



Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia



ROBSON DOS SANTOS SILVA

**ESTIMATIVAS PARA O ÍNDICE DE SUPERFÍCIES COMPACTAS EM
3-VARIEDADES COM A PROPRIEDADE DE KILLING**

Programa: PhD Program in Mathematics UFAL - UFBA
Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

MACEIÓ
MARÇO DE 2020

Robson dos Santos Silva

Estimativas para o índice de superfícies compactas em
3-variedades com a propriedade de Killing

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió
Março de 2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586e Silva, Robson dos Santos.
Estimativas para o índice de superfícies compactas em 3-variedades com a propriedade de Killing / Robson dos Santos Silva. – 2020.
59 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2020.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia.

Bibliografia: f. 57-59.

1. Superfícies mínimas. 2. Espaços de curvatura constante. 3. Morse, Teoria de. 4. Propriedade de Killing. 5. Cohomologia. I. Título.

CDU: 514.752.2

FOLHA DE APROVAÇÃO

AUTOR: ROBSON DOS SANTOS SILVA

Estimativas para o índice de superfícies compactas em 3-variedades com a propriedade de Killing

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Trabalho aprovado, Maceió, 13 de março de 2020.

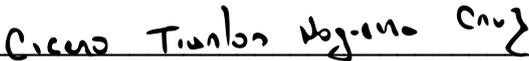
Banca Examinadora

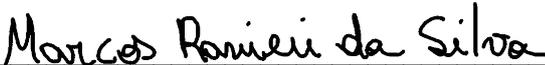

Prof. Dr. Marcos Petrucio de A. Cavalcante - UFAL (orientador)


Prof. Dr. Álvaro Krüger Ramos - UFRGS


Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS


Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira - UEFS


Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL


Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva - UFAL

À meus pais, João e Josefa, e aos meus irmãos,
Alex, Luciana, Tatiana, Alessandra, Elaine e
Thaise.

AGRADECIMENTOS

À meus pais, João de Jesus Silva e Josefa dos Santos Silva, que sempre trabalharam muito e, tendo enfrentado todas as dificuldades na criação de sete filhos, acreditaram na importância dos estudos e jamais deixaram de me apoiar e me ajudar no que foi possível.

À meus irmãos, Alex, Luciana, Tatiana, Alessandra, Elaine e Thaise, que sempre me motivaram a seguir nos estudos e nunca esqueceram de mim, apesar de minha longa ausência enquanto trabalhei nesta tese.

Ao meu orientador, o prof. Marcos Petrucio, por ter estado sempre presente em cada etapa deste trabalho, por ter me mostrado maneiras mais eficazes de estudar matemática, pela paciência frente às minhas dificuldades e erros, e por ter acreditado em mim durante tanto tempo. Devo muito a ele.

Aos meus amigos Vinicius, Matheus, Diego e Samuel que durante todos esses anos que passei na UFAL, nos bons ou nos maus momentos, sempre estiveram ao meu lado. A companhia deles foi fundamental para compensar a distância de minha família, de modo que é difícil encontrar palavras para agradecer. Sempre me lembrarei de nossas conversas com saudade.

Aos professores Márcio Batista e Feliciano Vitória, do Instituto de Matemática, pelas aulas e pela ajuda em alguns passos desta tese.

Aos meus colegas de doutorado, Moreno, Anderson, Sidney, Ranilze, Iury, Manuel, Rodrigo, Gilberto, Wagner, com os quais discuti muitas questões matemáticas durante o desenvolvimento desta tese.

Ao professor Darlan de Oliveira, antigo colega de doutorado e agora membro da banca examinadora, que me ajudou a desenvolver ou corrigir muitas contas que fiz nesta tese. Sem sua contribuição este trabalho teria sido muito mais difícil e lento.

Ao professor Álvaro Ramos (também membro da banca examinadora), que deu importantes dicas sobre possíveis exemplos nos quais nossos resultados se aplicam, além de ajudar com alguns cálculos.

Aos professores Almir Rogério, Marcos Ranieri e Cícero Tiarlos, pela participação na banca examinadora, bem como pelas críticas e sugestões feitas a este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Deus, por ter permitido tudo isso.

Provamos através da lógica, mas descobrimos a partir da intuição.

Henri Poincaré

RESUMO

Nesta tese estudamos dois tópicos distintos. Na primeira parte, obtemos uma estimativa para o índice de Morse de superfícies M^2 , mínimas ou com curvatura média constante, compactas, imersas em variedades tridimensionais \bar{M}^3 que têm a propriedade de Killing, isto é, admitem um referencial ortonormal de campos de Killing. Especificamente, provamos que o índice de Morse de tais superfícies é limitado por baixo por uma função linear de seu gênero topológico. Na segunda parte consideramos uma subvariedade \bar{M}^n compacta e com fronteira livre imersa em uma variedade Riemanniana \bar{M}^{n+k} ($n \geq 3$) compacta, positivamente curvada e com fronteira convexa. Provamos que existe uma constante explícita $C(n)$ tal que se a norma da segunda forma fundamental sem traço Φ de M é limitada por $C(n)$, então seu primeiro grupo de cohomologia $H^1(M)$ é trivial. Em particular, M tem apenas uma componente de fronteira. Além disso, para $k = 1$, sob hipóteses no tensor curvatura de \bar{M}^{n+1} e na convexidade de sua fronteira, provamos que para $2 \leq p \leq n - 2$, existe uma constante $C(n, p)$ tal que se $|\Phi| \leq C(n, p)$, então $H^p(M)$ é trivial.

Palavras-chave: Superfícies mínimas e CMC. Índice de Morse. Propriedade de Killing. Segunda forma fundamental sem traço. Grupos de cohomologia.

ABSTRACT

In this thesis we study two distinct topics. First, we obtain Morse index estimates for minimal or constant mean curvature compact surfaces M^2 immersed in 3-manifolds \bar{M}^3 satisfying the Killing property, that is, manifolds that admit an orthonormal frame of Killing vector fields. Specifically, we prove that Morse index of these surfaces is bounded from below by a linear function of its topological genus. In the second topic we consider a compact free-boundary submanifold \bar{M}^n of a Riemannian manifold \bar{M}^{n+k} , $n \geq 3$, positively curved and with convex boundary. We prove that there exists an explicit constant $C(n)$, such that if the norm of the traceless second fundamental form Φ of M is bounded by $C(n)$ then the first cohomology group $H^1(M)$ vanishes. In particular, M has only one boundary component. Moreover, if $k = 1$, under suitable conditions on the curvature of \bar{M}^{n+1} and on the convexity of its boundary we prove that for $2 \leq p \leq n - 2$, there exists a constant $C(n, p)$ such that if $|\Phi| \leq C(n, p)$ then $H^p(M)$ vanishes.

Keywords: Minimal and CMC surfaces. Morse index. Property of Killing. Traceless second fundamental form. Cohomology groups.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	PRELIMINARES	20
2.1	Tensores em variedades Riemannianas	20
2.2	Geometria das subvariedades	23
2.3	Variedades Riemannianas com a propriedade de Killing	25
3	ESTIMATIVA DO ÍNDICE PARA SUPERFÍCIES CMC COMPACTAS	32
3.1	Funções teste e campos vetoriais harmônicos	32
3.2	Estabilidade de hipersuperfícies fechadas	36
3.3	Prova dos resultados	43
4	GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE SUBVARIEDADES COM FRON-	
	TEIRA LIVRE	46
4.1	p-formas em variedades compactas com fronteira	47
4.2	prova dos resultados principais	53
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Hipersuperfícies mínimas são pontos críticos do funcional área, enquanto hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC) são pontos críticos do funcional área para variações que preservam o volume. Se uma hipersuperfície mínima minimiza área para pequenas perturbações, então dizemos que ela é estável.

Conexões entre as propriedades topológicas e geométricas de hipersuperfícies M mínimas têm sido estudadas a partir do índice de uma forma quadrática Q , definida em $C^\infty(M)$, associada à segunda variação do funcional área. Este número é chamado *índice de Morse* ou *índice de estabilidade* de M e é denotado por $\text{Ind}(M)$. Do ponto de vista analítico, o índice indica o número de autovalores negativos do operador de jacobi J , um operador diferencial elíptico de segunda ordem associado a Q . Do ponto de vista geométrico, o índice indica o número de direções cujas variações decrescem área. Em particular, M é estável se, e somente se, seu índice é zero. Definimos também a *nulidade* de M , denotada por $\text{Nul}(M)$, como a dimensão do subespaço das autofunções de J associadas ao autovalor $\lambda^J = 0$.

Em (SCHOEN; YAU, 1979) R. Schoen e S.T. Yau provaram que se M^2 é uma superfície mínima, fechada, orientável e estável, mergulhada em uma variedade tri-dimensional \bar{M}^3 com curvatura escalar positiva, então M^2 é uma 2-esfera. Esta ligação entre a topologia de uma superfície e seu índice, particularmente no caso de superfícies mínimas, tem sido, de fato, corroborada por vários resultados. Por exemplo, Fischer-Colbrie-Schoen (FISCHER-COLBRIE; SCHOEN, 1980), do Carmo-Peng (CARMO; PENG, 1980) e Pogorelov (POGORELOV, 1981) provaram independentemente que as únicas superfícies mínimas, estáveis e orientáveis em \mathbb{R}^3 são os planos.

Em (ROS, 2006) Ros observou que quando uma 1-forma harmônica em uma superfície mínima fechada é vista como um campo vetorial de \mathbb{R}^3 , suas funções coordenadas na base canônica são boas candidatas a funções teste para o operador de estabilidade. Ele provou que o índice de uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 é limitado por baixo por uma função linear de seu gênero. Precisamente, ele provou o seguinte

Teorema 1.0.1 (ROS, 2006) *Seja M uma superfície mínima, completa e não plana em \mathbb{R}^3 . Então M tem índice finito se, e somente se, sua curvatura total é finita. Além disso,*

$$Ind(M) \geq \frac{2g}{3}, \text{ se } M \text{ é orientável}$$

e

$$Ind(M) \geq \frac{g}{3}, \text{ se } M \text{ é não-orientável.}$$

Este resultado de Ros foi posteriormente melhorado por Chodosh-Maximo em (CHODOSH; MAXIMO, 2016) e (CHODOSH; MAXIMO, 2018). Eles provaram o

Teorema 1.0.2 *Suponha que M é uma superfície mínima, orientável e completa, imersa em \mathbb{R}^3 , com gênero g e r fins. Então*

$$Ind(M) \geq \frac{2}{3}(g + r) - 1.$$

Para hipersuperfícies mínimas fechadas da esfera unitária, Savo obteve em (SAVO, 2010) o seguinte resultado:

Teorema 1.0.3 *Seja M^n uma hipersuperfície mínima de \mathbb{S}^{n+1} . Assuma que $b_1(M) \geq 1$ e $n \geq 3$. Então,*

$$Ind(M) \geq \frac{b_1(M)}{\binom{n+2}{2}} + n + 2.$$

Para o caso de superfícies ($n = 2$) mínimas em \mathbb{S}^3 , Savo também provou em (SAVO, 2010) que se o gênero g de M é tal que $g \geq 1$, então

$$Ind(M) \geq \frac{g}{2} + 4.$$

Posteriormente, Ambrozio-Carlotto-Sharp em (AMBROZIO et al., 2018a), usando as ideias de Ros e Savo, conseguiram mostrar que o índice de uma hipersuperfície mínima $M^n \hookrightarrow \bar{M}^{n+1}$ é limitado por baixo por uma função linear de seu primeiro número de Betti em variedades \bar{M}^{n+1} que podem ser mergulhadas em algum espaço euclidiano.

Alguns destes resultados confirmam parcialmente a seguinte conjectura, devida a Marques-Neves (MARQUES, 2014), (NEVES, 2014):

Conjectura 1.0.1 *Seja \bar{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínima, fechada, mergulhada M^n , vale a desigualdade*

$$Ind(M) \geq Cb_1(M),$$

onde $b_1(M)$ é o primeiro número de Betti de M .

Para estudar a estabilidade de hipersuperfícies CMC, consideramos a forma quadrática Q restrita ao espaço \mathcal{F} das funções suaves com média nula em M . Definimos o *índice fraco de Morse* de M , denotado por $\text{Ind}_W(M)$, como a dimensão máxima de um subespaço de \mathcal{F} no qual $Q|_{\mathcal{F}}$ é negativa definida. Uma hipersuperfície CMC compacta é estável se $\text{Ind}_W(M) = 0$.

As hipersuperfícies CMC, fechadas e estáveis em formas espaciais, isto é, \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n , foram classificadas por Barbosa-do Carmo e Barbosa-do Carmo-Eschenburg em (BARBOSA; CARMO, 2012) e (BARBOSA et al., 1988).

Uma estimativa para o índice fraco de superfícies CMC compactas, foi obtida por Cavalcante-de Oliveira em (CAVALCANTE; OLIVEIRA, 2017). Eles usaram métodos similares aos de Ros e Savo para obter cotas inferiores para o índice fraco de superfícies CMC compactas, imersas em \mathbb{R}^3 ou em \mathbb{S}^3 como funções lineares do gênero. Precisamente, eles provaram o

Teorema 1.0.4 *Seja M^2 uma superfície CMC, com gênero g , imersa em uma forma espacial \bar{M}_c^3 , com $c \in \{0, 1\}$. Então,*

$$\text{Ind}_w(M) \geq \frac{g}{3+c}.$$

Lembremos que um *campo de Killing* numa variedade Riemanniana M é um campo $E \in TM$ cujo fluxo $\{\phi_t\}$ consiste de isometrias locais de M . Em termos da conexão de Levi-Civita, uma condição necessária e suficiente para que o campo vetorial E seja um campo de Killing é que, para todos $X, Y \in TM$, tenha-se

$$\langle \nabla_X E, Y \rangle + \langle \nabla_Y E, X \rangle = 0.$$

Em nosso principal resultado consideraremos superfícies mínimas compactas, com curvatura de Ricci positiva, imersas em variedades tridimensionais que admitem um referencial ortonormal global de campos de Killing (propriedade de Killing, ver definição 2.3.1 e observação 2.3.1). Mostraremos que o índice de estabilidade de tais superfícies é limitado por baixo por uma função linear de seu gênero. Primeiramente, no entanto, vamos provar o seguinte resultado mais geral:

Teorema 1.0.5 *Seja M^2 uma superfície mínima, compacta, orientada e com gênero g , isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana \bar{M}^3 que tem a propriedade de Killing. Então,*

$$\text{Ind}(M) + \text{Nul}(M) \geq \frac{g}{3}.$$

Nosso principal resultado segue, então, como consequência do Teorema 1.0.5:

Teorema 1.0.6 *Seja M^2 uma superfície mínima, compacta, orientada, com curvatura de Ricci positiva e com gênero g , isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana \bar{M}^3 que tem a propriedade de Killing. Então,*

$$Ind(M) \geq \frac{g}{3}.$$

Em particular, reobtemos o resultado de Ambrozio-Carlotto-Sharp em (AMBROZIO et al., 2018a) para superfícies mínimas compactas do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 .

Além disso, para superfícies de curvatura média constante não nula vale o

Teorema 1.0.7 *Seja M^2 uma superfície compacta, orientada, com curvatura média constante e gênero g , isometricamente imersa em uma variedade Riemanniana \bar{M}^3 que tem a propriedade de Killing. Então,*

$$Ind_W(M) \geq \frac{g}{3} - 1.$$

Mudando agora o foco de nossa atenção, vamos falar sobre grupos de cohomologia de subvariedades compactas com fronteira livre.

Seja \bar{M}^{n+k} uma variedade Riemanniana compacta, orientável, com fronteira suave. Dizemos que uma variedade $M^n \subset \bar{M}^{n+k}$ é uma hipersuperfície com *fronteira livre* se sua fronteira ∂M intersecta a fronteira de \bar{M} fazendo um ângulo reto. Inicialmente não impomos qualquer condição na curvatura média de M . Se assumimos, por exemplo, que M é mínima, então sabemos que M é um ponto crítico do funcional área para variações que mantêm a fronteira de M na fronteira de \bar{M} . Este é um tópico clássico em geometria diferencial e muitos novos resultados têm sido obtidos recentemente, especialmente motivados por uma série de trabalhos de Fraser e Schoen em (FRASER; SCHOEN, 2011), (FRASER; SCHOEN, 2013), (FRASER; SCHOEN, 2015) e (FRASER; SCHOEN, 2016).

Em particular, resultados do tipo *gap* para hipersuperfícies mínimas com fronteira livre têm sido obtidos por vários autores. Em um trabalho pioneiro, Ambrozio e Nunes (AMBROZIO; NUNES, 2016) mostraram que dentre todas as superfícies mínimas com fronteira livre da bola unitária $B^3 \subset \mathbb{R}^3$, o disco equatorial e o catenóide crítico são as únicas que satisfazem uma condição *pinching* no comprimento da segunda forma fundamental. Este resultado foi estendido por Li e Xiong em (LI; XIONG, 2017) para o caso de superfícies mínimas com fronteira livre em bolas geodésicas do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 ou do hemisfério \mathbb{S}_+^3 e recentemente por Barbosa-Cavalcante-Pereira para superfícies CMC (BARBOSA et al., 2019). Ver também (BARBOSA et al., 2018) para uma versão em dimensão alta.

Usando uma técnica diferente, Cavalcante, Mendes e Vitorio provaram em (CAVALCANTE et al., 2018) alguns teoremas topológicos do tipo *gap* para subvariedades com fronteira livre (sem hipótese na curvatura média) na bola unitária B^{n+k} , $n \geq 3$ em termos de cotas para a segunda forma fundamental sem traço.

Nesta tese, vamos estender os resultados de Cavalcante-Mendes-Vitorio provando alguns teoremas para o primeiro grupo de cohomologia de subvariedades com fronteira livre de uma classe de variedades Riemannianas positivamente curvadas e com fronteira. O caso modelo de nossos resultados é uma bola convexa da esfera redonda \mathbb{S}^{n+1} .

Vamos também obter algumas generalizações para grupos de cohomologia de ordens maiores.

Denotando por Φ a segunda forma fundamental sem traço de M , nosso primeiro resultado nesta linha pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.0.8 *Seja \bar{M}^{n+k} uma variedade Riemanniana, $n \geq 3$, com bordo estritamente convexo, isto é, $II^{\partial\bar{M}}(X, Y) \geq \lambda\langle X, Y \rangle$, para algum $\lambda > 0$ e para todos X, Y tangentes ao bordo de \bar{M} . Seja M^n uma subvariedade de \bar{M}^{n+k} orientada e com fronteira livre e suponha que o tensor de Riemann de \bar{M} satisfaz*

$$\sum_i \bar{R}_{inin} \geq n - 1$$

para qualquer base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_x M$, e $x \in M$. Se valer

$$|\Phi|^2 \leq \frac{4(n-1)}{n},$$

então $H^1(M; \mathbb{R}) = H^{n-1}(M; \mathbb{R}) = \{0\}$. Em particular, o bordo de M tem apenas uma componente conexa.

Como consequência imediata temos o

Corolário 1.0.1 *Seja $B \subset \mathbb{S}^{n+1}$ um domínio estritamente convexo da esfera unitária e seja M^n uma hipersuperfície com fronteira livre em B , $n \geq 3$. Se valer $|\Phi|^2 \leq \frac{4(n-1)}{n}$, então $H^1(M; \mathbb{R}) = H^{n-1}(M; \mathbb{R}) = \{0\}$ e o bordo de M tem apenas uma componente conexa.*

Observemos que o Teorema 1.0.8 e o Corolário 1.0.1 podem também ser vistos como as versões com fronteira livre dos resultados em (CAVALCANTE et al., 2014), (ZHU, 2015) e (ZHU; FANG, 2014).

Para provar o Teorema 1.0.8 vamos mostrar que qualquer 1-forma harmônica em M que é tangente ou normal ao bordo anula-se, e a conclusão segue pelo teorema de Hodge-de Rham para variedades compactas com fronteira (ver (AMBROZIO et al., 2018b), Teorema 3).

A idéia básica, como em (CAVALCANTE et al., 2018), é obter uma estimativa da curvatura usando a fórmula de Weitzenböck, equação de Gauss e a desigualdade de Kato. Observamos que em (CAVALCANTE et al., 2018) foi usada também uma desigualdade tipo Hardy para subvariedades provada em (BATISTA et al., 2017), mas ela não é necessária em nosso caso.

A mesma ideia pode também ser aplicada para p -formas para obter resultados similares para grupos de cohomologia de ordem maior de hipersuperfícies com fronteira livre em variedades com bordo p -convexo e com uma hipótese no tensor curvatura (ver definição 4.0.1). Mais precisamente, temos

Teorema 1.0.9 *Seja \bar{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta com bordo p -convexo, $2 \leq p \leq n - 2$, com tensor curvatura puro e satisfazendo $\bar{K}_{ij} \geq 1$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientada com fronteira livre em \bar{M}^{n+1} . Se valer*

$$|\Phi|^2 \leq \frac{4p(n-p)}{n},$$

então $H^p(M; \mathbb{R}) = \{0\}$.

Corolário 1.0.2 *Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientada e com fronteira livre de um domínio B em \mathbb{S}^{n+1} com bordo p -convexo, $2 \leq p \leq n - 2$. Se valer $|\Phi|^2 \leq \frac{4p(n-p)}{n}$, então $H^p(M; \mathbb{R}) = \{0\}$.*

Novamente, o Teorema 1.0.9 e o Corolário 1.0.2 podem ser vistos como as versões com fronteira livre de alguns resultados em (LIN, 2015c).

2 Preliminares

Neste capítulo vamos fixar algumas notações que utilizaremos no decorrer do texto.

2.1 TENSORES EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Denotamos por TM o fibrado tangente de M e por $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis definidas em M .

Definição 2.1.1 *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação r -linear*

$$T : TM \times \cdots \times TM \rightarrow \mathcal{D}(M).$$

Ou seja, dados $Y_1, \dots, Y_r \in TM$, $T(Y_1, \dots, Y_r) \in \mathcal{D}(M)$ e T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in TM$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Exemplo 2.1.1 *A partir da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de uma variedade Riemanniana definimos o tensor $g : TM \times TM \rightarrow \mathcal{D}(M)$ por*

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

g é claramente um tensor de ordem 2, chamado tensor métrico.

Vejamos agora como a noção de derivada covariante se estende aos tensores.

Definição 2.1.2 *Seja T um tensor de ordem r . A derivada covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r + 1)$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \cdots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in TM$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

Em uma variedade Riemanniana, a métrica Riemanniana permite identificar o campo $X \in TM$ com o 1-tensor $X : TM \rightarrow \mathcal{D}(M)$ dado por $X(Y) = \langle X, Y \rangle$, para todo $Y \in TM$.

Por simplicidade, ao longo do texto, 1-tensores serão denotados apenas tensores. Sendo assim, a derivada covariante do tensor X é o 2-tensor ∇X dado por

$$\begin{aligned}\nabla X(Y, Z) &= Z(X(Y)) - X(\nabla_Z Y) \\ &= Z\langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle,\end{aligned}$$

para todo $Y, Z \in TM$.

Dado um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em M , o produto interno de dois tensores T e S na métrica do fibrado tangente TM é definido por

$$\langle T, S \rangle = \sum_k T(e_k)S(e_k);$$

e o produto interno dos 2-tensores P e Q é definido por

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k,j} P(e_k, e_j) \cdot Q(e_k, e_j).$$

A partir desta última definição e das observações acima, fazendo $P = \nabla T$ e $Q = \nabla S$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla T, \nabla S \rangle &= \sum_{k,j} \nabla T(e_k, e_j) \cdot \nabla S(e_k, e_j) \\ &= \sum_{k,j} \langle \nabla_{e_k} T, e_j \rangle \langle \nabla_{e_k} S, e_j \rangle \\ &= \sum_k \sum_j \langle \nabla_{e_k} T, \langle \nabla_{e_k} S, e_j \rangle e_j \rangle \\ &= \sum_k \langle \nabla_{e_k} T, \nabla_{e_k} S \rangle.\end{aligned}$$

O traço de um 2-tensor P é definido por

$$\text{tr}(P) = \sum_k P(e_k, e_k).$$

Observe que fazendo o produto interno do 2-tensor P com o tensor métrico g obtemos

$$\begin{aligned}\langle P, g \rangle &= \sum_{k,j} P(e_k, e_j) \cdot g(e_k, e_j) \\ &= \sum_{k,j} P(e_k, e_j) \cdot \delta_{kj} \\ &= \sum_k P(e_k, e_k) \\ &= \text{tr}(P).\end{aligned}$$

Em particular, o traço do 2-tensor ∇T é dado por

$$\text{tr}(\nabla T) = \sum_k \nabla T(e_k, e_k) = \sum_k \langle \nabla_{e_k} T, e_k \rangle.$$

O divergente de um campo vetorial $X \in TM$, denotado por $\text{div}X$, é definido por

$$\text{div}X = -\text{tr}(\nabla X).$$

Se $A : T_p M \rightarrow T_p M$ é um operador linear e $X \in T_p M$, definimos o operador $\nabla_X A$ por

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X AY - A(\nabla_X Y),$$

para todo $Y \in T_p M$. O seguinte lema revela uma interessante propriedade do operador $\nabla_X A$.

Lema 2.1.1 *Se $A : T_p M \rightarrow T_p M$ é um operador linear auto-adjunto, então o operador $\nabla_X A$ também é auto-adjunto, isto é, para todo $Y, Z \in T_p M$ tem-se*

$$\langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle = \langle Y, (\nabla_X A)Z \rangle.$$

Demonstração: Usando a definição de $\nabla_X A$ e a compatibilidade da métrica, temos que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X AY - A(\nabla_X Y), Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X AY, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, AZ \rangle \\ &= X\langle AY, Z \rangle - \langle AY, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Y, AZ \rangle \\ &= X\langle Y, AZ \rangle - \langle AY, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Y, AZ \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, AZ \rangle + \langle Y, \nabla_X AZ \rangle - \langle AY, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_X Y, AZ \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X AZ - A(\nabla_X Z) \rangle \\ &= \langle Y, (\nabla_X A)Z \rangle. \end{aligned}$$

□

Seja M^n uma variedade Riemanniana e X, Y campos vetoriais em TM . Definimos o *tensor curvatura* R de M como a aplicação $R(X, Y) : TM \rightarrow TM$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M . Para a demonstração de que R é um 3-tensor, ver (CARMO, 1988).

Dado um ponto $p \in M$ e uma base ortonormal $\{e_k\}$ de $T_p M$, o tensor de Ricci de M em p é definido por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{k=1}^n \langle R(X, e_k)Y, e_k \rangle.$$

Seja $S \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e seja $\{X_1, X_2\}$ uma base de $T_p S$. Definimos a *curvatura seccional* de S em p como o número real

$$K(X_1, X_2) = \frac{\langle R(X_1, X_2)X_1, X_2 \rangle}{|X_1 \wedge X_2|^2},$$

onde $|X_1 \wedge X_2|^2 = |X_1|^2|X_2|^2 - \langle X_1, X_2 \rangle^2$.

A curvatura seccional K de S independe da base particular $\{X_1, X_2\}$ de S , ver (CARMO, 1988).

2.2 GEOMETRIA DAS SUBVARIÉDADES

Sejam M^n e \bar{M}^{n+k} variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica. Consideremos ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \bar{M} , respectivamente, de forma que

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top,$$

para todos $X, Y \in TM$.

Definimos a *segunda forma fundamental* B de M como a aplicação bilinear e simétrica $B : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Em particular, isto significa que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y).$$

A partir da segunda forma fundamental, obtem-se uma importante relação entre as curvaturas seccionais de M e \bar{M} . Tal relação é dada pela Equação de Gauss (para uma demonstração, ver (CARMO, 1988)):

Proposição 2.2.1 (*Equação de Gauss*). *Sejam $p \in M$ e X, Y vetores ortonormais de $T_p M$. Então*

$$K_M(X, Y) - K_{\bar{M}}(X, Y) = \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle - |B(X, Y)|^2.$$

Dado um ponto $p \in M$ e um vetor normal unitário $N \in T_p M^\perp$, definimos o operador linear $A_N : T_p M \rightarrow T_p M$, chamado *operador de Weingarten* ou *operador de forma* de M em p , associado a N , por

$$A_N X = -\bar{\nabla}_X N,$$

para todo $X \in T_p M$. O operador A_N é, de fato, auto-adjunto e está relacionado com a segunda forma fundamental B pela equação

$$\langle B(X, Y), N \rangle = \langle A_N X, Y \rangle.$$

O operador A_N também é chamado de segunda forma fundamental. Quando a codimensão de M em \bar{M} é 1, escrevemos simplesmente A no lugar de A_N . Os autovalores de A são chamados curvaturas principais de M .

O vetor curvatura média de M no ponto p é definido por

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)(p),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Dizemos que M é uma subvariedade mínima de \bar{M} se $\vec{H}(p) = 0$ para todo $p \in M$.

No seguinte lema demonstraremos a *Equação de Codazzi*, um resultado clássico que será útil na prova de nosso resultado principal. Para isto, suporemos que a imersão isométrica $M \hookrightarrow \bar{M}$ tem codimensão 1 e que $N \in T\bar{M}$ é um campo vetorial normal unitário ao longo de M .

Lema 2.2.1 (*Equação de Codazzi*). Se \bar{R} é o tensor curvatura de \bar{M} , então

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle = \langle (\nabla_Y A)X, Z \rangle - \langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle.$$

Demonstração: Seja $B(X, Y)$ a segunda forma fundamental da imersão $M \hookrightarrow \bar{M}$. Assim, $B(X, Y) = \langle AX, Y \rangle N$ e $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$ para todo X, Y em TM . Logo

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z) \\ &= R(X, Y)Z + B(Y, \nabla_X Z) - A_{B(X, Z)} Y + \nabla_Y^\perp B(X, Z) - B(X, \nabla_Y Z) \\ &\quad + A_{B(Y, Z)} X - \nabla_X^\perp B(Y, Z) + B(\nabla_X Y, Z) - B(\nabla_Y X, Z). \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp B(Y, Z) &= \nabla_X^\perp (\langle AY, Z \rangle N) \\ &= X \langle AY, Z \rangle N + \langle AY, Z \rangle \nabla_X^\perp N \\ &= \langle \nabla_X AY, Z \rangle N + \langle AY, \nabla_X Z \rangle N, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\nabla_X^\perp N = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, N \rangle &= \langle \nabla_Y^\perp B(X, Z), N \rangle - \langle B(\nabla_Y X, Z), N \rangle - \langle B(X, \nabla_Y Z), N \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), N \rangle + \langle B(\nabla_X Y, Z), N \rangle + \langle B(Y, \nabla_X Z), N \rangle \\
&= \langle \nabla_Y AX, Z \rangle + \langle AX, \nabla_Y Z \rangle - \langle A(\nabla_Y X), Z \rangle - \langle AX, \nabla_Y Z \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_X AY, Z \rangle - \langle AY, \nabla_X Z \rangle + \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle + \langle AY, \nabla_X Z \rangle \\
&= \langle \nabla_Y AX, Z \rangle - \langle A(\nabla_Y X), Z \rangle - \langle \nabla_X AY, Z \rangle + \langle A(\nabla_X Y), Z \rangle \\
&= \langle (\nabla_Y A)X, Z \rangle - \langle (\nabla_X A)Y, Z \rangle.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. □

2.3 VARIEDADES RIEMANNIANAS COM A PROPRIEDADE DE KILLING

Nesta parte do trabalho vamos definir a propriedade de Killing e dar exemplos de variedades que têm esta propriedade.

Definição 2.3.1 *Dizemos que uma variedade Riemanniana M tem a propriedade de Killing se numa vizinhança de cada ponto de M existe um referencial ortonormal local $\{X_1, \dots, X_n\}$ tal que cada X_i é um campo vetorial de Killing. Um tal referencial é chamado referencial de Killing.*

Este conceito foi introduzido por J. D'atri e H. Nickerson em (D'ATRI; NICKERSON, 1968). Em particular, eles provaram o seguinte

Teorema 2.3.1 (D'ATRI; NICKERSON, 1968) *Se M tem a propriedade de Killing, então todas as suas curvaturas seccionais são não-negativas.*

Posteriormente, Shûkichi Tanno provou um resultado mais restritivo para o caso de variedades Riemannianas tridimensionais com a propriedade de Killing:

Teorema 2.3.2 (TANNO, 1976) *Se uma variedade Riemanniana tridimensional M^3 admite um referencial ortonormal local $\{E_1, E_2, E_3\}$ de campos de Killing, então M tem curvatura seccional constante não-negativa.*

Observação 2.3.1. Ao longo desta tese, quando nos referirmos à *propriedade de Killing*, estaremos considerando que o referencial $\{X_1, \dots, X_n\}$ na definição 2.3.1 está definido *globalmente* na variedade M .

Exemplos de variedades com a propriedade de Killing. Com o objetivo de encontrar variedades com a propriedade de Killing, vamos lembrar aqui algumas definições e propriedades de grupos de Lie, pois, como veremos, há uma importante classe dessas variedades que têm esta propriedade.

Seja G um grupo de Lie e, para cada $g \in G$, sejam L_g e R_g os difeomorfismos de G dados pelas translações à esquerda e à direita, respectivamente. Isto é,

$$L_g(x) = gx \quad \text{e} \quad R_g(x) = xg,$$

para todo $x \in G$.

Um campo vetorial X em G é dito ser invariante à esquerda se para todo $g \in G$, X está L_g -associado a si mesmo, isto é, $dL_g \circ X = X \circ L_g$. Isto significa que

$$X(L_g h) = d(L_g)_h X(h),$$

de sorte que $X = dL_g X$, para todo $g \in G$. Analogamente, X é invariante à direita se $X = dR_g X$ para todo $g \in G$. Pontuamos aqui o fato de que campos vetoriais invariantes à esquerda e campos vetoriais invariantes à direita são suaves (ver (ALEXANDRINO; BETTIOL, 2015), lema 1.10).

Definição 2.3.2 *Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em um grupo de Lie G é invariante à esquerda se L_g é uma isometria para todo $g \in G$, isto é, se para todo $g, h \in G$ e $X, Y \in T_h G$,*

$$\langle d(L_g)_h X, d(L_g)_h Y \rangle_{L_g h} = \langle X, Y \rangle_h.$$

Analogamente, uma métrica é *invariante à direita* se a translação à direita R_g é uma isometria.

Definição 2.3.3 *Uma métrica bi-invariante em um grupo de Lie G é uma métrica Riemanniana que é simultaneamente invariante à esquerda e à direita.*

É um fato conhecido que todo grupo de Lie compacto G admite uma métrica bi-invariante (ver (ALEXANDRINO; BETTIOL, 2015), proposição 2.24).

Seja G um grupo de Lie, e o elemento neutro de G e tome $v \in T_e G$. Definamos, para cada $x \in G$, o campo V dado por $V(x) = d(L_x)_e(v)$. Afirmamos que V é o campo vetorial invariante à esquerda de G definido por v . De fato, para todos $x, y \in G$, temos que

$$\begin{aligned} d(L_y)_x V(x) &= d(L_y)_x (d(L_x)_e(v)) \\ &= d(L_y \circ L_x)_e(v) \\ &= d(L_{yx})_e(v) \\ &= V(yx). \end{aligned}$$

O lema que demonstraremos agora revelará uma importante propriedade do fluxo gerado por esse campo V .

Lema 2.3.1 *Seja $\alpha(t) = \phi_t(e)$ o fluxo de V pela identidade. Então, o fluxo de V satisfaz*

$$\phi_t(x) = R_{\alpha(t)}(x).$$

Demonstração: Seja, para $x \in G$, $\alpha_x(t) = R_{\alpha(t)}(x)$. Uma vez que

$$\alpha_x(t) = x\alpha(t) = L_x(\alpha(t)),$$

obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_x(t) = d(L_x)_{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t).$$

Como $\alpha(t) = \phi_t(e)$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t) = V(\alpha(t)) = d(L_{\alpha(t)})_e(v),$$

de onde segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\alpha_x(t) &= d(L_x)_{\alpha(t)} d(L_{\alpha(t)})_e(v) \\ &= d(L_x \circ L_{\alpha(t)})_e(v) \\ &= d(L_{x\alpha(t)})_e(v) \\ &= V(x\alpha(t)) \\ &= V(\alpha_x(t)), \end{aligned}$$

o que prova que $\alpha_x(t) = \phi_t(x)$, como queríamos. □

Corolário 2.3.1 *Se G está munido com uma métrica invariante à direita, então campos vetoriais invariantes à esquerda são campos de Killing. Analogamente, se G está munido com uma métrica invariante à esquerda, então campos vetoriais invariantes à direita são campos de Killing.*

Demonstração: De fato, pelo Lema 2.3.1, se V é um campo invariante à esquerda, então seu fluxo é dado por uma translação à direita e, portanto, esse fluxo é uma isometria, se a variedade G tem uma métrica invariante à direita. Assim, V é um campo de Killing. O outro caso é análogo. Por fim, note que se $\{v^1, \dots, v^n\}$ é um conjunto ortonormal em $T_e G$ e $V^i(x) = (dL_x)_e(v^i)$, para cada $i = 1, \dots, n$, então, se a métrica de G é invariante à esquerda, temos

$$\begin{aligned} \langle V^i(x), V^j(x) \rangle &= \langle dL_x)_e(v^i), dL_x)_e(v^j) \rangle \\ &= \langle v^i, v^j \rangle \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Logo $\{V^1, \dots, V^n\}$ é um referencial ortonormal de campos de Killing em G . \square

Exemplo 2.3.1 O espaço euclidiano \mathbb{R}^n tem a propriedade de Killing, pois admite um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de campos vetoriais paralelos.

Exemplo 2.3.2 Todo grupo de Lie com métrica bi-invariante tem a propriedade de Killing. Em particular todo grupo de Lie compacto têm a propriedade de Killing. Assim, as esferas \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^3 , o toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ e o grupo $SO(3)$, das rotações do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , que é um grupo de Lie compacto, tem a propriedade de Killing.

Exemplo 2.3.3 A esfera \mathbb{S}^7 também tem a propriedade de Killing, embora não seja um grupo de Lie.

Exemplo 2.3.4 O espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ tem a propriedade de Killing. Para tornar claro este fato, vamos começar definindo uma operação em $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ a partir da operação canônica do grupo $SU(2)$.

Seja $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, munido com a operação de grupo $*$ dos quatérnios. Então \mathbb{S}^3 é isomorfo ao grupo $SU(2) \subset M_2(\mathbb{C})$,

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\},$$

onde a operação de grupo é o produto de matrizes. Explicitamente

$$\begin{aligned} (z, w) * (u, v) &= \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zu - w\bar{v} & zv + w\bar{u} \\ -\bar{w}u - \bar{z}v & -\bar{w}v + \bar{z}u \end{pmatrix} \\ &= (zu - w\bar{v}, zv + w\bar{u}). \end{aligned}$$

Seja $\sigma : SU(2) \rightarrow SU(2)$ definida por

$$\sigma(z, w) = (e^{\pi i} z, e^{\pi i} w).$$

Note que $\langle \sigma \rangle = \{I_d, \sigma\}$. Como espaço topológico, o espaço projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ é definido por

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^3 = \mathbb{S}^3 / \langle \sigma \rangle.$$

Agora vamos mostrar que a operação do grupo $SU(2)$ é herdada por $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Dado $(z, w) \in SU(2)$, seja $[(z, w)]$ a classe de (z, w) em $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Então, vamos mostrar que $[(z, w) * (u, v)]$

depende apenas das classes de (z, w) e de (u, v) . Primeiro, fixemos $(u, v) \in SU(2)$ e sejam $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in SU(2)$ tais que

$$(z_1, w_1) = \sigma^k(z_2, w_2) = (e^{k\pi i} z_2, e^{k\pi i} w_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} (z_1, w_1) * (u, v) &= (z_1 u - w_1 \bar{v}, z_1 v + w_1 \bar{u}) \\ &= (e^{k\pi i} z_2 u - e^{k\pi i} w_2 \bar{v}, e^{k\pi i} z_2 v + e^{k\pi i} w_2 \bar{u}). \end{aligned}$$

Assim, se k é par, temos que

$$(z_1, w_1) * (u, v) = (z_2 u - w_2 \bar{v}, z_2 v + w_2 \bar{u}) = (z_2, w_2) * (u, v) \in [(z_2, w_2) * (u, v)],$$

e, se k é ímpar, temos

$$(z_1, w_1) * (u, v) = -(z_2 u - w_2 \bar{v}, z_2 v + w_2 \bar{u}) = -(z_2, w_2) * (u, v) \in [(z_2, w_2) * (u, v)].$$

Isto mostra que $[(z_1, w_1) * (u, v)] = [(z_2, w_2) * (u, v)]$. De modo análogo, fixando $(z, w) \in SU(2)$ e tomando $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in SU(2)$ tais que

$$(u_1, v_1) = \sigma^k(u_2, v_2) = (e^{k\pi i} u_2, e^{k\pi i} v_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} (z, w) * (u_1, v_1) &= (z u_1 - w \bar{v}_1, z v_1 + w \bar{u}_1) \\ &= (e^{k\pi i} z u_2 - e^{-k\pi i} w \bar{v}_2, e^{k\pi i} z v_2 + e^{-k\pi i} w \bar{u}_2). \end{aligned}$$

Assim, se k é par, temos que

$$(z, w) * (u_1, v_1) = (z u_2 - w \bar{v}_2, z v_2 + w \bar{u}_2) = (z, w) * (u_2, v_2) \in [(z, w) * (u_2, v_2)],$$

e, se k é ímpar, temos

$$(z, w) * (u_1, v_1) = -(z u_2 - w \bar{v}_2, z v_2 + w \bar{u}_2) = -(z, w) * (u_2, v_2) \in [(z, w) * (u_2, v_2)].$$

Isto mostra que $[(z, w) * (u_1, v_1)] = [(z, w) * (u_2, v_2)]$.

Portanto a operação $*$ entre as classes $[(z, w)]$ em \mathbb{RP}^3 está bem definida.

O próximo lema será de particular importância para demonstrarmos que o espaço \mathbb{RP}^3 é um grupo de Lie com métrica bi-invariante. Antes de enuncia-lo, porém, falaremos brevemente sobre o conceito de submersão Riemanniana (ver também (CAMINHA; MN, 2014), Cap. 4).

Sejam M^{n+k} e B^n variedades riemannianas. Dizemos que a aplicação diferenciável $\pi : M \rightarrow B$ é uma submersão se sua derivada $d\pi_p : T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} B$ for sobrejetiva para cada ponto $p \in M$. Se $p \in M$, a Forma local das Submersões garante que $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\pi(p))$ é uma subvariedade mergulhada de M de dimensão k , tal que $T_p \mathcal{F} = \text{Ker}(d\pi_p)$. Ademais, uma vez que $d\pi_p$ é sobrejetiva, sua restrição a $T_p \mathcal{F}^\perp$ induz um isomorfismo

$$d\pi_p : T_p \mathcal{F}^\perp \rightarrow T_{\pi(p)} B.$$

Dizemos que o conjunto \mathcal{F} é uma *fibra* de π .

Uma submersão $\pi : M \rightarrow B$ é dita Riemanniana se $d\pi$ preserva o comprimento de vetores $v \in T\mathcal{F}^\perp$.

Lema 2.3.2 *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade Riemanniana com a mesma dimensão de G . Seja $\pi : G \rightarrow M$ uma submersão Riemanniana de forma que a operação de grupo de G é herdada por M , ou seja, de forma que a operação $*$ dada por*

$$x * y = \pi(\tilde{x}\tilde{y}),$$

onde $x, y \in M$ e $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$, $\tilde{y} \in \pi^{-1}(\{y\})$, está bem definida. Então, se a métrica de G é invariante à esquerda (respectivamente, invariante à direita), o mesmo vale para a métrica de M induzida por π .

Demonstração: Precisamos mostrar que para qualquer x em M a aplicação $L_x : M \rightarrow M$ definida por $L_x(y) = x * y$ é uma isometria. Como $\dim(G) = \dim(M)$, para qualquer $v \in T_x M$ e $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$, existe um único $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}} G$ tal que $d\pi_{\tilde{x}}(\tilde{v}) = v$. Denotemos esta aplicação por $l_{\tilde{x}} : T_x M \rightarrow T_{\tilde{x}} G$. Afirmamos que o fato de que π é uma submersão Riemanniana (portanto uma isometria local) implica que $l_{\tilde{x}}$ é uma isometria linear entre os produtos internos de $T_x M$ e $T_{\tilde{x}} G$.

Sejam $x, y \in M$ dados e seja $z = L_x(y) = x * y$. Seja $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$, $\tilde{y} \in \pi^{-1}(\{y\})$ e $\tilde{z} = \tilde{x}\tilde{y} = L_{\tilde{x}}(\tilde{y})$. Então, vale que $\pi(\tilde{z}) = z$. Agora, para um dado $u \in T_y M$ podemos usar que $L_x \circ \pi = \pi \circ L_{\tilde{x}}$ para provar que

$$\begin{aligned} d(L_x)_y u &= d(L_x)_y d\pi_{\tilde{y}} l_{\tilde{y}}(u) \\ &= d(L_x \circ \pi)_{\tilde{y}} l_{\tilde{y}}(u) \\ &= d(\pi \circ L_{\tilde{x}})_{\tilde{y}} l_{\tilde{y}}(u) \\ &= d\pi_{\tilde{z}} d(L_{\tilde{x}})_{\tilde{y}} l_{\tilde{y}}(u). \end{aligned}$$

Como $d\pi_z$, $d(L_{\tilde{x}})_{\tilde{y}}$ e $l_{\tilde{y}}$ são três aplicações que preservam a métrica, segue-se que L_x é de fato uma isometria de M . \square

Como consequência desse resultado, obtemos que o espaço projetivo \mathbb{RP}^3 é um grupo de Lie com métrica bi-invariante e, portanto, têm a propriedade de Killing.

3 Estimativa do Índice para superfícies CMC compactas

3.1 FUNÇÕES TESTE E CAMPOS VETORIAIS HARMÔNICOS

Seja M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional compacta com conexão ∇ . Seja

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

a diferencial exterior em M^n e

$$\delta = d^* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

a co-diferencial, isto é, o adjunto formal de d com respeito ao L^2 -produto interno canônico de p -formas, de forma que δ é dado em função de d por

$$\delta = (-1)^{np+n+1} * d*,$$

onde $*$ é o operador estrela de Hodge.

Definimos o operador *Laplaciano de Hodge* agindo em p -formas como

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

Dizemos que uma p -forma diferencial ω é *harmônica* se $\Delta\omega = 0$.

Pelo Teorema de Hodge-de Rham, o espaço vetorial das p -formas harmônicas $\mathcal{H}^p(M)$ é isomorfo ao p -ésimo grupo de cohomologia de de Rham (espaço vetorial sobre \mathbb{R}) $H^p(M)$. O p -ésimo número de Betti de M , denotado por $b_p(M)$, é definido por

$$b_p(M) = \dim H^p(M).$$

Pela *dualidade de Poincaré* tem-se $b_{n-p}(M) = b_p(M)$ (ver (JOST, 2017), Teorema 3.4.2 e Definição 3.4.1).

A *característica de Euler* $\chi(M)$ da variedade fechada M^n é dada em função dos números de Betti por

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M)$$

(LIMA, 2009). No caso particular de superfícies fechadas ($n = 2$), com gênero g , a característica de Euler é dada por

$$\chi(M) = 2 - 2g.$$

Assim, uma vez que funções harmônicas (0-formas) sobre superfícies fechadas são constantes, temos que $b_2(M) = b_0(M) = 1$ e, portanto,

$$2 - 2g = b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) = 2 - b_1(M),$$

ou seja,

$$b_1(M) = 2g.$$

Se ω é uma 1-forma, a métrica de M nos permite associar a ω um campo vetorial suave $\xi \in TM$ de forma que

$$\omega(X) = \langle \xi, X \rangle,$$

para todo $X \in TM$. Neste caso, dizemos que ω é a 1-forma dual do campo ξ e denotamos por $\xi = \omega^\sharp$.

Definimos o *Laplaciano de Böchner* de ξ por

$$\nabla^* \nabla \xi = - \sum_{k=1}^n (\nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \xi - \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} \xi),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em TM .

Definimos também o Laplaciano de Hodge de ξ , denotado por $\Delta \xi$, como o campo vetorial dual da 1-forma $\Delta \omega = d\delta\omega + \delta d\omega$, onde ω é a 1-forma dual de ξ . Uma importante relação entre os dois laplacianos é dada pela Fórmula de Böchner-Weitzenböck:

$$\Delta \xi = \nabla^* \nabla \xi + \text{Ric}(\xi), \quad (1)$$

onde Ric é o tensor de Ricci em TM .

Finalmente, dizemos que o campo vetorial ξ é harmônico se $\Delta \xi = 0$. Neste caso diremos também que $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$.

Seja \bar{M}^3 uma variedade Riemanniana que tem a propriedade de Killing e seja $\{\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3\}$ um referencial de Killing em \bar{M} . Consideremos a imersão isométrica $x : M^2 \hookrightarrow \bar{M}^3$ de uma superfície CMC fechada e orientável M em \bar{M} e seja N o campo vetorial normal unitário ao longo de M . Para cada $1 \leq i \leq 3$, denotemos por

$$E_i = \bar{E}_i - \langle \bar{E}_i, N \rangle N$$

o campo vetorial dado pela projeção ortogonal de \bar{E}_i em TM . Consideremos também a função suave $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, chamada função suporte, dada por $g_i = \langle \bar{E}_i, N \rangle$, para $1 \leq i \leq 3$. Finalmente, seja $\xi \in TM$ um campo vetorial harmônico e consideremos as funções coordenadas $w_i = \langle \xi, E_i \rangle$ e $\bar{w}_i = \langle * \xi, E_i \rangle$ de ξ e $* \xi$, respectivamente.

Para o que segue, precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 3.1.1 *Seja $x : M^2 \hookrightarrow \bar{M}^3$ uma imersão isométrica CMC de uma superfície M fechada e orientável em uma variedade Riemanniana \bar{M} que tem a propriedade de Killing. Então, usando as notações acima, temos que*

a) $\langle \nabla_X E_i, Y \rangle + \langle \nabla_Y E_i, X \rangle = 2g_i \langle AX, Y \rangle$, para todos $X, Y \in TM$, onde A é o operador de forma de M ;

b) $\langle \nabla E_i, \nabla \xi \rangle = g_i \langle A, \nabla \xi \rangle$;

c) $\operatorname{div} E_i = -2H g_i$, onde $2H = \operatorname{tr}(A)$;

d) $\sum_i w_i^2 = \sum_i \bar{w}_i^2 = |\xi|^2$, $\sum_i g_i^2 = 1$ e $\sum_i g_i E_i = 0$;

Demonstração: Para provar a) note, primeiramente, que, como \bar{E}_i é um campo de Killing, então para todo $X, Y \in T\bar{M}$ tem-se

$$\langle \bar{\nabla}_X \bar{E}_i, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y \bar{E}_i, X \rangle = 0.$$

Assim, tomando $X, Y \in TM$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X E_i, Y \rangle + \langle \nabla_Y E_i, X \rangle &= X \langle E_i, Y \rangle - \langle E_i, \nabla_X Y \rangle + Y \langle E_i, X \rangle - \langle E_i, \nabla_Y X \rangle \\ &= X \langle \bar{E}_i, Y \rangle - \langle \bar{E}_i, \nabla_X Y \rangle + Y \langle \bar{E}_i, X \rangle - \langle \bar{E}_i, \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \bar{E}_i, Y \rangle + \langle \bar{E}_i, \bar{\nabla}_X Y \rangle - \langle \bar{E}_i, \nabla_X Y \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\nabla}_Y \bar{E}_i, X \rangle + \langle \bar{E}_i, \bar{\nabla}_Y X \rangle - \langle \bar{E}_i, \nabla_Y X \rangle \\ &= 2 \langle \bar{E}_i, \bar{\nabla}_Y X - \nabla_Y X \rangle \\ &= 2 \langle \bar{E}_i, \langle AX, Y \rangle N \rangle \\ &= 2g_i \langle AX, Y \rangle. \end{aligned}$$

Para o item b), lembremos que

$$\nabla E_i(X, Y) = \langle \nabla_Y E_i, X \rangle \tag{2}$$

e consideremos o operador linear $T : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $T(Y) = \nabla_Y E_i$. Agora, tomando o operador T^t , transposto de T , sabemos, pelo Lema de Riesz, que existe uma forma bilinear $(\nabla E_i)^t : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(\nabla E_i)^t(X, Y) = \langle X, T^t(Y) \rangle,$$

para todo $X, Y \in T_p M$. Assim,

$$(\nabla E_i)^t(X, Y) = \langle X, T^t(Y) \rangle = \langle T(X), Y \rangle = \langle \nabla_X E_i, Y \rangle. \tag{3}$$

Portanto, de (2) e (3), obtemos

$$\nabla E_i + (\nabla E_i)^t = 2g_i A.$$

Note também que, como ξ é harmônico, $\nabla \xi$ é simétrico, pois, para todo $X, Y \in T_p M$,

$$0 = d\xi(X, Y) = \langle \nabla_X \xi, Y \rangle - \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = \nabla \xi(X, Y) - \nabla \xi(Y, X).$$

Além disso, como $(\nabla E_i)^t(X, Y) = \nabla E_i(Y, X)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle (\nabla E_i)^t, \nabla \xi \rangle &= \sum_{k,j} (\nabla E_i)^t(e_k, e_j) \cdot \nabla \xi(e_k, e_j) \\ &= \sum_{k,j} (\nabla E_i)(e_j, e_k) \cdot \nabla \xi(e_j, e_k) \\ &= \sum_k \sum_j \langle \nabla_{e_k} E_i, e_j \rangle \langle \nabla_{e_k} \xi, e_j \rangle \\ &= \sum \langle \nabla_{e_k} E_i, \nabla_{e_k} \xi \rangle \\ &= \langle \nabla E_i, \nabla \xi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla E_i, \nabla \xi \rangle &= \frac{1}{2} \langle \nabla E_i + (\nabla E_i)^t, \nabla \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla E_i - (\nabla E_i)^t, \nabla \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla E_i + (\nabla E_i)^t, \nabla \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle 2g_i A, \nabla \xi \rangle \\ &= g_i \langle A, \nabla \xi \rangle. \end{aligned}$$

Para o item c), usando a definição de divergente de um campo, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E_i &= -\operatorname{tr}(\nabla E_i) \\ &= -\langle \nabla E_i, h \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle \nabla E_i + (\nabla E_i)^t, h \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle 2g_i A, h \rangle \\ &= -g_i \langle A, h \rangle \\ &= -g_i \operatorname{tr}(A) \\ &= -2H g_i. \end{aligned}$$

Para o item d), usando a convenção de soma de Einstein, obtemos

$$w_i^2 = \langle \xi, E_i \rangle^2 = \langle \xi, \bar{E}_i \rangle^2 = \langle \xi, \langle \xi, \bar{E}_i \rangle \bar{E}_i \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = |\xi|^2.$$

E, como o operador estrela de Hodge é uma isometria, temos também

$$\bar{w}_i^2 = |*\xi|^2 = |\xi|^2.$$

Além disso,

$$g_i^2 = \langle N, \bar{E}_i \rangle^2 = \langle N, \langle N, \bar{E}_i \rangle \bar{E}_i \rangle = \langle N, N \rangle = 1,$$

e

$$g_i E_i = g_i(\bar{E}_i - g_i N) = g_i \bar{E}_i - g_i^2 N = N - N = 0.$$

□

3.2 ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES FECHADAS

Seja \bar{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana e seja $\psi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão de modo que M^n é uma hipersuperfície de \bar{M}^{n+1} compacta, orientável e sem bordo. Consideremos em M a métrica Riemanniana h induzida por ψ . Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \bar{M} , respectivamente. Fixemos um campo vetorial normal unitário N percorrendo M e seja A o operador de forma associado.

Definimos a função *curvatura média escalar* de M por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} A.$$

Sabemos que toda função $u \in C^\infty(M)$ induz uma variação normal $\psi_t : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ dada por

$$\psi_t(x) = \exp_{\psi(x)}(tu(x)N_x),$$

onde \exp denota a aplicação exponencial em \bar{M}^{n+1} . Como M é fechada e $\psi_0 = \psi$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$M_{u,t} = \{\exp_{\psi(x)}(tu(x)N); x \in M\}$$

são hipersuperfícies imersas para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Podemos então considerar o funcional área $\mathcal{A}_u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que é dado por

$$\mathcal{A}_u(t) = \int_M dM_{u,t},$$

onde $dM_{u,t}$ é o elemento de área n -dimensional da métrica induzida em M por ψ_t . Definimos também o funcional volume $\mathcal{V}_u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{V}_u(t) = \int_{[0,t] \times M} \psi^* d\bar{M},$$

onde $d\bar{M}$ é o elemento de volume de \bar{M} . Dizemos que a variação normal ψ preserva volume se $\mathcal{V}_u(t) = \mathcal{V}_u(0)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Uma variação normal ψ com campo variacional uN preserva volume se, e somente se, a função u tem média nula, isto é, $\int_M u dM = 0$ (ver (BARBOSA et al., 1988), Lema 2.1).

A primeira fórmula da variação da área é dada por

$$\mathcal{A}'_u(0) = -n \int_M u H dM.$$

Como consequência direta desta fórmula, hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos do funcional área. Para tais pontos críticos, a segunda variação do funcional área é dada por

$$\mathcal{A}''_u(0) = \int_M \|\nabla u\|^2 - (\overline{\text{Ric}}(N, N) + \|A\|^2) u^2 dM.$$

Aqui $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$ é a norma de Hilbert-Schmidt de A e $\overline{\text{Ric}}(N, N)$ denota a curvatura de Ricci de \bar{M} na direção de N . Integrando por partes podemos escrever

$$\mathcal{A}''_u(0) = \int_M u J u dM,$$

onde

$$J = \Delta - \overline{\text{Ric}}(N, N) - \|A\|^2$$

é o operador de Jacobi ou operador de estabilidade de M . Aqui, lembramos que para funções suaves $u \in C^\infty(M)$, o operador laplaciano Δ é dado por

$$\Delta u = \text{div} \nabla u = -\text{tr} \nabla(\nabla u).$$

Definição 3.2.1 *Uma hipersuperfície M mínima é dita ser estável se $\mathcal{A}''_u(0) \geq 0$ para todo $u \in C^\infty(M)$.*

A segunda variação da área induz uma forma quadrática $Q : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definida por

$$Q(v, u) = \int_M v J u dM.$$

Definição 3.2.2 Dizemos que $u \in C^\infty(M)$ é uma autofunção de Q associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q(v, u) = \lambda \int_M v u dM$ para todo $v \in C^\infty(M)$.

Se u é autofunção de Q associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\int_M v(Ju - \lambda u) dM = 0 \text{ para todo } v \in C^\infty(M),$$

de onde concluímos que u é autofunção do operador de Jacobi associada ao mesmo autovalor λ .

O operador de Jacobi J é autoadjunto e elíptico. Seu espectro consiste de uma sequência não-decrescente de autovalores

$$\lambda_1^J \leq \lambda_2^J \leq \dots \leq \lambda_k^J \leq \dots$$

divergindo para $+\infty$. Esses autovalores têm multiplicidade finita e o primeiro autovalor λ_1^J é simples, isto é, tem multiplicidade 1.

Uma vez que $C^\infty(M)$ é denso no espaço de Hilbert $L^2(M)$, temos que $J : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ é densamente definido. Logo, existe uma base ortonormal $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ de $L^2(M)$ formada por autofunções de J , isto é, $J\phi_i = \lambda_i^J \phi_i$. Além disso, pelo princípio *min-max*, o k -ésimo autovalor λ_k^J é caracterizado por

$$\lambda_k^J = \inf_{u \in \mathcal{J}_{k-1}} \frac{Q(u, u)}{\int_M u^2 dM}, \quad (4)$$

onde $\mathcal{J}_p = \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle^\perp$ é o subespaço vetorial ortogonal às p primeiras autofunções do operador de Jacobi J .

Definição 3.2.3 Seja M uma hipersuperfície mínima de \bar{M} . O índice de Morse de M é denotado por $\text{Ind}(M)$ e é definido como a dimensão máxima de qualquer subespaço V de $C^\infty(M)$ no qual a forma quadrática Q é negativa definida.

Em outros termos, $\text{Ind}(M)$ é o número de autovalores negativos de J , que é necessariamente finito para hipersuperfícies fechadas. Geometricamente, o índice indica o número de direções cujas variações decrescem área. Note que M é estável se, e somente se, seu índice é 0.

Relembramos aqui que a nulidade de M , denotada por $\text{Nul}(M)$, é a dimensão máxima do espaço das funções $u \in C^\infty(M)$ associadas ao autovalor $\lambda^J = 0$.

É um fato bem conhecido que hipersuperfícies CMC são pontos críticos do funcional área para variações normais que preservam volume. Como vimos, essas variações estão associadas a funções de média nula. Vamos chamar de \mathcal{F} o conjunto das funções de média nula, isto é,

$$\mathcal{F} = \left\{ u \in C^\infty(M); \int_M u = 0 \right\}.$$

Definição 3.2.4 Uma hipersuperfície M de curvatura média constante é dita ser estável se $\mathcal{A}_u''(0) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{F}$.

Quando restrita ao espaço das funções de média nula, a forma quadrática Q fica associada a um novo operador elíptico. Denotaremos por L este operador.

Definição 3.2.5 Dizemos que $u \in \mathcal{F}$ é uma autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q|_{\mathcal{F}}(v, u) = \lambda \int_M v u dM$ para todo $v \in \mathcal{F}$.

Note que, se $u \in \mathcal{F}$ é autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\int_M v(Ju - \lambda u) dM = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{F},$$

de onde concluímos que $Ju - \lambda u$ deve ser constante. Por integração, obtemos que

$$Ju - \lambda u = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M J u dM.$$

Seja $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear dado por

$$\psi(u) = \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M J u dM$$

e defina o operador linear $L : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por $L := J - \psi$. Se $u \in \mathcal{F}$ é autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então u é autofunção do operador L associada ao mesmo autovalor λ .

A exemplo do operador de Jacobi J , o operador L também é autoadjunto e elíptico. Assim, seu espectro consiste de uma sequência não-decrescente de autovalores

$$\lambda_1^L \leq \lambda_2^L \leq \dots \leq \lambda_k^L \leq \dots$$

divergindo para $+\infty$ com cada autovalor tendo multiplicidade finita.

Uma vez que \mathcal{F} é denso em $L_T^2(M) := \{f \in L^2(M) \mid \int_M f dM = 0\}$, temos que L é densamente definido no espaço $L_T^2(M)$. Logo existe uma base ortonormal $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ de $L_T^2(M)$ formada por autofunções de L , isto é, $L\phi_i = \lambda_i^L \phi_i$. Além disso, o k -ésimo autovalor λ_k^L é caracterizado por

$$\lambda_k^L = \inf_{u \in \mathcal{J}_{k-1}} \frac{Q|_{\mathcal{F}}(u, u)}{\int_M u^2 dM}, \quad (5)$$

onde $\mathcal{J}_p = \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle^\perp$ é o subespaço vetorial ortogonal às p primeiras autofunções de L .

Definição 3.2.6 Seja M uma hipersuperfície CMC de \bar{M} . O índice fraco de Morse de M , denotado por $\text{Ind}_w(M)$, é definido como a dimensão máxima de qualquer subespaço V de \mathcal{F} no qual a forma quadrática $Q|_{\mathcal{F}}$ é negativa definida.

Note que o índice fraco de Morse pode ser definido, de forma equivalente, como o número de autovalores negativos do operador L .

O seguinte lema é de importância central na prova de nossos resultados.

Lema 3.2.1 *Sob as mesmas hipóteses do Lema 3.1.1, temos que*

$$\int_M w_i J w_i + \int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i = -2 \int_M \overline{\text{Ric}}(N, N) |\xi|^2 - 4H^2 \int_M |\xi|^2. \quad (6)$$

Demonstração: Se $\{e_1, e_2\}$ é um referencial geodésico em um ponto $p \in M$, então

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= \text{div} \nabla w_i \\ &= -e_k e_k \langle E_i, \xi \rangle \\ &= -e_k (\langle \nabla_{e_k} E_i, \xi \rangle + \langle E_i, \nabla_{e_k} \xi \rangle) \\ &= -e_k (2g_i \langle A e_k, \xi \rangle - \langle \nabla_\xi E_i, e_k \rangle + \langle E_i, \nabla_{e_k} \xi \rangle) \\ &= -2 \langle \nabla g_i, e_k \rangle \langle A \xi, e_k \rangle - 2g_i \langle (\nabla_{e_k} A) \xi, e_k \rangle - 2g_i \langle \nabla_{e_k} \xi, A e_k \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{e_k} \nabla_\xi E_i, e_k \rangle - \langle \nabla_{e_k} E_i, \nabla_{e_k} \xi \rangle - \langle E_i, \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \xi \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Observe que pela Equação de Codazzi (Lema 2.2.1) temos que

$$\begin{aligned} -\overline{\text{Ric}}(\xi, N) &= \langle \bar{R}(\xi, e_k) e_k, N \rangle \\ &= \langle (\nabla_{e_k} A) \xi, e_k \rangle - \langle (\nabla_\xi A) e_k, e_k \rangle. \end{aligned}$$

Mas, como $\langle A e_k, e_k \rangle = \text{tr} A = 2H$ e H é constante, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \xi \langle A e_k, e_k \rangle &= \langle \nabla_\xi A e_k, e_k \rangle + \langle A e_k, \nabla_\xi e_k \rangle \\ &= \langle \nabla_\xi A e_k, e_k \rangle \\ &= \langle (\nabla_\xi A) e_k, e_k \rangle + \langle A(\nabla_\xi e_k), e_k \rangle \\ &= \langle (\nabla_\xi A) e_k, e_k \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_k} A e_k, \xi \rangle &= \langle (\nabla_{e_k} A) e_k + A(\nabla_{e_k} e_k), \xi \rangle \\ &= \langle (\nabla_{e_k} A) e_k, \xi \rangle \\ &= \langle (\nabla_{e_k} A) \xi, e_k \rangle \\ &= -\overline{\text{Ric}}(\xi, N). \end{aligned}$$

Observe também que, pela definição do tensor curvatura, temos que

$$\langle R(e_k, \xi) E_i, e_k \rangle = \langle \nabla_\xi \nabla_{e_k} E_i, e_k \rangle - \langle \nabla_{e_k} \nabla_\xi E_i, e_k \rangle + \langle \nabla_{\nabla_{e_k} \xi} E_i, e_k \rangle.$$

Mas, usando os itens (a) e (b) do Lema 3.1.1 e a definição de produto tensorial, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\nabla_{e_k} \xi} E_i, e_k \rangle &= 2g_i \langle Ae_k, \nabla_{e_k} \xi \rangle - \langle \nabla_{e_k} E_i, \nabla_{e_k} \xi \rangle \\
&= 2g_i \langle A, \nabla \xi \rangle - \langle \nabla E_i, \nabla \xi \rangle \\
&= g_i \langle A, \nabla \xi \rangle
\end{aligned}$$

e, pela compatibilidade da métrica e Lema 3.1.1(c),

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\xi} \nabla_{e_k} E_i, e_k \rangle &= \xi \langle \nabla_{e_k} E_i, e_k \rangle - \langle \nabla_{e_k} E_i, \nabla_{\xi} e_k \rangle \\
&= -\xi(\operatorname{div} E_i) \\
&= -\xi(-2Hg_i) \\
&= 2H \langle \nabla g_i, \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \nabla_{e_k} \nabla_{\xi} E_i, e_k \rangle = \operatorname{Ric}(\xi, E_i) + 2H \langle \nabla g_i, \xi \rangle + g_i \langle A, \nabla \xi \rangle.$$

Logo, a expressão para Δw_i torna-se

$$\begin{aligned}
\Delta w_i &= -2 \langle \nabla g_i, A\xi \rangle + 2g_i \overline{\operatorname{Ric}}(\xi, N) - 2g_i \langle A, \nabla \xi \rangle + \operatorname{Ric}(\xi, E_i) \\
&\quad + 2H \langle \nabla g_i, \xi \rangle + g_i \langle A, \nabla \xi \rangle - \langle \nabla E_i, \nabla \xi \rangle + \langle \nabla^* \nabla \xi, E_i \rangle \\
&= -2 \langle \nabla g_i, A\xi \rangle + 2g_i \overline{\operatorname{Ric}}(\xi, N) - 2g_i \langle A, \nabla \xi \rangle + \operatorname{Ric}(\xi, E_i) \\
&\quad + 2H \langle \nabla g_i, \xi \rangle + \langle \nabla^* \nabla \xi, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, como ξ é harmônico, isto é, $\Delta \xi = 0$, temos pela Fórmula de Böchner (1),

$$0 = \langle \Delta \xi, E_i \rangle = \langle \nabla^* \nabla \xi + \operatorname{Ric}(\xi), E_i \rangle = \langle \nabla^* \nabla \xi, E_i \rangle + \operatorname{Ric}(\xi, E_i),$$

de onde obtemos finalmente

$$\Delta w_i = -2 \langle \nabla g_i, A\xi \rangle + 2g_i \overline{\operatorname{Ric}}(\xi, N) - 2g_i \langle A, \nabla \xi \rangle + 2H \langle \nabla g_i, \xi \rangle. \quad (8)$$

E, uma vez que o Laplaciano comuta com o operador $*$ de Hodge, obtemos de maneira análoga

$$\Delta \bar{w}_i = -2 \langle \nabla g_i, A * \xi \rangle + 2g_i \overline{\operatorname{Ric}}(*\xi, N) - 2g_i \langle A, \nabla * \xi \rangle + 2H \langle \nabla g_i, *\xi \rangle. \quad (9)$$

Agora, lembrando que ξ e $*\xi$ são campos ortogonais em $T_p M$ com o mesmo módulo, temos que existe uma base ortonormal $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ de $T_p M$ de forma que $\xi = |\xi| \epsilon_1$ e $*\xi = |\xi| \epsilon_2$. Daí, segue de

(8) e (9) que

$$\begin{aligned}
\int_M w_i \Delta w_i + \int_M \bar{w}_i \Delta \bar{w}_i &= -2 \int_M \langle \nabla g_i, A\xi \rangle \langle E_i, \xi \rangle + 2 \int_M g_i \bar{\text{Ric}}(\xi, N) \langle E_i, \xi \rangle \\
&\quad + 2H \int_M \langle \nabla g_i, \xi \rangle \langle E_i, \xi \rangle - 2 \int_M g_i \langle A, \nabla \xi \rangle \langle E_i, \xi \rangle \\
&\quad - 2 \int_M \langle \nabla g_i, A * \xi \rangle \langle E_i, * \xi \rangle + 2 \int_M g_i \bar{\text{Ric}}(*\xi, N) \langle E_i, * \xi \rangle \\
&\quad + 2H \int_M \langle \nabla g_i, * \xi \rangle \langle E_i, * \xi \rangle - 2 \int_M g_i \langle A, \nabla * \xi \rangle \langle E_i, * \xi \rangle \\
&= -2 \int_M \langle \nabla g_i, A\varepsilon_1 \rangle \langle E_i, \varepsilon_1 \rangle |\xi|^2 + 2H \int_M \langle \nabla g_i, \varepsilon_1 \rangle \langle E_i, \varepsilon_1 \rangle |\xi|^2 \\
&\quad - 2 \int_M \langle \nabla g_i, A\varepsilon_2 \rangle \langle E_i, \varepsilon_2 \rangle |\xi|^2 + 2H \int_M \langle \nabla g_i, \varepsilon_2 \rangle \langle E_i, \varepsilon_2 \rangle |\xi|^2 \\
&= -2 \int_M \langle A \nabla g_i, \langle E_i, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle E_i, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 \rangle \\
&\quad + 2H \int_M \langle \nabla g_i, \langle E_i, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle E_i, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 \rangle |\xi|^2 \\
&= -2 \int_M \langle \nabla g_i, A E_i \rangle |\xi|^2 + 2H \int_M \langle \nabla g_i, E_i \rangle |\xi|^2. \tag{10}
\end{aligned}$$

Para simplificar a primeira integral em (10) note que, pelo Teorema de Stokes,

$$0 = \int_M \text{div}(g_i |\xi|^2 A E_i) = - \int_M \langle \nabla g_i, |\xi|^2 A E_i \rangle + \int_M g_i \text{div}(|\xi|^2 A E_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \nabla g_i, A E_i \rangle |\xi|^2 &= \int_M \langle \nabla g_i, |\xi|^2 A E_i \rangle \\
&= \int_M g_i \text{div}(|\xi|^2 A E_i) \\
&= - \int_M g_i \langle \nabla_{e_k} (|\xi|^2 A E_i), e_k \rangle \\
&= - \int_M g_i \langle \nabla |\xi|^2, e_k \rangle \langle A E_i, e_k \rangle - \int_M g_i |\xi|^2 \langle \nabla_{e_k} A E_i, e_k \rangle \\
&= - \int_M g_i \langle \nabla |\xi|^2, A E_i \rangle - \int_M g_i |\xi|^2 \langle (\nabla_{e_k} A) E_i, e_k \rangle \\
&\quad - \int_M g_i |\xi|^2 \langle A(\nabla_{e_k} E_i), e_k \rangle \\
&= - \int_M \langle A(\nabla |\xi|^2), g_i E_i \rangle - \int_M g_i |\xi|^2 \langle \bar{R}(E_i, e_k) e_k, N \rangle \\
&\quad - \int_M g_i |\xi|^2 \langle (\nabla_{E_i} A) e_k, e_k \rangle - \int_M g_i |\xi|^2 \langle \nabla_{e_k} E_i, A e_k \rangle \\
&= \int_M g_i |\xi|^2 \bar{\text{Ric}}(E_i, N) - \int_M g_i |\xi|^2 \langle \nabla E_i, A \rangle \\
&= \int_M |\xi|^2 \bar{\text{Ric}}(g_i E_i, N) - \int_M g_i^2 |A|^2 |\xi|^2 \\
&= - \int_M |A|^2 |\xi|^2.
\end{aligned}$$

Agora, vamos simplificar a segunda integral em (10),

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \nabla g_i, E_i \rangle |\xi|^2 &= \int_M \langle \nabla g_i, |\xi|^2 E_i \rangle \\
&= \int_M g_i \operatorname{div}(|\xi|^2 E_i) \\
&= - \int_M g_i \langle \nabla_{e_k}(|\xi|^2 E_i), e_k \rangle \\
&= - \int_M g_i \langle \nabla |\xi|^2, e_k \rangle \langle E_i, e_k \rangle - \int_M g_i |\xi|^2 \langle \nabla_{e_k} E_i, e_k \rangle \\
&= \int_M g_i |\xi|^2 \operatorname{div}(E_i) \\
&= \int_M g_i |\xi|^2 (-2H g_i) \\
&= -2H \int_M |\xi|^2.
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade em (10) pode ser escrita como

$$\int_M w_i \Delta w_i + \int_M \bar{w}_i \Delta \bar{w}_i = 2 \int_M |A|^2 |\xi|^2 - 4H^2 \int_M |\xi|^2,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_M w_i J w_i + \int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i &= \int_M w_i \Delta w_i - \int_M (\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) + |A|^2) w_i^2 \\
&\quad + \int_M \bar{w}_i \Delta \bar{w}_i - \int_M (\overline{\operatorname{Ric}}(N, N) + |A|^2) \bar{w}_i^2 \\
&= 2 \int_M |A|^2 |\xi|^2 - 4H^2 \int_M |\xi|^2 - 2 \int_M \overline{\operatorname{Ric}}(N, N) |\xi|^2 \\
&\quad - 2 \int_M |A|^2 |\xi|^2 \\
&= -2 \int_M \overline{\operatorname{Ric}}(N, N) |\xi|^2 - 4H^2 \int_M |\xi|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

3.3 PROVA DOS RESULTADOS

Estamos agora em condições de demonstrar nossos primeiros resultados:

Demonstração do Teorema 1.0.5: Seja $\{\lambda_1^J, \lambda_2^J, \dots\}$ o espectro do operador de Jacobi J e $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ uma base ortonormal de $C^\infty(M)$ dada por autofunções de J , isto é,

$$J\phi_i = \lambda_i^J \phi_i.$$

Seja \mathcal{J}_p o subespaço vetorial ortogonal às p primeiras autofunções do operador de Jacobi.

Consideremos, então, campos vetoriais $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ tais que as funções teste $w_i, \bar{w}_i \in \mathcal{J}_{\alpha-1}$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. Sendo assim, temos um sistema com $6(\alpha - 1)$ equações lineares homogêneas na variável ξ , dadas por

$$\int_M w_i \phi_k = \int_M \bar{w}_i \phi_k = 0, \quad (11)$$

onde $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq k \leq \alpha - 1$. Portanto, como

$$\dim \mathcal{H}^1(M) = b_1(M) = 2g,$$

se valer $2g > 6(\alpha - 1)$, então o sistema (11) tem no mínimo uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ tal que $w_i, \bar{w}_i \in \mathcal{J}_{\alpha-1}$ para todo $1 \leq i \leq 3$. Pela caracterização de λ_α^J (princípio do *min-max*) em (4), temos

$$\lambda_\alpha^J \leq \frac{\int_M w_i J w_i}{\int_M w_i^2} \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha^J \leq \frac{\int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i}{\int_M \bar{w}_i^2}.$$

Assim, usando o Lema (3.2.1) com $H = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\lambda_\alpha^J \int_M |\xi|^2 &= \int_M (w_i^2 + \bar{w}_i^2) \\ &= \lambda_\alpha^J \int_M w_i^2 + \lambda_\alpha^J \int_M \bar{w}_i^2 \\ &\leq \int_M w_i J w_i + \int_M \bar{w}_i J \bar{w}_i \\ &= -2 \int_M \overline{\text{Ric}}(N, N) |\xi|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Como $\overline{\text{Ric}}(N, N) \geq 0$ (Teorema 2.3.1), temos que

$$\lambda_\alpha^J \int_M |\xi|^2 \leq 0,$$

de onde

$$\lambda_\alpha^J \leq 0$$

e, portanto, $\text{Ind}(M) + \text{Nul}(M) \geq \alpha$. Como α pode ser escolhido como o maior inteiro tal que $2g > 6(\alpha - 1)$, obtemos

$$\text{Ind}(M) + \text{Nul}(M) \geq \frac{g}{3},$$

como queríamos demonstrar. □

Demonstração do Teorema 1.0.6: Seguindo os mesmos passos na demonstração do Teorema 1.0.5, note que se \bar{M} tem curvatura de Ricci positiva, então de (12), temos que

$$2\lambda_\alpha^J \int_M |\xi|^2 \leq -2 \int_M \overline{\text{Ric}}(N, N) |\xi|^2 < 0,$$

de onde

$$\lambda_\alpha^J < 0$$

e, portanto $\text{Ind}(M) \geq \alpha$. Como α pode ser escolhido como o maior inteiro tal que $2g > 6(\alpha - 1)$, obtemos

$$\text{Ind}(M) \geq \frac{g}{3}.$$

o que prova o Teorema. \square

Demonstração do Teorema 1.0.7: Com as mesmas notações da demonstração do Teorema 1.0.5, fixemos uma base ortonormal $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ do espaço $\mathcal{F} = \{u \in C^\infty(M); \int_M u = 0\}$ dada por autofunções do operador L , isto é, $L\phi_i = \lambda_i^L \phi_i$, e suponhamos que para qualquer $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ as funções testes $w_i, \bar{w}_i \in \mathcal{F}$.

Consideremos então campos vetoriais $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ tais que as funções teste $w_i, \bar{w}_i \in \mathcal{J}_{\alpha-1}$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, 3\}$. Sendo assim, temos um sistema com $6(\alpha - 1) + 6 = 6\alpha$ equações lineares homogêneas na variável ξ dadas por

$$\int_M w_i \phi_k = \int_M \bar{w}_i \phi_k = 0, \quad \int_M w_i = \int_M \bar{w}_i = 0, \quad (13)$$

onde $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq k \leq \alpha - 1$. Portanto, como

$$\dim \mathcal{H}^1(M) = b_1(M) = 2g,$$

se valer $2g > 6\alpha$, então o sistema (13) tem no mínimo uma solução não trivial $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ tal que $w_i, \bar{w}_i \in \mathcal{J}_{\alpha-1}$ para todo $1 \leq i \leq 3$. Pela caracterização de λ_α^L em (5), temos

$$\lambda_\alpha^L \leq \frac{\int_M w_i L w_i}{\int_M w_i^2} \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha^L \leq \frac{\int_M \bar{w}_i L \bar{w}_i}{\int_M \bar{w}_i^2}.$$

Assim, usando o Lema 3.2.1 com $H \neq 0$, temos que

$$2\lambda_\alpha^L \int_M |\xi|^2 \leq -2 \int_M \overline{\text{Ric}}(N, N) |\xi|^2 - 4H^2 \int_M |\xi|^2.$$

Como $\overline{\text{Ric}}(N, N) \geq 0$, obtemos

$$\lambda_\alpha^L \leq -2H^2 < 0$$

e, portanto, $\text{Ind}_W(M) \geq \alpha$. Como α pode ser escolhido como o maior inteiro tal que $2g > 6\alpha$, obtemos

$$\text{Ind}_W(M) \geq \frac{g}{3} - 1.$$

Isto conclui a demonstração. \square

4 Grupos de Cohomologia de subvariedades com fronteira livre

Para falar de nossos resultados envolvendo variedades com fronteira, vamos primeiramente fixar algumas notações.

Seja M^n é uma subvariedade compacta, orientável, imersa em uma variedade Riemanniana \bar{M}^{n+k} . Fixe um ponto $x \in M$ e um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_{n+k}\}$ de \bar{M}^{n+k} de forma que $\{e_1, \dots, e_n\}$ são campos vetoriais tangentes de M^n . Para cada α , $n+1 \leq \alpha \leq n+k$, defina uma aplicação linear $A_\alpha : T_x M \rightarrow T_x M$ por

$$A_\alpha X = -\bar{\nabla}_X e_\alpha,$$

onde X é um campo vetorial tangente a M e $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \bar{M}^{n+k} .

Finalmente, denotamos por Φ a segunda forma fundamental sem traço de M , isto é

$$\Phi(X, Y) = II(X, Y)N - \langle X, Y \rangle \vec{H}.$$

Em particular, o quadrado da norma de Φ é dado por

$$|\Phi|^2 = |A|^2 - nH^2.$$

Este número mede o quanto a imersão deixa de ser totalmente umbílica.

No que segue, vamos precisar da seguinte definição (ver (LIN, 2015a)).

Definição 4.0.1 Dizemos que uma variedade Riemanniana \bar{M}^{n+k} tem tensor curvatura puro se para todo $x \in \bar{M}$ existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+k}\}$ do espaço tangente $T_x \bar{M}$ tal que $\langle \bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle = 0$ sempre que o conjunto $\{i, j, k, l\}$ contém mais que dois elementos.

Podemos ver que variedades com curvatura seccional K constante têm tensor curvatura puro, pois nesse caso, o tensor curvatura é dado por $\langle \bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle = K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$, onde $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ (ver (CARMO, 1988)).

Agora vamos lembrar o conceito de p -convexidade para o bordo ∂M de uma variedade Riemanniana M .

Definição 4.0.2 Dizemos que ∂M é p -convexo se a soma de suas p menores curvaturas principais é sempre positiva.

Note que se ∂M é compacto, sua p -convexidade implica que existe uma constante $\kappa > 0$ tal que $\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p} \geq \kappa$.

No que segue, usaremos a notação em (LIN, 2015a) e denotaremos por \bar{K} o tensor em \bar{M} dado por $\bar{K}_{ij} = \bar{R}_{ijij} = \langle \bar{R}(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle$, para $1 \leq i, j \leq n+k$. Em particular, se \bar{M} tem curvatura positiva, então $\bar{K}_{ij} > 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n+k$.

4.1 P-FORMAS EM VARIEDADES COMPACTAS COM FRONTEIRA

Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável com bordo não-vazio. Seja $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ a diferencial exterior em M^n e $\delta = d^* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ a co-diferencial, como definidos na seção 3.1. Dadas duas p -formas ω e η em M , definimos em cada ponto de M um produto interno da seguinte forma:

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \eta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Quando generalizada para p -formas, a fórmula de Böchner-Weitzenböck (1) torna-se

$$\Delta = \nabla^* \nabla + \mathcal{R}_p, \quad (14)$$

onde $\mathcal{R}_p : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ é o operador curvatura de Weitzenböck, um operador autoadjunto que age em p -formas e cuja expressão local depende do tensor curvatura de M e é dada por (ver (ROSENBERG, 1997))

$$(\mathcal{R}_p \omega)(X_1, \dots, X_p) = (R(X_k, e_j) \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}, e_j, X_{k+1}, \dots, X_p),$$

onde $X_1, \dots, X_p \in TM$.

Em particular, se ω é uma 1-forma, então

$$\langle \mathcal{R}_1(\omega), \omega \rangle = \text{Ric}(\omega^\#, \omega^\#).$$

Uma p -forma ω em uma variedade M , compacta e com fronteira não-vazia, é dita ser harmônica se ela é uma solução para ambas as equações $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$. Obviamente isto implica que $\Delta\omega = 0$.

Observação 4.1.1 *Em variedades com fronteira, não é verdade em geral que uma solução para a equação $\Delta\omega = d\delta\omega + \delta d\omega = 0$ é também uma solução para ambas as equações $d\omega = 0$ e $\delta\omega = 0$. Neste caso diremos que uma forma ω é harmônica quando ela for simultaneamente fechada e co-fechada.*

Vamos demonstrar o seguinte Lema, o qual será de grande importância em nosso trabalho.

Lema 4.1.1 *Se ω é uma p -forma harmônica, então*

$$\int_M |\nabla\omega|^2 + \langle \mathcal{R}_p \omega, \omega \rangle d\mu = - \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle d\sigma, \quad (15)$$

onde ν é o vetor co-normal unitário de ∂M apontando para o interior.

Demonstração: Fixando duas p -formas ω e η , definimos um campo vetorial X por

$$\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Y \omega, \eta \rangle.$$

Escolhendo um referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um dado ponto p de M , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_i e_i \langle X, e_i \rangle \\ &= \sum_i e_i \langle \nabla_{e_i} \omega, \eta \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega, \eta \rangle + \langle \nabla_{e_i} \omega, \nabla_{e_i} \eta \rangle \\ &= -\langle \nabla^* \nabla \omega, \eta \rangle + \langle \nabla \omega, \nabla \eta \rangle. \end{aligned}$$

Agora o Teorema de Stokes diz que

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\mu = - \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\sigma,$$

de forma que

$$\int_M \langle \nabla^* \nabla \omega, \eta \rangle d\mu = \int_M \langle \nabla \omega, \nabla \eta \rangle d\mu + \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu \omega, \eta \rangle d\sigma. \quad (16)$$

Se ω é uma p -forma harmônica, a fórmula de Weitzenböck (14) implica que

$$\langle \nabla^* \nabla \omega, \omega \rangle = -\langle \mathcal{R}_p \omega, \omega \rangle.$$

Portanto, tomando $\eta = \omega$ na igualdade (16), obtemos (15). □

Considere a decomposição de um campo vetorial $X \in T_y M$, onde $y \in \partial M$, em suas partes tangencial e normal $X = X^t + X^n$. Definimos

$$\omega_t(X_1, \dots, X_p) = \omega(X_1^t, \dots, X_p^t) \quad \forall X_1, \dots, X_p \in T_y M$$

e

$$\omega_n = \omega|_{\partial M} - \omega_t$$

para $p \geq 1$ e $\omega_t = 0$ para $p = 0$. Estas formas são chamadas, respectivamente, as componentes tangencial e normal de $\omega \in \Omega^p(M)$. A componente tangencial ω_t é unicamente determinada pelo pull-back $j^* \omega$ da aplicação inclusão $j : \partial M \rightarrow M$. Assim podemos identificar a projeção tangencial com o pull-back, e escrever $j^* \omega = \omega_t$ (ver (SCHWARZ, 2006)).

Definição 4.1.1 Dizemos que uma p -forma ω é absoluta se $\omega_n = 0$ e $(d\omega)_n = 0$. Analogamente, ω é relativa se $\omega_t = 0$ e $(\delta\omega)_t = 0$.

Definimos os seguintes espaços:

$$\mathcal{H}_T^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M); d\omega = 0, \delta\omega = 0 \text{ em } M^n \text{ e } i_\nu\omega = 0 \text{ em } \partial M\}$$

e

$$\mathcal{H}_N^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M); d\omega = 0, \delta\omega = 0 \text{ em } M^n \text{ e } \nu \wedge \omega = 0 \text{ em } \partial M\},$$

onde ν é o vetor conormal unitário de ∂M apontando para o interior.

Em outros termos, $\mathcal{H}_T^p(M)$ é o espaço das p -formas harmônicas que são tangenciais em ∂M e $\mathcal{H}_N^p(M)$ é o espaço das p -formas harmônicas que são normais em ∂M . Lembremos que para todo $0 \leq p \leq n$ temos o isomorfismo

$$\mathcal{H}_T^p(M) \simeq H^p(M) \tag{17}$$

(ver (AMBROZIO et al., 2018b), Theorem 3) e o operador estrela de Hodge nos dá

$$\mathcal{H}_N^p(M) \simeq \mathcal{H}_T^{n-p}(M). \tag{18}$$

Finalmente, para $p = 1$, temos que se ∂M tem $r \geq 1$ componentes de bordo, então (ver (AMBROZIO et al., 2018b), Lemma 4)

$$\dim \mathcal{H}_N^1(M) \geq r - 1. \tag{19}$$

Para estudar o termo do bordo em (15) temos o seguinte lema:

Lema 4.1.2 Seja ω uma p -forma em M , com coeficientes $a_{i_1 \dots i_p}$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ as curvaturas principais de ∂M . Temos que,

(a) se ω é absoluta, então

$$\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle = \sum_{i_1 < \dots < i_p = 1}^{n-1} a_{i_1 \dots i_p}^2 (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p});$$

(b) se ω é relativa, então

$$\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle = \sum_{i_1 < \dots < i_{n-p} = 1}^{n-1} a_{i_1 \dots i_{n-p}}^2 (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{n-p}}).$$

Demonstração: Para provar (a), seja $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal local em ∂M tal que $A^{\partial M}(e_i) = \lambda_i e_i$. Como ω é tangencial em ∂M temos que

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p=1}^{n-1} a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

onde $a_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ e $dx_i = e_i^\flat$. Como $\iota_\nu d\omega = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \iota_\nu d\omega, \omega \rangle \\ &= \langle d\omega, \nu \wedge \omega \rangle \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p=1} a_{i_1 \dots i_p} \langle d\omega, \nu^\flat \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p=1} a_{i_1 \dots i_p} d\omega(\nu, e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p=1} a_{i_1 \dots i_p} [(\nabla_\nu \omega)(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) + \sum_{j=1}^p (-1)^j (\nabla_{e_{i_j}} \omega)(\nu, e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_j}, \dots, e_{i_p})] \\ &= \langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle + \sum_{i_1 < \dots < i_p=1} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p (-1)^j (\nabla_{e_{i_j}} \omega)(\nu, e_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_j}, \dots, e_{i_p}) \\ &= \langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle + \sum_{i_1 < \dots < i_p=1} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p (-1)^j \langle \nabla_{e_{i_j}} \omega, \nu^\flat \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que a p -forma $\nu^\flat \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ é normal no bordo, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= e_{i_j} \langle \omega, \nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_{i_j}} \omega, \nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle + \langle \omega, \nabla_{e_{i_j}} (\nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})) \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_{i_j}} \omega, \nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle + \langle \omega, \nabla_{e_{i_j}} \nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle \\ &\quad + \langle \omega, \nu^\flat \wedge \nabla_{e_{i_j}} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que a p -forma $\nu^\flat \wedge \nabla_{e_{i_j}} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})$ também é normal no bordo, daí

$$\langle \nabla_{e_{i_j}} \omega, \nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle = -\langle \omega, \nabla_{e_{i_j}} \nu^\flat \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) \rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle &= \sum_{i_1 < \dots < i_p = 1} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p (-1)^j \langle \omega, \nabla_{e_{i_j}} \nu^\flat \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_p = 1} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \langle \omega, (A^{\partial M} e_{i_j})^\flat \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_p = 1} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p \lambda_{i_j} \langle \omega, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \rangle \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_p = 1} a_{i_1 \dots i_p} \sum_{j=1}^p \lambda_{i_j} a_{i_1 \dots i_j \dots i_p} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_p = 1} a_{i_1 \dots i_p}^2 (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p}).
\end{aligned}$$

Para provar (b), note que se ω é uma p -form relativa (em particular normal), então $*\omega$ é uma $(n - p)$ -forma tangencial. Lembrando que o operador estrela de Hodge é uma isometria, os cálculos acima nos dão

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle &= \frac{1}{2} \nu \langle \omega, \omega \rangle \\
&= \frac{1}{2} \nu \langle *\omega, *\omega \rangle \\
&= \langle \nabla_\nu * \omega, *\omega \rangle \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_{n-p} = 1} a_{i_1 \dots i_{n-p}}^2 (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{n-p}}).
\end{aligned}$$

Em particular, se $\omega = \sum_{i=1}^{n-1} a_i dx_i$ é uma 1-forma absoluta, então, por (a)

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i^2 \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j \right\rangle \\
&= \left\langle A^{\partial M} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i \right), \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j \right\rangle \\
&= \langle A^{\partial M}(\omega^\sharp), \omega^\sharp \rangle \\
&= II^{\partial M}(\omega^\sharp, \omega^\sharp),
\end{aligned}$$

e se ω é uma 1-forma relativa, então, por (b)

$$\begin{aligned}\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle &= \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}}^{n-1} a_{i_1 \dots i_{n-1}}^2 (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_{n-1}}) \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) a_{12 \dots (n-1)}^2 \\ &= (\text{tr} A^{\partial M}) |\omega|^2 \\ &= (n-1) H^{\partial M} |\omega|^2,\end{aligned}$$

onde $II^{\partial M}$ e $H^{\partial M}$ são, respectivamente, a segunda forma fundamental e a curvatura média escalar de ∂M em M . Finalmente, lembrando que $\langle \mathcal{R}_1 \omega, \omega \rangle = \text{Ric}(\omega, \omega)$, temos de (15),

$$\int_M |\nabla \omega|^2 + \text{Ric}(\omega, \omega) d\mu = - \int_{\partial M} II^{\partial M}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) d\sigma, \quad (20)$$

se $\omega \in \mathcal{H}_T^1(M)$, e

$$\int_M |\nabla \omega|^2 + \text{Ric}(\omega, \omega) d\mu = -(n-1) \int_{\partial M} H^{\partial M} |\omega|^2 d\sigma, \quad (21)$$

se $\omega \in \mathcal{H}_N^1(M)$. □

Para provar nossos resultados precisaremos do seguinte lema técnico:

Lema 4.1.3 (ver (SCHWARZ, 2006), Teorema 3.4.4) *Seja (M^n, g) uma variedade compacta, orientável, com bordo não-vazio. Se uma forma harmônica é identicamente nula em ∂M , então ela é identicamente nula em M .*

O próximo lema será útil para o que segue e pode ser achado em (CALDERBANK et al., 2000) or (HERZLICH, 2000).

Lema 4.1.4 (Desigualdade de Kato) *Se ω é uma p -forma harmônica em M^n , então*

$$|\nabla \omega|^2 \geq (1 + K_p) |\nabla |\omega||^2,$$

onde

$$K_p = \begin{cases} \frac{1}{n-p}, & \text{if } 1 \leq p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ \frac{1}{p}, & \text{if } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < p \leq n-2. \end{cases}$$

Denote, para $1 \leq i, j < n$, $\bar{R}_{inin} = \langle \bar{R}(e_i, e_n) e_n, e_i \rangle$. Para estimar Ric_M temos o seguinte lema:

Lema 4.1.5 (Shiohama-Xu, (SHIOHAMA; XU, 1997)) *Seja $M^n \subset \bar{M}^{n+k}$ uma subvariedade e suponha que o tensor curvatura \bar{R} de \bar{M} satisfaz*

$$\sum_i \bar{R}_{inin} \geq (n-1)c,$$

para qualquer base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ para $T_x M$ em qualquer ponto $x \in M$. Aqui c é uma constante. Então, para qualquer vetor unitário $X \in T_x M$ vale

$$\text{Ric}_M(X, X) \geq \frac{n-1}{n} \left[nc + nH^2 - |\Phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| \right]. \quad (22)$$

4.2 PROVA DOS RESULTADOS PRINCIPAIS

Iniciaremos com as provas dos resultados para 1-formas.

Demonstração do Teorema 1.0.8: Vamos considerar primeiro $\omega \in \mathcal{H}_T^1(M)$. Como a imersão é de fronteira livre, dados X, Y tangentes a ∂M temos que

$$\begin{aligned} II^{\partial M}(X, Y) &= \langle A^{\partial M}(X), Y \rangle \\ &= -\langle \nabla_X^M \nu, Y \rangle \\ &= -\langle \nabla_X^{\bar{M}} \nu, Y \rangle \\ &= \langle A^{\partial \bar{M}}(X), Y \rangle \\ &= II^{\partial \bar{M}}(X, Y), \end{aligned}$$

onde ν é o vetor conormal unitário de ∂M apontando para o interior. Logo,

$$II^{\partial M}(\omega^\#, \omega^\#) \geq \lambda \langle \omega^\#, \omega^\# \rangle = \lambda |\omega|^2.$$

Pelo Lema 4.1.5, com $c = 1$, pela desigualdade de Kato e por (20) temos que

$$\begin{aligned} -\lambda \int_{\partial M} |\omega|^2 d\sigma &\geq - \int_{\partial M} II^{\partial M}(\omega^\#, \omega^\#) d\sigma \\ &= \int_M |\nabla \omega|^2 + \text{Ric}(\omega, \omega) d\mu \\ &\geq \frac{n}{n-1} \int_M |\nabla |\omega||^2 d\mu + (n-1) \int_M |\omega|^2 d\mu + (n-1) \int_M H^2 |\omega|^2 d\mu \\ &\quad - \frac{n-1}{n} \int_M |\Phi|^2 |\omega|^2 d\mu - (n-2) \sqrt{\frac{n-1}{n}} \int_M H |\Phi| |\omega|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escrever

$$H|\Phi| \leq \frac{\varepsilon}{2} H^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |\Phi|^2,$$

portanto

$$-\lambda \int_{\partial M} |\omega|^2 d\sigma \geq \frac{n}{n-1} \int_M |\nabla|\omega||^2 d\mu + C \int_M H^2 |\omega|^2 d\mu + (n-1 - D\varphi^2) \int_M |\omega|^2 d\mu, \quad (23)$$

onde $\varphi = \sup_M |\Phi|$,

$$C = C(n, \varepsilon) = n-1 - \frac{n-2}{2} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \varepsilon$$

e

$$D = D(n, \varepsilon) = \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{2} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Agora, tomando

$$\varepsilon = \frac{2n}{n-2} \sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

obtemos

$$C = 0 \text{ e } D = \frac{n}{4}.$$

Assim, podemos escrever (23) como

$$\lambda \int_{\partial M} |\omega|^2 d\sigma + \frac{n}{n-1} \int_M |\nabla|\omega||^2 d\mu + \left(n-1 - \frac{n}{4}\varphi^2\right) \int_M |\omega|^2 d\mu \leq 0.$$

Como $\lambda > 0$ e $\frac{n}{n-1} > 0$ concluímos que a condição

$$n-1 - \frac{n}{4}\varphi^2 \geq 0$$

ou equivalentemente

$$\varphi^2 \leq \frac{4(n-1)}{n}$$

implica que $\omega = 0$ no bordo de M e, portanto, $\omega = 0$ em M , pelo Lema 4.1.3. Assim, por (17),

$$H^1(M) \simeq \mathcal{H}_T^1(M) = \{0\}.$$

Para o caso em que $\omega \in \mathcal{H}_N^1(M) \simeq H^{n-1}(M)$, notemos que

$$(n-1)H^{\partial M} = \text{tr } II^{\partial M} \geq \lambda > 0.$$

Logo usamos (21) e a prova segue como no caso anterior. Em particular, se o bordo ∂M tem r componentes, então, por (19),

$$0 = \dim \mathcal{H}_N^1(M) \geq r-1 \geq 0,$$

e portanto $r = 1$. Isto conclui a demonstração. \square

Demonstração do Corolário 1.0.2: Note que B tem curvatura seccional $K \equiv 1$ e a conclusão segue. \square

Na demonstração do próximo resultado usaremos o seguinte

Lema 4.2.1 (Lin, (LIN, 2015b)) *Seja \bar{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana com tensor curvatura puro e seja M^n uma hipersuperfície de \bar{M}^{n+1} . Suponha que $\bar{K}_{ij} \geq 1$ para qualquer base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para $T_x M$, $x \in M$. Então para qualquer p -forma ω em M , $2 \leq p \leq n - 2$,*

$$\begin{aligned} \langle R_p \omega, \omega \rangle &\geq p(n-p)|\omega|^2 + p(n-p)H^2|\omega|^2 - \frac{p(n-p)}{n}|\Phi|^2|\omega|^2 \\ &\quad - |2p-n|\sqrt{\frac{p(n-p)}{n}}H^2|\Phi|^2|\omega|^2. \end{aligned}$$

Agora vamos provar um resultado análogo ao Teorema 1.0.8 para p -formas.

Demonstração do Teorema 1.0.9: Seja $\omega \in \mathcal{H}_T^p(M) \simeq H^p(M)$ e considere uma constante $\kappa > 0$ tal que $\sum_{i=1}^p \bar{\lambda}_i \geq \kappa$, onde os $\bar{\lambda}_i^s$ são as curvaturas principais de $\partial \bar{M}$. Como a imersão é de fronteira livre temos também que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \geq \kappa$. Como ω é absoluta obtemos pelo Lema 4.1.2(a) que

$$\langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle \geq \kappa |\omega|^2.$$

Sabemos por (15) que

$$\int_M |\nabla \omega|^2 + \langle \mathcal{R}_p \omega, \omega \rangle d\mu = - \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle d\sigma,$$

portanto, tomando $2 \leq p \leq n - 2$, temos, pela Desigualdade de Kato e pelo Lema 4.2.1,

$$\begin{aligned} -\kappa \int_{\partial M} |\omega|^2 d\sigma &\geq - \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu \omega, \omega \rangle d\sigma \\ &= \int_M |\nabla \omega|^2 + \langle \mathcal{R}_p \omega, \omega \rangle d\mu \\ &\geq (1 + K_p) \int_M |\nabla |\omega||^2 d\mu + p(n-p) \int_M |\omega|^2 d\mu + p(n-p) \int_M H^2 |\omega|^2 d\mu \\ &\quad - \frac{p(n-p)}{n} \int_M |\Phi|^2 |\omega|^2 d\mu - |2p-n| \sqrt{\frac{p(n-p)}{n}} \int_M H |\Phi| |\omega|^2 d\mu \\ &\geq (1 + K_p) \int_M |\nabla |\omega||^2 d\mu + C \int_M H^2 |\omega|^2 d\mu + [p(n-p) - D\varphi^2] \int_M |\omega|^2 d\mu, \end{aligned}$$

onde $\varphi = \sup_M |\Phi|$,

$$C = C(n, p, \varepsilon) = p(n-p) - \frac{|n-2p|}{2} \sqrt{\frac{p(n-p)}{n}} \cdot \varepsilon$$

e

$$D = D(n, p, \varepsilon) = \frac{p(n-p)}{n} + \frac{|n-2p|}{2} \sqrt{\frac{p(n-p)}{n}} \cdot \frac{1}{\varepsilon},$$

com $\varepsilon > 0$. Agora, tomando

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{np(n-p)}}{|n-2p|}$$

obtemos

$$C = 0 \text{ e } D = \frac{n}{4}.$$

Assim, podemos escrever

$$\kappa \int_{\partial M} |\omega|^2 d\sigma + (1 + K_p) \int_M |\nabla|\omega||^2 d\mu + \left[p(n - p) - \frac{n}{4}\varphi^2 \right] \int_M |\omega|^2 d\mu \leq 0.$$

Como $\kappa > 0$ e $1 + K_p > 0$ concluímos que a condição

$$p(n - p) - \frac{n}{4}\varphi^2 \geq 0$$

ou equivalentemente

$$\varphi^2 \leq \frac{4p(n - p)}{n}$$

implica que $\omega = 0$ no bordo de M . Logo $\omega = 0$ em M , pelo Lema 4.1.3, e portanto $H^p(M) = \{0\}$. Isto conclui a demonstração. \square

REFERÊNCIAS

- ALEXANDRINO, M. M.; BETTIOL, R. G. **Lie groups and geometric aspects of isometric actions**. Springer, Cham, 2015. x+213 p. ISBN 978-3-319-16612-4; 978-3-319-16613-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-319-16613-1>>.
- AMBROZIO, L.; CARLOTTO, A.; SHARP, B. Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces. **J. Differential Geom.**, v. 108, n. 3, p. 379–410, 2018. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/jdg/1519959621>>.
- AMBROZIO, L.; CARLOTTO, A.; SHARP, B. Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces. **Math. Ann.**, v. 370, n. 3-4, p. 1063–1078, 2018. ISSN 0025-5831. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00208-017-1549-8>>.
- AMBROZIO, L.; NUNES, I. A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball. **Comm. Anal. Geom.**, To appear, 2016.
- BARBOSA, E.; CAVALCANTE, M. P.; PEREIRA, E. Gap results for free boundary cmc surfaces in the euclidean three-ball. **arXiv preprint arXiv:1908.09952**, 2019.
- BARBOSA, E.; PEREIRA, E.; CALVES, R. A. G. Uniqueness results for free-boundary minimal hypersurfaces in conformally euclidean balls and annular domains. **arXiv:1807.10780**, 2018.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. In: **Manfredo P. do Carmo–Selected Papers**. [S.l.]: Springer, 2012. p. 221–235.
- BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. **Math. Z.**, v. 197, n. 1, p. 123–138, 1988. ISSN 0025-5874. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01161634>>.
- BATISTA, M.; MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. Hardy and Rellich inequalities for submanifolds in Hadamard spaces. **J. Differential Equations**, v. 263, n. 9, p. 5813–5829, 2017. ISSN 0022-0396. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.07.003>>.
- CALDERBANK, D. M. J.; GAUDUCHON, P.; HERZLICH, M. Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry. **J. Funct. Anal.**, v. 173, n. 1, p. 214–255, 2000. ISSN 0022-1236. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jfan.2000.3563>>.
- CAMINHA, A.; MN, T. d. G. D. **Coleção Fronteiras da Matemática**. [S.l.]: SBM, 2014.
- CARMO, M. do; PENG, C. Stable complete minimal hypersurfaces. In: **Proceedings of the 1980 Beijing symposium on differential geometry and differential equations**. [S.l.: s.n.], 1980. v. 1, p. 2.
- CARMO, M. P. Geometria riemanniana-2a edição. **Projeto Euclides–IMPA**, 1988.
- CAVALCANTE, M. P.; MENDES, A.; VITÓRIO, F. Vanishing theorems for the cohomology groups of free boundary hypersurfaces. **arXiv preprint arXiv:1807.06849**, 2018.
- CAVALCANTE, M. P.; MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. L^2 -harmonic 1-forms on submanifolds with finite total curvature. **J. Geom. Anal.**, v. 24, n. 1, p. 205–222, 2014. ISSN 1050-6926. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12220-012-9334-0>>.

CAVALCANTE, M. P.; OLIVEIRA, D. F. de. Lower bounds for the index of compact constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 and S^3 . **arXiv preprint arXiv:1711.07233**, 2017.

CHODOSH, O.; MAXIMO, D. On the topology and index of minimal surfaces. **J. Differential Geom.**, v. 104, n. 3, p. 399–418, 2016. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1478138547>>.

CHODOSH, O.; MAXIMO, D. On the topology and index of minimal surfaces ii. **arXiv preprint arXiv:1808.06572**, 2018.

D'ATRI, J. E.; NICKERSON, H. K. The existence of special orthonormal frames. **J. Differential Geometry**, v. 2, p. 393–409, 1968. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214428656>>.

FISCHER-COLBRIE, D.; SCHOEN, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Online Library, v. 33, n. 2, p. 199–211, 1980.

FRASER, A.; SCHOEN, R. The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces. **Adv. Math.**, v. 226, n. 5, p. 4011–4030, 2011. ISSN 0001-8708. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.11.007>>.

FRASER, A.; SCHOEN, R. Minimal surfaces and eigenvalue problems. In: **Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, (Contemp. Math., v. 599). p. 105–121. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/conm/599/11927>>.

FRASER, A.; SCHOEN, R. Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms. **Int. Math. Res. Not. IMRN**, n. 17, p. 8268–8274, 2015. ISSN 1073-7928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/imrn/rnu192>>.

FRASER, A.; SCHOEN, R. Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball. **Invent. Math.**, v. 203, n. 3, p. 823–890, 2016. ISSN 0020-9910. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00222-015-0604-x>>.

HERZLICH, M. Refined Kato inequalities in Riemannian geometry. In: **Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (La Chapelle sur Erdre, 2000)**. [S.l.]: Univ. Nantes, Nantes, 2000. p. Exp. No. VI, 11.

JOST, J. **Riemannian geometry and geometric analysis**. Seventh. Springer, Cham, 2017. xiv+697 p. (Universitext). ISBN 978-3-319-61859-3; 978-3-319-61860-9. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-3-319-61860-9>>.

LI, H.; XIONG, C. A gap theorem for free boundary minimal surfaces in geodesic balls of hyperbolic space and hemisphere. **J Geom Anal.**, To appear, 2017.

LIMA, E. L. **Homologia básica**. [S.l.]: IMPA, 2009.

LIN, H. On the structure of submanifolds in euclidean space with flat normal bundle. **Results in Mathematics**, Springer, v. 68, n. 3-4, p. 313–329, 2015.

LIN, H. On the structure of submanifolds in euclidean space with flat normal bundle. **Results Math.**, v. 68, n. 3-4, p. 313–329, 2015. ISSN 1422-6383. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00025-015-0435-5>>.

LIN, H. Vanishing theorems for L^2 harmonic forms on complete submanifolds in Euclidean space. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 425, n. 2, p. 774–787, 2015. ISSN 0022-247X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.065>>.

MARQUES, F. C. Minimal surfaces-variational theory and applications. **arXiv preprint arXiv:1409.7648**, 2014.

NEVES, A. New applications of min-max theory. **arXiv preprint arXiv:1409.7537**, 2014.

POGORELOV, A. V. On the stability of minimal surfaces. In: RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES. **Doklady Akademii Nauk.** [S.l.], 1981. v. 260, n. 2, p. 293–295.

ROS, A. One-sided complete stable minimal surfaces. **J. Differential Geom.**, v. 74, n. 1, p. 69–92, 2006. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1175266182>>.

ROSENBERG, S. **The Laplacian on a Riemannian manifold.** Cambridge University Press, Cambridge, 1997. v. 31. x+172 p. (London Mathematical Society Student Texts, v. 31). An introduction to analysis on manifolds. ISBN 0-521-46300-9; 0-521-46831-0. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511623783>>.

SAVO, A. Index bounds for minimal hypersurfaces of the sphere. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 59, n. 3, p. 823–837, 2010. ISSN 0022-2518. Disponível em: <<https://doi.org/10.1512/iumj.2010.59.4013>>.

SCHOEN, R.; YAU, S. T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. **Ann. of Math. (2)**, v. 110, n. 1, p. 127–142, 1979. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1971247>>.

SCHWARZ, G. **Hodge Decomposition-A method for solving boundary value problems.** [S.l.]: Springer, 2006.

SHIOHAMA, K.; XU, H. The topological sphere theorem for complete submanifolds. **Compositio Math.**, v. 107, n. 2, p. 221–232, 1997. ISSN 0010-437X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1000189116072>>.

TANNO, S. Orthonormal frames on 3-dimensional Riemannian manifolds. **J. Differential Geometry**, v. 11, n. 3, p. 467–474, 1976. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214433601>>.

ZHU, P. Gap theorems on hypersurfaces in spheres. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 430, n. 2, p. 742–754, 2015. ISSN 0022-247X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.018>>.

ZHU, P.; FANG, S. A gap theorem on submanifolds with finite total curvature in spheres. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 413, n. 1, p. 195–201, 2014. ISSN 0022-247X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.11.064>>.