso em: 05 dez. 2020.

MORAES, S. P. G.; MOURA, M. O. Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: contribuições da teoria históricocultural. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 22, n. 33, p. 97-116, 2009. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2960. Acesso em: 10 dez. 2020.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2012.

SANTANA, L. N. O USO DO GEOGEBRA E RESOLUÇÕES VISUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=69611939191&d=20210601151331&h=dcbdb272c9b4bfdca1451c6cc55ac6e2544a0424. Acesso em:05 dez. 2020.

SANTOS, A. H. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, 2014. Disponível em: http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/045_AlessandraHendidosSantos.pdf. Acesso em:10 dez. 2020.

SANTOS, M. S. **VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=03679890770&d=20210601151945&h=b0c7f75a571095bb019e1109bc6632d65330cac7. Acesso em:01 dez. 2020.