UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARCOS ROQUE DA SILVA.

A IMPORTÂNCIA DA DISCIPLINA ELETIVA DE PRÉ-CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO, COM ÊNFASE EM LIMITES E DERIVADAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Cidade Universitária - Campus A. C. Simões.

Maceió – AL.

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARCOS ROQUE DA SILVA.

A IMPORTÂNCIA DA DISCIPLINA ELETIVA DE PRÉ-CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO, COM ÊNFASE EM LIMITES E DERIVADAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Trabalho de conclusão de curso, apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da

Universidade Federal de Alagoas, como cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Graduado no curso Licenciatura Plena em Matemática .

Orientador: Professor Doutor Isnaldo Isaac Barbosa.

Cidade Universitária - Campus A. C. Simões.

Maceió – AL.

2022

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S586i Silva, Marcos Roque da.
A importância da disciplina eletiva pré-cálculo no ensino médio, com ênfase em limites e derivadas de funções polinomiais / Marcos Roque da Silva. – 2022.
37 f. : il. color.

Orientador: Isnaldo Issac Barbosa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 36-37.

1. Pré-cálculo. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Matemática (Ensino médio). I. Título.

CDU: 517.2/.3

DEDICATÓRIA

`

A todos que torcem por mim ao longo desta caminhada, isto inclui familiares, amigos, colegas de trabalho, professores que fizeram e fazem parte da minha vida escolar, acadêmica e profissional.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me permitir tal feito na vida pessoal, profissional e acadêmica.

Aos meus pais, Paulo Roque da Silva e Josefa Arcanjo da Silva, pois sem eles eu nada seria; eles são a minha base e a multiplicação de forças para os dias difíceis, além da minha alegria de viver, em meio às lutas diárias.

Aos meus irmãos, Jane Caroline Roque da Silva, Marcio Roque da Silva, Marcelo Roque da Silva, por torcerem sempre pelas conquistas alcançadas.

Aos meus sobrinhos, Kayke Roque de Oliveira, Luana Lethícia Roque de Sousa, Marcela Roque da Silva e Marina Roque da Silva, pois renovam às minhas forças.

Aos meus familiares maternos e paternos, tios, tias, primos e primas, por sentirem orgulho de mim.

Ao meu estimado orientador, Prof. Isnaldo Isaac Barbosa, por toda orientação, toda conversa, por ter aceito o desafio neste momento de finalização do curso, para o senhor todo o meu respeito e minha admiração como profissional e pessoa.

Aos professores que fazem o Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), acontecer em especial aos professores Amauri da Silva Barros e José Carlos de Almeida Lima, a quem sou grato por todo conhecimento disseminado neste processo de ensino-aprendizagem, no qual faço parte.

E, por fim, a todos os funcionários e amigos que fazem desta Instituição de Ensino Superior, à minha casa acadêmica: Universidade Federal de Alagoas.

Este agradecimento se resume à gratidão por todos que passaram pela minha vida durante esses anos no curso de Licenciatura em Matemática. OBRIGADO!

EPÍGRAFE

“A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo”

(Galileu Galilei).

RESUMO

Neste artigo apresento uma pesquisa onde abordamos e analisamos a importância de sugerir o curso de pré-cálculo como um curso destinado aos alunos do 3° ano do ensino médio que pretendem prestar vestibular (eném) para os cursos de exatas na grade do novo ensino médio. Ao longo do mesmo apresento também dados extraídos dos altos índices de reprovação em cálculo diferencial e integral I das Universidade Federal de Goiânia na regional de Goiânia e na Universidade Federal de Campina Grande – campus Cuité, esses mesmos índices que também se repetem na Universidade Federal de Alagoas e também nos Centros Universitários privados, comprovados pela minha vivencia, daí quebrar o paradigma que a disciplina de cálculo diferencial e integral não é um “bicho papão”.

Assim proponho nessa pesquisa uma reflexão sobre o modelo de ensino e aprendizagem atual para a formação de futuros graduandos de exatas e identificando alguns dos gargalos e trazendo possíveis soluções.

Palavra - chave: função polinomial, retas, limites, derivadas, aplicação e exemplos

ABSTRACT

In this article I present a research where we approach and analyze the importance of suggesting the pre-calculus course as a course for students of the 3rd year of high school who intend to take the entrance exam (enem) for exact courses in the new high school grid. Throughout the same I also present data extracted from the high failure rates in differential and integral calculus I Throughout the same I also present data extracted from the high failure rates in differential and integral calculus I from the Federal University of Goiânia in the Goiânia region and at the Federal University of Campina Grande – Cuité campus, from the Federal University of Goiânia in the Goiânia region and at the Federal University of Campina Grande – Cuité campus, these same indexes that are also repeated in the Federal University of Alagoas and also in the private University Centers these same indexes that are also repeated in the Federal University of Alagoas and also in the private University Centers, proven by my experience, hence breaking the paradigm that the discipline of differential and integral calculus is not a “bogeyman”.

So I propose in this research a reflection on the current teaching and learning model for the training of future exact science students and identifying some of the bottlenecks and bringing possible solutions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No remonte da história da Educação Brasileira, o ensino da Matemática é norteado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PNC's) (BRASIL, 2000), onde vem sofrendo significativas alterações tomando como base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, Lei nº 9394/1996 e suas alterações),e atualmente a proposta didático-pedagógica da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois busca promover uma educação de qualidade com equidade.

Com uma Base Nacional Comum Curricular constituída e desenvolvida a partir de critérios claros e com o objetivo de formar estudantes com conhecimentos e habilidades essenciais para o seu desenvolvimento na sociedade do século XXI, ela poderá: 1. Impulsionar a qualidade da educação para todos e favorecer que cada aluno saia da escola apto a concretizar seu projeto de vida (na faculdade, no trabalho etc.) e 2. Formar os cidadãos que contribuirão ativamente para o desenvolvimento da sociedade (BNCC, 2018).

Com isso, a (LDB) na qual define e regulariza o sistema educacional brasileiro, de acordo com o que preconiza os princípios presentes na Constituição, considera o Ensino Médio, em seus três últimos anos, como última etapa da Educação Básica, que antecede a formação do sujeito ativo (o aluno) neste processo de ensino-aprendizagem estar preparado em caráter formativo a ingressar no mercado de trabalho e no Ensino Superior.

Conforme Freitas, (2021), entre estes documentos citados acima, se faz necessário destacar a importância das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCN), que tem a função de organizar o currículo das disciplinas, o que inclui a Matemática, assim como a escola precisa organizar e direcionar seu trabalho pedagógico, vistos por meio do Projeto Político-Pedagógico (PPP) da instituição, onde busca sempre de forma crítico-reflexiva a discussão pautada na resolução de problemas escolares, tendo em vista a intenção na busca de soluções e melhorias, através de ações colaborativas com participação dos membros da escola e sociedade civil.

Diante disso, vale considerar que no Ensino Médio, o ensino de matemática pode ser trabalhado de forma a dar maior subsídio para os alunos que objetivam ingressar no

Ensino Superior, principalmente, no que concerne aos cursos de exatas e ciências da Natureza.

Cabe à Matemática do Ensino Médio, apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo, inclusive no ensino superior. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliarem no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento (BRASIL, 2000).

Um dos maiores enfrentamentos destes alunos ao concluírem o Ensino Médio e transitarem para o Ensino Superior, quanto suas escolhas na área de exatas são os estudos específicos de Cálculo Diferencial ou Pré-cálculo que trata sobre Limites e Derivadas, ocasionando altos índices de reprovação, dificuldades e desânimo e muitas vezes acarretam na desistência do curso.

Um bom exemplo desta situação é o que expõe (ROSA; ALVARENGA; SANTOS, 2019), acerca das estatísticas dos cursos de exatas, as autores ressaltam que no segundo semestre de 2016, o Instituto de Matemática da Universidade Federal de Goiás, ofertou dez (10) turmas com a disciplina de Cálculo I, onde atenderam quatrocentos e noventa e quatro (494) alunos, regularmente matriculados em onze (11) cursos de graduação, na área de exatas, destes duzentos e setenta e seis (276) foram reprovados, o que representa estatisticamente (56%) no índice de reprovação e duzentos e dezoito (218) foram aprovados, correspondendo a (48%).

Frente a isto, entre outros estudos que analisam estes índices de reprovação no ensino de matemática dos alunos ao ingressarem no Ensino Superior, que se faz pertinente a adoção da disciplina de Pré-cálculo ainda no Ensino Médio, como uma intervenção curricular, onde busca o conhecimento sobre o conceito e aplicabilidade do Cálculo, através de Limites e Derivadas.

Essa proposta, seja em aulas regulares ou em oferta de disciplina eletivas, conforme busca à proposta do Novo Ensino Médio, que visa com a oferta de disciplinas eletivas, novidades no âmbito escolar nas quais contribui para diversificar as experiências escolares, abrindo espaço de diálogos e tempo, para que os jovens possam se aprofundar nas áreas de conhecimento que mais despertam o seu interesse, e melhor prepará-los para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e por conseguinte sua inserção no ensino superior.

Nessa perspectiva um estudante que conheça as principais ideias do cálculo, e que saiba usá-las para, por exemplo, esboçar o gráfico de funções polinomiais, estimula-se para estudar muitas ideias interessantes, tais como: a função logarítmica, a função exponencial, as séries infinitas, as equações diferenciais mais simples, fundamentando e desenvolvendo uma base sólida na educação matemática.

Em face do exposto que, a presente pesquisa, tem como objetivo geral: apresentar a importância da disciplina eletiva de pré-cálculo no ensino médio, com ênfase em limites e derivadas de funções polinomiais.

Dentre os objetivos específicos foram delineados quatro, a seguir:

- ✓ Evidenciar a relevância dos conhecimentos matemáticos, a partir das abordagens teóricas nas áreas da Ciências Exatas;
- ✓ Propor a inserção dos conteúdos de Pré-cálculo como intervenção curricular em disciplinas eletivas no Ensino Médio;
- ✓ Empregar conteúdos estudados e apontar a relação com o estudo de Limite e Derivadas, em funções polinomiais;
- ✓ Estimular o estudo de Pré-cálculo, de forma prévia aos ingressantes em cursos superiores na área de exatas e ciências da natureza.

Dentre a estrutura desta pesquisa, dispõe do primeiro capítulo introdutório, o capítulo II abordagens teóricas, no decorrer da história, e conceituações acerca do cálculo diferencial, além da importância de sua aplicabilidade em estudos voltados para o ensino médio. Já no terceiro capítulo norteia-se, por meio do delineamento da pesquisa, cuja natureza é qualitativa e suas etapas. O quarto capítulo refere-se aos resultados dos estudos voltados as funções polinomiais e como podemos utilizá-la no ensino médio, e por fim a conclusão deste trabalho acadêmico-científico, e as referências bibliográficas.

2. BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO E SUA RELEVÂNCIA EM ESTUDOS DE LIMITES E DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

Este capítulo refere-se às abordagens teóricas acerca do desenvolvimento do cálculo ao longo da história que remontam e reforçam o processo de ensino-aprendizagem na educação, principalmente no Ensino Médio, alémda importância do pré-cálculo no ensino de matemática, na Educação Básica.

2.1. Entendendo o estudo do cálculo – conhecimentos antigos e atuais

No decorrer da História da Humanidade, a origem da matemática se fez como uma necessidade básica do homem desde da Pré-História, até os dias atuais transformando-se e adaptando-se, em decorrência da evolução da civilização, o período histórico e as demandas naturais do cotidiano.

Com isso, no decorrer da história, o estudo o cálculo foi tecido crucial no desenvolvimento desta ciência, pois consiste numa ferramenta matemática, com expressão simplificada, adotada pelos matemáticos, ao analisar de forma qualitativa e quantitativa, variações que ocorrem em fenômenos que abrigam uma ou mais componentes de natureza essencialmente física, na solução de problemas (Anton, 1992).

As primeiras ideias acerca do Cálculo surgiram na Grécia Antiga, onde a Matemática teve seu momento áureo, entre o período de 1.100 a.C. e 400 d. C. Grandes nomes surgiram, tais como: Tales de Mileto, Pitágoras, Arquimedes, Platão, Aristóteles e Euclides. Estes, por sua vez fortaleceram o estudo da matemática, onde a mesma passou a ser vista como uma ciência, a partir dos séculos VI e V a.C. na Grécia, não só para as necessidades básicas, mas como conhecimento científico, fortalecendo a importância do estudo do cálculo.

Mas, foi no período da Idade Moderna, no Século XVII, que alguns questionamentos foram levantados sobre a função do cálculo, onde tinha por objetivo resolver quatro classes principais de problemas científicos e matemáticos daquela época: Determinação da reta tangente a uma curva, em um dado ponto desta; Determinação do comprimento de uma curva, da área de uma região e do volume de um sólido; Determinação dos valores máximo e mínimo de uma quantidade -- por exemplo, as distâncias máxima e mínima de um corpo celeste a outro, ou qual ângulo de lançamento acomoda ao alcance máximo a um projétil; Conhecendo e estruturando uma fórmula que descreva distância percorrida por um corpo, em um intervalo qualquer de tempo, para determinar velocidade e a aceleração dele, em cada instante ao longo de tal intervalo. Assim, de forma recíproca, inicialmente a partir de uma fórmula para a velocidade ou para a aceleração de um corpo, em qualquer instante, ao longo de um dado intervalo de tempo, determinar a distância percorrida pelo corpo em tal intervalo (Anton, 1992).

Remontando a história, no final do Século XVIII, com o início da Revolução Francesa, o estudo e aplicabilidade do cálculo foi fortalecida, por meio do Exército Francês, no qual era o único detentor de métodos de cálculo nos quais determinavam as melhores posições para escaparem do fogo emitido pela artilharia inimiga.

Isto, só foi possível, devido à luz destes esforços para a contemplação do Cálculo, tido por alguns estudiosos como invenção ou descoberta, onde deve ser atribuído a *Isaac Newton* e *GottfriedWihelm Leibniz*, com base nos estudos realizados por *Isaac Barrow*. O primeiro estudioso citado acima propôs o estudo do Cálculo Infinitesimal, comumente conhecido como cálculo diferencial e integral ou simplesmente cálculo. Este por sua vez, consiste no ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria.

Onde dedica-se ao estudo de taxas de variação de grandezas, a exemplo, a inclinação de uma reta, e acumulação de quantidades, como volume de um sólido. Portanto, a existência de movimento ou crescimento em forças variáveis permitem que ajam aceleração.

A contribuição de *Leibniz* foi no fortalecimento do estudo na parte do Cálculo Diferencial (FREITAS, 2021). As propostas de *Newton* e *Leibniz,* potencializam o estudo do cálculo e sua definição, pois é a ferramenta matemática empregada, aplicada em várias áreas das ciências exatas e da natureza e tem inúmeras aplicações com reconhecimento científico (EVES, 2011).

Para aplicabilidade do cálculo, inicialmente deve-se entender que este tem a princípio três operações-base, ou seja, possui áreas iniciais, tais como:

cálculo de limites, cálculo de derivadas de funções, a exemplo, as polinomiais, e a integral de diferenciais. O cálculo diferencial surgiu do problema evidenciado da tangente, se baseia no quociente das variações para definir a derivada de uma função.

Neste quociente denomina-se de taxa de variação média da função de um determinado intervalo, em contrapartida o cálculo integral originou-se de um problema aparentemente não relacionado, consiste no problema da área, onde consideram-se somas nas quais cada parcela dá origem a um produto do valor de uma função pela variação infinitesimal da variável independente.

Para tal, tanto no cálculo diferencial quanto no cálculo integral, o conceito a ser trabalhado de limite é adotado como forma de assegurar quer as variações infinitesimais das duas grandezas sejam muito pequenas, tão pequenas quanto possam ser. Então, é nesse sentido que tomar-se o limite em que a variação da variável independente tende a zero (MARQUES, 2014).

Freitas (2021, p. 15) aborda que, “as noções de limite, por exemplo, por muitos séculos, foram confundidas com ideias vagas relativas ao infinito, números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos. O termo limite do sentido mais moderno é produto do século XVIII e XIX, logo a definição moderna tem menos de 150 anos”.

A noção de limite, consoante a Marques (2014) revela que:

> O conceito de limite ocupa um papel central no Cálculo Infinitesimal. Isso ocorre porque, como se verá a seguir, no Cálculo Diferencial, a derivada de uma função, de acordo com a definição de Cauchy, é introduzida por meio de um processo limite e, no Cálculo Integral, para introduzir a integral de uma determinada função num dado intervalo, considera-se o limite de uma soma de Riemann. Limite é, portanto, um conceito básico do Cálculo e da Análise Matemática (p. 2015).

Na perspectiva de Fleming; Gonçalves, (2006, p. 66) traça-se à definição para limite, como exemplifica à **(Figura 1)**:

Figura 1. Expressão do cálculo para definição de limite.

Definição 2.1. Seja $f(x)$ definida no intervalo aberto I, contendo α, exceto, possivelmente, no próprio α. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de α é L e escrevemos:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$$

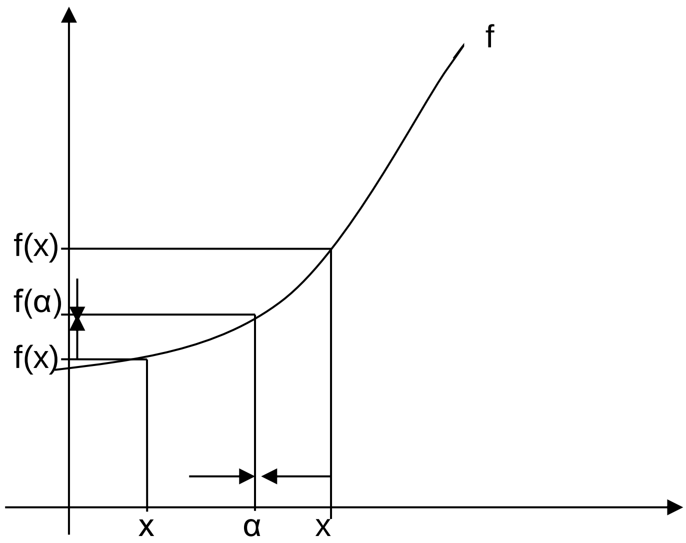
Fonte: FLEMING; GONÇALVES, (2006, p. 66); FREITAS, (2021, p. 15).

Ao tratar do conteúdo de Cálculo Diferencial, dispõe de estudos sobre Limites e Derivadas, pois antecedem os conteúdos de Conjuntos e Funções, sendo uma breve introdução para o assunto sobre o cálculo em si.

A seguir, vamos definir limite de uma função real de uma variável real, y=f(x), para x tendendo a um número α, somente no caso de existir uma vizinhança reduzida de α contida no domínio da f. Podemos definir, também , limite para função racional ou função de variável inteira, porém não estudaremos esse tipo de limite nesse curso. Assim definimos como limite:

[Seja f uma função real de uma variável real e seja α ϵ R tal que existe pelo menos uma vizinhança reduzida de α contida de f.]

Observemos esse gráfico:



uma função f é dita contínua em um ponto α, do seu domínio se o gráfico dela não apresenta saltos nesse ponto α.

Uma aplicação:

1) Se injetarmos ar, ininterruptamente, em um balão de borracha, em determinado momento, ele vai estourar. Isso porque existe o **LIMITE** de elasticidade da borracha.

2) Para que um objeto boie na água, há um **LIMITE MÁXIMO** para a sua densidade. Ultrapassando esse limite, o objeto afunda.

3) Para que um foguete entre em órbita, há um **LIMITE MÍNIMO** de combustível necessário.

Se f é contínua em a, então o limite de x tendendo a a, da função $f(x)$ é igual a $f(a)$. Na notação usual, escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Propriedades: Se k,a,L1,L2 São constantes reais E as funções f e g são tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

Valem as seguintes Propriedades:

P1) $\lim_{x \to a} k = k$

P2) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \quad = \quad \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

P3) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] \quad = \quad \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$

P4) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) * g(x)] \quad = \lim\limits_{x \to a} f(x) * \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 * L_2$

P5) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}, onde\ L_2 \# 0.$

P6) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$, para qualquer número natural não nulo n.

P7) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}, \left| \begin{array}{ll} n\, \epsilon \overset{\times}{\mathbb{N}}, e & \lim\limits_{x \to a} f(x) = L, com\ L \ \geq 0 \\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}, n \text{ é } ímpar\ e & \lim\limits_{x \to a} f(x) = L\ com\ L \angle 0 \end{array} \right|$

EXEMPLOS:

1) Calcule os limites abaixo;

a- $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 3x + 1)$

Pela definição de função contínua, f(x)=3x²-3x+1, é um polinômio, logo é uma função contínua, temos

Se uma função f é contínua e o número α pertence ao domínio de f, então, o $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ é o valor numérico da função f para x igual a α.

De acordo com esse fato vamos calcular o limite.

$\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 3x + \lim\limits_{x \to 2} 1$ = 3 . 2² - 3 . 2 + 1 = 3 . 4 – 6 + 1 = 13 – 6 = 7

b- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{2x-1}$

A função g(x)=$\frac{1}{2x-1}$ é contínua, pois é uma razão de funções continuas, nesse caso a continuidade se dá em $\mathbb{R} - \left(\frac{1}{2}\right)$. Logo, como 4 pertence ao domínio de g, o $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{2x-1}$ é um valor numérico de g para x = 4, isto é:

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2\,.\,4-1} = \frac{1}{7}$$

c- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

A função h(x)=$\frac{x^2-16}{x-4}$ não está definida em 4, pois o valor numérico h(4)=$\frac{4^2-16}{4-4} = \frac{16-16}{4-4} = \frac{0}{0}$ NÃO EXISTE.

Assim, para calcularmos o $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$, vamos substituir a função " h " por uma função " *i* ", continua em 4, tal que **exista alguma** vizinhança reduzida de 4, de modo que, para todo x dessa vizinhança, tenhamos h(x) = *i*(x).

uma função “ *i* “ que satisfaz essa condição é obtida simplificando-se a fração $\frac{x^2-16}{x-4}$, observe:

h(x) = $\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}$ ⇔ h(x) = x+4, com D(h) = ℝ - {4}, e *i*(x) = x+4, com D(i) = ℝ, tem o mesmo limite para x tendendo a 4, pois existe vizinhança satisfaz a condição h(x) = *i*(x).além disso a função *i* é continua em 4. Assim, concluímos:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4+4 = 8$$

EXEMPLO PRÁTICO:

Supondo que uma bola seja solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Exncontre a velocidade da bola após 5 segundos.

SOLUÇÃO: Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. (esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar.) Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo em um décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5{,}1$:

$$velocidade\ média = \frac{mudança\ de\ posição}{tempo\ decorrido}$$

$$= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1}$$

$$= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49\ m/s$$

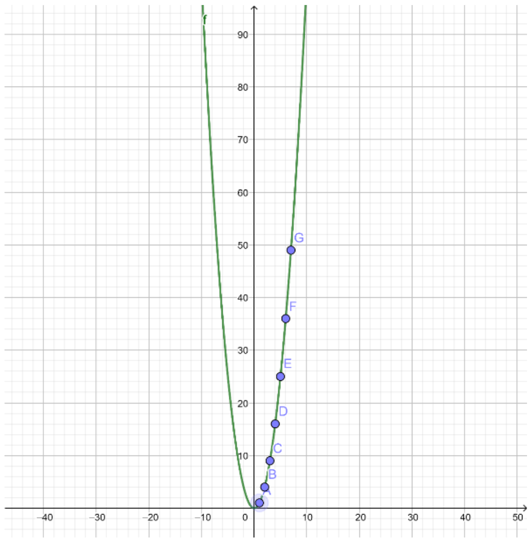
A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m / s)
$5 \ll t \ll 6$	$53,9$
$5 \ll t \ll 5,1$	$49,49$
$5 \ll t \ll 5,05$	$49,245$
$5 \ll t \ll 5,01$	$49,049$
$5 \ll t \ll 5,001$	$49,0049$

Observe que nesse exemplo a equação de Galileu é uma equação polinomial de 2° grau do tipo $f(x) = x^2$, quando damos valor arbitrariamente teremos um resultado na expressão, observe a tabela abaixo.

x	$f(x) = x^2$	Resultado	PONTO
1	1^2	1	A
2	2^2	4	B
3	3^2	9	C
4	4^2	16	D
5	5^2	25	E
6	6^2	36	F
7	7^2	49	G

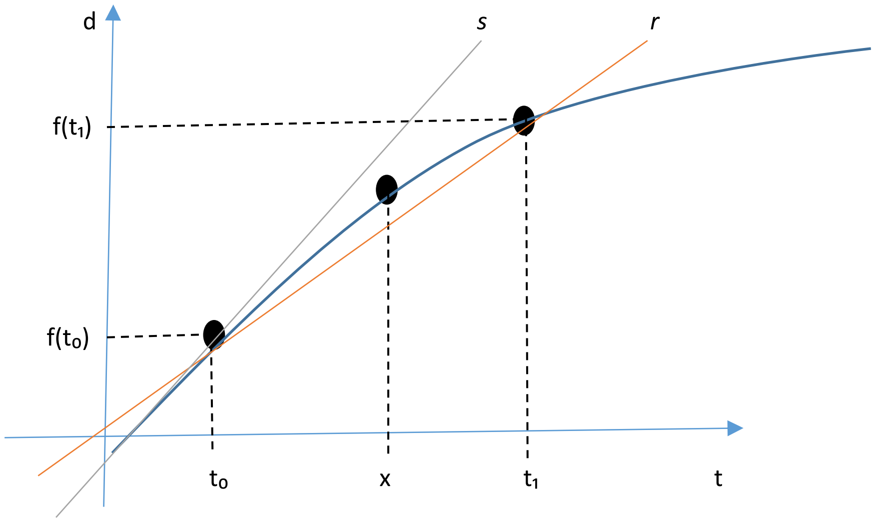
Agora colocamos os pontos obtidos do resultado no gráfico da função $f(x) = x^2$



DERIVADAS:

A velocidade de um automóvel em movimento registra a velocidade instantânea do veículo, isto é, ao olharmos para o velocímetro, o que lemos é a velocidade do veículo no instante da observação.

O gráfico f abaixo representa a distância d percorrida pelo automóvel em função do tempo t, então o coeficiente angular da reta r, que é dado por $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$, representa a velocidade média do veículo no intervalo de tempo de t_0 a t_1. O coeficiente angular *m* da reta *s*, tangente ao gráfico no ponto de abscissa t_0 , representa a velocidade instantânea do veículo no instante t_0 . Esse valor *m* é exatamente o que lemos no velocímetro no instante t_0



O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto é chamado de **DERIVADA** da função nesse ponto, e será o objeto de estudo nesse curso.

A FUNÇÃO DERIVADA

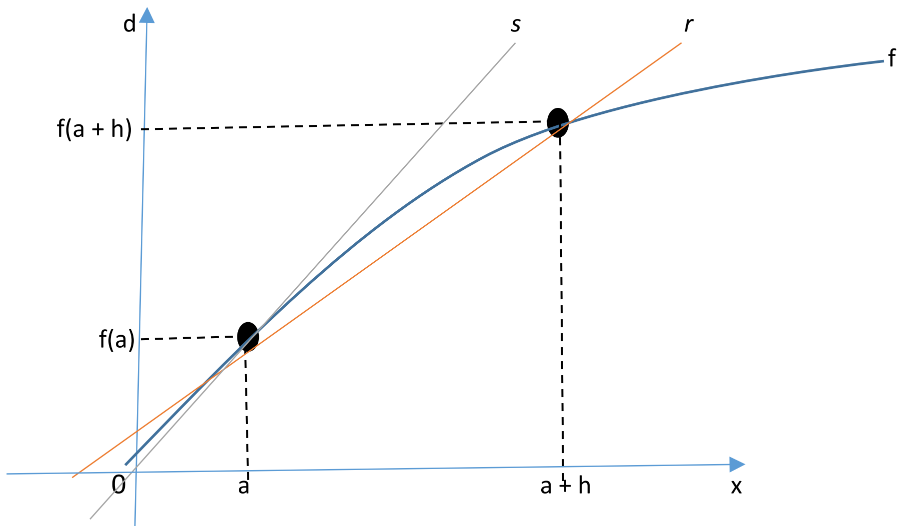
Vimos que se existe a reta tangente ao gráfico de uma função y = f(x) em um ponto da abscissa α, o coeficiente angular dessa reta é a derivada de f no ponto de abscissa α e é calculada por:

$$F'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad (I)$$

Essa derivada pode ser representada, de forma equivalente, fazendo-se a seguinte mudança de variável: x –α = h, portanto, x = α + h. É importante observar que, como x tende a α, concluímos que h tende a zero, pois x – α = h. Assim, podemos escrever:

$$F'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \quad (II)$$

Interpretando graficamente esse limite, temos:



Note que, se h tende a zero, a reta secante s tende à reta tangente r. Usaremos o LIMITE (II) para definir *função derivada*

Seja a função f: A→ℝ, com A C ℝ, seja E o subconjunto de A cujos elementos são todos os valores x tal que existe F'(x).

Chama-se de *função derivada de f* a função F': E→ℝ tal que:

$$F'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Em outras palavras, a função derivada é aquela que associa cada x do conjunto E à derivada f'(x).

REGRAS DE DRIVAÇÃO:

1/ derivada de uma função constante;

Sendo k uma constante real, temos:

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

2/ derivada da função potência;

Sendo n um número natural não nulo, temos:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

3/ derivada da soma;

Sejam $u\ e\ v$ funções deriváveis em um intervalo aberto I .Para todo $x, com\ x\ \in I,$ temos: $$f(x) = u(x) + v(x) \to f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

4/ derivada da diferença;

Sejam $u\ e\ v$ funções deriváveis em um intervalo aberto I .Para todo $x, com\ x\ \in I,$ temos: $$f(x) = u(x) - v(x) \to f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

5/ derivada do produto;

Sejam $u\ e\ v$ funções deriváveis em um intervalo aberto I .Para todo $x, com\ x\ \in I,$ temos: $$f(x) = u(x) * v(x) \to f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

6/ derivada do quociente;

Sejam $u\ e\ v$ funções deriváveis em um intervalo aberto$I$ .Para todo $x, com\ x\ \in I\ e\ v(x)\ \neq 0,$ temos: $$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \to f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{[v(x)]^2}$$

EXEMPLOS:

1- Seja f: ℝ→ℝ, com f(x) = x^2, obter a função derivada de f.

Resolução

F'(x)=

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

Note, portanto, que existe a derivada de f para qualquer número real x. Assim, a função derivada de f é a função F': ℝ→ℝ, com F'(x) = 2x.

Observe, que se usamos as regras de derivação a solução é mais direta.

1- Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f(x) = x^2, obter a função derivada de f.

Solução: usando a regra da potência, $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

f(x) = x^2 = 2x

2.2. A importância do pré-cálculo em estudos matemáticos para o Ensino Médio

O pré-cálculo, enquanto disciplina inclui conceitos e aplicações de álgebra e trigonometria, em determinados níveis que visam a preparação dos alunos (sujeitos ativos), no processo de ensino-aprendizagem, para a preparação destes nos estudos de cálculo, onde exige uma preparação inicial, para auxiliar os conteúdos trabalhados ao longo da disciplina.

No entanto, as instituições de ensino em sua maioria diferenciam entre álgebra e trigonometria como duas partes separadas ensinadas no curso, a exemplo, de Matemática.

Nesse sentido, conforme expõe (Andrade; Esquincalha; Oliveira, 2019):

> Vale ressaltar que entendemos aqui que o Pré-Cálculo não revisa toda Matemática Escolar, pois foca nos conteúdos algébricos. Compreendemos que no espaço-tempo da disciplina, tal pretensão seria inviável, o que justifica a escolha pelas funções, por ser um eixo estruturante da Matemática. Assim, a disciplina pode ajudar a suavizar a transição do Ensino médio para o Superior em relação ao salto nos conteúdos e nos padrões de rigor exigidos e, em conjunto com outras disciplinas introdutórias como Geometria Analítica e Geometria Euclidiana, quando presentes na estrutura curricular, ela pode favorecer o estabelecimento de uma base para as disciplinas do núcleo específico que [...] irão estudar ao longo do curso (p. 144).

3. DELINEAMENTO DA PESQUISA: ASPECTOS METODOLÓGICOS

O referido capítulo consiste no delineamento da pesquisa, de que forma está sendo estruturada e construída, o modo como se pensa o objeto de estudo. Sendo contemplada nesta, a natureza qualitativa, além das fases que compõem o seu desenvolvimento.

3.1. Natureza da Pesquisa

A vigente pesquisa é de natureza qualitativa, na análise qualitativa do objeto de estudo é menos formal do que a análise quantitativa, pois nesta última seus passos podem ser definidos de maneira relativamente simples.

Uma pesquisa de ordem qualitativa depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação, e o que se pretende analisar.

Com isso, podemos definir este processo como uma sequência de atividades, com a categorização desses dados, sua interpretação e a redação do relatório, ou seja, da análise dos dados e sua discussão para proferir os resultados (GIL, 2008).

Assim, a pesquisa qualitativa, na perspectiva deste estudo, busca compreender, analisar e produzir reflexões e propostas, por meio de análise documental, que possam contribuir para a inserção da disciplina de Pré-cálculo no Ensino Médio, a fim de subsidiar a educação matemática nas escolas.

3.2. Fases da Pesquisa

A pesquisa tem como base a proposta metodológica de Marconi e Lakatos (2003), para pesquisa documental, onde utiliza dados primários, sendo eles os documentos oficiais escritos para os cursos de licenciatura em matemática, Projetos Políticos Pedagógicos das escolas, Base Nacional Comum Curricular, com habilidades e competências para o ensino de matemática, na perspectiva do ensino médio, entre outros estão foram coletadas para melhor atender ao interesse dos objetivos delineados nesta pesquisa, e com isso compreender o objeto de investigação, na área de estudo, por meio dos resultados constatados.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O Rendimento insatisfatório dos alunos nos cursos de CDI, manifesto em reprovação, é uma realidade em diversas instituições de ensino, tanto no Brasil como no exterior. O estudo de Baruti (1999) mostra que, na Universidade de São Paulo, de 1990 a 1995, a média de reprovação em CDI foi de 43,8%. Do mesmo modo, Rezende (2003) revela que, nas universidades do Rio de Janeiro, a média de reprovação na mesma disciplina variou de 45% a 95%, de acordo com o curso para o qual era oferecida. Além desses, outros autores (TALL, 1993; FRAGOSO, 2011; DONEL, 2015; GAZELLA, 2011, RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2014; e mais) já indicavam que a reprovação nessa disciplina é elevada.

Na UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÂNIA (UFG), na regional de Goiânia, em abril de 2016, foram ofertadas pelo IME/UFG as seguintes turmas de CDI, perfazendo um total de 51, atendendo a 2.090 alunos. Portanto, cerca de 10% dos alunos da universidade cursaram essas disciplinas.

Tabela 1. Turmas de Cálculo Diferencial e Integral ofertadas pelo IME/UFG – 2016/02[1]

Denominação	Quantidade de turmas
Cálculo 1	1
Cálculo 1ª	10
Cálculo 1B	4
Cálculo 1C	4
Cálculo 2	1
Cálculo 2ª	8
Cálculo 2B	6
Cálculo 3ª	6

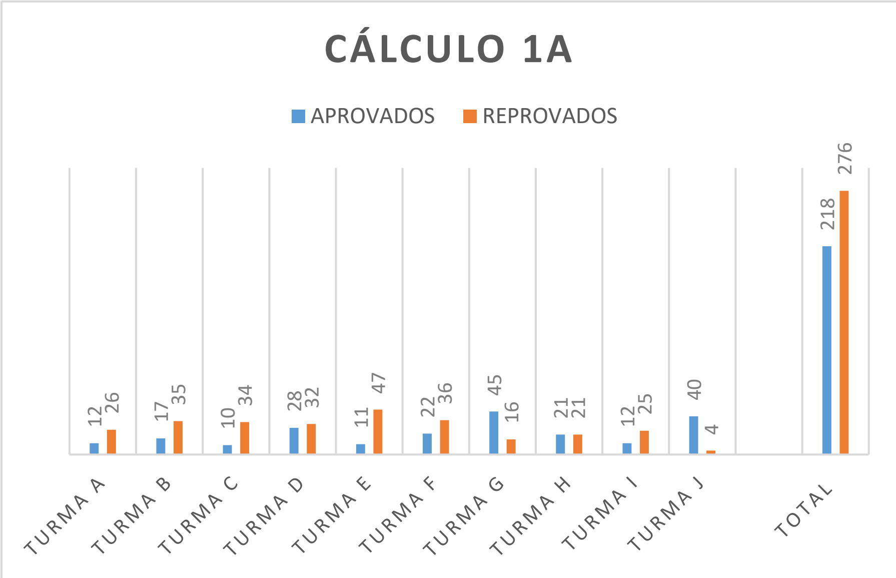
Cálculo 3B	2
Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica II	2
Cálculo I	3
Cálculo II	1
Cálculo para Engenharia Elétrica 1	1
Cálculo para Engenharia Elétrica 2	1
Cálculo para Engenharia Elétrica 1	1
TOTAL	**51**

Fonte: Os autores.

Do total de alunos que cursaram essas disciplinas, 1.163 (55,65%) foram reprovados e 927 (44,34%) aprovados. Estudos diversos abordam as dificuldades de aprendizado em CDI, e, a respeito das divergências quanto à natureza desses obstáculos, os relacionam com a alta reprovação. Esse quadro é tão comum historicamente, e tão recorrente nas instituições de educação superior, no geral, que os alunos acabam acreditando ser normal reprovar na referida disciplina. E, do mesmo modo, os professores acabam aceitando a elevada reprovação como algo natural (OLIVEIRA: RAAD, 2012).

Tratando especificamente da disciplina de Cálculo 1ª, no segundo semestre de 2016, o IME/UFG ofertou dez turmas, atendendo a 494 alunos regularmente matriculados em onze cursos de graduação, quais sejam: Engenharia Ambiental e Sanitária, Engenharia Civil, Engenharia da Computação, Engenharia de Transportes, Engenharia Física, Engenharia Química, Física (licenciatura e bacharelado), Física Médica, Geologia, Matemática (licenciatura e bacharelado) e Química (licenciatura e bacharelado). Desse grupo, 276 foram reprovados (56%) e 218 foram aprovados (44%).

Gráfico 1. Aprovados e reprovados em Cálculo 1A - 2016/02



Pelo gráfico 1, constata-se que o número de reprovação é maior que o número de aprovação ocorreu em sete das dez turmas pesquisadas, variando de 53,3% a 81,1%. Apenas em duas turmas (G e J) a aprovação foi maior que a reprovação, atingindo 90,9% e 73,8%, e em uma turma (H) a quantidade de aprovados e reprovados foi a mesma. No período em quentão, o percentual médio de aprovação e reprovados foi, respectivamente, de 56,24% e 43,76%. Portanto, analisando as turmas, especificamente, e os dados gerais, tem se um quadro de reprovação bastante expressivo.

Na UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – Campus Cuité, os dados foram extraídos pelos institutos de Física e Matemática, cujo os dados tratam do curso de CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I entre os semestres de 2016.1 e 2017.2.

Gráfico 2. Dados da disciplina de cálculo diferencial e integral I do semestre 2016.1 referente a tabela 02.

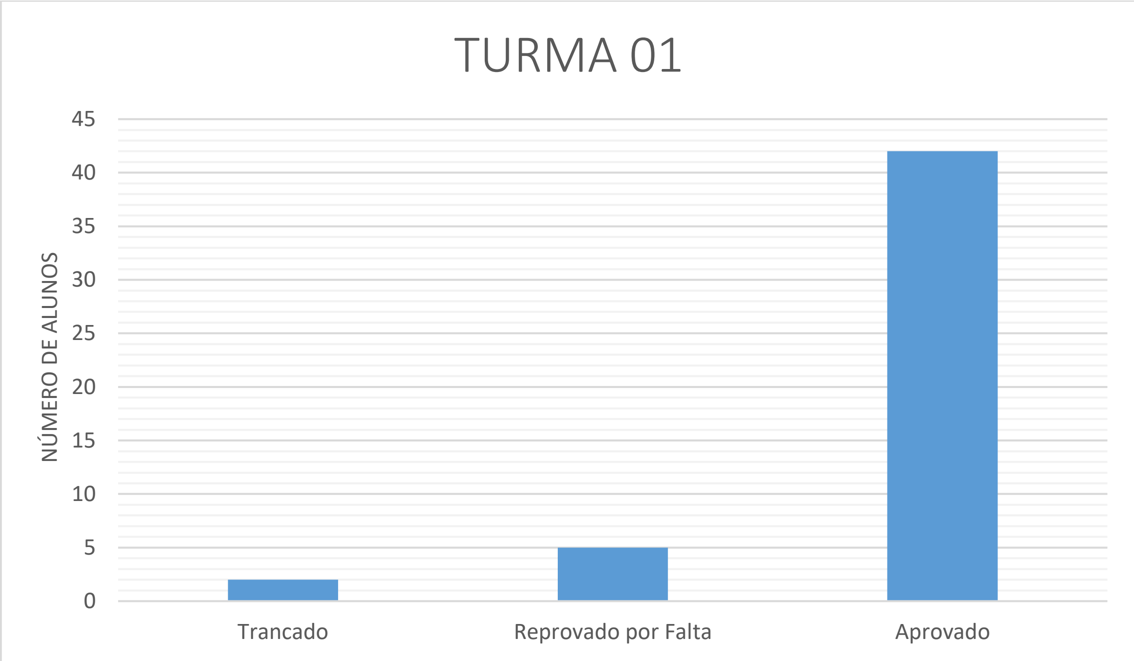


Tabela 2.

Situação	Contagem de Situação	%
Aprovado	42	85,7
Reprovado por Falta	5	10,2
Trancado	2	4,1
Total	49	

Fonte: Os autores

De acordo com os dados da tabela 2. Observamos que no total de 49 alunos que correspondem a 100% da turma de cálculo I no período de 2016.1 (turma 01), que o índice de reprovação foi de 10,2%, trancamentos de apenas 4,1% e por fim, o índice de aprovados correspondeu a 87,7% no qual se refere a 42 alunos.

Gráfico 3. Dados da disciplina de cálculo diferencial e integral I do semestre 2016.1 referente a tabela 03

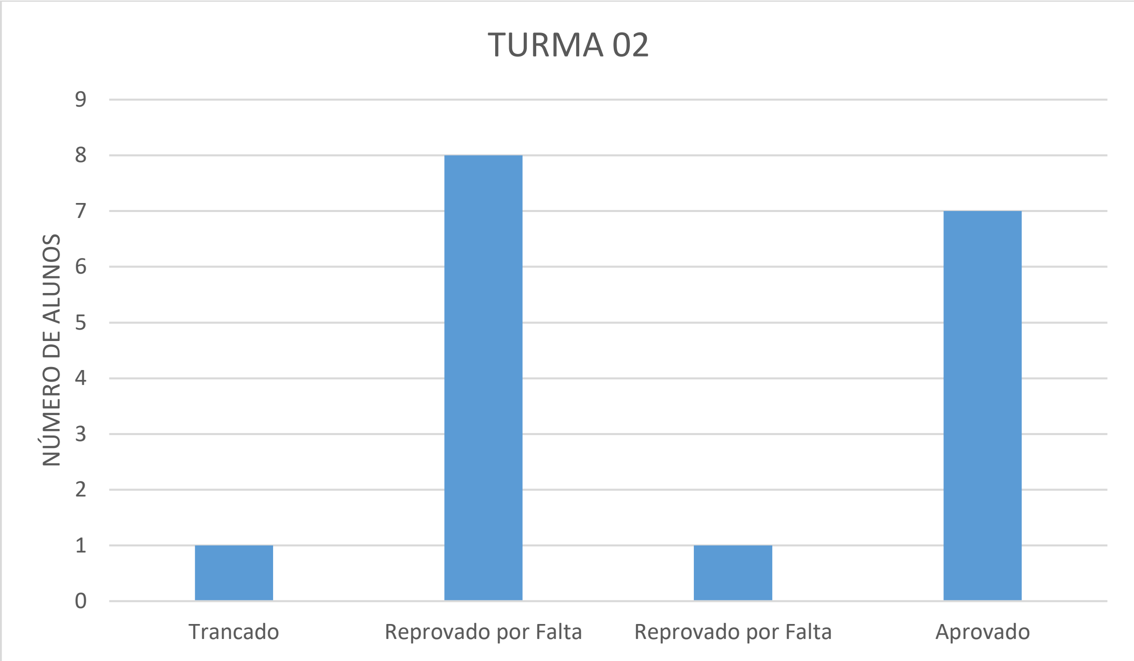


Tabela 03.

Situação	Contagem de Situação	%
Aprovado	7	41,2
Reprovado	1	5,9
Reprovado por Falta	8	47,1
Trancado	1	5,9
Total	17	

Fonte: Os autores.

Na tabela 03, corresponde a turma 02 do período 2016.1, observa-se que num total de 17 alunos que corresponde a 100% de toda a turma, 5,9% foram reprovados, 5,9% trancados, reprovado por falta 47,1% (oito alunos) e um total de aprovação foi de 47,1% (sete alunos)

CONCLUSÃO

De acordo com dados, temos alguns resultados de quanto a disciplina de cálculo diferencial e integral I de algumas universidades é muito desafiador para os alunos das áreas de exatas e afins, seja ela com os altos índices de reprovação no final do semestre ou reprovação por falta ou até mesmo por desistência, ao se deparar com cálculos e teorias nunca vistos. Então, vejo como uma grande oportunidade dos alunos que querem ter em vista cursar algum curso de exatas, seja qual curso for, a noção, ou seja, um breve conhecimento do que irá estudar futuramente, tendo uma visão prática daquilo que se estuda, irá torná-la menos abstrata e menos impactante. Já metodologia aplicada como “mecânica” de alguns professores, tal seja, metodologia de fazer somente os alunos resolver questões de livros de CÁLCULOS, porém, mesmo mecânica ou não a forma com que o professor conduz o cálculo o aluno tendo um conhecimento prévio, mesmo que somente função polinomial, uma das inúmeras funções contínuas, o mesmo terá entendimento de possíveis erros na execução de seus desempenhos. Já que as disciplinas de cálculo são semestrais, ou seja, na teoria seis meses de curso mais na prática são menos de cinco meses com possíveis feriados e outros percalços ao longo do semestre e ainda quatro aulas semanais, para um aluno que não tem noção do que é limites e derivadas de funções. Com essa forma de antecipar essa visão de estudos desses conteúdos de limites e derivadas, aplicadas a situações do cotidiano os desafios nos cursos terá já em seus conhecimentos uma boa bagagem.

Acredito também que o uso de ferramentas tecnológicas tais como: “GEOGEBRA”, como exemplo trará uma visão mais realista e objetiva no que acontece com cada limite da função e no ponto de derivação, como foi feito por alguns professores em alguns conteúdos meu curso de cálculo I foi bem mais compreendido por mim na Universidade Federal de Alagoas.

Mostrar em vídeoaulas situações do cotidiano e a história do curso ao longo do tempo e sua importância traz uma linguagem mais acessível e de boa compreensão com exemplos e desafios para com que o aluno tenha a noção da importância do curso a que ele se prepara e onde será aplicado no seu cotidiano.

Finalizando, trago essas questões e possíveis soluções para esse curso que é de tão grande importância para solucionar um problema que vejo no curso de cálculo I e vivi essas dificuldades, óbvio que não podemos desconsiderar a falta de empenho de alguns alunos na disciplina, isso faz com que o curso se torne desgastante e prolongado. A dedicação dos estudantes é fundamental até mesmo para superar seus próprios limites.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Fabiana; ESQUINCALHA, Agnaldo; OLIVEIRA, Ana Teresa de. O Pré-Cálculo nas licenciaturas em Matemática das instituições públicas do Rio de Janeiro: o prescrito. Santa Maria – RS: **Revista Eletrônica Vidya**, v. 39, n. 1, p. 131-151, jan. / jun., 2019. ISSN: 2176-4603. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2417> Acesso em: 10 de junho de 2022.

ANTON, Howard. **Calculus**. Wiley: New York, 1992.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2000.

_______. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB**. Brasília: Casa Civil. Lei nº 9394/1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 4ª. ed. Campinas: Unicamp, 2011. Disponível em:<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6081521/mod_resource/content/1/%28Saunders%20Series%29%20Domingues%2C%20Hygino%20Hugueros_%20Eves%2C%20Howard%20-%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20hist%C3%B3ria%20da%20matem%C3%A1tica-Editora%20da%20Unicamp%20%282004_2008%29.pdf> Acesso em: 09 de junho de 2022.

FLEMMING, Diva. Marília.; GONÇALVES, Mirian. Buss. **Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração**. 6ª. ed. Florianópolis: Pearson, 2006.

FREITAS, Lesley Carla Leite de. Introduzindo limites e derivadas no Ensino Médio: uma experiência possível. Monteiro – PB: UEPB, **Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura Plena em Matemática.** 39p., 2021. Disponível em:<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/23720> Acesso em: 30 de maio de 2022.

GIL, Antônio. Carlos.**Como elaborar projetos de pesquisa.** Saraiva: São Paulo, 2008.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva. Maria.**Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. - São Paulo: Atlas, 2003.

MARQUES, Gil da Costa. **Fundamentos de Matemática I**. 1ª. ed. – São Paulo: USP/Univesp/Edusp, 2014. Licenciatura em Ciências. Disponível em:<https://docero.com.br/doc/xexv8n0> Acesso em: 16 de junho de 2022.

ROSA, Chaiane de Medeiros; ALVARENGA, Karly Barbosa; SANTOS, Fabiano Fortunato Teixeira dos. Desempenho acadêmico em cálculo diferencial e integral: um Estudo de Caso. Campinas – SP: **Revista Internacional de Educação Superior (RIESup)**, v. 5, p. e019023, 2019. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/riesup/article/view/8653091> Acesso em: 16 de junho de 2022.

NASCIMENTO, Ketly dos Santos; FONSECA, Reinado Freire da; DANTAS, Jessica Samara Costa; SOUSA, Damião Franceilton Marques de. Análise de Índice de Reprovação e Evasão na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da UFCG-Cuité.

PAIVA, Manoel Rodrigues; **Matemática : Paiva** / Manoel Rodrigues Paiva. – 2.ed. – São Paulo: Moderna, 2010.

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart ; [tradução EZ2 Translate]. – São Paulo :
Cengage Learning, 2013.