

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CAMPUS A.C. SIMÕES  
CENTRO DE TECNOLOGIA

GABRIEL TORRES DA SILVEIRA

**CONTRIBUIÇÃO AO USO DE METAMODELOS DE EXPANSÃO EM  
POLINÔMIOS DE CAOS EM PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE  
ESTRUTURAL**

Maceió/AL  
Janeiro de 2022

GABRIEL TORRES DA SILVEIRA

**CONTRIBUIÇÃO AO USO DE METAMODELOS DE EXPANSÃO EM  
POLINÔMIOS DE CAOS EM PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE  
ESTRUTURAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao colegiado do curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior

Maceió/AL

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

- S587c Silveira, Gabriel Torres da.  
Contribuição ao uso de metamodelos de expansão em polinômios de caos em problemas de confiabilidade estrutural / Gabriel Torres da Silveira. – Maceió, 2022.  
55 f. : il., grafs. e tabs. color.
- Orientador: Eduardo Toledo de Lima Junior.  
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2022.
- Bibliografia: f. 51-52.  
Anexos: f. 53-55.
1. Metamodelagem. 2. Expansão em polinômios de caos. 3. Incertezas. 4. Confiabilidade (Engenharia). I. Título.

CDU: 62-192

*A quem interessar.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Agostinho e Elma, agradeço-os pelo amor incondicional, pela criação privilegiada e pelo encorajamento das minhas várias desventuras. Nessa jornada que se encerra e na nova que se inicia, espero seguir trilhando seus exemplos e viver segundo suas expectativas, no intuito de tornar-me um ser humano digno e honrado.

Ao meu orientador, Eduardo Toledo, cujo comprometimento e parceria nesses longos anos me fizeram estimá-lo como um querido amigo, um exemplo de conduta profissional e pessoal.

Aos meus queridos amigos, do BBFest (Bêbo-Bosta Fest) à SBPX (Sociedade Brasileira do Progresso ao Xopen), agradeço-os pelo companheirismo, pelas boas gargalhadas e pela irreverência que tornaram essa jornada suportável.

A Universidade Federal de Alagoas e seus colaboradores, agradeço-os por propiciarem o espaço de surgimento de memórias queridas.

Aos meus bons professores, cujos ensinamentos e experiências levarei para a vida, agradeço-os, no intuito de encorajá-los em sua jornada como agentes de transformação e de engrandecimento.

Aos meus não tão bons professores, por fazerem reconhecer-me como mero mortal em minhas primeiras crises de ansiedade, agradeço-os, no intuito de não tornar a vê-los nesse breve sopro de existência.

*Matar padre dá um azar danado.  
Sobretudo para o padre.*

*Ariano Suassuna*

## RESUMO

Avanços no campo da Engenharia Estrutural propiciaram a alavancagem da atividade antrópica nos mais diversos cenários, os quais vão desde a extração de óleo e gás em poços ultra profundos até a exploração aeroespacial. Esse progresso é amparado pela aplicação de metodologias capazes de emular as cargas atuantes sobre a estrutura, o comportamento de seus materiais, suas condições de operação, dentre outros. Contudo, muitos destes artifícios são computacionalmente custosos e podem tornar-se proibitivos, à medida que a complexidade da análise é aumentada. Simulações envolvendo confiabilidade estrutural, que levam em conta as incertezas das variáveis do problema e se propõem a estimar a probabilidade de falha das estruturas, são exemplos de aplicações que requerem a avaliação exaustiva de suas equações de estados limites. Dessa forma, há uma tendência de se incorporar técnicas de metamodelagem aos problemas de engenharia, a fim de que as análises sejam realizadas sobre modelos mais simples e rápidos de se verificar, mas que ainda representam de forma satisfatória o problema original. Este trabalho visa avaliar o emprego de metamodelos obtidos por Expansão de Polinômios de Caos (EPC) em aplicações de confiabilidade estrutural. As implementações computacionais são feitas na linguagem de programação Python. Os resultados obtidos são comparados e validados com problemas *benchmark* da literatura relacionada ao tema.

**Palavras-chave:** Metamodelagem; Expansão em Polinômios de Caos; Incertezas; Confiabilidade.

## ABSTRACT

Advances in the field of Structural Engineering have provided leverage to anthropic activity in the most diverse scenarios, ranging from the extraction of oil and gas in ultra-deep wells to aerospace exploration. This progress is underpinned by the application of methodologies capable of emulate loads on structures, the behavior of its materials, its operating conditions, among others. However, many of these artifices are computationally costly and may become prohibitive, as the complexity of the analysis is increased. Simulations involving reliability that takes into account the uncertainties of the variables of the problem and proposes to estimate the probability of failure of structures, are examples of applications that require thorough evaluation of their limit state equations. This way, there is a tendency to incorporate metamodeling to engineering problems, so that analyses are carried out on simpler and faster models that still satisfactorily represent the original problem. This work aims to evaluate the use of metamodels obtained by Polynomial Chaos Expansion (PCE) in structural reliability applications. Computational implementations are made in Python. The results obtained are compared and validated with benchmark problems that are available in the literature related to the theme.

**Keywords:** Metamodeling; Polynomial Chaos Expansion; Uncertainties; Reliability.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição exponencial.....	18
Figura 2 – Distribuição uniforme .....	19
Figura 3 – Distribuição gaussiana .....	20
Figura 4 – Distribuição normal e normal reduzida .....	20
Figura 5 – Transformação isoprobabilística .....	22
Figura 6 – Exemplo de aplicação de confiabilidade estrutural .....	27
Figura 7 – Exemplo de validação 01.....	33
Figura 8 – Exemplo de validação 03.....	37
Figura 9 – Chapa tracionada com fratura central .....	40
Figura 10 – Problema do estudo paramétrico .....	41
Figura 11 – Comparativo do tempo necessário para simular $10^6$ cenários .....	42
Figura 12 – Comparação dos índices de confiabilidade obtidos por simulação de Monte Carlo.....	43
Figura 13 – Resumo dos índices de confiabilidade obtidos por simulação de Monte Carlo .....	43
Figura 14 – Comparação dos índices de confiabilidade obtidos por FOSM .....	44
Figura 15 – Resumo dos índices de confiabilidade obtidos por FOSM.....	45
Figura 16 – Performance dos metamodelos .....	46
Figura 17 – Grau 3; $N = 3x$ .....	47
Figura 18 – Grau 5; $N = 3x$ .....	47
Figura 19 – Grau 7; $N = 2x$ .....	48
Figura 20 – Grau 9; $N = 4x$ .....	48

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo - Transformações isoprobabilísticas .....	22
Tabela 2 – Exemplo - Confiabilidade estrutural .....	26
Tabela 3 – Polinômios de Legendre .....	29
Tabela 4 – Polinômios de Hermite .....	30
Tabela 5 – Exemplo 01 - Coeficientes ajustados .....	32
Tabela 6 – Exemplo 01 - Validação.....	33
Tabela 7 – Exemplo 02 - Coeficientes ajustados .....	35
Tabela 8 – Exemplo 02 - Validação.....	36
Tabela 9 – Exemplo 03 - Coeficientes ajustados .....	37
Tabela 10 –Exemplo 03 - Validação.....	38
Tabela 11 –Problema final - Variáveis aleatórias .....	40
Tabela 12 –Metamodelos escolhidos .....	46

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PDF	Função densidade de probabilidade
CDF	Função de probabilidade acumulada
EPC	Expansão em polinômios de caos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$X$	Variável Aleatória
$x$	Realização da variável aleatória $X$
$\mu_X$	Média da variável aleatória $X$
$\sigma_X$	Desvio-padrão da variável aleatória $X$
$f_X(x)$	Função Densidade de Probabilidades de $X$
$F_X(x)$	Função de Distribuição Acumulada de $X$
$Pf$	Probabilidade de Falha
$\beta$	Índice de confiabilidade

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	Contextualização.....	13
1.2	Motivação .....	14
1.3	Objetivos.....	14
1.4	Metodologia .....	14
1.5	Estrutura do Trabalho.....	15
<b>2</b>	<b>PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA - CONCEITOS BÁSICOS</b>	<b>16</b>
2.1	Variáveis Aleatórias .....	16
2.1.1	Função de Distribuição Cumulativa de Probabilidades .....	16
2.1.2	Função Densidade de Probabilidades .....	17
2.1.3	Distribuições de Probabilidades Usuais .....	17
2.2	Distribuição Normal Equivalente .....	21
2.3	Transformações Isoprobabilísticas .....	21
2.3.1	Exemplo de Aplicação .....	21
<b>3</b>	<b>TEORIA DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</b>	<b>23</b>
3.1	Incertezas, Estados Limite e Probabilidade de Falha .....	23
3.2	Métodos de Transformação .....	23
3.2.1	<i>First-Order Second-Moment Method</i> - FOSM .....	24
3.2.2	<i>First-Order Reliability Method</i> - FORM.....	24
3.2.3	<i>Second-Order Reliability Method</i> - SORM .....	24
3.3	Métodos de Simulação .....	24
3.3.1	Monte Carlo .....	25
3.4	Exemplo de Aplicação .....	26
<b>4</b>	<b>EXPANSÃO EM POLINÔMIOS DE CAOS</b>	<b>28</b>
4.1	Polinômios Ortonormais .....	28
4.1.1	Polinômios de Legendre .....	29
4.1.2	Polinômios de Hermite .....	29
4.2	Estimativa da Performance .....	30
4.3	Polinômios Multivariados .....	30
4.4	Exemplos de Validação .....	31
4.4.1	Exemplo 01 - Equação de Estado Limite Linear.....	32
4.4.2	Exemplo 02 - Equação de Estado Limite Polinomial .....	34
4.4.3	Exemplo 03 - Equação de Estado Limite Exponencial.....	36
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>39</b>
5.1	Aplicação.....	39
5.2	Discussões .....	41

5.2.1	Avaliação do Custo Computacional .....	41
5.2.2	Avaliação da Resposta Confiabilística .....	42
5.2.3	Avaliação da Performance dos Metamodelos .....	45
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A –</b>	<b>53</b>

# 1 INTRODUÇÃO

*"O Brasil verdadeiro fica entre a Paraíba, Pernambuco e Alagoas. A oeste do Rio Grande do Norte e ao sul de Sergipe é tudo estrangeiro."*

– Ariano Suassuna

## 1.1 Contextualização

A crescente evolução dos materiais estruturais e dos modelos de análise, e o consequente aumento na complexidade e arrojo das estruturas, demandam um maior conhecimento dos níveis de segurança para os quais estas são projetadas. Ainda, incertezas inerentes aos projetos de Engenharia em geral, relacionadas à variabilidade dimensional de peças e à variabilidade de resistência de materiais estruturais, induzem incertezas no desempenho mecânico das estruturas. Os códigos que normatizam o projeto de estruturas apresentam, em sua maioria, procedimentos determinísticos ou semi-probabilísticos, baseados em coeficientes parciais de segurança, não permitindo uma avaliação precisa dos estados limites das estruturas.

A análise de confiabilidade aplicada ao projeto estrutural permite a avaliação da probabilidade de falha da estrutura para um determinado estado limite, de forma que esta pode ser prevista, com valor adequado, ainda na fase de projeto. Os modelos confiabilísticos podem ser construídos com base na avaliação das incertezas das variáveis de projeto, as quais são descritas de forma estatística, como variáveis aleatórias.

Apesar da crescente capacidade de processamento dos computadores, análises de confiabilidade em problemas cada vez mais complexos incorrem em um maior custo computacional, o qual pode não ser suportado pela dinâmica comercial e necessidade de respostas rápidas para o processo de tomada de decisão. Esta situação é agravada ainda mais por problemas mais complexos que envolvem métodos numéricos, modelos dinâmicos e não lineares.

Para contornar isso, diversas técnicas de amostragem foram desenvolvidas, tais como amostragem por Hipercubo Latino, amostragem por importância, amostragem assintótica, dentre outras, de modo a permitir que os métodos de simulação funcionem de maneira mais eficiente. Apesar destas técnicas, a solução de alguns problemas continua inviável, levando horas e até dias para que sejam realizadas com precisão aceitável.

Assim, surge a ideia de se utilizar técnicas de metamodelagem, de modo que tais análises, em geral custosas para o computador, possam ser feitas sobre modelos mais simples e rápidos de se analisar, mas que representem de forma satisfatória o modelo original.

Neste cenário, o presente trabalho também objetiva contribuir na difusão das técnicas supracitadas de modo a servir como material de referência, explicitando as etapas necessárias e encurtando o tempo necessário para que novos estudantes possam implementar os metamodelos necessários em suas aplicações.

## 1.2 Motivação

As motivações para este trabalho encontram-se na carência de literatura nacional e introdutória acerca dos temas abordados, conforme atestado por Kroetz (2015). Ao observar os trabalhos de Janouchová, Sýkora e Kučerová (2018), Baptista, Stolbunov e Nair (2019), Loukrezis, Galetzka e Gersem (2020) e Zhang e Xu (2021), percebe-se uma tendência e interesse internacional na adoção de metamodelos para redução de custos computacionais, além da gama de possibilidades a serem atingidas com a introdução de metamodelos em diversas aplicações, sejam elas voltadas para análise de estruturas, recursos hídricos e, até mesmo, aplicações financeiras e de gerenciamento de risco.

## 1.3 Objetivos

O presente trabalho objetiva avaliar o emprego de técnicas de Expansão em Polinômios de Caos (EPC) em problemas de Confiabilidade Estrutural. Essa avaliação se dá pelo estudo, entendimento e implementação dos metamodelos de EPC, a fim de delinear possíveis aplicações e suas respectivas limitações.

## 1.4 Metodologia

O desenvolvimento do presente trabalho se dá pelas etapas definidas a seguir:

- Fase I - Revisão bibliográfica dos principais tópicos pertinentes ao trabalho: Estatística, Probabilidades, Confiabilidade Estrutural e Metamodelagem por Expansão em Polinômios de Caos;
- Fase II - Estudo, implementação e validação dos códigos elaborados com exemplos de referência para cada tema abordado;
- Fase III - Acoplamento das implementações de confiabilidade estrutural com as de metamodelagem e, posterior validação com os problemas *benchmark* selecionados;
- Fase IV - Aplicação a um problema de Confiabilidade Estrutural.

Todas as simulações foram realizados em um computador pessoal com processador I5 de 8ª Geração CPU 2.90 GHz 64 bits com 8 GB de RAM.

## 1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido de modo a garantir que as definições e conceitos necessários ao entendimento do tema sejam apresentados e reforçados no decorrer dos capítulos.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão sucinta dos principais tópicos relacionados a teoria das probabilidades, de modo que os conceitos de variáveis aleatórias e curvas de distribuição de probabilidades sejam apresentados para emprego imediato no capítulo seguinte.

O Capítulo 3 define probabilidade de falha e outros conceitos da confiabilidade estrutural, de maneira simples e objetiva, a fim de que seja possível realizar o acoplamento com as técnicas de metamodelagem.

O Capítulo 4 traz os conceitos de metamodelagem e, especificamente, do método de Expansão em Polinômios de Caos, foco do presente trabalho. Aqui são realizadas as primeiras implementações de EPC, as quais são validadas com exemplos da literatura.

O Capítulo 5 é destinado ao estudo de caso paramétrico de um modelo analítico de maior complexidade, para o qual são evidenciados os benefícios e limitações da implementação de metamodelos de EPC.

Por fim, no Capítulo 6, considerações referentes às análises realizadas são discutidas, resumindo os avanços obtidos e sugerindo trabalhos futuros relacionados ao tema.

## 2 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA - CONCEITOS BÁSICOS

*"Neste momento de música eles sentiram-se donos da cidade. E amaram-se uns aos outros, se sentiram irmãos porque eram todos eles sem carinho e sem conforto e agora tinham carinho e o conforto da música."*

– Capitães da Areia por Jorge Amado

Este capítulo apresenta uma breve revisão de conceitos básicos de probabilidade e estatística necessários para aplicações de confiabilidade estrutural, tais como: variáveis aleatórias, distribuições de probabilidades, entre outros.

É sabido que as variáveis aleatórias classificam-se em contínuas e discretas. Contudo, para fins do que é apresentado neste trabalho, limita-se a apresentação às variáveis aleatórias contínuas.

### 2.1 Variáveis Aleatórias

De maneira geral, define-se uma variável aleatória como aquela que possui um intervalo de valores possíveis de ocorrência. Mais precisamente, variáveis aleatórias consistem em entes matemáticos utilizados para representar eventos de maneira analítica (ANG; TANG, 2006). Ainda conforme Ang e Tang (2006), seja  $X$  uma variável aleatória, então  $X = x$ ,  $X < x$  e  $X > x$ , representam eventos, onde  $a \leq x \leq b$  é a gama de valores possíveis para  $X$ .

#### 2.1.1 Função de Distribuição Cumulativa de Probabilidades

A probabilidade ( $P$ ) de que determinada variável aleatória  $X$  assumo o valor igual ou menor que  $x$ , dentre os valores possíveis, é definida por meio de sua Função de Distribuição Cumulativa de Probabilidades (CDF). Logo, tem-se que:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

onde  $F_X$  é a CDF da variável aleatória  $X$ .

Para que  $F_X$  seja aceita como a CDF de  $X$ , Ang e Tang (2006) estipulam as seguintes condições:

- $F_X(-\infty) = 0$ ;
- $F_X(+\infty) = 1$ ;
- $F_X(x) \geq 0$ , para todo  $x$ ;
- $F_X(x)$  é contínua à direita de  $x$ .

### 2.1.2 Função Densidade de Probabilidades

A caracterização de uma variável aleatória também se dá por meio de uma Função Densidade de Probabilidades (PDF) que descreve a verossimilhança de uma variável aleatória tomar um determinado valor. A formulação matemática de uma PDF é dada por:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2)$$

onde  $f_X(x)$  é a PDF da variável aleatória  $X$ . De forma que é possível calcular a CDF por meio da Eq. 3.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tau) d\tau \quad (3)$$

O cálculo da probabilidade de ocorrência de um intervalo  $(a, b)$  no domínio de  $X$  é dado na Eq. 4.

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4)$$

### 2.1.3 Distribuições de Probabilidades Usuais

Nos itens que seguem, são apresentadas algumas distribuições de probabilidades que podem ser úteis no escopo deste trabalho. No tocante à parte programática das distribuições de probabilidades, aproveitam-se as implementações e conveniências da biblioteca *Scipy*, em especial, seu módulo *Stats* (JONES et al., 2015).

#### 2.1.3.1 Distribuição Exponencial

A distribuição de probabilidades exponencial é dada em função de um parâmetro de forma  $\lambda$ , por meio do qual definem-se sua PDF e sua CDF, em função das Eq. 5 e Eq. 6, respectivamente.

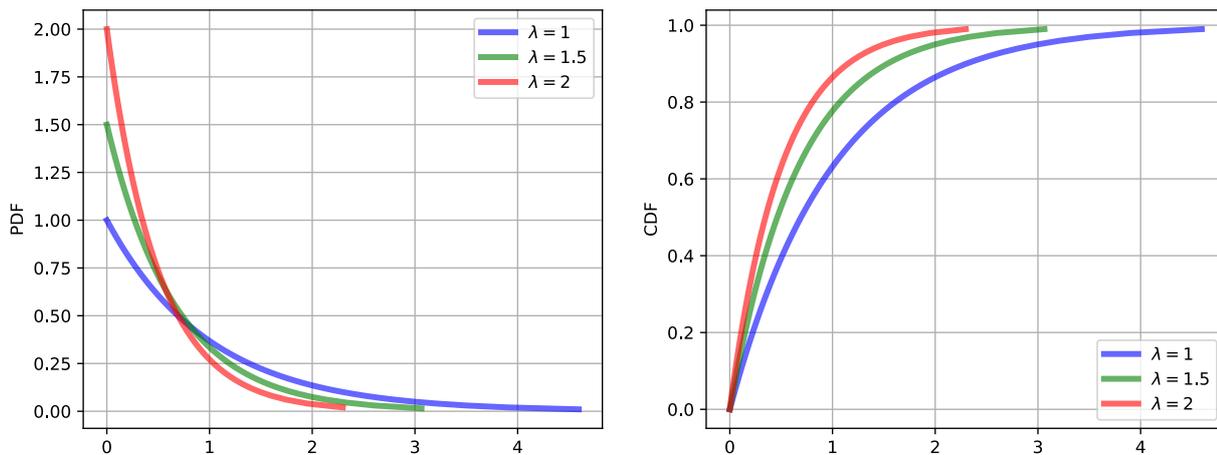
$$f_X(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$F_X(x, \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

O valor esperado de uma variável aleatória exponencial é  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ , enquanto que sua variância é dada por  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

A Fig. 1 traz exemplos de distribuições aleatórias exponenciais ao se variar o parâmetro de forma  $\lambda$ .

Figura 1 – Distribuição exponencial



Fonte: Autor (2022).

Dentre os usos da distribuição exponencial, está a modelagem do tempo entre falhas, como quando as unidades possuem uma taxa constante e instantânea de falha. A distribuição exponencial é um caso especial da distribuição gama.

### 2.1.3.2 Distribuição Uniforme

A distribuição uniforme é a mais simples de se trabalhar, visto que a probabilidade de se gerar um evento em um intervalo contido no espaço amostral é inversamente proporcional ao tamanho do intervalo. A PDF e a CDF da distribuição uniforme são dadas, respectivamente, pelas Eq. 7 e Eq. 8.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (7)$$

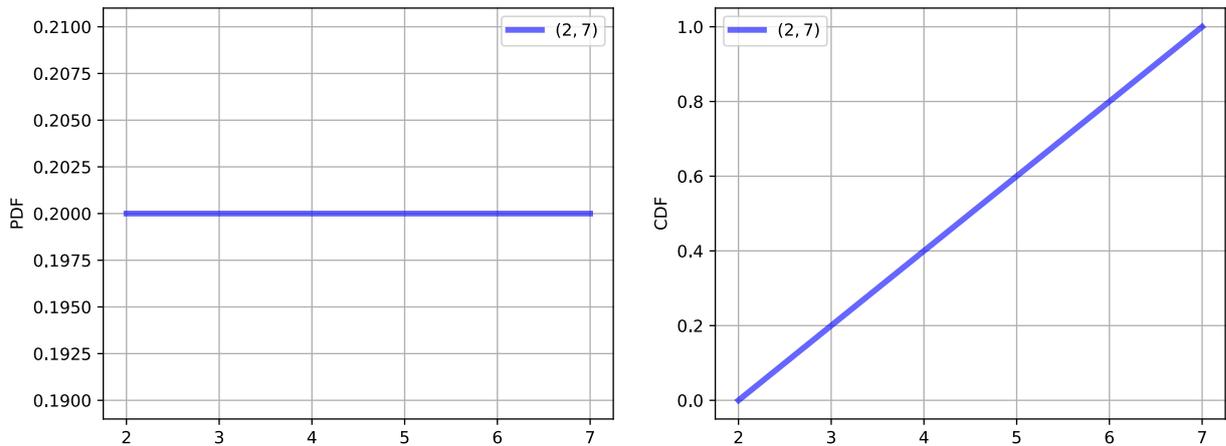
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (8)$$

Nessas equações, os parâmetros  $a$  e  $b$  são os extremos que definem o intervalo sobre o qual a variável aleatória está contida.

O valor esperado de uma variável aleatória uniforme é  $E[X] = \frac{a+b}{2}$ , enquanto que sua variância é dada por  $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

A seguir, na Fig. 2, é apresentado um exemplo de distribuição aleatória uniforme para o caso em que  $a = 2$  e  $b = 7$ . Este exemplo evidencia a constante da densidade de probabilidades associada a cada um dos pontos dentro intervalo definido.

Figura 2 – Distribuição uniforme



Fonte: Autor (2022).

### 2.1.3.3 Distribuição Gaussiana

A distribuição gaussiana, ou normal, é uma das mais conhecidas e importantes distribuições de probabilidades. Sobre ela, fundamenta-se a base da estatística descritiva e seus variados testes de hipótese.

Ela é definida em função da média ( $\mu$ ) e do desvio padrão ( $\sigma$ ), pelos quais se define sua notação mais usual:  $N(\mu; \sigma)$ .

A PDF e a CDF da distribuição de probabilidades normal são dadas, respectivamente, pelas Eq. 9 e Eq. 10.

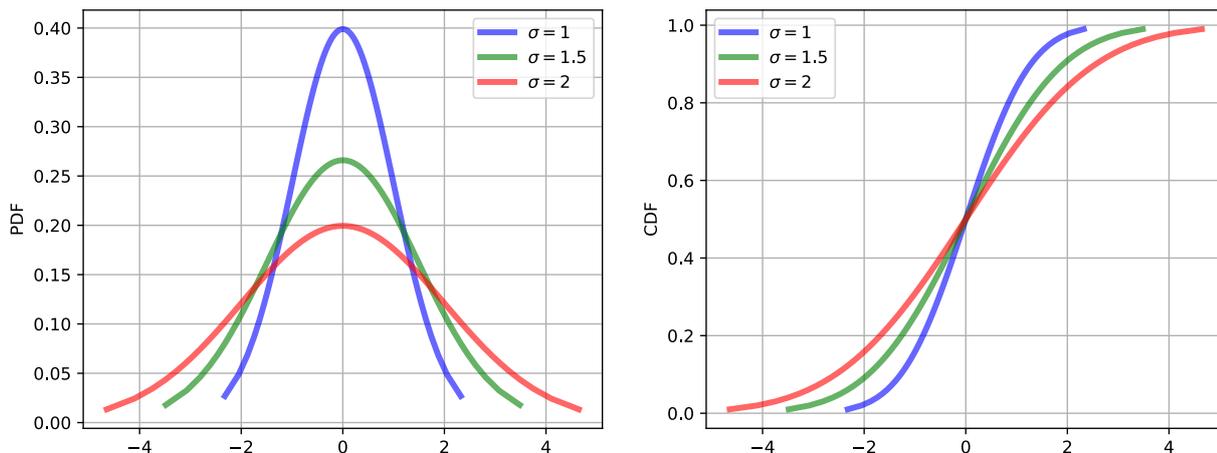
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (9)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x-\mu}{\sigma \cdot \sqrt{2}} \right) \right] \quad (10)$$

Na Eq. 10 é observado o termo  $\operatorname{erf}$  que denota a função de erro de Gauss, oriunda da inexistência de uma solução analítica trivial para a integração da Eq. 9, o que motiva a utilização de técnicas de integração numérica.

A Fig. 3 traz exemplos de variáveis aleatórias gaussianas, nos quais é fixado o parâmetro da média ( $\mu = 0$ ) e varia-se o parâmetro do desvio padrão.

Figura 3 – Distribuição gaussiana



Fonte: Autor (2022).

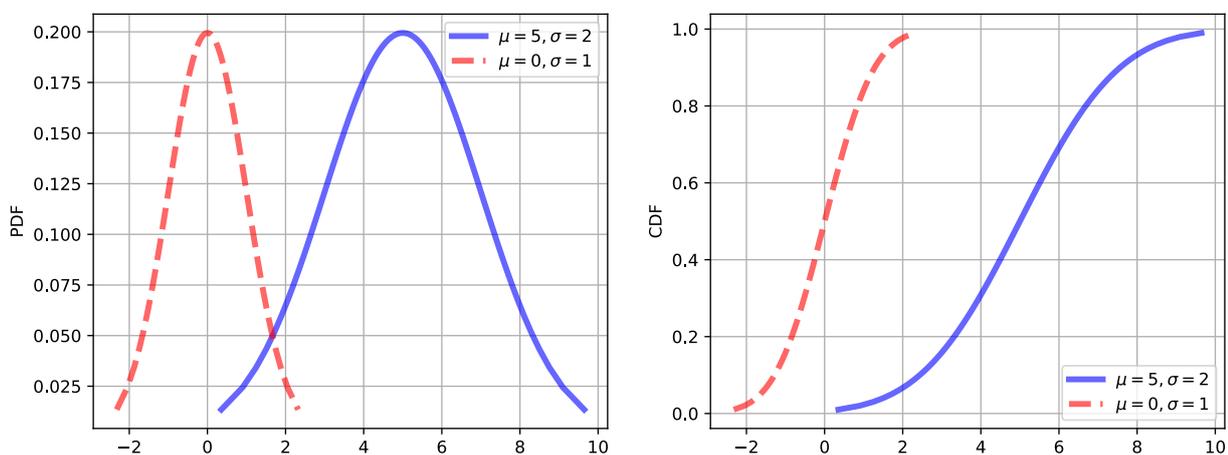
Um caso específico da distribuição de probabilidades gaussianas ocorre para  $N(0; 1)$ , a qual é denominada de normal padrão, ou reduzida, e é de vital importância para as implementações desenvolvidas na Seção 3.2, em virtude da integração de um CDF multivariável de distribuições normais reduzidas possuir uma solução de menor complexidade.

Em aplicações de confiabilidade há a necessidade de trabalhar nesse espaço reduzido, em virtude de suas características matemáticas singulares, de modo que a transformação dada pela Eq. 11 é bastante utilizada.

$$x^* = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \quad (11)$$

Esta transformação consiste em mapear todos os pontos  $x$  pertencentes a uma distribuição normal qualquer  $X$  para o espaço normal reduzido por meio de um translado da média  $\mu$ , e posterior escalonamento pelo desvio padrão.

Figura 4 – Distribuição normal e normal reduzida



Fonte: Autor (2022).

## 2.2 Distribuição Normal Equivalente

Já sabido do interesse de se trabalhar com variáveis no espaço normal reduzido, é de grande valia poder aproximar uma distribuição qualquer por uma distribuição gaussiana equivalente (*NE*) em um ponto  $x^*$  qualquer. Essa transformação consiste em estabelecer que as PDF e CDF de ambas as distribuições sejam numericamente iguais num dado ponto  $x^*$ , conforme a Eq. 12.

$$\begin{cases} f_X(x^*) = f_{NE}(x^*) \\ F_X(x^*) = F_{NE}(x^*) \end{cases} \quad (12)$$

A utilização de normais equivalentes está diretamente relacionada com o emprego dos métodos semi-analíticos a serem vistos na Seção 3.2.

## 2.3 Transformações Isoprobabilísticas

Uma transformação isoprobabilística trata-se de um mapeamento que leva do espaço original das variáveis aleatórias para um espaço mais conveniente de se trabalhar, como o normal padrão, preservando-se o conteúdo de probabilidades. Uma maneira de realizar esta transformação é por meio do cálculo da CDF da distribuição original, cujo resultado alimenta a inversa da CDF da distribuição de interesse, conforme a Eq. 13:

$$x^* = F_{X^*}^{-1} [F_X(x)] \quad (13)$$

em que  $x$  e  $x^*$  são, respectivamente, o ponto de interesse pertencente a variável aleatória  $X$  original e a sua transformação para o espaço de probabilidades da distribuição de interesse representada pela variável aleatória  $X^*$ .

As transformações isoprobabilísticas são empregadas para garantir que as distribuições de variáveis aleatórias de entrada para a determinação dos coeficientes do polinômio de caos, a ser visto no Capítulo 4, respeitem as limitações e domínios dos polinômios ortonormais empregados.

### 2.3.1 Exemplo de Aplicação

Admite-se um experimento aleatório cujos resultados podem ser descritos por uma variável aleatória de distribuição de probabilidades exponencial com parâmetro de forma  $\lambda = 1.5$ . Deseja-se realizar a transformação desta v.a. para o espaço normal reduzido.

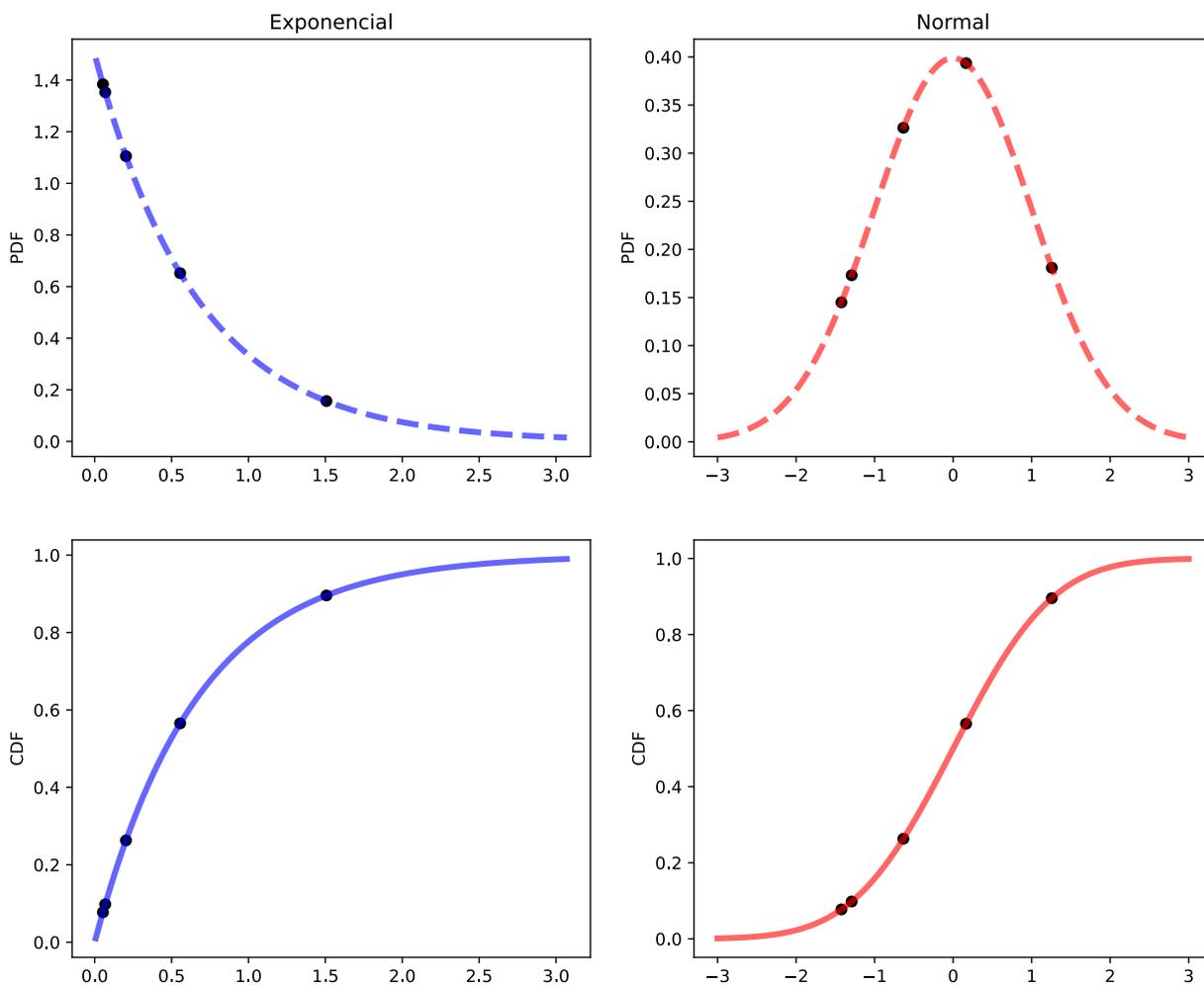
A Tabela 1 que segue traz exemplos de pontos pertencentes a distribuição exponencial mencionada anteriormente e suas respectivas transformações para o espaço normal reduzido.

Tabela 1: Exemplo - Transformações isoprobabilísticas

Exponencial		Normal padrão	
Ponto	CDF	Ponto	CDF
0.5556	0.5654	0.1648	0.5654
0.0688	0.0981	-1.2921	0.0981
0.2035	0.2631	-0.6337	0.2631
1.5071	0.8957	1.2575	0.8957
0.0537	0.0774	-1.4227	0.0774

Ainda, é possível verificar a exatidão do método, visto que a informação probabilística é transportada para o novo espaço fazendo com que os valores de CDF coincidam.

Figura 5 – Transformação isoprobabilística



Fonte: Autor (2022).

### 3 TEORIA DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

*“Esta cova em que estás, com palmos medida, é a conta menor que tiraste em vida. É de bom tamanho, nem largo nem fundo, é a parte que te cabe deste latifúndio.”*

– Morte e Vida Severina por João Cabral de Melo Neto

A crescente complexidade dos problemas de engenharia estrutural demanda maior arrojado de seus modelos de análise, inclusive no que diz respeito à consideração da variabilidade inerente aos parâmetros de geometria, carregamentos, propriedades dos materiais, dentre outros.

Dessa forma, a Teoria da Confiabilidade Estrutural objetiva modelar essas incertezas como v.a. e assim, estimar a probabilidade de que um elemento estrutural atinja um determinado estado limite ou deixe de atender às especificações de projeto (MELCHERS; BECK, 2017).

Essas v.a são avaliadas segundo uma função de falha que busca representar uma condição a qual se deseja verificar.

#### 3.1 Incertezas, Estados Limite e Probabilidade de Falha

Os modelos matemáticos que buscam representar os fenômenos físicos são baseados em parâmetros dotados de incertezas. A quantificação dessas incertezas, por meio da teoria da confiabilidade estrutural, permite calcular a probabilidade de falha de um elemento estrutural e ainda, determinar em que momento um estado limite é atingido (SAGRILO; LIMA, 2002), ou deixa de atender às especificações de projeto (BECK, 2019). Para tal, os parâmetros envolvidos são admitidos no problema como variáveis aleatórias e avaliados segundo uma função de falha ( $G$ ), baseado em algum estado limite ou condição que se deseja verificar.

#### 3.2 Métodos de Transformação

Uma das maneiras de se avaliar uma função de falha é por meio de algoritmos semi-analíticos cuja formulação matemática se baseia em encontrar a menor distância entre a origem do espaço normal padrão e a superfície de falha ( $G = 0$ ). A essa mínima distância, dá-se o nome de índice de confiabilidade ou Beta de Cornell (BECK, 2019).

De maneira geral, os métodos semi-analíticos possuem um baixíssimo custo computacional, quando comparados aos métodos de simulação, a serem apresentados mais adiante. Contudo, problemas de otimização sofrem limitações quanto à natureza e à não linearidade da função analisada, ao tipo e ao número de variáveis aleatórias consideradas no problema, o que pode resultar na convergência para soluções que não são ótimos globais.

Os itens que se sucedem citam brevemente alguns métodos semi-analíticos passíveis.

### **3.2.1 *First-Order Second-Moment Method - FOSM***

Segundo Gouveia (2014), o FOSM consiste em inicialmente transformar as variáveis aleatórias do problema em variáveis aleatórias gaussianas reduzidas por meio da transformação da Eq. 11. Adicionalmente, a equação de estado limite também é transformada para o espaço gaussiano reduzido, por meio da transformação de Hasofer e Lind (MELCHERS; BECK, 2017).

### **3.2.2 *First-Order Reliability Method - FORM***

Uma das limitações e requisitos para o emprego do FOSM é a necessidade de que as variáveis aleatórias de entrada do problema sejam gaussianas e não correlacionadas.

O FORM supera essas limitações por meio de um conjunto de transformações analíticas que trazem maior robustez à correspondência entre variáveis aleatórias no espaço original e variáveis aleatórias no espaço reduzido (GOUVEIA, 2014). Para tal, destacam-se as transformações de Rosenblatt e de Nataf, cujos detalhes em específico podem ser vistos em Beck (2019) ou em Melchers e Beck (2017).

Após considerar as transformações mencionadas anteriormente, o algoritmo segue as mesmas etapas do FOSM.

### **3.2.3 *Second-Order Reliability Method - SORM***

O FOSM e o FORM aproximam a superfície de falha de maneira linear, o que para equações de estado limite não lineares, ou variáveis aleatórias fortemente correlacionadas, pode levar a resultados não tão satisfatórios. Nesses casos, o emprego do SORM é mais indicado, pois ele consiste na aproximação de segunda ordem da equação de estado limite no espaço reduzido (GOUVEIA, 2014).

Em acordância com Gouveia (2014), recomenda-se a metodologia proposta por Breitung (1984), pela qual há uma aproximação parabólica baseada nas curvaturas da equação de estado limite no espaço reduzido.

## **3.3 Métodos de Simulação**

Os métodos de simulação são, em geral, mais custosos computacionalmente, visto que a qualidade da resposta não depende da não linearidade da função de falha, nem do número de variáveis aleatórias consideradas e sim, quase que exclusivamente, do número de cenários simulados.

Nesta categoria de métodos, para uma dada função de falha  $G$ , tem-se que um cenário simulado pode ser:

- $G > 0$  - Evento seguro;
- $G \leq 0$  - Evento de falha.

Dessa forma, a probabilidade de falha ( $P_f$ ) é calculada por meio da Eq. 14:

$$P_f = \frac{N_f}{N_t} \quad (14)$$

em que  $N_f$  e  $N_t$  são, respectivamente, o número de eventos de falha e o número total de eventos simulados. Para fins deste trabalho, é de especial interesse converter os valores obtidos de  $P_f$  em índice de confiabilidade, por meio da expressão:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (15)$$

em que  $\Phi$  é a CDF da distribuição gaussiana padrão.

### 3.3.1 Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo gera resultados bastante satisfatórios, desde que um número adequado de cenários seja testado. Contudo, para probabilidades de falha muito baixas, onde se faz necessário que um grande número de simulações seja realizado para alcançar respostas adequadas, o tempo demandado pode tornar proibitiva a implementação deste método.

Um número de cenários adequado pode ser calculado pela Eq. 16, ao se fixar valores para a probabilidade de falha alvo e para seu coeficiente de variação (COV).

$$COV = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N_t \cdot P_f}} \quad (16)$$

A amostragem simples tradicionalmente empregada em simulações de Monte Carlo não garante o cobertura total do domínio e nem que haja unicidade dos pontos amostrados, o que naturalmente leva a uma grande quantidade de pontos sendo testados em regiões do domínio que não são de interesse.

A fim de garantir uma maior agilidade na avaliação de probabilidades de falha por simulação, podem ser empregadas técnicas de amostragem inteligente, que levam a uma redução do número de pontos testados e, conseqüentemente, diminuição do tempo demandado, sem comprometer a qualidade do resultado obtido. Para maiores detalhes acerca das possíveis técnicas, recomenda-se o capítulo de Técnicas de Redução da Variância de Beck (2019) e o trabalho desenvolvido em Santos e Beck (2015).

### 3.3.1.1 Amostragem por Hipercubo Latino

A amostragem por Hipercubo Latino (LHS) é uma das estratégias de redução de variância apresentadas por Beck (2019), onde também é dado um algoritmo para a geração do Hipercubo. Esta técnica consiste em dividir o domínio de cada variável aleatória em faixas, de modo a gerar uma amostragem esparsa e homogênea, o que resulta num menor número de pontos necessários para o recobrimento do domínio.

Entretanto, a aplicação a qual é destinada esta técnica não é voltada para simulações e sim, para a obtenção dos pontos necessários ao ajuste dos polinômios de caos.

## 3.4 Exemplo de Aplicação

A fim de exemplificar os conteúdos abordados nesta seção, adota-se o estudo de caso do chamado problema fundamental da confiabilidade, cuja função de falha é dada por:

$$G(\tilde{R}, \tilde{S}) = \tilde{R} - \tilde{S} \quad (17)$$

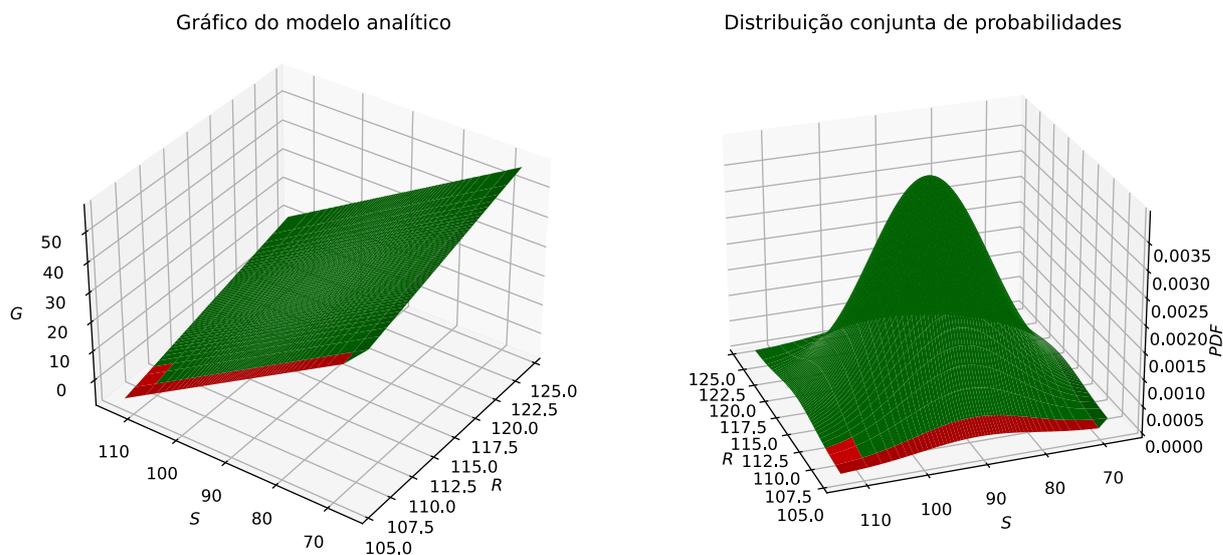
em que  $\tilde{R}$  e  $\tilde{S}$  são, genericamente e respectivamente, variáveis aleatórias de resistência e de solicitação de um elemento estrutural qualquer, cujos parâmetros são dados pela Tabela 2:

Tabela 2: Exemplo - Confiabilidade estrutural

	$\mu$	$\sigma$	Distribuição
R	115 kN	4 kN	Gaussiana
S	90 kN	10 kN	Gaussiana

A Fig. 6 traz o gráfico da Eq. 17 em conjunto com a densidade conjunta de probabilidades das variáveis aleatórias da Tabela 2, onde, em vermelho, também é possível ver o domínio de falha do problema.

**Figura 6 – Exemplo de aplicação de confiabilidade estrutural**



Fonte: Autor (2022).

Este exemplo é retirado de Gouveia (2014), no qual é calculada a probabilidade de falha de 1.05%, o que corresponde a um índice de confiabilidade de 2.30, para um número de 28171 cenários simulados, correspondentes a um COV de 5% no valor estimado de  $P_f$ .

O presente trabalho arbitra um número 10e6 cenários para a simulação de Monte Carlo e obtém uma probabilidade de falha de 1.01%, equivalente a um índice de confiabilidade de 2.32. Ao se empregar diretamente o método semi-analítico FOSM, obtém-se também o valor de 2.32 para o Beta de Cornell.

A implementação do FOSM e o modelo de entrada de dados necessário são disponibilizados no Apêndice.

## 4 EXPANSÃO EM POLINÔMIOS DE CAOS

— O meu nome é Severino, como não tenho outro de pia. Como há muitos Severinos, que é santo de romaria, deram então de me chamar Severino de Maria; como há muitos Severinos com mães chamadas Maria, fiquei sendo o da Maria do finado Zacarias. Mas isso ainda diz pouco: há muitos na freguesia, por causa de um coronel que se chamou Zacarias e que foi o mais antigo senhor desta sesmaria. Como então dizer quem fala ora a Vossas Senhorias? Vejamos: é o Severino da Maria do Zacarias, lá da serra da Costela, limites da Paraíba. Mas isso ainda diz pouco: se ao menos mais cinco havia com nome de Severino filhos de tantas Marias mulheres de outros tantos, já finados, Zacarias, vivendo na mesma serra magra e ossuda em que eu vivia. Somos muitos Severinos iguais em tudo na vida: na mesma cabeça grande que a custo é que se equilibra, no mesmo ventre crescido sobre as mesmas pernas finas, e iguais também porque o sangue que usamos tem pouca tinta. E se somos Severinos iguais em tudo na vida, morremos de morte igual, mesma morte severina: que é a morte de que se morre de velhice antes dos trinta, de emboscada antes dos vinte, de fome um pouco por dia (de fraqueza e de doença é que a morte Severina ataca em qualquer idade, e até gente não nascida). Somos muitos Severinos iguais em tudo e na sina: a de abrandar estas pedras suando-se muito em cima, a de tentar despertar terra sempre mais extinta, a de querer arrancar algum roçado da cinza.”

– Morte e Vida Severina por João Cabral de Melo Neto

Segundo Kroetz (2015), a ideia básica por trás de se realizar uma Expansão em Polinômios de Caos (EPC) é considerar que a resposta do sistema possa ser mapeada através de suas coordenadas em um espaço gerado pela base de polinômios de caos.

Dessa forma, ao respeitarem a condição da ortonormalidade, a resposta  $Y$  do sistema pode ser expressa pela Eq. 18, a seguir:

$$Y \approx \sum_{i=0}^N a_i \cdot \psi_i \quad (18)$$

em que  $a_i$  e  $\psi_i$  são, respectivamente, o  $i$ -ésimo coeficiente de mapeamento da resposta e o  $i$ -ésimo polinômio multivariado.

### 4.1 Polinômios Ortonormais

A ortonormalidade entre dois polinômios  $P_n$  e  $P_m$  com relação a alguma medida real positiva  $\zeta$  é satisfeita se a igualdade expressa pela Eq. 19 for válida (XIU, 2010):

$$\int_S P_n(x) \cdot P_m(x) d\zeta(x) = \gamma \cdot \delta_{nm} \quad (19)$$

na qual  $S$  é o suporte da medida  $\zeta$ ,  $\gamma$  é um inteiro positivo denominado de constante de normalização e  $\delta_{nm}$  é conhecido como delta de Kronecker (KROETZ, 2015).

De modo geral, os polinômios que obedecem a condição de ortonormalidade para com as curvas de distribuição de probabilidades podem ser utilizados como base para expansões de polinômios de caos.

As famílias clássicas de polinômios estão enumeradas e hierarquizadas em Andrews e Askey (1985) e, mais recentemente atualizadas, em Koekoek, Lesky e Swarttouw (2010).

As principais famílias de polinômios, no escopo do presente trabalho, são apresentadas nos itens que seguem.

#### 4.1.1 Polinômios de Legendre

Os Polinômios de Legendre são definidos no domínio  $[-1, 1]$  e, também, são ortogonais às variáveis aleatórias com distribuição uniforme sob o mesmo domínio.

O  $n$ -ésimo polinômio desta família pode ser obtido pela Eq. 20, enquanto que a relação de recorrência dada pela Eq. 21, permite gerar polinômios de um grau qualquer.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (20)$$

$$(n + 1) \cdot P_{n+1}(x) = (2 \cdot n + 1) \cdot x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x) \quad (21)$$

Os seis primeiros Polinômios de Legendre estão reunidos na Tabela 3.

Tabela 3: Polinômios de Legendre

$n$	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{(3 \cdot x^2 - 1)}{2}$
3	$\frac{(5 \cdot x^3 - 3 \cdot x)}{2}$
4	$\frac{(5 \cdot x^4 - 30 \cdot x^2 + 3)}{8}$
5	$\frac{(63 \cdot x^5 - 70 \cdot x^3 + 15 \cdot x)}{8}$

#### 4.1.2 Polinômios de Hermite

Os Polinômios de Hermite são definidos no domínio  $[0, 1]$  e são ortogonais às variáveis com distribuição normal padrão.

O  $n$ -ésimo polinômio desta família pode ser obtido pela Eq. 22, enquanto que a relação de recorrência dada pela Eq. 23, permite gerar polinômios de um grau qualquer.

$$He_n(x) = (-1)^n \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (22)$$

$$He_{n+1}(x) = x \cdot He_n(x) - He_{n-1}(x) \quad (23)$$

Os seis primeiros Polinômios de Hermite estão reunidos na Tabela 4.

Tabela 4: Polinômios de Hermite

$n$	$He_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$x^2 - 1$
3	$x^3 - 3 \cdot x$
4	$x^4 - 6 \cdot x^2 + 3$
5	$x^5 - 10 \cdot x^3 + 15 \cdot x$

## 4.2 Estimativa da Performance

A estimativa da performance do metamodelo de Expansão em Polinômios de Caos, segundo Liu et al. (2020), pode ser avaliada pela Eq. 24.

$$R_{\zeta_{EPC}}^2 = 1 - \frac{\zeta_{EPC}}{Var(Y)} \quad (24)$$

Os termos  $\zeta_{EPC}$  e  $Var(Y)$  são dados, respectivamente, pelas Eq. 25 e Eq. 26, onde  $M(x_n)$  é a resposta do modelo original e  $\hat{M}(x_n)$  é a resposta do metamodelo no ponto de avaliação  $x_n$ . Por fim, seja  $y$  o vetor de respostas obtidos por  $\hat{M}(x_n)$ ,  $y^n$  e  $\bar{y}$  são, respectivamente, a  $n$ -ésima resposta do metamodelo e a média das respostas calculadas nos  $N$  pontos amostrais considerados.

$$\zeta_{EPC} = \left( \frac{1}{N} \right) \cdot \sum_{n=1}^N ((M(x_n) - (\hat{M}(x_n))))^2 \quad (25)$$

$$Var(Y) = \sum_{n=1}^N \frac{(y^n - \bar{y})^2}{N - 1} \quad (26)$$

Para cenários de alto custo computacional, esta técnica torna-se proibitiva em razão do alto número de pontos demandados para a estimativa da performance do metamodelo. Para mais informações acerca de outras técnicas passíveis de serem utilizadas, consultar Liu et al. (2020).

## 4.3 Polinômios Multivariados

Kroetz (2015) afirma que polinômios simples associados a funções de probabilidades unidimensionais não são capazes de representar a resposta de modelos multi-

variados mais complexos. Logo, Soize e Ghanem (2005) demonstram que o conjunto de polinômios multivariados com índices formados por todas as bases possíveis são necessários e adequados para representar a resposta de sistemas heterogêneos.

Sendo assim, uma base polinomial para um problema de  $N_v$  variáveis e grau de truncamento  $p$  é formada por  $P$  termos, conforme a Eq. 27.

$$P = \frac{(N_v + p)!}{N_v! \cdot p!} \quad (27)$$

O algoritmo para a geração dessa base polinomial multivariada é proposto por Sudret, Berveiller e Lemaire (2006), o qual é baseado numa analogia de distribuição de  $N_v - 1$  bolas em  $N_v + p - 1$  caixas.

Na pouca esperteza do Autor, esta analogia é demasiadamente complexa. Então, admite-se que o polinômio multivariado possa ser gerado programaticamente pela combinação de todas as bases unidimensionais numa estrutura de repetição aninhada, de modo que o somatório dos índices do grau da base não supere o valor estipulado para o grau de truncamento.

A fim de facilitar o entendimento sobre a construção da base de polinômios multivariados, recomenda-se que o Leitor consulte a Tabela 4.3 em Kroetz (2015), a qual deriva de um exemplo desenvolvido por Sudret, Blatman e Berveiller (2013).

Um modelo de código empregado para a construção da base polinomial multivariada é dado no Apêndice.

#### 4.4 Exemplos de Validação

A título de validação das implementações desenvolvidas, reproduzem-se alguns dos problemas vistos em Kroetz (2015). Para tal, adotam-se as seguintes considerações:

- $p = 4$  ;
- $N^{LHS} = 2 \cdot P$ ;
- $N^{MC} = 10^6$ .

Onde  $N^{LHS}$  e  $N^{MC}$  são, respectivamente, o número de pontos amostrados por Hipercubo Latino e o número de simulações realizadas por amostragem simples para o cálculos da probabilidade de falha dos problemas e, conseqüentemente, do índice de confiabilidade.

As variáveis aleatórias adotadas são do tipo normal padrão,  $N(0; 1)$ . Ainda, para efeitos de reprodutibilidade dos resultados aqui obtidos, adota-se a semente (*seed*) 123456 para a geração dos números pseudoaleatórios.

#### 4.4.1 Exemplo 01 - Equação de Estado Limite Linear

O exemplo inicial é uma função de estado limite linear, cuja expressão é dada a seguir.

$$G(\vec{X}) = 2 \cdot X_1 - X_2 + 5 \quad (28)$$

A equação de estado limite possui duas variáveis aleatórias ( $N_v = 2$ ), logo  $P = 15$  e, conseqüentemente,  $N^{LHS} = 30$ . O polinômio multivariado é dado na Eq. 29, em que  $B_{ij}$  são coeficientes a serem determinados com  $i$  e  $j$  fazendo referência, respectivamente, as variáveis  $X_1$  e  $X_2$ .

$$\begin{aligned} G(\vec{X}) \approx & X_1 \cdot X_2 \cdot B_{11} - X_1 \cdot X_2 \cdot B_{13} \cdot (3 - X_2^2) - X_1 \cdot X_2 \cdot B_{31} \cdot (3 - X_1^2) \\ & + X_1 \cdot B_{10} + X_1 \cdot B_{12} \cdot (X_2^2 - 1) - X_1 \cdot B_{30} \cdot (3 - X_1^2) + \\ & X_2 \cdot B_{01} - X_2 \cdot B_{03} \cdot (3 - X_2^2) + X_2 \cdot B_{21} \cdot (X_1^2 - 1) + \\ & B_{00} + B_{02} \cdot (X_2^2 - 1) + B_{04} \cdot (X_2^4 - 6 \cdot X_2^2 + 3) + \\ & B_{20} \cdot (X_1^2 - 1) + B_{22} \cdot (X_1^2 - 1) \cdot (X_2^2 - 1) + B_{40} \cdot (X_1^4 - 6 \cdot X_1^2 + 3) \end{aligned} \quad (29)$$

Os coeficientes são então calculados pelo método dos mínimos quadrados e apresentados na Tabela 5.

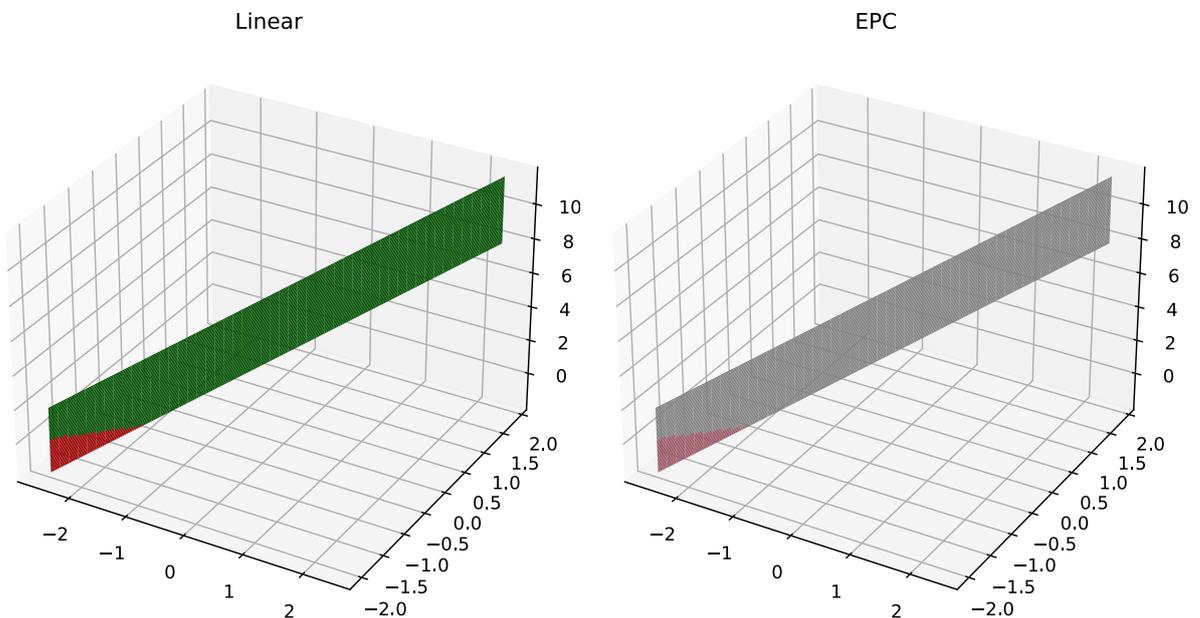
Tabela 5: Exemplo 01 - Coeficientes ajustados

Coeficiente	Valor
$B_{00}$	4.99999999e+00
$B_{01}$	-9.99999994e-01
$B_{02}$	-2.54003434e-08
$B_{03}$	3.00081645e-09
$B_{04}$	-7.58751099e-09
$B_{10}$	1.99999998e+00
$B_{11}$	-3.88458207e-08
$B_{12}$	-1.11518572e-09
$B_{13}$	1.14325869e-09
$B_{20}$	-1.00010821e-08
$B_{21}$	-1.88834568e-09
$B_{22}$	-5.94048458e-09
$B_{30}$	-1.21346948e-08
$B_{31}$	-1.78844644e-08
$B_{40}$	-3.95077847e-09

É válido mencionar que muitos dos coeficientes apresentados na Tabela 5 assumem valores praticamente nulos, o que resulta na própria Eq. 28. A importância destas aproximações está diretamente ligada às funções de falha de maior complexidade, ou dependentes de modelos numéricos, cujos mapeamentos das respostas necessitam de mais termos significativos para os coeficientes.

A comparação entre as respostas obtidas pelo modelo analítico original e pelo polinômio de caos pode ser realizada visualmente na Fig. 7. Ainda, a Tabela 6 traz os resultados, em termos do índice de confiabilidade, obtidos pela análise confiabilística de Kroetz (2015) e os compara com os obtidos no presente trabalho.

**Figura 7 – Exemplo de validação 01**



Fonte: Autor (2022).

**Tabela 6: Exemplo 01 - Validação**

	<b>Modelo Original</b>	<b>EPC</b>	
	<b>MC</b>	<b>MC</b>	<b>FOSM</b>
<b>Kroetz (2015)</b>	2.23	2.23	-
<b>Autor</b>	2.23	2.23	2.23

De posse das respostas, verifica-se que os resultados coincidem e, conseqüentemente, validam-se as implementações desenvolvidas.

Ainda, constata-se que o cálculo do índice de confiabilidade por meio do emprego de métodos semianalíticos aplicados ao Polinômio de Caos é possível, o que reduz ainda mais o tempo necessário para avaliar a confiabilidade de problemas mais complexos. A título de comparação, considerando o hardware empregado, 10e6 simula-

ções de Monte Carlo necessitam de, aproximadamente, 5 minutos para serem concluídas. Em contrapartida, o método iterativo FOSM leva menos de um segundo para convergir para a resposta adequada.

#### 4.4.2 Exemplo 02 - Equação de Estado Limite Polinomial

Em seguida, utiliza-se uma função de falha de estado limite polinomial de três variáveis aleatórias, cuja expressão é dada na Eq. 30. Visto que  $N_v = 3$ , calcula-se o número de termos da base polinomial ( $P = 35$ ) e, conseqüentemente, tem-se que  $N^{LHS} = 70$ .

$$G(\vec{X}) = 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2^2 - X_1 \cdot X_3^3 + 10 \quad (30)$$

O polinômio multivariado é dado na Eq. 31, em que  $B_{ijk}$  são coeficientes a serem determinados com  $i, j$  e  $k$  fazendo referência, respectivamente, as variáveis  $X_1, X_2$  e  $X_3$ .

$$\begin{aligned} G(\vec{X}) \approx & X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot B_{111} + X_1 \cdot X_2 \cdot B_{110} + X_1 \cdot X_2 \cdot B_{112} \cdot (X_3^2 - 1) - \\ & X_1 \cdot X_2 \cdot B_{130} \cdot (3 - X_3^2) - X_1 \cdot X_2 \cdot B_{310} \cdot (3 - (X_1^2)) + X_1 \cdot X_3 \cdot B_{101} - X_1 \cdot \\ & X_3 \cdot B_{103} \cdot (3 - X_3^2) + X_1 \cdot X_3 \cdot B_{121} \cdot (X_2^2 - 1) - X_1 \cdot X_3 \cdot B_{301} \cdot (3 - X_1^2) + X_1 \cdot \\ & B_{100} + X_1 \cdot B_{102} \cdot (X_3^2 - 1) + X_1 \cdot B_{120} \cdot (X_2^2 - 1) - X_1 \cdot B_{300} \cdot (3 - X_1^2) + X_2 \cdot X_3 \cdot \\ & B_{011} - X_2 \cdot X_3 \cdot B_{013} \cdot (3 - X_3^2) - X_2 \cdot \\ & X_3 \cdot B_{031} \cdot (3 - X_2^2) + X_2 \cdot X_3 \cdot B_{211} \cdot (X_1^2 - 1) + X_2 \cdot B_{010} + X_2 \cdot B_{012} \cdot (X_3^2 - 1) - \\ & X_2 \cdot B_{030} \cdot (3 - X_2^2) + X_2 \cdot B_{210} \cdot (X_1^2 - 1) + \\ & X_3 \cdot B_{001} - X_3 \cdot B_{003} \cdot (3 - X_3^2) + X_3 \cdot B_{021} \cdot (X_2^2 - 1) + X_3 \cdot B_{201} \cdot (X_1^2 - 1) + B_{000} + \\ & B_{002} \cdot (X_3^2 - 1) + B_{004} \cdot (X_3^4 - 6 \cdot X_3^2 + 3) + B_{020} \cdot (X_2^2 - 1) + B_{022} \cdot (X_2^2 - 1) \cdot (X_3^2 - 1) + \\ & B_{040} \cdot (X_2^4 - 6 \cdot X_2^2 + 3) + B_{200} \cdot (X_1^2 - 1) + B_{202} \cdot (X_1^2 - 1) \cdot (X_3^2 - 1) + B_{220} \cdot (X_1^2 - 1) \cdot \\ & (X_2^2 - 1) + B_{400} \cdot (X_1^4 - 6 \cdot X_1^2 + 3) \end{aligned} \quad (31)$$

Os coeficientes ajustados são dados na Tabela 7.

Tabela 7: Exemplo 02 - Coeficientes ajustados

<b>Coeficiente</b>	<b>Valor</b>
$B_{000}$	1.20000001e+01
$B_{001}$	1.63966506e-07
$B_{002}$	8.48869771e-08
$B_{003}$	5.70860241e-08
$B_{004}$	-1.14340422e-08
$B_{010}$	3.32841349e-09
$B_{011}$	3.23565004e-07
$B_{012}$	9.77293215e-09
$B_{013}$	1.03394576e-07
$B_{020}$	2.00000014e+00
$B_{021}$	1.12466826e-07
$B_{022}$	1.56606369e-07
$B_{030}$	-3.76970398e-09
$B_{031}$	1.57168877e-08
$B_{040}$	2.49523639e-08
$B_{100}$	4.00000013e+00
$B_{101}$	-2.99999987e+00
$B_{102}$	1.00429155e-07
$B_{103}$	-1.00000000e+00
$B_{110}$	9.50186747e-08
$B_{111}$	5.48487946e-08
$B_{112}$	2.22124913e-07
$B_{120}$	1.81597325e-08
$B_{121}$	1.63291241e-07
$B_{130}$	-7.12747018e-09
$B_{200}$	7.96254092e-08
$B_{201}$	3.82883993e-09
$B_{202}$	1.49521647e-07
$B_{210}$	6.97391696e-08
$B_{211}$	1.57586051e-07
$B_{220}$	-1.99144464e-08
$B_{300}$	5.03491178e-08
$B_{301}$	2.07378654e-08
$B_{310}$	1.65600536e-08
$B_{400}$	2.12625005e-08

Os resultados da avaliação de confiabilidade são então comparados com os de Kroetz (2015) na Tabela 8.

Tabela 8: Exemplo 02 - Validação

	Modelo Original	EPC	
	MC	MC	FOSM
<b>Kroetz (2015)</b>	2.11	2.11	-
<b>Autor</b>	2.11	2.11	2.55

No tocante a resposta obtida pelo FOSM, conjectura-se que a aproximação polinomial não teve a sensibilidade necessária para o cálculo do correto índice de confiabilidade. As possíveis soluções seriam:

- Aumentar o grau de truncamento do polinômio;
- Aumentar o número de pontos empregados no ajuste dos coeficientes (sob o risco de *overfitting*);
- Empregar métodos semianalíticos mais robustos (SORM) capazes de lidar com a não linearidade do polinômio.

Visto que a função de falha é não linear, a solução a ser adotada consiste em utilizar o método semianalítico SORM.

O aumento do grau de truncamento do polinômio resultaria em mais termos nulos, sem qualquer ganho de proficiência do metamodelo em captar a superfície de falha. O *overfitting*, ou sobreajuste, consiste na ineptidão do modelo de fornecer resultados coerentes para valores testados fora do conjunto de dados empregados na obtenção dos coeficientes de mapeamento.

#### 4.4.3 Exemplo 03 - Equação de Estado Limite Exponencial

O último exemplo de validação consiste numa equação de estado limite exponencial dada pela Eq. 32.

$$G(\vec{X}) = e^{0.2 \cdot X_1 + 1.4} - X_2 \quad (32)$$

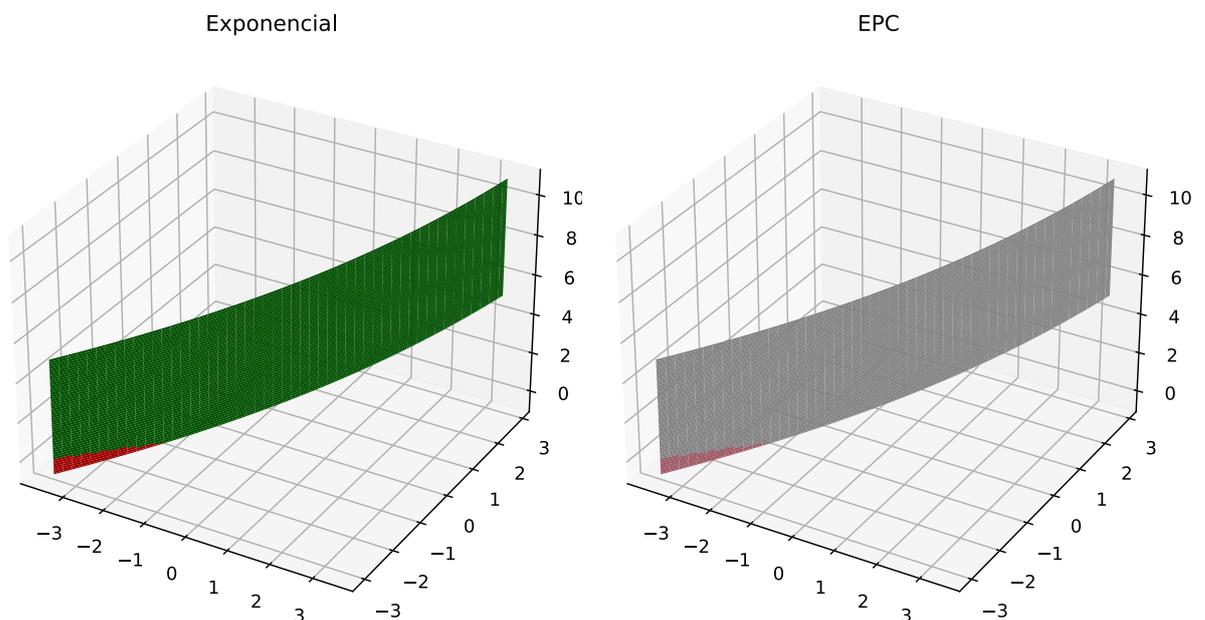
Visto que o Exemplo 03 possui o mesmo número de variáveis normais do Exemplo 01, o polinômio a ser utilizado corresponde ao mesmo da Eq. 29. Os coeficientes ajustados são dados na Tabela 9.

Tabela 9: Exemplo 03 - Coeficientes ajustados

Coeficiente	Valor
$B_{00}$	4.13704694e+00
$B_{01}$	-1.00010201e+00
$B_{02}$	-5.87563525e-05
$B_{03}$	-5.89689411e-06
$B_{04}$	-3.51562749e-07
$B_{10}$	8.27519007e-01
$B_{11}$	1.28770538e-04
$B_{12}$	5.32455328e-05
$B_{13}$	1.13133481e-05
$B_{20}$	8.26512632e-02
$B_{21}$	-9.48892877e-05
$B_{22}$	-5.53244719e-05
$B_{30}$	5.49305438e-03
$B_{31}$	2.38255513e-05
$B_{40}$	2.66039642e-04

A Fig. 8 traz uma análise visual comparativa da aproximação obtida pela Expansão em Polinômios de Caos, na qual é identificada a região de falha do problema para o cálculo adequado do índice de confiabilidade, conforme a Tabela 10.

Figura 8 – Exemplo de validação 03



Fonte: Autor (2022).

Tabela 10: Exemplo 03 - Validação

	<b>Modelo Original</b>	<b>EPC</b>	
	<b>MC</b>	<b>MC</b>	<b>FOSM</b>
<b>Kroetz (2015)</b>	3.36	3.36	-
<b>Autor</b>	3.39	3.39	3.35

O exemplo de estado limite exponencial apresenta respostas diferentes das estabelecidas em Kroetz (2015), tanto para o modelo original, quanto para o metamodelo desenvolvido. Essas discrepâncias podem estar associadas à maneira de como os números pseudoaleatórios são gerados, visto que o número de simulações adotado é o mesmo em ambos os estudos.

Em consonância com o que foi apresentado no Exemplo 02, a aproximação linear do FOSM não é suficientemente robusta para se adequar a equação de estado limite em questão, a qual exige uma aproximação de maior ordem.

## 5 RESULTADOS

*"Não faço nada pelo bem de ninguém e, decerto, faço mal a algumas pessoas."*

– Paulo Mendes Campos

O estudo de caso final consiste numa análise paramétrica da aplicação de Expansão de Polinômios de Caos em um problema *benchmark* da literatura.

A investigação busca avaliar os efeitos na resposta confiabilística ao variar:

- O grau de truncamento do polinômio de caos -  $p = 3, 5, 7$  e  $9$ ;
- O número de pontos utilizados no ajuste dos coeficientes -  $N = 1x, 2x, 3x, 4x$  e  $5x$ .

A variação do número de pontos empregados consiste em utilizar múltiplos do número mínimo de pontos necessários. Por exemplo, um polinômio de duas variáveis aleatórias e grau de truncamento 7, pela Eq. 27, possui 36 termos e necessita minimamente de 36 pontos para que seus coeficientes sejam ajustados. Dessa forma, os números de pontos a serem analisados são 36, 72, 108, 144 e 180.

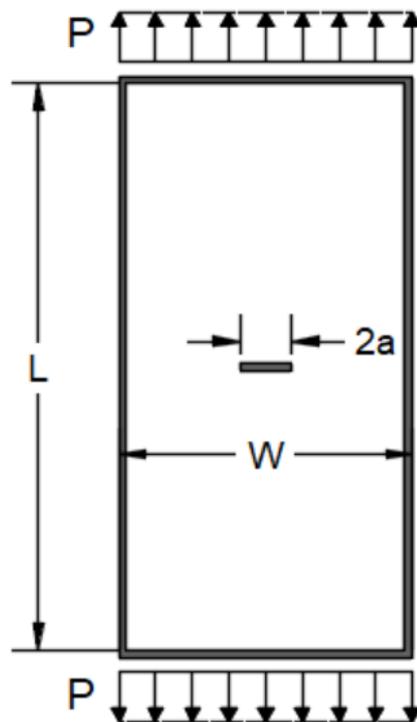
A resposta é dada em função do índice de confiabilidade, o qual é calculado por 10e6 simulações de Monte Carlo com amostragem simples e pelo método semi-analítico FOSM.

Além disso, também se busca avaliar o tempo necessário para a obtenção da resposta, no caso do emprego de simulações de Monte Carlo, para quantificar o impacto de se aumentar a complexidade do polinômio sobre o custo computacional.

### 5.1 Aplicação

O problema escolhido é retirado de Broek (1982) e consiste numa chapa tracionada com uma fratura em seu centro, vide Fig. 9.

Figura 9 – Chapa tracionada com fratura central



A equação de estado limite do problema é dada na Eq. 33:

$$G(\vec{X}) = \frac{K_c}{\sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[ 1 + 0.256 \cdot \left(\frac{a}{w}\right) - 1.152 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 12.2 \cdot \left(\frac{a}{w}\right)^3 \right]} - P \quad (33)$$

em que:

- $W$  - Largura da chapa ( $m$ );
- $a$  - Comprimento inicial da fratura ( $m$ );
- $P$  - Carga de superfície aplicada ( $\frac{kN}{m}$ );
- $K_c$  - Fator de intensidade da tensão crítica ( $\frac{kN}{m^{\frac{3}{2}}}$ ).

As variáveis aleatórias consideradas são apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11: Problema final - Variáveis aleatórias

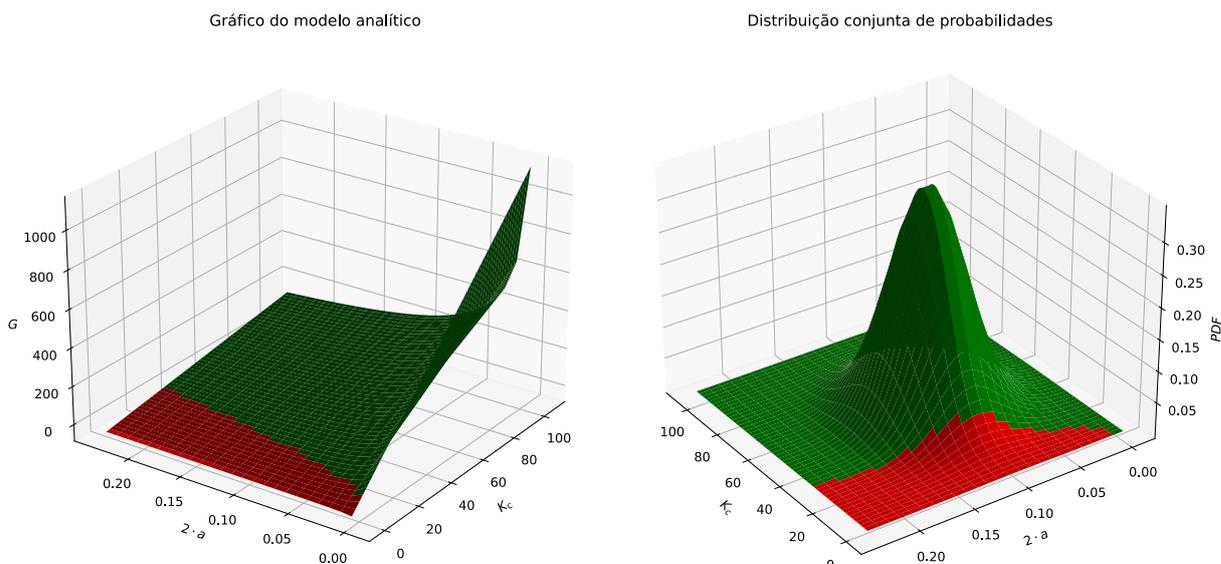
Variáveis Aleatória	Distribuição	$\mu$	$\sigma$
$2 \cdot a$	Gaussiana	0.1	0.03
$K_c$	Gaussiana	50.0	15.0

Leonel (2009) calculou o valor de 1.966 para o índice de confiabilidade deste problema. Contudo, ao realizar a simulação de  $10^6$  cenários foi atingida uma probabili-

dade de falha de 2.36% que é equivalente ao índice de confiabilidade de 1.983, sendo este adotado como referência para os resultados a serem obtidos por metamodelagem.

A Fig. 10 traz o gráfico da solução analítica do problema e a densidade conjunta de probabilidades, na qual está destacado, em vermelho, o domínio de falha do problema.

**Figura 10 – Problema do estudo paramétrico**



Fonte: Autor (2022).

## 5.2 Discussões

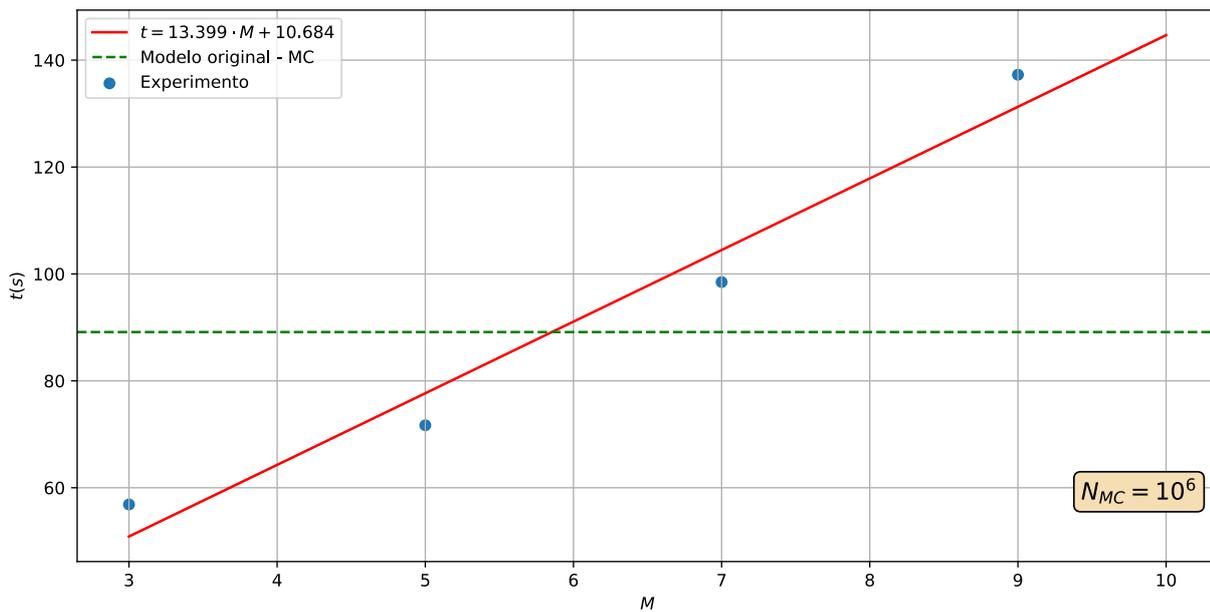
Os resultados obtidos são discutidos nos itens que seguem.

### 5.2.1 Avaliação do Custo Computacional

A avaliação do custo computacional se dá por meio da análise do tempo necessário para que sejam realizadas  $10^6$  simulações de Monte Carlo para cada um dos graus de truncamento dos polinômios de caos.

A Fig. 11 traz o comparativo dos tempos necessários, onde cada ponto corresponde à média dos cinco experimentos realizados para cada grau.

Figura 11 – Comparativo do tempo necessário para simular  $10^6$  cenários



Fonte: Autor (2022).

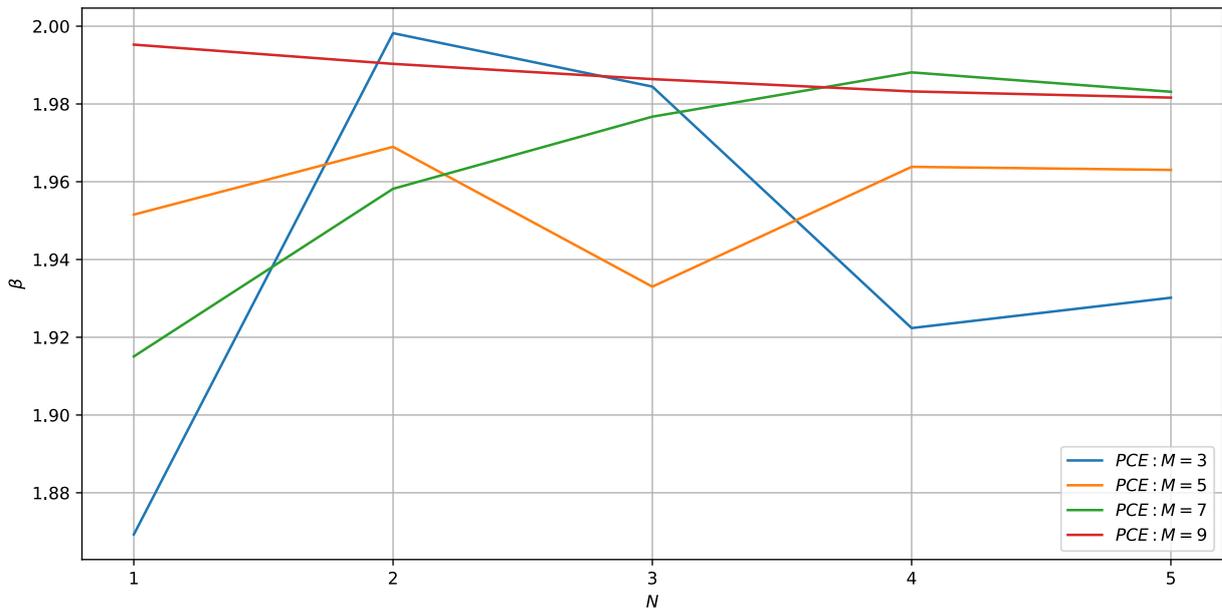
Por meio da figura anterior é evidenciada uma dependência linear entre a complexidade do polinômio e o tempo necessário para que sejam concluídas as simulações. O polinômio com grau de truncamento sete possui, aproximadamente, o mesmo custo computacional que o modelo original.

### 5.2.2 Avaliação da Resposta Confiabilística

Inicialmente, realiza-se a comparação dos índices de confiabilidade obtidos por simulação de Monte Carlo.

A Fig. 12 mostra que o polinômio de grau 7 obteve uma melhora significativa e proporcional ao número de pontos empregados no ajuste. O polinômio de grau 9 apresentou uma resposta inicial muito próxima do referencial, seguida de uma rápida estabilização.

**Figura 12 – Comparação dos índices de confiabilidade obtidos por simulação de Monte Carlo**

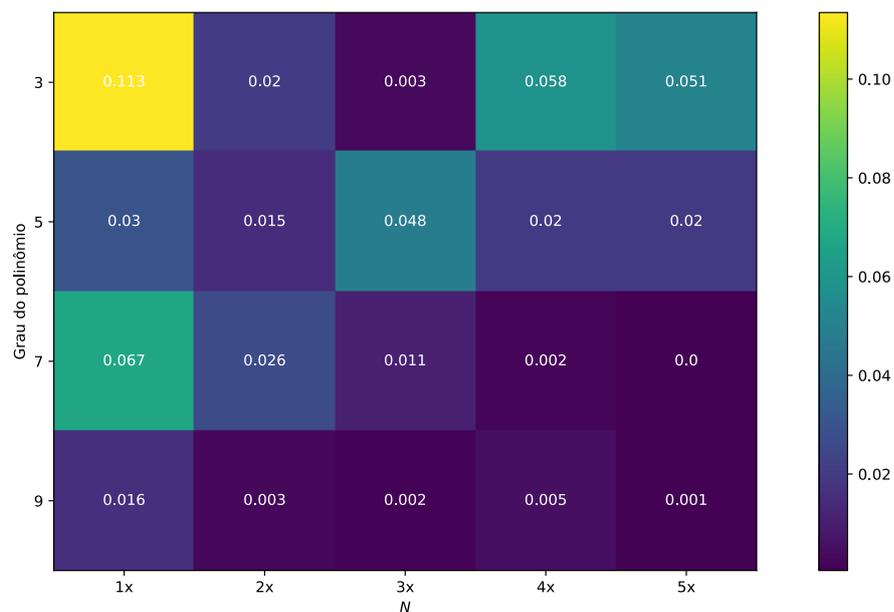


Fonte: Autor (2022).

Os demais graus manifestaram alta variabilidade da resposta à medida que o número de pontos empregados aumenta, o que é condizente com o *overfitting* do meta-modelo.

O resumo das respostas obtidas é dado pela Fig. 13, na qual estão mapeados os graus e números de pontos utilizados, em função da diferença absoluta entre o índice de confiabilidade calculado e o de referência.

**Figura 13 – Resumo dos índices de confiabilidade obtidos por simulação de Monte Carlo**



Fonte: Autor (2022).

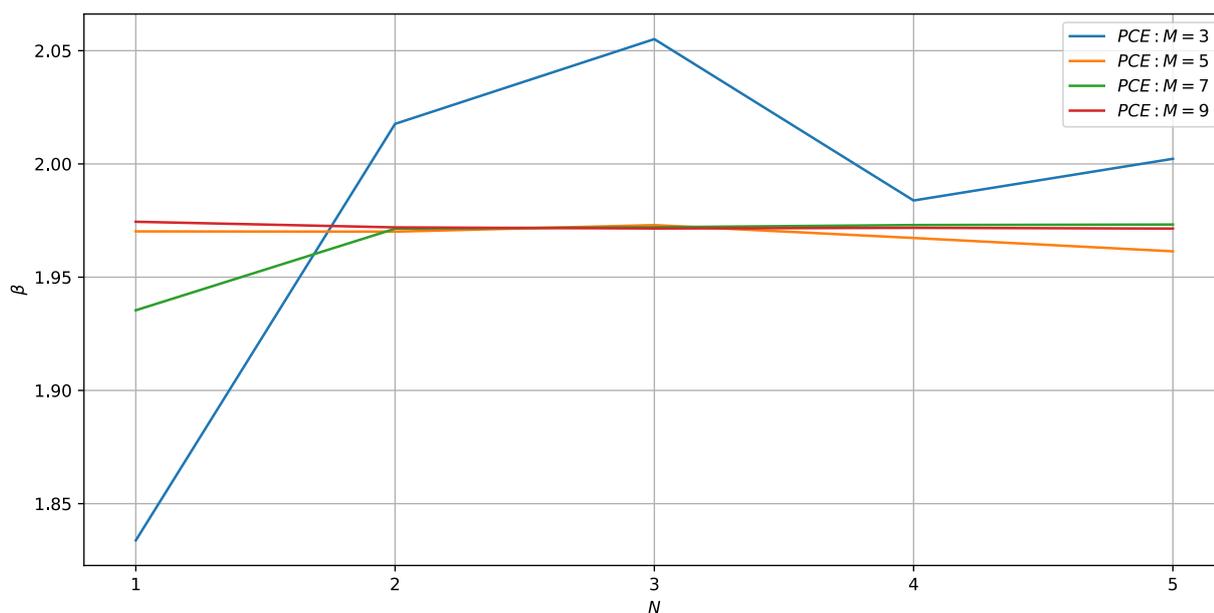
Por meio da Fig. 13, verifica-se que o metamodelo de grau 7 ajustado com 5x o

número mínimo de pontos convergiu para a resposta de referência.

Em seguida, emprega-se o FOSM para calcular o índice de confiabilidade do problema.

A evolução das respostas é dada na Fig. 14, pela qual verifica-se uma rápida convergência dos graus 5, 7 e 9, evidenciando a sensibilidade dos metamodelos em captar a superfície de falha do problema.

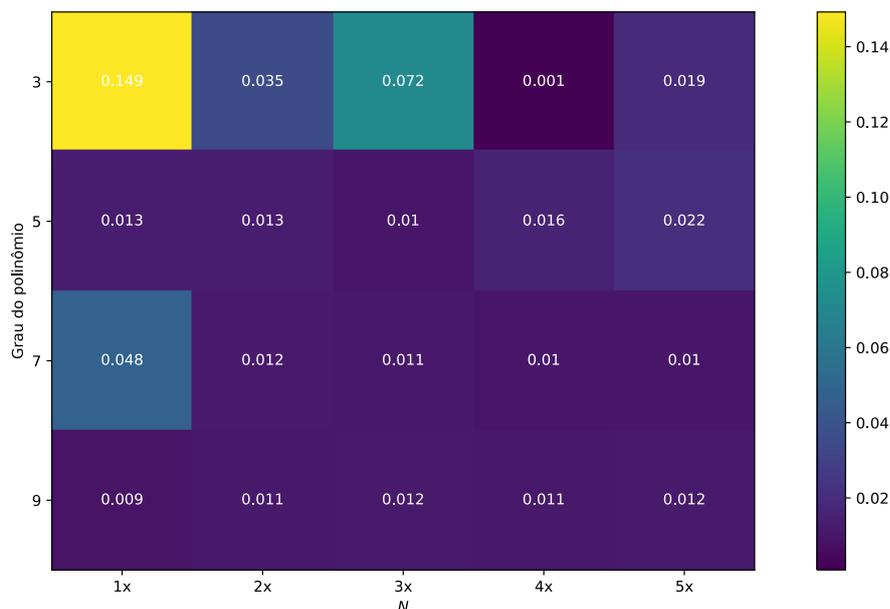
Figura 14 – Comparação dos índices de confiabilidade obtidos por FOSM



Fonte: Autor (2022).

Os resumo das respostas obtidas é dado pela Fig. 15, na qual estão mapeados os graus e números de pontos utilizados, em função da diferença absoluta entre o índice de confiabilidade calculado e o de referência.

Figura 15 – Resumo dos índices de confiabilidade obtidos por FOSM



Fonte: Autor (2022).

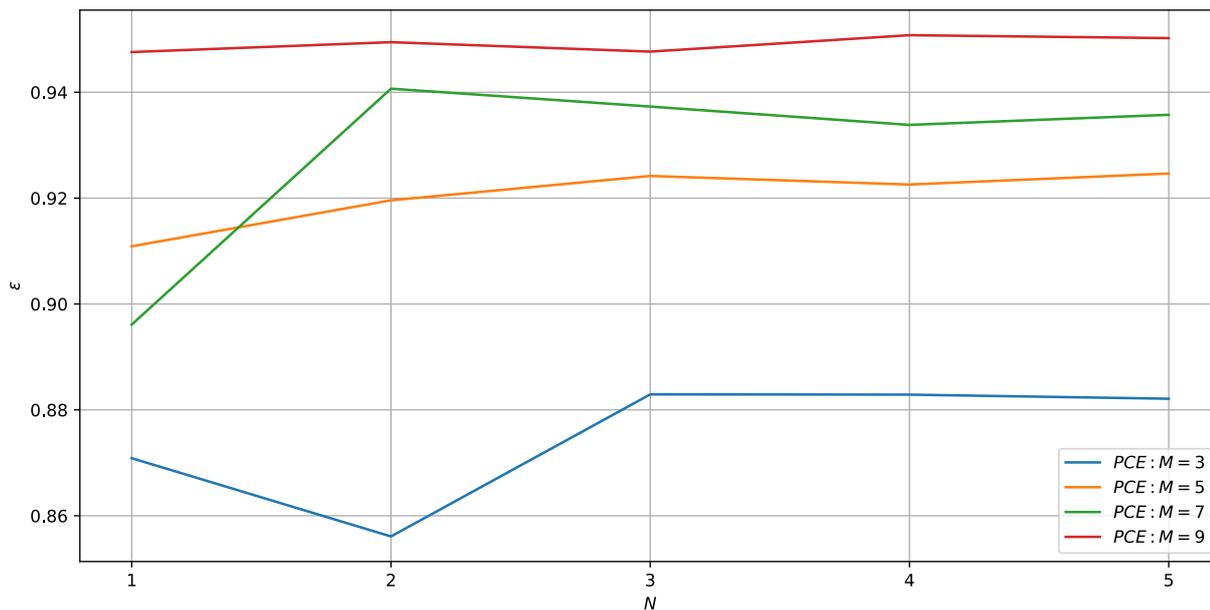
Por meio da Fig. 15, verifica-se que nenhum metamodelo convergiu para a resposta de referência. Contudo, a aplicação de métodos semianalíticos é reforçada novamente, tendo em vista a qualidade da aproximação e o custo de obtenção da mesma, sem que sejam necessários metamodelos de maior complexidade e nem onerar o estudo por meio do ajuste de um grande número de pontos.

### 5.2.3 Avaliação da Performance dos Metamodelos

A estimativa da performance de cada um dos metamodelos desenvolvidos é realizada segundo a métrica apresentada no item 4.2. Para tal, é realizada uma amostragem de 1000 pontos por Hipercubo Latino, a fim de recobrir todo domínio do problema e segundo a semente 123456.

O estudo da eficiência dos polinômios é apresentado na Fig. 16. Nele, constata-se que quanto maior o grau do polinômio, melhor a resposta obtida para o mesmo ponto. Contudo, aumentar o número de pontos empregados no ajuste, não necessariamente implica na melhoria da qualidade da resposta.

Figura 16 – Performance dos metamodelos



Fonte: Autor (2022).

É sabido que, pela métrica escolhida, o número de pontos utilizado não é suficiente para determinar com exatidão a performance dos metamodelos. Contudo, acredita-se que a avaliação exaustiva não acrescentaria valor algum ao trabalho.

Dessa forma, por meio da Tabela 12, elegem-se os melhores metamodelos de cada grau.

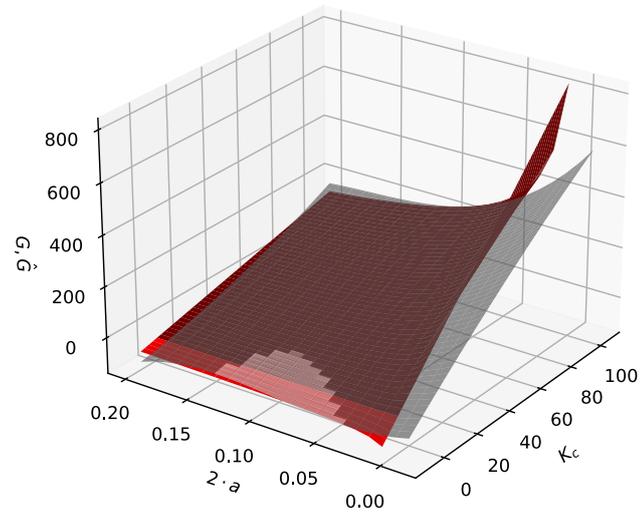
Tabela 12: Metamodelos escolhidos

Grau	Melhor ajuste
3	$N = 3x$
5	$N = 3x$
7	$N = 2x$
9	$N = 4x$

Por fim, os metamodelos escolhidos são apresentados nas figuras que seguem, na tentativa de explicitar visualmente a qualidade dos ajustes obtidos. Em vermelho e cinza, são expostos, respectivamente, a superfície do modelo original e o metamodelo de EPC.

**Figura 17 – Grau 3;  $N = 3x$** 

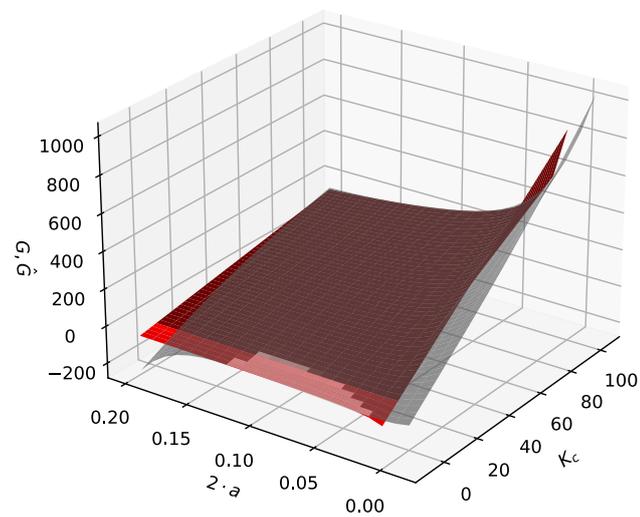
$$M = 3; N = 3$$



Fonte: Autor (2022).

**Figura 18 – Grau 5;  $N = 3x$** 

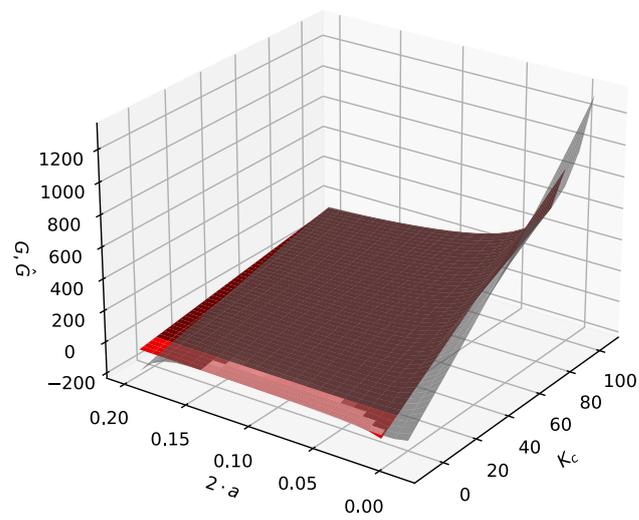
$$M = 5; N = 3$$



Fonte: Autor (2022).

**Figura 19 – Grau 7;  $N = 2x$** 

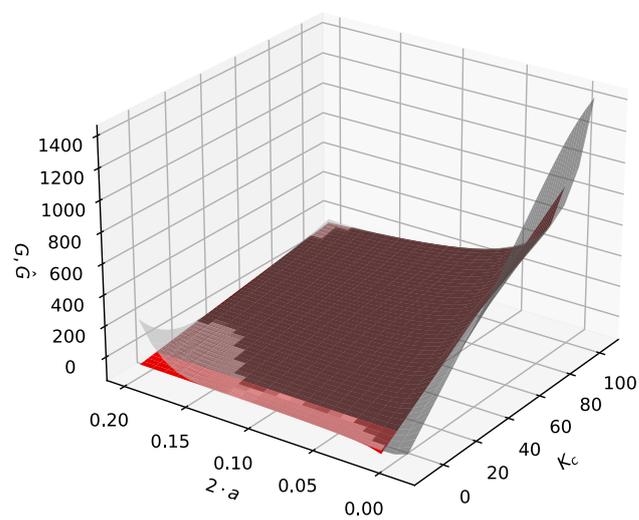
$$M = 7; N = 2$$



Fonte: Autor (2022).

**Figura 20 – Grau 9;  $N = 4x$** 

$$M = 9; N = 4$$



Fonte: Autor (2022).

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

*"Loucura, insensatez, estado inevitável, embalagem de iogurte inviolável."*

– Cabeça de Bagre II por Mamonas Assassinas

Com base no que foi exposto anteriormente, realiza-se as seguintes considerações:

- O emprego de métodos semi-analíticos para aferir ou obter estimativas iniciais do índice de confiabilidade é considerado viável. Esta opção é pouco explorada pela literatura e necessita de mais aprofundamento, mas oferece o potencial de reduzir ainda mais o custo computacional e o tempo necessário para avaliações de confiabilidade;
- As respostas obtidas por métodos semi-analíticos podem ser mais satisfatórias que as obtidas por simulações, se for considerado o custo-benefício de se avaliar exaustivamente o metamodelo desenvolvido;
- O grau de truncamento do polinômio de caos está diretamente associado a capacidade do mesmo de se adaptar as singularidades dos modelos em estudo, mas não influi necessariamente na qualidade da resposta obtida;
- O aumento indiscriminado do número de pontos empregados no ajuste dos coeficientes do polinômio de caos não implica necessariamente em melhorias na qualidade da resposta obtida e pode, até mesmo, incorrer no *overfitting* do metamodelo;
- É de maior valia garantir que a qualidade da amostragem dos pontos utilizados no ajuste, de modo a recobrir regiões de interesse para a aplicação desenvolvida;
- A métrica de avaliação da performance do metamodelo é considerada insuficiente e não pode ser utilizada para aferir o metamodelo de melhor desempenho. As limitações dessa técnica giram em torno da necessidade de se avaliar inúmeros pontos de teste, o que pode ser proibitivo, tendo em vista a existência dos mesmos ou, até mesmo, o custo necessário para obtê-los.

De posse dessas considerações, realiza-se as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Avaliar a resposta obtida por métodos semi-analíticos mais robustos quando empregados em metamodelos de EPC com variáveis aleatórias não normais;
- Avaliar técnicas de amostragem mais refinadas, diferentes do Hipercubo Latino, a fim de garantir um melhor e mais esparsa recobrimento do domínio;

- Avaliar diferentes métricas de performance dos metamodelos, como exemplo cita-se o *cross-validation* (KOHAVI, 1995);
- Avaliar o emprego de metamodelos de EPC em problemas de confiabilidade estrutural em série e em paralelo;
- Avaliar o emprego de metamodelos de EPC em problemas de otimização baseada em confiabilidade (RBDO).

## REFERÊNCIAS

- ANDREWS, G. E.; ASKEY, R. Classical orthogonal polynomials. p. 36–62, 1985.
- ANG, A.; TANG, W. Probability concepts in engineering. Wiley Sons, v. 1, 3 2006.
- BAPTISTA, R.; STOLBUNOV, V.; NAIR, P. B. Some greedy algorithms for sparse polynomial chaos expansions. *Journal of Computational Physics*, v. 387, p. 303–325, 6 2019. ISSN 00219991.
- BECK, A. T. Confiabilidade e segurança das estruturas. GEN LTC, 2019.
- BREITUNG, K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 110, 1984. ISSN 0733-9399.
- BROEK, D. Elementary engineering fracture mechanics. *Elementary engineering fracture mechanics*, 1982.
- GOUVEIA, L. P. Avaliação da confiabilidade em tubos de revestimento de poços de petróleo. 2014.
- JANOUCHOVÁ, E.; SÝKORA, J.; KUČEROVÁ, A. Polynomial chaos in evaluating failure probability: A comparative study. *Applications of Mathematics*, v. 63, p. 713–737, 12 2018.
- JONES, E. et al. Scipy: Open source scientific tools for python, 2001 (<http://www.scipy.org/>). <Http://Www.Scipy.Org/>, 2015.
- KOEKOEK, R.; LESKY, P. A.; SWARTTOUW, R. F. Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- KOHAVI, R. A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection". proceedings of the fourteenth international joint conference on artificial intelligence. *International Conference on Emerging Trends in Computer and Electronics Engineering (ICETCEE 2012)*, v. 2, 1995. ISSN 10450823.
- KROETZ, H. M. Meta-modelagem em confiabilidade estrutural. 3 2015.
- LEONEL, E. D. Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga. 12 2009.
- LIU, Z. et al. Surrogate modeling based on resampled polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering System Safety*, v. 202, p. 107008, 10 2020. ISSN 09518320.
- LOUKREZIS, D.; GALETZKA, A.; GERSEM, H. D. Robust adaptive least squares polynomial chaos expansions in high-frequency applications. *International Journal*

*of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, v. 33, 11 2020. ISSN 0894-3370.

MELCHERS, R.; BECK, A. Structural reliability analysis and prediction. John Wiley Sons Ltd, 10 2017.

SAGRILO, L. V. S.; LIMA, E. C. P. Confiabilidade estrutural. notas de aula. 2002.

SANTOS, K. dos; BECK, A. A benchmark study on intelligent sampling techniques in monte carlo simulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 12, p. 624–648, 8 2015. ISSN 1679-7825.

SOIZE, C.; GHANEM, R. Physical systems with random uncertainties: Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 26, 2005. ISSN 10648275.

SUDRET, B.; BERVEILLER, M.; LEMAIRE, M. A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis. *European Journal of Computational Mechanics*, v. 15, 2006. ISSN 19585829.

SUDRET, B.; BLATMAN, G.; BERVEILLER, M. Response surfaces based on polynomial chaos expansions. *Construction Reliability*, John Wiley Sons, Inc., p. 147–167, 2 2013.

XIU, D. Numerical methods for stochastic computations. Princeton University Press, 7 2010.

ZHANG, Y.; XU, J. Efficient reliability analysis with a cda-based dimension-reduction model and polynomial chaos expansion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 373, p. 113467, 1 2021. ISSN 00457825.

## APÊNDICE A –

*"Pode copiar, só não faz igual!"*

– Autor Desconhecido

Para aqueles que, assim como o Autor, sentem uma ojeriza quase que visceral ao se depararem com esquemas de algoritmos computacionais, são fornecidos alguns dos códigos empregados neste trabalho. Contudo, antes de efetivamente exibi-los, deve-se comunicar que é sabido pelo Autor que grande parte dos códigos não estão otimizados, seja por procrastinação ou mera falta de vontade de fazê-lo.

Dessa forma, cabe ao digníssimo Leitor ter parcimônia no uso direto e o entusiasmo em realizar as modificações necessárias para melhorá-los. Afinal, é sempre aporrrinhante começar do zero.

As implementações foram desenvolvidas na linguagem Python 3.9.1. O versionamento das bibliotecas é apresentado a seguir:

- Math - 3.10.2;
- Numpy - 1.20.3;
- Sympy - 1.9.

### A.1 Capítulo 3

#### A.1.1 Função - FOSM

```
def fosm(fun, vs):
    def HLRF():
        y0 = [0 for mean in means]
        beta0 = 0
        erro = 10
        while (erro > 0.000001):
            grad_y0 = [grad.subs([(eval(key), val) for key, val in
                                zip(vs.keys(), y0)]) for grad in grad_y]
            norm = (sum([grad**2 for grad in grad_y0]))**(1/2)
            g_y0 = new_fun.subs([(eval(key), val) for key, val in
                                zip(vs.keys(), y0)])
            alpha = (-1/norm)*(beta0 + g_y0/norm)
            y1 = [alpha*grad for grad in grad_y0]
            print(y1)
            norm_y0 = (sum([y**2 for y in y0]))**(1/2)
            norm_y1 = (sum([y**2 for y in y1]))**(1/2)
```

```

try:
    erro = float((norm_y1 - norm_y0)/norm_y0)
except:
    erro = 10
y0 = y1
beta0 = norm_y1
return(norm_y1)
from sympy import diff
import numpy as np
var = np.transpose([eval(key) for key in vs.keys()])
means = np.transpose([vs[key]['mean'] for key in vs.keys()])
Jxy = np.zeros((len(vs), len(vs)))
np.fill_diagonal(Jxy, [vs[key]['deviation'] for key in
vs.keys()])
new_var = (Jxy*var + means).diagonal()
new_fun = fun.subs([(eval(key), var) for key, var in
zip(vs.keys(), new_var)])
grad_y = [diff(new_fun, eval(key)) for key in vs.keys()]
return(HLRF())
a = fosm(fun, vs)

```

---

## A.1.2 Modelo de Entrada do FOSM

---

```

from sympy import symbols
R, S = symbols('R S')
fun = R - S
vs = {'R': {'mean': 115, 'deviation': 4}, 'S': {'mean': 90,
'deviation': 10}}

```

---

## A.2 Capítulo 4

### A.2.1 Função - Polinômio de Hermite de Grau $n$

---

```

def hermitePoly(x, n):
    from math import e
    from sympy import diff
    polyN = ((-1)**n)*(e**((x**2)/2))*diff(e**((-x**2)/2), x, n)
    return polyN

```

---

### A.2.2 Função - Polinômio de Legendre de Grau $n$

---

```
def legendrePoly(x, n):
    from math import factorial
    from sympy import diff
    polyN = (1/(factorial(n)*2**n))*diff(((x**2) - 1)**n, x, n)
    return polyN
```

---

### A.2.3 Função - Base de Polinômios de Chaos com Duas Variáveis Aleatórias Normais

---

```
def hermitePCE_2(m):
    x1, x2 = Symbol('A1'), Symbol('A2')
    n = 2*int(factorial(m + 2)/(factorial(m)*factorial(2)))
    basis = 0
    for i in range(m + 1):
        her1 = hermitePoly(x1, i)
        for j in range(m + 1):
            if i + j <= m:
                t = Symbol('B'+ str(i) + str(j))
                her2 = hermitePoly(x2, j)
                basis = basis + t*her1*her2
    f = lambdify(sorted(basis.free_symbols, key = lambda x:
        x.name if len(x.name) == 3 else x.name[0] + '0' +
        x.name[1]), basis)
    return(f, basis)
```

---