UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A MATEMÁTICA PARA O EXAME DE SELEÇÃO DO ENSINO MÉDIO INTEGRADO DO IFAL

LUIZ GABRIEL DOS SANTOS GOMES

Instituto de Matemática

Maceió, 10 de julho de 2020

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUIZ GABRIEL DOS SANTOS GOMES

A MATEMÁTICA PARA O EXAME DE SELEÇÃO DO ENSINO MÉDIO INTEGRADO DO IFAL

Maceió
2020

Luiz Gabriel dos Santos Gomes

A Matemática para o Exame de Seleção do Ensino Médio Integrado do IFAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Maceió

2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

G633m Gomes, Luiz Gabriel dos Santos.
A matemática para o exame de seleção do ensino médio integrado do IFAL / Luiz Gabriel dos Santos Gomes. - 2020.
163 f. : il.

Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 112-114.
Apêndices: f. 115-163

1. Matemática - Exames - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas. 2. Ensino médio. 3. Ensino integrado. 4. Ensino fundamental - 5ª. a 8ª. I. Título.

CDU: 372.851:377

Folha de Aprovação

LUIZ GABRIEL DOS SANTOS GOMES

A Matemática para o exame de seleção do Ensino Médio Integrado do IFAL

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 09 de junho de 2020.

Profª Drª Juliana R. Theodoro de Lima
Instituto de Matemática - UFAL
SIAPE: 2347015

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima – UFAL (Orientadora)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Luiz Flores – UFAL (Examinador Interno)

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior – ICMC-USP (Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo que me proporcionou para que passasse por todas as fases de minha formação.

Agradeço aos meus pais, Maria José (Lelê) e Jaelson, por todo o apoio, carinho e dedicação que tiveram para não deixar faltar nada em casa, por me acolherem e me proporcionarem a melhor educação possível. Sem vocês, nada do que conquistei seria possível.

Aos meus familiares em geral por todo o apoio, carinho e incentivo durante toda a minha trajetória. Em especial, aos meus avós, que hoje não pertencem mais a este plano, Sebastião Maurício (pai da minha mãe) e Maria Aparecida (mãe da meu pai) que sempre torceram por mim e nunca deixaram de me apoiar em minhas escolhas. A vocês deixo meu muito obrigado.

A minha companheira, Letícia, por me apoiar, puxar minha orelha quando preciso, me aconselhar e acreditar em mim, por respeitar os meus momentos e minha ausência sempre que foi necessário.

Aos meus amigos, que sempre me ajudaram quando precisei e souberam respeitar minha ausência. Em especial, Alex Bruno, Clewerton e Rinaldo pelo carinho, preocupação e amizade.

Aos meus colegas de curso, em geral, pelos anos de convivências e aprendizado. Em especial, a André, Adriana, Denise e Vitor (turma de Arapiraca), pela amizade edificada nesses anos de curso, pelas viagens, resenhas e pelo apoio.

A minha orientadora, professora Juliana, que sempre se mostrou disposta a ajudar em tudo que precisei para o desenvolvimento do trabalho, pelos incentivos e pela preocupação com seus alunos.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação.

"A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces".

Aristóteles

RESUMO

O presente trabalho trata da análise das provas de matemática do exame de seleção para o Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Alagoas (IFAL). Em particular, será apresentado um breve histórico dos conteúdos das provas dos últimos 10 anos, período compreendido entre 2010 e 2019, seguido da teoria dos conteúdos mais recorrentes e soluções de questões relevantes das provas analisadas, de acordo com a complexidade e os conteúdos recorrentes. Com isso, espera-se contribuir para ações voltadas à preparação dos candidatos que desejam ingressar na instituição, assim como informar, nortear e incentivar professores interessados em trabalhar com essa temática.

Palavras-chave: Matemática. Exame de seleção do IFAL. Ensino Médio Integrado. Ensino Fundamental II.

ABSTRACT

The present work deals with the analysis of the mathematical tests of the selection exam for the Integrated High School of the Federal Institute of Alagoas (IFAL). In particular, a brief history of the content of the tests from the last 10 years, from 2010 to 2019, will be presented, followed by the theory of the most recurring contents and solutions of relevant questions of the analyzed tests, according to the complexity and the recurring results. Thus, it is expected to contribute to actions aimed at the preparation of candidates who enter the institution, as they inform, guide and encourage teachers interested in working with this theme.

Keywords: Mathematics. IFAL selection exam. Integrated High School. Elementary School II.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas (IFAL), que teve sua história iniciada em 1909, é uma autarquia educacional que oferece cursos que vão desde Ensino Médio Integrado ao Técnico e Profissionalizante, ou simplesmente Ensino Médio Integrado, até a pós-graduação para todas as regiões do estado de Alagoas e, atualmente, conta com 16 unidades. Vale destacar que para ingressar no IFAL, o discente é submetido a alguma avaliação, a depender do nível de ensino, seja ele a educação básica ou superior.

De acordo com EDITAL N^{o} 20/2019/DSI/PROEN-IFAL (RETIFICADO), o ingresso do discente para cursar o Ensino Médio Integrado se dá por meio de uma prova objetiva que contém 40 questões com mesmo peso, sendo 18 delas de matemática. Assim, a disciplina tem quase metade da pontuação do exame de seleção e conta com 28 tópicos de matemática nos conteúdos programáticos referentes aos anos finais do Ensino Fundamental.

O presente trabalho tem como objetivo identificar os conteúdos de matemática mais recorrentes dos exames de seleção do IFAL aplicados nos últimos 10 anos, entre 2010 e 2019, para auxiliar alunos e professores de matemática do Ensino Fundamental II, assim como o próprio IFAL com seu programa de extensão PROIFAL, no desenvolvimento de ações que visem a preparação dos futuros candidatos para a disputa das vagas no Ensino Médio Integrado. Além disso, como consequência da dissertação, foi desenvolvido um e-book, cujo título é idêntico ao do trabalho, como material educacional de apoio para o desenvolvimento dessas atividades.

Apesar de existir apoio da própria instituição ajudando a comunidade a se preparar para a seleção, o que não ocorre necessariamente em todas as unidades, a justificativa para o tema se deu a partir de questionamentos relacionados a falta de material específico e gratuíto, que fosse amplamente divulgado, para o exame de seleção.

O trabalho está dividido em 5 capítulos, sendo o primeiro relacionado a informações relevantes sobre o Instituto Federal de Alagoas, abordando um pouco da sua história, distribuição de suas unidades dentro do estado, seus cursos de Ensino Médio Integrado e suas diretrizes com relação a educação, sobretudo sobre os três pilares: ensino, pesquisa e extensão (este último relacionado ao PROIFAL).

O segundo capítulo trata sobre pontos importantes do exame de seleção (como a estrutura da prova, datas importantes, etc), o levantamento dos conteúdos mais recorrentes das provas analisadas, relacionando com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). No terceiro e o quarto capítulo o leitor encontrará a teoria dos conteúdos que mais aparecem no exame de seleção, sobretudo os principais resultados. Por fim, o quinto capítulo é referente a algumas soluções das questões dos exames de seleção analisados anteriormente para tentar contribuir um pouco com o entendimento do conteúdo.

1 O IFAL E SUAS DIRETRIZES PARA A EDUCAÇÃO

De acordo com o Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI 2019-2023), o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas (IFAL) é uma instituição de ensino pública e gratuíta que oferta cursos desde o Ensino Tecnico Integrado ao Ensino Médio até a pós-graduação e tem como um dos seus principais objetivos uma formação integral de seus alunos no àmbito cultural, intelectual e profissional, de modo que o mesmo consiga enxergar a realidade, em seus mais diversos contextos, e possa contribuir para a melhoria da sociedade.

Tomando como base essas ideias, neste primeiro capítulo serão abordados alguns aspectos relevantes relacionados ao IFAL, explicando um pouco de sua história, expansão e suas diretrizes quanto a política de fortalecimento ao acesso, sobretudo dos estudantes de escolas públicas, permanência e êxito escolar no ensino médio tecnico e profissionalizante.

Para a produção deste capítulo serão tomadas como principais referências o Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI 2019-2023) e a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), Lei N^o 9.394, de dezembro de 1996.

1.1 Uma breve apresentação histórica do Instituto Federal de Alagoas

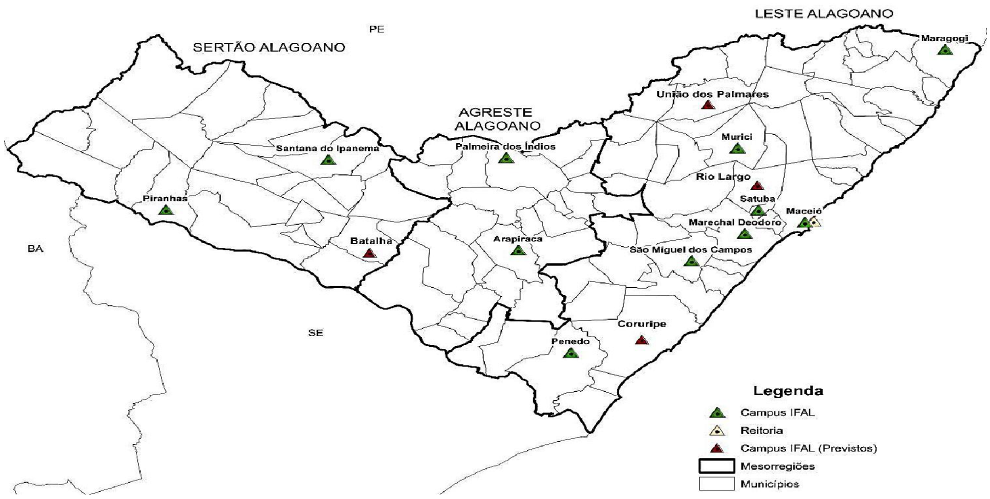
A origem do Instituto Federal de Alagoas (IFAL) se deu a partir da integração de duas autarquias independentes, hoje extintas, que atuavam em Alagoas, são elas: a Escola Agrotecnica Federal de Satuba (EAFS), criada em 1979, e o Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET), que recebeu tal nome a partir de 2004. Apesar de relativamente recentes, essas autarquias que antecederam o IFAL, tanto o CEFET quanto a EAFS, passaram por várias mudanças dentro do cenário da Educação Tecnica e Tecnológica do Estado de Alagoas.

> "[...] Escola Agrotécnica Federal de Satuba, ao ser criada, recebeu o nome de Patronato Agrícola de Alagoas (1911) e, a seguir, passou a denominar-se Aprendizado Agrícola Floriano Peixoto (1939), Escola Agrícola Floriano Peixoto (1947), Escola Agrotécnica Floriano Peixoto (1957), Colégio Agrícola Floriano Peixoto (1964) e, por fim, Escola Agrotécnica Federal de Satuba (1979). [...] O Centro Federal de Educação Tecnológica de Alagoas, por sua vez, recebeu inicialmente os seguintes nomes: Escola de Aprendizes Artífices de Alagoas (1909), Liceu Industrial de Maceió (1937), Escola Industrial Deodoro da Fonseca (1961), Escola Técnica Federal de Alagoas (1967). Esta, mediante o Decreto nº 5.224/2004, transformou-se em Centro Federal de Educação Tecnológica, o que possibilitou a oferta de cursos superiores." (Plano de Desenvolvimento Institucional, 2019-2023, p.29)

A partir do dia 29 de Dezembro de 2008, com a aprovação da Lei N^o 11.892, capítulo II, seção I, a qual fala sobre a criação dos Institutos Federais, deu-se início ao IFAL, garantindo todas as prerrogativas de uma instituição de nível superior, com destaques para a oferta da educação profissional e teconológica, em todos os seus níveis e modalidades, possibilitando uma formação qualificada dos cidadãos com relação a sua atuação profissional e nos diversos setores da economia, sobretudo, no desenvolvimento socioeconômico local, regional e nacional.

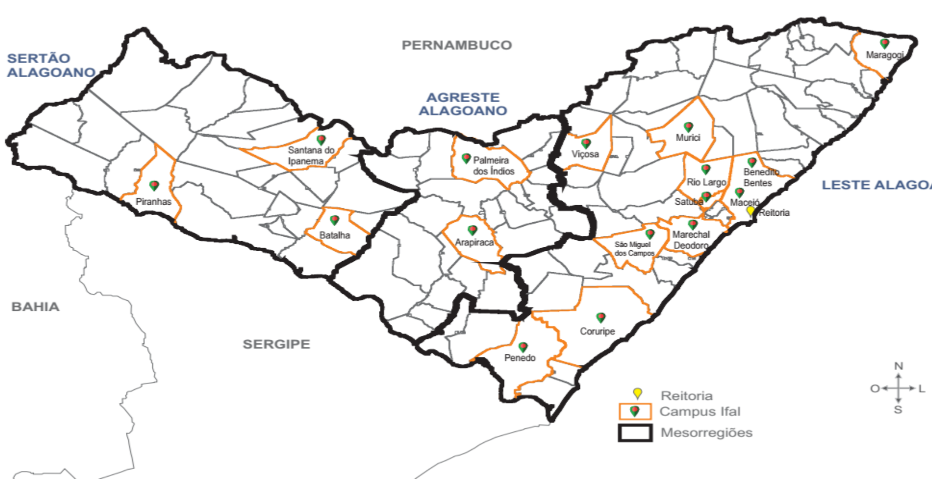
A expansão da instituição dentro do estado de Alagoas se deu de forma gradativa e estratégica, visto que em 2015 o IFAL contava com 11 campi espalhados pelo estado de Alagoas e hoje a instituição conta com 16 campi.

Figura 1 – **Distribuição das unidades do IFAL, 2015**



Fonte: Plano de Desenvolvimento Institucional, 2014-2018.

Figura 2 – **Distribuição das unidades do IFAL, 2019**



Fonte: Plano de Desenvolvimento Institucional, 2019-2023.

Atualmente, o IFAL conta com diversas modalidades de ensino, seja ela presencial ou a distância, nos mais diversos níveis, são eles: Ensino Médio e Integrado, para quem concluiu o Ensino Fundamental, o Ensino Tecnico Subsequênte, para quem terminou o Ensino Médio, Tecnólogos e o Ensino Superior, com cursos de graduação e pós-graduação, em lato sensu ou strito sensu. Conforme o PDI (2019-2023), a instituição conta com 18 cursos de nível médio integrado, 10 cursos de nível técnico subsequênte, presencial e/ou a distância, 16 cursos de nível superior, entre tecnólogos, bacharelados e licenciaturas, na modalidade presencial e/ou a distância, e 8 de pós-graduação, entre especializações e mestrados, presencial e/ou a distância.

É importante destacar que o IFAL oferta cursos na modalidade EJA, os quais não foram contabilizados anteriormente. Além disso, o mesmo curso, em alguns casos, é ofertado em mais de um campus e apesar de cada localidade ter sua realidade e suas demandas, esses cursos ofertados em cidades diferentes foram contabilizados apenas uma vez, como mostra a tabela a seguir.

Tabela 1 – **Relação entre os cursos de nível médio integrado e o campus**

Curso	**Cidade**
Administração	Santana do Ipanema
Agroecologia	Murici e Maragogi
Agroindustria	Satuba, Batalha, Piranhas e Murici
Agropecuária	Satuba, Piranhas e Santana do Ipanema
Biotecnologia	Batalha
Desenvolvimento de Sistemas	Maceió
Edificações	Maceió, Palmeira dos Índios e Coruripe
Eletroeletrônica	Arapiraca
Eletrônica	Maceió
Eletrotécnica	Maceió e Palmeira dos Índios
Estradas	Maceió
Hospedagem	Maragogi
Informática	Arapiraca e Palmeira dos Índios
Informática para Internet	Viçosa
Mecânica	Maceió e Coruripe
Meio Ambiente	Marechal Deodóro e Penedo
Química	Maceió e Penedo
Turismo	Marechal Deodóro

Fonte: Elaborado pelo autor

1.2 Diretrizes: acesso, permanência e êxito escolar

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases (Lei N^o 9.394, de 20 de dezembro de 1996), é direito de todos igualdade nas condições de acesso e permanência de uma educação de qualidade, sendo dever da família e do Estado garantir isso. Diante do contexto da educação brasileira, ainda existem muitas lacunas, as quais acentuam as desigualdades sociais, quando se trata do acesso, permanência e êxito escolar. Essas lacunas são consequências de fatores históricos, políticos e econômicos.

Um fato importante a ser ressaltado é a dualidade do ensino, visto que aqueles com maior poder aquisitivo tem acesso a um ensino voltado ao desenvolvimento intelectual e de qualidade, sobretudo o acesso às universidades e aos institutods federais, enquanto, por diversos fatores, aqueles que não gozam desse poder e fazem parte de um determinado grupo social seguem ao ensino profissionalizante que visa atender as necessidades do mercado. De acordo com Vieira e Deitos, citando Ramos e Moura (2007), em seu artigo Educação profissional e o desafio da integração no Ensino Médio,

> "A educação brasileira carrega consigo, desde o início da sua história, uma concepção que tem duas vertentes, sendo uma para atender à classe trabalhadora e outra para atender à classe dirigente, confirmando, assim, segundo Ramos (2007, p.2), a dualidade educacional, que é manifestada pela dualidade social, fruto da sociedade capitalista. Dessa maneira, está posta, de forma bem clara, a "[...] distinção entre aqueles que pensam e aqueles que executam as atividades"(MOURA, 2007, p. 8)". (VIEIRA & DEITOS, p.3).

Ainda de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases (Lei N$^o 9.394$, de 20 de dezembro de 1996), em seu art. 2^o, a educação tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. Baseado nessas finalidades, a educação possibilita o desenvolvimento das potencialidades do educando e a preparação para o trabalho, preservando a legitimidade de definir os objetivos da educação escolar em torno de metas socialmente relevantes. Desta forma, a educação é tida como a oportunidade do desenvolvimento do indivíduo não apenas como detentor de conhecimentos científicos e/ou técnico voltado para o mercado de trabalho, mas também como ser atuante na sociedade em que está inserido. Portanto, a educação é requisito essencial para que haja a inclusão social do indivíduo.

As finalidades da educação são reafirmadas dentro dos Institutos Federais, como mostra a fala de Pacheco (2010), em sua obra Os Institutos Federais: Uma Revolução na Educação Profissional e Tecnológica,

> "O que está posto para os Institutos Federais é a formação de cidadãos como agentes políticos capazes de ultrapassar obstáculos, pensar e agir em favor de transformações políticas, econômicas e sociais imprescindíveis para a construção de um outro mundo possível. A referência fundamental para a educação profissional e tecnológica é o homem e, por isso, o trabalho, como categoria estruturante do ser social, é seu elemento constituinte.[...] A educação para o trabalho nessa perspectiva se entende como potencializadora do ser humano, enquanto integralidade, no desenvolvimento de sua capacidade de gerar conhecimentos a partir de uma prática interativa com a realidade, na perspectiva de sua emancipação."(PACHECO, 2010, p. 24).

Com isso, o acesso é, certamente, a porta inicial para a democratização, mas torna-se necessário, também, garantir que todos os que ingressam na escola tenham condições de nela permanecer, com sucesso escolar. Assim, a democratização da educação se faz com o acesso e a permanência de todos no processo educativo e tem como o êxito escolar o reflexo da qualidade.

A concepção de sucesso escolar não se limita ao desempenho do aluno, mas também a sua trajetória escolar sem interrupções, o respeito ao desenvolvimento humano, à diversidade e ao conhecimento. Além disso, faz-se necessário reconhecer o peso das desigualdades sociais nos processos de acesso e permanência à educação e a necessidade da construção de políticas públicas e práticas de superação desse quadro. De acordo com Soares (2019), citando Alves-Mazzotti & Wilson (2016) , em seu artigo "Para além da nota: definição de perfis de sucesso e fracasso escolar":

> "Recomenda-se, assim, a adoção de uma visão de sucesso escolar que vá além das classificações escolares, integrando o pluralismo e a multidimensionalidade que o carateriza. Para além das variáveis pessoais, familiares e sociais dos alunos, a “leitura” dos fenómenos educacionais carece de uma análise mais sistêmica, trazendo para a discussão os contextos concretos de sala de aula, a relação professor/aluno, o clima de escola, os conteúdos e práticas educativas e as próprias políticas educativa (Alves-Mazzotti & Wilson, 2016; Patto, 1999)". (SOARES, 2019, p. 10).

Diante disso, as políticas públicas gerais, como a de cotas raciais, são formas de garantia de acesso do vulnerável historicamente e socialmente a um ensino público de qualidade; porém acesso à educação pública de qualidade não garante ao indivíduo sua permanência. Assim, com a prática de políticas institucionais que possibilitam o auxílio estudantil a partir de ações que visam a permanência do aluno no curso, diminui-se as diferenças socioeconômicas e promove-se a justiça social. A assistência estudantil compreende ações que proporcione saúde, acesso ao material didático para a formação profissional e atendimento às necessidades educacionais específicas, como, por exemplo, o reforço escolar para os alunos que têm um rendimento insuficiente.

Outro ponto que vale salientar é relacionado aos pilares da educação no IFAL, como foi dito anteriormente: o ensino, a pesquisa e a extensão. A indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão reflete na prática pedagógica que possibilita novas formas de reprodução, produção e socialização do conhecimento. Tendo em vista que as dimensões não sobrepõem uma a outra, estreitando as relações entre elas, oportunizam-se a superação da dicotomia entre teoria e prática, sujeito e objeto, que são resultados do modo linear de pensar. A formação profissional baseada apenas na execução de tarefas e competências específicas, leva ao aluno uma compreensão unilateral da realidade em que vive, não desenvolvendo seu senso crítico sobre a realidade, e visa apenas atender as necessidades do mercado na formação de mão de obra.

De acordo com Pacheco (2010), em sua obra "Os institutos federais: uma revolução na educação profissional e tecnológica",

> "Os Institutos Federais, em sua concepção, amalgamam trabalho-ciência-cultura-tecnologia na busca de soluções para os problemas de seu tempo, aspectos que, necessariamente, devem estar em movimento e articulados ao dinamismo histórico das sociedades. As novas formas de relação entre conhecimento, produção e relações sociais demandam o domínio integrado de conhecimentos científicos, tecnológicos e sóciohistóricos [...]. O desafio colocado para os Institutos Federais no campo da pesquisa é, pois, ir além da descoberta científica. Em seu compromisso com a humanidade, a pesquisa, que deve estar presente em todo trajeto da formação do trabalhador, representa a conjugação do saber na indissociabilidade pesquisa, ensino e extensão."(PACHECO, 2010, p. 25).

Posto isto, a educação profissional e tecnológica tem como princípios a formação do indivíduo como um todo, visando uma aproximação da ciência pelos trabalhadores, ampliando as possibilidades de um ponto em comum entre o trabalho intelectual (concepção) e o trabalho manual (execução). Reduzindo-se assim uma aprendizagem de apenas algumas habilidades, possibilitando a compreensão global do processo produtivo e a apreensão do saber tecnológico, além da cultura de valorização do trabalho e valores necessários para a tomada de decisões; são esses alguns dos princípios que norteiam a formação profissional e tecnológica do sujeito.

Dentro da perspectiva da formação integral da educação cientifica e profissional, o principio da indissociabilidade como ação integrada à formação do sujeito leva o mesmo a conhecer os problemas da sociedade, buscando uma autorreflexão crítica para a emancipação teórica e prática do discente e o significado social do processo formativo. Desta forma, o ensino possibilita o conhecimento teórico e a complementação do currículo do aluno; a pesquisa gera a aquisição de conhecimentos e a produção de novos conhecimentos, enquanto a extensão possibilita o contato com a comunidade, identificando, estudando e tentando solucionar problemas da mesma.

A concretização deste princípio pressupõe a realização de projetos de trabalho multi, pluri, interdisciplinar que levem em conta as necessidades e os problemas da comunidade, assim promovendo a comunicação, convivência social e o raciocínio abstrato. A comunicação atua como forma de abranger a capacidade de pensar, escrever e falar com clareza; a convivência social pressupõe viver e trabalhar em equipe respeitando os padrões de qualidade de vida, meio ambiente e cultura, e o raciocínio abstrato, abrangendo a capacidade de identificar e solucionar problemas.

Portanto, o princípio da indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão é fundamental no processo de ensino-aprendizagem e formação do sujeito, visto que o mesmo reflete sobre a aproximação entre as instituições (universidades e institutos federais) com a sociedade em diversos aspectos, sejam eles sociais, estruturais, culturais ou econômicos.

1.3 Ações de extensão

Nesta seção serão abordados alguns indicadores referentes as ações de extensão do Instituto Federal Alagoas, visto que os mesmos são de grande importância, não apenas para o ambiente acadêmico, mas também para todos aqueles que tem contato, direto ou indireto, com essas ações.

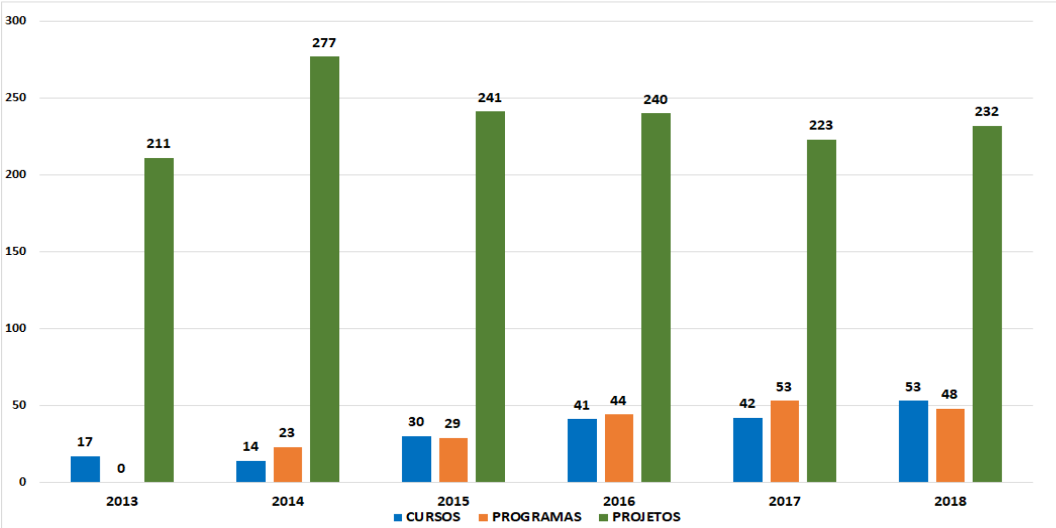
A extensão, como uma das dimensões que formam o tripé de uma formação acadêmica, é parte do desenvolvimento educativo, cultural e científico que busca estabelecer transformações articuladas entre a instituição de ensino e a comunidade. Deste modo, as ações de extensão buscam suprir as necessidades da sociedade, sobretudo as questões regionais, em que a instituição tenha alcance para atuar, sejam elas ações de extensão de cunho social ou técnico. De acordo com o Plano de Desenvolvimento Institucional (2019-2023),

> "A extensão, indissociável ao ensino e à pesquisa, por meio da relação dialógica, visa gerar impacto na formação do estudante, colaborando para o enriquecimento de sua formação humana e profissional. Também objetiva gerar impacto social mediante um diálogo de saberes e apropriação de conhecimentos. Nesse sentido, é por intermédio da extensão que se revela e se traduz, prioritariamente, a responsabilidade social do IFAL."(PDI, 2019-2023, p.105)

Sendo assim, as ações extensionistas possibilitam um diálogo entre a comunidade acadêmica (alunos, técnicos e servidores) e a comunidade externa, de modo a viabilizar uma troca de conhecimento e experiências entre elas, permitindo que o conhecimento cientifico que é produzido e reproduzido pela instituição de ensino traga um ganho real para as comunidades.

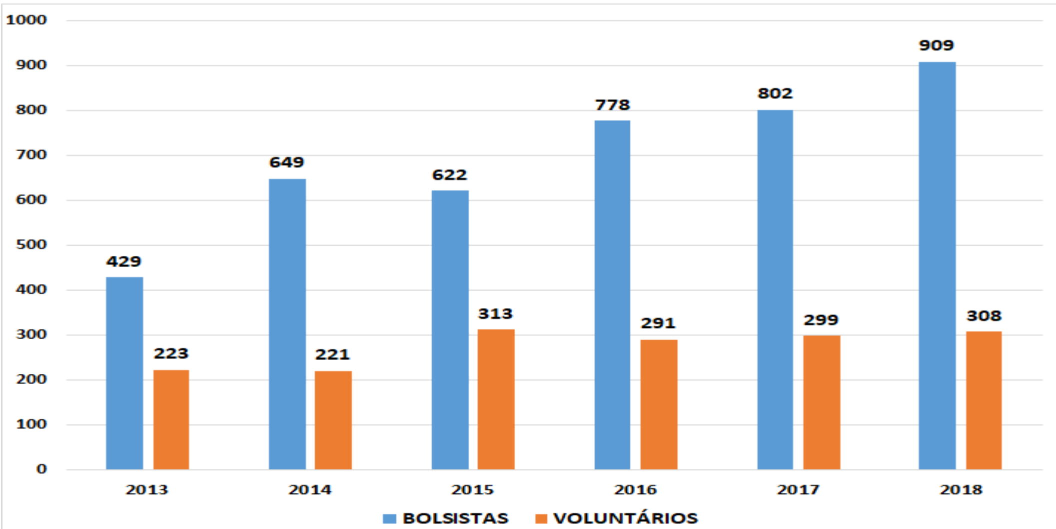
Agora, serão mostrados alguns indicadores das ações de extensão realizados pelo IFAL nos últimos anos, mais precisamente entre os anos de 2013 e 2018. As ações de extensão estão subdivididas em: cursos, projetos e programas.

Figura 3 – **Atividades de Extensão, 2013 a 2018**



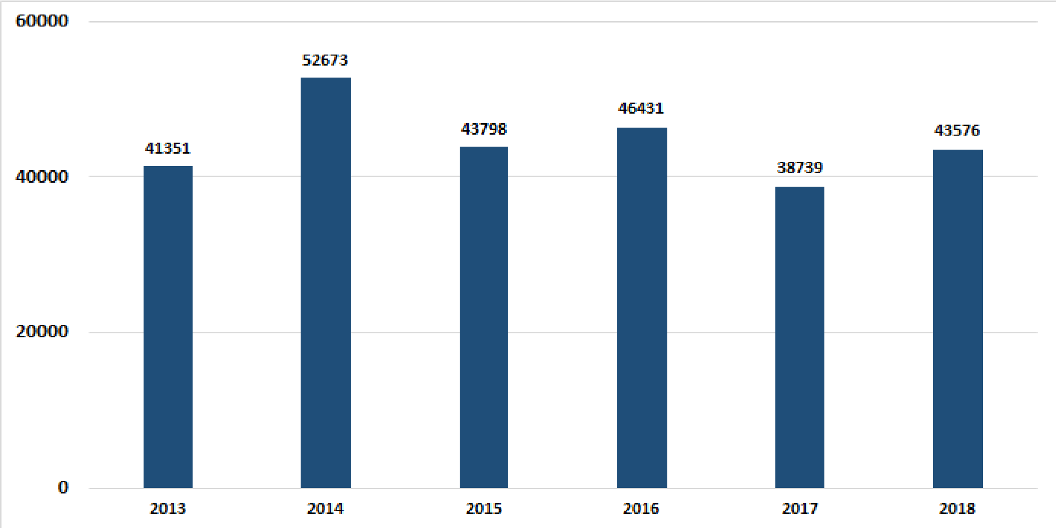
Fonte: <http://www.extensao.ifal.edu.br/acoes/indicadores>.

Figura 4 – **Discentes nas Ações de Extensão, 2013 a 2018**



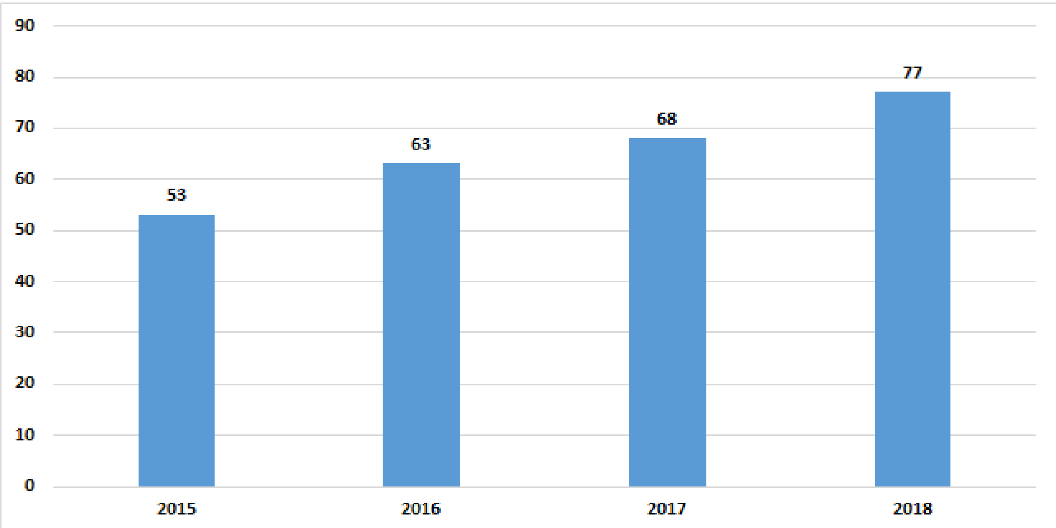
Fonte: <http://www.extensao.ifal.edu.br/acoes/indicadores>.

Figura 5 – **Beneficiados pelas Ações de Extensão, 2013 a 2018**



Fonte: <http://www.extensao.ifal.edu.br/acoes/indicadores>.

Figura 6 – **Municípios Beneficiados pelas Ações de Extensão, 2015 a 2018**



Fonte: <http://www.extensao.ifal.edu.br/acoes/indicadores>.

1.3.1 Sobre o PROIFAL

Nesta subseção serão apresentados alguns dados referentes ao PROIFAL, assim como um questionário que buscará informações relevantes com professores de matemática do Instituto Federal de Alagoas sobre o programa e a integração entre as diferentes unidades.

O PROIFAL é um programa de extensão institucional de fluxo contínuo, criado através do memorando no 88/2013/Poex, em 21 de outubro de 2013, nos termos do artigo 8^o da Resolução no 10/2011 do conselho superior do IFAL.

Entende-se como programa de extensão o conjunto articulado de projetos e outras ações de extensão, preferencialmente multidisciplinar e associada à pesquisa e a extensão. Desta forma, o programa de extensão PROIFAL é de carater institucional, de médio e longo prazo, que visa a integração das unidades do IFAL com a localidade e/ou determinados grupos populacionais.

É importante destacar que o programa institucional visa implantar ações para atender a comunidade, preferencialmente os alunos que estão matriculados em escola pública, preparando discentes que estão concluindo o Ensino Fundamental (9^o ano) e, por meio do exame de seleção, desejam ingressar no Ensino Médio Integrado.

Além disso, de acordo com o edital de chamada do programa de extensão institucional PROIFAL, de 2019, tem como diretrizes:

I. Contribuir para o desenvolvimento da sociedade, constituindo um vínculo que estabeleça troca de saberes, conhecimentos e experiências para a constante avaliação e vitalização da pesquisa e do ensino;

II. Buscar interação sistematizada do Ifal com a comunidade por meio da participação dos servidores nas ações integradas com as administrações públicas, em suas várias instâncias, e com as entidades da sociedade civil;

III. Integrar o ensino e a pesquisa às demandas da sociedade, seus interesses e necessidades, estabelecendo mecanismos que inter-relacionem o saber acadêmico e o saber popular;

IV. Incentivar a prática acadêmica que contribua para o desenvolvimento da consciência social, ambiental e política, formando profissionais cidadãos;

V. Participar criticamente de projetos que objetivem o desenvolvimento regional sustentável em todas as suas dimensões;

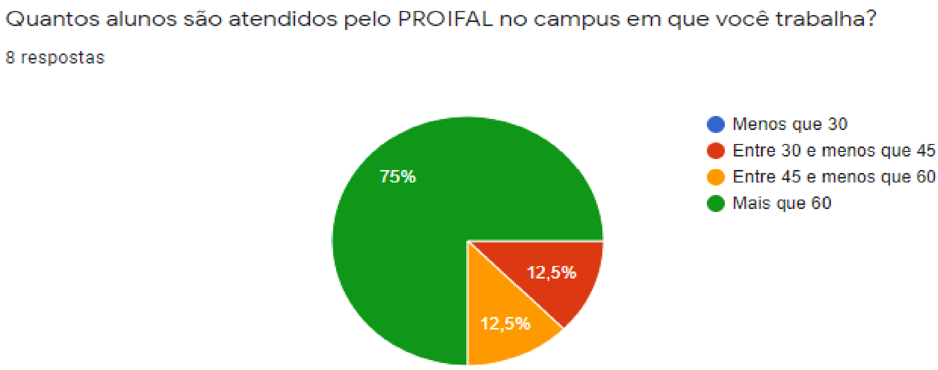
VI. Articular políticas públicas que oportunizem o acesso à educação profissional estabelecendo mecanismo de inclusão.

Diante do que foi dito anteriormente, a seguir será apresentado o resultado de um questionário voltado aos professores de matemática do IFAL que tem como objetivo colher algumas informações sobre o PROIFAL nas unidades da instituição. O questionário foi feito de maneira eletrônica, por meio da plataforma Google Forms.

Dentre os 16 campi, 8 professores de 7 campi participaram da pesquisa. Os campi participantes foram: Arapiraca, Batalha, Marechal Deodoro, Murici, Penedo, Piranhas e Viçosa.

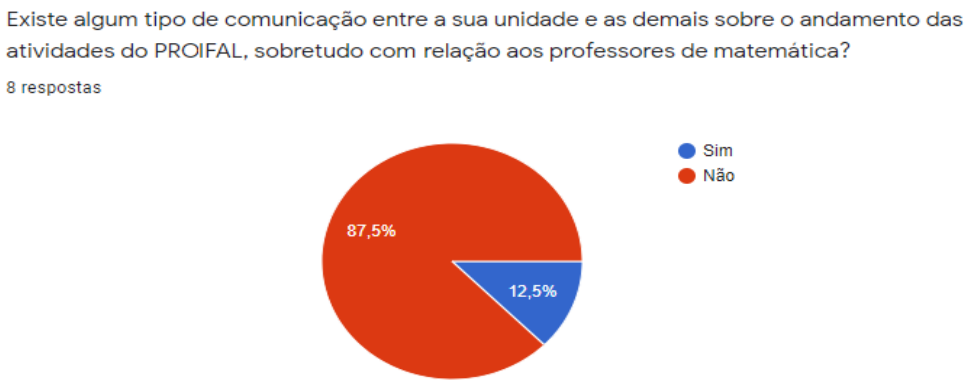
1.3.2 Questionário com os professores do IFAL

Figura 7 – **Quantidade de alunos atendidos pelo PROIFAL.**



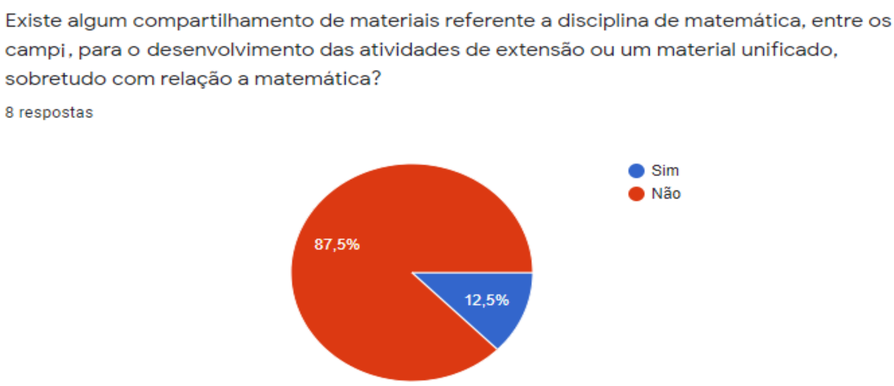
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 – **Comunicação entre as unidades do IFAL.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – **Sobre um material específico para o PROIFAL.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – **Sobre a divulgação de um material específico para o PROIFAL.**

O material desenvolvido pelo campus ou em conjunto entre as unidades do instituto é divulgado para a comunidade?

8 respostas

Sim

Não

Mais ou menos

O material desenvolvido foi compartilhado com as escolas parceiras e o programa de extensão foi apresentado no Congresso Nacional de Conhecimento - CONAC em 2018.

Sim.

Não

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – **Parceiria entre o campus do IFAL e prefeituras sobre ações do PROIFAL.**

Existe alguma parceria entre o campus em que você atua e a(s) prefeitura(s) quanto ao desenvolvimento das atividades do PRO IFAL?

8 respostas

Não

Sim

O ProIFAL- Batalha realizado em 2018, teve sua execução nas escolas parceiras dos municípios de Batalha-AL, Jacaré dos Homens-AL e São José da Tapera- AL, dessa forma, a comunicação se dava diretamente por intermédio dos bolsistas

Sim, mas há 2 anos o campus não oferece o PROIFAL.

Desconheço se existe tal parceria

Fonte: Elaborado pelo autor.

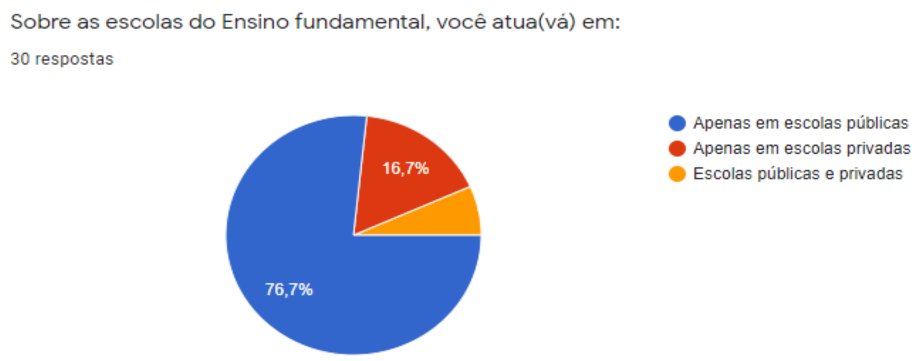
Conforme o questionário feito com os professores de alguns campi da instituição, um ponto relevante diante das atividades do PROIFAL é que aparentemente, apesar de existir público relevante que é atintido pelo programa, não há um material específico e unificado para o desenvolvimento das ações de extensão em conjunto. É importante deixar claro que não houve sucesso em ter contato com todos os campi e que cada unidade tem suas particularidades\realidade diante da região em que ocupa, além de que o PROIFAL é aderido de forma facultativa pelas unidades.

1.4 Questionário com os professores de matemática do Ensino Fundamental

Além dos professores de matemática do IFAL, se fez necessário realizar um questionário com os professores do Ensino Fundamental II sobre a atuação deles com relação ao exame de seleção para Ensino Médio Integrado, visto que esses profissionais, muito provavelmente, acompanham a maior parte da formação necessária que os candidatos precisam para fazer o exame de seleção.

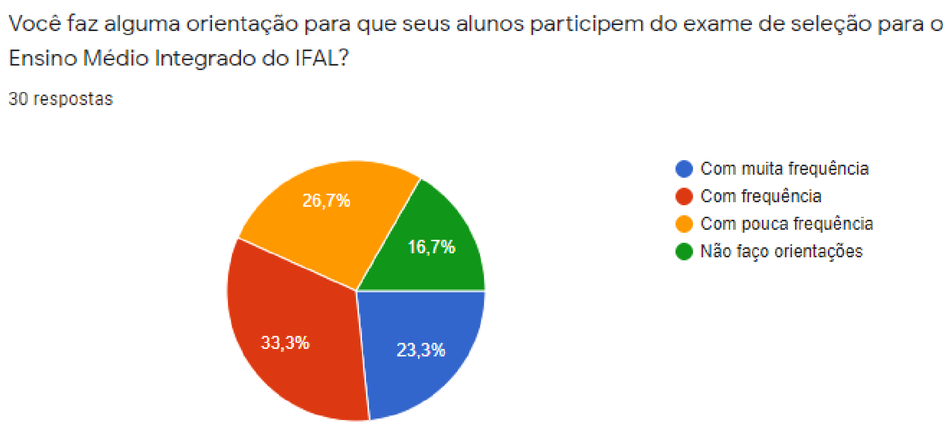
O questionário foi feito de maneira eletrônica, por meio da plataforma Google Forms, com um total de 30 profesores de matemática das cidades de Arapiraca, Belém, Craíbas, Delmiro Gouveia, Lagoa da Canoa, Limoeiro, Maceió, Major Izidoro, Palmeira dos Índios, e São Miguel dos Campos.

Figura 12 – **Atuação dos professores: público e/ou privado.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – **Sobre a orientação dos alunos para o exame de seleção.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – **Algumas respostas sobre as orientações.**

Caso a resposta seja sim, em quais anos e como se dá a orientação?

25 respostas

Sempre nos oitavos e nonos anos, orientando-os por meio das exigências de editais anos anteriores e reforçando conteúdos que são possíveis de se estar presente na prova. Além disso, sempre disponibilizo um material para que estudem. Também deixo bem claro a importância de ingressar em um Instituto Federal.

Geralmente em 8° e 9° ano. A orientação é a aparti do ensino de qualidade e relevância em ensino que um IF oferece.

A partir do 8° ano já começo a falar do ingresso no IFAL, da prova de seleção, dos cursos gratuitos e vou colocando nas avaliações algumas questões da prova de ingresso de acordo com o conteúdo dado em sala.

Oitavo e novo ano, dando orientações de como é o exame de seleção, assim como passando banco de questões para eles responderem.

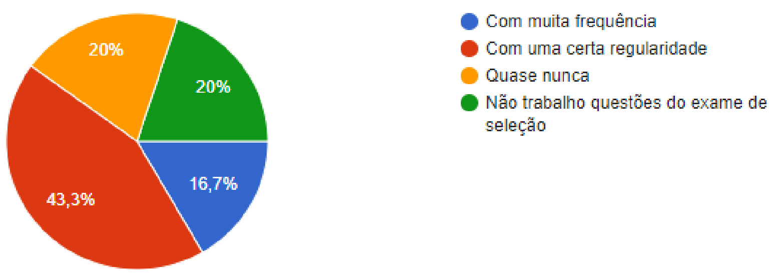
Oitavos e nonos anos. Apresentando questões de edições anteriores, além de incentivar a participação para mudança do cenário econômico do aluno a longo prazo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 – **Sobre o uso de questões das provas anteriores na sala de aula.**

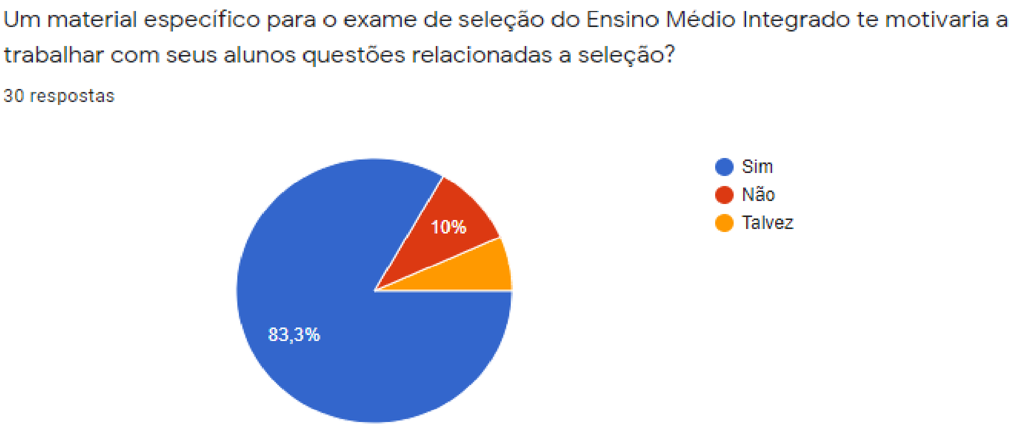
Costuma trabalhar as questões do exame de seleção para o Ensino Médio integrado com seus alunos em sala de aula, provas ou trabalhos?

30 respostas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 – **Sobre a motivação com relação a um material específico para a seleção.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dentre os pontos relevantes do questionário, a maioria dos professores que responderam o questionário acreditam que um material específico para o exame de seleção seria um fator motivador para trabalhar questões relacionadas ao exame de seleção do Ensino Médio Integrado. Além disso, pouco mais que a metade dos professores, mais precisamente 60%, relataram que trabalham com certa frequência ou com muita frequência questões relacionadas a prova de seleção.

De modo geral, as orientações para o exame de seleção se iniciam no penúltimo ano do Ensino Fundamental II e se intensificam no último ano, apesar de alguns participantes relatarem que fazem algumas orientações nos sétimos anos também.

2 O EXAME DE SELEÇÃO PARA OS CURSOS DE NÍVEL MÉDIO INTEGRADO

Neste capítulo serão destacados alguns aspectos relevantes sobre o exame de seleção para os cursos de nível médio e integrado, bem como uma breve análise dos conteúdos de matemática dos exames de seleção dos últimos 10 anos. A metodologia de análise dos exames será feita por meio de um levantamento dos conteúdos cobrados nas questões de cada exame com alguns critérios estabelecidos e, com isso, definindo quais deles são mais recorrentes.

Para a produção deste capítulo serão utilizados como principais referências os editais dos exames de seleção 2011.1 até o 2020.1, bem como as provas anteriores referentes aos editais citados, disponível em <https://exame3.ifal.edu.br/exames/listarExamesAnteriores>, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) e a coleção "A Conquista da Matemática", de GUIOVANNI JÚNIOR & CASTRUCCI.

2.1 Pontos importantes sobre a seleção

De acordo com EDITAL N^o 20/2019/DSI/PROEN-IFAL (RETIFICADO), Exame de seleção 2020.1, cursos técnicos integrados ao ensino médio, o preenchimento das vagas disponíveis será dividido em dois grupos (situação I-ampla concorrência e situação II-reserva de vagas, cotas).

É importante destacar que há um ponto específico do edital em que prioriza os candidatos que se enquadram no grupo das cotas, reforçando a disposição da instituição para diminuir a desigualdade estrutural da educação discutida no capítulo anterior. Ao que se refere a esta passagem, encontra-se no anexo II (subitem 1.1.1.) do EDITAL N^o 20/2019/DSI/PROEN-IFAL (RETIFICADO):

> "Como forma de priorizar os candidatos egressos de Escolas Públicas, os candidatos classificados no Sistema II (Reserva de Vagas) e que obtiverem pontuação suficiente para a sua classificação dentre o número de vagas disponíveis no Sistema I (Ampla Concorrência) serão remanejados para essa lista (Ampla Concorrência) e sua vaga do Sistema II (Reserva de Vagas) será ocupada pelo próximo candidato classificado por esse sistema (Reserva de Vagas)."(2019, p.9)

De acordo com EDITAL N^o 20/2019/DSI/PROEN-IFAL (RETIFICADO), a distribuição de vagas será feita, inicialmente, da seguinte mandeira:

Tabela 2 – **Distribuição das vagas**

Sistema	**Público alvo (candidatos)**	**Percentual**
Ampla concorrência	candidatos que cursaram o Ensino Fundamental em escolas privadas, cenecista filantrópicas, confessionais e demais escolas que não se enquadrem como pública; em escolas privadas na condição de bolsista integral, em escolas públicas que cursaram apenas parcialmente o Ensino Fundamental e escolas públicas participantes da SITUAÇÃO II (RESERVA DE VAGAS).	50%
Reserva de vagas (cotas)	pretos, pardos ou indígenas; pessoas com deficiências e pessoas de outras etnias	50%

Fonte: Elaborado pelo autor

Observação 2.1. No sistema de reserva de vagas, os candidatos devem ter cursado integralmente o Ensino Fundamental (1^o ao 9^o ano) em escolas da rede públicas e cada cota tem uma determinada quantidade de vagas, as quais não serão detalhadas aqui.

Tabela 3 – **Período de solicitação de isenção, 2010 a 2019**

Início das isenções	**Fim das isenções**	**Tempo para isenção (dias)**
04/10/2010	08/10/2010	5
05/09/2011	09/09/2011	5
03/12/2012	07/12/2012	5
12/09/2013	20/09/2013	9
01/10/2014	10/10/2014	10
21/09/2015	15/10/2015	25
08/09/2016	30/09/2016	23
04/09/2017	22/09/2017	19
03/09/2018	17/09/2018	15
06/09/2019	02/10/2019	27

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 4 – **Período de inscrição no exame de seleção para o Ensino Médio Integrado, 2010 a 2019**

Início das inscrições	Fim das inscrições	Tempo para inscrição (dias)
28/09/2010	31/10/2010	34
05/09/2011	02/10/2011	28
03/12/2012	31/12/2012	29
12/09/2013	13/10/2013	32
01/10/2014	02/11/2014	33
21/09/2015	25/10/2015	35
09/09/2016	09/10/2016	31
04/09/2017	06/10/2017	33
01/09/2018	30/09/2018	30
06/09/2019	06/10/2019	31

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 5 – **Datas de aplicação das provas do exame de seleção do Ensino Médio Integrado**

Dia	Mês	Ano	Exame de seleção
21	novembro	2010	2011.1
4	dezembro	2011	2012.1
27	janeiro	2013	2013.1
24	novembro	2013	2014.1
14	dezembro	2014	2015.1
13	dezembro	2015	2016.1
11	dezembro	2016	2017.1
3	dezembro	2017	2018.1
25	novembro	2018	2019.1
24	novembro	2019	2020.1

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 3, o período de isenção varia entre 5 e 27 dias. Vale destacar que nos últimos 5 anos o período de isenção foi maior que nos primeiros 5 anos analisados, uma possibilidade é o aumento da demanda dos cursos ofertados e alunos inscritos para a prova. A Tabela 4 nos mostra que, geralmente, o período de inscrições dura aproximadamente um mês. E, de acordo com a Tabela 5, as provas do exame de seleção ocorrem, geralmente, no último final de semana de novembro ou nos primeiros finais de semana de dezembro.

Por fim, a prova está dividida em três grandes áreas, são elas: português, o qual são cobrados 8 tópicos e tem 18 questões, atualidades (história e geografia), o qual é composto por 6 tópicos e tem 4 questões, e matemática, a qual são cobrados 28 tópicos e tem 18 questões. Note que matemática representa 45% da prova. Além disso, o exame tem duração máxima de 3h30min e todas as questões têm peso igual, cada uma vale 1 ponto.

2.2 A matemática do exame de seleção

Nesta seção será apresentada uma divisão sistemática dos conteúdos cobrados no exame de seleção para o Ensino Médio Integrado, por ano do Ensino Fundamental e por área, Álgebra (A) e Geometria (G), bem como um levantamento dos conteúdos mais cobrados nas últimas provas, no período entre 2010 e 2019.

A prova de matemática do exame de seleção para os cursos de Ensino Médio Integrado cobra diversos conteúdos do Ensino Fundamental que são importantíssimos para que o aluno prossiga seus estudos e desenvolva suas habilidades nos anos finais do Ensino Fundamental. De modo geral, a prova é diversificada e em parte das questões contempla dois ou mais pontos que fazem parte do conteúdo programático.

Observação 2.2. Apesar da Base Nacional Comum Curricular tratar as habilidades de operações com números reais e seus similares (números decimais e resolução de problemas com números naturais e racionais) em uma temática (Números) separada de Álgebra, tal como o caso de sistema métrico decimal ser tratado como uma temática (Grandezas e Medidas) a parte de Geometria, aqui trataremos esses conteúdos como tópicos de Álgebra e Geometria, respectivamente.

Um fator importante é que, em termos quantitativos, os pontos relacionados aos conteúdos de Àlgebra representam aproximadamente $71,4\%$ dos conteúdos programáticos, enquanto Geometria fica com $28,6\%$. Além disso, não houve mudanças nos pontos cobrados na prova entre 2010 e 2019.

Posto isto, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, p. 298-318), os conteúdos do exame de seleção são distribuídos da seguinte mandeira:

1. Operações com números reais (A) – 6^o ao 9^o ano;
2. Resoluções de problemas com números naturais e racionais (A) – 6^o ao 8^o ano;
3. Números decimais (A) – 6^o ao 8^o ano;
4. Sistema métrico decimal (G) – 6^o e 7^o ano;
5. Expressões numéricas (A) – 6^o e 7^o anos;
6. Equações e sistemas de 1^o grau (A) – 7^o e 8^o ano;

7. Inequações de 1^o grau (A) – 7^o ano;
8. Problemas de 1^o grau (A) – 7^o e 8^o ano;
9. Razões e proporções (A) – 7^o e 8^o ano;
10. Regra de três (simples e composta) (A) – 7^o e 8^o ano;
11. Porcentagem (A) – 7^o e 8^o ano;
12. Valor numérico de uma expressão algébrica (A) – 8^o ano;
13. Operações algébricas com polinômios (A) – 8^o ano;
14. Produtos notáveis (A) – 9^o ano;
15. Fatoração (A) – 9^o ano;
16. Simplificação de frações algébricas (A) – 9^o ano;
17. Potenciação e radiciação (A) – 6^o e 9^o ano;
18. Estudo dos radicais (A) – 9^o ano;
19. Equação de 2^o grau (A) – 8^o e 9^o ano;
20. Sistema de 2^o grau (A) – 9^o ano;
21. Problemas do 2^o grau(A) – 9^o ano;
22. Teorema de Tales (G) – 9^o ano;
23. Triângulos semelhantes (G) – 9^o ano;
24. Relações métricas no triângulo retângulo (G) – 9^o ano;
25. Razões trigonométricas no triângulo retângulo (G) –
26. Polígonos regulares (G) – 7^o e 9^o ano;
27. Polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência (G) – 9^o ano;
28. Áreas de figuras planas (G) – 6^o ao 9^o ano.

Observação 2.3. Ainda de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, p. 298-318), tópicos relacionados à temática Probabilidade e Estatística não se encontra entre os conteúdos programáticos da prova.

Para análise da matemática presente no exame de seleção do Ensino Médio Integrado, serão exibidos dados referentes a prova da seguinte maneira: quantificar as de questões de Álgebra (A) e de Geometria (G) por exame de seleção; quantificar as questões diferenciando quais delas necessitam apenas um conteúdo (TIPO 1) daquelas que abordam de mais de um conteúdo (TIPO 2) para serem resolvidas por exame de seleção e, por fim, um levantamento de quantas vezes um determinado conteúdo aparece nas provas.

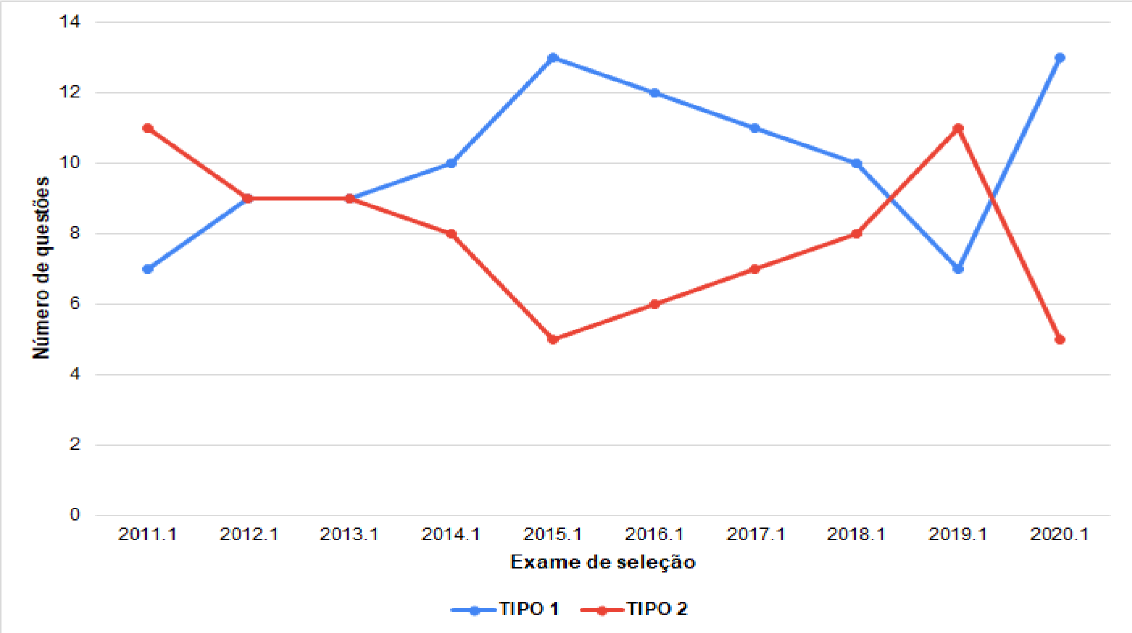
A partir dos conteúdos citados anteriormente, serão estabelecidos alguns critérios para o levantamento dos conteúdos abordados das questões do exame de seleção. Com isso, pontos como operações com números reais serão contabilizados em problemas que envolvam apenas este conteúdo, visto que operar com números reais é indispensável para os alunos do último ano do Ensino Fundamental.

Para a classificação dos conteúdos cobrados em determinada questão serão respeitados os seguintes critérios: (a) conteúdo necessário para iniciar a solução da questão; (b) conteúdo necessário para desenvolver a solução da questão e (c) conteúdo necessário para assinalar a alternativa correta.

A título de exemplo, a questão 25, do exame de seleção 2011.1, é relacionada à área de figuras planas (item 28), que para seu desenvolvimento são necessários conhecimentos de relações métricas de um triângulo retângulo (item 24) e, por sua vez, cai em uma situação de sistema métrico decimal (item 4) para determinar a alternativa correta.

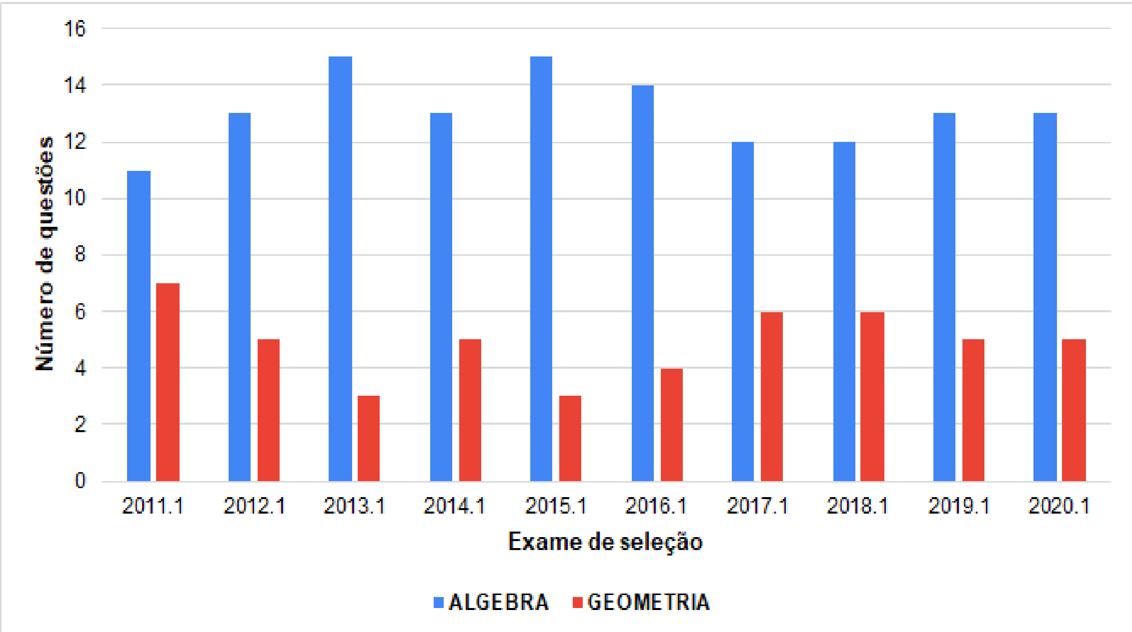
A seguir, apresentaremos os gráficos e tabelas resultantes da análise feita sobre os exames de seleção do Ensino Médio Integrado. Serão apresentadas duas tabelas sobre a análise dos conteúdos mais recorrentes, uma referente aos anos de 2010 a 2014 e outra de 2015 a 2019.

Figura 17 – **Quantidade de questões por TIPO 1 e 2, por exame.**



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 18 – **Quantidade de questões de Álgebra e Geometria, por exame.**



Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 6 – **Quantidade de questões por conteúdo do exame de seleção**

Conteúdo	**2011.1**	**2012.1**	**2013.1**	**2014.1**	**2015.1**	**Total**
Operações com números reais	1	1	2	2	2	8
Resolução de problemas com números naturais e racionais	1	0	2	1	2	6
Números decimais	0	0	0	1	0	1
Sistema métrico decimal	1	2	1	1	1	6
Expressões numericas	0	1	0	0	0	1
Equações e sistemas de primeiro grau	2	3	4	7	1	17
Inequações de primeiro grau	0	0	1	0	0	1
Problemas de primeiro grau	1	1	1	3	1	7
Razões e proporções	5	1	2	2	2	12
Regra de três	0	1	1	1	1	4
Porcentagem	5	1	1	2	2	11
Valor numérico de uma expressão algébrica	0	0	1	0	0	1
Operações com polinômios	1	1	2	0	0	4
Produtos notáveis	1	2	1	1	2	7
Fatoração	0	1	0	0	0	1
Simplificação de frações algébricas	0	0	0	0	1	1
Potenciação e radiciação	0	2	1	1	3	7
Estudo dos radicais	0	0	1	0	0	1
Equação do segundo grau	2	3	3	1	2	11
Sistemas do segundo grau	1	1	0	0	0	2
Problemas do segundo grau	0	0	0	0	0	0
Teorema de tales	0	0	0	0	0	0
Triângulos semelhantes	0	2	0	1	0	3
Relações métricas no triângulo retângulo	4	2	2	1	1	10
Razões trigonométricas no triângulo retângulo	1	1	1	0	1	4
Polígonos regulares	0	0	0	0	0	0
Polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência	0	0	0	0	1	1
Áreas de figuras planas	4	1	1	2	0	8

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 7 – **Quantidade de questões por conteúdo do exame de seleção**

Conteúdo	**2016.1**	**2017.1**	**2018.1**	**2019.1**	**2020.1**	**Total**
Operações com números reais	0	0	0	0	1	1
Resolução de problemas com números naturais e racionais	2	1	2	1	0	6
Números decimais	0	1	0	0	0	1
Sistema métrico decimal	0	0	2	1	1	4
Expressões numericas	1	1	1	1	1	5
Equações e sistemas de primeiro grau	4	2	4	7	2	19
Inequações de primeiro grau	0	0	0	0	0	0
Problemas de primeiro grau	4	1	2	3	2	12
Razões e proporções	0	2	4	0	3	9
Regra de três	0	2	2	2	0	6
Porcentagem	3	2	2	3	3	13
Valor numérico de uma expressão algébrica	0	1	1	1	1	4
Operações com polinômios	0	0	0	2	0	2
Produtos notáveis	1	2	2	0	1	6
Fatoração	0	0	0	0	0	0
Simplificação de frações algébricas	0	0	0	0	0	0
Potenciação e radiciação	3	2	0	1	2	8
Estudo dos radicais	0	0	0	0	0	0
Equação do segundo grau	2	2	1	3	1	9
Sistemas do segundo grau	0	0	0	1	0	1
Problemas do segundo grau	0	0	0	0	0	0
Teorema de tales	0	0	0	0	0	0
Triângulos semelhantes	0	0	0	0	0	0
Relações métricas no triângulo retângulo	0	2	1	2	0	5
Razões trigonométricas no triângulo retângulo	2	1	1	1	1	6
Polígonos regulares	0	0	0	1	0	1
Polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência	1	0	0	0	0	1
Áreas de figuras planas	2	3	3	3	2	13

Fonte: elaborado pelo autor

2.2.1 Síntese da análise dos exames de seleção

De modo geral, a prova do exame de seleção é coerente com os pontos colocados nos conteúdos programáticos e com a BNCC, visto que as questões cobram do discente as competências que são esperadas dos alunos que estão concluindo o ensino fundamental e vão ingressar no Ensino Médio. São algumas das competências dos discentes que estão nos anos finais do Ensino Fundamental:

> "Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes. ”[...]” Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e outras áreas do conhecimento. ”[...]” Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens."(BNCC, 2018, p. 267).

O exame de seleção, em boa parte das questões propostas, aborda problemas contextualizados, retratando situações em que o discente pode se posicionar dentro das questões propostas, visto que são situações facilmente relacionadas ao cotidiano. Além de que, como foi dito anteriormente, parte das questões da prova abordam mais de um conteúdo, assim, estabelecendo conexões entre os diferentes conteúdos da matemática. Com isso, essas situações-problema reforçam que a prova, juntamente com os temas de matemática que são cobrados nela, está alinhada com os objetivos gerais da BNCC.

Todavia, há alguns conteúdos que ficam subentendidos dentro dos conteúdos programáticos, como é o caso das questões do exame que são relacionadas a perímetros de figuras planas, comprimento de circunferência, naturalmente comentados antes de falar sobre medidas de áreas de figuras planas, bem como operações com ângulos e ângulos internos de um polígono convexo.

Serão listados os casos em que foram abordados esses conteúdos na tabela a seguir:

Tabela 8 – **Conteúdos implícitos no edital**

Exame de seleção	**Número da questão**	**Conteúdo cobrado**
2011.1	28	Comprimento de circunferência
2013.1	27	Perímetro
2013.1	39	Perímetro
2014.1	26	Perímetro
2014.1	39	Ângulos internos de um polígono convexo
2015.1	28	Conjuntos numéricos
2018.1	34	Perímetro
2019.1	28	Perímetro
2019.1	33	Perímetro
2020.1	38	Ângulos entre segmentos de retas
2020.1	39	Operações com ângulos
2020.1	40	Ângulos entre segmentos de retas

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com as Tabelas 6 e 7, os conteúdos mais cobrados nos exames de seleção do Ensino Médio Integrado são: resolução de problemas com números naturais e racionais (com 12 questões), equações e sistemas de primeiro grau (com 36 questões), razões e proporções (com 21 questões), porcentagem (com 24 questões), produtos notáveis (com 13 questões), potenciação e radiciação (com 15 questões), equação do segundo grau (com 20 questões), relações métricas no triângulo retângulo (com 15 questões), razões trigonométricas no triângulo retângulo (com 10 questões) e áreas de figuras planas (com 21 questões). Com isso, os temas recorrentes, apareceram nas questões em um total de 187 vezes.

Observação 2.4. Apesar do ponto "problemas de 1^o grau", item 8, aparecer com grande frequência, perceba que o mesmo pode se enquadrar em uma questão de equação de 1^o grau, um sistema de 1^o grau ou uma inequação de 1^o grau. À vista disso, para não contabilizar duas vezes o mesmo ponto, o item 8 não foi colocado entre os conteúdos mais cobrados de Álgebra. Entretanto, é importante observar que o item 8 apareceu 19 vezes entre as 34 relacionadas a equações e sistemas do 1^o grau.

Ainda sobre os assuntos destacados anteriormente, é evidente que esses conteúdos foram cobrados em todos ou quase todos os anos nas provas de seleção. Em termos percentuais, eles representam aproximadamente 75,4% da prova de matemática, considerando a frequência de todos os conteúdos, 248. O que mostra que é necessário ter um olhar mais cuidadoso para estes conteúdos.

Observando a Figura 18, quando são analisadas as questões como problemas algébricos e ou geométrios, assim como os pontos dos conteúdos programáticos são em sua maioria de Álgebra, a prova retrata isso também. Nota-se que em nenhuma prova a quantidade de pontos de Geometria superou os de Álgebra. A quantidade total de questões de Álgebra foi de 131, frente a 49 de Geometria.

Em contrapartida, pela Figura 17, comparando as questões que integralizaram mais de um conteúdo, questões do TIPO 2, frente às que abordavam apenas um dos pontos, questões do TIPO 1, são equilibrados e totalizam nos anos analisados 79 e 101, respectivamente. Além disso, em 6 exames a quantidade de questões do TIPO 1 foram maioria, em 2 foram exatamente iguais e em 2 a quantidade de questões do TIPO 2 superavam a do TIPO 1.

Nos dois próximos capítulos serão utilizados, como principais referências, os livros da coleção "A Conquista da Matemática"e o material teórico do Portal da Matemática.

3 ÁLGEBRA PARA O EXAME DE SELEÇÃO

Neste capítulo abordaremos, quando possível de forma resumida e com exemplos, os principais resultados dos conteúdos de Álgebra que são mais recorrentes no exame de seleção para o Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Alagoas, conforme o Capítulo 2. Porém, antes de iniciarmos, falaremos um pouco sobre os conjuntos numéricos.

O desenvolvimento e classificação dos números estão ligados, inicialmente, a duas necessidades bem antigas: contar e medir. O conceito primitivo de contagem era feito de maneira intuitiva, o homem associava cada ovelha a uma pedra diferente para se certificar de que o rebanho estava completo. Esse conceito primitivo é associado ao conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$.

Por outro lado, adotando uma unidade de medida (imagine o metro), em determinadas situações tal unidade não era eficiente para medir determinados objetos (imagine agora objetos menores que 1 metro). Com isso, foi preciso ampliar o conceito dos números, admitindo subdivisões de uma determinada unidade de medida, estas subdivisões estão associadas aos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$. A título de exemplo, as subdivisões do metro são: decímetro (1 décimo de 1 metro); centímetro (1 centésimo de 1 metro) e milímetro (1 milésimo de 1 metro).

No entanto, só no início do século XX é que houve uma formalização do conjunto dos números naturais, com Giuseppe Peano. A caracterização dos números naturais foi feita de forma axiomática, de modo que 1 não era sucessor de nenhum número e que todo natural tem um único sucessor. Os demais conjuntos números são apresentados da seguinte maneira: o conjunto dos números inteiros é formado pelos naturais, pelo zero e os inteiros negativos, representado por $\mathbb{Z}$ que vem do alemão zahl, cujo significado é número. O conjunto dos racionais, representado por $\mathbb{Q}$ que vem da palavra quociente, é definido pela razão de dois números inteiros, de modo que o denominador seja diferente de zero. Sua representação formal é da seguinte maneira $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \;\; e \;\; b \neq 0\right\}$.

Por volta de $500 \;\; a.C$, os pitagóricos mostraram que a diagonal do quadrado de lado unitário é igual a $\sqrt{2}$ e tal número, por sua vez, não é comensurável, isto é, não pode ser representado como um número racional. Para a época, essa descoberta foi tratada como um castigo dos deuses, visto que até então os números e as medidas seguiam um padrão, sendo representadas a partir dos números naturais ou por frações que representavam unidades menores de medida, o que não acontecia com a diagonal do quadrado de lado 1.

Por curiosidade, é possível mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Para isso, suponha (por absurdo) que o $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros não nulos e $mdc(a,b) = 1$.

Elevando ao quadrado ambos os membros de $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, temos que

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2.$$

Note que a^2 é par, consequentemente a também é. Assim, podemos escrever $a = 2k$, com k inteiro.

Substituindo $a = 2k$ em $2b^2 = a^2$, temos

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2.$$

Como b^2 é par, segue que b também é.

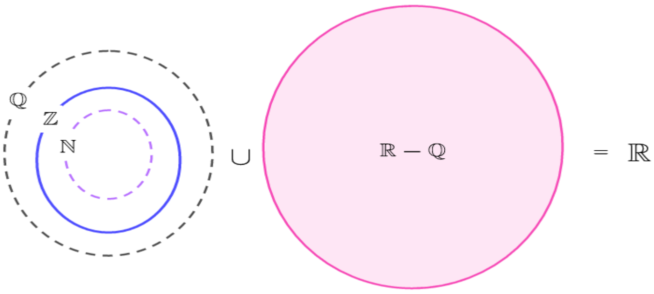
Absurdo. Por hipótese temos que $mdc(a,b) = 1$ e por outro lado, visto que a e b são números pares, obtemos $mdc(a,b) \geq 2$.

Logo, $\sqrt{2}$ não é racional, pois não é possível representá-lo da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b é não nulo.

Esses números que não são "bem comportados"são chamados de irracionais. Com o conhecimento desses números ficou claro que os números naturais juntamente com os números racionais não eram suficientes para medir todos os segmentos e, com isso, surgiu o conceito dos números irracionais.

Assim, é importante observar que os números são racionais ou irracionais, não sendo possível um número pertencer aos dois conjuntos ao mesmo tempo. Dito isso, denomina-se o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, a união desses dois conjuntos numéricos, os racionais e os irracionais. Portanto, os números irracionais são números reais que não são racionais, o que dá sentido a notação $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Veja o diagrama a seguir:

Figura 19 – **Diagrama dos conjuntos numéricos.**



Fonte:Elaborado pelo autor.

É importante lembrar que as ideias dos conjuntos numéricos não surgiram seguindo a sequência: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Por exemplo, perceba que o homem já trabalhava com números racionais e irracionais antes mesmo da ideia dos números inteiros negativos. Assim, a relação do homem com os números se deu de forma gradativa e atendendo as suas necessidades.

3.1 Problemas envolvendo números naturais e racionais

Feita a introdução sobre os conjuntos numéricos, nesta seção serão abordados conteúdos referentes a resultados e problemas interessantes que envolvem os números naturais e os racionais. Esses números, de modo geral, tem uma variada quantidade de aplicações na vida cotidiana, posto que as primeiras associações do ser humano com a ideia de número foram justamente com os conjuntos trabalhados neste tópico.

Para isso, nesta seção, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(6^o e 7^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulos: "Operações com Números Naturais"e "Divisibilidade".

3.1.1 Números naturais

Proposição 3.1. *(Algorítmo da divisão) Se a e b são números inteiros positivos, então existe um único par (q,r) de inteiros positivos, tais que*

$$a = b\cdot q + r,\ 0 \le r < b$$

onde q e r são chamados de quociente e resto da divisão de a por b.

Observação 3.1. a e b são chamados de dividendo e divisor, respectivamente. Além disso, se $r = 0$, então dizemos que b divide a.

Exemplo 3.1. (Portal do Saber). O numero 38 é dividido em duas parcelas. A maior parcela dividida pela menor da quociente 4 e resto 3. Determine o produto dessas parcelas.

Como não sabemos o valor da parcela, devemos ter que $x+y = 38$, com $x > y$ naturais. Pelo algorítmo da divisão, temos $x = 4y+3$. Somando y em ambos os lados, temos

$$\underbrace{x+y}_{38} = 5y+3 \Rightarrow 5y = 35$$

Logo, $y = 7$, $x = 31$ e $x \cdot y = 217$.

Definição 3.1. Seja $n > 1$ um número natural. Dizemos que n é número primo se tem apenas dois divisores naturais distintos, são eles: 1 e n.

Se $n > 1$ não é primo, dizemos que n é composto.

Exemplo 3.2. São números primos $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,...\}$.

Observação 3.2. Note que 1 não é primo, pois tem apenas um divisor natural. Curiosamente 1 não é primo e nem composto.

Teorema 3.1. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior que 1 é primo ou se escreve de maneira única, a menos da ordem, como um produto de fatores primos.*

Exemplo 3.3. Observe a fatoração dos seguintes números:

$$\begin{array}{ccc} 108 & = & 2^2 \cdot 3^3 \\ 169 & = & 13^2 \\ 180 & = & 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 1125 & = & 3^2 \cdot 5^3 \\ 1323 & = & 3^3 \cdot 7^2 \\ 10404 & = & 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2. \end{array}$$

Definição 3.2. Sejam a e b números naturais não simultanemante nulos. Chamaremos o número natural $d = mdc(a,b)$ o maior divisor comum de a e b.

Observação 3.3. Se $mdc(a,b) = 1$, dizemos que a e b são primos entre si.

Definição 3.3. Sejam a e b números naturais não simultanemante nulos. Chamaremos o número natural $m = mmc(a,b)$ o menor multiplo comum de a e b.

Proposição 3.2. *Se* $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ *e* $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$*, onde* $p_1, \;\; p_2, \;\; \cdots p_n$ *são números primos, então*

$$mmc(a,b) = p_1^{max\{a_1, \;\; b_1\}} p_2^{nax\{a_2, \;\; b_2\}} \cdots p_n^{max\{a_n, \;\; b_n\}}$$

e

$$mdc(a,b) = p_1^{min\{a_1, \;\; b_1\}} p_2^{min\{a_2, \;\; b_2\}} \cdots p_n^{min\{a_n, \;\; b_n\}},$$

onde $max\{a_i, \;\; b_i\}$ *é o maior valor entre* a_i *e* b_i *e* $min\{a_i, \;\; b_i\}$ *é o menor valor entre* a_i *e* b_i*.*

Exemplo 3.4. Pelo Exemplo 3.3, as fatorações de 1323 e 10404 são dadas por

$$1323 = 3^3 \cdot 7^2 \quad \text{e} \quad 10404 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2.$$

Observe que 7 não aparece como um dos fatores de 10404, assim como 2 e 17 não aparecem como fatores primos de 1323. Mas, lembre que $2^0 = 7^0 = 17^0 = 1$. Assim, temos

$$1323 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 17^0 \quad \text{e} \quad 10404 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \cdot 17^2.$$

Por fim, pela Proposição 3.2, temos que

$$\begin{aligned} mmc(1323, 10404) &= 2^{max\{0, \;\; 2\}} . 3^{max\{2, \;\; 3\}} . 7^{max\{0, \;\; 2\}} . 17^{max\{0, \;\; 2\}} \\ &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 17^2 \\ &= 1529388 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} mdc(1323, 10404) &= 2^{min\{0, \;\; 2\}} . 3^{min\{2, \;\; 3\}} . 7^{min\{0, \;\; 2\}} . 17^{min\{0, \;\; 2\}} \\ &= 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \cdot 17^0 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Utilizando a fatoração de 108 e 180 do Exemplo 3.3, façamos:

$$
\begin{aligned}
mmc(108,180) &= 2^{max\{2,\ 2\}} \cdot 3^{max\{2,\ 3\}} \cdot 5^{max\{0,\ 1\}} \\
&= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \\
&= 540
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
mdc(108,180) &= 2^{min\{2,\ 2\}} \cdot 3^{min\{2,\ 3\}} \cdot 5^{min\{0,\ 1\}} \\
&= 2^2 \cdot 3^2 \\
&= 36
\end{aligned}
$$

Teorema 3.2. *Se a e b são inteiros positivos, então $mmc(a,b) \cdot mdc(a,b) = a \cdot b$.*

Exemplo 3.6. Pelo Teorema 3.2, temos

$$mmc(1323,\ \ 10404) \cdot mdc(1323,\ \ 10404) = 1323 \cdot 10404.$$

Como $mdc(1323,\ \ 10404) = 9$, segue que

$$mmc(1323,\ \ 10404) = \frac{1323 \cdot 10404}{9}.$$

Logo, $mmc(1323,\ \ 10404) = 1529388$.

Exemplo 3.7. Pelo Exemplo 3.5, note que

$$mmc(108,180) \cdot mdc(108,180) = \overbrace{2^2 \cdot 3^3}^{108} \cdot \underbrace{5^1 \cdot 2^2 \cdot 3^2}_{180}.$$

Exemplo 3.8. Daniela coleciona moedas e em sua coleção há 275 moedas de ouro, 220 moedas de prata e 165 moedas de bronze. Ela deseja organizar essa coleção em pequenos potes que tenham o mesmo número de moedas e de tal modo que cada pote contenha o maior número possível de moedas de um único tipo (outro, prata ou bronze). Nessas condições, quantas moedas Gabriela deve colocar em cada caixa? Além disso, ela terá quantas caixas de cada tipo de moeda?

De acordo com o enunciado, devemos encontrar o maior número natural que divide, simultaneamente $165,\ \ 220$ e 275, isto é, o número de moedas deve ser igual ao $mdc(165,\ \ 220,\ \ 275)$. Façamos:

$$\begin{array}{c|c} 165,\ \ 220,\ \ 275 & 5 \\ 33,\ \ 44,\ \ 55 & 11 \\ 3,\ \ 4,\ \ 5 & \end{array}$$

Daí, segue que $mdc(165,\ \ 220,\ \ 275) = 5 \cdot 11 = 55$. Portanto, cada caixa terá um total de 55 moedas. Destas caixas, 5 são de moedas de ouro, 4 são de moedas de prata e 3 são de moedas de bronze.

Exemplo 3.9. Sabe-se que o planeta Júpiter leva 12 anos para dar uma volta completa em torno do Sol, enquanto os planetas Saturno e Urano levam cerca de 30 e de 80 anos, respectivamente, para dar essa mesma volta. Suponha que, em dado instante, os três planetas estejam alinhados. Após quanto tempo os três planetas voltarão a ocupar, novamente, essas posições?

Perceba que Júpiter, Saturno e Urano voltam para a posição em que estavam alinhados a cada $12,\ \ 30$ e 80 anos, respectivamente. Sendo assim, devemos encontrar o menor número natural que é, simultaneamente, multiplo de $12,\ \ 30$ e 80, isto é, o número de anos deve ser igual ao $mmc(12,30,80)$. Façamos:

$$\begin{array}{c|c} 12,\ \ 30,\ \ 80 & 2 \\ 6,\ \ 15,\ \ 40 & 2 \\ 3,\ \ 15,\ \ 20 & 2 \\ 3,\ \ 15,\ \ 10 & 2 \\ 3,\ \ 15,\ \ 5 & 3 \\ 1,\ \ 5,\ \ 5 & 5 \\ 1,\ \ 1,\ \ 1 & \end{array}$$

Logo, $mmc(12,30,80) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

3.1.2 Números racionais

Nesta seção trataremos problemas envolvendo números racionais na forma fracionária, junto com algumas observações importantes. Em seguida, exibiremos exemplos que tratam de problemas envolvendo números racionais em sua forma fracionária. Para uma apresentação mais detalhada sobre a apresentação dos números racionais, sobretudo em sua forma decimal, como sugestão, o leitor pode consultar os livros "A Conquista da Matemática"(7^o ano, pág. 104-115, e 8^o ano, pág. 14-18).

Todo número racional é o resultado de uma divisão de números inteiros, sendo o divisor diferente de zero, ou seja, todo número racional pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e

$b \neq 0$. Os números racionais aparecem em várias cituações cotidianas. Vejamos alguns exemplos:

1. **Representação Decimal.** Levi precisa comprar um novo smartphone. Ao pesquisar em algumas lojas da cidade onde mora, encontrou um de última geração no valor de R\$ 739,98;

2. **Quociente.** 1 pizza com 9 fatias de mesmo tamanho é dividida para 6 pessoas. Cada pessoa ficará com $\frac{9}{6} = 1,5$, isto é, 1 fatia e meia;

3. **Parte\ todo.** Luana está no 8^o ano. Em sua classe há 45 alunos. Em sua turma há 30 meninas. A fração que corresponde a quantidade de meninas com relação ao total de alunos é $\frac{30}{45}$.

Observação 3.4. No item 2, se fossem 2 pizzas, cada uma com 9 fatias de mesmo tamanho, divididas para 12 pessoas. Cada pessoa pessoa receberia $\frac{18}{12} = 1,5$. Novamente, cada pessoa ficará com 1 fatia e meia. Observe que as frações representam a mesma quantidade de fatias para cada pessoa, muito embora não representam a mesma quantidade de pessoas e de fatias.

A Observação 3.4 nos dá uma pista de que duas ou mais frações representam o mesmo número racional, isto é, são equivalentes. De modo geral, podemos exibir uma infinidade frações equivalentes. Veja:

$$1,5 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \cdots = \frac{18}{12} = \cdots = \frac{3n}{2n} = \cdots,$$

onde n é um número inteiro não nulo.

Dito isto, é possível determinar a fração mais simples para representar um determinado número racional? A próxima definição nos mostrará como.

Definição 3.4. Sejam a e b números inteiros, com $b \neq 0$. Quando $mdc(a, b) = 1$, dizemos que a fração $\dfrac{a}{b}$ é irredutível.

Exemplo 3.10. Queremos a forma irredutível da fração $\dfrac{108}{180}$.

Inicialmente, calculamos o $mdc(108, 180) = 36$. Como mostramos anteriormente, o processo para calcular o $mdc(108, 180)$ é

Em seguida dividimos o numerador e o denominador por 36. Daí, segue que

$$\begin{array}{rl|l} 108, & 180 & 2 \\ 54, & 90 & 2 \\ 27, & 45 & 3 \\ 9, & 15 & 3 \\ 3, & 5 & \end{array}$$

$$\frac{108 \div 36}{180 \div 36} = \frac{3}{5}$$

Perceba que os números finais do processo para calcular o mdc já nos dá o numerador 3 e o denominador 5 da fração irredutível.

Definição 3.5. Sejam $a,\ b,\ c$ e d números inteiros, com b e d não nulos. Vale que:

i. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$;

ii. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

iii. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$, se $\dfrac{c}{d} \neq 0$.

Veja que na Definição 3.5, em (i), nos dá uma ferramenta útil somar ou subtrair frações. No entanto, para somar ou subtrair frações devemos organizá-las de modo que os denominadores sejam comuns. Veja a situação a seguir:

$$\frac{5}{7} + \frac{8}{14}$$

Observe que os denominadores das frações são diferentes, mas $\frac{4}{7}$ é equivalente a $\frac{8}{14}$, em virtude da Definição 3.4 e do Exemplo 3.10. Assim,

$$\frac{5}{7} + \frac{8}{14} \Leftrightarrow \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5+4}{7} = \frac{9}{7}$$

Apesar disso, quando devemos somar ou subtrair mais de duas frações, pode se tornar trabalhoso usar a Definição 3.5, item (i). Apresentaremos um algorítmo que facilitará o processo. Considere a soma e subtração de frações

$$\frac{1}{4} + \frac{6}{5} - \frac{4}{8}.$$

Para o primeiro passo, com o objetivo de encontrar frações equivalentes e com o mesmo denominador da operação proposta anteriormente, devemos calcular o menor múltiplo comum dos denominadores, isto é, $mmc(4,\ 5,\ 8) = 40$. Em seguida, dividimos o $mmc(4,\ 5,\ 8) = 40$ pelo denominador de cada fração e multiplicamos o resultado pelo seu respectivo numerador. Veja:

$$[40 \div 4] \times 1 = 10, \quad [40 \div 5] \times 6 = 48 \quad \text{e} \quad [40 \div 8] \times 4 = 20.$$

Estes resultados serão os novos numeradores e o $mmc(4,\ 5,\ 8) = 40$ será o denominador comum. Note que

$$\frac{10}{40} = \frac{1}{4}, \quad \frac{48}{40} = \frac{6}{5} \quad \text{e} \quad \frac{20}{40} = \frac{4}{8}.$$

Por fim, mantemos o denominador comum, $mmc(4,\ 5,\ 8) = 40$, e faremos as operações algébricas com os novos numeradores. Veja:

$$\frac{1}{4} + \frac{6}{5} - \frac{4}{8} \Leftrightarrow \frac{10}{40} + \frac{48}{40} - \frac{20}{40} = \frac{10 + 48 - 20}{40} = \frac{38}{40}$$

Podemos, ainda, determinar a fração irredutível do resultado. Neste caso, a fração irredutível é $\frac{19}{20}$.

Exemplo 3.11. (IFAL, 2010) A superfície do nosso planeta é constituída de 30% de terra e 70% de água. Um terço da terra é pastagem, floresta, ou montanha, e dois quintos da terra são desertos ou cobertos por gelo; o resto da terra é usado para o cultivo. Qual é o percentual da superfície total do nosso planeta que é usada para o cultivo?

De acordo com o enunciado, a parte terrestre corresponde a 30% da superfície do planeta e desses

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15}$$

corresponde a pastagem, florestas, montanhas, desertos ou espaços coberto por gelo. Com isso, queremos $\dfrac{11}{15}$ de 30%. Façamos:

$$\frac{11}{15} \cdot 30\% = \frac{330\%}{15} = 22\%$$

Logo, $30\% - 22\% = 8\%$ é utilizado para cultivo.

Exemplo 3.12. **(OBM, 2009)** Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas. Qual o peso da barra, em gramas?

De acordo com o enunciado, Nelly e Penha, juntas, ficaram com $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$ da barra. Assim, Sônia ficou com $1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$ da barra. Perceba que $\frac{7}{20}$ corresponde a $70g$.

Portanto, a barra de chocolate pesa $\frac{70}{\frac{7}{20}} = 70 \cdot \frac{20}{7} = 200g$.

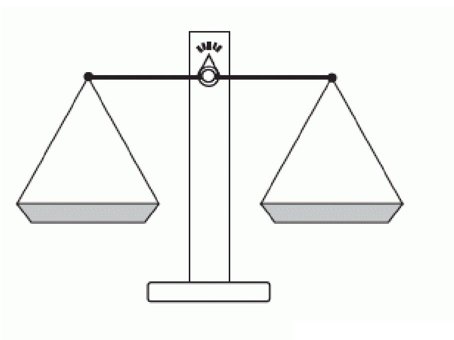
Outra maneira de fazer é tentar escrever o enunciado em forma de uma equação do primeiro grau. Seja x o peso de uma barra. De acordo com o enunciado, Nelly tem $\frac{2x}{5}$ da barra, Penha tem $\frac{1x}{4}$ e Sônia tem $70g$. Então, determinar o peso da barra é resolver a seguinte equação:

$$\frac{2x}{5} + \frac{x}{4} + 70 = x.$$

3.2 Equações e sistemas do primeiro grau

Equações e sistemas do primeiro grau são ferramentas importantes para a resolução de diversas sintuações do cotidiano. Por exemplo, uma maneira intuítiva de calcular o peso de diferentes objetos é usando uma balança de pratos que fica equilibrada quando em ambos os pratos são colocados objetos que resultam no mesmo peso. Veja a figura da balança a seguir:

Figura 20 – **Balança de pratos.**



Fonte:<https://www.estudegratis.com.br/questao-de-concurso/107795>.

Imagine que alguém colocou 4 objetos idênticos e, consequentemente, de mesmo peso em um dos pratos da balança e no outro colocou um único objeto que pesa $12kg$ de modo que os dois lados ficaram equilibrados. Intuitivalemente, nota-se que o peso do objeto em questão é exatamente $\frac{1}{4}$ de $12kg$.

Por outro lado, é possível traduzir essa situação para uma linguagem algébrica. Considere x como o peso de cada um dos objetos, por um lado da balança equilibrada temos a soma dos pesos dos 4 objetos idênticos e por outro temos um único objeto de $12kg$. Assim, podemos descrever a situação como

$$\overbrace{x+x+x+x}^{4x} = 12$$

Seguindo a mesma ideia, observando a Figura 20, imagine que em um primeiro momento são colocadas 10 laranjas e 5 maçãs em um dos pratos da balança e um peso de $2000g$ no outro prato de modo que a balança fique equilibrada. Em um segundo momento, em um dos pratos há 1 laranja e 1 maçã e no outro há um peso de $260g$. Traduzindo a situação para uma linguagem algébrica, considerando que o peso da maçã é x e o peso da laranja é y, temos que

$$\begin{cases} 5x+10y = 2000 \ \ (1^o \ \ momento) \\ x+y = 260 \ \ (2^o \ \ momento) \end{cases}$$

Nesta seção, serão apresentados alguns métodos de resolução de equações e sistemas do primeiro grau. Para isso, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o e 8^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Sistema de Equações do 1^o Grau".

3.2.1 Equações do primeiro grau

Definição 3.6. Toda equação que pode ser reduzida a forma $ax+b=0$, em que x é uma incógnita e $a,b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, é chamada de equação do primeiro grau.

Observação 3.5. Os números a e b são chamados de coeficientes da equação.

Quando uma equação descreve determinado problema, seja ela de 1^o grau ou não, a incógnita "mora"em um universo, ou melhor, em um conjunto universo que é representado por $\mathbb{U}$. De maneira mais formal, significa que a incóginita pertence a um determinado conjunto numérico ($\mathbb{N}, \ \mathbb{Z}, \ \mathbb{Q}, \ \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$).

Desta forma, resolver uma equação significa obter sua solução no conjunto universo, caso exista. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 3.13. Considere a equação $2x+1=9$, com $x \in \mathbb{N}$.

Note que x pode assumir os seguintes valores: $1,\ 2\quad 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$. Fazendo as substituições considerando os possíveis valores de x, obtemos

$$\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow 2\cdot 1+1=3 \\ x=2 &\Rightarrow 2\cdot 2+1=5 \\ x=3 &\Rightarrow 2\cdot 3+1=7 \\ x=4 &\Rightarrow 2\cdot 4+1=9 \\ x=5 &\Rightarrow 2\cdot 5+1=11 \end{aligned}$$

Neste caso, note que o único número natural que satisfaz a equação é 4. Assim, $\mathbb{U}=\mathbb{N}$ é chamado de conjunto universo; 4 é chamado de raiz ou solução da equação e $\mathbb{S}=\{4\}$ é chamado conjunto solução da equação.

Exemplo 3.14. Determine a solução da equação $3x+19=1$, com $x \in \mathbb{N}$.

Somando -19 em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$3x+19+(-19)=1+(-19) \Rightarrow 3x=-18.$$

Agora, multiplicando a equação por $\frac{1}{3}$, temos

$$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot(-18) \Rightarrow \frac{3}{3}x=\frac{-18}{3}$$

Logo, $x=-6$.

Perceba que x pertence ao conjunto dos números naturais e, consequentemente, não pode ser -6. Portanto, a equação $3x+19=1$ não tem solução em $\mathbb{N}$.

Exemplo 3.15. Resolva a equação $\frac{x}{2}+1=\frac{x+4}{5}$, com $x \in \mathbb{Q}$.

Inicialmente, multiplicaremos ambos os membros da equação por 10, que menor multiplo comum entre 2 e 5. Façamos:

$$10\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)=10\cdot\left(\frac{x+4}{5}\right) \Rightarrow \frac{10}{2}x+10\cdot 1=\frac{10}{5}x+\frac{10\cdot 4}{5} \Rightarrow 5x+10=2x+8.$$

Somando $-2x-10$ em ambos os membros, temos

$$5x+10+(-2x-10)=2x+8+(-2x-10) \Rightarrow 3x=-2$$

Em seguida, multiplicamos a equação por $\dfrac{1}{3}$ e obtemos $x=\dfrac{-2}{3}$.

De acordo com Júnior & Castrucci (2018, p. 156), em seu livro "A Conquista da Matemática (7^o ano)", para resolver problemas envolvendo equações de primeiro grau, observe os seguintes passos:

Passo 1. Ler o problema com atenção e levantar os dados;

Passo 2. Traduzir os dados para uma linguagem algébrica;

Passo 3. Resolver a equação estabelecida;

Passo 4. Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Exemplo 3.16. Em uma escola estadual, um sexto dos alunos são da terceira série, um terço são da segunda série e 750 são da primeira série do Ensino Médio. Quantos alunos há nessa escola?

De acordo com os passos citados anteriormente, temos

Passo 1:
$$\begin{array}{lll} 1^a & série: & 750; \\ 2^a & série: & \frac{1}{3}\ do\ total; \\ 3^a & série: & \frac{1}{6}\ do\ total. \end{array}$$

Passo 2: se x é o total de alunos, então $\frac{x}{3}$ representa a quantidade de alunos da 2^a série e $\frac{x}{6}$ da 3^a série do Ensino Médio. Com isso, a equação que representa o problema é dada por

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+750=x$$

Passo 3: multiplique ambos os membros da equação por 6, que é o menor múltiplo comum entre 3 e 6. Daí, segue que

$$6\cdot\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+750\right)=6x \Rightarrow x+2x+4500=6x \Rightarrow 3x+4500=6x$$

Somando $-3x$ a equação , temos

$$3x = 4500 \Rightarrow x = 1500$$

Passo 4: observe que o enúnciado sugere que a solução "mora"no conjunto dos números naturais (quantidade de alunos da escola) e o encontrado para x satisfaz as condições do enunciado. Portanto, $\mathbb{S} = \{1500\}$.

Exemplo 3.17. Em uma aula de matemática, o professor enunciou a seguinte situação para seus alunos:

"Tenho dois filhos. Considerando apenas os anos, a soma da idade deles é igual a 7 anos. Sabendo qual que o mais velho tem 9 anos a mais que o mais novo, qual a idade dos meus dois filhos?"

João, indignado, respondeu: O problema proposto não tem solução, professor!!!

Perceba que o problema em questão trata de idades e, portanto, é um número inteiro positivo, neste caso a incógnita mora no universo do conjunto $\mathbb{N}$. Se a idade do mais novo de x, então a idade do mais velho é igual a $x+9$. Diante das informações do enunciado, temos que a equação que descreve o problema é

$$x + (x+9) = 7 \Rightarrow x = -1$$

Perceba que João está correto, pois a raiz da equação não se enquadra no conjunto universo. Veja que x "mora"em $\mathbb{N}$, isto é, x pode assumir os valores $1,\ 2,\ ..., 15,\ ....$

3.2.2 Sistemas de equações do primeiro grau

Definição 3.7. Um sistema linear de equações de primeiro grau (ou simplesmente sistema de primeiro grau) com duas equações de primeiro grau e duas incógnitas é da forma

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$

onde $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ são números reais fixados e $x,\ y$ são incógnitas.

A solução do sistema do primeiro grau é o par ordenado (x_o, y_o) que satisfaz

$$\begin{cases} ax_o + by_o = e \\ cx_o + dy_o = f \end{cases}.$$

Observação 3.6. É possível demonstrar que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema possui solução única. Se $ad - bc = 0$, então o sistema não possui solução ou possui infinitas soluções.

Metodo da adição: Consiste em somar membro a membro as equações do sistema, fazendo os devidos ajustes, para eliminar uma das incógnitas.

Exemplo 3.18. Dona Marta tem dois filhos, Douglas e Marcelo, cuja soma das idades é igual a 65 e a diferença é igual a 17. Sabendo que Marcelo é o mais novo, qual é a idade de Douglas?

Seja x a idade de Douglas e y a idade de Marcelo. Sabemos que $x > y$, pois Douglas é o mais velho. Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x - y = 17 \end{cases}$$

Para utilizarmos o método da adição, antes de somar membro a membro, devemos escolher uma das incógnitas para elimitar e, em seguida, observaremos se as constantes que as multiplicam se anulam. De acordo com a Definição 3.7, $b = 1$ e $d = -1$. Perceba que $b + d = 0$. Assim, podemos somar membro a membro.

$$(x + y) + (x - y) = 65 + 17$$

Com isso, temos que $2x = 82$ e, conseguentemente, $x = 41$.

Note que o problema pede a idade de Douglas. Neste caso, não é necessário determinar a idade de Marcelo. Se quisessemos descobrir a idade de Marcelo, fariamos $41 + y = 73$ ou $41 - y = 9$.

Exemplo 3.19. Se dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos $64kg$, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos $41kg$, qual é o peso de um tijolo?

Denotaremos por x o peso de um tijolo e y o peso de um saco de areia, em quilogramas. Como dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos $64kg$, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos $41kg$, temos

$$\begin{cases} 2x+3y=64 \\ x+2y=41 \end{cases}$$

Observe que o sistema é possível, pois $2\cdot 2-3\cdot 1=-1\neq 0$. Devemos escolher uma das incógnitas para "eliminar"do sistema. Como queremos o peso do tijolo, x, devemos eliminar o y. Multiplicando a primeira equação por (-2) e a segunda por 3, obtemos

$$\begin{cases} -4x-6y=-128 \\ 3x+6y=123 \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\begin{array}{rcl} -4x-6y+(3x+6y) & = & -128+123 \\ -x \ \cdot(-1) & = & -5 \ \cdot(-1) \\ x & = & 5 \end{array}$$

Logo, o peso de um tijolo é igual a 5kg.

Exemplo 3.20. Determine, se possível, a solução do sistema

$$\begin{cases} x+y=4 \\ -2x-2y=-8 \end{cases}.$$

Observe que $1\cdot(-2)-1\cdot(-2)=0$. Neste caso, tem infinitas soluções, pois

$$-2x-2y=-8\Rightarrow -2\cdot(x+y)=-2\cdot 4\Rightarrow x+y=4.$$

Isso significa que para cada valor x_0, encontramos um valor y_0 que satisfaz as equações do sistema.

Método da substituição: consistem em isolar uma das incógnitas no 1^o membro e substituir na outra equação.

Exemplo 3.21. Um estacionamento cobra $R\$3,00$ por moto e $R\$5,00$ por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou $R\$382,00$ para um total de 100 veículos. Quantas motos e carros utilizaram o estacionamento nesse dia?

Seja x o número de carros e y o número de motos do dia em questão. Diante das condições do enunciado, temos que

$$\begin{cases} 5x + 3y = 382 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

Isolando x na segunda equação, obtemos $x = 100 - y$. Substituindo em $5x + 3y = 382$, segue que

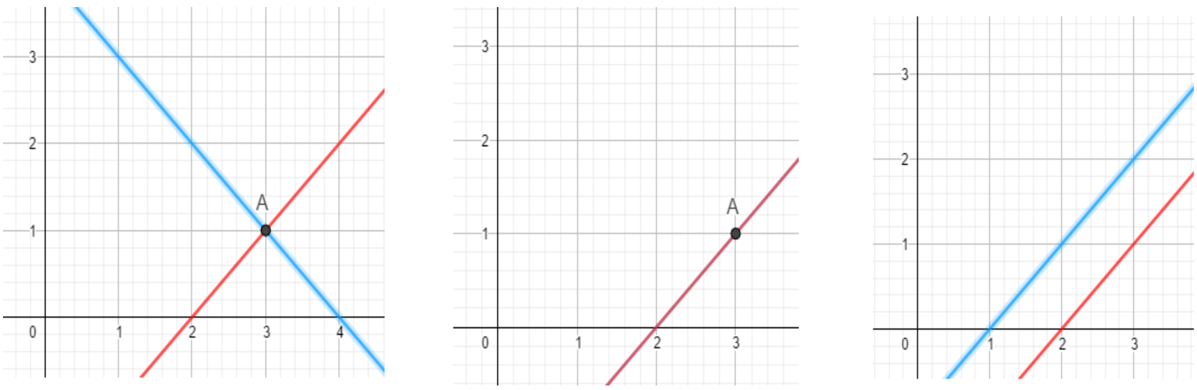
$$\begin{aligned} 5(100 - y) + 3y = 382 &\iff -5y + 3y + 500 = 382 \\ &\iff -2y = 382 - 500 \\ &\iff y = \frac{-118}{-2} = 59. \end{aligned}$$

Logo, $x = 100 - 59 = 41$.

Exemplo 3.22. O sistema formado pelas equações $x + y = 3$ e $x + y = 5$ não tem solução. Já que, observando as equações, obtemos $3 = 5$ e tal igualdade é um absurdo.

Observação 3.7. Há uma interpretação geométrica para os sistemas de primeiro grau. Apresentaremos a interpretação geométrica dos sistemas com solução única, com infinitas soluções e os que não possuem solução, nesta ordem. Veja a imagem a seguir:

Figura 21 – **Interpretação geométrica do sistema de equações do primeiro grau.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Razões e proporções

Nesta seção trataremos de apresentar as noções de razão e proporção entre duas grandezas. Deste modo, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o e 8^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Razões e Proporções".

3.3.1 Razão

Inicialmente, imagine a seguinte situação: Pedro e Alana brincam com o jogo da memória. Eles jogam 8 partidas por semana. Dessas partidas, Pedro ganha 5 e perde 3. Assim, quando se diz que a razão entre a quantidade de vitórias e a quantidade de derrotas de Pedro é de $5:3$ (lê-se: 5 está para 3 ou razão de 5 para 3 ou simplesmente 5 para 3), significa que, por definição, ao montar uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador é igual ao número de derrotas de Pedro, então essa fração é equivalente à fração $\frac{5}{3}$. Veja a tabela a seguir:

Tabela 9 – **Quantidade de vitórias e derrotas de Pedro pela quantidade de semanas.**

N^o de semanas	**N^o de vitórias**	**N^o de derrotas**
1	5	3
2	10	6
3	15	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	50	30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 9, note que as frações que correspondem a razão entre o número de vitórias e o número de derrotas é equivalente a $\frac{5}{3}$. Por exemplo, com o acumulado de 3 semanas, a fração que representa a razão entre o número de vitórias e o número de derrotas é

$$\frac{15}{9} = \frac{5 \cdot \cancel{3}}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{3}.$$

De modo geral, temos

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \cdots = \frac{50}{30} = \cdots$$

Perceba que, dependendo da quantidade de semanas, Pedro obtem uma determinada quantidade de vitórias e de derrotas. De toda forma, ele mantém a razão entre as duas grandezas, isto é, Pedro conquista 5 vitórias para cada 3 derrotas. Portanto, é relevante afirmar que a razão entre duas grandezas é uma medida relativa (depende do referencial) e não absoluta.

Exemplo 3.23. Alguns exemplos de razões entre grandezas que aparecem, eventualmente, no cotidiano são:

1. Velocidade média: razão entre a variação de espaço (km) e a variação de tempo (h). Denotamos por $v_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$;
2. Densidade: razão entre a massa (g) e o volume (cm^3). Denotamos por $d = \dfrac{massa}{Volume}$;
3. Densidade demográfica: razão entre o número de pessoas ou habitantes e a área (km^2). Denotamos por $d_{demográfica} = \dfrac{hab}{Área}$;
4. Escala dos mapas: razão entre a distância no mapa (cm) e a distância real (cm). $E = \dfrac{d_{mapa}}{D_{real}}$.

Nos casos 1, 2 e 3 perceba que são grandezas diferentes, enquanto no caso 4 temos a razão entre a mesma grandeza. Além disso, é importante deixar claro que as unidades de medidas foram utilizadas como exemplo, porém elas não são as únicas para essas razões, sobretudo nos casos 1 e 3.

Exemplo 3.24. Em 2017, 300000 pessoas foram à Avenida Paulista protestar contra o aumento excessivo das taxas para a utilização do transporte público, bem como mais efetividade dos políticos no combate às desigualdades sociais. A estimativa é de que a região ocupada pelas pessoas que compareceram ao protesto foi de 100000 m^2. Assim,

$$d_{demográfica} = \frac{300000}{100000} = 3 \;\; hab\backslash m^2$$

Com isso, observe que a cada 5 pessoas ocuparam 1 metro quadrado (m ^{2}) da avenida.

Exemplo 3.25. Suponha que na cidade de Arapiraca\AL, cuja população é de 220 mil habitantes, 440 pessoas tem um salário maior ou igual a 8 mil reais. Os demais, ganham menos do que 8 mil. A razão entre as pessoas que ganham 8 mil reais ou mais e as pessoas que ganham menos que esse valor é:

$$\frac{440}{220000} = \frac{1}{500}.$$

Isto significa que 1 a cada 500 pessoas recebe um salário maior ou igual a 8 mil.

3.3.2 Proporção

Voltando a Tabela 9, observe que a razão entre a quantidade de vitórias e derrotas de Pedro jogando 2 semanas seguidas é de $\frac{10}{6}$. Já com 10 semanas seguidas a razão é de $\frac{50}{30}$.

Essas frações são equivalentes, isto significa que

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{50}{30}.$$

Desta forma, por definição, chama-se de proporção uma sentença matemática que expressa a igualdade entre duas ou mais razões.

Exemplo 3.26. Se a, b , c e d são números reais não nulos, nesta ordem, formam uma proporção, então, por definição, tem-se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Neste caso, podemos ler a sentença da seguinte maneira: "a está para b assim como c está para d".

Observação 3.8. Um método eficiente para decidir se duas razões são proporcionais ou não é a multiplicação em X. Vejamos, o caso do exemplo anterior, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Como b e d são não nulos, multiplicamos ambos os membros da igualdade por bd. Daí, segue que

$$bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}$$

Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica em $ad = bc$.

Representando a equivalência de razões como $a : b = c : d$, usualmente dizemos que, em uma proporção, o produto dos meios (b e c) é igual ao produto dos extremos (a e d).

Exemplo 3.27. Determine o valor de x para que $\frac{x+1}{5} = \frac{2x+6}{15}$.

Aplicando o produto dos meios pelos extremos, obtemos

$$15 \cdot (x+1) = 5 \cdot (2x+6) \Rightarrow 15x+15 = 10x+30$$

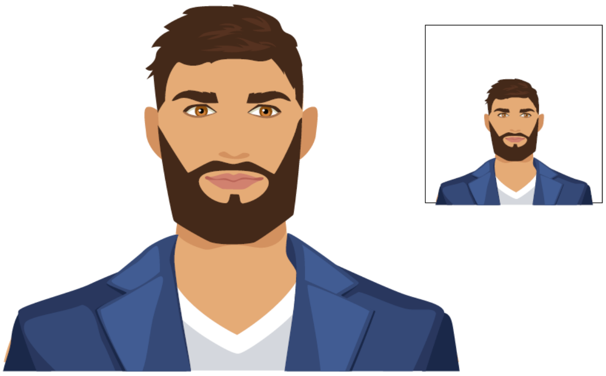
Somando $-10x-15$ a equação anterior, temos

$$15x+15+(-10x-15) = 10x+30+(-10x-15) \Rightarrow 5x = 15$$

Logo, $x = 3$.

Exemplo 3.28. (Portal do Saber). Uma aplicação interessante relacionada ao conceito de proporção é a de figuras semelhantes. Uma foto é uma representação proporcional das dimensões reais de uma pessoa. Veja a imagem a seguir:

Figura 22 – **Figuras semelhantes**



Fonte:<https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf> .

Suponha que a distância entre os ombros de Pedro mede 50 cm e a distância entre o topo de sua cabeça até seu queixo mede 15 cm. Em uma de suas fotos, ele percebeu que a distância entre seus ombros é de 5 cm. Podemos calcular a distância, na foto, do topo de sua cabeça até o queixo. Seja x a distância procurada. Daí, segue que

$$\frac{15}{50} = \frac{x}{5} \Rightarrow 50x = 75$$

Logo, $x = 1,5$ cm.

Definição 3.8. Dados a e b números reais positivos, chamaremos de média geométrica entre a e b o número real positivo x que satisfaz a seguinte proporção:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Para resolver a seguinte proporção, utilizando o produto dos meios pelos extremos, temos que $x^2 = ab$. Sorte que $x = \sqrt{ab}$.

Proposição 3.3. *Se* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *então vale as seguintes propriedades:*

P1. $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ *e* $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ *;*

P2. $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d}$*;*

P3. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$*;*

P4. $\dfrac{a^2}{a \cdot b} = \dfrac{c^2}{c \cdot d}$*.*

Observação 3.9. Note que podemos ter uma segunda versão da propriedade P2. Se $a \neq b$ e $c \neq d$, então podemos escrever a seguinte proporção

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$$

Invertendo $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{d-c}{c}$, obtemos

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}.$$

Exemplo 3.29. **(IFAL, 2013)** Se $\dfrac{a}{4-a} = \dfrac{b}{5-b} = \dfrac{c}{7-c} = 3$, então determine o valor de $a+b+c$.

Chamaremos de $x = a+b+c$. Pela Proposição 3.3, em P3, temos que

$$\frac{a+b+c}{4+5+7-(a+b+c)} = 3 \Rightarrow \frac{x}{16-x} = 3$$

Ultilizando o produto dos meios pelos extremos, obtemos

$$x = 3 \cdot (16-x) \Rightarrow x = 48 - 3x$$

Somando $+3x$ em ambos os membros, segue que

$$4x = 48 \Rightarrow x = 12.$$

Logo, $a+b+c = 12$.

3.4 Porcentagem

A expressão **por cento** faz parte do nosso cotidiano, sobretudo com relação a finanças. Por exemplo, podemos facilmente encontrar anúncios com "desconto de 8% (lê-se oito por cento) no pagamento à vista"ou "parcelamos em até 12 vezes com acréscimo de 10% no valor do produto".

Nesta seção apresentaremos alguns pontos importantes sobre esse conteúdo tão presente e importante no cotidiano das pessoas. Deste modo, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o e 8^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Porcentagem".

A expressão **por cento** vem do latim *por centum* e significada por um cento. Assim, podemos entender as porcentagens como uma fração cujo denominador é igual a 100 e o símbolo 1% como a fração $\frac{1}{100}$.

Exemplo 3.30. A região Norte ocupa de 45% do território brasileiro. Isto significa que a cada 100 km^2 do território brasileiro, a região norte tem 45 km^2. Assim, podemos representar esses 45% das seguintes maneiras:

- 45% é a representação percentual;
- $\frac{45}{100}$ é a representação centésimal;
- $0,45$ é a representação decimal.

Naturalmente, surge alguns questionamentos. Por exemplo, como vamos representar uma fração ou número decimal em termos percentuais?

Exemplo 3.31. Como podemos representar a fração $\frac{3}{8}$ em termos percentuais?

Inicialmente, observe que a fração representa 3 partes de 8, sendo este último sua totalidade. Assim,

$$\frac{3}{8} = 0,375 \cdot \frac{100}{100} = \frac{37,5}{100} = 37,5\%.$$

Observação 3.10. Observe que $\frac{100}{100} = 100\% = 1$. Assim, 1 representa a totalidade.

A porcentagem é uma medida relativa e não absoluta. Portanto, a porcentagem deve ser entendida como uma parte relativa da totalidade. Devemos observar que porcentagens diferentes estão relacionadas a totalidades diferentes. Os exemplos a seguir ilustrarão esta situação.

Exemplo 3.32. 20% da massa corporal corresponde a gordura. Uma pessoa perdeu 40% da sua gordura em três meses, mantendo os demais índices.

Perceba que a primeira porcentagem trata da quantidade de gordura com relação a totalidade da massa corporal e a segunda relação a gordura inicial (totalidade) e a perda de gordura que houve em três meses. Se quisessemos saber a porcentagem de massa corporal que essa pessoa perdeu, devemos calcular 40% de 20%, isto é,

$$\frac{20}{100} \cdot 40\% = 8\%$$

Exemplo 3.33. De acordo com a Agência Nacional das Águas, estima-se que $2,5\%$ da água existente no mundo é adequada para o consumo humano. Desse total, 69% se concentra nas geleiras, 30% são águas subterrâneas (armazenada em aquiféros) e 1% se encontra nos rios.

Perceba que, assim como no exemplo anterior, as diferentes porcentagens correspondem a diferentes totalidades. $2,5\%$ de água doce corresponde a totalidade de água do planeta, enquanto 1% da água dos rios está relacionada a totalidade de água doce. Se quiséssemos saber qual o percentual da água que se encontra nos rios com relação ao planeta, devemos calcular quanto vale 1% (da água dos rios) de $2,5\%$ (do total de água doce do planeta). Com isso, a água doce que se encontra nos rios corresponde a $0,025\%$ da água encontrada no planeta.

Outro ponto que vale ressaltar é referente a aplicação de porcentagens sucessivas de um certo valor inicial não corresponde à aplicação da soma dessas porcentagens ao valor inicial. O próximo exemplo irá ilustrar esse fato

Exemplo 3.34. Acrescimos ou descontos sucessivos. Imagine que um certo produto, em que seu valor inicial é de 100 reais, sofreu três descontos sucessivos: na primeira semana teve 10% de desconto e na segunda 20%. Qual o desconto total ao final das duas semanas?

Durante a primeira semana o produto sofreu um desconto de 10%, isto é, o seu valor será de 90% do inicial que é igual a 90 reais. Em seguida, o produto que nesta semana custa 90 reais, sofreu um novo desconto de 20%, assim o produto passou a custar 72 reais. Com relação ao valor inicial, houve um desconto total de 28% e não de 30%.

3.5 Produtos notáveis

Algumas identidades algébricas que são ferramentas importantes para a solução de vários problemas de matemática básica (problemas de equação do segundo grau, por exemplo). Essas identidades tem uma relação muito próxima com a geometria, mais especificamente com relação a áreas de quadrados e volume de cubos. Para isso, nesta seção, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas".

Definição 3.9. Dizemos que uma identidade é algébrica quando ambos os membros da igualdade são expressões algébricas e a igualdade permanece verdadeira para quaisquer valores atribuídos as variáveis.

Exemplo 3.35. A equação $2x^2+64=2(x^2+34)-4$ é uma identidade algébrica.

Os produtos notáveis, portanto, são identidades algébricas que aparecem com frequência quando operamos com expressões algébricas. Nesta seção, apresentaremos alguns dos principais produtos notáveis.

Sejam a, b e c números reais. Os principais produtos notáveis são:

1. **Quadrado da soma de dois termos**:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

2. **Quadrado da diferença de dois termos**:

   A demonstração desse resultado é análogo ao do quadrado da soma de dois termos.

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

3. **Quadrado da soma de três termos**:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

4. **Produto da soma pela diferença de dois termos**:

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

   Observação 3.11. Chamamos de diferença de quadrados o lado direito da igualdade (a^2-b^2).

5. **Cubo da soma de dois termos**:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

6. **Cubo da diferença de dois termos**:

   A demonstração desse resultado é análogo ao do cubo da soma de dois termos.

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

7. **Soma de dois cubos**:

   Sabemos que $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$. Somando $-3ab(a+b)$ em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b)\\ &= (a+b)(\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{(a+b)^2}-3ab)\\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

8. **Diferença de dois cubos**:

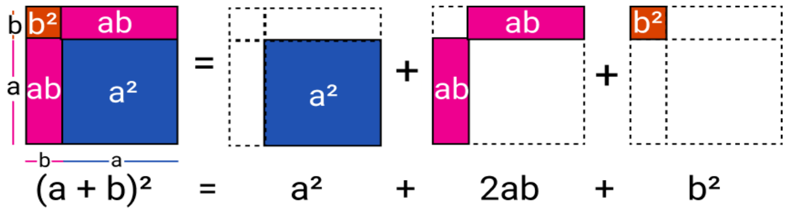
   A demonstração desse resultado é análogo ao da soma de dois cubos.

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Observação 3.12. Para facilitar a memorização dos resultados dos produtos notáveis, chamaremos a, b e c de primeiro, segundo e terceiro termos, respectivamente. Por exemplo, podemos ler o quadrado da soma de dois termos como o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. É possível fazer o mesmo com os demais.

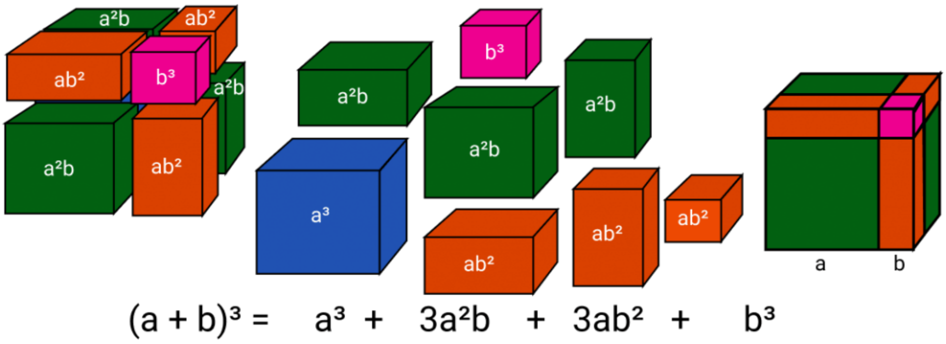
Cada um desses produtos notáveis tem uma interpretação geométrica relacionada a área ou volume. Veja as figuras a seguir:

Figura 23 – **Interpretação geométrica do cubo da soma de dois termos.**



Fonte:<https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/>.

Figura 24 – **Interpretação geométrica do cubo da soma de dois termos.**



Fonte:<https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/> .

Exemplo 3.36. É possível encontrarmos x e y reais que satisfaçam as condições: $x+y=5$ e $xy=14$?

Elevando ambos os membros de $x+y=5$ ao quadrado, temos

$$(x+y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2+2xy+y^2 = 25.$$

Como $xy=14$, segue que $x^2+2\cdot 14+y^2=25$. Somando -28 em ambos os membros, temos

$$x^2+28-28+y^2 = 25-28 \Rightarrow x^2+y^2 = -3$$

Absurdo, pois $x^2+y^2 \geq 0$. Portanto, não é possível encontrarmos x e y reais que satisfaçam essas condições.

Exemplo 3.37. Sejam , b e c números inteiros, tais que $50 \leq b \leq 60$ e $25 < c < 36$. Prove que a equação $25x^2+bx+c=y^2$ não admite como solução números inteiros positivos.

Observe que há 11 possibilidades para o valor de b e 10 possibilidades para c, totalizando 110 equações.

Suponha que existem x e y naturais que satisfaçam a equação $25x^2 + bx + c = y^2$. Tomando os valores máximos e mínimos de b e c, temos

$$25x^2 + 50x + 26 \leq \overbrace{x^2 + bx + c}^{y^2} \leq 25x^2 + 60x + 35 \text{ (i)}.$$

Por outro lado,

$$(5x+5)^2 = 25x^2 + 50x + 25 < 25x^2 + 10x + 26 \text{ (ii)}$$

e

$$25x^2 + 60x + 35 < (5x+6)^2 = 25x^2 + 60x + 36 \text{ (iii)}.$$

Por (i), (ii) e (iii), temos

$$(5x+5)^2 < y^2 < (5x+6)^2 \Rightarrow 5x+5 < y < 5x+6$$

O que é um absurdo, pois y é um número natural e está entre dois números naturais consecutivos.

3.6 Potenciação e radiciação

Nesta seção serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o ao 9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Potenciação".

Definição 3.10. Sejam a é um número real e n um número inteiro positivo. A potência de base a e expoente n é definida por

i. $a^1 = a$;

ii. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-vezes}$.

Apresentaremos alguns exemplos que merecem a nossa atenção. Para isso, considere n um número natural.

Exemplo 3.38. $10^n = 10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10 = 1\underbrace{000...00}_{n-zeros}$

Exemplo 3.39. $(-1)^n = (-1)\cdot(-1)\cdot ... \cdot(-1) = \begin{cases} 1, & se\ \ n\ \text{é}\ par \\ -1, & se\ \ n\ \text{é}\ \text{í}mpar \end{cases}$

Observação 3.13. Pelo exemplo 3.39, podemos concluir que toda base cujo número é negativo quando elevado a um expoente par tem como resultado um número positivo. Entretanto, devemos tomar um cuidado com situações como -2^4 e $(-2)^4$. Desenvolvendo as potências, obtemos

$$\underbrace{-2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{-16} = -2^4 \neq (-2)^4 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{+16}.$$

O primeiro caso temos que a base é 2 e o segundo a base é -2.

Proposição 3.4. *Sejam m e n números inteiros positivos e a e b reais. Valem as seguintes propriedades:*

P1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$*;*

P2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$*, se* $n > m$ *e* $a \neq 0$*;*

P3. $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$*;*

P4. $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$*;*

P5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$*, com* $b \neq 0$*.*

O objetivo dos próximos exemplos é expressar casos particulares para a dedução das propriedades apresentadas na Proposição 3.4.

Exemplo 3.40. P1:

$$\begin{aligned} 17^3\cdot 17^4 &= (17\cdot 17\cdot 17)\cdot(17\cdot 17\cdot 17\cdot 17) \\ &= 17\cdot 17\cdot 17\cdot 17\cdot 17\cdot 17\cdot 17 \\ &= 17^{3+4}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.41. P2:

$$\begin{aligned} \frac{17^5}{17^3} &= \frac{\cancel{17}\cdot\cancel{17}\cdot\cancel{17}\cdot 17\cdot 17}{\cancel{17}\cdot\cancel{17}\cdot\cancel{17}} \\ &= 17^{5-3} \end{aligned}$$

Exemplo 3.42. P3:

$$\begin{aligned}(5^3)^4 &= 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3\\ &= 5^{3+3+3+3}\\ &= 5^{3\cdot 4}\end{aligned}$$

Exemplo 3.43. P4:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\\ &= \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3}\\ &= \frac{2^3}{3^3}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.44. P5:

$$\begin{aligned}(3\cdot 2)^3 &= (3\cdot 2)\cdot(3\cdot 2)\cdot(3\cdot 2)\\ &= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\\ &= 3^3\cdot 2^3.\end{aligned}$$

A seguinte definição possibilita estender a Proposição 3.4 para m e n inteiros.

Definição 3.11. Sejam a é um número real não nulo e n um número inteiro positivo. Definimos:

i. $a^0 = 1$;

ii. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

A seguir colocaremos alguns exemplos interessantes que valem como observações também.

Exemplo 3.45. O valor da expressão numérica $\{2^{2000} + [5^{5000} + 3^{1000} + (18^{7500} - 1)]\}^0 = 1$

Exemplo 3.46. (Portal do Saber.) Determine o valor da expressão $\dfrac{2^n \cdot 10^{n+2}}{5^{n+1}\cdot 4^n}$.

Sabemos que $4^n = (2^n)^2$ e $10^{n+2} = (5\cdot 2)^{n+2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{2^n \cdot 10^{n+2}}{5^{n+1} \cdot 4^n} &= \frac{2^n \cdot 5^{n+2} \cdot 2^{n+2}}{5^{n+1} \cdot (2^n)^2} \\ &= \frac{2^n \cdot 5^{n+1} \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 2^n}{5^{n+1} \cdot 2^n \cdot 2^n} \\ &= 5 \cdot 2^2 = 20.\end{aligned}$$

Observação 3.14. Vale lembrar que, em geral, $(a^m)^n \neq (a)^{m^n}$. Do lado esquerdo temos uma potência cuja base também é uma potencia e do lado direito temos uma potência cujo expoente também é uma potência.

Para o estudo de radiciação, iniciaremos com uma definição e alguns comentários sobre ela.

Definição 3.12. Se $a \geq 0$ é um número real e n é um número inteiro positivo, definimos como a raiz $n-ésima$ de a como o único real não negativo cuja sua $n-ésima$ potência é igual a a.

Denotaremos a raiz $n-ésima$ de a como $\sqrt[n]{a}$. Assim, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Observação 3.15. No caso em que n é ímpar, na Definição 3.12, a pode ser um real qualquer, isto é, podemos incluir os números negativos. Trataremos dos casos $n = 2$ e $n = 3$ nos próximos exemplos.

Exemplo 3.47. Caso $n = 2$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0^2 & = & 0 & \Rightarrow & \sqrt{0} & = & 0 \\ 1^2 & = & 1 & \Rightarrow & \sqrt{1} & = & 1 \\ 2^2 & = & 4 & \Rightarrow & \sqrt{4} & = & 2 \\ 3^2 & = & 9 & \Rightarrow & \sqrt{9} & = & 3. \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 9^2 & = & 81 & \Rightarrow & \sqrt{81} & = & 9 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Um número p natural é chamado **quadrado perfeito** se existir um q, também natural, tal que $p = q^2$. Com isso, $0, \ 1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ ..., \ 81, \ ...$ são quadrados perfeitos.

Exemplo 3.48. Caso $n = 3$:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
(-4)^3 & = & -64 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-64} & = & -4 \\
(-3)^3 & = & -27 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-27} & = & -3 \\
(-2)^3 & = & -8 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-8} & = & -2 \\
(-1)^3 & = & -1 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-1} & = & -1 \\
0^3 & = & 0 & \Rightarrow & \sqrt[3]{0} & = & 0\ . \\
1^3 & = & 1 & \Rightarrow & \sqrt[3]{1} & = & 1 \\
2^3 & = & 8 & \Rightarrow & \sqrt[3]{8} & = & 2 \\
3^3 & = & 27 & \Rightarrow & \sqrt[3]{27} & = & 3 \\
4^3 & = & 64 & \Rightarrow & \sqrt[3]{64} & = & 4 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Um número p inteiro é chamado **cubo perfeito** se existir um q, também inteiro, tal que $p = q^3$. Note que os números ..., $-27,\ -8,\ -1,\ 0,\ 1,\ 8,\ 27,\ ...$ são cubos perfeitos.

Proposição 3.5. *Sejam $m,\ n$ e d números naturais e a e b números reais, tais que $a,\ b \geq 0$. Valem as seguintes propriedades:*

P1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

P2. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;

P3. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot d]{a^{m \cdot d}}$;

P4. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div d]{a^{m \div d}}$, *se d divide m e n;*

P5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *com $b \neq 0$.*

Exemplo 3.49. Determine o valor da expressão $\dfrac{\sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{12}}$;

Sabemos que $1024 = 2^{10}$. Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{12}} &= \frac{\sqrt[5]{2^{10}} \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{12}} \\
&= \sqrt[5]{(2^2)^5} \cdot \sqrt{\frac{108}{12}} \\
&= \left(\sqrt[5]{2^2}\right)^5 \cdot \sqrt{9} \\
&= 2^2 \cdot \sqrt{9} \\
&= 4 \cdot 3 = 12.
\end{aligned}
$$

Observação 3.16. Em geral, $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$.

Definição 3.13. Sejam m e n números inteiros, com $n \neq 0$, e a um número real. Definimos:

i. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;

ii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

A partir da Definição 3.13, as propriedades da Proposição 3.4 são preservadas para expoentes racionais.

Exemplo 3.50. Determine o valor de $\sqrt[6]{0,000064}$.

Como $0,000064 = \dfrac{64}{1000000}$, temos que

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{0,000064} &= \left(\frac{64}{1000000}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{64^{\frac{1}{6}}}{1000000^{\frac{1}{6}}}\\ &= \frac{\left(2^6\right)^{\frac{1}{6}}}{(10^6)^{\frac{1}{6}}} = \frac{2}{10} = 0,2.\end{aligned}$$

3.7 Equação do segundo grau

O nome "segundo grau", vem do fato que a equção está associada a um polinômio de grau 2, isto é, o maior expoente de x é igual a 2. Faz-se necessário ressaltar a importância desse conteúdo, visto que essas equações aparecem em uma grande quantidade de problemas de Geometria Euclidiana e de Física. Nesta seção abordaremos alguns aspectos importantes das equações do segundo grau e como principais referências serão utilizados o livro "A Conquista da Matemática"(9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Equações do Segundo Grau".

Definição 3.14. Dizemos que uma equação do segundo grau é da forma $ax^2+bx+c=0$, onde $a,\ b$ e c são números reais conhecidos, sendo $a \neq 0$, e x uma incógnita real.

Para o desenvolvimento da teoria desta seção, relembraremos alguns fatos importantes.

Observação 3.17. Lembre que se x é um número real, então $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & se\ \ x \geq 0 \\ -x, & se\ \ x < 0 \end{cases}$.

Utilizaremos o método de completar quadrados para demonstrar um resultado geral para calcular raízes de equações do segundo grau. Tal resultado foi desenvolvido pelo matemático Sridhara no século X d.C. No entanto, a fórmula é conhecida popularmente como fórmula de Bhaskara, pois o resultado foi publicado no século XII pelo matemático Bhaskaras, que também é indu.

Proposição 3.6. *Se $ax^2+bx+c=0$ é uma equação do segundo grau e $\Delta = b^2-4ac \geq 0$, então suas raízes reais são*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Demonstração. Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação $ax^2+bx+c=0$ por a. Assim, obtemos

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

ou ainda,

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}.$$

Com o objetivo de completar quadrado, sem alterar a equação, devemos somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros. Fazendo isso, temos que

$$\underbrace{x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{quadrado\ \ perfeito} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Daí, segue que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Note que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ (lado esquerdo da igualdade). Por outro lado, temos que $\frac{b^2-4ac}{4a^2} \geq 0$, pois $4a^2 > 0$ e, por hipótese, $\Delta = b^2-4ac \geq 0$. Assim,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2,$$

Em virtude da Observação 3.17, temos que

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Por fim, obtem-se as raízes da equação do segundo grau

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

Observação 3.18. Note que se $\Delta < 0$, a igualdade

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

seria um absurdo, pois em um lado da igualdade teriamos $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e do outro $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. Neste caso, quando $\Delta < 0$, a equação não possui solução no conjunto dos números reais.

Proposição 3.7. *Se x_1 e x_2 são raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, então vale as seguintes propriedades:*

1. $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$;
2. $P=x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Demonstração. Como x_1 e x_2 são raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, pela Proposição 3.6, temos que

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Daí, obtemos

$$S=x_1+x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)+\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{-b}{a}$$

e

$$P=x_1x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{c}{a}$$

□

Observação 3.19. A Proposição 3.7 não depende de Δ, isto é, as propriedades de soma e produto das raízes são válidas mesmo que a equação não admita raízes reais.

Observação 3.20. A equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser expressa de duas maneiras diferentes, sua forma fatorada e a partir do produto e soma das raízes.

Ao dividirmos a equação do segundo grau por a, em ambos os membros, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Pela Proposição 3.7, $S = \dfrac{-b}{a}$ e $P = \dfrac{c}{a}$. Assim,

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Além disso, a forma fatorada da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. A demonstração ficará a cargo do leitor (como sugestão use o fato de que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 x_2$, substituindo em $x^2 - Sx + P = 0$ e fazendo os devidos ajustes).

4 GEOMETRIA PARA O EXAME DE SELEÇÃO

A palavra Geometria deriva da língua grega, cujo significado é divido em dois termos: "geo"que significa terra e "metria"que significa medida. A origem da Geometria é tão antiga quanto a origem das civilizações, como a egípcia, sumérica e babilônica, visto que a medida que a organização das sociedades se desenvolviam, surgiam a necessidade de demarcar territórios, propriedades privadas, área de plantações e a construção de casas, templos e pirâmides, por exemplo.

No entanto, só na Grécia a Geometria teve uma melhoria na sistematização das ideias já conhecidas dando mais autonomia a disciplina, de modo que esses resultados foram estudados de maneira mais geral, não necessariamente objetivando uma aplicação prática dos enunciados, proposições e demonstrações. Alguns matemáticos que contribuíram para a sistematização dessas ideias foram: Hipátia (primeira matemática da história), Tales de Mileto, Pitágoras, Platão e Euclides de Alexandria.

Em particular, Euclides (360 a.C - 295 a.C) é conhecido por escrever 13 obras entituladas "Os Elementos"sistematindo os principais resultados matemáticos conhecidos até sua época, especialmente os de geometria, com o rigor e padrão nas demonstrações dos resultados que se tornou um referencial por mais de dois milênios. Euclides é considerado o pai da Geometria.

Nesta capítulo serão apresentados alguns tópicos relacionados à Geometria Plana que, conforme o Capítulo 2, são mais recorrentes no exame de seleção do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Alagoas.

4.1 Relações métricas no triângulo retângulo

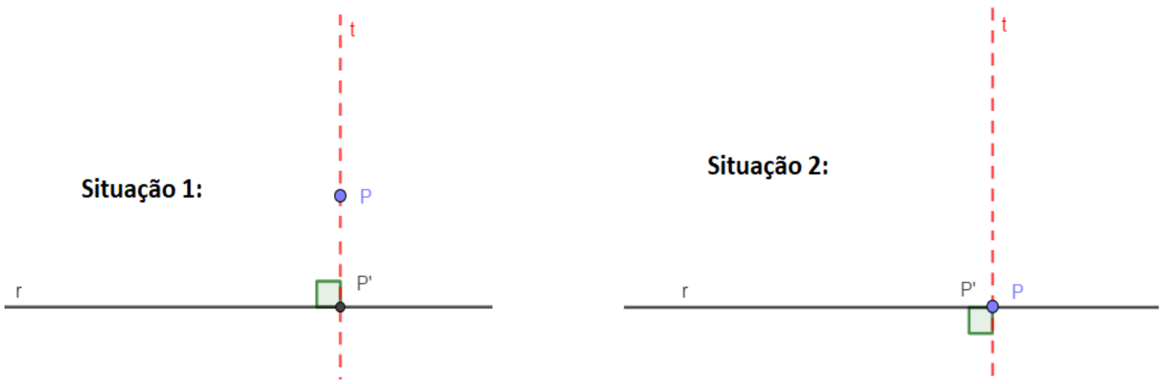
Nesta seção trataremos de apresentar algumas ferramentas para a solução dos problemas envolvendo as medidas de um triângulo retangulo, cujo principal resultado desta seção é o Teorema de Pitágoras. Assim, será utilizado como principal referência o livro "A Conquista da Matemática"(9^o ano).

Definição 4.1. Seja ABC um triângulo retângulo, reto em Â. Chama-se o maior lado do triângulo ABC, que é oposto ao ângulo reto, de hipotenusa e os demais lados de cateto.

Definição 4.2. Considere uma reta r e um ponto P. Ao traçarmos uma reta perpendicular à r

passando por P, obtemos um ponto P' na intersecção entre as retas. Chamaremos P' de projeção ortogonal ou simplesmente projeção de P sobre a reta r.

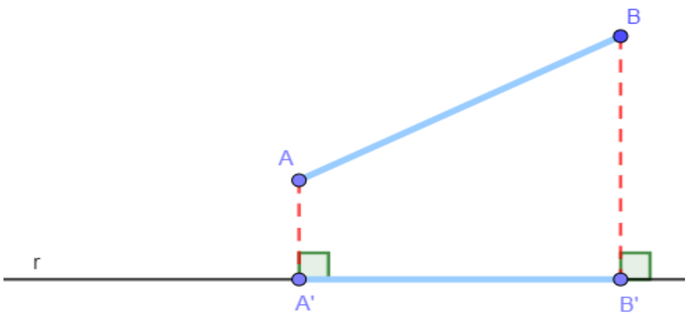
Figura 25 – **Projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r**



Fonte: produzida pelo autor.

Definição 4.3. Considere uma reta r e o segmento AB. Projetando as extremidades de $\overline{AB}$ sobre r, obtemos os pontos A' e B' em r. O segmento $A'B'$ é chamado de projeção ortogonal ou simplesmente projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

Figura 26 – **Projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r**



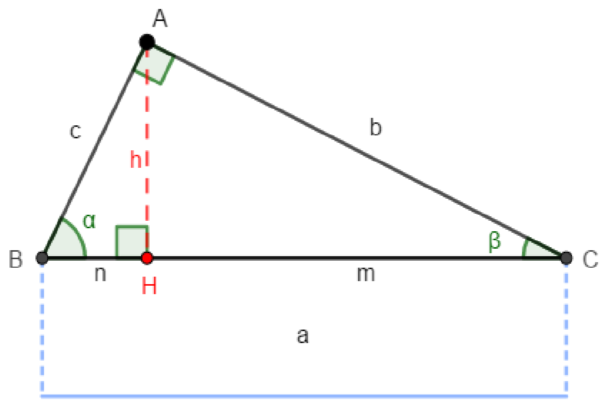
Fonte: produzida pelo autor.

Definição 4.4. Sejam ABC um triângulo retângulo, reto em A, e H a projeção do ponto A sobre a hipotenusa BC. Chamaremos o segmento de reta AH de altura relativa a hipotenusa.

Considere ABC um triângulo retângulo, reto em Â. De acordo com as definições 4.1, 4.2 e 4.3, os elementos de um triângulo retângulo são:

- $\overline{BC} = a$ é a medida hipotenúsa;
- $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ são as medidas dos catetos;

Figura 27 – **Elementos do triângulo retângulo** ABC



Fonte: produzida pelo autor.

- $\overline{AH} = h$ é a medida da altura relativa a hipotenusa;
- $\overline{BH} = n$ e $\overline{HC} = m$ são, respectivamente, as medidas das projeções de $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ sobre a hipotenusa.

Usaremos os elementos citados anteriormente para o enunciado e a demonstração dos dois próximos resultados.

Proposição 4.1. *Seja ABC um triângulo retângulo, reto em $\hat{A}$, onde a hipotenusa mede a, m e n são as medidas das projeções dos catetos b e c, respectivamente, e h é a altura relativa a hipotenusa. Valem as seguintes propriedades:*

P1. A medida da hipotenusa é igual a soma das projeções dos catetos;

P2. O quadrado do cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa;

P3. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a hipotenusa;

P4. O quadrado da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos.

Demonstração. Considere a Figura 27. Note que $a = \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = n + m$

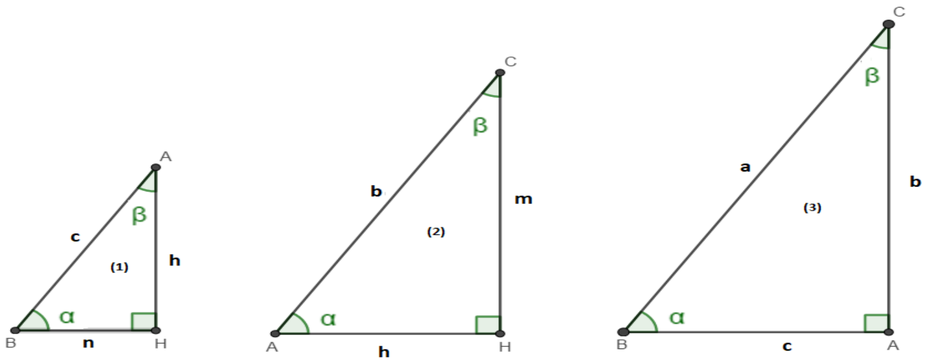
Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos

$$\angle BAH + \alpha + 90^o = 180^o \quad \text{e} \quad \angle CAH + \beta + 90^o = 180^o$$

Daí, segue que $\angle BAH = \beta$ e $\angle CAH = \alpha$.

Pelo triângulo ABC, Figura 27, segue que os triângulos HBA e HAC são semelhantes a ABC.

Figura 28 – **Triângulos retângulos ABC, HAC e HBA**



Fonte: produzida pelo autor.

Segue da semelhança entre os triângulos HBA e ABC:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad \frac{c}{h} = \frac{a}{b}.$$

Logo, $bc = ah$ e $c^2 = an$.

Segue da semelhança entre os triângulos HAC e ABC:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}\,.$$

Logo, $b^2 = am$.

Por fim, pela semelhança entre os triângulos HAC e HBA, obtemos:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}.$$

Logo, $h^2 = mn$. $\square$

Observação 4.1. Perceba que a propriedade 3 da proposição anterior pode facilmente ser provada a partir da expressão que calcula a área de um triângulo.

Teorema 4.1. *(Pitágoras). Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC, como na Figura 27, cujos catetos medem b e c, as projeções medem, respectivamente, m e n, a hipotenusa mede a e a altura relativa a hipotenusa mede h. Queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Pela Proposição 4.1, propriedades 1 e 2, sabemos que $a = m+n$, $b^2 = am$ e $c^2 = an$. Somando $b^2 + c^2$, temos

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = aa = a^2$$

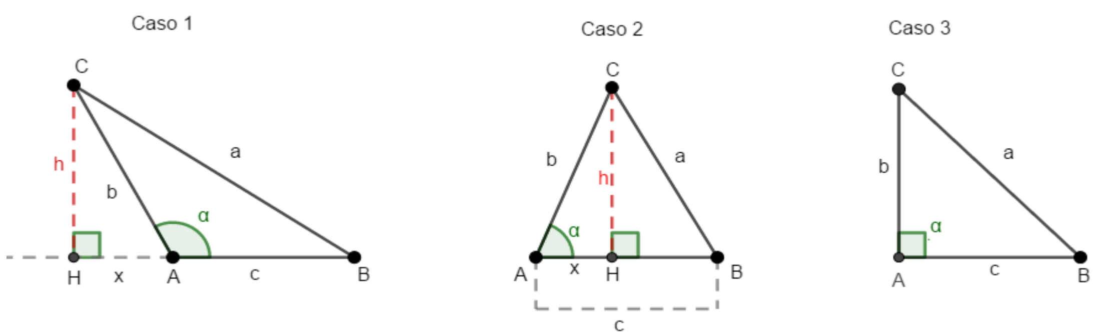
□

Teorema 4.2. *(Recíproca do teorema de Pitágoras). Se a, b e c são lados de um triângulo ABC, com $a > b$, $a > c$ e $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo ABC é retângulo.*

Demonstração. Para provarmos tal resultado, usaremos a seguinte tricotomia:

1. O triângulo ABC é obtusângulo;
2. O triângulo ABC é acutângulo;
3. O triângulo ABC é retângulo.

Figura 29 – **Casos possíveis para o triângulo ABC com relação ao ângulo α.**



Fonte: produzida pelo autor.

Caso 1. Suponhamos que $90^o < \alpha < 180^o$ e traçamos a altura relativa ao lado AB. Aplicando o teorema de pitágoras em ACH e BCH, obtemos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ (i)} \quad \text{e} \quad a^2 = (c+x)^2 + h^2 \text{ (ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2cx$$

Como $2cx > 0$ e, portanto, $a^2 > a^2 - 2cx$, segue que

$$a^2 > b^2 + c^2$$

Caso 2. Suponhamos que $0^o < \alpha < 90^o$ e traçamos a altura relativa ao lado AB. Aplicando o teorema de pitágoras em ACH e BCH, obtemos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ (iii)} \quad \text{e} \quad a^2 = (c-x)^2 + h^2 \text{ (iv)}$$

Análogo ao caso 1, substituindo (iii) em (iv), obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$$

Como $2cx > 0$ e, consequentemente, $a^2 + 2cx > a^2$, segue que

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Os casos 1 e 2 não satisfazem a igualdade procurada. Logo, pela tricotomia, segue o caso 3 é o que satisfaz a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$. □

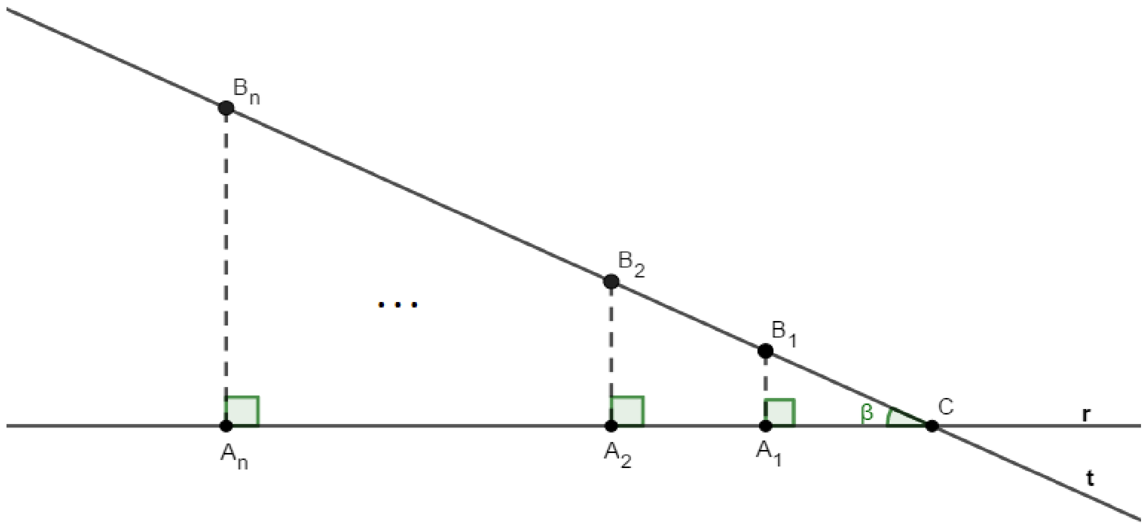
Observação 4.2. (Consequência do teorema de Pitágoras). Se l é a medida do lado de um quadrado e de um triângulo equilátero, temos que as medidas da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero são, respectivamente, $l\sqrt{2}$ e $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

4.2 Razões trigonométricas

Nesta seção serão apresentados alguns resultados referentes as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Deste modo, será utilizado como principal referência o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo".

Sejam r e t duas retas concorrentes, de modo que $C = r \cap t$. Sobre t fixamos os pontos $B_1,\ B_2,\ ...,\ B_n$ todos distintos e não coincidem com C. Em cada um desses pontos B_i, com $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, projetamos sobre r os pontos $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$, de modo que $\angle B_iCA_i = \beta$, $\overline{B_iC} = a_i$, $\overline{A_iC} = b_i$ e $\overline{B_iA_i} = c_i$.

Figura 30 – n **triângulos retângulos**



Fonte: produzida pelo autor.

Perceba que, para todo $i, j \in \{1, \ 2, \ ..., \ n\}$, os triângulos A_iB_iC e A_jB_jC são semelhantes, basta observar a correspondência $A_i \longleftrightarrow A_j$, $B_i \longleftrightarrow B_j$ e $C \longleftrightarrow C$. Daí, segue que

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j}, \ \ \frac{c_i}{a_i} = \frac{c_j}{a_j} \ \text{ e } \ \frac{c_i}{b_i} = \frac{c_j}{b_j}.$$

Essas razões independem do triângulo considerado, mas dependem de β. Então, faz sentido classificarmos os catetos de acordo com sua posição relativa ao ângulo β e atribuir nomes para as razões citadas anteriormente.

Definição 4.5. Considere o triângulo retângulo A_iB_iC, reto em $\hat{A}_i$, e $\angle B_iCA_i = \beta$. Dizemos que $\overline{B_iA_i}$ e $\overline{A_iC}$ são, respectivamente, cateto oposto e cateto adjacente ao ângulo β.

Observação 4.3. Se olharmos para o ângulo $\alpha = \angle A_iB_iC$, temos que $\overline{B_iA_i}$ é cateto adjacente e $\overline{A_iC}$ é o cateto oposto a α.

Definição 4.6. Considere o triângulo retângulo A_iB_iC, reto em $\hat{A}_i$, e $\angle B_iCA_i = \beta$. Chamaremos de seno, cosseno e tangente do ângulo β e denotaremos como $sen \ \ \beta$, $cos \ \ \beta$ e $tg \ \ \beta$, respectivamente, as seguintes razões:

1. $sen \ \ \beta = \dfrac{medida \ \ do \ \ cateto \ \ oposto \ \ a \ \ \beta}{hipotenusa}$;
2. $cos \ \ \beta = \dfrac{medida \ \ do \ \ cateto \ \ adjacente \ \ a \ \ \beta}{hipotenusa}$;

3. $tg \ \ \beta = \dfrac{medida \ \ do \ \ cateto \ \ oposto \ \ a \ \ \beta}{medida \ \ do \ \ cateto \ \ adjacente \ \ a \ \ \beta}$;

Observação 4.4. Como consequencia da definição, temos que $tg \ \beta = \dfrac{sen \ \ \beta}{cos \ \beta}$.

Proposição 4.2. *(Relação Fundamental da trigonometria). Considere o triângulo retângulo ABC, reto em Â, e $\alpha < 90^o$ um dos seus ângulos internos. Vale a seguinte igualdade:*

$$sen^2 \ \ \alpha + cos^2 \ \ \alpha = 1.$$

Demonstração. Suponha que b é a medida do cateto adjacente e c medida do cateto oposto a α. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Por outro lado, sabemos que $cos \ \ \alpha = \dfrac{b}{a}$ e $sen \ \ \alpha = \dfrac{c}{a}$.

Com isso,

$$\begin{aligned} sen^2 \ \ \alpha + cos^2 \ \ \alpha &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 &= \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \\ &= \frac{c^2 + b^2}{a^2} &= \frac{a^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

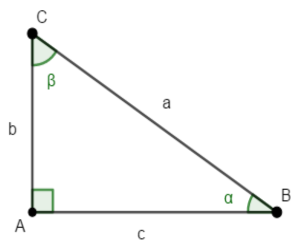
Logo, $sen^2 \ \ \alpha + cos^2 \ \ \alpha = 1$. □

Proposição 4.3. *Se α e β são ângulos complementares, então*

1. $sen \ \ \alpha = cos \ \ \beta$ *e* $cos \ \ \alpha = sen \ \ \beta$;
2. $tg \ \ \alpha = \dfrac{1}{tg \ \ \beta}$.

Demonstração. Considere o triângulo ABC, reto em Â:

Figura 31 – **Triângulo retângulo** ABC



Fonte: produzida pelo autor.

Inicialmente, note que $\alpha+\beta=90^o$. Pela Definição 4.6, temos que

$$sen\ \ \alpha=\frac{b}{a}=cos\ \ \beta$$

Analogamente, pela Definição 4.6, segue que $sen\ \ \beta=\dfrac{c}{a}=\cos\ \ \alpha$.

Por outro lado, dividindo $sen\ \ \alpha=cos\ \ \beta$ por $cos\ \ \alpha$, temos

$$\frac{sen\ \ \alpha}{cos\ \ \alpha}=\frac{cos\ \ \beta}{cos\ \ \alpha}$$

Como $\dfrac{sen\ \ \alpha}{\cos\ \ \alpha}=tg\ \ \alpha$ e $sen\ \ \beta=\cos\ \ \alpha$, segue que

$$tg\ \ \alpha=\frac{cos\ \ \beta}{sen\ \ \beta}=\frac{1}{tg\ \ \beta}.$$

$\square$

4.2.1 Ângulos notáveis

A tabela a seguir mostra os ângulos mais utilizados, a princípio, em problemas envolvendo razões trigonométricas. Faremos a demonstração de alguns deles.

Tabela 10 – **Razões trigonométricas de ângulos notáveis**

	30^o	45^o	60^o
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

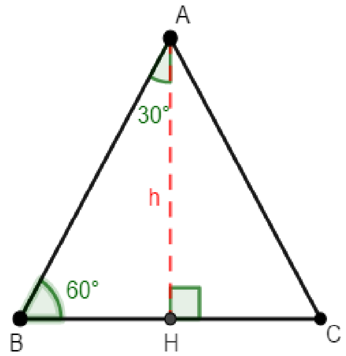
Fonte: elaborada pelo autor.

Considere o triângulo equilatero ABC de lado l e sua altura $\overline{AH}=h$ relativa ao lado BC.

Como o triângulo ABC é equilátero, a bissetriz, mediana e a altura de coincidem. Daí, segue que $\angle HAC=\angle HAB=30^o$ e $\overline{BH}=\overline{HC}=\dfrac{l}{2}$ e, pelo teorema de Pitágoras, $h=\overline{AH}=\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

Então,

Figura 32 – **Triângulo equilatero de lado** l



Fonte: produzida pelo autor.

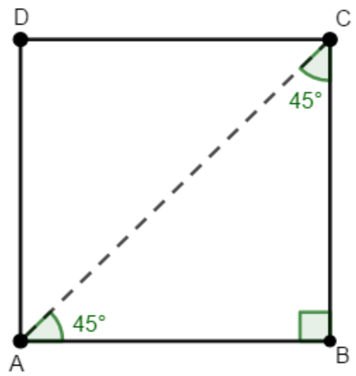
$$sen\ \ 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad sen\ \ 60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como 30^o e 60^o são ângulos complementares, pela Proposição 4.3, segue que

$$cos\ \ 30^o = sen\ \ 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad cos\ \ 60^o = sen\ \ 30^o = \frac{1}{2}.$$

Para verificar o caso do $cos\ \ 45^o = sen\ \ 45^o$, considere o quadrado $ABCD$ de lado l e diagonal $\overline{AC} = l\sqrt{2}$.

Figura 33 – **Quadrado de lado** l



Fonte: produzida pelo autor.

Como o triângulo ABC é isósceles, segue que $\angle BAC = \angle BCA = 45^o$.

Então,

$$cos\ \ 45^o = sen\ \ 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como sugestão, para determinar a tangente dos ângulos notáveis, basta usar o fato da Observação 4.4.

4.3 Áreas de figuras planas

Para esta seção, é necessário que o leitor tenha um conhecimento prévio sobre algumas figuras planas, como o triângulo, retângulo, losango, trapézio, circunferência e polígonos regulares[1].

Diante disso, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(6^o ao 9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Áreas de Figuras Planas".

Nosso objetivo é deduzir as fórmulas que expressem a área de algumas figuras planas convexas através de suas dimensões. Para esta seção usaremos o metro como unidade de medida padrão.

Definição 4.7. Sejam $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ vértices de um polígono convexo. Denotaremos a área do polígono como $Area(A_1A_2...A_n)$.

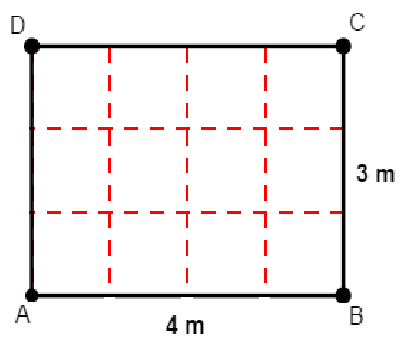
Definição 4.8. Dizemos que a área de um quadrado de lado 1 m é igual a 1 m^2.

Enunciaremos e, a partir da definião 4.8, trateremos de alguns casos particulares para deduzir a expressão que calcula a área do retângulo.

Proposição 4.4. *Se $ABCD$ é um retângulo, tal que suas dimensões são $\overline{AB} = b$ e $\overline{BC} = h$, então $Area(ABCD) = b \cdot h$.*

Caso 1: Medidas inteiras. Considere $b = 4$ m e $h = 3$ m. A partir de cada vértice, traçamos retas perpendiculares aos lados a cada 1 m. Veja a figura a seguir:

Figura 34 – **Retângulo de dimensões 4 m e 3 m**



Fonte: produzida pelo autor.

[1] São chamados polígonos regulares aqueles que satisfazem duas propriedades: são equiláteros e equiângulos.

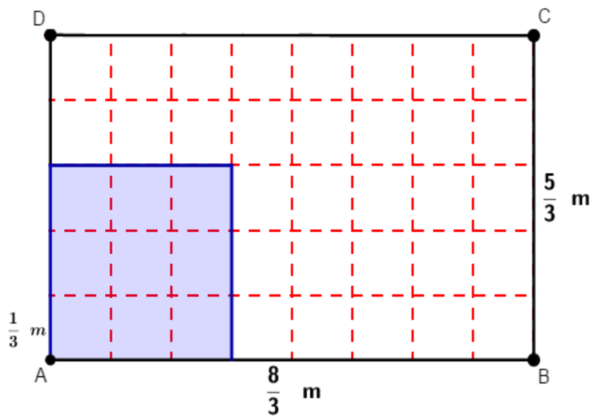
Sendo assim, o retângulo $ABCD$ foi dividido em $4 \cdot 3 = 12$ quadrados de lado igual a 1 m. Observe que a área do retângulo é igual a soma das áreas dos 12 quadrados unitários. Pela Definição 4.8, segue que $Area(ABCD) = 12 \cdot 1 \text{ m}^2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$.

Para calcular a área de um retângulo tenha medidas inteiras b e h, seguindo a ideia anterior, encontramos $Area(ABCD) = b \cdot h \text{ m}^2$.

Caso 2: Medidas racionais. Considere $b = \frac{8}{3}$ m e $h = \frac{5}{3}$ m. A partir de cada vértice, podemos traçar retas perpendiculares de modo que b e h sejam divididos em 8 e 5 partes iguais, respectivamente. Note que no retângulo $ABCD$ há 40 quadrados de lado igual a $\frac{1}{3}$ m.

Assim, devemos escrever a área do quadrado de lado $\frac{1}{3}$ m em função da área do quadrado unitário da Definição 4.8. A figura a seguir é o esboço da situação dada:

Figura 35 – **Retângulo de dimensões $\frac{8}{3}$ m e $\frac{5}{3}$ m**



Fonte: produzida pelo autor.

De acordo com a Figura 35, a área do quadrado unitário, em azul, é igual a área de 9 quadrados de lado $\frac{1}{3}$. Assim, temos que a área do quadrado de lado igual a $\frac{1}{3}$ é igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ m^2.

Por fim, a área do retângulo $ABCD$ é dado por

$$Area(ABCD) = 40 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{9} \text{ m}^2.$$

Para quaisquer racionais $b = \frac{p}{q}$ e $h = \frac{m}{n}$, seguindo as ideias anteriores, encontramos que

$$Area(ABCD) = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} \text{ m}^2.$$

Em retângulos cujos lados são medidas irracionais, a ideia é aproximar a área por números racionais para concluir que, ainda neste caso, a área do retângulo $ABCD$ é igual ao produto dos lados não paralelos, isto é, $Area(ABCD) = b \cdot h$.

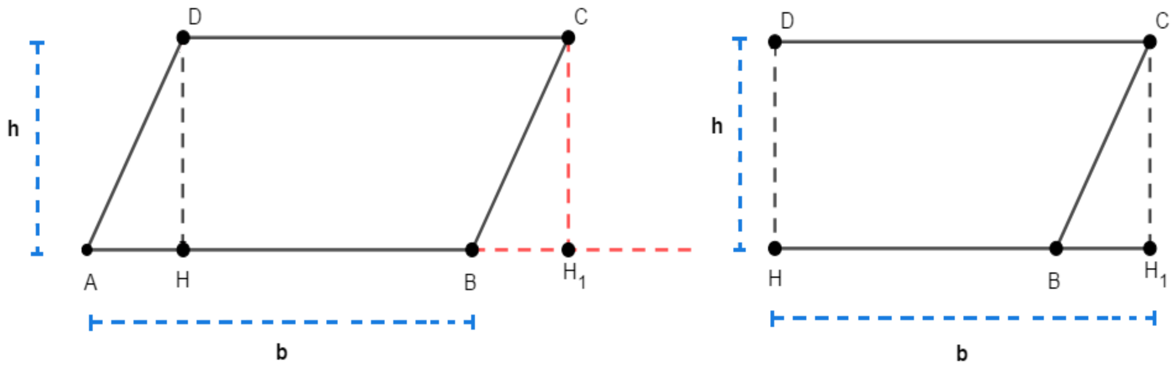
Observação 4.5. Podemos determinar outras unidades de medida de área. Como exemplo, lembre que 1 m = 100 cm. Assim, análogo ao caso 1 da Proposição 4.4, temos que a área do quadrado de lado igual a 1 m ^{2}= 100^2 cm^2.

Observação 4.6. Como todo quadrado de lado l é um retângulo, pela Proposição 4.4, segue que a área do quadrado é igual a $l \cdot l = l^2$.

4.3.1 Área do paralelogramo

Agora calcularemos a área do paralelogramo $ABCD$, cuja base mede $\overline{AB} = b$ e a altura $\overline{DH} = \overline{CH_1} = h$.

Figura 36 – **Paralelogramo e retângulo com mesma área.**



Fonte: produzida pelo autor.

No paralelogramo, note que projetamos sobre a reta suporte ao lado AB as projeções H_1 e H dos vértices C e D, respectivamente. Assim, segue que os segmentos $\overline{DH}$ e $\overline{CH_1}$ são perpendiculares ao lado AB.

Além disso, como $AD \parallel BC$, temos que $\angle DAH = \angle CBH_1$. Pelo caso LAA_o, os triângulos retângulos DAH e CBH_1 são congruentes. Com isso,

$$Area(DAH) = Area(CBH_1).$$

Observando a Figura 36, temos que

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= Area(DAH) + Area(BCDH) \\ &= Area(CBH_1) + Area(BCDH) \\ &= Area(CDHH_1) \end{aligned}$$

Por fim, como $CD \parallel HH_1$ e $DH \parallel CH_1$ e os lados opostos são congruentes (verifique), $CDHH_1$ é um retângulo.

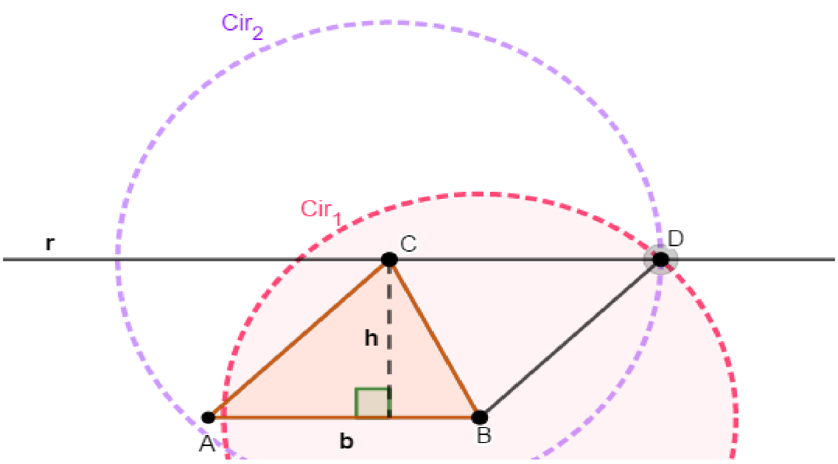
Logo, pela Proposição 4.4, $Area(ABCD) = Area(CDHH_1) = b \cdot h$.

4.3.2 Área do triângulo

A partir do que vimos na subseção anterior, determinaremos a área de um triângulo qualquer.

Considere o triângulo ABC, com $\overline{AB} = b$ e a sua altura relativa medindo h, conforme a figura a seguir. Traçamos uma reta r passando por C de modo que ela seja paralela ao lado AB. Em seguida, traçamos duas circunferências: Cir_1, centrada no vértice B e raio é igual a medida lado AC, e Cir_2, centrada no vértice C e raio é igual a medida do lado AB. Fixamos o ponto de interseção entre as circunferências e a reta r, seja D esse ponto. Veja o esboço da situação a seguir.

Figura 37 – **Área de um triângulo qualquer.**



Fonte: produzida pelo autor.

Pela construção feita anteriormente, observe que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DCB, pelo caso LLL. Além disso, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, pois seus lados opostos são congruentes e paralelos. Para provar que os lados AC e BD são paralelos, basta notar que $\angle CAB = \angle CDB$.

Observando a Figura 37, temos que

$$Area(ABCD) \quad = \quad Area(ABC) \quad + \quad Area(DCB)$$

Como os triângulos ABC e DCB são congruentes, segue que $Area(ABC) = Area(DCB)$. Com isso,

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= 2 \cdot Area(ABC) \\ &= 2 \cdot Area(ABC) \end{aligned}$$

Logo,

$$Area(ABC) = \frac{Area(ABCD)}{2} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Observação 4.7. Lembre que o triângulo tem três alturas, cada uma relativa a um dos lados. A ideia usada anteriormente pode ser reproduzida usando as alturas relativas aos outros dois lados. Como consequência imediata da área de um triângulo, se $a,\ b$ e c são as medidas dos lados de um triângulo e $h_a,\ h_b$ e h_c, respectivamente, suas alturas relativas, então vale o seguinte resultado:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c.$$

Proposição 4.5. *Dado um triângulo ABC, com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\angle BAC = \beta$, então*

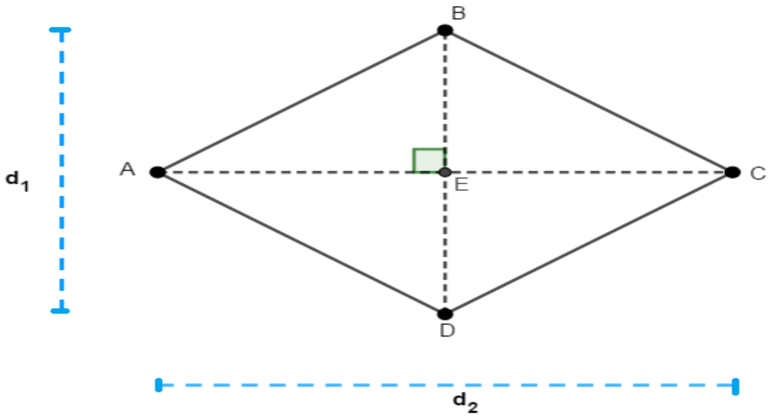
$$Area(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot sen\ \beta}{2}.$$

4.3.3 Área do losango

Como aplicação direta da área de triângulos, exibiremos um método de calcular a área do losango. Para isso, lembre que todos os lados do losango são congruentes.

Traçaremos as suas duas diagonais, cujas medidas são $\overline{BD} = d_1$ e $\overline{AC} = d_2$. Veja a figura a seguir.

Figura 38 – **Área de um triângulo qualquer.**



Fonte: produzida pelo autor.

Note que E é o ponto de interseção das diagonais do losango e é ponto médio delas. Além disso, os triângulos ADC e ABC são congruentes, pelo caso LLL.

Como os triângulos ADC e ABC são isósceles e E é o ponto médio de BD, temos que a altura dos triângulos com relação a base AC é igual a $\dfrac{d_1}{2}$.

Daí, segue que

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= Area(ADC) + Area(ABC) \\ &= 2 \cdot Area(ADC) \\ &= 2 \cdot \frac{d_2 \cdot \frac{d_1}{2}}{2} \end{aligned}$$

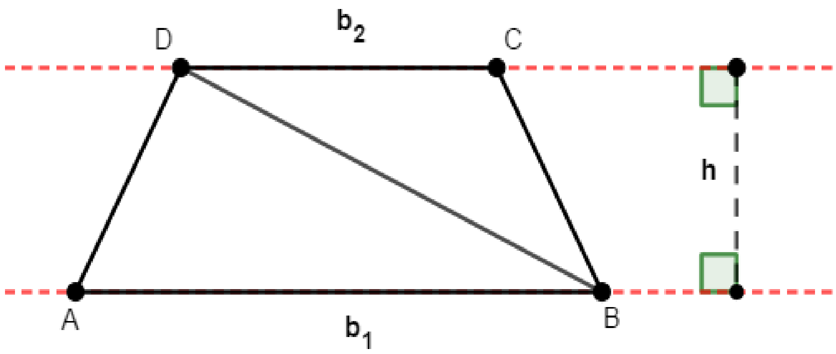
Logo,

$$Area(ABCD) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

4.3.4 Área do trapézio

Considere o trapézio ABCD, onde os lados AB e CD são paralelos e medem, respectivamente, b_1 e b_2. A distância entre os lados paralelos do trapézio mede h. Traçamos o segmento de reta BD, conforme a figura a seguir.

Figura 39 – **Área de um trapézio.**



Fonte: produzida pelo autor.

Pela Figura 39, temos que

$$Area(ABCD) \quad = \quad Area(ABD) \quad + \quad Area(BCD)$$

Observe que os triângulos ABD e BCD tem mesma altura com relação as bases b_1 e b_2, respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \\ &= \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Observação 4.8. É comum chamarmos b_1 de base maior e representamos por B e b_2 de base menor e representamos por b. Aqui, não usamos essa notação para evitar a confusão entre B medida e B vértice.

4.3.5 Área de polígonos regulares

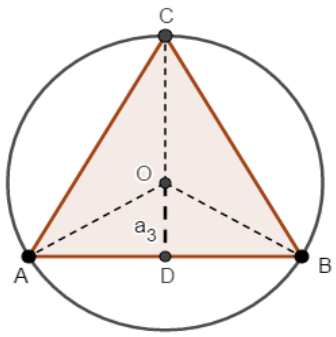
Nesta subseção apresentaremos como calcular a área de qualquer polígono regular em função do seu apótema[2] e do semiperímetro[3]. Aqui, expressaremos l_n como a medida do lado, p_n o semiperímetro e a_n a medida do apótema do polígono regular de n lados.

Em todos os casos, trataremos de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência centrada em O e de raio r.

[2] É a distância do centro do polígono regular até um de seus lados.
[3] Metade do perímetro.

Começaremos com o caso $n = 3$, isto é, o triângulo equilátero.

Figura 40 – **Área de um triângulo equilátero.**



Fonte: produzida pelo autor.

Pela Figura 40, observamos que os triângulos OAB, OAC e OBC são congruentes, pelo caso LLL. Consequentemente,

$$Area(OAB) = Area(OAC) = Area(OBC) = \frac{l_3 \cdot a_3}{2}.$$

Como $Area(ABC) = 3 \cdot Area(OAB)$ e $p_3 = \dfrac{3 \cdot l_3}{2}$, segue que

$$Area(ABC) = 3 \cdot \frac{l_3 \cdot a_3}{2} = p_3 \cdot a_3.$$

Observação 4.9. Como $\angle OAB = 30^o$ e $\overline{AD} = \dfrac{l_3}{2}$, segue que

$$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a_3}{\frac{l_3}{2}}.$$

Logo, $a_3 = \dfrac{l_3\sqrt{3}}{6}$.

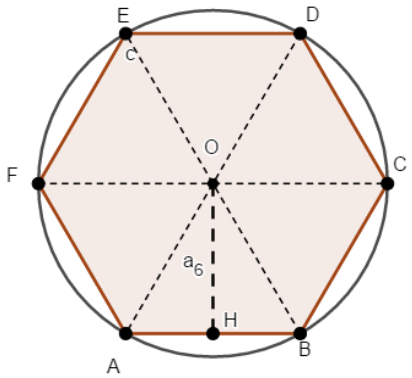
Com isso, podemos escrever a área do triângulo equilátero ABC como

$$Area(ABC) = p_3 \cdot a_3 = \frac{(l_3)^2\sqrt{3}}{4}.$$

Para o caso $n = 6$, considere a figura a seguir.

Novamente, observamos que podemos dividir o hexagono em 6 triânglos congruentes, com base l_6 e altura a_6. Calculando a área do hexagono cujo semiperímetro é dado por $p_6 = \dfrac{6 \cdot l_6}{2}$, temos

Figura 41 – **Área de um hexagono regular.**



Fonte: produzida pelo autor.

$$Area(ABCDEF) = 6 \cdot Area(OAB) = 6 \cdot \frac{l_6 \cdot a_6}{2} = p_6 \cdot a_6.$$

Observação 4.10. Há outra maneira de calcular a área do hexagono. Note que OAB é um triângulo equilátero, com $l_6 = r$. De acordo com a Observação 4.9, a área de um triângulo equilátero de lado l é calculada pela expressão $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Com isso, segue que

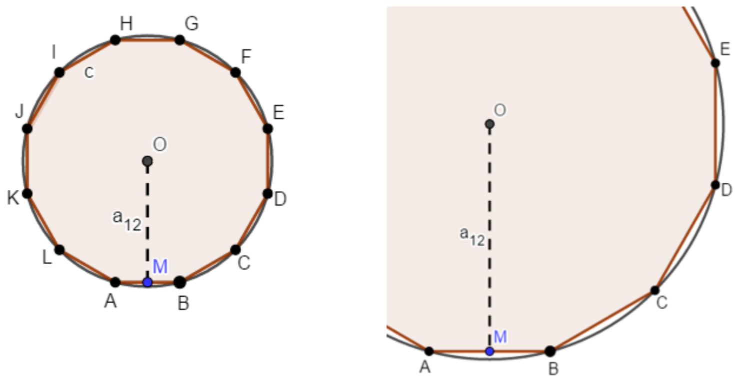
$$Area(ABCDEF) = 6 \cdot Area(OAB) = 6 \cdot \frac{(l_6)^2\sqrt{3}}{4}.$$

O argumento apresentado anteriormente para os casos $n = 3$ e $n = 6$ podem ser reproduzidos para um polígono de n lados, com $n \geq 3$.

4.3.6 Área da circulo

Antes de enunciar a área da circunferência, observe a figura a seguir.

Figura 42 – **Dodecágono regular inscrito em uma circunferência de raio r.**



Fonte: produzida pelo autor.

Seja $n \geq 3$ o número de lados de um polígono regular. Observando as Figuras 40, 41 e 42, o perímetro do polígono se aproxima do comprimento da circunferência $2\pi r$ à medida que n aumenta, assim como a_n se aproxima do raio r da circunferência.

Então, a área do polígono de n lados, dada por $p_n \cdot a_n$, se aproxima da área do círculo à medida que n aumenta. Sendo assim, a área do círculo é dada por

$$\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

5 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DO EXAME DE SELEÇÃO

O capítulo em questão tratará da solução detalhada de algumas questões de matemática dos exames de seleção para o Ensino Médio Integrado do IFAL dos últimos 10 anos, período compreendido entre 2010 e 2019 (exames de seleção 2011.1 a 2020.1). Os critérios utilizados para a escolha das questões foi baseado em sua complexidade e, na maioria dos casos, os conteúdos mais recorrentes; este último ponto foi explicitado no Capítulo 2.

Ainda sobre a divisão, foram escolhidas duas questões de cada ano analisado, sendo uma tratando sobre Álgebra e outra sobre Geometria.

5.1 Soluções das questões

1. **(Questão 29, 2011.1)** Num paralelogramo, cada ângulo agudo mede 30^o e os lados que formam cada um desses ângulos medem $3\sqrt{3}$ cm e 5 cm. Calcule a medida da menor das diagonais desse paralelogramo.

   a) $\sqrt{6}$ cm.

   b) $\sqrt{3}$ cm.

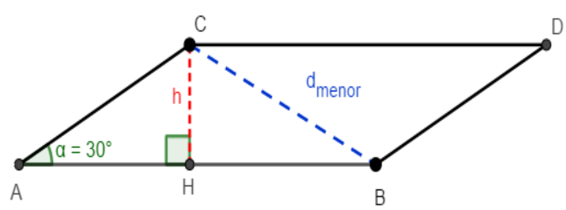
   c) $3\sqrt{3}$ cm.

   d) $\sqrt{7}$ cm.

   e) $15\sqrt{3}$ cm.

   Solução. Considere o paralelogramo cujos lados são $\overline{AC} = 3\sqrt{3}$ cm e $\overline{AB} = 5$ cm. Sobre o segmento AB fixamos H, projeção ortogonal de C. Em seguida traçamos o segmento de reta $\overline{CH} = h$, perpendicular a $\overline{AB}$. Definimos a diagonal menor do paralelogramo como d_{menor}, como mostra a imagem a seguir.

   Figura 43 – **Paralelogramo**

   Fonte: produzida pelo autor.

Usando as razões trigonométricas no triângulo retângulo ACH, temos que

$$sen30^o = \frac{h}{3\sqrt{3}} \text{ e } \cos 30^o = \frac{\overline{AH}}{3\sqrt{3}}.$$

Como $sen30^o = \frac{1}{2}$ e $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{AH} = \frac{9}{2}$.

Além disso, $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$. Daí, segue que $\overline{HB} = \frac{1}{2}$.

Por fim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCH, temos

$$d^2_{menor} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} + \frac{1}{4} = \frac{28}{4}$$

Logo, $d_{menor} = \sqrt{7}$.

2. **(Questão 31, 2011.1)** Sejam w e z dois números reais tais que a soma é 21 e o produto é -7. Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1}{w^2} + \frac{1}{z^2} \tag{1}$$

a) $\frac{445}{59}$.
b) $\frac{445}{49}$.
c) $\frac{455}{59}$.
d) $\frac{455}{49}$.
e) $\frac{435}{49}$.

Solução. Sejam w e z números reais, tais que $w + z = 21$ e $wz = -7$. Podemos escrever (1) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{w^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2}{z^2w^2} + \frac{w^2}{z^2w^2} = \frac{z^2 + w^2}{z^2w^2} \tag{2}$$

Elevando ao quadrado $w + z = 21$ e $wz = -7$, temos que:

$$(w+z)^2 = w^2 + 2wz + z^2 = 21^2 = 441$$

e

$$(wz)^2 = w^2z^2 = (-7)^2 = 49$$

Como $wz = -7$, segue que $w^2 + z^2 = 441 - 2wz = 455$. Por fim, substituindo $w^2 + z^2 = 455$ e $w^2z^2 = 49$ em (2), obtemos:

$$\frac{1}{w^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{455}{49}$$

3. **(Questão 35, 2012.1)** A soma dos quadrados de dois números inteiros a e b $(a < b)$ é igual a 125. Aumentando-se 5 unidades no número menor e diminuindo-se 5 unidades no número maior, o valor da soma supracitada diminui em 100 unidades. Assinale a alternativa verdadeira.

   a) a e b são números positivos.

   b) $a - b = 15$.

   c) $b - a = -15$.

   d) a e b são pares.

   e) Existem dois valores para a e dois para b que satisfazem essas condições.

   Solução. Sejam a e b números inteiros, tais que $a^2 + b^2 = 125$ e $(a+5)^2 + (b-5)^2 = 25$. Daí, segue que

   $$(a+5)^2 + (b-5)^2 = a^2 + 10a + 25 + b^2 - 10b + 25 = 25 \qquad (3)$$

   Como $a^2 + b^2 = 125$, substituindo em (3), temos

   $$125 + 10a - 10b + 50 = 25.$$

   Daí, segue que $10a - 10b = -150$. Em seguida, dividindo o resultado anterior por -10, obtermos a relação $b - a = 15$.

   Determinaremos a. Fazendo a substituição $b = 15 + a$ em $a^2 + b^2 = 125$, segue que

   $$a^2 + (a+15)^2 = 2a^2 + 30a + 225 = 125$$

   Somando -125 a igualdade anterior, obtemos a equação $2a^2 + 30a + 100 = 0$, cujas raizes são $a = -10$ ou $a = -5$. Como $b = 15 + a$, temos as seguintes possibilidades: se $a = -10$, temos que $b = 5$ e, forma análoga, se $a = -5$, temos que $b = 10$.

Portanto, existem dois valores para a e dois para b que satisfazem as condições propostas na questão.

4. **(Questão 40, 2012.1)** Considere um triângulo cujas medidas dos lados são: 10 cm, 100 mm e $\sqrt{2}$ dm, e um quadrado de área igual a 100 cm^2. Assinale a alternativa correta.

   a) A área do triângulo é igual à metade da área do quadrado.

   b) O lado do quadrado mede 50 cm.

   c) O lado do quadrado mede 10 dm.

   d) A área do triângulo tem 100 cm^2.

   e) A área do triângulo é igual ao dobro da área do quadrado.

   Solução. Considere o triângulo ABC cujos lados são 10 cm, 100 mm e $\sqrt{2}$ dm. Pelo sistema métrico decimal, temos que 100 mm $=10$ cm e $\sqrt{2}$ dm $=10\sqrt{2}$ cm. Assim, observe que o triângulo em questão é isósceles, pois tem dois lados com mesma medida. Além disso, satisfaz a igualdade $(10\sqrt{2})^2 = 10^2 + 10^2$. Portanto, pela recíproca do teorema de Pitágoras, o triângulo ABC é retângulo, com os catetos medindo 10 cm. Calculando a área do triângulo ABC, temos

$$\acute{A}rea(ABC) = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

   Logo, a área do triângulo corresponde a metade da área do quadrado.

5. **(Questão 36, 2013.1)** A divisão do polinômio $A(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ por $B(x) = (x-1)^2$ tem quociente e resto, respectivamente,

   a) $x+4$ e $x-2$.

   b) $x-2$ e $-x+4$.

   c) $x-2$ e $x+4$.

   d) $-x+4$ e $x-2$.

   e) $x-6$ e $-9x+2$.

   Solução. Utilizando o algorítmo da divisão para polinômios, temos:

$$\begin{array}{rrrrl} x^3 & -4x^2 & +4x & +2 & \underline{|(x-1)^2} \\ \underline{-x^3} & \underline{+2x^2} & \underline{-x} & & \quad x-2 \\ & -2x^2 & +3x & +2 & \\ & \underline{+2x^2} & \underline{-4x} & \underline{+2} & \\ & & -x & +4 & \end{array}$$

Observe que podemos escrever o polinômio $A(x)$ da seguinte forma:

$$x^3 - 4x^2 + 4x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x-2) + (-x+4)$$

Como o grau $-x+4$ é menor que o grau de $B(x)$, segue que $x-2$ é o quociente e $-x+4$ é o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$.

6. **(Questão 39, 2013.1)** Os lados de um triângulo retângulo medem, em metros, $2x$, $2x+1$ e $x+1$. A área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente,

   a) 12 m^2 e 12m.

   b) 12 m e 6 m^2.

   c) 6 m^2 e 12 m.

   d) 10 m^2 e 12m.

   e) 6 m^2 e 6 m.

   Solução. Inicialmente, note que x é um número real positivo, pois representa uma medida de comprimento. Além disso, temos que $2x+1 > 2x$ e $2x+1 > x+1$. Daí segue que, $2x+1$ é a hipotenusa do triângulo retângulo.

   Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + (x+1)^2$$

   Somando $-(2x)^2$ na igualdade anterior, temos

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^2 & = & (2x+1)^2 \quad - \quad (2x)^2 \\ (x+1)^2 & = & (4x+1)(1) \end{array}$$

   Daí, segue que $x^2 + 2x + 1 = 4x + 1$. Somando $-(4x+1)$ na equação anterior, obtemos

$$x^2-2x=x(x-2)=0$$

Logo, $x=0$ ou $x=2$.

Note que $x=0$ não é solução do problema, caso contrário não teriamos um triângulo. Com isso, para $x=2$, os lados do triângulo medem 5 m, 4 m e 3 m. Calculando o perímetro e a área obtermos 12 m e 6 m^2, respectivamente.

7. **(Questão 35, 2014.1)** Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é $a+3$ e um dos catetos $a-3$. Se o outro cateto vale 18, quanto vale a?

   a) 20

   b) 22

   c) 24

   d) 27

   e) 30

   Solução. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$(a+3)^2 \quad = \quad (a-3)^2 \quad + \quad 18^2$$

   Somando $-(a-3)^2$ a igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} 18^2 &= (a+3)^2 - (a-3)^2 \\ 324 &= (2a)(6) \\ 12a &= 324 \end{aligned}$$

   Logo, $a=27$.

   Observação 5.1. Note que o triângulo da questão conhecido é pitagórico, visto que seus lados 18, 24 e 30 são proporcionais a 3, 4 e 5, respectivamente.

8. **(Questão 37, 2014.1)** A soma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10} \tag{4}$$

   é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{9}{10}$

c) $\dfrac{7}{8}$

d) $\dfrac{3}{4}$

e) 1

Solução. Observe que o problema em questão é um caso particular da soma telescópica

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)},$$

onde n é um número natural.

Temos:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Daí, segue que

$$s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

isto é,

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Logo, $s_{10} = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$.

9. **(Questão 29, 2015.1)** É verdadeiro que:

a) O quadrado da diferença entre a e b é a expressão $a^2 - b^2$.

b) O cubo do quadrado de a é expresso por $(a^3)^2$.

c) O quadrado de c, que é a soma dos quadrados de a e b, é expresso por $c^2 = (a^2 + b^2)$.

d) A terça parte do quadrado da soma de a e b é a expressão $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^3$.

e) O quociente do quadrado da diferença entre a e b, pela diferença entre o quadrado de a e b resulta em $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Solução. Sejam a e b números reais, tais que $a \pm b \neq 0$. Sabemos que o quadrado da diferença é expresso por $(a-b)^2$, bem como a diferença entre o quadrado de a e o quadrado de b é expresso por $a^2 - b^2$. Queremos o quociente da primeira pela segunda expressão. Façamos:

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$$

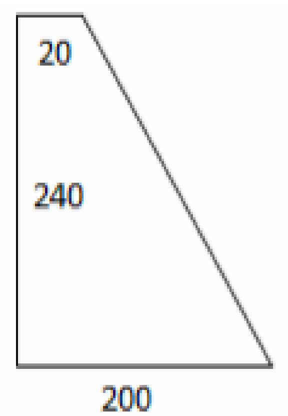
Perceba que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ e $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$.

Com isso,

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a+b}$$

10. **(Questão 38, 2015.1)** Sabe-se que o metro é a unidade que expressa o comprimento das dimensões do conjunto residencial que acaba de ser construído. A área de lazer desse conjunto residencial tem a forma da figura a seguir.

Figura 44 – **Trapézio retângulo**



Fonte: Exame de seleção para o Ensino Médio Integrado 2015.1 do IFAL, 2014.

Então:

a) O perímetro da área de lazer é 760 m.

b) A superfície da área de lazer vale 26400 m.

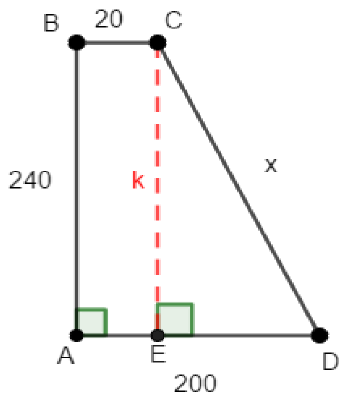
c) A superfície da área de lazer tem forma de trapézio isósceles.

d) O formato da área de lazer é um polígono regular.

e) A área de lazer é um poliedro.

Solução. Inicialmente, fixamos os vértices A, B, C e D do trapézio. Em seguida, traçamos o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo a $\overline{AB}$. Como $ABCE$ é um retângulo, segue que $\overline{CE} = 240$. Além disso, como $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$ e $\overline{AE} = \overline{BC}$, segue que $\overline{DE} = 180$. Veja a figura a seguir.

Figura 45 – **Trapézio retângulo, solução**



Fonte: produzida pelo autor.

Determinaremos $\overline{CD} = x$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CDE, temos

$$\begin{aligned} x^2 &= 180^2 + 240^2 \\ x^2 &= 32400 + 57600 \\ x^2 &= 90000 \end{aligned}$$

Logo, $x = \sqrt{90000} = 300$ e o perímetro do conjunto residencial é dado por $2P = 20 + 240 + 300 + 200 = 760$ m.

11. **(Questão 33, 2016.1)** Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

    a) 12m.

    b) 18m.

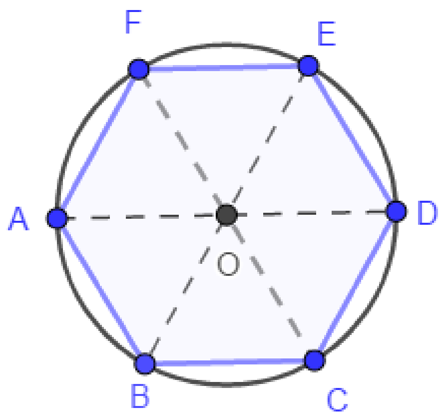
    c) 24m.

    d) 30m.

    e) 36m.

Solução. Sabemos que todo polígono regular é inscritível e circunscritível em uma circunferência. A figura a seguir, mostra um hexagono regular inscrito a uma circunferência de raio r, cujas diagonais são traçadas e seu ponto de interseção é o centro da circunferência.

Figura 46 – **Hexágono inscrito numa circunferência**



Fonte: produzida pelo autor.

Como os triângulos $OAB,\ OBC,\ OCD,\ ODE$ e OEF são todos equiláteros, temos que o raio é exatamente igual ao lado do hexágono, isto é, $r = 12$ m. Como queremos construir um muro de modo que o terreno no formato de um hexágono seja dividido em dois trapézios de mesma área, basta calcularmos o diâmetro da circunferência. Logo, o comprimento do muro é de 24 m.

12. **(Questão 38, 2016.1)** Reduzindo a expressão

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \tag{5}$$

ao numeral mais simples, temos:

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) $2-\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6}$

e) $2+\sqrt{2}$

Solução. Considere

$$x = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Note que x é um número real positivo.

Elevando x^2 ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 \\
x^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2 \\
x^2 &= 2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\underbrace{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}_{(i)}
\end{aligned}$$

Observe que (i) é o produto da soma pela diferença de dois termos. Assim, escrevemos (i) como uma diferença de quadrados

$$\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = 2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2-\sqrt{2}.$$

Daí, segue que

$$x^2 = 2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\cdot(4-2) = 4.$$

Logo, $x = 2$.

13. **(Questão 36, 2017.1)** Em campanha promocional, uma loja oferece desconto de 20% para um certo produto. Passada a campanha promocional, que aumento percentual deve ser dado para o produto voltar a ter o mesmo valor que tinha antes da campanha?

a) 10%

b) 15%

c) 20%

d) 25%

e) 30%

Solução. O problema em questão trata de um caso geral, com o valor do produto sendo desconhecido. Para melhor entendimento, trataremos de um caso particular. Suponha que o valor do produto é 100 reais. Como temos 20% de desconto , o valor do produtos durante a camapnha promocional é de

$$100-\frac{20}{100}\cdot 100 = 80$$

Em seguida, queremos determinar a porcentagem que deve ter de aumento no produto em promoção para que o mesmo volte ao seu valor inicial, isto é, com o aumento de 20 reais. Façamos:

$$\frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

Logo, o aumento percentual é de 25%.

Observação 5.2. Para o caso geral, substitua 100 por x e siga os mesmos passos da solução apresentada anteriormente. Lembre-se que x é um número real positivo.

14. **(Questão 40, 2017.1)** Ao soltar pipa, um garoto libera 90 m de linha, supondo que a linha fique esticada e forme um ângulo de 30^o com a horizontal. A que altura a pipa se encontra do solo?

a) 45 m

b) $45\sqrt{3}$ m

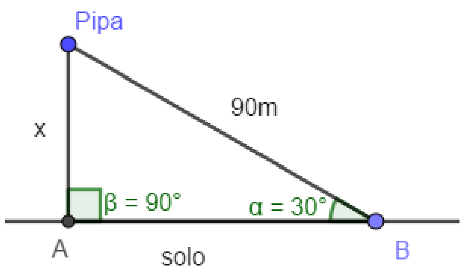
c) $30\sqrt{3}$ m

d) $45\sqrt{2}$ m

e) 30 m

Solução. A altura da pipa, representada por x, é justamente o comprimento do segmento de reta perpendicular ao solo que tem origem no vértice que representa a pipa. Desprezando a altura do garoto, veja a figura a seguir.

Figura 47 – **Triângulo retângulo: altura da pipa**



Fonte: produzida pelo autor.

Pelas razões trigonométricas, temos

$$sen30^o = \frac{1}{2} = \frac{x}{90}$$

Logo, $x = 45$ m.

15. **(Questão 23, 2018.1)** Em uma determinada indústria, cada operário tem direito a um único dia de folga na semana. Em uma semana específica, 157 operários trabalharam no domingo, 234 trabalharam na segunda-feira, 250 na terça-feira, 243 na quarta-feira, 237 na quinta-feira, 230 na sexta-feira e 197 no sábado. Considerando que, nessa semana, a regra de folga foi cumprida, quantos operários trabalham nessa indústria?

    a) 255.

    b) 256.

    c) 257.

    d) 258.

    e) 259.

    Solução. Como, cada funcionário tem apenas um dia de folga, sabemos que cada um deles trabalha exatamente 6 dias da semana. Para determinar a quantidade de funcionários, observamos que se X é a quantidade de funcionários, devemos ter que $6X$ deve ser o somatório da quantidade de pessoas que trabalharam na empresa durante a semana. Assim, segue que:

$$X = \frac{157+234+250+243+237+230+197}{6} = 258$$

    Logo, a empresa tem 258 funcionários.

16. **(Questão 25, 2018.1)** Um cliente deseja revestir o piso de sua sala retangular de dimensões 6 m por 4 m, com uma cerâmica de sua escolha, no formato quadrado com lado 45 cm, cada pedra da cerâmica. Sabendo que cada caixa da cerâmica em questão possui 10 pedras, o profissional que irá realizar o serviço deve solicitar ao seu cliente a compra de, no mínimo, quantas caixas?

    a) 2.

    b) 6.

    c) 11.

d) 12.

e) 65.

Solução. Como o piso da sala é retangular, temos que a sua área, denotada por $\acute{A}rea(PISO)$, corresponde a $24\ \ m^2$. Note que as unidades de medida da sala e da cerâmica são diferentes, assim, devemos colocá-las na mesma unidade. Pelo sistema métrico decimal, $\acute{A}rea(PISO) = 240000\ \ cm^2$.

Por outro lado a área da cerâmica, cujo formato é de um quadrado, é donatada por $\acute{A}rea(cer)$ e corresponde a $2025\ \ cm^2$. Como cada caixa contém 10 pedras de cerâmica, temos que uma caixa cobre exatamente $10\acute{A}rea(cer) = 20250\ \ cm^2$ do piso.

Determinaremos a quantidade mínima de caixas, X. Perceba que X é um número inteiro positivo. Façamos:

$$X \geq \frac{\acute{A}rea(PISO)}{10\acute{A}rea(cer)} = \frac{240000}{20250} \simeq 11,851$$

Logo, $X = 12$.

17. **(Questão 37, 2019.1)** Ao dividirmos um certo número n por 595 obtivemos como resto o número 84. Que número obteremos como resto se dividirmos o número n por 17?

a) 1.

b) 6.

c) 9.

d) 12.

e) 16.

Solução. Pelo algorítmo da divisão, existe um k inteiro, tal que

$$n = 595k + 84$$

Note que $595k = 17 \cdot 35k$ e, novamente pel algorítmo da divisão, $84 = 17 \cdot 4 + 16$. Substituindo na equação anterior, obtemos

$$n = 17 \cdot 35k + 17 \cdot 4 + 16 = 17 \cdot (35k + 4) + 16$$

Logo, o quociente e o resto da divisão de n por 17 são, respectivamente, $35k+4$ e 16.

18. **(Questão 40, 2019.1)** Andando por uma das margens paralelas de um rio, um homem vê, de um certo ponto, sob uma direção que forma 30^o com a margem, uma árvore na outra margem do rio. Após se deslocar pela margem por 20 m ele passa a avistar a mesma árvore com novo ângulo de 60^o. Qual a largura do rio?

a) 10 m.

b) $10\sqrt{3}$ m.

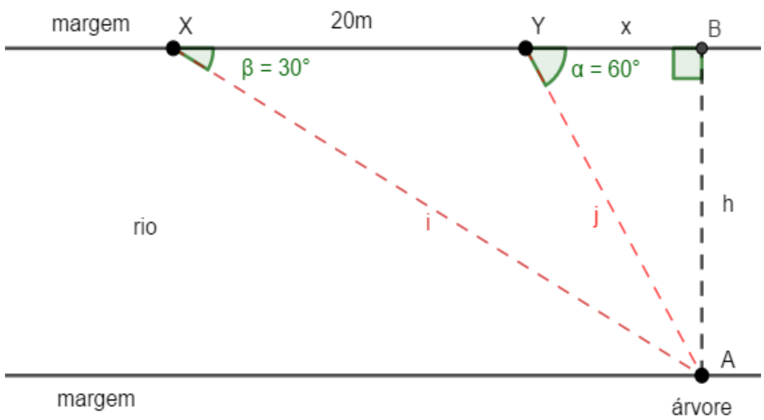
c) 20 m.

d) $20\sqrt{3}$ m.

e) 40 m.

Solução. Observe a figura a seguir com o esboço do problema.

Figura 48 – **Distância entre as margens do rio**



Fonte: produzida pelo autor.

Determinaremos h. Aplicando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos ABX e ABY, temos

$$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{20+x} \quad \text{e} \quad tg60^o = \sqrt{3} = \frac{h}{x}.$$

Daí, segue que

$$\begin{cases} h = x\sqrt{3} \ \ (I) \\ 3h = x\sqrt{3}+20\sqrt{3} \ \ (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos

$$\begin{aligned} 3h &= h+20\sqrt{3} \\ 3h-h &= 20\sqrt{3} \\ 2h &= 20\sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $h = 10\sqrt{3}$ m.

19. **(Questão 31, 2020.1)** Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 15 centímetros. Sabendo que este cateto faz um ângulo de 30^o com a hipotenusa deste triângulo, determine o valor da medida do outro cateto, em centímetros.

a) 5

b) $5\sqrt{3}$

c) 10

d) $10\sqrt{3}$

e) 15

Solução. Pela descrição do exercício, note que o cateto dado é adjacente ao ângulo de 30^o. Como queremos determinar a medida do outro cateto, a qual chamaremos de x , usaremos as razões trigonométricas. Façamos:

$$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{15}$$

Logo, $b = 5\sqrt{3}$ cm.

20. **(Questão 34, 2020.1)** Pedrinho juntou moedas de R\$ $0,25$ e R\$ $0,50$ num total de 28 moedas. Contando as moedas, percebeu que o total dava R\$$9,00$. Quantas moedas de R\$ $0,25$ ele tinha?

a) 5.

b) 10.

c) 15.

d) 20.

e) 25.

Solução. Considere x a quantidade de moedas de 25 centavos e y a quantidade de moedas de 50 centavos. Como 28 é o total de moedas, temos que $x+y=28$ (i). Além disso, note que a combinação linear entre a quantidade de moedas e o seu respectivo valor nos dá o total em reais, isto é, $0,25x+0,5y=9$ (ii). Determinaremos x.

Por (i), temos que $y=28-x$. Substituindo a equação anterior em (ii), temos

$$\begin{aligned}
0,25x+0,5(28-x) &= 9\\
0,25x+14-0,5x &= 9\\
-0,25x &= 9-14\\
-0,25x &= -5 \quad (iii)
\end{aligned}$$

Multiplicando (iii) por -4, obtemos $x=20$.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como proposta traçar o perfil da prova do exame de seleção para os cursos de Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Alagoas, como uma maneira de contribuir positivamente em ações voltadas a preparação dos alunos que estão nos anos finais do Ensino Fundamental II e desejam ingressar na instituição.

Deste modo, todos aqueles interessados no exame de seleção, sejam os alunos e/ou professores, podem ter acesso ao material e, consequentemente, desenvolver atividades individuais e/ou coletivas voltadas à preparação para a prova. Além do material teórico, foram selecionadas algumas questões, duas de cada ano, de acordo com a complexidade e a recorrência de determinado conteúdo nas provas de seleção.

Sobre a recorrência de determinados conteúdos, o ponto relacionado a problemas com números naturais e racionais é bem abrangente e, por este motivo, talvez a teoria exposta não seja a sua totalidade, mas o que mais se cobra dentro do exame, como foi dito anteriormente.

Outro fator importante a se destacar é relacionado aos questionamentos que, naturalmente, surgiram durante a produção deste trabalho e, consequentemente, se pode originar outros caminhos para pesquisas e/ou ações de voltadas aos exames de seleção.

São exemplos de questionamentos: é possível uma aproximação do IFAL, em suas diversas unidades e com suas realidades distintas, com os municípios que são atingidos diretamente e indiretamente com as ações do PROIFAL, visando a ampliação do atendimento? Como os trabalhos em conjunto no desenvolvimento de material teórico poderia impactar nessas ações? Ou ainda, como os professores (tanto do IFAL, quanto dos municípios), podem contribuir para uma preparação mais fragmentada dos discentes para o exame de seleção? É preciso revisar os pontos ou a maneira de avaliação? Apesar do texto ser específico para a matemática, alguns desses questionamentos são relevantes para as outras disciplinas que compõem a prova de seleção para os cursos de Ensino Médio.

Por fim, espera-se que o material seja o primeiro passo para uma contribuição ainda maior para os docentes e discentes da educação básica, sejam eles dos anos finais do Ensino Fundamental ou do IFAL.

REFERÊNCIAS

BENEVIDES, Fabrício Siqueira. **Equação do Segundo Grau: Resultados Básicos**. Material Teórico – Módulo Equação do Segundo Grau. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5wmurqxxyygw0.pdf>. Acessado em: 16 de abril, 2020.

BRASIL, Agência Nacional de Águas. **Situação da Água no Mundo**. Disponível em: <https://www.ana.gov.br/panorama-das-aguas/agua-no-mundo>. Acessado em 15 de junho, 2020.

BRASIL. **Lei N^o 11.892, 29 de dezembro de 2008**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2008/Lei/L11892.htm>. Acessado em 25 de janeiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Exames Anteriores**. Disponível em: <https://exame3.ifal.edu.br/exames/listarExamesAnteriores>. Acessado em 15 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **EDITAL Nº 20/2019/DSI/PROEN-IFAL (RETIFICADO) EXAME DE SELEÇÃO 2020.1 CURSOS TÉCNICOS INTEGRADOS AO ENSINO MÉDIO**. Disponível em: <https://exame3.ifal.edu.br/files/Edital_Exame_Selecao_2020_1_Integrado_RETIFICADO_4_new.pdf>. Acessado em 20 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Edital PROIFAL, 2019**. Disponível em: <http://www.extensao.ifal.edu.br/editais/editais/programas/proifal/proifal-2019/edital-proifal-2019/view>. Acessado em 16 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Extensão em números**. Disponível em: <http://www.extensao.ifal.edu.br/acoes/indicadores>. Acessado em 20 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Plano de Desenvolvimento Institucional, 2014-2018**. Disponível em: <https://www2.ifal.edu.br/ifal/reitoria/pdi/documentos-pdi-2019-2023/icones-do-site/pdi-2014-2018>. Acessado em 20 de janeiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Plano de Desenvolvimento Institucional, 2019-2023**. Disponível em: <https://www2.ifal.edu.br/ifal/reitoria/pdi/pdi-2019-2023-final-revisado.pdf>. Acessado em 20 de janeiro, 2020.

BRASIL, L.D.B. **Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional LDB, Lei N^o 9.394/96, 20 de dezembro de 1996**. Disponível em <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acessado em: 25 de janeiro, 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Terceira versão. Brasília, DF, 2018**. Disponível: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20 de março.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 6^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 7^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 8^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 9^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

HOLANDA, Francisco Bruno. **Introdução à Porcentagem**. Material Teórico – Módulo Porcentagem e Juros. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddyecs8bh1s8w.pdf>. Acessado em: 13 de abril, 2020.

HOLANDA, Francisco Bruno. **Proporção e Conceitos Relacionados**. Material Teórico – Módulo Porcentagem e Juros. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf>. Acessado em: 14 de abril, 2020.

MOURA, Dante Henrique. **Educação básica e educação profissional: dualidade histórica e perspectiva de integração**. CEFET-RN, 2007.

NETO, Ângelo Papa. **Potenciação**. Material Teórico – Módulo Potências e Dízimas Periódicas. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/comt38pvow84s.pdf>. Acessado em: 16 de abril, 2020.

NOVAES, Jean Carlos. **Produtos notáveis: veja as propriedades**. Matemática básica.

Disponível em: <https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/>. Acessado em: 15 de abril, 2020.

PACHECO, Eliezer Moreira. **Os institutos federais: uma revolução na educação profissional e tecnológica**. Natal : IFRN, 2010. Disponível em: <https://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/1013>. Acessado em 13 de fevereiro, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Áreas de Figuras Planas: Parte 1**. Material Teórico – Módulo Áreas de Figuras Planas. Portal da Matemática, OBMEP. 03 de setembro, 2018. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dj018tnxmk8wc.pdf>. Acessado em 08 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Produtos Notáveis**. Material Teórico – Módulo Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf>. Acessado em: 15 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo**. Material Teórico – Módulo Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf>. Acessado em: 09 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Sistemas de equações do 1^o grau**. Material Teórico – Módulo Sistemas de equações do 1^o grau. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf>. Acessado em: 12 de abril, 2020.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. UFSC, 2005.

SOARES, Diana; ALMEIDA, Leandro Silva. **Para além da nota: definição de perfis de sucesso e fracasso escolar**. Psicologia Escolar e Educacional, v. 23, 2019.

VIEIRA, José Aparecido; DEITOS, Maria Lúcia Melo de Souza. **Educação profissional e o desafio de integração no ensino médio**. Disponível em: <https://cutt.ly/ro8TCcV>. Acessado em 15 de fevereiro, 2020.

Apêndice A -

E-book: material educacional

A MATEMÁTICA PARA O EXAME DE SELEÇÃO DO ENSINO MÉDIO INTEGRADO DO IFAL

LUIZ GABRIEL DOS SANTOS GOMES

Sumário

APRESENTAÇÃO

A confecção deste documento é fruto da dissertação intitulada por *A matemática para o exame de seleção do Ensino Médio Integrado do IFAL* do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e tem como objetivo fornecer um apoio teórico para os conteúdos cobrados no exame de seleção do IFAL para todos os interessados, sobretudo para professores do Ensino Básico.

Neste E-book, o leitor encontrará em seu primeiro capítulo a lista dos conteúdos programáticos do exame de seleção, bem como alguns comentários sobre os mesmos. Além de uma sugestão para uma leitura mais aprofundada sobre a instituição e pontos importantes relacionados tanto ao exame como um toto quanto com relação aos conteúdos mais recorrentes. É importante, antes de ler este material, que o leitor tenha conhecimento sobre os pontos importantes da prova, bem como da própria instituição, seja pela dissertação antes mencionada, seja por outros meios, como o contato com a própria instituição e seus canais de comunicação (site oficial, redes sociais, e-mails, telefones).

Os dois capítulos seguintes são relacionado a teoria dos conteúdos mais recorrentes do exame de seleção, sendo um total de 10 pontos dos 28 do conteúdo programático. Por fim, os dois últimos capítulos são referentes a um banco de questões e as provas de seleção anteriores.

É importante reforçar que algumas questões que foram retiradas das provas anteriores dos exames de seleção do Instituto Federal de Alagoas para o Ensino Médio Integrado irão aparecer no penúltimo capítulo, Banco de questões, e não serão indicadas que são do exame de seleção, apenas serão indicadas no capítulo destinado as provas anteriores.

Boa leitura!!!

1 CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

Neste capítulo faremos uma divisão do conteúdo programático dos exames de seleção para o Ensino Médio Integrado por álgebra (A) e geometria (G). Para uma discussão mais detalhada sobre as características da prova, análise dos conteúdos mais recorrentes, recomendamos a leitura do capítulo 2 da dissertação *A matemática para o exame de seleção do Ensino Médio e Integrado do IFAL*.

Um fator importante é que, em termos quantitativos, os pontos relacionados aos conteúdos de álgebra representam aproximadamente $71,4\%$ dos conteúdos abordados na prova, enquanto geometria fica com $28,6\%$. Além disso, não houve mudanças nos pontos cobrados na prova entre 2010 e 2019.

Observação 1.1. Apesar da Base Nacional Comum Curricular tratar as habilidades de operações com números reais e seus similares (números decimais e resolução de problemas com números naturais e racionais) em uma temática (Números) separada de álgebra, tal como o caso de sistema métrico decimal ser tratado como uma temática (Grandezas e Medidas) a parte de geometria, aqui trataremos esses conteúdos como tópicos de álgebra e geometria, respectivamente.

Posto isto, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, p. 298-318), os conteúdos do exame de seleção são distribuídos da seguinte mandeira:

1. Operações com números reais (A) – 6^o ao 9^o ano;
2. Resoluções de problemas com números naturais e racionais (A) – 6^o ao 8^o ano;
3. Números decimais (A) – 6^o ao 8^o ano;
4. Sistema métrico decimal (G) – 6^o e 7^o ano;
5. Expressões numéricas (A) – 6^o e 7^o anos;
6. Equações e sistemas de 1^o grau (A) – 7^o e 8^o ano;
7. Inequações de 1^o grau (A) – 7^o ano;
8. Problemas de 1^o grau (A) – 7^o e 8^o ano;
9. Razões e proporções (A) – 7^o e 8^o ano;
10. Regra de três (simples e composta) (A) – 7^o e 8^o ano;

11. Porcentagem (A) – 7^o ao 8^o ano;
12. Valor numérico de uma expressão algébrica (A) – 8^o ano;
13. Operações algébricas com polinômios (A) – 8^o ano;
14. Produtos notáveis (A) – 9^o ano;
15. Fatoração (A) – 9^o ano;
16. Simplificação de frações algébricas (A) – 9^o ano;
17. Potenciação e radiciação (A) – 6^o e 9^o ano;
18. Estudo dos radicais (A) – 9^o ano;
19. Equação de 2^o grau (A) – 8^o e 9^o ano;
20. Sistema de 2^o grau (A) – 9^o ano;
21. Problemas do 2^o grau(A) – 9^o ano;
22. Teorema de Tales (G) – 9^o ano;
23. Triângulos semelhantes (G) – 9^o ano;
24. Relações métricas no triângulo retângulo (G) – 9^o ano;
25. Razões trigonométricas no triângulo retângulo (G) –
26. Polígonos regulares (G) – 7^o e 9^o ano;
27. Polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência (G) – 9^o ano;
28. Áreas de figuras planas (G) – 6^o ao 9^o ano.

Observação 1.2. Ainda de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, p. 298-318), tópicos relacionados a temática Probabilidade e Estatística não se encontra entra entre os conteúdos programáticos da prova.

2 ÁLGEBRA PARA O EXAME DE SELEÇÃO

Neste capítulo abordaremos, quando possível de forma resumida e com exemplos, os principais resultados dos conteúdos de Álgebra que são mais recorrentes no exame de seleção para o Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Alagoas. Porém, antes de iniciarmos, falaremos um pouco sobre os conjuntos numéricos.

O desenvolvimento e classificação dos números estão ligados, inicialmente, a duas necessidades bem antigas: contar e medir. O conceito primitivo de contagem era feito de maneira intuitiva, o homem associava cada ovelha a uma pedra diferente para se certificar de que o rebanho estava completo. Esse conceito primitivo é associado ao conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$.

Por outro lado, adotando uma unidade de medida (imagine o metro), em determinadas situações tal unidade não era eficiente para medir determinados objetos (imagine agora objetos menores que 1 metro). Com isso, foi preciso ampliar o conceito dos números, admitindo subdivisões de uma determinada unidade de medida, estas subdivisões estão associadas aos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$. A título de exemplo, as subdivisões do metro são: decímetro (1 décimo de 1 metro); centímetro (1 centésimo de 1 metro) e milímetro (1 milésimo de 1 metro).

No entanto, só no início do século XX é que houve uma formalização do conjunto dos números naturais, com Giuseppe Peano. A caracterização dos números naturais foi feita de forma axiomática, de modo que 1 não era sucessor de nenhum número e que todo natural tem um único sucessor. Os demais conjuntos números são apresentados da seguinte maneira: o conjunto dos números inteiros é formado pelos naturais, pelo zero e os inteiros negativos, representado por $\mathbb{Z}$ que vem do alemão zahl, cujo significado é número. O conjunto dos racionais, representado por $\mathbb{Q}$ que vem da palavra quociente, é definido pela razão de dois números inteiros, de modo que o denominador seja diferente de zero. Sua representação formal é da seguinte maneira $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \quad e \quad b \neq 0 \right\}$.

Por volta de 500 $a.C$, os pitagóricos mostraram que a diagonal do quadrado de lado unitário é igual a $\sqrt{2}$ e tal número, por sua vez, não é comensurável, isto é, não pode ser representado como um número racional. Para a época, essa descoberta foi tratada como um castigo dos deuses, visto que até então os números e as medidas seguiam um padrão, sendo representadas a partir dos números naturais ou por frações que representavam unidades menores de medida, o que não acontecia com a diagonal do quadrado de lado 1.

Por curiosidade, é possível mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Para isso, suponha (por absurdo) que o $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros não nulos e $mdc(a,b) = 1$.

Elevando ao quadrado ambos os membros de $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, temos que

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2.$$

Note que a^2 é par, consequentemente a também é. Assim, podemos escrever $a = 2k$, com k inteiro.

Substituindo $a = 2k$ em $2b^2 = a^2$, temos

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2.$$

Como b^2 é par, segue que b também é.

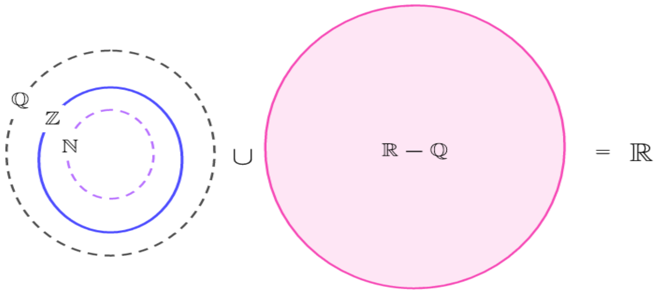
Absurdo. Por hipótese temos que $mdc(a,b) = 1$ e por outro lado, visto que a e b são números pares, obtemos $mdc(a,b) \geq 2$.

Logo, $\sqrt{2}$ não é racional, pois não é possível representá-lo da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e b é não nulo.

Esses números que não são "bem comportados"são chamados de irracionais. Com o conhecimento desses números ficou claro que os números naturais juntamente com os números racionais não eram suficientes para medir todos os segmentos e, com isso, surgiu o conceito dos números irracionais.

Assim, é importante observar que os números são racionais ou irracionais, não sendo possível um número pertencer aos dois conjuntos ao mesmo tempo. Dito isso, denomina-se o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, a união desses dois conjuntos numéricos, os racionais e os irracionais. Portanto, os números irracionais são números reais que não são racionais, o que dá sentido a notação $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Veja o diagrama a seguir:

Figura 1 – **Diagrama dos conjuntos numéricos.**



Fonte:Elaborado pelo autor.

É importante lembrar que as ideias dos conjuntos numéricos não surgiram seguindo a sequência: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Por exemplo, perceba que o homem já trabalhava com números racionais e irracionais antes mesmo da ideia dos números inteiros negativos. Assim, a relação do homem com os números se deu de forma gradativa e atendendo as suas necessidades.

2.1 Problemas envolvendo números naturais e racionais

Feita a introdução sobre os conjuntos numéricos, nesta seção serão abordados conteúdos referentes a resultados e problemas interessantes que envolvem os números naturais e os racionais. Esses números, de modo geral, tem uma variada quantidade de aplicações na vida cotidiana, posto que as primeiras associações do ser humano com a ideia de número foram justamente com os conjuntos trabalhados neste tópico.

Para isso, nesta seção, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(6^o e 7^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulos: "Operações com Números Naturais"e "Divisibilidade".

2.1.1 Números naturais

Proposição 2.1. *(Algorítmo da divisão) Se a e b são números inteiros positivos, então existe um único par (q,r) de inteiros positivos, tais que*

$$a = b\cdot q + r,\ 0 \le r < b$$

onde q e r são chamados de quociente e resto da divisão de a por b.

Observação 2.1. a e b são chamados de dividendo e divisor, respectivamente. Além disso, se $r = 0$, então dizemos que b divide a.

Exemplo 2.1. (Portal do Saber). O numero 38 é dividido em duas parcelas. A maior parcela dividida pela menor da quociente 4 e resto 3. Determine o produto dessas parcelas.

Como não sabemos o valor da parcela, devemos ter que $x+y=38$, com $x>y$ naturais. Pelo algorítmo da divisão, temos $x=4y+3$. Somando y em ambos os lados, temos

$$\underbrace{x+y}_{38}=5y+3 \Rightarrow 5y=35$$

Logo, $y=7$, $x=31$ e $x\cdot y=217$.

Definição 2.1. Seja $n>1$ um número natural. Dizemos que n é número primo se tem apenas dois divisores naturais distintos, são eles: 1 e n.

Se $n>1$ não é primo, dizemos que n é composto.

Exemplo 2.2. São números primos $\{2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 11,\ \ 13,\ \ 17,\ \ 19,\ \ 23,\ \ 29,...\}$.

Observação 2.2. Note que 1 não é primo, pois tem apenas um divisor natural. Curiosamente 1 não é primo e nem composto.

Teorema 2.1. *(Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número natural maior que 1 é primo ou se escreve de maneira única, a menos da ordem, como um produto de fatores primos.*

Exemplo 2.3. Observe a fatoração dos seguintes números:

$$\begin{array}{rcc} 108 & = & 2^2\cdot 3^3 \\ 169 & = & 13^2 \\ 180 & = & 2^2\cdot 3^2\cdot 5 \\ 1125 & = & 3^2\cdot 5^3 \\ 1323 & = & 3^3\cdot 7^2 \\ 10404 & = & 2^2\cdot 3^2\cdot 17^2. \end{array}$$

Definição 2.2. Sejam a e b números naturais não simultanemante nulos. Chamaremos o número natural $d=mdc(a,b)$ o maior divisor comum de a e b.

Observação 2.3. Se $mdc(a,b)=1$, dizemos que a e b são primos entre si.

Definição 2.3. Sejam a e b números naturais não simultanemante nulos. Chamaremos o número natural $m=mmc(a,b)$ o menor multiplo comum de a e b.

Proposição 2.2. *Se* $a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$ *e* $b=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_n^{b_n}$*, onde* $p_1,\ \ p_2,\ \ \cdots p_n$ *são números primos, então*

$$mmc(a,b) = p_1^{max\{a_1,\ \ b_1\}} p_2^{nax\{a_2,\ \ b_2\}} \cdots p_n^{max\{a_n,\ \ b_n\}}$$

e

$$mdc(a,b) = p_1^{min\{a_1,\ \ b_1\}} p_2^{min\{a_2,\ \ b_2\}} \cdots p_n^{min\{a_n,\ \ b_n\}},$$

onde $max\{a_i,\ \ b_i\}$ *é o maior valor entre* a_i *e* b_i *e* $min\{a_i,\ \ b_i\}$ *é o menor valor entre* a_i *e* b_i*.*

Exemplo 2.4. Pelo Exemplo 2.3, as fatorações de 1323 e 10404 são dadas por

$$1323 = 3^3 \cdot 7^2 \quad \text{e} \quad 10404 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2.$$

Observe que 7 não aparece como um dos fatores de 10404, assim como 2 e 17 não aparecem como fatores primos de 1323. Mas, lembre que $2^0 = 7^0 = 17^0 = 1$. Assim, temos

$$1323 = 2^0 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 17^0 \quad \text{e} \quad 10404 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \cdot 17^2.$$

Por fim, pela Proposição 2.2, temos que

$$\begin{aligned} mmc(1323, 10404) &= 2^{max\{0,\ \ 2\}} \cdot 3^{max\{2,\ \ 3\}} \cdot 7^{max\{0,\ \ 2\}} \cdot 17^{max\{0,\ \ 2\}} \\ &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 17^2 \\ &= 1529388 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} mdc(1323, 10404) &= 2^{min\{0,\ \ 2\}} \cdot 3^{min\{2,\ \ 3\}} \cdot 7^{min\{0,\ \ 2\}} \cdot 17^{min\{0,\ \ 2\}} \\ &= 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \cdot 17^0 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Utilizando a fatoração de 108 e 180 do Exemplo 2.3, façamos:

$$\begin{aligned} mmc(108, 180) &= 2^{max\{2,\ \ 2\}} \cdot 3^{max\{2,\ \ 3\}} \cdot 5^{max\{0,\ \ 1\}} \\ &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \\ &= 540 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} mdc(108, 180) &= 2^{min\{2,\ \ 2\}} \cdot 3^{min\{2,\ \ 3\}} \cdot 5^{min\{0,\ \ 1\}} \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Se a e b são inteiros positivos, então $mmc(a,b)\cdot mdc(a,b) = a\cdot b$.*

Exemplo 2.6. Pelo Teorema 2.2, temos

$$mmc(1323, \quad 10404)\cdot mdc(1323, \quad 10404) = 1323\cdot 10404.$$

Como $mdc(1323, \quad 10404) = 9$, segue que

$$mmc(1323, \quad 10404) = \frac{1323\cdot 10404}{9}.$$

Logo, $mmc(1323, \quad 10404) = 1529388$.

Exemplo 2.7. Pelo Exemplo 2.5, note que

$$mmc(108,180)\cdot mdc(108,180) = \overbrace{2^2\cdot 3^3}^{108}\cdot \underbrace{5^1\cdot 2^2\cdot 3^2}_{180}.$$

Exemplo 2.8. Daniela coleciona moedas e em sua coleção há 275 moedas de ouro, 220 moedas de prata e 165 moedas de bronze. Ela deseja organizar essa coleção em pequenos potes que tenham o mesmo número de moedas e de tal modo que cada pote contenha o maior número possível de moedas de um único tipo (outro, prata ou bronze). Nessas condições, quantas moedas Gabriela deve colocar em cada caixa? Além disso, ela terá quantas caixas de cada tipo de moeda?

De acordo com o enunciado, devemos encontrar o maior número natural que divide, simultanemante 165, 220 e 275, isto é, o número de moedas deve ser igual ao $mdc(165, \quad 220, \quad 275)$. Façamos:

$$\begin{array}{c|c} 165, \quad 220, \quad 275 & 5 \\ 33, \quad 44, \quad 55 & 11 \\ 3, \quad 4, \quad 5 & \end{array}$$

Daí, segue que $mdc(165, \quad 220, \quad 275) = 5\cdot 11 = 55$. Portanto, cada caixa terá um total de 55 moedas. Destas caixas, 5 são de moedas de ouro, 4 são de moedas de prata e 3 são de moedas de bronze.

Exemplo 2.9. Sabe-se que o planeta Júpiter leva 12 anos para dar uma volta completa em torno do Sol, enquanto os planetas Saturno e Urano levam cerca de 30 e de 80 anos, respectivamente, para dar essa mesma volta. Suponha que, em dado instante, os três planetas estejam alinhados. Após quanto tempo os três planetas voltarão a ocupar, novamente, essas posições?

Perceba que Júpiter, Saturno e Urano voltam para a posição em que estavam alinhados a cada 12, 30 e 80 anos, respectivamente. Sendo assim, devemos encontrar o menor número natural que é, simultaneamente, multiplo de 12, 30 e 80, isto é, o número de anos deve ser igual ao $mmc(12,30,80)$. Façamos:

$$\begin{array}{ccc|c} 12, & 30, & 80 & 2 \\ 6, & 15, & 40 & 2 \\ 3, & 15, & 20 & 2 \\ 3, & 15, & 10 & 2 \\ 3, & 15, & 5 & 3 \\ 1, & 5, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

Logo, $mmc(12,30,80) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

2.1.2 Números racionais

Nesta seção trataremos problemas envolvendo números racionais na forma fracionária, junto com algumas observações importantes. Em seguida, exibiremos exemplos que tratam de problemas envolvendo números racionais em sua forma fracionária. Para uma apresentação mais detalhada sobre a apresentação dos números racionais, sobretudo em sua forma decimal, como sugestão, o leitor pode consultar os livros "A Conquista da Matemática"(7^o ano, pág. 104-115, e 8^o ano, pág. 14-18).

Todo número racional é o resultado de uma divisão de números inteiros, sendo o divisor diferente de zero, ou seja, todo número racional pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Os números racionais aparecem em várias cituações cotidianas. Vejamos alguns exemplos:

1. **Representação Decimal.** Levi precisa comprar um novo smartphone. Ao pesquisar em algumas lojas da cidade onde mora, encontrou um de última geração no valor de R$ 739,98;

2. **Quociente.** 1 pizza com 9 fatias de mesmo tamanho é dividida para 6 pessoas. Cada pessoa ficará com $\frac{9}{6} = 1,5$, isto é, 1 fatia e meia;

3. **Parte\ todo.** Luana está no 8^o ano. Em sua classe há 45 alunos. Em sua turma há 30 meninas. A fração que corresponde a quantidade de meninas com relação ao total de alunos é $\frac{30}{45}$.

Observação 2.4. No item 2, se fossem 2 pizzas, cada uma com 9 fatias de mesmo tamanho, divididas para 12 pessoas. Cada pessoa pessoa receberia $\frac{18}{12} = 1,5$. Novamente, cada pessoa ficará com 1 fatia e meia. Observe que as frações representam a mesma quantidade de fatias para cada pessoa, muito embora não representam a mesma quantidade de pessoas e de fatias.

A Observação 2.4 nos dá uma pista de que duas ou mais frações representam o mesmo número racional, isto é, são equivalentes. De modo geral, podemos exibir uma infinidade frações equivalentes. Veja:

$$1,5=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\cdots=\frac{18}{12}=\cdots=\frac{3n}{2n}=\cdots,$$

onde n é um número inteiro não nulo.

Dito isto, é possível determinar a fração mais simples para representar um determinado número racional? A próxima definição nos mostrará como.

Definição 2.4. Sejam a e b números inteiros, com $b\neq 0$. Quando $mdc(a,b)=1$, dizemos que a fração $\dfrac{a}{b}$ é irredutível.

Exemplo 2.10. Queremos a forma irredutível da fração $\dfrac{108}{180}$.

Inicialmente, calculamos o $mdc(108,180)=36$. Como mostramos anteriormente, o processo para calcular o $mdc(108,180)$ é

$$\begin{array}{rr|l}
108, & 180 & 2\\
54, & 90 & 2\\
27, & 45 & 3\\
9, & 15 & 3\\
3, & 5 &
\end{array}$$

Em seguida dividimos o numerador e o denominador por 36. Daí, segue que

$$\frac{108\div 36}{180\div 36}=\frac{3}{5}$$

Perceba que os números finais do processo para calcular o mdc já nos dá o numerador 3 e o denominador 5 da fração irredutível.

Definição 2.5. Sejam $a,\ \ b,\ \ c$ e d números inteiros, com b e d não nulos. Vale que:

i. $\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$;

ii. $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$;

iii. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$, se $\dfrac{c}{d}\neq 0$.

Veja que na Definição 2.5, em (i), nos dá uma ferramenta útil somar ou subtrair frações. No entanto, para somar ou subtrair frações devemos organizá-las de modo que os denominadores sejam comuns. Veja a situação a seguir:

$$\frac{5}{7}+\frac{8}{14}$$

Observe que os denominadores das frações são diferentes, mas $\frac{4}{7}$ é equivalente a $\frac{8}{14}$, em virtude da Definição 2.4 e do Exemplo 2.10. Assim,

$$\frac{5}{7}+\frac{8}{14} \Leftrightarrow \frac{5}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5+4}{7}=\frac{9}{7}$$

Apesar disso, quando devemos somar ou subtrair mais de duas frações, pode se tornar trabalhoso usar a Definição 2.5, item (i). Apresentaremos um algorítmo que facilitará o processo. Considere a soma e subtração de frações

$$\frac{1}{4}+\frac{6}{5}-\frac{4}{8}.$$

Para o primeiro passo, com o objetivo de encontrar frações equivalentes e com o mesmo denominador da operação proposta anteriormente, devemos calcular o menor múltiplo comum dos denominadores, isto é, $mmc(4,\ \ 5,\ \ 8)=40$. Em seguida, dividimos o $mmc(4,\ \ 5,\ \ 8)=40$ pelo denominador de cada fração e multiplicamos o resultado pelo seu respectivo numerador. Veja:

$$[40\div 4]\times 1=10, \quad [40\div 5]\times 6=48 \quad \text{e} \quad [40\div 8]\times 4=20.$$

Estes resultados serão os novos numeradores e o $mmc(4,\ \ 5,\ \ 8)=40$ será o denominador comum. Note que

$$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}, \quad \frac{48}{40}=\frac{6}{5} \quad \text{e} \quad \frac{20}{40}=\frac{4}{8}.$$

Por fim, mantemos o denominador comum, $mmc(4,\ \ 5,\ \ 8)=40$, e faremos as operações algébricas com os novos numeradores. Veja:

$$\frac{1}{4}+\frac{6}{5}-\frac{4}{8} \Leftrightarrow \frac{10}{40}+\frac{48}{40}-\frac{20}{40}=\frac{10+48-20}{40}=\frac{38}{40}$$

Podemos, ainda, determinar a fração irredutível do resultado. Neste caso, a fração irredutível é $\frac{19}{20}$.

Exemplo 2.11. (IFAL, 2010) A superfície do nosso planeta é constituída de 30% de terra e 70% de água. Um terço da terra é pastagem, floresta, ou montanha, e dois quintos da terra são desertos ou cobertos por gelo; o resto da terra é usado para o cultivo. Qual é o percentual da superfície total do nosso planeta que é usada para o cultivo?

De acordo com o enunciado, a parte terrestre corresponde a 30% da superfície do planeta e desses

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\cdot 5+3\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{11}{15}$$

corresponde a pastagem, florestas, montanhas, desertos ou espaços coberto por gelo. Com isso, queremos $\frac{11}{15}$ de 30%. Façamos:

$$\frac{11}{15}\cdot 30\% = \frac{330\%}{15} = 22\%$$

Logo, $30\% - 22\% = 8\%$ é utilizado para cultivo.

Exemplo 2.12. (OBM, 2009) Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$ da barra, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas. Qual o peso da barra, em gramas?

De acordo com o enunciado, Nelly e Penha, juntas, ficaram com $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{13}{20}$ da barra. Assim, Sônia ficou com $1-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$ da barra. Perceba que $\frac{7}{20}$ corresponde a $70g$.

Portanto, a barra de chocolate pesa $\dfrac{70}{\frac{7}{20}} = 70\cdot\frac{20}{7} = 200g$.

Outra maneira de fazer é tentar escrever o enunciado em forma de uma equação do primeiro grau. Seja x o peso de uma barra. De acordo com o enunciado, Nelly tem $\frac{2x}{5}$ da barra, Penha tem $\frac{1x}{4}$ e Sônia tem $70g$. Então, determinar o peso da barra é resolver a seguinte equação:

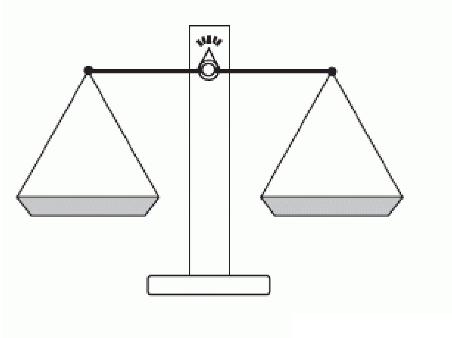
$$\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}+70=x.$$

2.2 Equações e sistemas do primeiro grau

Equações e sistemas do primeiro grau são ferramentas importantes para a resolução de diversas sintuações do cotidiano. Por exemplo, uma maneira intuítiva de calcular o peso de diferentes objetos é usando uma balança de pratos que fica equilibrada quando em ambos os pratos são colocados objetos que resultam no mesmo peso. Veja a figura da balança a seguir:

Imagine que alguém colocou 4 objetos idênticos e, consequentemente, de mesmo peso em um dos pratos da balança e no outro colocou um único objeto que pesa $12kg$ de modo que

Figura 2 – **Balança de pratos.**



Fonte:https://www.estudegratis.com.br/questao-de-concurso/107795.

os dois lados ficaram equilibrados. Intuitivalemente, nota-se que o peso do objeto em questão é exatamente $\frac{1}{4}$ de $12kg$.

Por outro lado, é possível traduzir essa situação para uma linguagem algébrica. Considere x como o peso de cada um dos objetos, por um lado da balança equilibrada temos a soma dos pesos dos 4 objetos idênticos e por outro temos um único objeto de $12kg$. Assim, podemos descrever a situação como

$$\overbrace{x+x+x+x}^{4x}=12$$

Seguindo a mesma ideia, observando a Figura 2, imagine que em um primeiro momento são colocadas 10 laranjas e 5 maçãs em um dos pratos da balança e um peso de $2000g$ no outro prato de modo que a balança fique equilibrada. Em um segundo momento, em um dos pratos há 1 laranja e 1 maçã e no outro há um peso de $260g$. Traduzindo a situação para uma linguagem algébrica, considerando que o peso da maçã é x e o peso da laranja é y, temos que

$$\begin{cases} 5x+10y=2000 \quad (1^o \quad momento) \\ x+y=260 \quad (2^o \quad momento) \end{cases}$$

Nesta seção, serão apresentados alguns métodos de resolução de equações e sistemas do primeiro grau. Para isso, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o e 8^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Sistema de Equações do 1^o Grau".

2.2.1 Equações do primeiro grau

Definição 2.6. Toda equação que pode ser reduzida a forma $ax+b=0$, em que x é uma incógnita e $a,b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, é chamada de equação do primeiro grau.

Observação 2.5. Os números a e b são chamados de coeficientes da equação.

Quando uma equação descreve determinado problema, seja ela de 1^o grau ou não, a incógnita "mora"em um universo, ou melhor, em um conjunto universo que é representado por $\mathbb{U}$. De maneira mais formal, significa que a incóginita pertence a um determinado conjunto numérico ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$).

Desta forma, resolver uma equação significa obter sua solução no conjunto universo, caso exista. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 2.13. Considere a equação $2x+1=9$, com $x \in \mathbb{N}$.

Note que x pode assumir os seguintes valores: 1, 2 3, 4, 5, 6, ... Fazendo as substituições considerando os possíveis valores de x, obtemos

$$\begin{aligned}
x=1 &\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 1+1=3\\
x=2 &\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2+1=5\\
x=3 &\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 3+1=7\\
x=4 &\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 4+1=9\\
x=5 &\quad\Rightarrow\quad 2\cdot 5+1=11
\end{aligned}$$

Neste caso, note que o único número natural que satisfaz a equação é 4. Assim, $\mathbb{U}=\mathbb{N}$ é chamado de conjunto universo; 4 é chamado de raiz ou solução da equação e $\mathbb{S}=\{4\}$ é chamado conjunto solução da equação.

Exemplo 2.14. Determine a solução da equação $3x+19=1$, com $x \in \mathbb{N}$.

Somando -19 em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$3x+19+(-19)=1+(-19) \Rightarrow 3x=-18.$$

Agora, multiplicando a equação por $\dfrac{1}{3}$, temos

$$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot(-18) \Rightarrow \frac{3}{3}x=\frac{-18}{3}$$

Logo, $x = -6$.

Perceba que x pertence ao conjunto dos números naturais e, consequentemente, não pode ser -6. Portanto, a equação $3x+19=1$ não tem solução em $\mathbb{N}$.

Exemplo 2.15. Resolva a equação $\dfrac{x}{2}+1=\dfrac{x+4}{5}$, com $x \in \mathbb{Q}$.

Inicialmente, multiplicaremos ambos os membros da equação por 10, que menor multiplo comum entre 2 e 5. Façamos:

$$10\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)=10\cdot\left(\frac{x+4}{5}\right)\Rightarrow\frac{10}{2}x+10\cdot 1=\frac{10}{5}x+\frac{10\cdot 4}{5}\Rightarrow 5x+10=2x+8.$$

Somando $-2x-10$ em ambos os membros, temos

$$5x+10+(-2x-10)=2x+8+(-2x-10)\Rightarrow 3x=-2$$

Em seguida, multiplicamos a equação por $\dfrac{1}{3}$ e obtemos $x=\dfrac{-2}{3}$.

De acordo com Júnior & Castrucci (2018, p. 156), em seu livro "A Conquista da Matemática (7^o ano)", para resolver problemas envolvendo equações de primeiro grau, observe os seguintes passos:

Passo 1. Ler o problema com atenção e levantar os dados;

Passo 2. Traduzir os dados para uma linguagem algébrica;

Passo 3. Resolver a equação estabelecida;

Passo 4. Analisar o resultado obtido e dar a resposta conveniente.

Exemplo 2.16. Em uma escola estadual, um sexto dos alunos são da terceira série, um terço são da segunda série e 750 são da primeira série do Ensino Médio. Quantos alunos há nessa escola?

De acordo com os passos citados anteriormente, temos

Passo 1:
$$\begin{array}{lll} 1^a & série: & 750; \\ 2^a & série: & \frac{1}{3}\ \ do\ \ total; \\ 3^a & série: & \frac{1}{6}\ \ do\ \ total. \end{array}$$

Passo 2: se x é o total de alunos, então $\frac{x}{3}$ representa a quantidade de alunos da 2^a série e $\frac{x}{6}$ da 3^a série do Ensino Médio. Com isso, a equação que representa o problema é dada por

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+750=x$$

Passo 3: multiplique ambos os membros da equação por 6, que é o menor múltiplo comum entre 3 e 6. Daí, segue que

$$6 \cdot \left(\frac{x}{6} + \frac{x}{3} + 750 \right) = 6x \Rightarrow x + 2x + 4500 = 6x \Rightarrow 3x + 4500 = 6x$$

Somando $-3x$ a equação , temos

$$3x = 4500 \Rightarrow x = 1500$$

Passo 4: observe que o enúnciado sugere que a solução "mora"no conjunto dos números naturais (quantidade de alunos da escola) e o encontrado para x satisfaz as condições do enunciado. Portanto, $\mathbb{S} = \{1500\}$.

Exemplo 2.17. Em uma aula de matemática, o professor enunciou a seguinte situação para seus alunos:

"Tenho dois filhos. Considerando apenas os anos, a soma da idade deles é igual a 7 anos. Sabendo qual que o mais velho tem 9 anos a mais que o mais novo, qual a idade dos meus dois filhos?"

João, indignado, respondeu: O problema proposto não tem solução, professor!!!

Perceba que o problema em questão trata de idades e, portanto, é um número inteiro positivo, neste caso a incógnita mora no universo do conjunto $\mathbb{N}$. Se a idade do mais novo de x, então a idade do mais velho é igual a $x+9$. Diante das informações do enunciado, temos que a equação que descreve o problema é

$$x + (x+9) = 7 \Rightarrow x = -1$$

Perceba que João está correto, pois a raiz da equação não se enquadra no conjunto universo. Veja que x "mora"em $\mathbb{N}$, isto é, x pode assumir os valores $1, \ \ 2, \ \ ..., 15, \ \ ....$

2.2.2 Sistemas de equações do primeiro grau

Definição 2.7. Um sistema linear de equações de primeiro grau (ou simplesmente sistema de primeiro grau) com duas equações de primeiro grau e duas incógnitas é da forma

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases},$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais fixados e x, y são incógnitas.

A solução do sistema do primeiro grau é o par ordenado (x_o, y_o) que satisfaz

$$\begin{cases} ax_o + by_o = e \\ cx_o + dy_o = f \end{cases}.$$

Observação 2.6. É possível demonstrar que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema possui solução única. Se $ad - bc = 0$, então o sistema não possui solução ou possui infinitas soluções.

Metodo da adição: Consiste em somar membro a membro as equações do sistema, fazendo os devidos ajustes, para eliminar uma das incógnitas.

Exemplo 2.18. Dona Marta tem dois filhos, Douglas e Marcelo, cuja soma das idades é igual a 65 e a diferença é igual a 17. Sabendo que Marcelo é o mais novo, qual é a idade de Douglas?

Seja x a idade de Douglas e y a idade de Marcelo. Sabemos que $x > y$, pois Douglas é o mais velho. Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x - y = 17 \end{cases}$$

Para utilizarmos o método da adição, antes de somar membro a membro, devemos escolher uma das incógnitas para elimitar e, em seguida, observaremos se as constantes que as multiplicam se anulam. De acordo com a Definição 2.7, $b = 1$ e $d = -1$. Perceba que $b + d = 0$. Assim, podemos somar membro a membro.

$$(x + y) + (x - y) = 65 + 17$$

Com isso, temos que $2x = 82$ e, conseguentemente, $x = 41$.

Note que o problema pede a idade de Douglas. Neste caso, não é necessário determinar a idade de Marcelo. Se quisessemos descobrir a idade de Marcelo, fariamos $41 + y = 73$ ou $41 - y = 9$.

Exemplo 2.19. Se dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos $64kg$, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos $41kg$, qual é o peso de um tijolo?

Denotaremos por x o peso de um tijolo e y o peso de um saco de areia, em quilogramas. Como dois tijolos e três sacos de areia pesam juntos $64kg$, e um tijolo e dois sacos de areia pesam juntos $41kg$, temos

$$\begin{cases} 2x+3y=64 \\ x+2y=41 \end{cases}$$

Observe que o sistema é possível, pois $2\cdot 2-3\cdot 1=-1\neq 0$. Devemos escolher uma das incógnitas para "eliminar"do sistema. Como queremos o peso do tijolo, x, devemos eliminar o y. Multiplicando a primeira equação por (-2) e a segunda por 3, obtemos

$$\begin{cases} -4x-6y=-128 \\ 3x+6y=123 \end{cases}$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} -4x-6y+(3x+6y) &= -128+123 \\ -x \quad \cdot(-1) &= -5 \quad \cdot(-1) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Logo, o peso de um tijolo é igual a 5kg.

Exemplo 2.20. Determine, se possível, a solução do sistema

$$\begin{cases} x+y=4 \\ -2x-2y=-8 \end{cases}.$$

Observe que $1\cdot(-2)-1\cdot(-2)=0$. Neste caso, tem infinitas soluções, pois

$$-2x-2y=-8 \Rightarrow -2\cdot(x+y)=-2\cdot 4 \Rightarrow x+y=4.$$

Isso significa que para cada valor x_0, encontramos um valor y_0 que satisfaz as equações do sistema.

Método da substituição: consistem em isolar uma das incógnitas no 1^o membro e substituir na outra equação.

Exemplo 2.21. Um estacionamento cobra $R\$3,00$ por moto e $R\$5,00$ por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou $R\$382,00$ para um total de 100 veículos. Quantas motos e carros utilizaram o estacionamento nesse dia?

Seja x o número de carros e y o número de motos do dia em questão. Diante das condições do enunciado, temos que

$$\begin{cases} 5x+3y=382 \\ x+y=100 \end{cases}$$

Isolando x na segunda equação, obtemos $x=100-y$. Substituindo em $5x+3y=382$, segue que

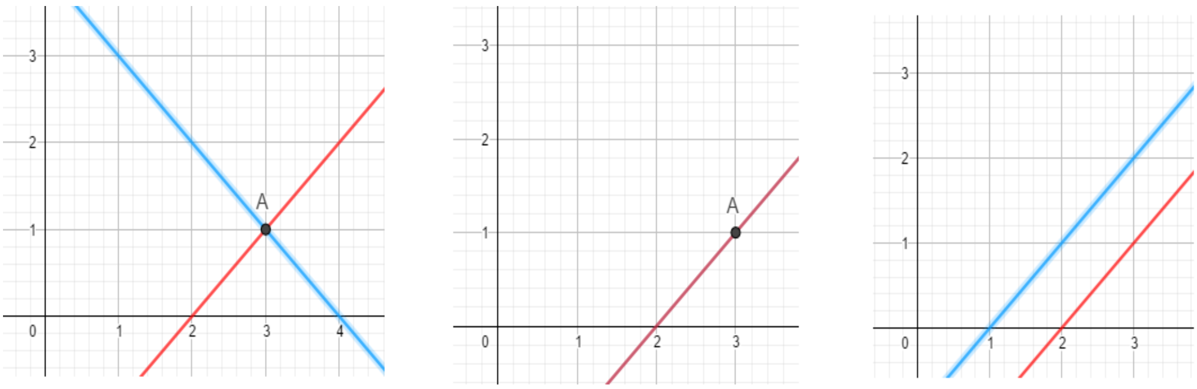
$$\begin{aligned} 5(100-y)+3y=382 &\iff -5y+3y+500=382 \\ &\iff -2y=382-500 \\ &\iff y=\frac{-118}{-2}=59. \end{aligned}$$

Logo, $x=100-59=41$.

Exemplo 2.22. O sistema formado pelas equações $x+y=3$ e $x+y=5$ não tem solução. Já que, observando as equações, obtemos $3=5$ e tal igualdade é um absurdo.

Observação 2.7. Há uma interpretação geométrica para os sistemas de primeiro grau. Apresentaremos a interpretação geométrica dos sistemas com solução única, com infinitas soluções e os que não possuem solução, nesta ordem. Veja a imagem a seguir:

Figura 3 – **Interpretação geométrica do sistema de equações do primeiro grau.**



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 Razões e proporções

Nesta seção trataremos de apresentar as noções de razão e proporção entre duas grandezas. Deste modo, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o e 8^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Razões e Proporções".

2.3.1 Razão

Inicialmente, imagine a seguinte situação: Pedro e Alana brincam com o jogo da memória. Eles jogam 8 partidas por semana. Dessas partidas, Pedro ganha 5 e perde 3. Assim, quando se diz que a razão entre a quantidade de vitórias e a quantidade de derrotas de Pedro é de $5:3$ (lê-se: 5 está para 3 ou razão de 5 para 3 ou simplesmente 5 para 3), significa que, por definição, ao montar uma fração cujo numerador é igual ao número de vitórias e o denominador é igual ao número de derrotas de Pedro, então essa fração é equivalente à fração $\frac{5}{3}$. Veja a tabela a seguir:

Tabela 1 – **Quantidade de vitórias e derrotas de Pedro pela quantidade de semanas.**

N^o de semanas	**N^o de vitórias**	**N^o de derrotas**
1	5	3
2	10	6
3	15	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	50	30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Tabela 1, note que as frações que correspondem a razão entre o número de vitórias e o número de derrotas é equivalente a $\frac{5}{3}$. Por exemplo, com o acumulado de 3 semanas, a fração que representa a razão entre o número de vitórias e o número de derrotas é

$$\frac{15}{9} = \frac{5 \cdot \cancel{3}}{3 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{3}.$$

De modo geral, temos

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \cdots = \frac{50}{30} = \cdots$$

Perceba que, dependendo da quantidade de semanas, Pedro obtem uma determinada quantidade de vitórias e de derrotas. De toda forma, ele mantém a razão entre as duas grandezas, isto é, Pedro conquista 5 vitórias para cada 3 derrotas. Portanto, é relevante afirmar que a razão entre duas grandezas é uma medida relativa (depende do referencial) e não absoluta.

Exemplo 2.23. Alguns exemplos de razões entre grandezas que aparecem, eventualmente, no cotidiano são:

1. Velocidade média: razão entre a variação de espaço (km) e a variação de tempo (h). Denotamos por $v_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$;

2. Densidade: razão entre a massa (g) e o volume (cm^3). Denotamos por $d = \dfrac{massa}{Volume}$;
3. Densidade demográfica: razão entre o número de pessoas ou habitantes e a área (km^2). Denotamos por $d_{demográfica} = \dfrac{hab}{Área}$;
4. Escala dos mapas: razão entre a distância no mapa (cm) e a distância real (cm). $E = \dfrac{d_{mapa}}{D_{real}}$.

Nos casos 1, 2 e 3 perceba que são grandezas diferentes, enquanto no caso 4 temos a razão entre a mesma grandeza. Além disso, é importante deixar claro que as unidades de medidas foram utilizadas como exemplo, porém elas não são as únicas para essas razões, sobretudo nos casos 1 e 3.

Exemplo 2.24. Em 2017, 300000 pessoas foram à Avenida Paulista protestar contra o aumento excessivo das taxas para a utilização do transporte público, bem como mais efetividade dos políticos no combate às desigualdades sociais. A estimativa é de que a região ocupada pelas pessoas que compareceram ao protesto foi de 100000 m^2. Assim,

$$d_{demográfica} = \frac{300000}{100000} = 3 \quad hab\backslash m^2$$

Com isso, observe que a cada 5 pessoas ocuparam 1 metro quadrado (m ^{2}) da avenida.

Exemplo 2.25. Suponha que na cidade de Arapiraca\AL, cuja população é de 220 mil habitantes, 440 pessoas tem um salário maior ou igual a 8 mil reais. Os demais, ganham menos do que 8 mil. A razão entre as pessoas que ganham 8 mil reais ou mais e as pessoas que ganham menos que esse valor é:

$$\frac{440}{220000} = \frac{1}{500}.$$

Isto significa que 1 a cada 500 pessoas recebe um salário maior ou igual a 8 mil.

2.3.2 Proporção

Voltando a Tabela 1, observe que a razão entre a quantidade de vitórias e derrotas de Pedro jogando 2 semanas seguidas é de $\frac{10}{6}$. Já com 10 semanas seguidas a razão é de $\frac{50}{30}$.

Essas frações são equivalentes, isto significa que

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{50}{30}.$$

Desta forma, por definição, chama-se de proporção uma sentença matemática que expressa a igualdade entre duas ou mais razões.

Exemplo 2.26. Se a, b , c e d são números reais não nulos, nesta ordem, formam uma proporção, então, por definição, tem-se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Neste caso, podemos ler a sentença da seguinte maneira: "a está para b assim como c está para d".

Observação 2.8. Um método eficiente para decidir se duas razões são proporcionais ou não é a multiplicação em X. Vejamos, o caso do exemplo anterior, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Como b e d são não nulos, multiplicamos ambos os membros da igualdade por bd. Daí, segue que

$$bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}$$

Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ implica em $ad = bc$.

Representando a equivalência de razões como $a : b = c : d$, usualmente dizemos que, em uma proporção, o produto dos meios (b e c) é igual ao produto dos extremos (a e d).

Exemplo 2.27. Determine o valor de x para que $\frac{x+1}{5} = \frac{2x+6}{15}$.

Aplicando o produto dos meios pelos extremos, obtemos

$$15 \cdot (x+1) = 5 \cdot (2x+6) \Rightarrow 15x + 15 = 10x + 30$$

Somando $-10x - 15$ a equação anterior, temos

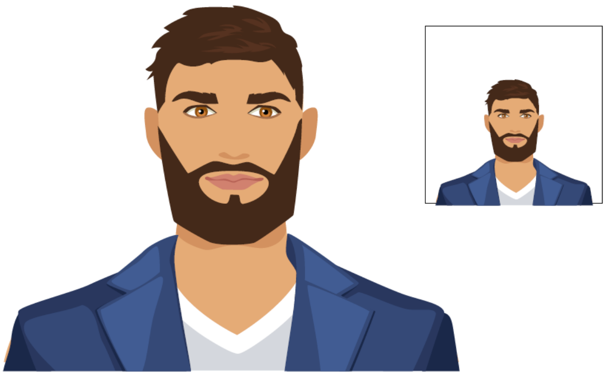
$$15x + 15 + (-10x - 15) = 10x + 30 + (-10x - 15) \Rightarrow 5x = 15$$

Logo, $x = 3$.

Exemplo 2.28. (Portal do Saber). Uma aplicação interessante relacionada ao conceito de proporção é a de figuras semelhantes. Uma foto é uma representação proporcional das dimensões reais de uma pessoa. Veja a imagem a seguir:

Suponha que a distância entre os ombros de Pedro mede 50 cm e a distância entre o topo de sua cabeça até seu queixo mede 15 cm. Em uma de suas fotos, ele percebeu que a distância entre seus ombros é de 5 cm. Podemos calcular a distância, na foto, do topo de sua cabeça até o queixo. Seja x a distância procurada. Daí, segue que

Figura 4 – **Figuras semelhantes**



Fonte:https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf .

$$\frac{15}{50} = \frac{x}{5} \Rightarrow 50x = 75$$

Logo, $x = 1{,}5$ cm.

Definição 2.8. Dados a e b números reais positivos, chamaremos de média geométrica entre a e b o número real positivo x que satisfaz a seguinte proporção:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Para resolver a seguinte proporção, utilizando o produto dos meios pelos extremos, temos que $x^2 = ab$. Sorte que $x = \sqrt{ab}$.

Proposição 2.3. *Se* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *então vale as seguintes propriedades:*

P1. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ *e* $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ *;*

P2. $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$*;*

P3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$*;*

P4. $\frac{a^2}{a \cdot b} = \frac{c^2}{c \cdot d}$*.*

Observação 2.9. Note que podemos ter uma segunda versão da propriedade P2. Se $a \neq b$ e $c \neq d$, então podemos escrever a seguinte proporção

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$$

Invertendo $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$, obtemos

$$\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}.$$

Exemplo 2.29. (IFAL, 2013) Se $\frac{a}{4-a} = \frac{b}{5-b} = \frac{c}{7-c} = 3$, então determine o valor de $a+b+c$.

Chamaremos de $x = a+b+c$. Pela Proposição 2.3, em P3, temos que

$$\frac{a+b+c}{4+5+7-(a+b+c)} = 3 \Rightarrow \frac{x}{16-x} = 3$$

Ultilizando o produto dos meios pelos extremos, obtemos

$$x = 3 \cdot (16-x) \Rightarrow x = 48-3x$$

Somando $+3x$ em ambos os membros, segue que

$$4x = 48 \Rightarrow x = 12.$$

Logo, $a+b+c = 12$.

2.4 Porcentagem

A expressão **por cento** faz parte do nosso cotidiano, sobretudo com relação a finanças. Por exemplo, podemos facilmente encontrar anúncios com "desconto de 8% (lê-se oito por cento) no pagamento à vista"ou "parcelamos em até 12 vezes com acréscimo de 10% no valor do produto".

Nesta seção apresentaremos alguns pontos importantes sobre esse conteúdo tão presente e importante no cotidiano das pessoas. Deste modo, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o e 8^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Porcentagem".

A expressão **por cento** vem do latim *por centum* e significada por um cento. Assim, podemos entender as porcentagens como uma fração cujo denominador é igual a 100 e o símbolo 1% como a fração $\frac{1}{100}$.

Exemplo 2.30. A região Norte ocupa de 45% do território brasileiro. Isto significa que a cada 100 km^2 do território brasileiro, a região norte tem 45 km^2. Assim, podemos representar esses 45% das seguintes maneiras:

- 45% é a representação percentual;

- $\frac{45}{100}$ é a representação centésimal;
- $0,45$ é a representação decimal.

Naturalmente, surge alguns questionamentos. Por exemplo, como vamos representar uma fração ou número decimal em termos percentuais?

Exemplo 2.31. Como podemos representar a fração $\frac{3}{8}$ em termos percentuais?

Inicialmente, observe que a fração representa 3 partes de 8, sendo este último sua totalidade. Assim,

$$\frac{3}{8} = 0,375 \cdot \frac{100}{100} = \frac{37,5}{100} = 37,5\%.$$

Observação 2.10. Observe que $\frac{100}{100} = 100\% = 1$. Assim, 1 representa a totalidade.

A porcentagem é uma medida relativa e não absoluta. Portanto, a porcentagem deve ser entendida como uma parte relativa da totalidade. Devemos observar que porcentagens diferentes estão relacionadas a totalidades diferentes. Os exemplos a seguir ilustrarão esta situação.

Exemplo 2.32. 20% da massa corporal corresponde a gordura. Uma pessoa perdeu 40% da sua gordura em três meses, mantendo os demais índices.

Perceba que a primeira porcentagem trata da quantidade de gordura com relação a totalidade da massa corporal e a segunda relação a gordura inicial (totalidade) e a perda de gordura que houve em três meses. Se quisessemos saber a porcentagem de massa corporal que essa pessoa perdeu, devemos calcular 40% de 20%, isto é,

$$\frac{20}{100} \cdot 40\% = 8\%$$

Exemplo 2.33. De acordo com a Agência Nacional das Águas, estima-se que $2,5\%$ da água existente no mundo é adequada para o consumo humano. Desse total, 69% se concentra nas geleiras, 30% são águas subterrâneas (armazenada em aquiféros) e 1% se encontra nos rios.

Perceba que, assim como no exemplo anterior, as diferentes porcentagens correspondem a diferentes totalidades. $2,5\%$ de água doce corresponde a totalidade de água do planeta, enquanto 1% da água dos rios está relacionada a totalidade de água doce. Se quiséssemos saber qual o percentual da água que se encontra nos rios com relação ao planeta, devemos calcular quanto vale 1% (da água dos rios) de $2,5\%$ (do total de água doce do planeta). Com isso, a água doce que se encontra nos rios corresponde a $0,025\%$ da água encontrada no planeta.

Outro ponto que vale ressaltar é referente a aplicação de porcentagens sucessivas de um certo valor inicial não corresponde à aplicação da soma dessas porcentagens ao valor inicial. O próximo exemplo irá ilustrar esse fato

Exemplo 2.34. Acrescimos ou descontos sucessivos. Imagine que um certo produto, em que seu valor inicial é de 100 reais, sofreu três descontos sucessivos: na primeira semana teve 10% de desconto e na segunda 20%. Qual o desconto total ao final das duas semanas?

Durante a primeira semana o produto sofreu um desconto de 10%, isto é, o seu valor será de 90% do inicial que é igual a 90 reais. Em seguida, o produto que nesta semana custa 90 reais, sofreu um novo desconto de 20%, assim o produto passou a custar 72 reais. Com relação ao valor inicial, houve um desconto total de 28% e não de 30%.

2.5 Produtos notáveis

Algumas identidades algébricas que são ferramentas importantes para a solução de vários problemas de matemática básica (problemas de equação do segundo grau, por exemplo). Essas identidades tem uma relação muito próxima com a geometria, mais especificamente com relação a áreas de quadrados e volume de cubos. Para isso, nesta seção, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas".

Definição 2.9. Dizemos que uma identidade é algébrica quando ambos os membros da igualdade são expressões algébricas e a igualdade permanece verdadeira para quaisquer valores atribuídos as variáveis.

Exemplo 2.35. A equação $2x^2+64 = 2(x^2+34)-4$ é uma identidade algébrica.

Os produtos notáveis, portanto, são identidades algébricas que aparecem com frequência quando operamos com expressões algébricas. Nesta seção, apresentaremos alguns dos principais produtos notáveis.

Sejam a, b e c números reais. Os principais produtos notáveis são:

1. **Quadrado da soma de dois termos**:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

2. **Quadrado da diferença de dois termos**:

   A demonstração desse resultado é análogo ao do quadrado da soma de dois termos.

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

3. **Quadrado da soma de três termos**:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

4. **Produto da soma pela diferença de dois termos**:

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

   Observação 2.11. Chamamos de diferença de quadrados o lado direito da igualdade (a^2-b^2).

5. **Cubo da soma de dois termos**:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

6. **Cubo da diferença de dois termos**:

   A demonstração desse resultado é análogo ao do cubo da soma de dois termos.

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

7. **Soma de dois cubos**:

   Sabemos que $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$. Somando $-3ab(a+b)$ em ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= (a+b)(\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{(a+b)^2}-3ab) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

8. **Diferença de dois cubos**:

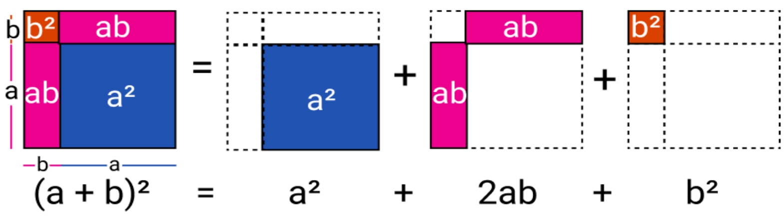
   A demonstração desse resultado é análogo ao da soma de dois cubos.

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Observação 2.12. Para facilitar a memorização dos resultados dos produtos notáveis, chamaremos a, b e c de primeiro, segundo e terceiro termos, respectivamente. Por exemplo, podemos ler o quadrado da soma de dois termos como o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. É possível fazer o mesmo com os demais.

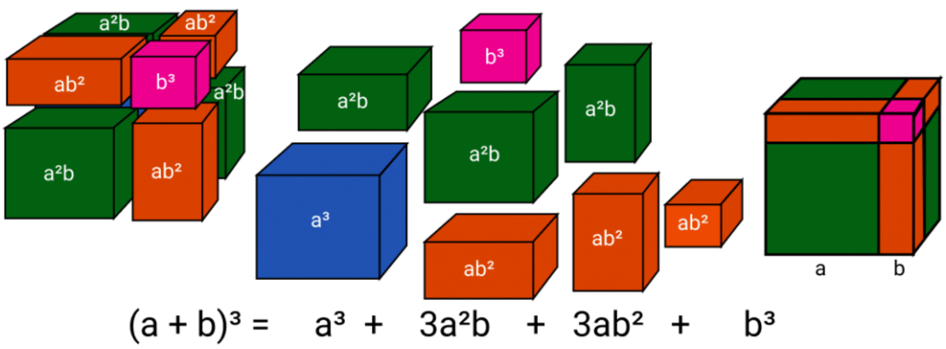
Cada um desses produtos notáveis tem uma interpretação geométrica relacionada a área ou volume. Veja as figuras a seguir:

Figura 5 – **Interpretação geométrica do cubo da soma de dois termos.**



Fonte:`https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/`.

Figura 6 – **Interpretação geométrica do cubo da soma de dois termos.**



Fonte:`https://matematicabasica.net/produtos-notaveis/` .

Exemplo 2.36. É possível encontrarmos x e y reais que satisfaçam as condições: $x+y=5$ e $xy=14$?

Elevando ambos os membros de $x+y=5$ ao quadrado, temos

$$(x+y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2+2xy+y^2 = 25.$$

Como $xy = 14$, segue que $x^2+2\cdot 14+y^2 = 25$. Somando -28 em ambos os membros, temos

$$x^2+28-28+y^2 = 25-28 \Rightarrow x^2+y^2 = -3$$

Absurdo, pois $x^2+y^2 \geq 0$. Portanto, não é possível encontrarmos x e y reais que satisfaçam essas condições.

Exemplo 2.37. Sejam , b e c números inteiros, tais que $50 \leq b \leq 60$ e $25 < c < 36$. Prove que a equação $25x^2+bx+c = y^2$ não admite como solução números inteiros positivos.

Observe que há 11 possibilidades para o valor de b e 10 possibilidades para c, totalizando 110 equações.

Suponha que existem x e y naturais que satisfaçam a equação $25x^2+bx+c = y^2$. Tomando os valores máximos e mínimos de b e c, temos

$$25x^2+50x+26 \leq \overbrace{x^2+bx+c}^{y^2} \leq 25x^2+60x+35 \text{ (i)}.$$

Por outro lado,

$$(5x+5)^2 = 25x^2+50x+25 < 25x^2+10x+26 \text{ (ii)}$$

e

$$25x^2+60x+35 < (5x+6)^2 = 25x^2+60x+36 \text{ (iii)}.$$

Por (i), (ii) e (iii), temos

$$(5x+5)^2 < y^2 < (5x+6)^2 \Rightarrow 5x+5 < y < 5x+6$$

O que é um absurdo, pois y é um número natural e está entre dois números naturais consecutivos.

2.6 Potenciação e radiciação

Nesta seção serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(7^o ao 9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Potenciação".

Definição 2.10. Sejam a é um número real e n um número inteiro positivo. A potência de base a e expoente n é definida por

i. $a^1 = a$;

ii. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n-vezes}$.

Apresentaremos alguns exemplos que merecem a nossa atenção. Para isso, considere n um número natural.

Exemplo 2.38. $10^n = 10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10 = 1\underbrace{000...00}_{n-zeros}$

Exemplo 2.39. $(-1)^n = (-1) \cdot (-1) \cdot ... \cdot (-1) = \begin{cases} 1, & se \quad n \quad é \quad par \\ -1, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$

Observação 2.13. Pelo exemplo 2.39, podemos concluir que toda base cujo número é negativo quando elevado a um expoente par tem como resultado um número positivo. Entretanto, devemos tomar um cuidado com situações como -2^4 e $(-2)^4$. Desenvolvendo as potências, obtemos

$$\underbrace{-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{-16} = -2^4 \neq (-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}_{+16}.$$

O primeiro caso temos que a base é 2 e o segundo a base é -2.

Proposição 2.4. *Sejam m e n números inteiros positivos e a e b reais. Valem as seguintes propriedades:*

P1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

P2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, *se* $n > m$ *e* $a \neq 0$;

P3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

P4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

P5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, *com* $b \neq 0$.

O objetivo dos próximos exemplos é expressar casos particulares para a dedução das propriedades apresentadas na Proposição 2.4.

Exemplo 2.40. P1:

$$\begin{aligned} 17^3 \cdot 17^4 &= (17 \cdot 17 \cdot 17) \cdot (17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17) \\ &= 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \\ &= 17^{3+4}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.41. P2:

$$\begin{aligned} \frac{17^5}{17^3} &= \frac{\cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot 17 \cdot 17}{\cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17}} \\ &= 17^{5-3} \end{aligned}$$

Exemplo 2.42. P3:

$$\begin{aligned} (5^3)^4 &= 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3 \\ &= 5^{3+3+3+3} \\ &= 5^{3 \cdot 4} \end{aligned}$$

Exemplo 2.43. P4:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{2^3}{3^3}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.44. P5:

$$\begin{aligned} (3 \cdot 2)^3 &= (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 3^3 \cdot 2^3. \end{aligned}$$

A seguinte definição possibilita estender a Proposição 2.4 para m e n inteiros.

Definição 2.11. Sejam a é um número real não nulo e n um número inteiro positivo. Definimos:

i. $a^0 = 1$;

ii. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

A seguir colocaremos alguns exemplos interessantes que valem como observações também.

Exemplo 2.45. O valor da expressão numérica $\{2^{2000}+[5^{5000}+3^{1000}+(18^{7500}-1)]\}^0=1$

Exemplo 2.46. (Portal do Saber.) Determine o valor da expressão $\dfrac{2^n \cdot 10^{n+2}}{5^{n+1} \cdot 4^n}$.

Sabemos que $4^n=(2^n)^2$ e $10^{n+2}=(5\cdot 2)^{n+2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{2^n \cdot 10^{n+2}}{5^{n+1} \cdot 4^n} &= \frac{2^n \cdot 5^{n+2} \cdot 2^{n+2}}{5^{n+1} \cdot (2^n)^2} \\ &= \frac{2^n \cdot 5^{n+1} \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 2^n}{5^{n+1} \cdot 2^n \cdot 2^n} \\ &= 5 \cdot 2^2 = 20.\end{aligned}$$

Observação 2.14. Vale lembrar que, em geral, $(a^m)^n \neq (a)^{m^n}$. Do lado esquerdo temos uma potência cuja base também é uma potencia e do lado direito temos uma potência cujo expoente também é uma potência.

Para o estudo de radiciação, iniciaremos com uma definição e alguns comentários sobre ela.

Definição 2.12. Se $a \geq 0$ é um número real e n é um número inteiro positivo, definimos como a raiz $n-ésima$ de a como o único real não negativo cuja sua $n-ésima$ potência é igual a a.

Denotaremos a raiz $n-ésima$ de a como $\sqrt[n]{a}$. Assim, $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

Observação 2.15. No caso em que n é ímpar, na Definição 2.12, a pode ser um real qualquer, isto é, podemos incluir os números negativos. Trataremos dos casos $n=2$ e $n=3$ nos próximos exemplos.

Exemplo 2.47. Caso $n=2$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0^2 & = & 0 & \Rightarrow & \sqrt{0} & = & 0 \\ 1^2 & = & 1 & \Rightarrow & \sqrt{1} & = & 1 \\ 2^2 & = & 4 & \Rightarrow & \sqrt{4} & = & 2 \\ 3^2 & = & 9 & \Rightarrow & \sqrt{9} & = & 3. \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 9^2 & = & 81 & \Rightarrow & \sqrt{81} & = & 9 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Um número p natural é chamado **quadrado perfeito** se existir um q, também natural, tal que $p=q^2$. Com isso, 0, 1, 4, 9, 16, 25, ..., 81, ... são quadrados perfeitos.

Exemplo 2.48. Caso $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
(-4)^3 & = & -64 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-64} & = & -4 \\
(-3)^3 & = & -27 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-27} & = & -3 \\
(-2)^3 & = & -8 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-8} & = & -2 \\
(-1)^3 & = & -1 & \Rightarrow & \sqrt[3]{-1} & = & -1 \\
0^3 & = & 0 & \Rightarrow & \sqrt[3]{0} & = & 0 \\
1^3 & = & 1 & \Rightarrow & \sqrt[3]{1} & = & 1 \\
2^3 & = & 8 & \Rightarrow & \sqrt[3]{8} & = & 2 \\
3^3 & = & 27 & \Rightarrow & \sqrt[3]{27} & = & 3 \\
4^3 & = & 64 & \Rightarrow & \sqrt[3]{64} & = & 4 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots
\end{array}.$$

Um número p inteiro é chamado **cubo perfeito** se existir um q, também inteiro, tal que $p = q^3$. Note que os números ..., -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, ... são cubos perfeitos.

Proposição 2.5. *Sejam m, n e d números naturais e a e b números reais, tais que a, $b \geq 0$. Valem as seguintes propriedades:*

P1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

P2. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;

P3. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot d]{a^{m \cdot d}}$;

P4. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div d]{a^{m \div d}}$, *se d divide m e n;*

P5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *com $b \neq 0$.*

Exemplo 2.49. Determine o valor da expressão $\dfrac{\sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{12}}$;

Sabemos que $1024 = 2^{10}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{12}} &= \frac{\sqrt[5]{2^{10}} \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{12}} \\
&= \sqrt[5]{(2^2)^5} \cdot \sqrt{\frac{108}{12}} \\
&= \left(\sqrt[5]{2^2}\right)^5 \cdot \sqrt{9} \\
&= 2^2 \cdot \sqrt{9} \\
&= 4 \cdot 3 = 12.
\end{aligned}$$

Observação 2.16. Em geral, $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$.

Definição 2.13. Sejam m e n números inteiros, com $n \neq 0$, e a um número real. Definimos:

i. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;

ii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

A partir da Definição 2.13, as propriedades da Proposição 2.4 são preservadas para expoentes racionais.

Exemplo 2.50. Determine o valor de $\sqrt[6]{0,000064}$.

Como $0,000064 = \dfrac{64}{1000000}$, temos que

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{0,000064} &= \left(\frac{64}{1000000}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{64^{\frac{1}{6}}}{1000000^{\frac{1}{6}}}\\ &= \frac{(2^6)^{\frac{1}{6}}}{(10^6)^{\frac{1}{6}}} = \frac{2}{10} = 0,2.\end{aligned}$$

2.7 Equação do segundo grau

O nome "segundo grau", vem do fato que a equção está associada a um polinômio de grau 2, isto é, o maior expoente de x é igual a 2. Faz-se necessário ressaltar a importância desse conteúdo, visto que essas equações aparecem em uma grande quantidade de problemas de Geometria Euclidiana e de Física. Nesta seção abordaremos alguns aspectos importantes das equações do segundo grau e como principais referências serão utilizados o livro "A Conquista da Matemática"(9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Equações do Segundo Grau".

Definição 2.14. Dizemos que uma equação do segundo grau é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a,\;\; b$ e c são números reais conhecidos, sendo $a \neq 0$, e x uma incógnita real.

Para o desenvolvimento da teoria desta seção, relembraremos alguns fatos importantes.

Observação 2.17. Lembre que se x é um número real, então $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & se \;\; x \geq 0 \\ -x, & se \;\; x < 0 \end{cases}$.

Utilizaremos o método de completar quadrados para demonstrar um resultado geral para calcular raízes de equações do segundo grau. Tal resultado foi desenvolvido pelo matemático

Sridhara no século X d.C. No entanto, a fórmula é conhecida popularmente como fórmula de Bhaskara, pois o resultado foi publicado no século XII pelo matemático Bhaskaras, que também é indu.

Proposição 2.6. *Se $ax^2+bx+c=0$ é uma equação do segundo grau e $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, então suas raízes reais são*

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Demonstração. Como $a\neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação $ax^2+bx+c=0$ por a. Assim, obtemos

$$x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

ou ainda,

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x=-\frac{c}{a}.$$

Com o objetivo de completar quadrado, sem alterar a equação, devemos somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros. Fazendo isso, temos que

$$\underbrace{x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{quadrado \quad perfeito}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Daí, segue que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Note que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ (lado esquerdo da igualdade). Por outro lado, temos que $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0$, pois $4a^2>0$ e, por hipótese, $\Delta=b^2-4ac\geq 0$. Assim,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2,$$

Em virtude da Observação 2.17, temos que

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Por fim, obtem-se as raízes da equação do segundo grau

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\square$

Observação 2.18. Note que se $\Delta < 0$, a igualdade

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

seria um absurdo, pois em um lado da igualdade teriamos $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e do outro $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. Neste caso, quando $\Delta < 0$, a equação não possui solução no conjunto dos números reais.

Proposição 2.7. *Se x_1 e x_2 são raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, então vale as seguintes propriedades:*

1. $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$;
2. $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Demonstração. Como x_1 e x_2 são raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, pela Proposição 2.6, temos que

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Daí, obtemos

$$S = x_1 + x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b}{a}$$

e

$$P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

$\square$

Observação 2.19. A Proposição 2.7 não depende de Δ, isto é, as propriedades de soma e produto das raízes são válidas mesmo que a equação não admita raízes reais.

Observação 2.20. A equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0$ pode ser expressa de duas maneiras diferentes, sua forma fatorada e a partir do produto e soma das raízes.

Ao dividirmos a equação do segundo grau por a, em ambos os membros, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Pela Proposição 2.7, $S = \dfrac{-b}{a}$ e $P = \dfrac{c}{a}$. Assim,

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Além disso, a forma fatorada da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. A demonstração ficará a cargo do leitor (como sugestão use o fato de que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1x_2$, substituindo em $x^2 - Sx + P = 0$ e fazendo os devidos ajustes).

3 GEOMETRIA PARA O EXAME DE SELEÇÃO

A palavra Geometria deriva da língua grega, cujo significado é divido em dois termos: "geo"que significa terra e "metria"que significa medida. A origem da Geometria é tão antiga quanto a origem das civilizações, como a egípcia, sumérica e babilônica, visto que a medida que a organização das sociedades se desenvolviam, surgiam a necessidade de demarcar territórios, propriedades privadas, área de plantações e a construção de casas, templos e pirâmides, por exemplo.

No entanto, só na Grécia a Geometria teve uma melhoria na sistematização das ideias já conhecidas dando mais autonomia a disciplina, de modo que esses resultados foram estudados de maneira mais geral, não necessariamente objetivando uma aplicação prática dos enunciados, proposições e demonstrações. Alguns matemáticos que contribuíram para a sistematização dessas ideias foram: Hipátia (primeira matemática da história), Tales de Mileto, Pitágoras, Platão e Euclides de Alexandria.

Em particular, Euclides (360 a.C - 295 a.C) é conhecido por escrever 13 obras entituladas "Os Elementos"sistematindo os principais resultados matemáticos conhecidos até sua época, especialmente os de geometria, com o rigor e padrão nas demonstrações dos resultados que se tornou um referencial por mais de dois milênios. Euclides é considerado o pai da Geometria.

Neste capítulo serão apresentados alguns tópicos relacionados à Geometria Plana que são mais recorrentes no exame de seleção do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Alagoas.

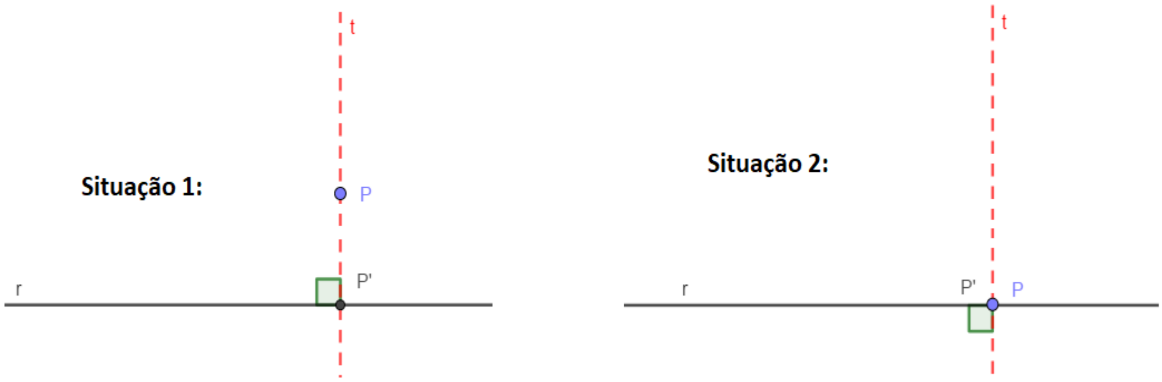
3.1 Relações métricas no triângulo retângulo

Nesta seção trataremos de apresentar algumas ferramentas para a solução dos problemas envolvendo as medidas de um triângulo retangulo, cujo principal resultado desta seção é o Teorema de Pitágoras. Assim, será utilizado como principal referência o livro "A Conquista da Matemática"(9^o ano).

Definição 3.1. Seja ABC um triângulo retângulo, reto em Â. Chama-se o maior lado do triângulo ABC, que é oposto ao ângulo reto, de hipotenusa e os demais lados de cateto.

Definição 3.2. Considere uma reta r e um ponto P. Ao traçarmos uma reta perpendicular à r passando por P, obtemos um ponto P' na intersecção entre as retas. Chamaremos P' de projeção ortogonal ou simplesmente projeção de P sobre a reta r.

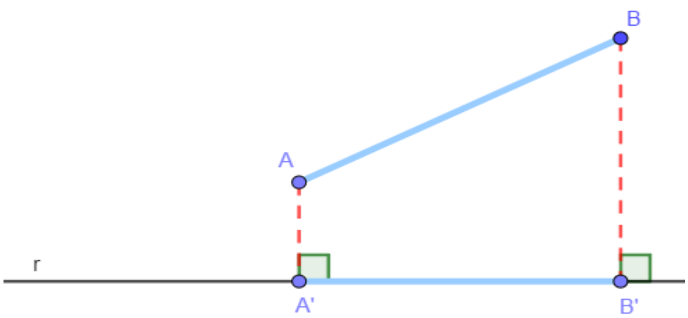
Figura 7 – **Projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r**



Fonte: produzida pelo autor.

Definição 3.3. Considere uma reta r e o segmento AB. Projetando as extremidades de $\overline{AB}$ sobre r, obtemos os pontos A' e B' em r. O segmento $A'B'$ é chamado de projeção ortogonal ou simplesmente projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

Figura 8 – **Projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r**



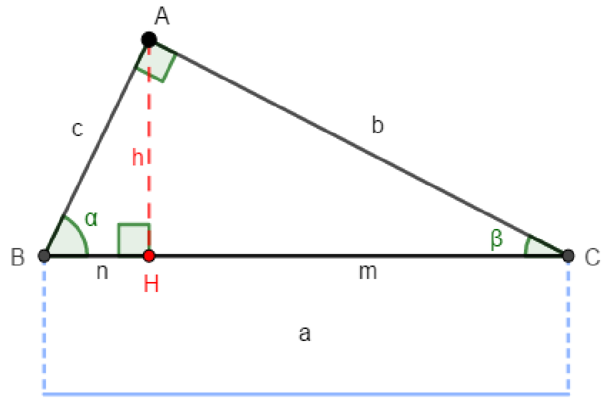
Fonte: produzida pelo autor.

Definição 3.4. Sejam ABC um triângulo retângulo, reto em A, e H a projeção do ponto A sobre a hipotenusa BC. Chamaremos o segmento de reta AH de altura relativa a hipotenusa.

Considere ABC um triângulo retângulo, reto em $\hat{A}$. De acordo com as definições 3.1, 3.2 e 3.3, os elementos de um triângulo retângulo são:

- $\overline{BC} = a$ é a medida hipotenúsa;
- $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ são as medidas dos catetos;
- $\overline{AH} = h$ é a medida da altura relativa a hipotenusa;

Figura 9 – **Elementos do triângulo retângulo** ABC



Fonte: produzida pelo autor.

- $\overline{BH} = n$ e $\overline{HC} = m$ são, respectivamente, as medidas das projeções de $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ sobre a hipotenusa.

Usaremos os elementos citados anteriormente para o enunciado e a demonstração dos dois próximos resultados.

Proposição 3.1. *Seja ABC um triângulo retângulo, reto em $\hat{A}$, onde a hipotenusa mede a, m e n são as medidas das projeções dos catetos b e c, respectivamente, e h é a altura relativa a hipotenusa. Valem as seguintes propriedades:*

P1. A medida da hipotenusa é igual a soma das projeções dos catetos;

P2. O quadrado do cateto é igual ao produto da sua projeção pela hipotenusa;

P3. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a hipotenusa;

P4. O quadrado da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos.

Demonstração. Considere a Figura 9. Note que $a = \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = n + m$

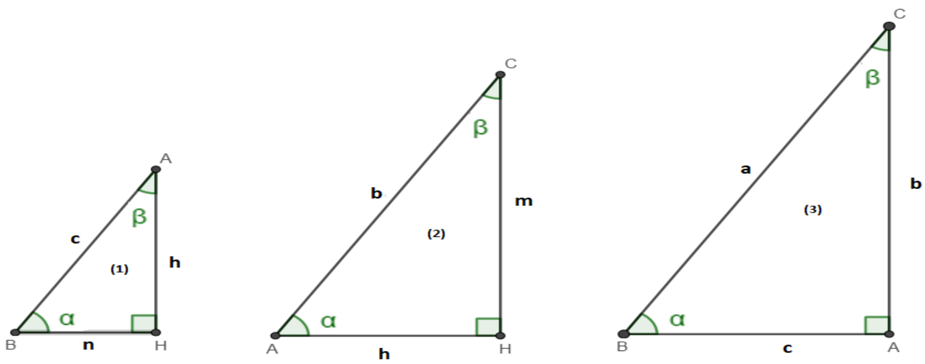
Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos

$$\angle BAH + \alpha + 90^o = 180^o \quad \text{e} \quad \angle CAH + \beta + 90^o = 180^o$$

Daí, segue que $\angle BAH = \beta$ e $\angle CAH = \alpha$.

Pelo triângulo ABC, Figura 9, segue que os triângulos HBA e HAC são semelhantes a ABC.

Figura 10 – **Triângulos retângulos** ABC**,** HAC **e** HBA



Fonte: produzida pelo autor.

Segue da semelhança entre os triângulos HBA e ABC:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad \frac{c}{h} = \frac{a}{b}.$$

Logo, $bc = ah$ e $c^2 = an$.

Segue da semelhança entre os triângulos HAC e ABC:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \ .$$

Logo, $b^2 = am$.

Por fim, pela semelhança entre os triângulos HAC e HBA, obtemos:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}.$$

Logo, $h^2 = mn$. □

Observação 3.1. Perceba que a propriedade 3 da proposição anterior pode facilmente ser provada a partir da expressão que calcula a área de um triângulo.

Teorema 3.1. *(Pitágoras). Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC, como na Figura 9, cujos catetos medem b e c, as projeções medem, respectivamente, m e n, a hipotenusa mede a e a altura relativa a hipotenusa mede h. Queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Pela Proposição 3.1, propriedades 1 e 2, sabemos que $a = m + n$, $b^2 = am$ e $c^2 = an$. Somando $b^2 + c^2$, temos

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = aa = a^2$$

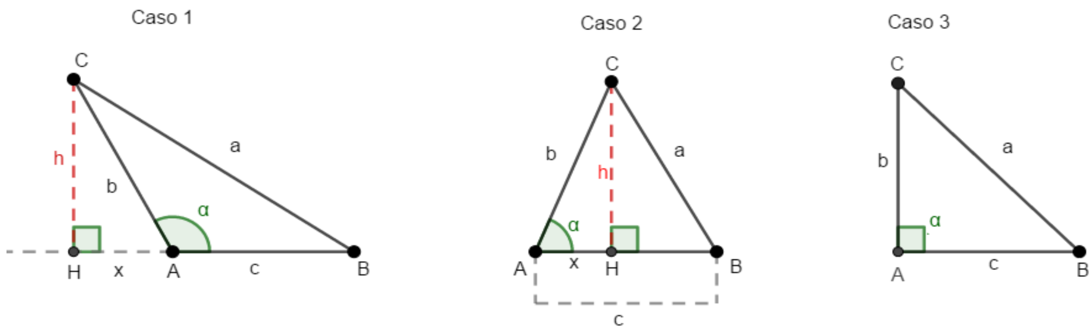
□

Teorema 3.2. *(Recíproca do teorema de Pitágoras). Se a, b e c são lados de um triângulo ABC, com $a > b$, $a > c$ e $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo ABC é retângulo.*

Demonstração. Para provarmos tal resultado, usaremos a seguinte tricotomia:

1. O triângulo ABC é obtusângulo;
2. O triângulo ABC é acutângulo;
3. O triângulo ABC é retângulo.

Figura 11 – **Casos possíveis para o triângulo ABC com relação ao ângulo α.**



Fonte: produzida pelo autor.

Caso 1. Suponhamos que $90^o < \alpha < 180^o$ e traçamos a altura relativa ao lado AB. Aplicando o teorema de pitágoras em ACH e BCH, obtemos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ (i)} \quad \text{e} \quad a^2 = (c+x)^2 + h^2 \text{ (ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2cx$$

Como $2cx > 0$ e, portanto, $a^2 > a^2 - 2cx$, segue que

$$a^2 > b^2 + c^2$$

Caso 2. Suponhamos que $0^o < \alpha < 90^o$ e traçamos a altura relativa ao lado AB. Aplicando o teorema de pitágoras em ACH e BCH, obtemos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ (iii)} \quad \text{e} \quad a^2 = (c-x)^2 + h^2 \text{ (iv)}$$

Análogo ao caso 1, substituindo (iii) em (iv), obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$$

Como $2cx > 0$ e, consequentemente, $a^2 + 2cx > a^2$, segue que

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Os casos 1 e 2 não satisfazem a igualdade procurada. Logo, pela tricotomia, segue o caso 3 é o que satisfaz a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$. $\square$

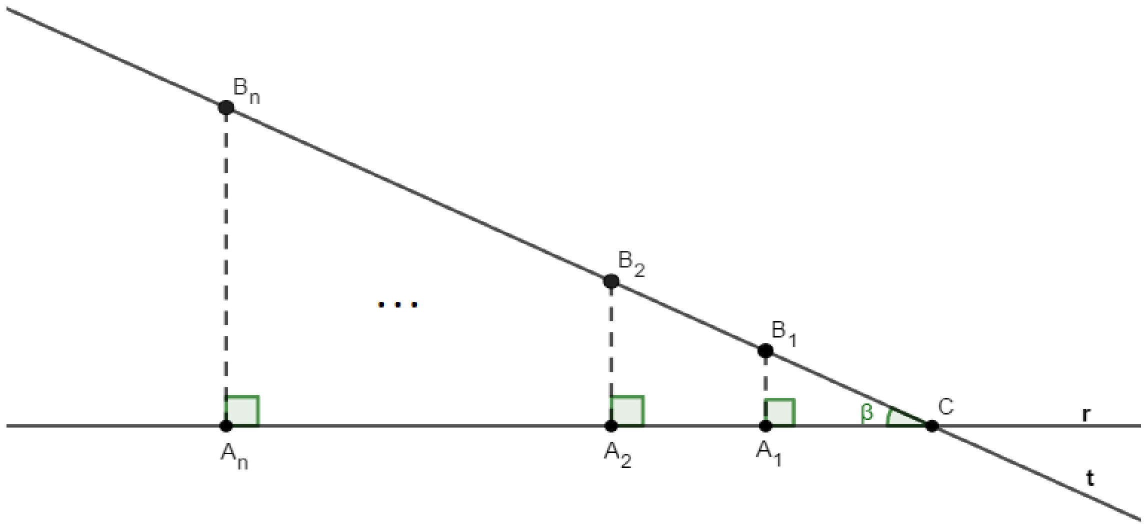
Observação 3.2. (Consequência do teorema de Pitágoras). Se l é a medida do lado de um quadrado e de um triângulo equilátero, temos que as medidas da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero são, respectivamente, $l\sqrt{2}$ e $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

3.2 Razões trigonométricas

Nesta seção serão apresentados alguns resultados referentes as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Deste modo, será utilizado como principal referência o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo".

Sejam r e t duas retas concorrentes, de modo que $C = r \cap t$. Sobre t fixamos os pontos $B_1, \ B_2, \ ..., \ B_n$ todos distintos e não coincidem com C. Em cada um desses pontos B_i, com $i \in \{1, \ 2, \ ..., \ n\}$, projetamos sobre r os pontos $A_1, \ A_2, \ ..., \ A_n$, de modo que $\angle B_iCA_i = \beta$, $\overline{B_iC} = a_i$, $\overline{A_iC} = b_i$ e $\overline{B_iA_i} = c_i$.

Figura 12 – n **triângulos retângulos**



Fonte: produzida pelo autor.

Perceba que, para todo $i, j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, os triângulos A_iB_iC e A_jB_jC são semelhantes, basta observar a correspondência $A_i \longleftrightarrow A_j$, $B_i \longleftrightarrow B_j$ e $C \longleftrightarrow C$. Daí, segue que

$$\frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j}, \quad \frac{c_i}{a_i} = \frac{c_j}{a_j} \quad \text{e} \quad \frac{c_i}{b_i} = \frac{c_j}{b_j}.$$

Essas razões independem do triângulo considerado, mas dependem de β. Então, faz sentido classificarmos os catetos de acordo com sua posição relativa ao ângulo β e atribuir nomes para as razões citadas anteriormente.

Definição 3.5. Considere o triângulo retângulo A_iB_iC, reto em $\hat{A}_i$, e $\angle B_iCA_i = \beta$. Dizemos que $\overline{B_iA_i}$ e $\overline{A_iC}$ são, respectivamente, cateto oposto e cateto adjacente ao ângulo β.

Observação 3.3. Se olharmos para o ângulo $\alpha = \angle A_iB_iC$, temos que $\overline{B_iA_i}$ é cateto adjacente e $\overline{A_iC}$ é o cateto oposto a α.

Definição 3.6. Considere o triângulo retângulo A_iB_iC, reto em $\hat{A}_i$, e $\angle B_iCA_i = \beta$. Chamaremos de seno, cosseno e tangente do ângulo β e denotaremos como $sen\ \ \beta$, $cos\ \ \beta$ e $tg\ \ \beta$, respectivamente, as seguintes razões:

1. $sen\ \ \beta = \dfrac{medida\ \ do\ \ cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \beta}{hipotenusa}$;

2. $cos\ \ \beta = \dfrac{medida\ \ do\ \ cateto\ \ adjacente\ \ a\ \ \beta}{hipotenusa}$;

3. $tg\ \ \beta = \dfrac{medida\ \ do\ \ cateto\ \ oposto\ \ a\ \ \beta}{medida\ \ do\ \ cateto\ \ adjacente\ \ a\ \ \beta}$;

Observação 3.4. Como consequencia da definição, temos que $tg\ \beta = \dfrac{sen\ \ \beta}{cos\ \beta}$.

Proposição 3.2. *(Relação Fundamental da trigonometria). Considere o triângulo retângulo ABC, reto em Â, e $\alpha < 90^o$ um dos seus ângulos internos. Vale a seguinte igualdade:*

$$sen^2\ \ \alpha + cos^2\ \ \alpha = 1.$$

Demonstração. Suponha que b é a medida do cateto adjacente e c medida do cateto oposto a α. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Por outro lado, sabemos que $cos\ \ \alpha = \dfrac{b}{a}$ e $sen\ \ \alpha = \dfrac{c}{a}$.

Com isso,

$$\begin{aligned} sen^2\ \ \alpha + cos^2\ \ \alpha &= \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \\ &= \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

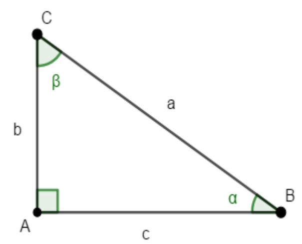
Logo, $sen^2\ \ \alpha + cos^2\ \ \alpha = 1$. □

Proposição 3.3. *Se α e β são ângulos complementares, então*

1. $sen\ \ \alpha = cos\ \ \beta$ *e* $cos\ \ \alpha = sen\ \ \beta$;
2. $tg\ \ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \ \beta}$.

Demonstração. Considere o triângulo ABC, reto em Â:

Figura 13 – **Triângulo retângulo** ABC



Fonte: produzida pelo autor.

Inicialmente, note que $\alpha + \beta = 90^o$. Pela Definição 3.6, temos que

$$sen\ \ \alpha = \frac{b}{a} = cos\ \ \beta$$

Analogamente, pela Definição 3.6, segue que $sen \quad \beta = \frac{c}{a} = \cos \quad \alpha$.

Por outro lado, dividindo $sen \quad \alpha = cos \quad \beta$ por $cos \quad \alpha$, temos

$$\frac{sen \quad \alpha}{cos \quad \alpha} = \frac{cos \quad \beta}{cos \quad \alpha}$$

Como $\frac{sen \quad \alpha}{\cos \quad \alpha} = tg \quad \alpha$ e $sen \quad \beta = \cos \quad \alpha$, segue que

$$tg \quad \alpha = \frac{cos \quad \beta}{sen \quad \beta} = \frac{1}{tg \quad \beta}.$$

□

3.2.1 Ângulos notáveis

A tabela a seguir mostra os ângulos mais utilizados, a princípio, em problemas envolvendo razões trigonométricas. Faremos a demonstração de alguns deles.

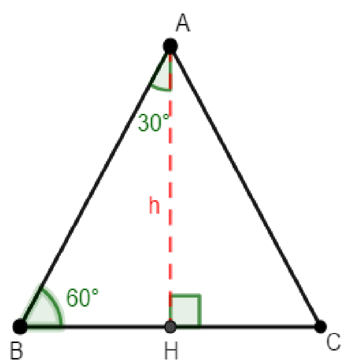
Tabela 2 – **Razões trigonométricas de ângulos notáveis**

	30^o	45^o	60^o
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Considere o triângulo equilatero ABC de lado l e sua altura $\overline{AH} = h$ relativa ao lado BC.

Figura 14 – **Triângulo equilatero de lado** l



Fonte: produzida pelo autor.

Como o triângulo ABC é equilátero, a bissetriz, mediana e a altura de coincidem. Daí, segue que $\angle HAC = \angle HAB = 30^o$ e $\overline{BH} = \overline{HC} = \dfrac{l}{2}$ e, pelo teorema de Pitágoras, $h = \overline{AH} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

Então,

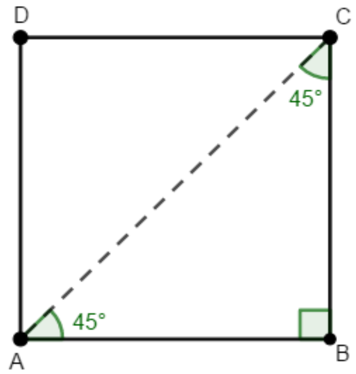
$$sen\ \ 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad sen\ \ 60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como 30^o e 60^o são ângulos complementares, pela Proposição 3.3, segue que

$$cos\ \ 30^o = sen\ \ 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad cos\ \ 60^o = sen\ \ 30^o = \frac{1}{2}.$$

Para verificar o caso do $cos\ \ 45^o = sen\ \ 45^o$, considere o quadrado $ABCD$ de lado l e diagonal $\overline{AC} = l\sqrt{2}$.

Figura 15 – **Quadrado de lado** l



Fonte: produzida pelo autor.

Como o triângulo ABC é isósceles, segue que $\angle BAC = \angle BCA = 45^o$.

Então,

$$cos\ \ 45^o = sen\ \ 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como sugestão, para determinar a tangente dos ângulos notáveis, basta usar o fato da Observação 3.4.

3.3 Áreas de figuras planas

Para esta seção, é necessário que o leitor tenha um conhecimento prévio sobre algumas figuras planas, como o triângulo, retângulo, losango, trapézio, circunferência e polígonos regulares[1].

[1] São chamados polígonos regulares aqueles que satisfazem duas propriedades: são equiláteros e equiângulos.

Diante disso, serão utilizados como principais referências "A Conquista da Matemática"(6^o ao 9^o ano) e o material teórico do Portal do Saber, módulo de "Áreas de Figuras Planas".

Nosso objetivo é deduzir as fórmulas que expressem a área de algumas figuras planas convexas através de suas dimensões. Para esta seção usaremos o metro como unidade de medida padrão.

Definição 3.7. Sejam $A_1,\ \ A_2,\ \ ...,\ \ A_n$ vértices de um polígono convexo. Denotaremos a área do polígono como $Area(A_1A_2...A_n)$.

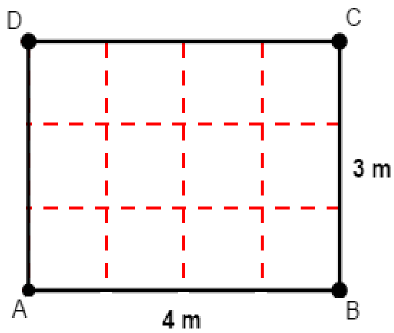
Definição 3.8. Dizemos que a área de um quadrado de lado 1 m é igual a 1 m^2.

Enunciaremos e, a partir da definião 3.8, trateremos de alguns casos particulares para deduzir a expressão que calcula a área do retângulo.

Proposição 3.4. *Se $ABCD$ é um retângulo, tal que suas dimensões são $\overline{AB} = b$ e $\overline{BC} = h$, então $Area(ABCD) = b \cdot h$.*

Caso 1: Medidas inteiras. Considere $b = 4$ m e $h = 3$ m. A partir de cada vértice, traçamos retas perpendiculares aos lados a cada 1 m. Veja a figura a seguir:

Figura 16 – **Retângulo de dimensões 4 m e 3 m**



Fonte: produzida pelo autor.

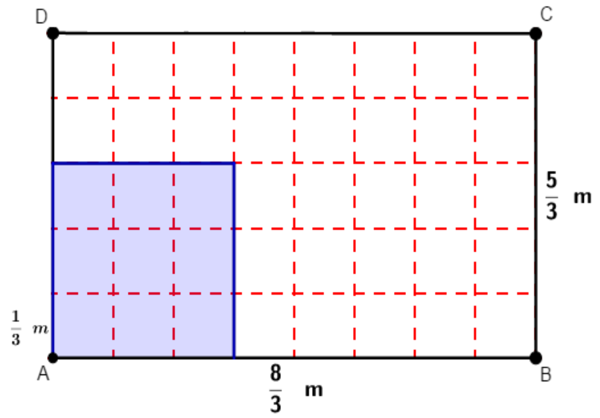
Sendo assim, o retângulo $ABCD$ foi dividido em $4 \cdot 3 = 12$ quadrados de lado igual a 1 m. Observe que a área do retângulo é igual a soma das áreas dos 12 quadrados unitários. Pela Definição 3.8, segue que $Area(ABCD) = 12 \cdot 1$ m$^2 = 4 \cdot 3 = 12$ m^2.

Para calcular a área de um retângulo tenha medidas inteiras b e h, seguindo a ideia anterior, encontramos $Area(ABCD) = b \cdot h$ m^2.

Caso 2: Medidas racionais. Considere $b = \dfrac{8}{3}$ m e $h = \dfrac{5}{3}$ m. A partir de cada vértice, podemos traçar retas perpendiculares de modo que b e h sejam divididos em 8 e 5 partes iguais, respectivamente. Note que no retângulo $ABCD$ há 40 quadrados de lado igual a $\dfrac{1}{3}$ m.

Assim, devemos escrever a área do quadrado de lado $\frac{1}{3}$ m em função da área do quadrado unitário da Definição 3.8. A figura a seguir é o esboço da situação dada:

Figura 17 – **Retângulo de dimensões $\frac{8}{3}$ m e $\frac{5}{3}$ m**



Fonte: produzida pelo autor.

De acordo com a Figura 17, a área do quadrado unitário, em azul, é igual a área de 9 quadrados de lado $\frac{1}{3}$. Assim, temos que a área do quadrado de lado igual a $\frac{1}{3}$ é igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ m^2.

Por fim, a área do retângulo $ABCD$ é dado por

$$Area(ABCD) = 40 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{9} \text{ m}^2.$$

Para quaisquer racionais $b = \frac{p}{q}$ e $h = \frac{m}{n}$, seguindo as ideias anteriores, encontramos que

$$Area(ABCD) = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} \text{ m}^2.$$

Em retângulos cujos lados são medidas irracionais, a ideia é aproximar a área por números racionais para concluir que, ainda neste caso, a área do retângulo $ABCD$ é igual ao produto dos lados não paralelos, isto é, $Area(ABCD) = b \cdot h$.

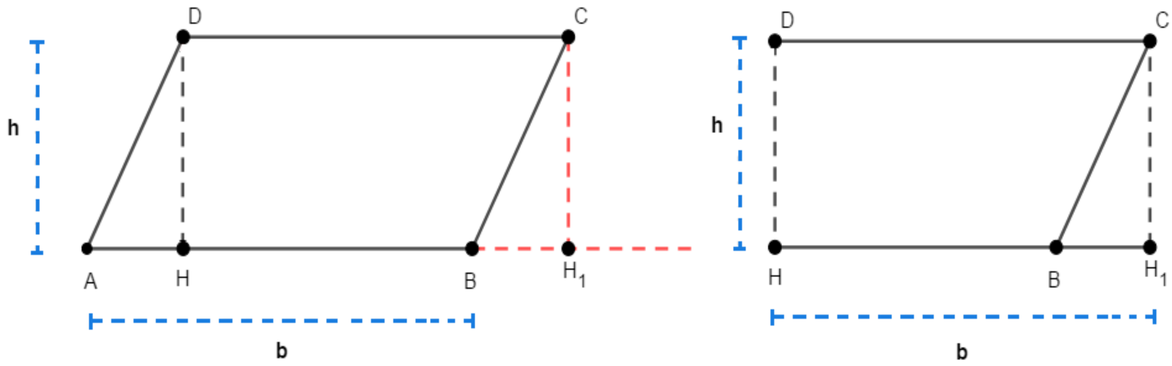
Observação 3.5. Podemos determinar outras unidades de medida de área. Como exemplo, lembre que 1 m = 100 cm. Assim, análogo ao caso 1 da Proposição 3.4, temos que a área do quadrado de lado igual a 1 m $^2 = 100^2$ cm^2.

Observação 3.6. Como todo quadrado de lado l é um retângulo, pela Proposição 3.4, segue que a área do quadrado é igual a $l \cdot l = l^2$.

3.3.1 Área do paralelogramo

Agora calcularemos a área do paralelogramo $ABCD$, cuja base mede $\overline{AB} = b$ e a altura $\overline{DH} = \overline{CH_1} = h$.

Figura 18 – **Paralelogramo e retângulo com mesma área.**



Fonte: produzida pelo autor.

No paralelogramo, note que projetamos sobre a reta suporte ao lado AB as projeções H_1 e H dos vértices C e D, respectivamente. Assim, segue que os segmentos $\overline{DH}$ e $\overline{CH_1}$ são perpendiculares ao lado AB.

Além disso, como $AD \parallel BC$, temos que $\angle DAH = \angle CBH_1$. Pelo caso LAA_o, os triângulos retângulos DAH e CBH_1 são congruentes. Com isso,

$$Area(DAH) = Area(CBH_1).$$

Observando a Figura 18, temos que

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= Area(DAH) + Area(BCDH) \\ &= Area(CBH_1) + Area(BCDH) \\ &= Area(CDHH_1) \end{aligned}$$

Por fim, como $CD \parallel HH_1$ e $DH \parallel CH_1$ e os lados opostos são congruentes (verifique), $CDHH_1$ é um retângulo.

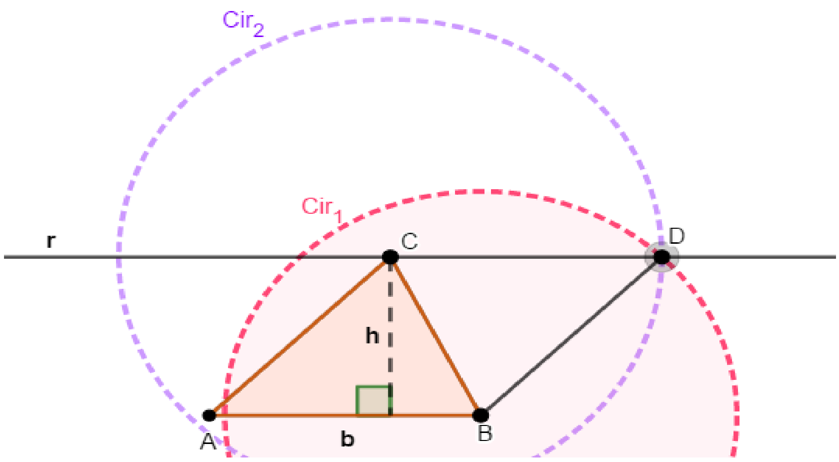
Logo, pela Proposição 3.4, $Area(ABCD) = Area(CDHH_1) = b \cdot h$.

3.3.2 Área do triângulo

A partir do que vimos na subseção anterior, determinaremos a área de um triângulo qualquer.

Considere o triângulo ABC, com $\overline{AB} = b$ e a sua altura relativa medindo h, conforme a figura a seguir. Traçamos uma reta r passando por C de modo que ela seja paralela ao lado AB. Em seguida, traçamos duas circunferências: Cir_1, centrada no vértice B e raio é igual a medida lado AC, e Cir_2, centrada no vértice C e raio é igual a medida do lado AB. Fixamos o ponto de interseção entre as circunferências e a reta r, seja D esse ponto. Veja o esboço da situação a seguir.

Figura 19 – **Área de um triângulo qualquer.**



Fonte: produzida pelo autor.

Pela construção feita anteriormente, observe que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DCB, pelo caso LLL. Além disso, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, pois seus lados opostos são congruentes e paralelos. Para provar que os lados AC e BD são paralelos, basta notar que $\angle CAB = \angle CDB$.

Observando a Figura 19, temos que

$$Area(ABCD) = Area(ABC) + Area(DCB)$$

Como os triângulos ABC e DCB são congruentes, segue que $Area(ABC) = Area(DCB)$. Com isso,

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= 2 \cdot Area(ABC) \\ &= 2 \cdot Area(ABC) \end{aligned}$$

Logo,

$$Area(ABC) = \frac{Area(ABCD)}{2} = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Observação 3.7. Lembre que o triângulo tem três alturas, cada uma relativa a um dos lados. A ideia usada anteriormente pode ser reproduzida usando as alturas relativas aos outros dois lados. Como consequência imediata da área de um triângulo, se $a,\ \ b$ e c são as medidas dos lados de um triângulo e $h_a,\ \ h_b$ e h_c, respectivamente, suas alturas relativas, então vale o seguinte resultado:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c.$$

Proposição 3.5. *Dado um triângulo ABC, com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\angle BAC = \beta$, então*

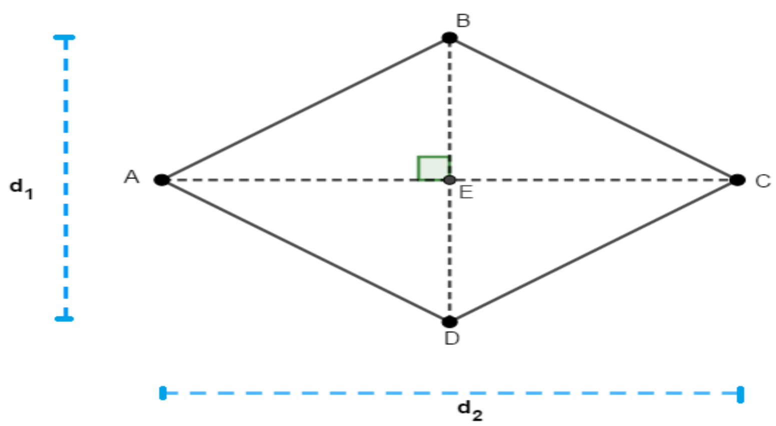
$$Area(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot sen\ \ \beta}{2}.$$

3.3.3 Área do losango

Como aplicação direta da área de triângulos, exibiremos um método de calcular a área do losango. Para isso, lembre que todos os lados do losango são congruentes.

Traçaremos as suas duas diagonais, cujas medidas são $\overline{BD} = d_1$ e $\overline{AC} = d_2$. Veja a figura a seguir.

Figura 20 – **Área de um triângulo qualquer.**



Fonte: produzida pelo autor.

Note que E é o ponto de interseção das diagonais do losango e é ponto médio delas. Além disso, os triângulos ADC e ABC são congruentes, pelo caso LLL.

Como os triângulos ADC e ABC são isósceles e E é o ponto médio de BD, temos que a altura dos triângulos com relação a base AC é igual a $\dfrac{d_1}{2}$.

Daí, segue que

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= Area(ADC) + Area(ABC) \\ &= 2 \cdot Area(ADC) \\ &= 2 \cdot \frac{d_2 \cdot \frac{d_1}{2}}{2} \end{aligned}$$

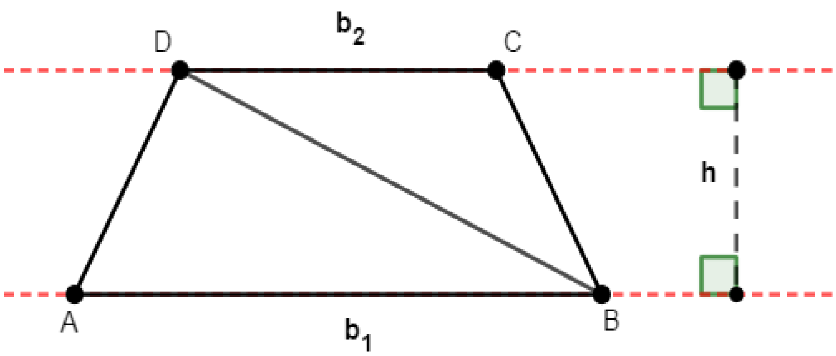
Logo,

$$Area(ABCD) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

3.3.4 Área do trapézio

Considere o trapézio ABCD, onde os lados AB e CD são paralelos e medem, respectivamente, b_1 e b_2. A distância entre os lados paralelos do trapézio mede h. Traçamos o segmento de reta BD, conforme a figura a seguir.

Figura 21 – **Área de um trapézio.**



Fonte: produzida pelo autor.

Pela Figura 21, temos que

$$Area(ABCD) = Area(ABD) + Area(BCD)$$

Observe que os triângulos ABD e BCD tem mesma altura com relação as bases b_1 e b_2, respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} Area(ABCD) &= \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \\ &= \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Observação 3.8. É comum chamarmos b_1 de base maior e representamos por B e b_2 de base menor e representamos por b. Aqui, não usamos essa notação para evitar a confusão entre B medida e B vértice.

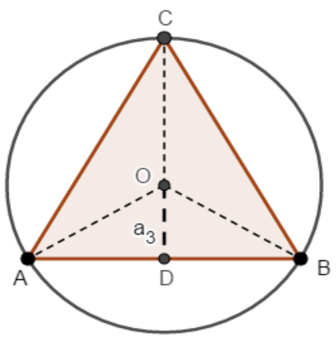
3.3.5 Área de polígonos regulares

Nesta subseção apresentaremos como calcular a área de qualquer polígono regular em função do seu apótema[2] e do semiperímetro[3]. Aqui, expressaremos l_n como a medida do lado, p_n o semiperímetro e a_n a medida do apótema do polígono regular de n lados.

Em todos os casos, trataremos de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência centrada em O e de raio r.

Começaremos com o caso $n = 3$, isto é, o triângulo equilátero.

Figura 22 – **Área de um triângulo equilátero.**



Fonte: produzida pelo autor.

Pela Figura 22, observamos que os triângulos OAB, OAC e OBC são congruentes, pelo caso LLL. Consequentemente,

$$Area(OAB) = Area(OAC) = Area(OBC) = \frac{l_3 \cdot a_3}{2}.$$

Como $Area(ABC) = 3 \cdot Area(OAB)$ e $p_3 = \dfrac{3 \cdot l_3}{2}$, segue que

$$Area(ABC) = 3 \cdot \frac{l_3 \cdot a_3}{2} = p_3 \cdot a_3.$$

Observação 3.9. Como $\angle OAB = 30^o$ e $\overline{AD} = \dfrac{l_3}{2}$, segue que

[2] É a distância do centro do polígono regular até um de seus lados.

[3] Metade do perímetro.

$$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a_3}{\frac{l_3}{2}}.$$

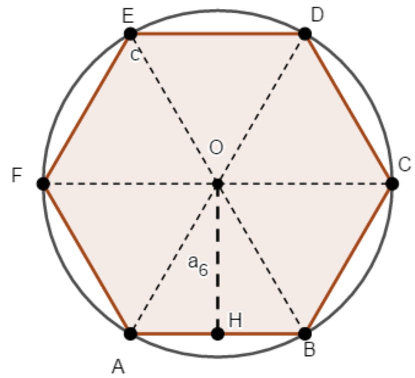
Logo, $a_3 = \dfrac{l_3\sqrt{3}}{6}$.

Com isso, podemos escrever a área do triângulo equilátero ABC como

$$Area(ABC) = p_3 \cdot a_3 = \frac{(l_3)^2\sqrt{3}}{4}.$$

Para o caso $n = 6$, considere a figura a seguir.

Figura 23 – **Área de um hexagono regular.**



Fonte: produzida pelo autor.

Novamente, observamos que podemos dividir o hexagono em 6 triânglos congruentes, com base l_6 e altura a_6. Calculando a área do hexagono cujo semiperímetro é dado por $p_6 = \dfrac{6 \cdot l_6}{2}$, temos

$$Area(ABCDEF) = 6 \cdot Area(OAB) = 6 \cdot \frac{l_6 \cdot a_6}{2} = p_6 \cdot a_6.$$

Observação 3.10. Há outra maneira de calcular a área do hexagono. Note que OAB é um triângulo equilátero, com $l_6 = r$. De acordo com a Observação 3.9, a área de um triângulo equilátero de lado l é calculada pela expressão $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Com isso, segue que

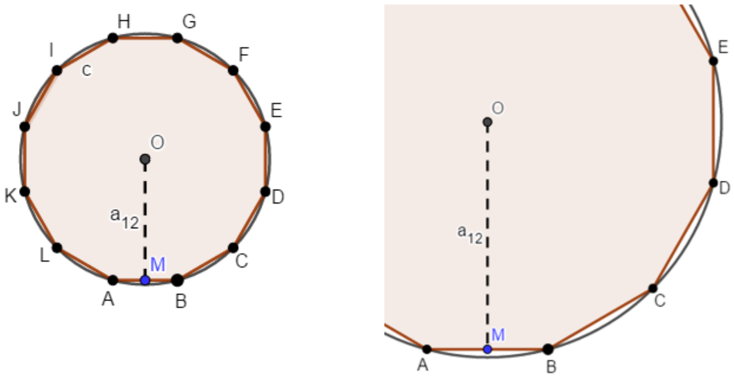
$$Area(ABCDEF) = 6 \cdot Area(OAB) = 6 \cdot \frac{(l_6)^2\sqrt{3}}{4}.$$

O argumento apresentado anteriormente para os casos $n = 3$ e $n = 6$ podem ser reproduzidos para um polígono de n lados, com $n \geq 3$.

3.3.6 Área da circulo

Antes de enunciar a área da circunferência, observe a figura a seguir.

Figura 24 – **Dodecágono regular inscrito em uma circunferência de raio r.**



Fonte: produzida pelo autor.

Seja $n \geq 3$ o número de lados de um polígono regular. Observando as Figuras 22, 23 e 24, o perímetro do polígono se aproxima do comprimento da circunferência $2\pi r$ à medida que n aumenta, assim como a_n se aproxima do raio r da circunferência.

Então, a área do polígono de n lados, dada por $p_n \cdot a_n$, se aproxima da área do círculo à medida que n aumenta. Sendo assim, a área do círculo é dada por

$$\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

4 BANCO DE QUESTÕES

4.1 Números reais

Nesta seção, teremos questões dos temas 1, 2 e 3 dos conteúdos programáticos.

1. Calcule o MMC e o MDC dos seguintes números abaixo:

   a) (60, 72)

   b) (20, 80)

   c) (21, 7, 14,28)

   d) (2, 14, 20, 30)

   e) (50, 30)

2. Dada à fração, diga que número decimal ela representa:

   a) $\frac{45}{10}$

   b) $\frac{869}{1000}$

   c) $\frac{126}{100}$

   d) $\frac{96}{110}$

   e) $\frac{1}{9}$

   f) $\frac{12}{90}$

   g) $\frac{9}{99}$

   h) $\frac{15}{45}$

3. Quando possível, encontre as frações irredutíveis da questão anterior.

4. Transforme as seguintes dízimas em frações:

   a) 0,333...

   b) 0,070707...

   c) 1,666...

   d) 1,2555...

   e) 0,252525...

f) 0,123123123...

5. Transforme os seguintes decimais em frações, simplificando quando possível.

a) $0,35$

b) $1,5$

c) $0,08$

d) $0,1515$

e) $0,31$

f) $0,4$

g) $0,3$

6. Resolva as seguintes operações com frações, simplificando quando possível:

a) $\frac{5}{10}+2$

b) $\frac{8}{3}+\frac{3}{8}-1$

c) $\frac{7}{5}-3$

d) $\frac{4}{16}-\frac{45}{8}$

e) $\frac{5}{17}\cdot\frac{34}{40}$

f) $\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{20}$

g) $\frac{4}{\frac{10}{15}}$

h) $\frac{\frac{15}{4}}{8}$

i) $\frac{\frac{2}{4}}{\frac{7}{8}}$

7. Três pessoas partem simultaneamente de um mesmo ponto e, andado, contornam uma pista que circunda um jardim. Uma dessas pessoas dá uma volta completa em 12 minutos, outra, andando mais devagar, leva 20 minutos para completar a volta e, por fim, a mais rápida completa a volta em 10 minutos. Depois de quantos minutos essas três pessoas voltarão a se encontrar no mesmo ponto de partida?

8. **(IFCE, 2020)** Um relógio A bate a cada 15 minutos, outro relógio B bate a cada 25 minutos, e um terceiro relógio C a cada 40 minutos. Qual é, em horas, o menor intervalo de tempo decorrido entre duas batidas simultâneas dos três relógios?

9. A estação rodoviária de uma cidade é o ponto de partida das viagens intermunicipais. De uma plataforma da estação, a cada 15 minutos partem um ônibus da viação sol, com destino a cidade paraíso. Os ônibus da viação lua partem da plataforma vizinha cada 18 minutos, com destino a cidade porta do céu. Se, às 8 horas os dois ônibus partirem simultaneamente, a que os dois ônibus partirão juntos novamente?

10. Em uma gincana há 49 meninos e 63 meninas. Os organizadores decidem formar grupos só de meninos ou só de meninas, com a mesma quantidade de alunos e usando ao maior quando possível. Determine a quantidade de pessoas de cada grupo e quantos grupos foram formados ao todo.

11. Em certo país as eleições para presidente a cada 4 anos e para senador a cada 6 anos. Em 2012 essas eleições coincidiram. Quando essas eleições voltarão coincidirem novamente?

12. Uma bolo foi cortado em 24 pedaços iguais e distribuídos para 4 pessoas. Duas delas receberam $\frac{1}{4}$ do total das partes da torta, outra pessoa recebeu $\frac{1}{3}$ do total das partes da torta. Quantos pedaços recebeu a quarta pessoa?

13. Dada a fração

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{10}}},$$

simplifique-a transformando em uma fração irredutível.

14. **(CONED, 2009)** Tia Rossi comprou sacos de leite em pó por $R\$2,60$ a unidade. Dias depois, aproveitando uma promoção no Mercantil, comprou cinco unidades do mesmo produto por $R\$11,50$. Qual o desconto por unidade que a tia ganhou durante essa promoção?

15. Se o preço de meia centena de laranjas é $R\$47,50$, então quanto é o preço de três dezenas?

16. Qual o quociente de $10,24 \div 8$?

17. Das igualdades abaixo, julgue como verdadeiro ou falso:

a) $10 - 2 \cdot 4 = 32$

b) $4^2 + 2 = 19$

c) $\frac{5}{2} \div 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

d) $4,088 \cdot 10 - 1088 \div 10^2 = 30$

e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{100} = 5$

18. Do total de maçãs que tinha, um feirante vendeu $\frac{1}{2}$ de manhã e $\frac{2}{5}$ à tarde. As maçãs que sobraram correspondem a que fração desse total?

19. Dois amigos saboreiam petiscos da culinária alagoana num famoso barzinho da cidade. Enquanto o amigo A consome 3 unidades do petisco solicitado, o amigo B consome 2. A conta, no valor de $R\$225,00$, será dividida de acordo com o que cada um consumiu. Determine o amigo B cada um irá pagar.

20. Seis amigos, Lucas, Eduardo, Pedro, Ana, Júlia e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, Lucas andou $\frac{1}{7}$; Eduardo $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{2}{3}$; Júlia $\frac{8}{16}$ e Maria $\frac{11}{12}$. Quais são os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho? Quem está a frente de todos neste passeio?

21. Benizete gasta um sétimo do seu salário com alimentação, um sétimo com transporte e três quintos com a faculdade das filhas. Qual e o salário de Benizete, se descontadas essas despesas, ainda sobram $R\$640,00$ para sua poupança?

22. Determine o valor da expressão:

$$\frac{1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

23. Determine o valor da expressão $0,333...+\frac{7}{2}-\left(\frac{2}{3}-2\right)$.

4.2 Expressões numéricas e porcentagem

24. Calcule o valor das expressões numéricas:

a) $(12+2\cdot 5)-8$

b) $25-(15+6\div 3)$

c) $25+[7+(8-4\div 2)]^2$

d) $60-[8+(10-2)\div 2]^0$

e) $80-[22+(5\cdot 2-1)+6]$

f) $14\div 2+[13-(4\cdot 2+1)]$

g) $3-\{2+(11-15)-[5+(-3+1)]+8\}$

h) $9+\{2^{10}+(2^5-15)-[5+(-3^2+1)]^5+8\}^0$

25. Pratique:

    a) 15% de 300

    b) 80% de 1.200

    c) 9% de 5.000

    d) 31% de 2.500

    e) $2,5\%$ de 400

26. Um tênis é vendido por $R\$132,00$. Se seu preço fosse aumentado em 20%, quanto passaria a custar?

27. Certa mercadoria, que custava $R\$50,00$, passou a custar $R\$62,50$. Calcule a taxa percentual do aumento.

28. Ao comprar passágem aérea que custava $R\$1.500,00$, obtive um desconto de 14%. Por quanto acabei pagando o da passagem? Qual o valor do desconto obtido?

29. Um jogador de futebol, ao longo de um campeonato, cobrou 75 faltas, transformando em gols 8% dessas faltas. Quantos gols de falta esse jogador fez?

30. Qual o preço de uma mercadoria que custa $R\$50,00$ após dois aumentos de 25% e 20%, respectivamente?

31. Um carro, que custava $R\$45.000,00$, sofreu uma valorização (acréscimo) de $0,15\%$ sobre o seu preço. Quanto ele passou a custar?

32. **(FGV, 1995)** Em 01/03/06, um artigo que custava $R\$250,00$ teve seu preço diminuído em $p\%$ do seu valor. Em 01/04/06, o novo preço foi novamente diminuído em $p\%$ do seu valor, passando a custar $R\$211,60$. O preço desse artigo em 31/03/06 era:

    a) $R\$225,80$

    b) $R\$228,00$

    c) $R\$228,60$

    d) $R\$230,00$

    e) $R\$230,80$

33. O salário de Jonas é 75% do de Pedro. A diferença entre os salários é $R\$900,00$. O salário de Jonas é:

    a) $R\$2.500,00$

b) $R\$3.500,00$

c) $R\$3.000,00$

d) $R\$2.700,00$

e) $R\$3.600,00$

34. **(FUVEST-SP)** $(10\%)^2$ e $\sqrt{64\%}$ são equivalentes a:

a) 100% e 8%

b) 20% e 8%

c) 20% e 80%

d) 100% e 80%

e) 1% e 8%

35. Uma mercadoria sofreu dois aumentos sucessivos: um de 30% em janeiro e outro de 30% em fevereiro. O aumento no bimestre foi de:

a) 50%

b) 46%

c) 56%

d) 60%

e) 69%

36. Distribuímos 120 lápis entre as 20 crianças da 1ª série de uma escola. O número de lápis que cada criança recebeu corresponde a que porcentagem do total de lápis?

a) 5%

b) 10%

c) 15%

d) 20%

37. Seja $A = -1-(-5)\cdot(-3)+(-4)\cdot 3 \div (-4)$. O valor de A^2 é:

a) 0

b) -2

c) -13

d) 169

e) -169

38. O resultado da expressão numérica $\{[16-(4\div 4)]\div 3\}^2\cdot 2^3$ é:

    a) 6

    b) 8

    c) 150

    d) 200

39. Devido à alta do dólar, certo produto teve um aumento de 25% em uma determinada loja. Com a crise econômica e baixa nas vendas, o proprietário da loja resolve vender o produto pelo mesmo valor que era vendido antes da alta do dólar. Então, ele deverá dar um desconto de:

    a) 35%

    b) 25%

    c) 30%

    d) 20%

    e) 15%

40. Um carro possui capacidade máxima de 60 litros no tanque de combustível. Com quantos litros deve-se abastecer de gasolina esse carro para que fique com 60% de sua capacidade máxima, sabendo-se que ele possui 10 litros de gasolina do tanque?

    a) 16

    b) 18

    c) 22

    d) 26

    e) 36

41. Um caixa contém 40 bolas, sendo 16 bolas brancas, 14 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Qual a porcentagem de bolas vermelhas nessa caixa?

    a) 20%

    b) 25%

    c) 30%

    d) 35%

    e) 40%

42. Uma determinada escola paga para seu diretor o salário de $R\$2.000,00$ e para os professores o de $R\$1.200,00$ em 2017. Nas negociações trabalhistas, o salário do diretor, em 2018, será de $R\$2.400,00$. Sabendo que o salário dos professores será reajustado na mesma proporção, qual será o salário dos professores em 2018?

    a) $R\$1.260,00$

    b) $R\$1.370,00$

    c) $R\$1.380,00$

    d) $R\$1.420,00$

    e) $R\$1.440,00$

43. O salário mínimo deverá saltar para $R\$937$ a partir de janeiro de 2017, conforme previsão da Lei de Diretrizes Orçamentárias (LDO) de 2018. Considerando que o salário mínimo do ano anterior é de $R\$880,00$, a LDO prevê um aumento no salário mínimo nacional situado entre:

    a) 3% e 4%.

    b) 4% e 5%.

    c) 5% e 6%.

    d) 6% e 7%.

    e) 7% e 8%.

44. A superfície do nosso planeta é constituída de 30% de terra e 70% de água. Um terço da terra é pastagem, floresta, ou montanha, e dois quintos da terra são desertos ou cobertos por gelo; o resto da terra é usado para o cultivo. Qual é o percentual da superfície total do nosso planeta que é usada para o cultivo?

    a) 8%

    b) 18%

    c) 12%

    d) 4%

    e) 6%

45. Quanto vale 1% da centésima parte de meia dúzia?

    a) $\frac{6}{10}$.

    b) $\frac{6}{100}$.

c) $\dfrac{6}{10000}$.

d) $\dfrac{6}{1000}$.

e) 6^2.

46. Dentre as sentenças matemáticas abaixo, indique verdadeiro (V) e falso (F):

a) $0,225 > 0,23$

b) $0,5 \leq 0,50$

c) $0,5 \times 0,2 = 1$

d) $0,4 < \frac{5}{10} < 0,6$

4.3 Regra de três, razão e proporção

47. Na construção civil, geralmente se usa, como unidade de medida, uma lata de 18 litros. Para produzir 40 latas de concreto, um operário colocou 4 latas de cimento, 16 de areia e 20 de brita. As razões entre a quantidade de cimento e brita e a quantidade de areia e brita são, respectivamente:

a) $\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{4}{5}$

d) $\dfrac{4}{5}$ e $\dfrac{1}{5}$

e) $\dfrac{5}{1}$ e $\dfrac{5}{4}$

48. Se $\dfrac{a}{4-a} = \dfrac{b}{5-b} = \dfrac{c}{7-c} = 3$, quanto vale $(a+b+c)^2$?

a) 144

b) 9

c) 81

d) 36

e) 196

49. Na alimentação de 02 bois, durante 08 dias, são consumidos 2420 kgs de ração. Se mais 02 bois são comprados, quantos quilos de ração serão necessários para alimentá-los durante 12 dias?

50. Em 06 dias de trabalho, 12 confeiteiros fazem 960 tortas. Em quantos dias 04 confeiteiros poderão fazer 320 tortas?

51. Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas já adquiridas seria suficiente para um numero de dias igual a quanto?

52. Um carro consumiu 50 litros de álcool para percorrer 600 km. Supondo condições equivalentes, esse mesmo carro, para percorrer 840 km, quanto o carro consumirá?

53. Numa corrida de Fórmula 1, um corredor dá uma volta na pista em 90 segundos com velocidade média de 210 km por hora. Se sua velocidade média cair para 180 km por hora, quanto tempo gasto para a mesma volta na pista?

54. Três máquinas imprimem 9.000 cartazes em uma dúzia de dias. Em quantos dias $\frac{8}{3}$ dessas máquinas imprimem $\frac{4}{3}$ dos cartazes, trabalhando o mesmo número de horas por dia?

55. Para esvaziar um compartimento com $700m^3$ de capacidade, 3 ralos levaram 7 horas para fazê-lo. Se o compartimento tivesse $500m^3$ de capacidade, ao utilizarmos 5 ralos, quantas horas seiram necessárias para esvaziá-lo?

56. **(VUNESP, 2011)** Em uma fábrica de cerveja, 34 funcionários trabalhando 7 horas por dia carregando 20 vans de transporte cada uma com 300 caixas de leite em pó. Para carregar $\frac{3}{5}$ dessas mesmas vans com 400 caixas do mesmo leite, 28 funcionários irão precisar trabalhar durante quantas horas?

57. 30 operários deveriam fazer um serviço em 40 dias. 13 dias após o início das obras, 15 operários deixaram o serviço. Em quantos dias ficará pronto o restante da obra?

58. Se 8 homens levam 12 dias montando 16 máquinas, então, nas mesmas condições, 15 homens montam 50 máquinas em quantos dias?

59. Uma blusa custa $R\$30,00$ e está na promoção com um desconto à vista de 20%. Qual será o preço dessa blusa?

60. Um relógio atrasa 1 min e 15 segundos a cada hora. Supondo que ele começa a atrasar a partir das 8h da manhã de uma segunda, quanto tempo ele irá atrasar para marcar as 8h da manhã do dia seguinte?

61. . O custo de uma mercadoria é $R\$4.500,00$ e a razão do lucro para o custo é $\frac{3}{4}$. Calcule o preço de venda desta mercadoria.

62. Um comerciante vende um produto por $R\$30.000,00$ e sabe-se que a razão do lucro para o preço de venda é $\dfrac{2}{6}$. Calcule o custo deste produto.

63. Um produto que custou $R\$8.000,00$ para um comerciante é vendido com um prejuízo de $R\$3.000,00$. Determine a razão do prejuízo para o preço de venda.

64. João e Eduardo montaram uma empresa de chocolates e investiram, respectivamente, capitais de $R\$50.000,00$ e $R\$30.000,00$. Em um determinado mês, a empresa obteve um lucro de $R\$32.000,00$. Quanto cada um deve receber?

65. João e Carlos associaram-se, aplicando capitais idênticos. No final de certo período, a sociedade apresentou um prejuízo de $R\$50.000,00$. Qual o prejuízo de cada um, se João aplicou seu capital por 3 meses e Carlos por 7 meses?

66. Três pessoas formam uma sociedade, permanecendo o primeiro durante 12 meses, o segundo durante 8 meses e o terceiro 6 meses. Quanto ganhou cada um, se a sociedade apresentou um lucro de $R\$5.200,00$.

67. Duas pessoas formaram uma sociedade comercial e combinaram que o lucro da firma seria dividido em partes diretamente proporcionais às quantias investidas por cada um na formação da sociedade. A primeira pessoa investiu $R\$20.000,00$ e a segunda $R\$30.000,00$. Sabendo que a sociedade rendeu $R\$15.000,00$, no final de um ano, calcule a parte desse lucro que caberá a cada sócio.

68. Dois sócios entram em um negócio com um capital de $R\$5.000,00$ e $R\$3.000,00$. No final obtêm um lucro de $R\$24.000,00$. Quanto caberá a cada um?

69. Três comerciantes formam uma sociedade em que o primeiro entrou com $R\$30.000,00$, o segundo $R\$20.000,00$ e o terceiro com $R\$50.000,00$. O primeiro permaneceu 12 meses, o segundo 9 meses e o terceiro 4 meses. Determinar o lucro de cada um, sabendo-se que o lucro total foi de $R\$37.000,00$.

70. Hugo, Jonas e Kelvin formaram uma sociedade cada um entrando com $R\$8.000,00$, $R\$24.000,00$ e $R\$16.000,00$, respectivamente. As operações sociais foram ótimas e obtiveram um lucro de $R\$64.000,00$. Qual foi a parte do lucro a ser distribuída para cada sócio?

4.4 Produtos notáveis, operações algébricas com polinômios, fatoração e valor numérico de uma expressão algébrica

71. Resolva os produtos notáveis:

    a) $(a+b)^2$

    b) $(a-b)^2$

    c) $(a+b)\cdot(a-b)$

    d) $(2x+3y)^2$

    e) $(kw+5)^2$

    f) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

72. Fatore as expressões algébricas:

    a) $x^2+2xy+y^2$

    b) $a^2-2ay+y^2$

    c) w^2-z^2

    d) $4w^2-4wz+z^2$

    e) $x^2+10x+25$

    f) $k^2-12k+36$

73. Resolva as seguintes operações algébricas para soma e subtração, quando possível:

    a) $5a+3b-2a+7b$

    b) $2x^2+y-x+2y^2$

    c) $13a^2+2a^3-3a^2$

    d) $5x^2+13x^3-13x$

    e) $b^2-b^3+12a-b$

74. Dados $P=a+b+c$; $Q=a^{\breve{}}b^{\breve{}}c$ e $R=a+b^{\breve{}}c$, determine:

    a) $2P+Q+R$

    b) $P+Q-3R$

    c) $P\cdot R$

d) $P - 6Q - R$

e) $Q \cdot R$

75. Dados $P = x^2 + a^2 - 2ax$ e $Q = 2x^2 + 5ax + 3a^2$, determine:

a) $2P + 3Q$ e seu valor numérico para $a = 10$ e $x = -4$.

b) $P\check{\ }Q$ e seu valor numérico para $a = -1$ e $x = 1$.

76. Coloque os termos em comum em evidência, quando possível:

a) $4x - 20$.

b) $m^2 + mn$.

c) $5x^2 + 25x$.

d) $ab^2 + 5ba^2 + a$.

e) $xy^2 + y^3$.

77. Transforme em uma única fração algébrica e simplifique quando possível:

a) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$, com x e y não nulos.

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, com a e b não nulos.

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y}$, com x e y não nulos.

d) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2y^2}$, com x e y não nulos.

e) $\frac{x+1}{x^2} + \frac{y+2}{y^2}$, com x e y não nulos.

78. Supondo que os denominadores são não nulos, simplifique as frações algébricas:

a) $\frac{9ab}{3ab}$

b) $\frac{3a^2b}{9ab}$

c) $\frac{24x^2y^3}{8xy}$

d) $\frac{27xy}{3x^2y^2}$

e) $\frac{x^2 - 25}{4x - 20}$

f) $\dfrac{w^2+2wz+z^2}{w^2-z^2}$

g) $\dfrac{w^2-2wz+z^2}{w^2-z^2}$

79. O valor da expressão $a^3-3a^2x^2y^2$, para $a=10$, $x=3$ e $y=1$, é:

a) 100

b) 50

c) 200

d) -150

e) -200

80. Se $A=\dfrac{x-y}{xy}$, $x=\dfrac{2}{5}$ e $y=\dfrac{1}{2}$, então A é igual a:

a) $-0{,}1$

b) 0,2

c) $-0{,}3$

d) 0,4

e) $-0{,}5$

81. O valor da expressão $\dfrac{a+b}{1-ab}+5$ para $a=\dfrac{1}{2}$ e $b=\dfrac{1}{3}$ é:

a) 0

b) 1

c) 6

d) 5

e) 3

82. O valor da fração $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$, quando a = 41 e b = 37, é:

a) 15,4

b) 16,2

c) 17,3

d) 19,5

83. Simplificando a expressão $\dfrac{x^2y - y^3}{x+y}$, obtemos:

a) $x - y^2$

b) $x^2 - y^2$

c) $xy + y^2$

d) $xy^2 + y$

84. Simplificando a expressão $\dfrac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - b^2}$, obtém-se:

a) 1

b) -1

c) $\dfrac{a+b}{a-b}$

d) $\dfrac{a-b}{a+b}$

85. Determine o valor da diferença de quadrados a seguir:

a) $2005^2 - 2004^2$

b) $5421^2 - 5420^2$

c) $9999^2 - 9998^2$

d) $1569^2 - 1560^2$

86. Simplifique a seguinte expressão de produtos notáveis: $(2x+y)^2 - (2x-y)^2 - 4xy$. Qual o resultado obtido?

a) 4xy.

b) 2xy.

c) 0.

d) -2xy.

e) -4xy

87. Determine o valor do produto $(3x+2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $xy = 2$.

a) 27.

b) 31.

c) 38.

d) 49.

e) 54.

88. Considere o sistema não linear: $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=\dfrac{15}{4} \end{cases}$. Então, o valor de x^2+y^2 é:

a) $\dfrac{11}{2}$

b) $\dfrac{13}{2}$

c) $\dfrac{15}{2}$

d) $\dfrac{17}{2}$

e) $\dfrac{19}{2}$

89. O valor da expressão $(1451^2-1449^2)\div 2$ é:

a) $\dfrac{1}{3}$.

b) $(1451-1449)^2$.

c) 2950664.

d) 2900.

e) 5800.

90. A expressão algébrica que representa a situação "o quadrado da soma de dois números, mais 5 unidades" é:

a) $x+y+5^2$

b) $(x+y+5)^2$

c) $(x+y)^2+5$

d) x^2+y+5^2

91. Fatorando $x^4+121+22x^2$, obtemos:

a) $(x+11)^2$

b) $(x+12)^2$

c) $(x^2+11)^2$

d) $(x^2+12)^2$

92. Se $(x-y)^2-(x+y)^2=-20$, então $x\cdot y$ é igual a:

a) 0

b) -1

c) 5

d) 10

93. Simplificando a expressão $\dfrac{x^2y-y^3}{x-y}$, obtemos:

a) $x-y^2$

b) x^2-y^2

c) $xy+y^2$

d) xy^2+y

94. Simplificando $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{b+\dfrac{1}{a}}$, obtém-se:

a) $\dfrac{a}{b}$

b) $\dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{a+1}{b}$

d) $\dfrac{b+1}{a}$

95. Se $x+y=8$ e $xy=15$, qual é o valor numérico da expressão algébrica $x^2+6xy+y^2$?

a) 109

b) 120

c) 124

d) 154

96. Sabendo que $x+\dfrac{1}{x}=3$, determine o valor de $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

97. Sendo $A = x+2$ e $B = x-2$, a expressão $A^2 + 2AB + B^2$ é equivalente a:

a) $x^2 + 4$

b) $x^2 - 4$

c) $x^2 + 8x + 8$

d) $x^2 + 8x - 4$

e) $2x$

98. A expressão $2x^2 - 4x + 5 - (x^2 + 2x - 4)$ equivale a:

a) $3x^2 - 2x + 1$.

b) $x^2 - 6x + 1$.

c) $(2x+1)^2$.

d) $x^2 - 6x + 9$.

e) $(x-2)^2 - (x+1)^2$.

99. O valor da expressão $\dfrac{a+b}{ab-1} - 3ab$, sendo a = 2 e b = 1, é:

a) 0

b) 1

c) -5

d) 6

100. Sejam x, y números reais, com $x + y = -16$ e $x \cdot y = 64$. O valor da expressão $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ é:

a) – 2.

b) – 1.

c) 0.

d) 1.

e) 2.

4.5 Equações e sistemas do 1º e 2º grau, inequações, problemas com interpretação

101. Resolva as equações do primeiro grau:

a) $5x-2(x+2)=2(3+x)$

b) $9x-3(x+2)=1+5(1+x)$

c) $\dfrac{2x-(x-1)}{5}=5-(x-3)$

d) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}=-3x+1$

e) $(x+3)^2=-(x-2)^2+5x$

f) $(x-8)(x+4)-9=(x-3)^2$

102. Resolva os sistemas do primeiro grau:

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ -x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=-y \\ 3y+x=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}=\dfrac{y}{2} \\ x-y=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=y-2 \\ x+2y=13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y=x+2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}=\dfrac{1}{2}y-2 \\ x+2y=4 \end{cases}$

103. Resolva as inequações abaixo no conjunto $U=\mathbb{Z}$

a) $2(x-4)+8>2$

b) $5(2+3x)\geq 10+x$

c) $2(x+1)-3(x+2)\leq 0$

104. Resolva as equações do segundo grau

a) $2x^2-32=0$

b) $2x^2+16=0$

c) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$

d) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 10 = 0$

e) $-x^2 - 5x - 6 = 0$

f) $x^2 - 8x + 7 = 0$

g) $x^2 - 4x + 4 = 0$

105. Determine a soma e o produto das raízes das equações do segundo grau, a seguir:

a) $x^2 - 10x + 9 = 0$

b) $x^2 - 4x = 0$

c) $x^2 - 4x + 3 = 0$

d) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

e) $-x^2 - 5x - 6 = 0$

106. A equação do 2º grau $x^2 - (k+1)x + 9 = 0$ assume as seguintes condições de existência dependendo do valor da variável k:

Duas raízes reais e distintas: $\Delta > 0$.

Duas raízes reais e iguais: $\Delta = 0$.

Nenhuma raiz real: $\Delta < 0$.

Para que a equação tenha raízes reais e iguais, qual deve ser o valor da variável k?

107. Determine o valor de k na equação $2x^2 + 2x + 5k = 0$ para que ela tenha raízes iguais.

108. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - 15x + 36 = 0$. Determine $x_1^2 + x_2^2$.

109. Determine o valor de k a equação $x^2 - 2x + k - 2 = 0$ para que a multiplicação das raízes seja igual a 5.

110. Se uma das raízes da equação $2x^2 - 3px + 40 = 0$ é 8, determine o valor de p.

111. Dada à equação $9x^2 + 12x + 2m = 0$, determine os possíveis valores de m para que a equação não possua raízes reais.

112. Resolva os sistemas de equações do segundo grau:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y-3x=1 \\ x^2-2xy=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 4xy=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-y=9 \\ -xy=-12 \end{cases}$

113. Qual o número que somado com seu quadrado resulta em 56?

114. O quadrado de um número menos o triplo do seu sucessivo é igual a 15. Qual é esse numero?

115. Classifique as afirmações em V (verdadeira) ou F (falsa)

I. Se o discriminante da equação é igual à zero, ela tem duas raízes reais e iguais.

II. Se o discriminante da equação é menor que zero, ela tem duas raízes reais diferentes.

III. Se o discriminante da equação é maior que zero, ela tem duas raízes reais e diferentes.

IV. Se o discriminante da equação é igual à zero, ela não tem raízes reais.

116. Existem três números inteiros consecutivos com soma igual a 393. Que números são esses?

117. Determine um número real a para que as expressões $\dfrac{3a+6}{8}$ e $\dfrac{2a+10}{6}$ sejam iguais.

118. Dada à equação $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{(x-10)}{8}=\dfrac{(x+1)}{4}$. Existe solução nos naturais?

119. A soma da minha idade, em fevereiro de 2011, com a idade do meu filho era 83 anos. Em fevereiro de 2012, eu terei o dobro da idade do meu filho, menos dois anos. Sabendo que eu nasci em janeiro, em que ano nasci?

120. Considere o sistema do 1º grau: $\begin{cases} x=y-4 \\ x+2y=14 \end{cases}$, então, quanto $2x-3y$ vale?

121. O pai de Andréa gosta muito de Matemática e montou um probleminha para expressar a idade de sua filha. "O dobro da diferença entre a idade de Andréa e cinco, mais a mesma idade, é igual a 11". Portanto, qual é a idade de Andréa?

122. Dois quintos do meu salário são reservados para o aluguel e a metade é gasta com alimentação, restando ainda $R\$45,00$ para gastos diversos. Qual é o meu salário?

123. Em um terreiro há galinhas e coelhos, num total de 13 animais e 46 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos há nesse terreno?

124. A soma de dois números é 20. Se o dobro do maior é igual ao triplo do menor, determine o quadrado da diferença desses dois números.

125. Cláudio usou apenas notas de $R\$20,00$ e de $R\$5,00$ para fazer um pagamento de $R\$140,00$. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 notas?

126. Num aquário há 8 peixes, entre pequenos e grandes. Se os pequenos fossem mais um, seria o dobro dos grandes. Quantos são os pequenos? E os grandes?

127. A população de uma cidade A é três vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades temos o total de 200.000 habitantes. Qual a população da cidade A?

128. Sabendo que a soma de um número "x" com sua terça parte é igual a 36, marque a alternativa verdadeira.

a) x é par.

b) x é primo.

c) x é divisor de 9.

d) x é múltiplo de 3.

e) x é igual a 9.

129. A diferença entre dois números m e n (m > n) é igual a 14 e a razão entre eles é $\frac{12}{5}$. Assinale a alternativa correta:

a) m = 12

b) n = 12.

c) m + n = 34

d) m + n = 17.

130. O conjunto solução da equação $0,5x = 0,3 - 0,5x$ é:

a) 0,3

b) 0,5

c) 0,8

d) 1,3

131. A razão entre dois números naturais é $\frac{1}{3}$. Encontre esses dois números, sabendo-se que o quadrado do menor é igual ao maior mais 10 unidades.

a) 2 e 6.

b) 9 e 3.

c) 4 e 6.

d) 5 e 15.

e) -2 e -6.

132. Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando $R\$7,20$. Danilo comprou 2 canetas e um lápis pagando $R\$4,40$. O sistema de equações do 1º grau que melhor representa a situação é:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 7,20 \\ 2x + y = 4,40 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3,60 \\ x + y = 2,20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 7,20 \\ 2x - y = 4,40 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + y = 7,20 \\ x - y = 4,40 \end{cases}$

133. A solução do sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 6x - 5y = 2 \end{cases}$ é:

a) (0;0)

b) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\right)$

c) (5;2)

d) $\left(\frac{1}{3}; 10\right)$

134. A solução de $5x-8>3x+16$ é o conjunto dos números racionais x tais que:

a) x > 12

b) x < 12

c) x = 12

d) n.d.a

135. A solução da equação $1+\frac{1}{2}+x=\frac{3}{8}+\frac{7}{6}$ é:

a) 0

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{48}$

e) $\frac{1}{4}$

136. Dada a sentença matemática $\frac{x-3}{3}+\frac{x-1}{2}<6$, o valor inteiro de x que satisfaz a inequação é:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

137. Se p e q são tais que: $\begin{cases} q-p=4 \\ q+p=12 \end{cases}$. Então,$p \cdot q-2$ vale:

a) 30

b) 32

c) 10

d) 12

138. Na equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$, os números a e c têm sinais contrários. Pode-se afirmar que:

a) A equação tem duas raízes reais de sinais contrários.

b) A equação tem duas raízes reais positivas.

c) A equação tem duas raízes reais negativas.

d) A equação pode não ter raízes reais.

e) N.d.a

139. Sendo S a soma e P o produto das raízes da equação $2x^2 - 5x - 7 = 0$, pode-se afirmar que:

a) $S - P = 6$

b) $S + P = 2$

c) $S \cdot P = 4$

d) $\frac{S}{P} = 1$

e) $S < P$

140. Ana Júlia é dona de uma pizzaria na cidade de Arapiraca. O valor cobrado pelas pizzas consideradas "clássicas"é de 27 reais e, por dia, ela consegue vender 30 dessas pizzas. Ao realizar um estudo sobre a relação entre o valor da pizza e o número de clientes que compram em seu estabelecimento, percebeu que a cada real que ela dava de desconto no valor da pizza, mais dois clientes compram as pizzas classicos. Sabendo que o total arrecadado com a venda das pizzas classicas foi de 882 reais no dia em que houve o desconto, qual foi o desconto dado por Ana Júlia no dia em questão?

141. Dada a equação do primeiro grau $\frac{x^2-1}{6} = \frac{x+2}{3} - 1$, o valor de x é:

a) Um número maior que 2

b) Um número real negativo.

c) Um número inteiro.

d) Um número maior que 1 e menor que 2.

e) Um número maior que zero e menor que 1.

142. Assinale a alternativa que representa uma equação do segundo grau:

a) $7x - 3^2 = 12$

b) $(x-3)^2 + 8 = x^2$

c) $12x^2 - 3x + 64 = 3(4x^2 - 8)$

d) $(6x^2 - 18)^2 = x^2$

e) $(x-8)^2 - 3 = 0$

143. Calcule um número inteiro e positivo tal que seu quadrado menos o dobro desse número seja igual a 48.

a) 8

b) -6 e 8

c) -8 e 6

d) 5 e -3

e) Este problema não tem solução.

4.6 Potenciação, radiciação e estudo dos radicais

144. Calcule as seguintes potências:

a) 3^4

b) 1^4

c) 0^6

d) $(-0,5)^0$

e) $(-6)^2$

f) -6^2

g) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^{-1}$

h) $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$

i) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

j) $(-0,75)^{-2}$

k) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}$

l) h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{3}$

145. Coloque V (verdadeiro) ou F (falso), justificando:

a) $5^{-5} \cdot 5^{6} = 1$

b) $6^{-2} \cdot 6^{-5} = 6^{10}$

c) $7^{3} \div 7^{5} = 7^{-5} \cdot 7^{3}$

d) $2^{5} \div 2^{3} = 1^{2}$

e) $3^{3} \cdot 3^{5} = 9^{8}$

f) $\dfrac{5^{-1}}{7^{-1}} = \dfrac{7}{5}$

g) $\dfrac{1}{2^{3}+3^{2}} = 2^{-3}+3^{-2}$

h) $z^{7-3} = \dfrac{1}{z^{3-7}}$, com $z \neq 0$

i) $(\pi+3)^{-2} = \pi^{-2}+3^{-2}$

146. Simplifique as expressões, usando sempre que possível as propriedades da potência:

a) $(2xy^{2})^{3}$

b) $(3xy^{2}) \cdot (2x^{2}y^{3})$

c) $(5ab^{2})^{2} \cdot (a^{2}b)^{3}$

d) $\dfrac{9x^{2}y^{3}}{-3xy}$, com x e y não nulos.

e) $\left(\dfrac{16ab^{4}}{-8a^{2}b^{7}}\right)^{-3}$, com a e b não nulos.

147. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{3^{n+2}-3^{n}}{3^{n+1}+3^{n-1}}$

b) $\dfrac{2^{2n+1}-4^{n}}{2^{2n}}$

c) $\dfrac{2^{n+1}-2^{n-2}}{2^{n}}$

148. Usando potências de mesma base, e as propriedades das potências, resolva:

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{5} \cdot (0,75)^{-2}$

b) $5^{m+2} : 5^{m-1}$

c) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot 16}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3}$

149. Transforme em radical e resolva-o quando possível:

a) $9^{\frac{3}{2}}$

b) $16^{\frac{3}{4}}$

c) $1024^{0,4}$

d) $625^{-0,25}$

150. Fatore o máximo possível os radicais a seguir:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{12}$

c) $\sqrt{20}$

d) $\sqrt{96}$

e) $\sqrt{147}$

f) $\sqrt{300}$

g) $\sqrt{90}$

h) $\sqrt{60}$

i) $\sqrt{208}$

j) $\sqrt{396}$

151. Calcue o valor de $\sqrt{8+\sqrt{14+\sqrt[3]{6+\sqrt{4}}}}$.

152. Racionalize os seguintes denominadores e simplifique, quando possível.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{3}{4\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{-2}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$

f) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$

153. Julgue verdadeiro ou falso:

a) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

b) $5^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) $4^{0,222\ldots} = \sqrt[9]{16}$

d) $-(25)^{\frac{1}{2}} = -5$

e) $\left(\dfrac{5\sqrt{8}}{2}\right)^2 = 50$

f) $3^{12} \cdot 3^6 = 3^{18}$

g) $\left[\left(\dfrac{2a}{3b^2}\right)^{10}\right]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{32a^2}{243b^9}$

154. A diferença $8^{0,666\ldots} - 9^{0,3}$ é igual a quanto?

155. Calcule o valor da expressão $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + 3\sqrt{12}$.

156. O valor da expressão $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ é:

a) $\sqrt{2}-1$

b) $\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $-\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2}+1$

157. O valor da expressão $(a^{-1}+b^{-1})^{-2}$ é:

a) $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$

b) $\dfrac{ab}{(a^2+b^2)^2}$

c) a^2+b^2

d) $\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$

e) ab

158. Seja $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e $B = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Então, A + B é igual a:

a) $-2\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $-2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

e) $2\sqrt{3}$

159. Qual o valor da expressão $x = \left[\left(\sqrt{1024}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$?

a) $\sqrt{34}$

b) $\sqrt{1024}$

c) 1024

d) 32

e) $22\sqrt{2}$

160. Se $x = 3200000$ e $y = 0,00002$, então xy vale:

a) 0,64

b) 6,4

c) 640

d) 64

e) 6400

161. A expressão $\dfrac{3^{x+1}-3^x}{3^{x-1}}$ tem valor igual a:

a) 5

b) 6

c) 8

d) 9

e) 10

162. Analise as afirmações abaixo:

i $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

ii $5^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

iii $4^{0,222...} = \sqrt[9]{16}$

iv $-(25)^{\frac{1}{2}} = -5$

Entre elas, quantas são verdadeiras?

a) As quatro

b) Somente duas

c) Somente três

d) Apenas uma

e) Nenhuma

163. O resultado de $2-4^{-1}$ fica entre:

a) 1 e 2

b) -1 e 0

c) 0 e 1

d) 2 e 3

e) 3 e 4

164. Qual a raiz cúbica de 2744?

a) 12

b) 13

c) 14

d) 15

e) 16

165. Seja $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e $B = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$. Então, A + B é igual a quanto?

a) $\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{3}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{3}$

d) $\dfrac{6\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

166. O valor exato da raiz cúbica de 1.728 é:

a) 9.

b) 12.

c) 15.

d) 18.

e) 25.

167. Transformando a expressão $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ em uma potência de expoente fracionário, quanto obteremos?

168. A expressão $\dfrac{2^{x+1}-2^x}{2^{x-1}}$ tem valor igual a:

a) 2

b) 6

c) 8

d) 9

e) 10

169. O resultado de $\dfrac{2}{\sqrt{81}}-\dfrac{\sqrt{16}}{3}$ é:

a) $\dfrac{10}{19}$

b) $\dfrac{14}{9}$

c) $\dfrac{-10}{19}$

d) $\dfrac{-14}{9}$

e) $\dfrac{-10}{9}$

170. O quociente $(a^{60} - a^{20}) \div a^{10}$ tem como resultado:

a) $a^6 - a^2$

b) $a^6 + a^2$

c) $a^{50} - a^{10}$

d) $a^{50} + a^{10}$

171. O valor da expressão $(3^{-1} + 5^{-1}) \div 2^{-1}$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{4}{15}$

d) $\dfrac{16}{15}$

e) $\dfrac{3}{8}$

172. Se $\sqrt{3 - b\sqrt{b}} \cdot \sqrt{3 + b\sqrt{b}} = 1$, então b vale:

a) 0

b) 1

c) 2

d) $\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{1}{3}$

173. Escrevendo o radical $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$ em forma de potência, temos:

a) $2^{\frac{1}{12}}$

b) $2^{\frac{1}{7}}$

c) $2^{\frac{12}{7}}$

d) $2^{\frac{6}{7}}$

e) $2^{\frac{7}{6}}$

174. Simplificando $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$, obtemos:

a) $\sqrt{a}$

b) $\sqrt[3]{a}$

c) $\sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt[4]{a}$

e) $\sqrt[6]{a}$

175. A metade de 2^{100} vale:

a) 2^{50}

b) 2^{60}

c) 2^{99}

d) 2^{40}

e) 1^{100}

176. O triplo de 3^{80} vale:

a) 9^{80}

b) 3^{81}

c) 3^{240}

d) 3^{83}

e) 3^{90}

177. O valor da soma $\dfrac{2^{2003} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}} + \dfrac{2^{2002} \cdot 9^{1001}}{4^{1001} \cdot 3^{2003}}$ vale:

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{2}{3}$

c) 0

d) 1

e) 2

4.7 Sistema métrico decimal, teorema de Tales, semelhança de triângulos

178. Transforme em metros, as seguintes medidas:

a) 1,23 km

b) 1003 mm

c) 0,02 km

d) 51 cm

e) 150 dm

179. Efetue as operações e dê o resultado em metros:

a) 51 m + 54 km

b) 175 dm + 2000 mm

c) 280 cm + 1,2 km

d) 375 dm + 275 dm

e) 1,02 km + 7 m

180. Transforme em metros quadrados, as seguintes medidas:

a) 200 cm^2

b) 150 dm^2

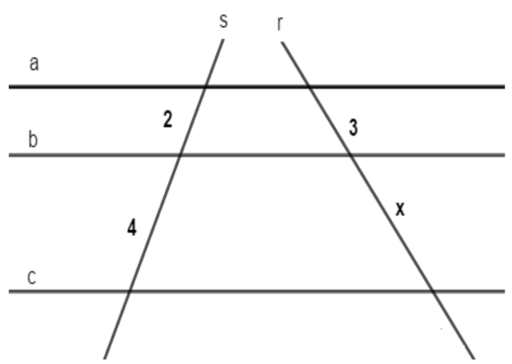
c) 70 km^2

d) 1.000.000 mm^2

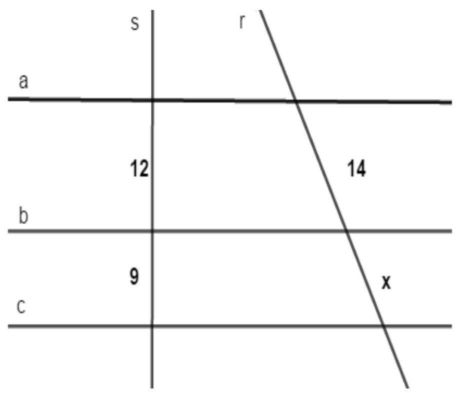
e) 250 km^2

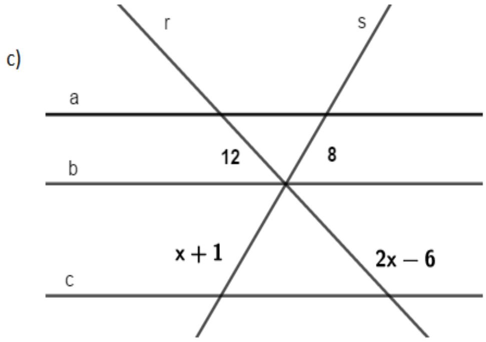
181. Nas figuras abaixo, as retas paralelas a, b e c cortam as transversais r e s formando seguimentos proporcionais. Calcule o valor de x :

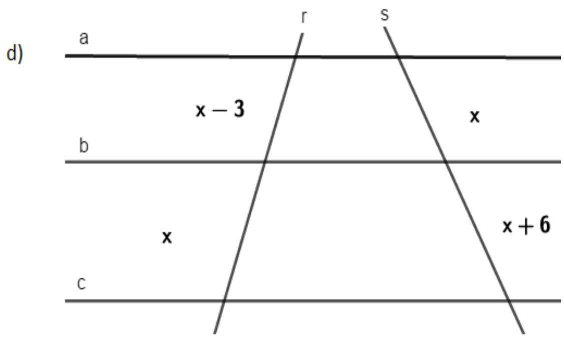
a)



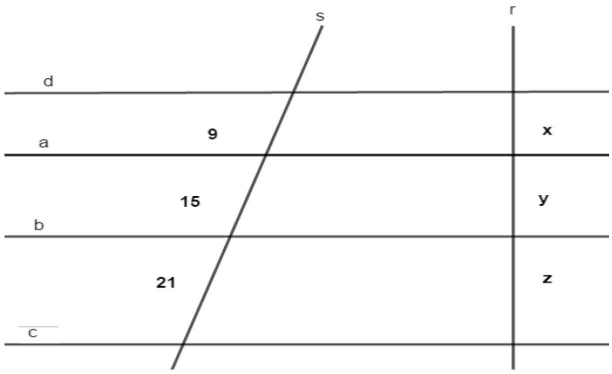
b)







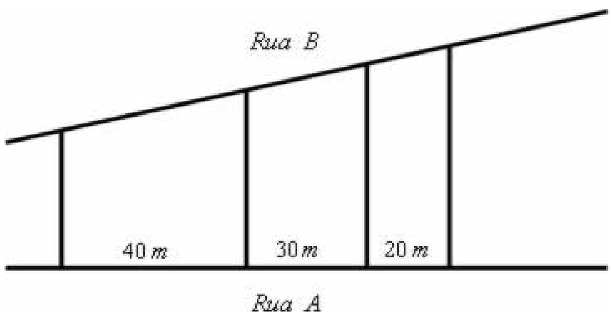
182. Sabendo a, b, c e d retas paralelas que cortam as transversais r e s. Determine os valores de x, y e z, tal que $x+y+z=15$.



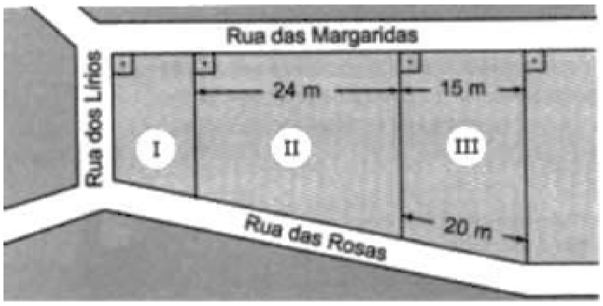
183. Um feixe de quatro retas paralelas determina sobre uma transversal três segmentos consecutivos, que medem 4 cm, 5 cm e 6 cm. Calcule os comprimentos dos segmentos determinados pelo feixe em outra transversal, sabendo que o segmento desta, compreendido entre a primeira e a quarta paralela, mede 60 cm.

184. As alturas de dois postes estão entre si assim como 3 esta para 5. Sabendo que o menor deles mede 6 m, então o maior mede?

185. **(FUVEST- SP)** Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?



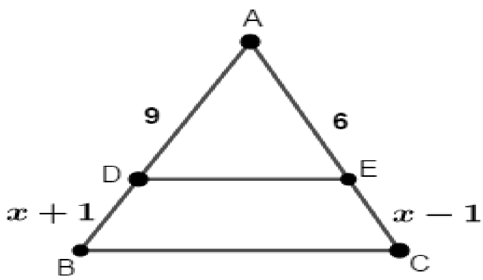
186. **(SARESP-SP)** No desenho abaixo estão representados os terrenos I, II e III. Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a Rua das Rosas?



187. A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra, de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. Qual a altura do poste?

188. **(ENEM)** A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminui 50 cm, calcule a medida da sombra da pessoa nesse instante.

189. No triângulo da figura a seguir, sabemos que $DE \parallel BC$ e $\overline{BC} = 10$. Nessas condições determine o perímetro do trapézio $BCDE$:



190. A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de uma criança de altura 1,25 m mede 75 cm. A altura do prédio em metros é:

a) 25.

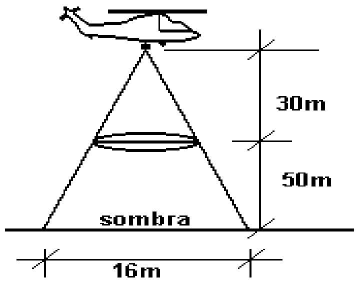
b) 29.

c) 30.

d) 45.

e) 75.

191. **(UNIRIO)** Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado a aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura anterior. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco-voador mede, em m, aproximadamente:



a) 3,0

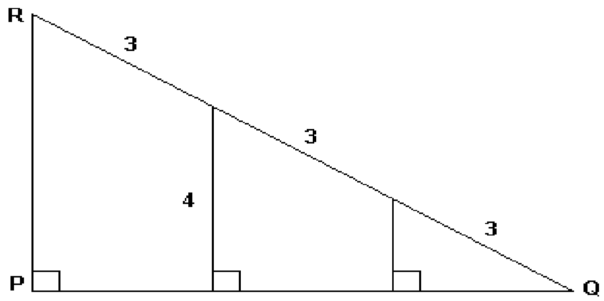
b) 3,5

c) 4,0

d) 4,5

e) 5,0

192. Considerando-se as informações constantes no triângulo PQR (figura abaixo), pode-se concluir que a altura PR desse triângulo mede:



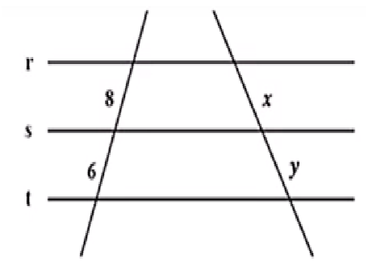
a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

193. **(UFRJ)** Pedro está construindo uma fogueira representada pela figura abaixo. Ele sabe que a soma de x com y é 42 e que as retas r, s e t são paralelas. A diferença x - y é:



a) 2

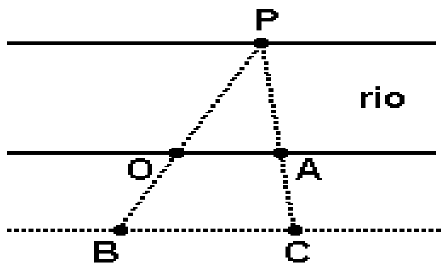
b) 4

c) 6

d) 10

e) 12

194. **(UNESP-SP)** Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, OA = 25 m, BC = 40 m e OB = 30 m, conforme figura:



A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é:

a) 30

b) 35

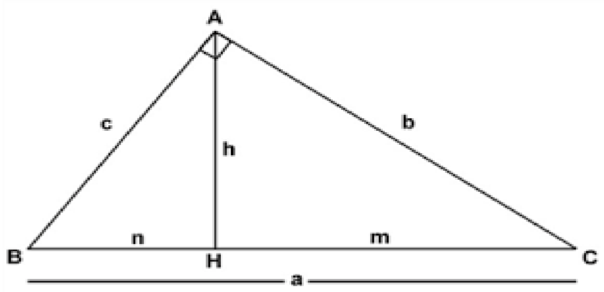
c) 40

d) 45

e) 50

4.8 Relações métricas no triângulo retângulo, teorema de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo

195. Classifique as incógnitas relacionando aos componentes das relações métricas no triângulo retângulo:



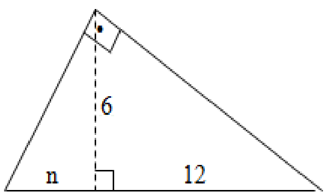
I. Catetos;

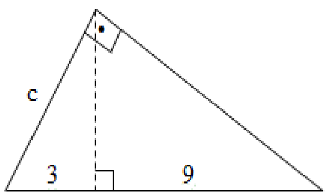
II. Projeções dos catetos;

III. Altura relativa à hipotenusa;

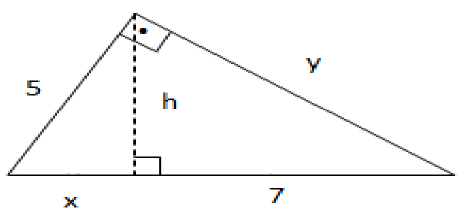
IV. Hipotenusa.

196. Aplicando as relações métricas nos triângulos retângulos abaixo, determine o valor das incógnitas:

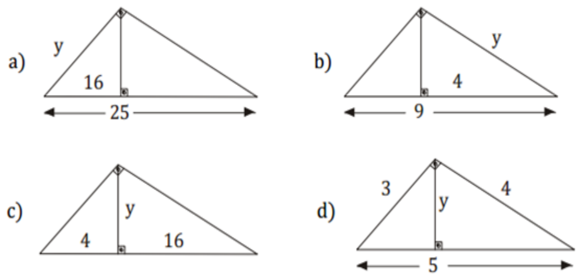




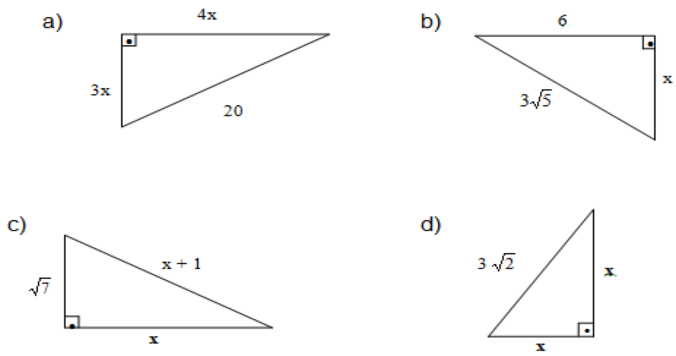
197. Considerando o triângulo retângulo abaixo, determine o valor de $x^2 + y^2$



198. Determine o valor de y:



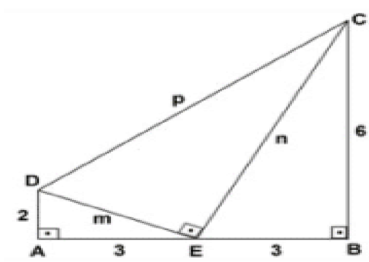
199. Aplique o Teorema de Pitágoras para determinar o valor do lado desconhecido dos triângulos retângulos abaixo:



200. Em um triângulo retângulo as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 8 cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.

201. As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 9 cm e 16 cm. Neste caso os catetos medem quanto?

202. Determine os valores de p, m e n, da figura a seguir:



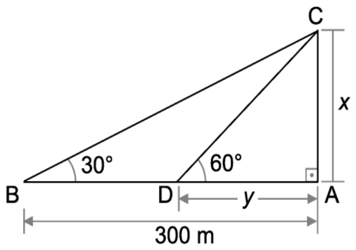
203. Os lados de um triângulo ABC medem 10cm, 24cm e 26cm. Você pode afirmar que esse triângulo é retângulo?

204. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14cm e um dos catetos mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do outro cateto.

205. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo medem $(2+\sqrt{5})$cm e $(-2+\sqrt{5})$cm. Determine a medida da hipotenusa.

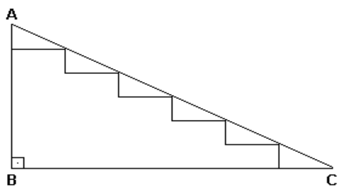
206. Um terreno triangular tem frentes de 12m e 16m em duas ruas que formam um ângulo de 90^o. Quanto mede o terceiro lado desse terreno?

207. Determine os valores de x e y:

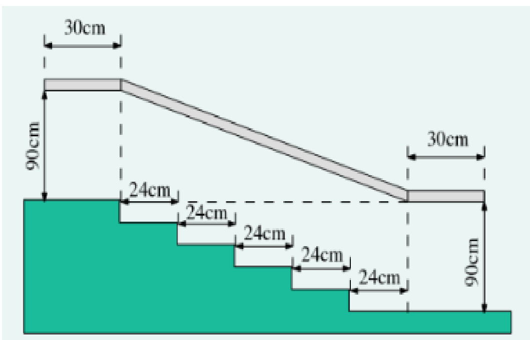


208. Um avião levanta voo em um ângulo de 30^o em relação à pista. Qual será a altura do avião quando estiver percorrendo 4 000 m em linha reta?

209. A figura adiante representa o perfil de uma escada cujos degraus têm a mesma extensão, além de mesma altura. Sabendo que $AC = 6m$ e $\angle ACB = 30^o$, determine a medida de cada degrau.



210. **(ENEM)** Na figura a seguir, que representa um projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão em metros é igual a:



a) 1,8m

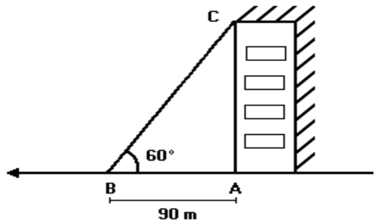
b) 1,9m

c) 2,0m

d) 2,1m

e) 2,2m

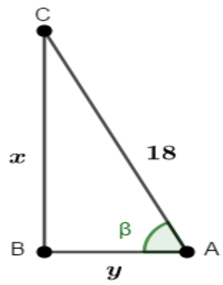
211. **(PUCCAMP-SP)** Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante.



Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60^o. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30^o?

212. O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60^o. Sabendo-se que a árvore está distante 150m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?

213. No triângulo retângulo a seguir, sabendo que $\beta = 65^o$ determine as medidas x e y indicadas. (Use: $sen65^o = 0,91$; $cos65^o = 0,42$ e $tg65^o = 2,14$)



214. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede 30cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

215. Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30^o com o plano horizontal. Quantos metros uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente?

216. Seja a um número real postivo. Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem $2a$ e $4a$, respectivamente, qual é a tangente do ângulo oposto ao menor lado?

217. **(CEFET-PR)** A Rua Tenório Quadros e a Avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, cruzam-se conforme um ângulo de 30^o. O posto de gasolina Estrela do Sul encontra-se na Avenida Teófilo Silva a 4 000 m do citado cruzamento. Portanto, determine em quilômetros, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros?

218. **(FUVEST)** Dois pontos, A e B, estão situados na margem de um rio e distantes 40m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $\angle CAB$ mede 75^o e o ângulo $\angle ACB$ mede 75^o. Determine a largura do rio.

219. De um ponto A, Joanderson enxerga o topo T de um morro, conforme um ângulo de 30^o. Ao se aproximar 50 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de 60^o. Determine a altura do morro.

220. Um foguete é lançado sob um ângulo de 30^o. A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?

221. Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30^o (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

   a) $500\sqrt{3}$m

   b) 450 m

   c) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$m

   d) 500 m

   e) N.D.A

222. Três cidades, A, B e C, são interligadas por estradas, de modo que a união das três estradas forma um triangulo retângulo, com ângulo reto em C. As estradas AB e BC já são asfaltadas, e AC deverá ser asfaltada em breve. Sabendo que AB tem 70 km e BC tem 42 km, quantos quilômetros precisarão ser asfaltados para asfaltar toda a estrada AC?

   a) 50 km

   b) 50,5 km

   c) 54 km

   d) 56 km

   e) 60 km

223. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é $a+3$ e um dos catetos $a-3$. Se o outro cateto vale 18, quanto vale a?

a) 20

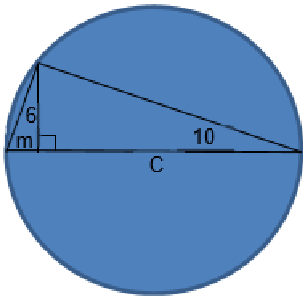
b) 22

c) 24

d) 27

e) 30

224. Determine o valor de m na figura a seguir, sabendo que C é o centro da circunferência e o raio vale 10.



a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

225. Ao soltar pipa, um garoto que está segurando um carretel a 1,5m do solo (objeto cilíndrico usado para enrolar linha) libera 90m de linha, supondo que a linha fique esticada e forme um ângulo de 30^o com a horizontal. A que altura a pipa se encontra do solo?

a) 45m

b) $45\sqrt{3}$m

c) $46{,}5\sqrt{3}$m

d) $45\sqrt{2}$m

e) 46,5m

4.9 Perímetros e áreas de figuras planas

226. Em um terreno retangular que mede 0,2 km de largura e 0,3 km de comprimento. Para cercar o terreno, são estacas em torno do terreno e, em seguida, arames em três posições (alturas) diferentes das escacas, de modo que os arames da mesma posição fiquem alinhados. Quantos metros de arame farpado serão necessários para construir a cerca?

    a) 500m

    b) 1000m

    c) 3000m

    d) 6000m

227. A medida do lado de um quadrado é de 20 cm. Qual é a sua área, em cm^2?

228. A lateral da tampa quadrada de uma caixa mede 7 m. Qual a área desta tampa, em m^2?

229. Um terreno mede 5 metros de largura por 25 metros de comprimento. Qual é a área deste terreno, em metros quadrados?

230. Quantos centímetros quadrados de tecido, no mínimo, são necessários para fazer uma toalha que mede 80 cm de comprimento por 40 cm de largura?

231. Um pintor foi contratado para pintar uma sala retangular que mede 5 m x 7 m. Para evitar que a tinta respingue no chão ele vai forrar a sala com folhas de jornal. Quantos metros de folha de jornal ele vai precisar?

232. A área de um quadrado é igual a 256 cm^2. Qual a medida do lado deste quadrado, em cm^2?

233. Determine a área de um retângulo, em centímetros quadrados, sabendo que seu comprimento mede 50 cm e sua largura mede 2 vezes seu comprimento.

234. Calcule a área de uma praça retangular em metros quadrados, na qual o comprimento é igual a 50 metros e sua largura mede 32 metros.

235. Calcule a área de um retângulo, em centímetros quadrados, em que a largura mede 34 cm e o seu comprimento mede a metade da largura.

236. Na minha sala de aula, o piso é coberto com pisos sintéticos que medem 20 cm x 20 cm. Contei 10 pisos na horizontal a uma parede e 12 pisos na direção perpendicular. Qual a área dessa sala em metros quadrados?

237. A medida da base de um paralelogramo é de 15 dm, sendo que a medida da altura é de 4 dm. Qual é a área deste paralelogramo, em dm^2?

238. Qual é a medida da área de um paralelogramo cujas medidas da altura e da base são respectivamente 10 m e 2 m?

239. As diagonais de um losango medem 10 cm e 15 cm. Qual é a medida da sua superfície, em cm^2?

240. Qual é a medida da área, em cm^2, de um losango cuja diagonal maior mede 12 cm e a menor 9 cm?

241. Um losango apresenta área igual a $60m^2$. Sabendo que a diagonal menor mede 6 m, determine a medida da diagonal maior.

242. Qual a área de uma trapézio de lados paralelos iguais a 10cm e 18cm e com altura de 6cm?

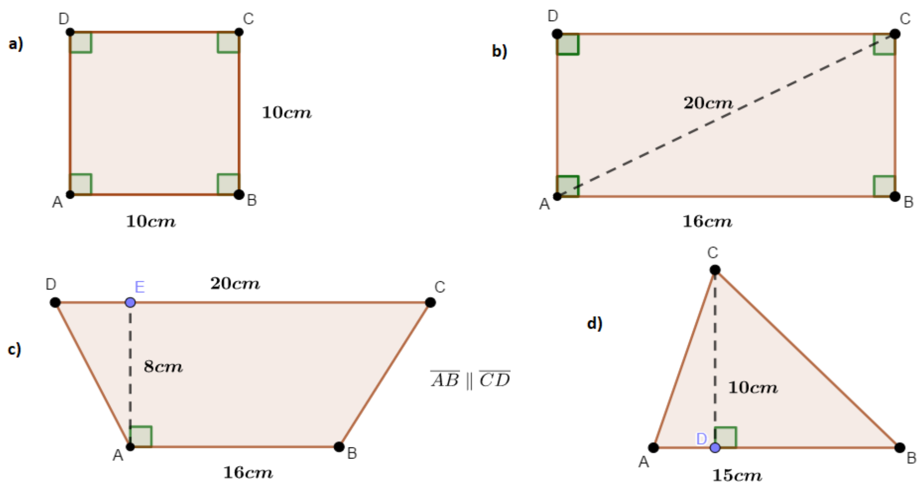
243. A área de um triângulo é 18 cm^2 e um de seus lados mede 0,2dm. Qual o seu perímetro?

244. Um retângulo tem perímetro de 30m e as medidas de seus lados são números consecutivos. Qual é a área deste retângulo?

245. Um terreno tem área $450m^2$. Se o seu formato é um trapézio, onde a frente e o seu fundo são paralelos e iguais a 40 m e 50m, qual a distância entre esses lados?

246. Um triângulo equilátero tem lado de 6cm. Qual é o perímetro e qual é a área deste triângulo?

247. Determine a área e o perímetro das figuras abaixo:

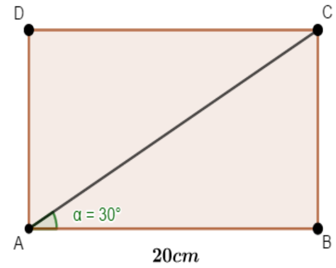


248. Qual é o comprimento de uma circunferência que tem raio igual a 2,4 cm? Use $\pi = 3{,}14$.

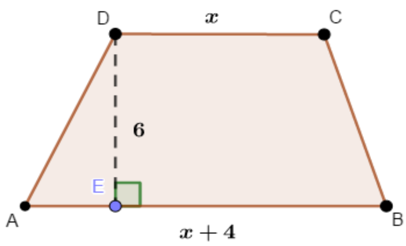
249. Calcule a área do círculo que tem diâmetro igual a 20 cm. Use $\pi = 3{,}14$.

250. Calcule a área da coroa circular onde o raio menor mede 3 cm e o raio maior mede o triplo do menor.

251. Calcule a área do retângulo ABCD desenhado ao lado:



252. A área do trapézio abaixo é 48 m^2. A base $AB = x + 4$ é igual a:



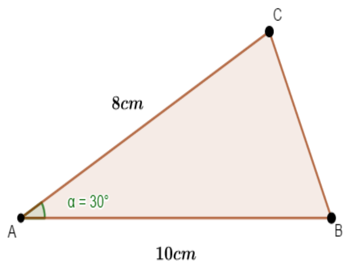
a) 12m

b) 10m

c) 25m

d) 6m

253. A área, em centímetros quadrados, do triângulo representado na figura abaixo é:



a) $40\sqrt{3}$

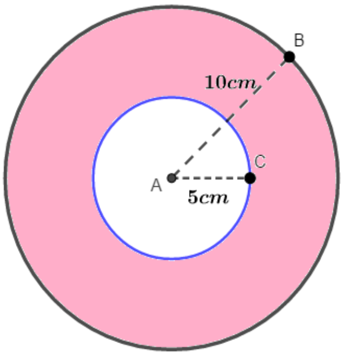
b) $20\sqrt{3}$

c) $20\sqrt{2}$

d) 24

e) 10

254. Considere duas circunferências concêntricas em A. A área da região pintada vale, aproximadamente:



(Use $\pi = 3,14$)

a) 230,24cm^2

b) 235,26cm^2

c) 235,50cm^2

d) 236,5cm^2

255. Uma praça circular tem raio de 40 m. Quantos metros anda uma pessoa quando dá 3 voltas na praça?

256. Ao percorrer uma distância de 6280 m, uma roda dá 2000 voltas completas. Qual é o raio dessa circunferência?

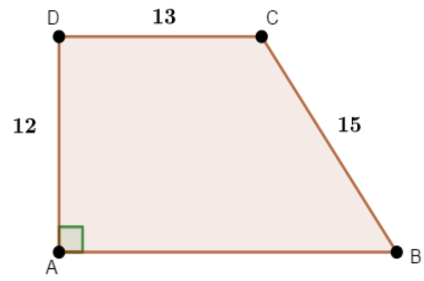
257. As rodas de um automóvel têm 32 cm de raio. Que distância percorreu o automóvel depois de cada roda deu 8000 voltas?

258. Considerando que uma pizza tradicional grande possui 35 cm de raio e uma pizza tradicional pequena apresenta 25 cm, determine a diferença entre a área das duas pizzas.

259. Determine a medida do raio de uma praça circular que possui 9420 m de comprimento (Use π = 3,14.).

260. Uma pista de atletismo tem a forma circular e seu diâmetro mede 80 m. Um atleta treinando nessa pista deseja correr 10 km diariamente. Determine o número mínimo de voltas completas que ele deve dar nessa pista a cada dia.

261. A figura abaixo ilustra um terreno em forma de trapézio, com as medidas, em quilômetros (km), de três de seus lados. A área do terreno, em km^2, é igual a:



a) 215

b) 210

c) 205

d) 220

e) 200

262. As bases de um trapézio isósceles medem respectivamente 4cm e 12cm. Determinar a área desse trapézio sabendo que o perímetro do trapézio é igual a 26 cm.

263. A partir de um quadrado de lado x, obtém-se um retângulo aumentando 5 em uma dimensão e diminuindo 5 na outra dimensão. Qual é a expressão que melhor representa a área desse retângulo?

264. Um terreno triangular possui dois lados com medidas 16m e 12m que formam entre si um ângulo de 60^o. Qual a área desse terreno?

4.10 Polígonos regulares inscritos e circunscritos

265. Defina e dê exemplos:

a) Polígono regular.

b) Apótema

266. Um quadrado inscrito em uma circunferência tem a área valendo $10m^2$. Calcule o raio da circunferência, o lado, o perímetro, a diagonal e a apótema do quadrado.

267. Um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência tem perímetro valendo $5\sqrt{3}$m. Calcule o raio da circunferência, o lado, a área e a apótema do triângulo equilátero.

268. Um hexágono regular inscrito em uma circunferência tem a apótema valendo $\frac{5}{2}$m. Calcule o raio da circunferência, o lado, o perímetro e a área do hexágono regular.

269. Um quadrado circunscrito em uma circunferência tem a diagonal valendo $\frac{7}{4}$m. Calcule o raio da circunferência, o lado, a área, o perímetro,e a apótema do quadrado.

270. Um triângulo equilátero circunscrito em uma circunferência tem área valendo $\frac{8}{3}m^2$. Calcule o raio da circunferência, o lado, o perímetro e a apótema do triângulo equilátero.

271. Um hexágono regular circunscrito em uma circunferência tem o lado valendo $\left(4+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)m$. Calcule o raioda circunferência, a apótema, o perímetro e a área do hexágono regular.

272. Considere um quadrado com lado de 15 cm, inscrito em uma circunferência. Determine o comprimento da circunferência.

273. Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

5

PROVAS ANTERIORES DO IFAL

As provas anteriores do IFAL contêm algumas questões anuladas, os quais não serão corrigidos aqui, mas serão indicadas. O material contém os cadernos de questões dos anos de 2010 a 2019, os quais indicaremos pelo exame de seleção, totaliza 10 provas. Os gabaritos das provas estão disponíveis em `https://exame3.ifal.edu.br/exames/listarExamesAnteriores` e em `encurtador.com.br/bAE05`.

5.1 EXAME DE SELEÇÃO 2011.1

274. **(Questão 23).** A superfície do nosso planeta é constituída de 30% de terra e 70% de água. Um terço da terra é pastagem, floresta, ou montanha, e dois quintos da terra são desertos ou cobertos por gelo; o resto da terra é usado para o cultivo. Qual é o percentual da superfície total do nosso planeta que é usada para o cultivo?

a) 8%.

b) 18%.

c) 12%.

d) 4%.

e) 6%.

275. **(Questão 24).** Uma herança foi dividida entre a viúva, a filha, o filho e o segurança da família. A filha e o filho ficaram com a metade, distribuída na proporção de 4 para 3, respectivamente. A viúva ganhou o dobro do que coube ao filho, e o segurança, R$ 500, 00. Calcule o valor da herança.

a) R$ 5.500,00.

b) R$ 6.000,00.

c) R$ 7.000,00.

d) R$ 11.500,00.

e) R$ 9.500,00.

276. **(Questão 25).** Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4m e 1m, respectivamente. Calcule a área desse triângulo.

a) 5 cm^2.

b) 50 cm^2.

c) 50.000 cm^2.

d) 50 dm^2.

e) 5 dm^2.

277. **(Questão 26).** Num retângulo, o comprimento é 8 cm e a altura é 15 cm. Quanto se deve subtrair da altura e do comprimento a fim de diminuir em 4cm a sua diagonal?

a) 4 cm.

b) 5 cm.

c) 2 cm.

d) 1 cm.

e) 3 cm.

278. **(Questão 27).** Um pedaço de madeira tem forma retangular e suas medidas são 21,5cm por 7cm. Quantos pedaços de madeira, são necessários para revestir uma sala de 12 m^2 de área?

a) 798 pedaços.

b) 789 pedaços.

c) 978 pedaços.

d) 987 pedaços.

e) 879 pedaços.

279. **(Questão 28).** A estrada que liga duas cidades tem 4.396m de extensão. Quantas voltas completas dará uma das rodas da bicicleta que vai percorrer essa estrada se o raio da roda é 0,35cm? Considere $\pi = 3,14$.

a) 50.000 voltas.

b) 200.000 voltas.

c) 100.000 voltas.

d) 150.000 voltas.

e) 20.000 voltas.

280. **(Questão 29).** Num paralelogramo, cada ângulo agudo mede 30^o e os lados que formam cada um desses ângulos medem $3\sqrt{3}$ cm e 5 cm. Calcule a medida da menor das diagonais desse paralelogramo.

a) $\sqrt{6}$ cm.

b) $\sqrt{3}$ cm.

c) $3\sqrt{3}$ cm.

d) $\sqrt{7}$ cm.

e) $15\sqrt{3}$ cm.

281. **(Questão 30).** A razão entre dois números naturais é $\frac{1}{3}$. Encontre esses dois números, sabendo-se que o quadrado do menor é igual ao maior mais 10 unidades.

a) 2 e 6.

b) 9 e 3.

c) 4 e 6.

d) 5 e 15.

e) -2 e -6.

282. **(Questão 31).** Sejam w e z dois números reais tais que a soma é 21 e o produto é -7. Calcule o valor da expressão:

$$\frac{1}{w^2} + \frac{1}{z^2}$$

a) $\frac{445}{59}$.

b) $\frac{445}{49}$.

c) $\frac{455}{59}$.

d) $\frac{455}{49}$.

e) $\frac{435}{49}$.

Leia o pequeno Texto atentamente para resolver as questões de 32 a 36.

Há dois anos, Manoel resolveu comprar um terreno, gastando R$ 18.000,00 com o empreendimento. Nesse valor também estavam inclusas as despesas com o cartório que, na ocasião, equivaliam a 20% do preço do terreno.

O terreno media 156 m^2 e tinha a forma de um trapézio retangular, cujos lados paralelos mediam, em metros: 22 e 30. Há um ano, Manoel decidiu construir uma casa no terreno já mencionado. Foi contratada uma arquiteta que escolheu usar azulejos novos no mercado local. O referido azulejo tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, cujo cateto mede, em centímetros, 60.

Hoje, Manoel quer vender o imóvel. O custo da construção foi de R$ 207.000,00 e o preço de um terreno de mesma forma e mesma metragem na região é de R$ 60.000,00.

283. **(Questão 32).** Há dois anos, quanto custou o terreno e as despesas de cartório, respectivamente?

    a) R$ 14 400,00 e R$ 3 600,00.

    b) R$ 15 000,00 e R$ 3 000,00.

    c) R$ 16 200,00 e R$ 1 800,00.

    d) R$ 15 200,00 e R$ 2 800,00.

    e) R$ 15 400,00 e R$ 2 600,00.

284. **(Questão 33).** Quais as medidas, em metros, dos outros lados do terreno?

    a) 6 e 8.

    b) 8 e 10.

    c) 6 e 10.

    d) 7 e 9.

    e) 7 e 10.

285. **(Questão 34).** Quantos dos azulejos novos no mercado serão necessários, sabendo-se que uma área de 90 m^2 deverá ser coberta com esses azulejos?

    a) 600.

    b) 550.

    c) 450.

    d) 500.

    e) 650.

286. **(Questão 35).** Hoje, qual a porcentagem da valorização do terreno?

    a) 500%.

b) 100%.

c) 1000%.

d) 50%.

e) 400%.

287. **(Questão 36).** Sabendo que, na venda, Manoel assumirá as despesas de cartório, que hoje são de 10% do valor cobrado pelo imóvel, qual é o valor que ele deverá cobrar para receber o que investiu e mais 100%?

a) R$ 500 000,00.

b) R$ 450 000,00.

c) R$ 414 000,00.

d) R$ 514 000,00.

e) R$ 550 000,00.

288. **(Questão 37).** Três empresas – empresa A, empresa B e empresa C – todas pertencentes a um mesmo empresário, tiveram o seguinte desempenho financeiro no período de novembro de 2009 a novembro de 2010:

I) A empresa A lucrou três vezes mais que a empresa B;

II) A empresa B lucrou 10% menos que a empresa C;

III) A empresa C quadruplicou a fortuna do empresário.

Sabendo-se que o empresário tinha uma fortuna avaliada em R$ 5 000 000,00, pergunta-se: Qual a empresa mais lucrativa e qual a menos lucrativa, respectivamente:

a) empresa B e empresa A.

b) empresa A e empresa B.

c) empresa A e empresa C.

d) empresa C e empresa A.

e) empresa B e empresa C.

Leia o pequeno Texto atentamente para resolver as questões de 38 a 40.

A cozinheira de uma lanchonete usa 9 kg de frango prontos para rechear salgados e 3 kg de massa para fazer 30 coxinhas – considere que cada unidade tenha a mesma quantidade de massa e frango.

289. **(Questão 38).** Quantas coxinhas podem ser feitas com 33,3 kg de massa e 99 kg de frango?

a) 320.

b) 330.

c) 99,9.

d) 297.

e) 370.

290. **(Questão 39).** Com as quantidades da questão anterior, é correto afirmar que

a) não sobram produtos.

b) sobram mais de 100 gramas de massa e frango.

c) não sobra frango.

d) não sobra massa.

e) sobram menos de 100 gramas de massa e frango.

291. **(Questão 40).** Uma unidade da coxinha tem quantos quilogramas de massa e frango, respectivamente?

a) 1 e 3.

b) 0,3 e 0,1.

c) 3 e 1.

d) 0,1 e 0,3.

e) 3 e 9.

5.2 EXAME DE SELEÇÃO 2012.1

292. **(Questão 23).** Você foi ao mercado e comprou 2 kg de arroz, cujo preço por quilo é $R\$$ 1,65; 2 kg de feijão, cujo preço por quilo é $R\$3,10$; e comprou, ainda, 250g de café moído, cujo preço foi $R\$2,50$. Você pagou ao vendedor com uma nota de $R\$$ 20,00. Ele lhe devolveu $R\$$ 8,00 (troco). Para saber se o troco estava certo você fez os cálculos. Assinale a alternativa que completa corretamente a frase: Para fazer os cálculos acima citados, você precisa saber:

a) adição, subtração, multiplicação e divisão.

b) apenas subtração.

c) adição, subtração e multiplicação.

d) apenas adição.

e) adição e subtração.

293. **(Questão 24).** No sistema métrico decimal, o metro (m) é a unidade padrão. Seus múltiplos são: quilômetro (km), hectômetro (hm) e decâmetro (dam). Seus submúltiplos são: milímetro (mm), centímetro (cm) e decímetro (dm). Assinale, então, a alternativa **falsa**.

a) 1 m equivale a 100 cm.

b) 1 km equivale a 1000 m.

c) 1 m equivale a 1000 km.

d) 1 cm equivale a 10 mm.

e) 1 dam equivale a 10 m.

294. **(Questão 25).** Seja $A = 3 - \{-2 + [+3 \div 6^0 + 4^2 - (3 \cdot 4 - 2) - 1] + 4\}$. Assinale a alternativa que corresponde ao dobro de A.

a) – 7

b) – 21

c) 49

d) 14

e) – 14

295. **(Questão 26).** As equações 2x + y = 5 (I) e x – 2y = – 5 (II) são conhecidas como equações do 1^o grau com duas incógnitas. Separadamente, cada uma dessas equações tem infinitas soluções. Neste caso, existe apenas uma solução que satisfaz às duas equações ao mesmo tempo. Com base no exposto acima, assinale a alternativa correta.

a) O par (2, 1) não é uma das soluções da equação I.

b) O par (1, - 3) é uma das soluções da equação II.

c) O par (1, 2) é a solução do sistema formado pelas equações I e II.

d) O par (1, 3) é a solução do sistema formado pelas equações I e II.

e) O par $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ não é uma das soluções da equação I.

296. **(Questão 27).** A soma da minha idade, em fevereiro de 2011, com a idade do meu filho era 83 anos. Em fevereiro de 2012, eu terei o dobro da idade do meu filho, menos dois anos. Sabendo que eu nasci em janeiro, assinale a alternativa que corresponde ao ano em que eu nasci.

   a) 1955

   b) 1956

   c) 1957

   d) 1982

   e) 1983

297. **(Questão 28).** Seis homens fabricam 100 pares de sapatos por dia, trabalhando 8 horas por dia. Para fabricar 125 pares dos mesmos sapatos, trabalhando apenas 5 horas por dia.

   a) será preciso dobrar a quantidade de homens.

   b) serão precisos mais dois homens.

   c) serão precisos três homens a menos.

   d) serão precisos mais três homens.

   e) serão precisos mais quatro homens

298. **(Questão 29).** O ex-presidente Luiz Inácio Lula da Silva disse nesta sexta-feira (2), durante discurso na abertura do 4^o Congresso Nacional do PT, em Brasília, que os oitos meses de governo da presidente Dilma Rousseff não são suficientes para avaliar quem vai governar "por oito anos", referindo-se à eventual reeleição da petista. "Temos de contribuir e tenho convicção de que ninguém pode cobrar de você [Dilma] aquilo que o tempo não permitiu você fazer. Oito meses de governo é muito pouco para quem vai governar este país por oito anos. É apenas 10% do tempo que você vai ter", disse Lula. Com base no texto, assinale a alternativa **correta**.

   a) Lula estava certo, pois 8 meses são exatamente 10% de 8 anos.

   b) Lula estava errado, pois 8 meses são mais de 10% de 8 anos.

   c) Lula estava errado, pois 8 meses são menos de 10% de 8 anos.

   d) Lula estava certo, pois 8 anos tem oitenta meses.

   e) Lula deveria ter dito: 8 meses são exatamente 10% de 8 anos.

299. **(Questão 30).** A soma de dois números naturais, "m" e "n" (m < n) , é igual a 20, e a razão entre eles é $\frac{2}{3}$. É verdade que

a) os dois números "m" e "n" são ímpares.

b) os dois números "m" e "n" são maiores que 10.

c) m = 4 e n = 16.

d) m = 12 e n = 8.

e) m = 8 e n = 12.

300. **(Questão 31).** A expressão $2x^2 - 4x + 5 - (x^2 + 2x - 4)$ equivale a:

a) $3x^2 - 2x + 1$

b) $x^2 - 6x + 1$

c) $(2x + 1)^2$

d) $(x - 3)^2$

e) $(x - 2)^2 - (x + 1)^2$

301. **(Questão 32).** Assinale a alternativa **incorreta**:

a) $-3x^2 = -9$

b) $-2^3 = -8$

c) $2^4 = 4^2 = 16$. Logo, é verdade que $2^3 = 3^2$.

d) $(3 + 4)^2 = 49$

e) $(8 - 3)^3 = 125$

302. **(Questão 33).** Assinale a alternativa **correta**:

a)$\sqrt{4} + \sqrt{5} = \sqrt{9} = 3$

b) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2 = 5$

c) $\frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{4}{\left(\sqrt{5} - 1\right)} = \sqrt{5} + 1$

e) $\sqrt{16} = \pm 4$

303. **(Questão 34).** Assinale a alternativa que complete a frase: A equação do 2^o grau $2x^2 - 5x = 3$...

a) admite duas raízes inteiras.

b) admite uma raiz natural.

c) não admite raízes reais.

d) admite duas raízes naturais.

e) admite duas raízes negativas.

304. **(Questão 35).** A soma dos quadrados de dois números inteiros "a" e "b" (a < b) é igual a 125. Aumentando-se 5 unidades no número menor e diminuindo-se 5 unidades no número maior, o valor da soma supracitada diminui em 100 unidades. Assinale a alternativa verdadeira.

a) "a" e "b" são números positivos.

b) a – b = 15.

c) b – a = – 15.

d) "a" e "b" são números pares.

e) Existem dois valores para "a" e dois para "b" que satisfazem essas condições.

305. **(Questão 36).** Sejam (x – 5)cm, (x + 2)cm e (x + 3)cm, com x > 5, as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Assinale a alternativa **errada**.

a) Esse triângulo é escaleno.

b) A hipotenusa desse triângulo mede 13 cm.

c) Os catetos desse triângulo medem 5 cm e 12 cm.

d) A área desse triângulo tem $30cm^2$.

e) Existem dois triângulos nessas condições.

306. **(Questão 37).** Considere um triângulo retângulo, cujas medidas dos catetos são 10 cm e $10\sqrt{3}$cm. Dados: sen 30^o = 0,5; cos 45^o = 0,707 e sen 60^o = 0,866. Assinale a alternativa **incorreta**.

a) O seno do menor ângulo agudo é 0,707.

b) O cosseno do menor ângulo agudo é 0,866.

c) O seno do menor ângulo agudo é 0,5.

d) O maior ângulo agudo desse triângulo mede 60^o.

e) O menor ângulo agudo desse triângulo mede 30^o.

ATENÇÃO: O anúncio a seguir é referente às questões 38 e 39.

Considere um triângulo ABC cusa base $\overline{AB}$ mede 27dm. Taçando-se uma reta "t", paralela à base, ela determina sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, os pontos D e E. Sabe-se que $\overline{DC}$ mede 14 dm, $\overline{BE}$ mede 8 dm e $\overline{DE}$ mede 18dm.

307. **(Questão 38).** Assinale a alternativa falsa:

a) Os triângulos ABC e DEC são semelhantes.

b) Os triângulos ABC e CDE são semelhantes.

c) $\overline{CD} = 2\overline{DA}$

d) A razão de semelhança é $\frac{3}{2}$

e) O lado BC mede 24 dm.

308. **(Questão 39).** Assinale a alternativa verdadeira.

a) O triângulo ABC é equilátero, logo ele pode ser inscrito em uma circunferência.

b) O triângulo ABC é um polígono regular, logo ele pode ser inscrito em uma circunferência.

c) O triângulo ABC é escaleno, mesmo assim ele pode ser inscrito em uma circunferência.

d) O raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede $9\sqrt{3}$dm.

e) O apótema da circunferência circunscrita ao triângulo ABC mede $4{,}5\sqrt{3}$dm.

309. **(Questão 40).** Considere um triângulo cujas medidas dos lados são: 10 cm, 100 mm e $\sqrt{2}$dm, e um quadrado de área igual a 100 cm^2. Assinale a alternativa correta.

a) A área do triângulo é igual à metade da área do quadrado.

b) O lado do quadrado mede 50 cm.

c) O lado do quadrado mede 10 dm.

d) A área do triângulo tem 100 cm^2.

e) A área do triângulo é igual ao dobro da área do quadrado.

5.3 EXAME DE SELEÇÃO 2013.1

310. **(Questão 23).** Marque a alternativa correta.

a) $\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{2} > \frac{3}{2} > \frac{5}{2} > \frac{7}{2}$

c) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{5} > \frac{1}{5} > \frac{2}{3} > \frac{4}{9}$

e) $\frac{5}{9} > \frac{4}{3} > \frac{22}{27} > \frac{5}{27}$

311. **(Questão 24).** Comecei hoje a tomar três tipos de remédio (A, B e C), na mesma hora. Isso significa que abri as três caixas ao mesmo tempo. O remédio A vem em caixas com 10 comprimidos; o B, em caixas com 20 comprimidos; o C, em caixas com 30 comprimidos. Vou abrir três caixas ao mesmo tempo, novamente, daqui a

a) 10 dias.

b) 20 dias.

c) 30 dias.

d) 60 dias.

e) 120 dias.

312. **(Questão 25).** O valor da expressão $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}}{\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}}$, para $x = 1$, $y = 3$ e $z = 2$ é

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{9}{8}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{2}{9}$

313. **(Questão 26).** Assinale a alternativa que completa a frase: dividindo 20 por 0,5 e dividindo o resultado por $\frac{1}{2}$,

a) você encontra 5.

b) você encontra 10.

c) você encontra 20.

d) você encontra 40.

e) você encontra 80.

314. **(Questão 27).** O perímetro de um triângulo, cujos lados medem 10,5 dm, 170 cm e 1250 mm, mede

a) 400m.

b) 40m.

c) 400dm.

d) 4m.

e) 40000mm.

315. **(Questão 28).** O valor de x que satisfaz a equação $\frac{x}{2} - \frac{3}{2} = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ é

a) $\frac{-13}{5}$.

b) -1.

c) 0.

d) 1.

e) 5.

316. **(Questão 29).** Assinale o sistema cuja solução é a dupla $\{(-1,2)\}$

a) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-3 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x+y=1 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} x-3y=-7 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

317. **(Questão 30).** O único valor de "n" que não satisfaz à inequação $3n-4 \geq 4n-9$ é

 a) 6.

 b) 5.

 c) 4.

 d) 3.

 e) 2.

318. **(Questão 31).** A soma de um número com seu triplo é igual à diferença entre o quíntuplo desse número e 20. A metade desse número é

 a) 20.

 b) 10.

 c) 5.

 d) 0.

 e) Inexistente, pois o número citado não existe.

319. **(Questão 32).** Na construção civil, geralmente se usa, como unidade de medida, uma lata de 18 litros. Para produzir 40 latas de concreto, um operário colocou 4 latas de cimento, 16 de areia e 20 de brita. As razões entre a quantidade de cimento e brita e a quantidade de areia e brita são, respectivamente,

 a) $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{5}$.

 b) $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$.

 c) $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

 d) $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{5}$.

 e) $\frac{5}{1}$ e $\frac{5}{4}$.

320. **(Questão 33).** A soma de dois números m e n $(m > n)$ é igual a 35 e a razão entre eles é $\frac{4}{3}$. Assim podemos afirmar que:

 a) $m \cdot n = 300$.

 b) $m = 25$ e $n = 10$.

 c) $m = 28$ e $n = 7$

 d) $m - n = 25$.

 e) m e n são números pares.

321. **(Questão 34).** Marque as afirmativas verdadeiras com o número 2, e as falsas com o número 1.

I) Se três homens fabricam 20 peças, trabalhando 8 horas por dia, 6 homens fabricarão 40 peças idênticas às primeiras, no mesmo espaço de tempo;

II) 0,5% de 60 é 3;

III) 0,25% de 200 é 0,5.

O número formado de cima para baixo é:

a) 222.

b) 212.

c) 211.

d) 121.

e) 112.

322. **(Questão 35).** A soma $(x+1)^2+(x-2)^2$ é igual a

a) $2x^2-2x+5$.

b) $(2x-1)^2$.

c) $2x^2+5$.

d) $(x-1)^2$.

e) $2x^2+6x+5$.

323. **(Questão 36).** A divisão do polinômio $A(x)=x^3-4x^2+4x+2$ por $B(x)=(x-1)^2$ tem quociente e resto, respectivamente,

a) $x+4$ e $x-2$.

b) $x-2$ e $-x+4$.

c) $x-2$ e $x+4$.

d) $-x+4$ e $x-2$.

e) $x-6$ e $-9x+2$.

324. **(Questão 37).** O conjunto-solução da equação $x^2-\dfrac{7}{2}x=-\dfrac{3}{2}$ é

a) $\{\ \ \}$.

b) $\{1,6\}$.

c) $\left\{\dfrac{1}{2},3\right\}$.

d) $\left\{-3,-\dfrac{1}{2}\right\}$.

e) $\{-6,-1\}$.

325. **(Questão 38).** Assinale com "F" as afirmativas falsas.

I. (...) $4^2=8$;

II. (...) $-5^2=25$;

III. (...) Se $x^2=36$, então $x=-6$ ou $x=6$;

IV. (...) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{5}$.

a) marcou F em quatro afirmativas.

b) marcou F em três afirmativas.

c) marcou F em duas afirmativas.

d) marcou F em uma afirmativa.

e) não marcou nenhum F.

326. **(Questão 39).** Os lados de um triângulo retângulo medem, em metros, $2x$, $2x+1$ e $x+1$. A área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente,

a) 12 m^2 e 12m.

b) 12 m e 6 m^2.

c) 6 m^2 e 12 m.

d) 10 m^2 e 12m.

e) 6 m^2 e 6 m.

327. **(Questão 40).** ANULADA.

5.4 EXAME DE SELEÇÃO 2014.1

328. **(Questão 23).** ANULADA.

329. **(Questão 24).** Sabendo que a soma de um número "x" com sua terça parte é igual a 36, marque a alternativa verdadeira.

a) x é par.

b) x é primo.

c) x é divisor de 9.

d) x é múltiplo de 3.

e) x é igual a 9.

330. **(Questão 25).** ANULADA.

331. **(Questão 26).** O perímetro e a área de um retângulo de base "b" e altura "h", com b > h, são respectivamente, 600 cm e 2 m^2. Assinale a alternativa correta.

a) b = 20 cm e h = 100 cm.

b) b = 200 cm e h = 100 mm.

c) b = 20 dm e h = 100 cm.

d) b = 2 m e h = 100 dm.

e) b = 200 mm e h = 100 mm.

332. **(Questão 27).** Sabendo que "a" é a solução da equação $\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3x}{2} - 11$, assinale a alternativa correta.

a) "a" é um número menor que zero.

b) "a" é um número primo.

c) "a" é um número maior que 10.

d) "a" é um número entre 9 e 11.

e) "a" é uma fração própria.

333. **(Questão 28).** A diferença entre dois números m e n $(m > n)$ é igual a 14 e a razão entre eles é $\frac{12}{5}$. Assinale a alternativa correta.

a) m = 12.

b) n = 12.

c) m + n = 34

d) m + n = 17.

e) m é par e n é ímpar.

334. **(Questão 29).** ANULADA.

335. **(Questão 30).** A turma de 1a série da escola Maria do Rosário é composta por 25% de meninas mais 30 meninos. Assinale a alternativa que corresponde a 50% da quantidade de meninas.

a) 10.

b) 5.

c) 15.

d) 30.

e) 40.

336. **(Questão 31).** A produção diária de bolas de futebol de uma fábrica que tem dez funcionários, os quais trabalham oito horas por dia é de 1000 bolas. Em certo dia, o dono da fábrica comunicou que era preciso produzir 1200 bolas. Justamente neste dia dois funcionários faltaram. Nestas condições, é verdade que neste dia

a) cada homem trabalhou quatro horas a mais.

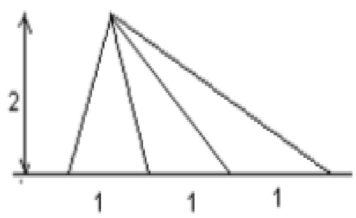
b) cada homem trabalhou meia hora a mais.

c) cada homem trabalhou sete minutos a mais.

d) cada homem trabalhou meia hora a menos.

e) os homens não trabalharam.

337. **(Questão 32).** A soma das áreas de todos os triângulos que podemos formar na figura a seguir é igual a:



a) 3

b) 4

c) 7

d) 8

e) 10

338. **(Questão 33).** O valor de $(0,25)^{1006} \cdot 2^{2013}$ é igual a:

a) 2

b) 4

c) 2^{4000}

d) 4^{2000}

e) 8^{1000}

339. **(Questão 34).** Quando um camelo está sedento, 84% do seu peso é água. Depois de beber toda a água que necessita, seu peso chega a 800 kg, onde 85% desse peso correspondem a água. Quanto pesa esse camelo quando está sedento?

a) 672 kg

b) 680 kg

c) 715 kg

d) 720 kg

e) 750 kg

340. **(Questão 35).** Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é a+3 e um dos catetos a-3. Se o outro cateto vale 18, quanto vale a?

a) 20

b) 22

c) 24

d) 27

e) 30

341. **(Questão 36).** Qual dos seguintes números NÃO está entre 5 e 6?

a) $2\pi - 1$

b) $\sqrt{19} + 1$

c) $\sqrt{27}$

d) $\sqrt{82} - 3$

e) $\sqrt[3]{200}$

342. **(Questão 37).** A soma $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$ é igual a:

    a) $\frac{1}{2}$

    b) $\frac{9}{10}$

    c) $\frac{7}{8}$

    d) 1

    e) $\frac{3}{4}$

343. **(Questão 38).** Se $\frac{a}{4-a}=\frac{b}{5-b}=\frac{c}{7-c}=3$, o valor de $a+b+c$ é igual a

    a) 12.

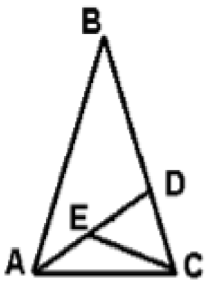
    b) 3.

    c) 9.

    d) 6.

    e) 14.

344. **(Questão 39).** O triângulo ABC é isósceles, com AB = BC e o ângulo B vale 20^o. Os triângulos ADC e DEC são também isósceles, com AD = AC e ED = DC. O ângulo DEC mede:



    a) 18^o

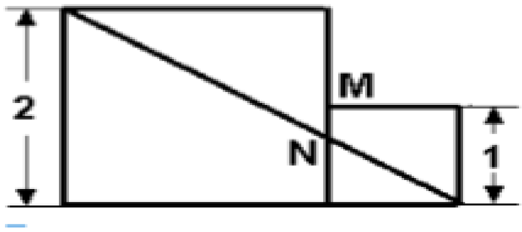
    b) 34^o

    c) 48^o

    d) 50^o

    e) 73^o

345. **(Questão 40).** Dois quadrados estão apoiados. O lado do quadrado maior mede 2 e o lado do menor 1. Quanto mede MN?



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{2}{5}$

5.5 EXAME DE SELEÇÃO 2015.1

346. **(Questão 23).** O valor da expressão $(5432^2 - 5431^2) \div 3$ é:

a) $\frac{1}{3}$.

b) $(5432^2 - 5431^2) \div 3$.

c) 2950664.

d) 3621.

e) 10863.

347. **(Questão 24).** No pleito eleitoral para eleger o presidente do Grêmio Estudantil de minha escola, votaram 2200 alunos. Para o candidato ser considerado vencedor ele deve obter pelo menos 1 + 50% dos votos válidos. Sabe-se que 2% dos alunos votantes anularam o voto e 3% deles votaram em branco. É correto que:

a) A quantidade mínima de votos que elege um candidato é 1101.

b) O candidato com votação superior a 1045 votos está eleito.

c) 43 alunos anularam o voto.

d) 66 é a quantidade de votos nulos.

e) 110 é a quantidade de votos válidos.

348. **(Questão 25).** Um self-service funciona de segunda a sextafeira e a cada dia serve pelo menos 640 refeições. Considerando que cada comensal ingere, em média, 140 g de arroz por refeição, a quantidade mínima de arroz servida numa semana é, em média:

a) 89600 g.

b) 44800 g.

c) 448000 kg.

d) 44800 hg.

e) 448 kg.

349. **(Questão 26).** Serviços de transporte prestados por motoboy são ofertados em vários pontos da cidade de Maceió. Um deles, em especial, trabalha 4 horas por dia e roda 400 km em 2 dias. Se as condições do trânsito mantiverem-se constantes e o motoboy aumentar sua jornada de trabalho para 6 horas diárias, em quanto tempo ele terá rodado 600 km?

a) Quatro dias e meio.

b) Exatamente dois dias.

c) Menos de dois dias.

d) Mais de quatro dias e meio.

e) Entre dois e quatro dias.

350. **(Questão 27).** Dois amigos saboreiam petiscos da culinária alagoana num famoso barzinho da cidade. Enquanto o amigo A consome 3 unidades do petisco solicitado, o amigo B consome 2. A conta, no valor de $R\$225,00$, será dividida em partes proporcionais ao consumo. Os valores a serem pagos por A e B são, respectivamente:

a) R$ 90,00 e R$ 135,00.

b) R$ 100,00 e R$ 125,00.

c) R$ 135,00 e R$ 90,00.

d) R$ 60,00 e $ 165,00.

e) R$ 80,00 e R$ 45,00.

351. **(Questão 28).** ANULADA

352. **(Questão 29).** É verdadeiro que:

a) O quadrado da diferença entre a e b é a expressão $a^2 - b^2$

b) O cubo do quadrado de a é expresso por $(a^3)^2$

c) O quadrado de c, que é a soma dos quadrados de a e b, é expresso por $c^2 = (a+b)^2$

d) A terça parte do quadrado da soma de a e b é a expressão $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^3$

e) O quociente do quadrado da diferença entre a e b, pela diferença entre o quadrado de a e b resulta em $\dfrac{a-b}{a+b}$

353. **(Questão 30).** ANULADA

354. **(Questão 31).** Se A = 0,05; B = 0,009;C = 0,1; D = 0,57 e E = 0,097, é verdade que:

a) D <(C + E + A + B)

b) $C \cdot (C+E) < (A+B)$

c) A + B + C + D + E > 1

d) B < A < E < C < D

e) 1 - (A + B + C + D + E) > D

355. **(Questão 32).** A expressão $\dfrac{(0,1)^2 - \sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}} + \dfrac{57}{1000}}{\dfrac{1}{2}}$

a) é um número racional negativo.

b) não é um número racional.

c) é um número natural.

d) é um número irracional.

e) é um número inteiro.

356. **(Questão 33).** ANULADA

357. **(Questão 34).** O resultado de $\dfrac{-(-3)^2 - \sqrt[3]{-27} + 20^0 - 0^3}{-1^3}$ é

a) -10.

b) 5.

c) 10.

d) -13.

e) -8.

358. **(Questão 35).** Quanto vale 5% da centésima parte de uma dúzia?

a) $\frac{6}{10}$.

b) $\frac{6}{100}$.

c) $\frac{6}{10000}$.

d) $\frac{6}{1000}$.

e) 6^2.

359. **(Questão 36).** ANULADA

360. **(Questão 37).** Na rotisseria do Sr. Carlos, os produtos são vendidos em unidade inteira. Para o lanche da tarde, comprei x pãezinhos, (x+1) iogurtes, (x+6) pastéis e (x-3) potes de geleia. É certo afirmar que:

a) x + (x+1) + (x+6) + (x+3) é a expressão que representa a totalidade de produtos do lanche.

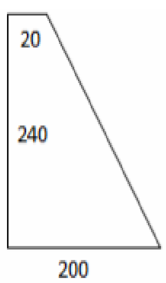
b) os produtos do lanche podem totalizar 22 unidades.

c) se comprei 20 unidades de produtos, então x = 4.

d) x pode assumir o valor 3.

e) x pode assumir valor igual ou superior a 2.

361. **(Questão 38).** Sabe-se que o metro é a unidade que expressa o comprimento das dimensões do conjunto residencial que acaba de ser construído. A área de lazer desse conjunto residencial tem a forma da figura a seguir. Então:



a) o perímetro da área de lazer é 760 m.

b) a superfície da área de lazer vale 26400 m.

c) a superfície da área de lazer tem forma de trapézio isósceles.

d) o formato da área de lazer é um polígono regular.

e) a área de lazer é um poliedro.

362. **(Questão 39).** Com a implantação da "Onda Verde", a velocidade recomendada para motoristas transitarem pela Av. Fernandes Lima é 50 km/h. O percurso do motorista que, por 0,16 horas, nessa velocidade, cruza semáforos da Av. Fernandes Lima com sinal verde é:

a) 8000 m

b) 8 m

c) 80 m

d) 800m

e) 0,8 km

363. **(Questão 40).** Uma pizza seria dividida igualmente entre quatro amigos. Na hora da degustação chegaram três visitantes que foram convidados a participar da refeição. O primeiro solicitou $\frac{1}{3}$ da fatia que caberia a um dos amigos; o segundo visitante solicitou $\frac{1}{4}$ da fatia que caberia a outro dos amigos; e o terceiro visitante solicitou metade da fatia que caberia a um outro dos amigos. A esse respeito, a afirmação verdadeira é:

a) quem comeu menos pizza degustou seus $\frac{1}{4}$.

b) o terceiro visitante degustou uma fatia menor que a do primeiro visitante.

c) o segundo visitante comeu menos pizza.

d) quem degustou a maior fatia da pizza foi um visitante.

e) o amigo que cedeu $\frac{1}{3}$ de sua pizza degustou mais pizza do que o amigo que cedeu $\frac{1}{4}$.

5.6 EXAME DE SELEÇÃO 2016.1

364. **(Questão 23).** Deseja-se determinar a área de um trapézio, cuja base maior mede 1 metro a mais que a altura, e a base menor 1 metro a menos que a altura. Sabendo que a altura desse trapézio mede 4 metros, qual é, em metros quadrados, a área desse trapézio?

a) 10.

b) 16.

c) 20.

d) 25.

e) 30.

365. **(Questão 24).**Um jogo de cara ou coroa tinha a seguinte regra: quando o lado da moeda era cara, o jogador ganhava 3 pontos e, quando era coroa, o jogador ganhava apenas 1 ponto. Após lançar a moeda 10 vezes, um determinado jogador obteve 24 pontos. Quantas vezes, nesses 10 lançamentos, saiu o lado cara da moeda para esse jogador?

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 7.

366. **(Questão 25).** Uma caixa contém 20 bolas, sendo 8 bolas brancas, 7 bolas azuis e 5 bolas vermelhas. Qual a porcentagem de bolas brancas nessa caixa?

a) 20%.

b) 25%.

c) 30%.

d) 35%.

e) 40%.

367. **(Questão 26).** Uma determinada escola paga para o seu Diretor o salário de R$ 1.800,00 e para os professores o de R$ 1.200,00 neste ano de 2015. Nas negociações trabalhistas, o salário do Diretor, em 2016, será de R$ 1.980,00. Sabendo que o salário dos professores será reajustado na mesma proporção, qual será o salário dos professores em 2016?

a) R$ 1.260,00.

b) R$ 1.270,00.

c) R$ 1.280,00.

d) R$ 1.320,00.

e) R$ 1.360,00.

368. **(Questão 27).** Resolvendo a seguinte expressão numérica $2\{2(8-3\cdot 2)-8+2[(8+10)\div 3]\}$, o resultado obtido é

a) 5.

b) 10.

c) 16.

d) 18.

e) 20.

369. **(Questão 28, modificada).** Simplifique a seguinte expressão de produtos notáveis: $(2x+y)^{2\,\smallsmile}(2x^{\smallsmile}y)^{2\,\smallsmile}4xy$. Qual o resultado obtido?

a) $4xy$.

b) $2xy$.

c) 0.

d) $-2xy$.

e) $-4xy$.

370. **(Questão 29).** O valor exato da raiz cúbica de 1.728 é

a) 9.

b) 12.

c) 15.

d) 18.

e) 25.

371. **(Questão 30).** A equação $x^2+4x-12=0$ tem como raízes os números

a) -2 e -6.

b) -2 e 6.

c) 2 e -6.

d) 2 e 6.

e) -4 e 4.

372. **(Questão 31).** Um prédio projeta, no chão, uma sombra de 15 metros de comprimento. Sabendo que, nesse momento, o sol faz um ângulo de 45^o com a horizontal, determine a altura desse prédio em metros.

a) 10.

b) 15.

c) 20.

d) 25.

e) 30.

373. **(Questão 32).** Transformando a expressão $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ em potência de expoente fracionário, obtemos:

a) 3^1

b) $3^{\frac{2}{3}}$

c) $3^{\frac{1}{2}}$

d) $3^{\frac{1}{3}}$

e) 1

374. **(Questão 33).** Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

a) 12m.

b) 18m.

c) 24m.

d) 30m.

e) 36m.

375. **(Questão 34).** Um terreno triangular possui dois lados com medidas 16m e 12m que formam entre si um ângulo de 60^o. Qual a área desse terreno?

a) 48 m^2

b) 96 m^2

c) $12\sqrt{3}m^2$

d) $24\sqrt{3}m^2$

e) $48\sqrt{3}m^2$

376. **(Questão 35).** Em um restaurante, existem 20 mesas, todas ocupadas, algumas por 4 pessoas e outras por 2 pessoas, num total de 54 fregueses. Qual o número de mesas ocupadas por 4 pessoas?

a) 5.

b) 7.

c) 9.

d) 11.

e) 13.

377. **(Questão 36).** Três linhas diferentes de ônibus, A, B e C, passam em um certo ponto a cada 8 min, 12min e 20min, respectivamente. Se às 6 horas, essas três linhas chegam no mesmo instante a esse ponto, em qual horário do dia as três linhas chegarão novamente no mesmo instante a esse mesmo ponto?

a) 6h30min.

b) 7h10min.

c) 7h50min.

d) 8h.

e) 9h

378. **(Questão 37).** Um número de dois algarismos é tal que o algarismo das unidades excede em uma unidade o algarismo das dezenas. Se invertermos os algarismos e somarmos o número resultante ao 1^o número obteremos 55. Então este número é

a) 14.

b) 23.

c) 32.

d) 41.

e) 45.

379. **(Questão 38).** Reduzindo a expressão $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$ ao número mais simples, obtemos:

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) $2-\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6}$

e) $2+\sqrt{2}$

380. **(Questão 39).** Certo consumidor gastou tudo que tinha no seu bolso durante as compras em 6 lojas. Em cada uma, gastou R$ 1,00 a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto tinha inicialmente?

a) R$ 14,00.

b) R$ 30,00.

c) R$ 62,00.

d) R$ 126,00.

e) R$ 254,00.

381. **(Questão 40).** Devido à alta do dólar, certo produto teve um aumento de 25% em uma determinada loja. Com a crise econômica e baixa nas vendas, o proprietário da loja resolve vender o produto pelo mesmo valor que era vendido antes da alta do dólar. Então, ele deverá dar um desconto de:

a) 35%.

b) 30%.

c) 25%.

d) 20%.

e) 15%.

5.7 EXAME DE SELEÇÃO 2017.1

382. **(Questão 23).** O salário mínimo previsto para 2017 será de R$ 946,00. Qual é o percentual de reajuste em relação ao salário mínimo de 2016 sabendo que neste ano seu valor é de R$ 880,00?

a) 5,5%

b) 6,5%

c) 7,5%

d) 8,5%

e) 9,5%

383. **(Questão 24).** Determine o valor de k para que a equação $x^2 + kx + 6 = 0$ tendo como raízes os valores 2 e 3.

a) 0.

b) 5.

c) 6.

d) - 5.

e) - 6.

384. **(Questão 25).** Para colocar o piso em um salão de formato retangular, cujas dimensões são 6 metros de largura e 8 metros de comprimento, gasta-se R$ 18,00 por cada metro quadrado. Qual o valor total do gasto para colocar o piso em todo o salão?

a) R$ 486,00.

b) R$ 648,00.

c) R$ 684,00.

d) R$ 846,00.

e) R$ 864,00.

385. **(Questão 26).** Determine o valor do produto $(3x + 2y)^2$, sabendo que $9x^2 + 4y^2 = 25$ e xy = 2.

a) 27.

b) 31.

c) 38.

d) 49.

e) 54.

386. **(Questão 27).** Resolva o sistema de equações abaixo para x e y reais e determine o valor do produto xy.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 54 \end{cases}$$

a) 74.

b) 80.

c) 91.

d) 94.

e) 108.

387. **(Questão 28).** Determine a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 6 cm e 8 cm.

a) 3,6 cm.

b) 4,8 cm.

c) 6,0 cm.

d) 6,4 cm.

e) 8,0 cm.

388. **(Questão 29).** Uma família compromete $\frac{3}{8}$ de sua renda mensal em gasto com a saúde. Sabendo que a renda mensal desta família é de R$ 2.400,00, qual o valor gasto mensalmente com a saúde?

a) R$ 300,00.

b) R$ 600,00.

c) R$ 900,00.

d) R$ 1.200,00.

e) R$ 1.500,00.

389. **(Questão 30).** Uma editora utiliza 3 máquinas para produzir 1.800 livros num certo período. Quantas máquinas serão necessárias para produzir 5.400 livros no mesmo período?

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

390. **(Questão 31).** Determine o valor de $(3^3 + 5^2) \div 2^2$.

a) 13.

b) 14.

c) 15.

d) 16.

e) 17

391. **(Questão 32).** A expressão $\left(\frac{2}{3} - 0,333...\right)^2 + \sqrt{0,111...}$ tem como resultado:

a) 0

b) 1

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{4}{9}$

392. **(Questão 33).** Um homem sai de casa com uma certa quantia em dinheiro. Primeiramente, encontra um amigo que lhe paga R$ 20,00 de uma dívida, a seguir, gasta metade do que possui em uma loja, paga R$ 10,00 de estacionamento e se dirige à outra loja onde gasta metade do que lhe restou, paga mais R$ 10,00 de estacionamento e retorna para casa. Ao chegar em casa, percebe que lhe restaram R$ 50,00. Qual o valor em dinheiro que o homem tinha quando saiu de casa?

a) R$60,00.

b) R$ 120,00.

c) R$ 130,00.

d) R$ 260,00.

e) R$ 240,00.

393. **(Questão 34).** Um pai deseja dividir R$ 800,00 com seus dois filhos de 10 anos e de 15 anos, em quantias diretamente proporcionais às suas idades. Quanto recebem, respectivamente, o filho mais novo e o filho mais velho?

a) R$ 100,00 e R$ 700,00.

b) R$ 210,00 e R$ 590,00.

c) R$ 320,00 e R$ 480,00.

d) R$ 430,00 e R$ 370,00.

e) R$ 540,00 e R$ 260,00.

394. **(Questão 35).** Um técnico em edificações percebe que necessita de 9 pedreiros para construir uma casa em 20 dias. Trabalhando com a mesma eficiência, quantos pedreiros são necessários para construir uma casa do mesmo tipo em 12 dias?

   a) 6.

   b) 12.

   c) 15.

   d) 18.

   e) 21.

395. **(Questão 36).** Em campanha promocional, uma loja oferece desconto de 20% para um certo produto. Passada a campanha promocional, que aumento percentual deve ser dado para o produto voltar a ter o mesmo valor que tinha antes da campanha?

   a) 10%.

   b) 15%.

   c) 20%.

   d) 25%.

   e) 30%.

396. **(Questão 37).** A partir de um quadrado de lado x, obtém-se um retângulo aumentando 3 em uma dimensão e diminuindo 3 na outra dimensão. A expressão que melhor representa a área desse retângulo é:

   a) 2x.

   b) x^2 – 9.

   c) x^2 + 6x + 9.

   d) x^2 – 6x + 9.

   e) x^2 + 9.

397. **(Questão 38).** A base de um triângulo mede x + 3 e a altura mede x – 2. Se a área desse triângulo vale 7, o valor de x é:

   a) 2.

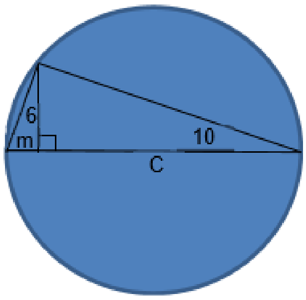
   b) 3.

   c) 4.

d) 5.

e) 6.

398. **(Questão 39).** Calcule o valor de m na figura. Onde C é o centro do círculo de raio 10.



a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

399. **(Questão 40).** Ao soltar pipa, um garoto libera 90m de linha, supondo que a linha fique esticada e forme um ângulo de 30^o com a horizontal. A que altura a pipa se encontra do solo?

a) 45m.

b) $45\sqrt{3}$m.

c) $30\sqrt{3}$m.

d) $45\sqrt{2}$m.

e) 30m.

5.8 EXAME DE SELEÇÃO 2018.1

400. **(Questão 23).** Em uma determinada indústria, cada operário tem direito a um único dia de folga na semana. Em uma semana específica, 157 operários trabalharam no domingo, 234 trabalharam na segunda-feira, 250 na terçafeira, 243 na quarta-feira, 237 na quinta-feira, 230 na sexta-feira e 197 no sábado. Considerando que, nessa semana, a regra de folga foi cumprida, quantos operários trabalham nessa indústria?

a) 255.

b) 256.

c) 257.

d) 258.

e) 259.

401. **(Questão 24).** Certo trabalhador, mensalmente, gasta em média $\frac{2}{3}$ do seu salário com todas as despesas de seu lar e 10% do que resta com transporte, sobrando-lhe apenas R$ 300,00. Qual é o seu salário?

a) R$ 900,00.

b) R$ 960,00.

c) R$ 1.000,00.

d) R$ 1.080,00.

e) R$ 1.800,00.

402. **(Questão 25).** Um cliente deseja revestir o piso de sua sala retangular de dimensões 6m por 4m, com uma cerâmica de sua escolha, no formato quadrado com lado 45 cm, cada pedra da cerâmica. Sabendo que cada caixa da cerâmica em questão possui 10 pedras, o profissional que irá realizar o serviço deve solicitar ao seu cliente a compra de, no mínimo, quantas caixas?

a) 2.

b) 6.

c) 11.

d) 12.

e) 65.

403. **(Questão 26).** Em uma certa turma de 49 alunos, o número de homens corresponde a $\frac{3}{4}$ do número de mulheres. Quantos homens tem essa turma?

a) 14.

b) 21.

c) 28.

d) 35.

e) 42.

404. **(Questão 27).** Uma razão muito utilizada na geografia é a densidade demográfica, que relaciona a população de uma dada região com a sua área, muito importante para avaliar a concentração de pessoas na localidade. O Estado de Alagoas, de acordo com pesquisa realizada em 2010, pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), possui população de aproximadamente 3.120.494 habitantes. Se a área da superfície do estado de Alagoas é de aproximadamente 27.779,343 km^2, de acordo com essa pesquisa, a densidade demográfica do estado alagoano é de aproximadamente:

   a) 0,009.

   b) 112,331.

   c) 1.552,484.

   d) 3.092.714,657.

   e) 3.148.273,343.

405. **(Questão 28).** Para proporcionar uma festa de aniversário com 100 convidados, os organizadores previram um consumo de 6.000 salgados durante 3h de duração da festa. A cozinheira, por precaução, fez 2.000 salgados a mais, porém compareceram 20 pessoas a mais do previsto. Usando a proporcionalidade e considerando que a previsão esteja correta, por quanto tempo durarão os salgados?

   a) 4h48min.

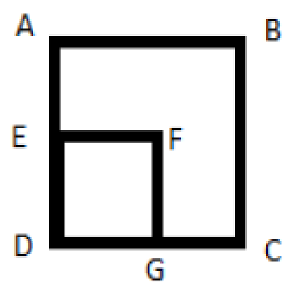
   b) 4h20min.

   c) 4h.

   d) 3h48min.

   e) 3h20min.

406. **(Questão 29).**Dados os quadrados abaixo, com lados x para o maior e y para o menor, conforme a figura:



   Qual das expressões abaixo representa a diferença entre as áreas dos quadrados?

a) $(x+y)(x-y)$.

b) $(x-y)^2$.

c) $(x+y)^2$.

d) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

e) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

407. **(Questão 30).** Um atleta de 1,70 metro de altura, percebe que, ao fazer flexões no momento em que estica os braços, seu corpo, em linha reta, forma um ângulo de 30° com o piso. Nessas condições, a que altura do piso se encontra a extremidade da sua cabeça? (Considere que os braços formam com o piso um ângulo reto).

a) 85 cm.

b) $85\sqrt{3}$ cm.

c) $\frac{170\sqrt{3}}{3}$ cm.

d) $85\sqrt{2}$ cm.

e) 340 cm.

408. **(Questão 31).** No centro de uma praça retangular de dimensões 40 metros e 60 metros, é construída uma fonte circular de raio 8 metros, único lugar da praça em que as pessoas não podem entrar. Qual a área da praça a que as pessoas podem ter acesso? (considere $\pi = 3,14$)

a) 200,96 m^2.

b) 2400 m^2.

c) 2199,04 m^2.

d) 50,24 m^2.

e) 149,76 m^2.

409. **(Questão 32).** No exame de seleção para o ano de 2017, o IFAL ofereceu 504 vagas para seus cursos Integrados e, no exame de seleção para o ano de 2018, está oferecendo 630 vagas. Qual é o percentual de aumento do número de vagas para o ano de 2018?

a) 12,6%.

b) 20,0%.

c) 25,0%.

d) 30,0%.

e) 33,0%.

410. **(Questão 33).** Determine o valor da raiz da equação $3x+5=2$.

a) 2.

b) 1.

c) 0.

d) -1.

e) – 2.

411. **(Questão 34).** Um fazendeiro resolveu cercar um terreno de formato retangular, cujas dimensões eram 60 metros de largura e 80 metros de comprimento, gastando R$ 20,00 para cada metro linear da cerca. Qual o valor total do gasto para cercar todo o terreno?

a) R$ 2.800,00.

b) R$ 4.800,00.

c) R$ 5.600,00.

d) R$ 6.800,00.

e) R$ 9.600,00.

412. **(Questão 35).** Determine o valor do produto $(2x-y)^2$, sabendo que $4x^2+y^2=8$ e $xy=2$.

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 4.

e) 8.

413. **(Questão 36).** Resolva o sistema de equações abaixo para x e y Reais e determine o valor do produto xy.

$$\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+2y=38 \end{cases}$$

a) 5.

b) 9.

c) 25.

d) 45.

e) 81.

414. **(Questão 37).** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 13 cm. Determine o valor da medida do cateto maior sabendo que o cateto menor mede 5 cm.

a) 6 cm.

b) 8 cm.

c) 10 cm.

d) 11 cm.

e) 12 cm.

415. **(Questão 38).** Uma herança de R\$ 320.000,00 foi dividida entre 3 filhos na seguinte proporção: O mais novo recebeu $\frac{1}{8}$ da herança e o mais velho recebeu $\frac{1}{2}$ da herança. Qual foi o valor recebido pelo filho do meio?

a) R\$ 40.000,00.

b) R\$ 60.000,00.

c) R\$ 120.000,00.

d) R\$ 160.000,00.

e) R\$ 200.000,00.

416. **(Questão 39).** Uma máquina produz 100 unidades de um determinado produto em 4 dias. A empresa recebe uma encomenda de 3.000 unidades desse produto para ser entregue em 30 dias. Quantas máquinas devem ser usadas, no mínimo, para atender à encomenda no prazo dos 30 dias?

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

417. **(Questão 40).** Resolvendo a expressão numérica $\{30-[16-(3+3^2)\div 2]+2^2\}$, encontramos o valor:

a) 12.

b) 15.

c) 18.

d) 20.

e) 24.

5.9 EXAME DE SELEÇÃO 2019.1

418. **(Questão 23).** Um certo trabalhador recebe, em 2018, o salário de R$ 1.500,00. Qual será o seu novo salário em 2019, sabendo-se que ele receberá um reajuste de 7,5% sobre este salário de 2018?

a) R$ 1.575,50.

b) R$ 1.612,50.

c) R$ 1.625,50.

d) R$ 1.650,50.

e) R$ 1.675,50.

419. **(Questão 24).** Encontre o valor de p para que a equação $x^2 + px + 12 = 0$ tenha como raízes os valores 3 e 4.

a) - 12.

b) - 7.

c) 0.

d) 7.

e) 12.

420. **(Questão 25).** Um terreno tem o formato de um triângulo retângulo cuja dimensão de um dos catetos mede 5 m e a dimensão da sua hipotenusa mede 13 m. Qual é a área desse terreno em metros quadrados?

a) 12,5.

b) 25.

c) 30.

d) 32,5.

e) 35.

421. **(Questão 26).** Determine o valor do produto $(x-2y)(2x+3y)$, sabendo que $2x^2-6y^2=10$ e $xy=4$.

a) 2.

b) 4.

c) 6.

d) 10.

e) 14.

422. **(Questão 27).** Resolva o sistema de equações abaixo para x e y Reais e determine o valor da soma $x+y$.

$$\begin{cases} x-y=14 \\ 3x+2y=22 \end{cases}$$

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

423. **(Questão 28).** O professor de matemática lançou o seguinte desafio para seus alunos: calcular a área do quadro da sala de aula, que tinha um formato de um quadrado, sabendo-se apenas que o perímetro desse quadro media 6,0 m. Fazendo-se corretamente os cálculos, o valor encontrado será:

a) 1,5 m^2.

b) 2,25 m^2.

c) 6,0 m^2.

d) 12,0 m^2.

e) 36,0 m^2.

424. **(Questão 29).** Atualmente, no Brasil, os combustíveis utilizados em motores a diesel correspondem a uma mistura de 90% de diesel com 10% de biodiesel, conhecido como B10. O Conselho Nacional de Política Energética poderá aumentar esse percentual até 15% em 2019, o B15. Quantos litros de biodiesel terá, em seu tanque, um automóvel que for abastecido com 50 litros de combustível B15 em 2019?

    a) 15,0 litros.

    b) 12,5 litros.

    c) 10,0 litros.

    d) 7,5 litros.

    e) 5,0 litros.

425. **(Questão 30).** Uma dona de casa costuma fazer café para 5 pessoas utilizando 800 ml de água. Ela recebe a visita inesperada de 3 pessoas que também tomam café. Quanto de água ela deve acrescentar à quantidade original para também servir café a estas 3 pessoas?

    a) 160 ml.

    b) 320 ml.

    c) 480 ml.

    d) 640 ml.

    e) 1280 ml.

426. **(Questão 31).** Encontre o valor final da expressão numérica $\{10+[8-(2+2^2)\div 3]-3^2\}$

    a) 13.

    b) 10.

    c) 9.

    d) 8.

    e) 7.

427. **(Questão 32).** Ao dividirmos um certo número n por 595 obtivemos como resto o número 84. Que número obteremos como resto se dividirmos o número n por 17?

    a) 1.

    b) 6.

    c) 9.

d) 12.

e) 16.

428. **(Questão 33).** Partindo de um papel retangular de dimensões 4 dm e 0,6 m, um professor de Matemática recorta este papel, diminuindo 2 cm no seu comprimento e 1 cm na sua largura. Qual o perímetro, em mm, da figura plana obtida pelo professor?

a) 5.

b) 14.

c) 194.

d) 1940.

e) 1974.

429. **(Questão 34).** Certo pai de família gasta, mensalmente, 25% do seu salário com alimentação e $\frac{2}{3}$ do que lhe sobra com outras despesas necessárias, ficando, ao final destes gastos, com R$ 600,00. Qual o salário desse pai de família?

a) R$ 1.200,00.

b) R$ 2.400,00.

c) R$ 3.000,00.

d) R$ 3.600,00.

e) R$ 7.200,00.

430. **(Questão 35).** Pretendendo comprar um novo brinquedo, um garoto consegue juntar, entre moedas de R$ 0,25 e R$ 0,50, um total de 500 moedas, perfazendo uma quantia de R$ 180,00. Podemos dizer que o garoto juntou quantas moedas de R$ 0,25 e de R$0,50, respectivamente:

a) 360 e 180.

b) 320 e 200.

c) 280 e 220.

d) 240 e 240.

e) 260 e 200.

431. **(Questão 36).** Para produzir certo produto, o produtor tem um custo fixo de R$ 120,00 e um custo variável de R$ 2,40 por unidade do produto produzido. Se o preço unitário de

venda do produto é de R$ 8,00, que quantidade mínima de produtos deve ser vendida para que não haja prejuízo?

a) 12.

b) 15.

c) 21.

d) 22.

e) 24.

432. **(Questão 37).** Para produzir 200 peças em 4 dias são necessárias 8 máquinas trabalhando 15 horas por dia. Tendo-se uma encomenda de 2300 peças para ser entregues em um mês, o serviço inicia com 12 máquinas trabalhando 20 horas por dia; porém, depois de 16 dias de trabalho, 2 máquinas quebram. Quantas horas por dia as máquinas que sobraram devem trabalhar para cumprir a encomenda no prazo previsto?

a) 12.

b) 14.

c) 16.

d) 18.

e) 20.

433. **(Questão 38).** ANULADA.

434. **(Questão 39).** "Dois números cuja soma é 9 e o produto é 20". Podemos representar a frase anterior por:

I. $x+9=20x$

II. $x^2-9x+20$

III. $\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$

IV. $x^2-9x+20=0$

São verdadeiras as afirmativas:

a) III e IV.

b) II e III.

c) II e IV.

d) I e III.

e) I e IV.

435. **(Questão 40).** Andando por uma das margens paralelas de um rio, um homem vê, de um certo ponto, sob uma direção que forma 30^o com a margem, uma árvore na outra margem do rio. Após se deslocar pela margem por 20 m ele passa a avistar a mesma árvore com novo ângulo de 60^o. Qual a largura do rio?

a) 10 m.

b) $10\sqrt{3}$ m.

c) 20 m.

d) $20\sqrt{3}$ m.

e) 40m.

5.10 EXAME DE SELEÇÃO 2020.1

436. **(Questão 23).** Um professor de Matemática do Ifal pede para seus alunos calcularem a área de um trapézio cuja base maior mede 1 metro a mais que a altura, e a base menor 1 metro a menos que a altura. Sabendo que a altura desse trapézio mede 5 metros, qual é, em metros quadrados, a área desse trapézio?

a) 10.

b) 16.

c) 20.

d) 25.

e) 30.

437. **(Questão 24).** Em um jogo de basquete certo jogador acertou a cesta em 10 lançamentos apenas, sendo uns de 3 pontos e outros de 1 ponto. Sabendo que esse jogador marcou 24 pontos neste jogo, quantos lançamentos de 3 pontos ele acertou?

a) 3.

b) 4.

c) 5.

d) 6.

e) 7.

438. **(Questão 25).** Um jardim tem rosas brancas, vermelhas e azuis. Sabendo que 16 são brancas, 14 vermelhas e 10 azuis, qual a porcentagem de rosas brancas nesse jardim?

a) 20 %.

b) 25 %.

c) 30 %.

d) 35 %.

e) 40 %.

439. **(Questão 26).** O salário do diretor de uma determinada escola, em 2019, é de R$ 2.800,00. Sabendo que, em 2020, seu salário será reajustado em 7,5%, qual será o salário do diretor em 2020?

a) R$ 2.940,00.

b) R$ 2.954,00.

c) R$ 2.982,00.

d) R$ 3.010,00.

e) R$ 3.024,00.

440. **(Questão 27).** Qual o resultado que se obtém resolvendo a seguinte expressão numérica:

$$2\{3[(20+5)\div 5-2(10-4)]+8\}?$$

a) 0.

b) 11.

c) 22.

d) 26.

e) 34.

441. **(Questão 28).** Determine o valor do produto $(2x+3y)^2$, sabendo que $4x^2+9y^2=40$ e $xy=2$.

a) 68.

b) 64.

c) 56.

d) 52.

e) 48.

442. **(Questão 29).** Qual o valor do expoente n na equação $2^n = 64$?

a) 4.

b) 5.

c) 6.

d) 7.

e) 8.

443. **(Questão 30).** Qual o resultado da soma das raízes da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$?

a) 4.

b) 2.

c) 0.

d) -2.

e) -4.

444. **(Questão 31).**Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 15 centímetros. Sabendo que este cateto faz um ângulo de 30^o com a hipotenusa deste triângulo, determine o valor da medida do outro cateto, em centímetros.

a) 5.

b) $5\sqrt{3}$.

c) 10.

d) $10\sqrt{3}$.

e) 15.

445. **(Questão 32).** O carro de Roberto faz 10 quilômetros com 1 litro de gasolina e 7 km com 1 litro de álcool. Ele precisa viajar de Atalaia para Maceió que distam aproximadamente 49,7 km para trazer seu filho para fazer a prova de seleção do Ifal. Sabendo que o preço da gasolina e do álcool na região custa em média R$ 4,32 e R$ 3,84, respectivamente, e supondo que Roberto deseja ter o menor gasto possível com combustível na viagem de ida e volta, então ele gastará aproximadamente:

a) R$ 26,88.

b) R$ 42,94.

c) R$ 43,20.

d) R$ 54,53.

e) R$ 57,86.

446. **(Questão 33).** Uma sala tem formato retangular de dimensões: 4 metros por 8 metros, e deve ser revestida por pedras de cerâmicas com formato quadrado de lado 40 cm. Sabendo-se que 1 caixa dessa cerâmica vem com 10 pedras, quantas caixas dessa cerâmica devem ser compradas para revestir o piso dessa sala?

a) 2.

b) 20.

c) 80.

d) 200.

e) 400.

447. **(Questão 34).** Pedrinho juntou moedas de R$ 0,25 e R$ 0,50 num total de 28 moedas. Contando as moedas, percebeu que o total dava R$ 9,00. Quantas moedas de R$ 0,25 ele tinha?

a) 5.

b) 10.

c) 15.

d) 20.

e) 25.

448. **(Questão 35).** Um pai resolve dividir uma quantia de R$ 900 para seus dois filhos de 14 anos e 16 anos em quantias diretamente proporcionais as suas idades. Quanto reais cada um dos filhos irá receber?

a) 100 e 800.

b) 260 e 620.

c) 320 e 580.

d) 420 e 480.

e) 450 e 450.

449. **(Questão 36).** Em uma certa loja, um determinado produto teve um aumento de 25% no seu preço. Depois de algum tempo, o dono da loja percebe que, devido ao aumento, o produto não estava tendo uma saída desejável e resolve dar um desconto sobre o novo valor para que o produto volte a ter o preço que tinha anteriormente. Qual a taxa aplicada no desconto?

a) 10%.

b) 15%.

c) 20%.

d) 25%.

e) 30%.

450. **(Questão 37).** A expressão $\sqrt{1+\sqrt{11+\sqrt[3]{-8}}}$ vale:

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

451. **(Questão 38).** ANULADA

452. **(Questão 39).** ANULADA.

453. **(Questão 40).** ANULADA.

6 REFERÊNCIAS

BENEVIDES, Fabrício Siqueira. **Equação do Segundo Grau: Resultados Básicos**. Material Teórico – Módulo Equação do Segundo Grau. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5wmurqxxyygw0.pdf. Acessado em: 16 de abril, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Exames Anteriores**. Disponível em: https://exame3.ifal.edu.br/exames/listarExamesAnteriores. Acessado em 15 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **EDITAL Nº 20/2019/DSI/PROEN-IFAL (RETIFICADO) EXAME DE SELEÇÃO 2020.1 CURSOS TÉCNICOS INTEGRADOS AO ENSINO MÉDIO**. Disponível em: https://exame3.ifal.edu.br/files/Edital_Exame_Selecao_2020_1_Integrado_RETIFICADO_4_new.pdf. Acessado em 20 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Edital PROIFAL, 2019**. Disponível em: http://www.extensao.ifal.edu.br/editais/editais/programas/proifal/proifal-2019/edital-proifal-2019/view. Acessado em 16 de fevereiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Plano de Desenvolvimento Institucional, 2014-2018**. Disponível em: https://www2.ifal.edu.br/ifal/reitoria/pdi/documentos-pdi-2019-2023/icones-do-site/pdi-2014-2018. Acessado em 20 de janeiro, 2020.

BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. **Plano de Desenvolvimento Institucional, 2019-2023**. Disponível em: https://www2.ifal.edu.br/ifal/reitoria/pdi/pdi-2019-2023-final-revisado.pdf. Acessado em 20 de janeiro, 2020.

BRASIL, L.D.B. **Lei de Diretrizes de Bases da Educação Nacional LDB, Lei n^o. 9.394/96, 20 de dezembro de 1996**. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acessado em: 25 de janeiro, 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Terceira versão. Brasília, DF, 2018**. Disponível: http:

//basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 de março.

CASTRO, Marco Antonio Claret de; ARANTES, Flávia Borges; COSTA, Patrícia Oliveira. **Matemática elementar**. MEC/SEED/UAB. UFSJ, 2010.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 6^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 7^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 8^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática. 9^o ano**. São Paulo: FTD, 2018.

HOLANDA, Francisco Bruno. **Introdução à Porcentagem**. Material Teórico – Módulo Porcentagem e Juros. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddyecs8bh1s8w.pdf. Acessado em: 13 de abril, 2020.

HOLANDA, Francisco Bruno. **Proporção e Conceitos Relacionados**. Material Teórico – Módulo Porcentagem e Juros. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/gfi4cykgi4g0g.pdf. Acessado em: 14 de abril, 2020.

MORAES, Roberto. **1ª Lista de Revisão Matemática I - 3ª etapa** . Instituto Presbiteriano de Educação, 2013. Disponível em: https://pt-static.z-dn.net/files/d22/e99211088ebb426ef1806a7934a5713f.pdf.

NETO, Ângelo Papa. **Potenciação**. Material Teórico – Módulo Potências e Dízimas Periódicas. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/comt38pvow84s.pdf. Acessado em: 16 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Áreas de Figuras Planas: Parte 1**. Material Teórico – Módulo Áreas de Figuras Planas. Portal da Matemática, OBMEP. 03 de setembro, 2018. Disponível em: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dj018tnxmk8wc.pdf. Acessado em 08 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Produtos Notáveis**. Material Teórico – Módulo Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: `https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf`. Acessado em: 15 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo**. Material Teórico – Módulo Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: `https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf`. Acessado em: 09 de abril, 2020.

PARENTE, Ulisses Lima. **Sistemas de equações do 1^o grau**. Material Teórico – Módulo Sistemas de equações do 1^o grau. Portal da Matemática, OBMEP. Disponível: `https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/ddxv6wgo91k40.pdf`. Acessado em: 12 de abril, 2020.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. UFSC, 2005.

SANTOS, Marcus Vinícios Faria. **Geometria plana**. 1ª Edição, 2014. Disponível em `encurtador.com.br/myFN1`.