Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

Denilson Inácio Lopes da Silva

Topologia e Continuidade

Maceió
2021

Denilson Inácio Lopes da Silva

Topologia e Continuidade

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Maceió

2021

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586t Silva, Denilson Inácio Lopes da.
Topologia e continuidade / Denilson Inácio Lopes da Silva. - 2021.
20 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. [20].

1. Topologia. 2. Espaços topológicos. 3. Continuidade. I. Título.

CDU: 517.17

Denilson Inácio Lopes da Silva

Topologia e Continuidade

Trabalho de conclusão de curso aprovado pelo corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
Isnaldo Isaac Barbosa
Data: 29/12/2021 09:04:03-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió
Orientador

Documento assinado digitalmente
DIONE ANDRADE LARA
Data: 29/12/2021 11:16:01-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Dione Andrade Lara
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió

Documento assinado digitalmente
Juliana Roberta Theodoro de Lima
Data: 18/01/2022 11:13:23-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió

Maceió, 23 de dezembro de 2021

"A educação deve possibilitar ao corpo e à alma toda a perfeição e beleza que podem ter."

Platão

Agradecimentos

Eu não poderia começar estes agradecimentos sem primeiro começar pelos Theoi, pois certamente sem a ajuda e a presença deles em minha vida eu não poderia ser metade da pessoa que sou hoje. Agradeço também aos meus pais que, apesar de não dividirem comigo o sangue que corre em suas veias, me fazem ver que o amor é muito maior que laços consanguíneos. Agradeço a minha família que sempre me acolheu e me apoiou em minhas decisões, principalmente ao meu tio Alberto que foi o meu primeiro exemplo do que é ser um bom professor. Não menos importante, gostaria de agradecer ao "Leila", pois eles sempre conseguem fazer de um dia nublado uma manhã de sol. Falando em amigos, não poderia deixar de agradecer as minhas parceiras de Overwatch Nyele e Franque por estarem presentes nos momentos que mais precisei. Deixo meus agradecimentos ao "Sem mais, nem menos" por serem uma parte importante da minha vida acadêmica, em especial a Professora Viviane de Olivera. Por fim, agradeço aos meus amigos de graduação sejam eles alunos ou professores. Principalmente, Jussara, Sônia e Tatiane que, durante todos esses anos dividiram felicidades e mágoas comigo. Aos professores Isnaldo Isaac e Juliana Theodoro a minha gratidão será eterna pelo seu carinho e cuidado comigo.

Resumo

Neste trabalho faremos uma introdução ao estudo da Topologia Geral. Além disso, discorreremos acerca do conceito de continuidade de espaços topológicos. Por fim, compararemos alguns conceitos de continuidade discutindo suas semelhanças.

Palavras chave: **Topologia, Espaços Topologicos e Continuidade.**

Abstract

In this work, we will introduce the study of General Topology. Furthermore, we will discuss the concept of continuity of topological spaces. Finally, we will compare some continuity concepts by discussing their similarities.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Hoje sabemos que a noção de continuidade apareceu pela primeira vez em meados do século XVIII, numa discussão entre Euler (1703-1783) e d'Alembert (1717-1783). A discussão girava em torno de um problema matemático sobre as vibrações de uma corda esticada, como a corda de um violino. Eles não se entendiam sobre o tipo de função que poderia ser admitida para descrever o perfil inicial da corda e nessa discussão a palavra continuidade foi usada várias vezes. Atualmente, ao falarmos sobre continuidade a primeira coisa que possivelmente nos vem a mente é sua definição dada através de limite. Sendo assim, a principal justificativa para a elaboração desse trabalho, é mostrar que é possível falarmos de continuidade sem precisarmos falar de limites ou de conceitos numéricos. Podemos, por exemplo, pensar de forma mais intuitiva ao tratarmos de tal tópico. Rapidamente poderíamos definir que continuidade se trata das pequenas variações nos objetos que correspondem a pequenas variações em suas imagens. Pensemos num filme, sabemos que as imagens que vemos na tela são geradas atráves da junções de frames (quadros). Normalmente, um cineasta usa a taxa de quadros em 24 frames por segundo. Se nós unirmos todos estes frames geraremos o filme completo, logo o conjunto desses quadros geraria uma topologia.

Capítulo

1

Introdução a Topologia Geral

A **Topologia** (lugar+estudo) é considerada uma versão moderna da **Geometria** (terra+medir). De maneira simplória podemos afirmar que o estudo da Topologia se faz a partir da posição dos pontos e da "relação"entre estes cuja base é a noção de **continuidade**, enquanto que a Geometria (estudada no ensino básico) considera formas fundamentais, como círculo, quadrado e retângulo, para a base de todos os cálculos.

Introduziremos neste capítulo algumas noções básicas de topologia geral. Discutiremos acerca da definição de uma Topologia, do que são os Espaços topológicos. Alem disso, discorreremos brevemente sobre conjuntos abertos e fechados.

1.1 Topologia

Iniciamos a seção com a apresentação da definição de Topologia.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto. Chamaremos de topologia em X a família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisfazem as seguintes propriedades.*

(*i*) *A reunião de quaisquer elementos de $\mathcal{T}$ ainda será um elemento de $\mathcal{T}$, isto é, $O = \cup_{i\in\mathcal{A}} O_i \in \mathcal{T}$, onde $O_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in \mathcal{A}$; Onde A é um conjunto de índices.*

(*ii*) *A interseção finita de quaisquer elementos de $\mathcal{T}$ também será elemento de $\mathcal{T}$, ou seja, $O = O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{T}$;*

(iii) $\emptyset$ *e* $X \in \mathcal{T}$.

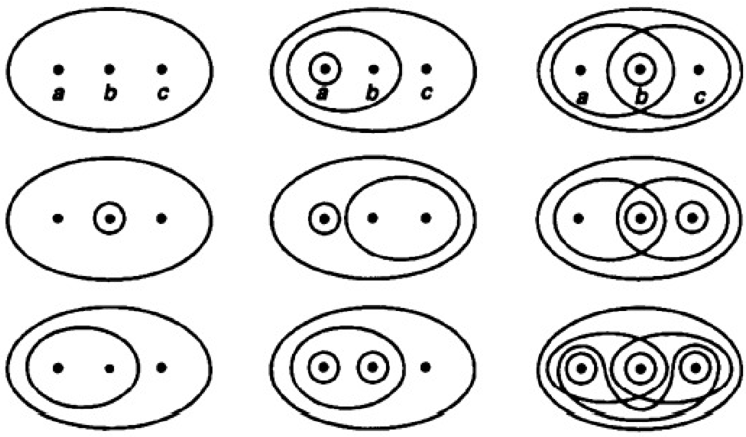
A partir da definição dada os exemplos que seguem são naturais, ou seja, são Topologias possíveis para quaisquer conjuntos.

Exemplo 1.1.2. *Seja um conjunto* $X \neq \emptyset$ *e seja* $\mathcal{P}(X) = \mathcal{T}$ *o conjunto formado por todos os subconjuntos de X. Podemos afirmar que* $\mathcal{T}$ *é uma topologia em X, pois sabemos que* $\emptyset$ *e X estão em X, quaisquer reuniões de subconjuntos de X resultará em um subconjunto de X e uma intersecção finita de subconjuntos de X será um subconjunto de X. Este tipo de topologia é chamada de* **Topologia Discreta**.

Exemplo 1.1.3. *Outro exemplo de topologia,é a chamada* **Topologia Caótica**, *que é dada por* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. *Neste caso, por definição temos que* $\emptyset$ *e* $X \in \mathcal{T}$.*Além disso, é facilmente constatado que qualquer reunião resultará em* $\emptyset$ *ou X. O mesmo ocorrerá com qualquer interseção finita de elementos de* $\mathcal{T}$.

Exemplo 1.1.4. *Tome o conjunto* $X = \{a, b, c\}$. *Representaremos abaixo algumas de suas inúmeras topologias.*

Figura 1.1: Representação de algumas topologias sobre o conjunto X.



Fonte: Adaptado de MUNKRES, 2000, p.76

Note que representamos pelos diagramas maiores em formato de elipse as topologias que contém diagramas menores, além do conjunto vazio. Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto ele está em todas essas representações. Olhando para a *imagem podemos dizer que o conjunto X é um aberto dele mesmo. Perceba também que os diagramas menores representam os outros abertos de X. Tome como exemplo a topologia localizada no segundo diagrama. Neste caso, os abertos são: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, e X. Já no terceiro teremos: $\emptyset$, $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, e X.*

Agora, mostraremos que nem toda coleção de subconjuntos de um conjunto X será uma topologia sobre X.

Exemplo 1.1.5. *Nenhum dos diagramas dos subconjuntos de X representados abaixo será uma topologia em X.*

Figura 1.2: Representação de subconjuntos X que não são topologias sobre X.

Fonte: Adaptado de MUNKRES, 2000, p.77

De fato, se denominarmos de ζ o primeiro diagrama teremos que: $\{a\}, \{b\} \in \zeta$, porém $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \zeta$. Não satisfazendo assim, umas da condições necessárias de uma topologia. O mesmo ocorre no diagrama dois. Chamemos ele de ξ. Note que, $\{a,b\}, \{b,c\} \in \xi$, mas $\{a,b\} \cap \{b,c\} \notin \xi$. Portanto, ele não é uma topologia de X.

Finalizamos esta seção observando que a definição de Topologia, bem como os exemplos apresentados, não fazem uso da linguagem numérica, sendo suficiente considerar a relação entre seus elementos. Esta abordagem seria extremamente natural de ser trabalhada com aqueles que estão confortáveis com os elementos fundamentais da geometria e ainda desconfortável com manupulações numéricas, em particular, crianças!

1.2 Espaços Topológicos

Espaços topológicos são estruturas que permitem formalização de conceitos importantes da matemática, como os de convergência e continuidade. Segue a formalização de sua definição.

Definição 1.2.1. *Chamaremos de espaços topológicos ao conjunto E munido de uma topologia, ou ainda, um espaço topológico é um par* $(E, \mathcal{T})$ *onde E é um conjunto não vazio e* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ *é uma topologia sobre E. Denominamos Pontos os elementos deste espaço.*

Definição 1.2.2. *Um exemplo de espaço topológico é o chamado* **Espaço de Kolmogorov** *ou simplesmente* T_0*. Seja* X *um espaço* T_0 *então, dados dois pontos distintos em* X*, existe uma vizinhaça de um deles que não contém o outro.*

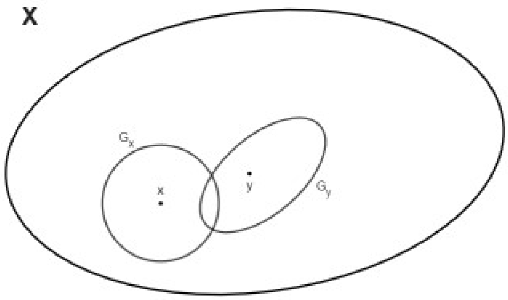
Na linguagem de conjuntos temos a seguinte propriedade para um espaço $(E, \mathcal{T})$ ser do tipo T_0:

$$\forall x, y \in E; \quad \exists A \in \mathcal{T}; \quad x \in A \text{ e } y \notin A \quad \text{ou} \quad x \notin A \text{ e } y \in A.$$

Uma situação prática, idealizada para descrever este exemplo, seria a seguinte: Imagine que em uma ilha isolada no oceano se deseje mapear a mesma e para isso é enviado um avião munido de uma câmera que tira uma foto por segundo. Enquanto o avião sobrevoa a ilha ele gera imagens e estas imagens definem a Topologia da ilha. Cada objeto, árvore, animal, etc. da ilha define um elemento da mesma e este espaço topológico (E =ilha e $\mathcal{T}$ = imagens da ilha) será do tipo T_0 se for possível separar dois objeto por uma fotografia, ou seja, se dados dois objetos da ilha for possível encontrar uma imagem que contenha um deles e não contenha o outro.

Definição 1.2.3. *Outro espaço topológico conhecido é o denominado* T_1*.* X *será* T_1 *se dados dois pontos distintos em* X*, existe uma vizinhança de cada um deles que não contém o outro.*

Figura 1.3: Representação de uma topologia T_1.



Fonte: Autor, 2021

Na situação idealizada anteriormente seria requerido que para dois objetos distintos fosse possível encontrar duas imagens com a mesma propriedade do exemplo anterior, ou seja, contento um elemento e o outro não.

Vale a pena destacar aqui que se o conjunto de imagens fosse gerada "ativando"um zoom a parte de uma imagem de satélite sempre com o mesmo foco esse espaço topológico seria do tipo T_0 mas não seria do tipo T_1, pois todas as imagens teriam o foco do zoom.

Note que na definição de espaço topológico do tipo T_1 pedimos que as vizinhanças separem os pontos mas estas podem ter interseção, ou seja, as vizinhanças não precisam estar separadas para que esta topologia seja do tipo T_1. Agora, vamos nos preparar para apresentar um outro tipo de espaço topológico.

Definição 1.2.4. *Denominamos de Conjuntos Abertos aos elementos de $\mathcal{T}$. Diz-se Vizinhança de um conjunto A de um espaço topológico ao conjunto que contém um conjunto aberto que contenha A.*

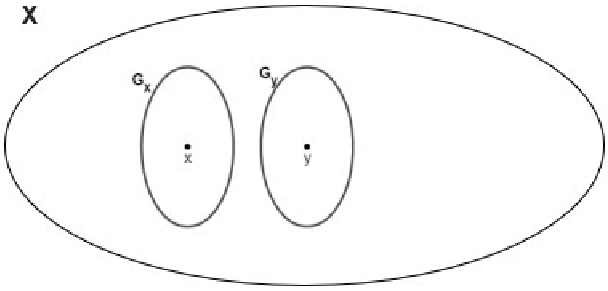
Da definição acima, podemos concluir que um conjunto é aberto se, e somente se, ele é vizinhança de todos os seus pontos ou união de vizinhanças de pontos.

Exemplo 1.2.5. *Um exemplo trivial de conjunto aberto é o conjunto vazio, pois como vimos acima $\emptyset \in \mathcal{T}$.*

Exemplo 1.2.6. *Sejam $S = \{a, b, c\}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{ab\}, S\}$. Então (S, σ) satisfaz as condições de um espaço do tipo T_0 e, além disso, os elementos de σ são conjuntos abertos.*

Definição 1.2.7. *Um espaço topológico é dito do tipo T_2 ou* **Espaços de Hausdorff** *quando quaisquer dois pontos distintos terão vizinhanças disjuntas, isto é,*
$\forall x, y \in X; x \neq y$ existem vizinhanças G_x e G_y de x e y, nesta ordem, tais que $G_x \cap G_y = \emptyset$.

Figura 1.4: Representação de uma topologia T_2.



Fonte: Autor, 2021

Definição 1.2.8. *Diremos que uma sequencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de um espaço topológico convergirá para um ponto x se qualquer vizinhança de x contiver todos os (x_n), excetuando-se um número finitos deles. Assim, denominamos x de ponto limite da sequencia (x_n).*

Proposição 1.2.9. *Dado X um espaço topológico, Se X é Hausdorff, então cada sequência convergente em X tem um limite único.*

Demonstração. Assumamos que X é um espaço T_2. Seja (x_n) uma sequência que converge para x e y, com $x \neq y$. Sejam $U \subset G_x$ e $V \subset G_y$, com $U \cap V = \emptyset$. Como $x_n \to x$, $\exists n_1$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geqslant n_1$. Analogamente, como $x_n \to y$, $\exists n_2$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geqslant n_2$. Tome $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$, então $x_n \in U \cap V$, ou seja, uma contradição! □

Observe que a noção de convergencia definida acima não faz uso da linguagem de distância e, deste modo, dependerá da maneira que for construída a Topologia, por exemplo, na **Topologia Discreta** um elemento x será limite de uma sequência se a partir de $n_0 \in \mathbb{N}$ tivermos $x_n = x$, $\forall n > n_0$, por outro lado, o mesmo conjunto munido da **Topologia Caótica** teríamos que qualquer x é limite de qualquer sequência.

Definição 1.2.10. *Seja A um subconjunto topológico de um espaço E, denotaremos por $\mathring{A}$ a reunião de todos os conjuntos abertos que estão em A. Logo, $\mathring{A}$ é um conjunto aberto que será chamado de Interior de A ou Int(A). Seus elementos serão intitulados pontos interiores de A. Note que,*

(i) $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$;

(ii) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Proposição 1.2.11. *O interior de um conjunto S, num espaço topológico X é a reunião de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em S. Em particular, int(S) é aberto em X.*

Demonstração. Seja $A = \bigcup A_\lambda$ a reunião de todos os abertos tais que $A_\lambda \subset S$. Temos que A é aberto em X e $A \subset S$, então se $x \in A$, $x \in Int(S)$. Logo, $A \subset Int(S)$. Reciprocamente, se $x \in Int(S)$ existe um aberto $A' \subset S$ tal que $x \in A' \subset S$. Daí, $A' = A_\lambda$ para algum λ e $A' \subset A$. Mostrando que $x \in A$ e $Int(S) \subset A$. □

Definição 1.2.12. *Se F é um subconjunto de um espaço topológico E, ele será nomeado fechado se seu complementar for aberto.*

Para que F seja um subconjunto fechado de um espaço topológico E, é suficiente que, para qualquer ponto $x \in E \setminus F$ exista um aberto U_x com $x \in U_x \subset E \setminus F$, ou seja, $x \in U_x$ e $U_x \cap F = \emptyset$

Das propriedades de uma topologia segue:

(i) A interseção de conjuntos fechados será um conjunto fechado;

(ii) A reunião de um par de conjuntos fechado é um conjunto fechado;

(iii) o conjunto vazio é um conjunto fechado.

Demonstração. (i) Seja $F = \cap F_\lambda$ onde cada F_λ é fechado, então considere, $A_\lambda = E \setminus F_\lambda$, temos que cada A_λ é aberto em E, logo $A = \cup A_\lambda$ também é. Como $F = E \setminus A$, segue-se que F é fechado;

(ii) Sejam $F_1, F_2, ..., F_n$ conjuntos fechados, então os conjuntos $A_1 = E \setminus F_1, ..., F_n = E \setminus F_n$ são abertos. Logo, $A_1 \cap ... \cap A_n$ é aberto e $F_1 \cup ... \cup F_n$ é fechado;

(iii) $\emptyset$ é o complementar do conjunto aberto E, logo é fechado.

□

Exemplo 1.2.13. *Os intervalos fechados* $(-\infty, a] = \mathbb{R} - (a, +\infty)$, $[b, +\infty) = \mathbb{R} - (-\infty, b)$ *e* $[a, b] = \mathbb{R} - [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]$ *são subconjuntos fechados da reta, pois são complementares de conjuntos abertos.*

Definição 1.2.14. *Dizemos que x é aderente ao conjunto A se toda vizinhança de x contiver pontos de A. Indicaremos por $\bar{A}$ o conjunto de pontos aderentes, a esse conjunto daremos o nome de fecho de A.*

Notemos que $\bar{A}$ é fechado e, além disso, é a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A. Logo,

(i) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Proposição 1.2.15. *O fecho de um subconjunto S em um espaço topológico E é a interseção de todos os subconjuntos fechados de E que contêm S.*

Demonstração. Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família de todos os fechados de E que contém S. Temos que $A\lambda = X - F_\lambda$, $\lambda \in L$ são todos os abertos de E contidos em $E - S$. Pela definição de ponto aderente, $x \in \bar{S}$ se, e somente se, $x \notin Int(E - S)$. Como, $Int(E - S) = \bigcup A_\lambda$ então $\bar{S} = E - Int(E - S) = \bigcap F_\lambda$. □

Corolário 1.2.16. *$F \subset E$ é fechado, se e somente se, $F = \bar{F}$*

Demonstração. Ora, o fecho de qualquer conjunto é um subconjunto fechado por ser uma interseção de fechados. Daí, se $F = \bar{F}$, F é fechado. Reciprocamente, se tivermos F fechado, então F pertence a família dos fechados de E que o contém. A interseção dessa família é F, logo $F = \bar{F}$. □

Nomearemos de denso em E o subconjunto A de um espaço topológico E, ou ainda, de totalmente denso se $\bar{A} = E$.

Seja E' um subconjunto de um espaço topológico E, o conjunto formado por $\mathcal{T}' = \{O \cap E' | O \in \mathcal{T}\}$ satisfaz as propriedades de uma topologia sobre E'. Daremos o nome de **Topologia Induzida** por E a este tipo de topologia. E' com esta topologia será denominado de subespaço de E. Temos que:

(i) Os conjuntos fechados de de E' são interseções com os conjuntos fechados de E.

(ii) As vizinhanças em E' de um ponto x que pertence a E' são as interseções com E' das vizinhanças de x em E.

Definição 1.2.17. *Um espaço topológico é separado se, e somente se a interseção de todas as vizinhanças fechadas de um ponto x arbitrário se reduzirem ao próprio ponto x.*

Por fim, agora que sabemos o que são conjuntos fechados podemos escrever a seguinte proposição:

Proposição 1.2.18. *Um espaço topológico E é um espaco T_1 se, e somente se, cada subconjunto unitário de E é fechado.*

Demonstração. Seja E um espaço T_1, e seja $a \in E$. Para cada $b \in E$, com $b \neq a$, existe $V \in U_b$ tal que $a \notin V$. Logo, $E \setminus \{a\}$ é aberto, isto é, $\{a\}$ é fechado. Por outro lado, Suponhamos que $\{a\}$ seja fechado para cada $a \in E$. Dados $a, b \in E$, com $a \neq b$, sejam $U = E \setminus \{b\}$ e $V = E \setminus \{a\}$. Então U e V são abertos.Além disso, $a \in U$, $b \notin U$, $b \in V$, $a \notin V$. □

Agora vamos observar o caso do conjunto $\mathcal{B} = \{[a, b)|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, temos que $\mathcal{B}$ não é uma topologia, pois ao tomarmos a união arbitrária de elementos de $\mathcal{B}$ ela não necessariamente estaria contida em $\mathcal{B}$. Por outro lado, se tomarmos coleção de uniões de elementos de $\mathcal{B}$ geramos assim uma topologia, como mostraremos a seguir. Seja τ o conjunto gerado pela coleção de uniões de elementos de $\mathcal{B}$

(i) Seja $A_l \in \tau$

$$\bigcup_{l \in \mathcal{L}} A_l \text{ tal que } A_l = \bigcup_{i,j \in \mathcal{K}} [b_i, b_j) \text{ e } b_i, b_j \in \mathbb{R}.$$

É fácil ver que essa união pertence a τ.

(ii) Queremos mostrar a interceção finita de elementos de τ pertende a τ:

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \; x \in \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{k,j \in \mathcal{K}} [b_k, b_j) \right),$$

dessa forma, tomemos um elemento de $\mathcal{B}$ o qual está contido em cada um dos A_i e que possua x. Assim $x \in \tau$.

(iii) Que o vazio está contido em τ é imediato, pois o vazio está contido em todos os conjuntos. Agora seja $x \in \mathbb{R}$, é obvio que existe um elemento em $\mathcal{B}$ o qual contém x (por exemplo dado um $\epsilon > 0$ tomemos $[x - \epsilon, x + \epsilon)$) o que implica que está contido em τ.

Esse espaço topológico é conhecido como Reta de Sorgenfrey. Assim concluímos que τ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$. Essa relação não se faz por acaso, $\mathcal{B}$ é o que chamamos de *base* para a topologia τ. Uma base é a menor coleção de subconjuntos do conjunto X o qual gera uma topologia sobre X.

Definição 1.2.19. *Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{T}$. Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma Base para $\mathcal{T}$ se para todo $A \in \mathcal{T}$ acontece:*

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Note que $\mathcal{B} \in \mathcal{T}$, portanto qualquer união de elementos de $\mathcal{B}$ pertencerá também a $\mathcal{T}$. Esses elementos de $\mathcal{B}$ são chamados de abertos básicos

Se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$, dizemos que a topologia $\mathcal{T}$ é gerada por $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}$ gera a topologia $\mathcal{T}$.

Exemplo 1.2.20. *Seja $(E, \mathcal{T})$ e seja $\mathcal{T}$ a topologia discreta, então a base $\mathcal{B} = \{E\}$.*

Capítulo

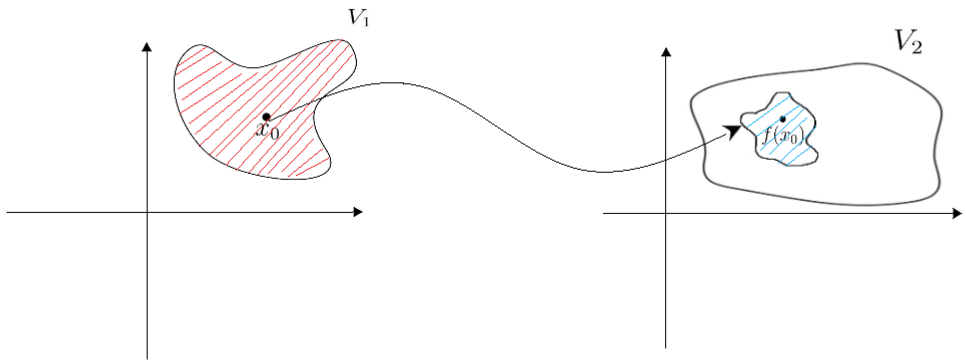
2

Funções Contínuas em Espaços Topológicos

Neste capítulo discorreremos acerca da definição de uma função contínua usando conceitos de espaços topológicos

Definição 2.0.1. *Sejam E_1 e E_2 espaços topológicos e $x_0 \in E_1$. Diremos que uma função $f : E_1 \to E_2$ é contínua no ponto x se, para cada vizinhança V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ for uma vizinhança de x_0, ou podemos dizer também que, dada qualquer vizinhança V_2 de $f(x_0)$ existirá uma vizinhança V_1 de tal modo que $f(V_1) \subset V_2$. Caso contrário, diz-se que f é descontínua em x_0.*

Figura 2.1: Representação de uma aplicação contínua.



Fonte: Autor, 2021

Conclui-se facilmente da definição acima que se f é contínua no ponto x_0 então $x_0 \in \bar{A} \Rightarrow f(x_0) \in f(\bar{A})$

Exemplo 2.0.2. *Toda função constante é contínua.*

Seja $f : E_1 \to E_2$ tal que $f(x) = k$ para quaisquer $x \in E_1$. Dado $B \subset E_2$ aberto, a função inversa $f^{-1}(B) = E_1$ se $k \in B$. Porém, $f^{-1}(B) = \emptyset$ caso $k \notin B$. Em qualquer destes casos temos $f^{-1}(B)$ é aberto, portanto continua.

Definição 2.0.3. *Sejam A e E espaços topológicos. Diremos que uma aplicação $f : A \to E$ é contínua quando $\forall C \subset E$ aberto, temos que $f^{-1}(C)$ é aberto em A.*

Proposição 2.0.4. *f é contínua $\Leftrightarrow$ f é contínua em cada ponto.*

Demonstração. Assuma $f : A \to E$ contínua. Dados um ponto $x \in A$ e um aberto $B \subset E$ com $f(x) \in B$, o conjunto $C = f^{-1}(B)$ é aberto em A. Como $x \in A$ e $f(C) = f(f^{-1}(B)) \subset B$, temos a continuidade de f no ponto x. Por outro lado, seja f contínua em cada ponto $x \in A$. Seja $B \subset E$ aberto e $C = f^{-1}(B)$. Para cada $x \in C$, temos $f(x) \in B$ e como por hipótese f é contínua no ponto x, existe um aberto $C_x \subset C$, com $x \in C_x$ e $f(C_x) \subset B$. Logo $x \subset C_x \subset C$ para todos os $x \in C$. Em outras palavras, $C = \bigcup_x C_x$. Então, $C = f^{-1}(B)$ é aberta em A, por ser uma reunião de abertos e $f : A \to E$ é contínua. $\square$

Teorema 2.0.5. *Dada uma aplicação f de um espaço topológico E_1 num espaço topológico E_2 são equivalentes as seguintes condições:*

(i) A função f é contínua;

(ii) A imagem inversa de qualquer conjunto aberto de E_2 é um conjunto aberto de E_1;

(iii) A imagem inversa de qualquer conjunto fechado de E_2 é um conjunto fechado de E_1.

Demonstração. A implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ foi demosntrada na proposição acima. Já a implicação inversa $(ii) \Rightarrow (i)$ segue da definição de vizinhança. A implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$ segue do fato do complementar de um conjunto aberto ser fechado. $\square$

Exemplo 2.0.6. *A restrição de uma aplicação contínua a um subespaço será contínua.*

Teorema 2.0.7. *Sejam* (E_1, T_1), (E_2, T_2) *e* (E_3, T_3) *espaços topológicos, f uma função de* E_1 *em* E_2 *e* g *uma função de* E_2 *em* E_3. *Temos:*

(i) Seja um $a \in E_1$ for tal que f é contínua em a e que g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a;

(ii) Se f e g forem contínuas, então $g \circ f$ também é contínua.

Demonstração. Se $a \in E_1$ satisfaz as condições de (i), e se V for uma vizinhança de $g(f(a)) = g \circ f(a)$, então $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de $f(a)$, pois g é contínua em $f(a)$. Portanto, $f^{-1}(g^{-1}(V))$ será vizinhança de a, porque f é contínua em a (por hipótese). Ora, $g \circ f^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(V)$, logo será contínua. O item (ii) pode ser demonstrado de maneira análoga, basta sabermos que no primeiro item o fato de f e g serem contínuas diz que elas precisam ser contínuas em todos os seus pontos. $\square$

Definição 2.0.8. *Chamaremos de homeomorfismo a função* $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_1, \mathcal{T}_2)$ *entre espaços topológicos se ela e sua inversa forem uma bijeção contínua.*

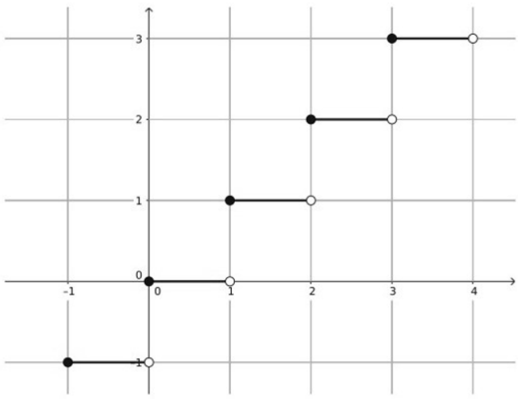
Observe que esta definição, combinada com o Teorema 2.0.5, afirma que se existe um homoemorfismo de $(E_1, \mathcal{T}_1)$ em $(E_2, \mathcal{T}_2)$ então este leva conjuntos abertos em conjuntos abertos e conjuntos fechados em conjuntos fechados. Em outras palavras, a existência de tal homeomorfismo nos diz que os dois espaço topológicos são topologicamente idênticos!

Capítulo 3

Topologia, Continuidade e Computadores

Uma ideia muito simples de definir quando uma função real é contínua é dizer que ela será contínua quando seu gráfico puder ser traçado em uma folha sem retirar a caneta do papel. Caso se interrompa o gráfico da função e se comece em outro local do papel, diz-se que ocorre uma descontinuidade. Um exemplo disso é a função: $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (parte inteira) que como podemos ver na imagem abaixo seu gráfico não pode ser desenhado sem retirar a caneta do papel.

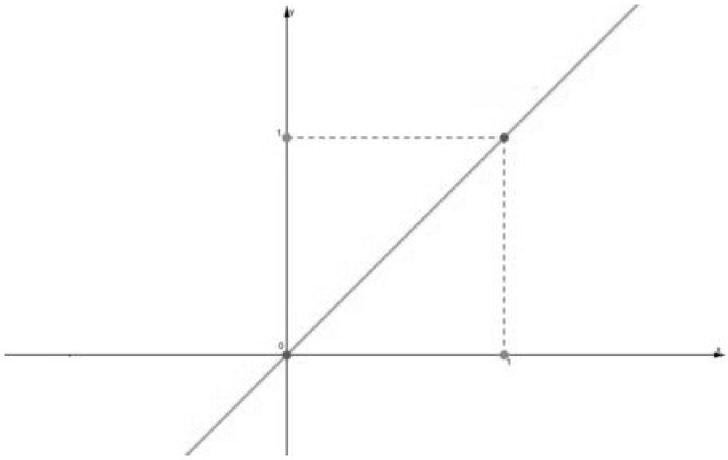
Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = \lfloor x \rfloor$



Fonte: Autor, 2021

Já um exemplo de função contínua usando a ideia anterior é a função $f(x) = x$ que tem como gráfico a imagem a seguir.

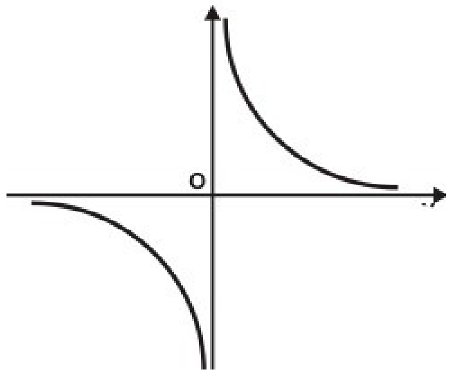
Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = x$.



Fonte: Autor, 2021

Porém, ao pensarmos na função $f(x) = \frac{1}{x}$ (de gráfico desenhado abaixo), podemos ver que não é possível desenhar seu gráfico sem tirarmos a caneta do papel, mas mesmo assim ela é contínua quando $x \neq 0$. O que comprova a fragilidade da definição acima.

Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.



Fonte: Autor, 2021

No capítulo anterior, definimos o que é uma função continua sem necessariamente usar nenhum conjunto numérico ou conceito de distâncias.

A ideia de ter uma função contínua é bastante útil para argumentos computacionais, uma vez que o computador não tem a sua disposição todos os números reais (sequer todos os números naturais!) e isso o leva a "traçar gráficos"de forma diferente do que fazemos! Ele não usa papel e caneta!

Desde 1985 o IEEE (Institute for Electrical and Electronic Engineers) instituiu uma **Topologia** para que o computador possa realizar cálculos através do uso de funções contínuas, isso é estudado em cursos de Cálculo Numérico ou Análise Numérica. Vamos apresentar rapidamente a ideia de **pontos flutuantes** e explicar como isso é feito. A principal referencia sobre isso é *Binary Floating Point Arithmetic Standard 754–1985.*

Em um computador "normal"de 64 bits, temos a seguinte distribuição dos números ditos pontos flutuantes, que são representados na base 2 (números binários).

- o primeiro bit, denotado por s representa o sinal do número (positivo ou negativo);
- Os 11 bits seguintes são usados para representar o expoente do algarismo 2 do número real a ser representado, este é denotado por c e chamado de **característica**;
- Os últimos 52 bits que são utilizados servem para escrever um número em base 2 fracionário e este é denotado por f e chamado de **mantissa**.
- Os pontos flutuantes são números reais da forma $x = (-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$.

Exemplo 3.0.1. *Considere o número de máquina abaixo:*

$$0 \quad 10000000011 \quad 1011100100010000000000000000000000000000000000000000.$$

Vamos encontrar o número real que é representado por este número de máquina.

Vamos por parte:

- $s = (-1)^0 = 1$;
- $c = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + \cdots + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1024 + 2 + 1 = 1027$;
- $f = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$;
- $$\begin{aligned}(-1)^s 2^{c-1023}(1+f) &= (-1)^0 \cdot 2^{1027-1023}\left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right)\right) \\ &= 27.56640625.\end{aligned}$$

Logo, o número real representado aqui é 27,56640625.

É importante observar que o menor número real positivo que pode ser representado é

$$0 \;\; 00000000001 \;\; 0000000000000000000000000000000000000000000000000000.$$

que resulta em $s = 0$, $c = 1$ e $f = 0$, ou seja,

$$x = 2^{-1022} \cdot (1 + 0) \approx 0,22251 \times 10^{-307}.$$

E o maior número é representado por

$$0 \;\; 11111111111 \;\; 1111111111111111111111111111111111111111111111111111$$

o que nos dá $s = 0$, $c = 2046$ e $f = 1 - 2^{-52}$, isto é, $x = 2^{1023} \cdot (2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$.

Exemplo 3.0.2. *Qual o menor intervalo tem o número de máquina do exemplo anterior como elemento?*

Neste exemplo, iniciamos por observar que o número de máquina posterior e anterior são, respectivamente,

$$0 \;\; 10000000011 \;\; 1011100100001111111111111111111111111111111111111111$$

e

$$0100000000111011100100010000000000000000000000000000000000000001.$$

Portanto, o intervalo obtido é:

$$[27.56640624999999822364316059974953532218933105468 75,$$

$$27.5664062500000017763568394002504646778106689453125).$$

Concluimos assim que qualquer número real neste intervalo tem o mesmo número de máquina que o número do exemplo 3.0.1, ou seja, do ponto de vista computacional, são iguais!

Temos assim um espaço topológico finito que representa o conjunto dos números reais e, é fácil que, podemos construir qualquer $\mathbb{R}^n$ como um espaço topológico finito.

Vale observar que o "tamanho"de cada elemento deste espaço topológico varia.

Para finalizar esta discussão, em geral trabalhamos com um número limitado de casas decimais e, assim, uma vez definido a quantidade de casas decimais de um número real y, temos o que chamados de ponto flutuante, $fl(y)$.

Por exemplo, com cinco casas decimais temos $fl(\pi) = 3,1416$ (estamos usando o arredondamento padrão).

Essencialmente, temos as seguintes funções que são executadas por um computador.

- $x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$;
- $x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y))$;
- $x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$;
- $x \oslash y = fl(fl(x) \div fl(y))$

Posto isso e usando a noção de continuidade do capítulo anterior temos a base necessária para que o computador realize "toda a matemática"que temos a nossa disposição.

Referências Bibliográficas

[D] J. Dugundji, *Topology.* , Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[M] J. R. Munkres, *Topology.* , 2nd Ed. Prentice Hall, Massachusets, 2000.

[H] C. S. Honig, *Aplicações da Topologia à Análise.*, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[L] E. L. Lima., *Elementos de Topologia Geral.*, Coleção Textos Universitários : SBM, 2010.

[H] H. H. Domingues, *Espaços Métricos e Introdução a Topologia.*. São Paulo: Atual, 1982.

[1] Standards Committee of the IEEE Computer Society, *IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic*. 1985. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~biloti/download/ieee_754-1985.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2021.