UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM PARTINDO DO CONCRETO PARA O ABSTRATO

EDGAR PEREIRA BARROS

Instituto de Matemática

Maceió, fevereiro de 2020

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

EDGAR PEREIRA BARROS

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM PARTINDO DO CONCRETO PARA O ABSTRATO

Maceió 2020

EDGAR PEREIRA BARROS

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM PARTINDO DO CONCRETO PARA O ABSTRATO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas(UFAL), como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Batista

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

B277p Barros, Edgar Pereira.
Princípio fundamental da contagem no ensino fundamental : uma abordagem partindo do concreto para o abstrato / Edgar Pereira Barros. - 2020.
46 f. : il.

Orientador: Marcio Batista.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 45-46.

1. Contagem. 2. Ensino fundamental. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Matemática - Resolução de problemas. I. Título.

CDU: 372.851

EDGAR PEREIRA BARROS

Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Fundamental: Uma Abordagem Partindo do Concreto para o Abstrato

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 21 de fevereiro de 2020.

Márcio H. Batista da Silva

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL (orientador)

Banca Examinadora:

José Carlos Almeida de Lima

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima – UFAL (Examinador Interno)

Allan George de Carvalho Freitas

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB (Examinador Externo)

Dedico este trabalho a minha família, em especial aos meus filhos Maria Vitória Barros e Arthur Barros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus em primeiro lugar, pois é ele que me faz levantar todos os dias e me dá força, coragem e sabedoria para continuar lutando pelos meus objetivos.

Agradeço e a minha família, em especial a minha esposa Mércia Cabral Barros, que sempre me deu força e entendeu minha falta de tempo, pois parte desse tempo foi dedicado aos estudos, a minha filha Maria Vitória Barros, que por algumas vezes não pude dar atenção que ela queria, e que as vezes me perguntava: “Papai porque o senhor estuda tanto?” e meu filho Arthur que nasceu durante a elaboração desse trabalho. Agradeço também, aos meus pais Maria Pereira e José Barros por sempre me apoiarem nas minhas decisões e me darem força, aos meus irmãos Danilo Barros e Gustavo Henrique Barros por serem exemplos e me motivarem sempre.

Aos colegas de turma 2017 do PROFMAT - UFAL pelas experiências trocadas durante o curso, em especial ao colega Manoel Hilário pelos momentos de estudo, sem sua contribuição não sei se teria conseguido ser aprovado no ENQ por exemplo.

Agradeço aos professores do PROFMAT- UFAL com quem tive o prazer de desfrutar de suas aulas, em especial o meu orientador prof. Dr. Marcio Batista, pela disponibilidade e objetividade durante a orientação e por todo conhecimento que me proporcionou.

RESUMO

O trabalho proposto aborda o ensino do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) com alunos do ensino fundamental anos finais: uma prática pedagógica partindo da utilização de material concreto para depois trabalhar problemas mais complexos e abstratos.

Desta forma, o objetivo é mostrar que o uso do concreto pode ser um recurso para motivar os estudantes e aprimorar o ensino de matemática, especificamente do Princípio Fundamental da Contagem. Sendo assim, a hipótese a ser comprovada é de que essa prática torna as aulas mais interessantes, mostrando aos alunos a importância da matemática em sala de aula e na vida prática.

Assim, o propósito deste trabalho é incentivar o uso de coisas reais para ensinar o Princípio Fundamental da Contagem, motivando os dissentes a compreender e resolver problemas relacionados a este tema, desde os mais simples aos mais complexos e abstratos.

Palavras-chave: Princípio Fundamental da Contagem; ensino fundamental anos finais; concreto e abstrato.

ABSTRACT

To approach the teaching of the Fundamental Principle of Counting (FPC) with elementary school students final years: a pedagogical practice starting from the use of concrete material to later work more complex and abstract problems.

The objective is to show that using concrete can be a resource to motivate students and improve mathematics teaching, specifically of the Fundamental Principle of Counting. The hypothesis to be proved is that this practice makes classes more interesting, showing students the importance of mathematics in the classroom and in practical life.

The purpose of this paper is to encourage the use of real things to teach the Fundamental Principle of Counting, thus motivating the students to understand and solve problems related to this theme, from the simplest to the most complex and abstract.

Keywords: Fundamental Principle of Counting; elementary school final years, concrete and abstract.

LISTA DE SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

PCN’s - Parâmetros Curriculares Nacionais

CF – Constituição Federal

PFC – Princípio Fundamental da contagem

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa retrata sobre o ensino do Princípio Fundamental da Contagem, designado daqui em diante por PFC, com alunos do ensino fundamental: uma prática pedagógica utilizando material concreto a partir das contribuições das pesquisas realizadas em sala de aula, com o objetivo de encontrar meios que facilitem a aprendizagem, facilitando assim, a resolução de problemas mais abstratos sobre tal conteúdo.

Observa-se, que a sociedade brasileira não é estática, pelo contrário, é dinâmica, ou seja, modifica-se constantemente em suas dimensões políticas, sociais, econômicas e culturais. A Educação está sempre atrelada às demandas e características das sociedades que a sustentam e o ensino de Matemática integra essa Educação. Em cada momento histórico, a Matemática, como qualquer outra disciplina escolar, tece-se pelos fatores externos (as condições políticas, sociais, econômicas e culturais que compõem a sociedade) e pelos fatores internos (aqueles referentes à natureza dos conhecimentos).

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Matemática deve ser abordada de maneira que aluno desenvolva a capacidade de resolução de situações-problemas e que no ensino médio seja capaz de formulá-los, que não seja uma atividade paralela ou como uma aplicação da aprendizagem, mas uma orientação da aprendizagem.

Levando em conta, que o objetivo principal é motivar os alunos sobre o ensino do PFC partindo de situações concretas, realizamos experiências com alunos do 9º ano de uma escola particular de Maceió, os quais resolveram um teste contendo alguns problemas baseados numa simples exposição teórica. Em seguida, realizou-se uma exposição em formato de oficina, na qual fizeram uso de material concreto e no final, foi reaplicado um teste semelhante ao primeiro. Importa-nos salientar que, os resultados serão mostrados ao longo do texto. Sendo assim, destacamos que após essa experiência foi introduzido problemas mais complexos e abstratos sobre contagem.

Nesse pressuposto, esse trabalho está apresentado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo vamos trabalhar alguns aspectos gerais da História da Matemática no Brasil, fazendo uma análise de como a matemática se desenvolveu no nosso país no decorrer dos anos. Destacaremos também a matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) e na nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Já no segundo capítulo, apresentamos a parte teórica do Princípio Fundamental da Contagem e sua utilidade para resolver problemas de contagem dos mais simples aos mais complexos. Desta forma, o aluno será capaz de perceber que esta ferramenta é a base para o estudo de combinatória que será trabalhado no ensino médio.

No terceiro capítulo, ao qual serão apresentados alguns problemas de combinatória e suas respectivas soluções, seguido dos testes realizados com os alunos antes e após a abordagem com uso de material concreto, fechando este capítulo com problemas mais complexos e que podem ser resolvidos pelo PFC.

E por fim, o capítulo quatro retratando a conclusão com as considerações finais pertinentes, mostrando o que foi verificado nessa abordagem.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Aspectos Gerais da História da Matemática no Brasil

Segundo Saviani (2008), a educação Colonial no Brasil foi marcada pelo menos por três etapas distintas, que são: “período heroico”; Organização e Consolidação da Educação Jesuíta; Fase pombalina.

De acordo com Saviani (2008), a primeira etapa é iniciada com a chegada dos primeiros jesuítas até a morte do padre Manuel da Nóbrega em 1570, mas o autor considera mais conveniente entender esta fase até o final do século XVI, quando o padre Anchieta morre, em 1597, e em seguida a promulgação do *Ratio Studiorum*, em 1599.

A segunda etapa é marcada pela organização e consolidação da educação jesuíta centrada no *Ratio Studiorum.* Se analisarmos todo o contexto do ensino da matemática no Brasil, percebemos que este surgiu com os Jesuítas quando ainda criara as escolas em nosso país, decorridos os seguintes fatos:

> Os propósitos missionários da Companhia de Jesus e a política colonizadora para o Brasil iniciada pelo monarca D. João III. Aliás, aquele monarca fizera uma reforma nos estudos em Portugal. Assim sendo, com a armada de Tomé de Souza que chegara ao Brasil em 1549, viera o Padre Manuel da Nóbrega que, em 29 de Março daquele ano (mesmo dia que chegara a armada) tomara as primeiras providências para a criação de uma escola de primeiras letras. E, em 15 de Abril de 1549, em Salvador, Bahia, fora fundada a primeira escola primária (de ler e escrever) no Brasil. O jesuíta Vicente Rijo Rodrigues (1528-1600) fora portanto, o primeiro mestre-escola do Brasil. Ele nascera em S. João de Talha, na margem direita do rio Tejo, perto de Lisboa. Falecera no Colégio do Rio de Janeiro, em 9 de Junho de 1600. Aliás, quando de sua fundação, a Companhia de Jesus não tivera o ensino como um dos seus objetivos imediatos. (SILVA, 1998 p.04)

Saviani (2008) destaca que, em 1550, o jesuíta Leonardo Nunes juntamente com doze órfãos da metrópole construíra em São Vicente, litoral de São Paulo, um pavilhão de taipa no qual funcionara também uma escola primária, provavelmente a primeira do país, mas até então não havia aulas de Matemáticas.

Conforme Saviani (2008), a terceira etapa (1759-1808), que se trata da fase pombalina, compreende o segundo período da história das ideias pedagógicas no

Brasil. Neste período várias mudanças ocorrem no Brasil, que segundo Saviani (2008 p.32) “as reformas pombalinas da instrução pública inserem-se no quadro das reformas modernizadoras levadas a efeito por Pombal visando colocar Portugal a altura do século XVIII”, que caracteriza o iluminismo. Esta etapa estende-se até o início do Império e abrange o momento joanino (1808-1822).

O primeiro curso regular foi estabelecido em 1572 no Colégio de Salvador, Bahia, e organizado pelos inacianos. Onde o curso tinha duração de três anos e contava com as seguintes disciplinas: Matemática, Lógica, Física, Metafísica e Ética com grau de bacharel ou licenciado. Como referência no Colégio da Bahia, dentre outros, havia os seguintes jesuítas: Inácio Stafford, Aloísio Conrado Pfeil, Manuel do Amaral, Valentim Estancel, Filipe Bourel, Jacobo Cocleo ou Jacques Cocle, Diogo Soares, Domingos Capassi e João Brewer (SILVA, 1998).

Portanto, a matemática no Brasil deu seus primeiros passos através da Companhia de Jesus, onde os padres Jesuítas que aqui chegaram foram os responsáveis por implantarem a primeira escola primária.

Diante dessa forte influência dos Jesuítas no ensino do Brasil, estes fundaram no colégio de Salvador a primeira Faculdade de Matemática, onde se estudava em parte, os mesmos tipos de Matemática que se estudava em Coimbra Portugal. Porém, vale salientar que os estudantes brasileiros que desejavam ir a Portugal prosseguir com seus estudos não aproveitavam disciplinas já cursadas no Brasil, pois alguns anos a metrópole não reconheceu como legal os graus acadêmicos concedidos pelos colégios jesuítas no Brasil (SILVA, 1998).

Assim, a partir desse momento o Brasil colônia passaria por sérios problemas no ensino de matemática. Portugal estava cuidando das reformas em seu sistema de ensino, e isso afetou o Brasil de forma negativa.

Como nossa herança é portuguesa devemos destacar que a reforma na Universidade de Coimbra executada por Sebastião José de Carvalho e Melo, o Marquês de Pombal, afetou negativamente a área cultural, econômica e educacional e alcançou seu clímax em 1772 ao atingir a Universidade de Coimbra por meio de seus estatutos. O então primeiro ministro esperava conseguir homens preparados e alcançar a evolução da Europa industrial (SILVA, 1998).

Essa tomada de atitude por parte da Igreja católica era bastante produtiva no setor educacional, porém era necessário a criação de estruturas físicas e um planejamento para cuidar da colônia e consequentemente da evolução dos estudos de matemática que continuavam fragilizados diante de outras prioridades da coroa.

Já em 1808, com a chegada da Família Real portuguesa, houveram mudanças no campo ligado a educação e a cultura em geral. Muitas instituições culturais e educacionais foram implantadas como foi o caso da Academia Real da Marinha, Academia Real Militar, formação de engenheiros civis e militares no Rio de Janeiro; cursos de cirurgia, agricultura, química, a escola moderna, artes e oficio e o Museu Nacional no Rio de Janeiro entre outras (SILVA, 1988; SAVIANI, 2008).

Conforme preconiza Silva (1998), somos devedores a Napoleão Bonaparte pela verdadeira descoberta do Brasil, por parte da metrópole e bem como pela constitucionalização do ensino superior; além de trazer consigo pessoas altamente influentes para a educação, como por exemplo o brasileiro Dr. José Correa Picanço. A Academia Real Militar fora fundada por Carta Régia de 4 de dezembro de 1810, e é essa a instituição a partir da qual se desenvolvera o ensino sistemático das Matemáticas no país.

A Academia Real Militar destinava-se a formar oficiais topógrafos, geógrafos e das armas de engenharia, infantaria e cavalaria para o exército do rei. O curso tinha um período completo de sete anos, sendo os quatro primeiros anos básicos, o chamado curso matemático e outro militar, de três anos de duração. No entanto, não eram todos os alunos, que eram obrigados a concluir por completo, conforme nos informara Motta (*apud* SILVA 1998, p.03).

> [...] Os alunos destinados à Infantaria e à Cavalaria apenas estudavam as matérias do primeiro ano (Matemática Elementar), e os assuntos militares do quinto. Só para artilheiros e engenheiros eram exigidos os estudos do curso completo [...].

Mudanças aconteceram após a independência do Brasil em 1822, a Academia Real Militar passou a denominar-se Academia Imperial Militar. Conforme Silva (1998 p. 04) "o Decreto imperial de 9 de março de 1832 declarara extinta a Academia Imperial Militar e instituíra a Academia Militar da Marinha do Brasil".

Mas por um espaço curto de tempo houvera a junção das duas Escolas Militares, pois o Decreto imperial de 22 de outubro de 1832 decretara a separação das duas Escolas, onde a do Exército passara a denominar-se Academia Militar da Corte ou Academia do Império do Brasil.

Agora como Escola Militar alterada pelo Decreto imperial n° 25 passara a ser regida por novo regulamento aprovado em 22 de fevereiro de 1839. De acordo com o regulamento, a reorganização fora destinada a habilitar devidamente os oficiais das três armas do exército, bem como à classe de engenheiros militares e à classe do estado-maior. Na Escola Militar também seu regulamento impusera algumas reformas didáticas, pois os professores foram obrigados a organizar textos didáticos moldados em livros adotados e também foram feitas várias compilações de autores franceses, bem como traduções para a língua portuguesa (SILVA, 1998).

A partir desse momento as elites dominantes perceberam a urgente necessidade de serem formados também engenheiros civis e, passaram a pressionar o Imperador, já que o país estava passando por tímidas mudanças de cunho estrutural, sociais, políticas e econômicas, como por exemplo, construções de fábricas, portos, estradas, urbanização de cidades, dentre outras, pois o Brasil começara a se modernizar só a partir da década de 1850, então por meio do Decreto imperial n° 140, de 09 de Março de 1842, no qual fora instituída modificações nos Estatutos da Escola Militar e, dentre estas, a ampliação de disciplinas de engenharia civil no sétimo ano do curso daquela instituição de ensino.

2.2. A Matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídas através das experiências que vivenciam em seu meio sociocultural. Além disso, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc.

Da mesma forma, a sobrevivência numa sociedade que, a cada dia, torna-se mais complexa, exigindo novos padrões de produtividade, depende cada vez mais de conhecimentos. Isso obriga o profissional a estar num contínuo processo de formação visto que, cidadania significa inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

A diversidade de etnias existente em nosso país, que originam formas de vida desiguais, bem como a concepção de valores distintos e crenças e conhecimentos adquiridos ao longo da vida, apresentam-se para a educação matemática, na maioria das vezes, como um obstáculo a ser superado. Isso demanda que os estudantes aprendam a atuar de acordo com os recursos disponíveis bem como das dependências e restrições do meio no qual estão inseridos

> Uma reflexão voltada para a educação matemática das pessoas revelou que nas últimas décadas, acumulou-se um acervo considerável de conhecimentos sobre os processos de construção e aquisição dos conceitos e procedimentos matemáticos e sobre as questões correspondentes de ensino e de aprendizagem. (BRASIL. MEC. SEF. 1997).

Nesses estudos, através de consenso, tem sido definido que o processo de ensino da Matemática não está resumido à transmissão de conhecimentos sobre o saber adquirido nessa temática, pois a área da Matemática é bem mais ampla e complexa, o processo de construção do mesmo envolve o desenvolvimento de um acervo variado de capacidades cognitivas e carece, além disso, que se conceda a participação ativa do discente nessa estruturação. Nesse cenário, é conveniente recordar que as aptidões não se consumam no vazio e sim por meio de entendimentos de diversos tipos, sendo eles informais ou codificados, nos quais os últimos a serem construídos em sala de aula.

Buscar um conjunto de competências matemáticas a serem construídas é uma tarefa bastante difícil, a seguir serão citadas algumas competências de natureza geral, como algumas possibilidades. Apontadas pelo Ministério da Educação (2007, p. 12)

- Interpretar matematicamente situações do dia-a-dia ou de outras áreas do conhecimento;
- Usar independentemente o raciocínio matemático, para a compreensão do mundo que nos cerca;
- Resolver problemas criando estratégias próprias para sua resolução, desenvolvendo a iniciativa, a imaginação e a criatividade;
- Avaliar se os resultados obtidos na solução de situações problema são ou não razoáveis;
- Estabelecer conexões entre campos da Matemática e entre essa e outra área do saber;
- Raciocinar, fazer abstrações com base em situações concretas, generalizar, organizar e representar;
- Compreender e transmitir ideias matemáticas apoiada em vários tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo, probabilístico, por analogia, plausível, entre outros;
- Comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem empregadas na Matemática;
- Desenvolver a sensibilidade para as relações da Matemática com as atividades estéticas e lúdicas;
- Utilizar as novas tecnologias da computação e da informação.

A incumbência do ensino da Matemática na formação plena do discente como cidadão da sociedade atual, na qual o convívio torna-se cada vez mais complexo e marcado por graves conflitos sociais, produzidos e mantidos por perseverantes desigualdades no ingresso de todo cidadão a bens e serviços e ao âmbito de decisões de políticas sociais e educativas. O ensino de Matemática pode auxiliar doravante para a formação de cidadãos investigadores e motivadores. Devemos propor um ensino que procure desenvolver habilidades matemáticas que auxiliem mais diretamente ao aluno, para assessorar o mesmo a compreender questões sociais vinculadas inicialmente à sua volta, e posteriormente, a realidade mais ampla.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1998, p. 30) são norteadores de grande importância para o ensino. O valor dos PCN's para um potencial matemático é muito grande, pois os mesmos trazem propostas de objetivos para a matemática do Ensino Fundamental e estas evidenciam instrumentos para compreender o mundo à sua volta e faz vê-la como um campo do conhecimento que encoraja a atenção, o interesse, a averiguação e o desenvolvimento da capacidade para solucionar problemas.

Os ensinamentos nessa área necessitam ter em conta que a Matemática é uma linguagem que procura abranger os aspectos do concreto, que é mecanismo categórico de relevância e esclarecimento para várias ciências. É significativo supor que as ciências, bem como as tecnologias, são edificações humanas apontadas historicamente nas quais os objetos de estudo por elas criados e os manifestos por estas elaborados não se equivocam com o nosso mundo natural e físico. É crucial assimilar que, apesar de o mundo permanecer sendo o mesmo, os alvos de estudo são diferentes, enquanto restauradores do conhecimento aprimorado pelas ciências através de suas próprias leis, as quais carecem ser oportunas e localizadas em uma gramática pertencente a cada ciência. Além disso, concerne assimilar os princípios científicos existentes nas tecnologias adotadas ao ensino, agregá-las aos problemas aos quais propõe-se esclarecer e resolve-los de forma contextualizada, adotando os princípios científicos a oportunidades simuladas ou reais.

A definição mais comum, encontrada nos manuais, estipula que "a avaliação é um julgamento de valor sobre manifestações relevantes da realidade, tendo em vista uma tomada de decisão" (LUCKESI, 1978, p 33).

Os métodos de ensino e o currículo escolar devem atender ás necessidades dos alunos, estando em equiparação com a realidade por eles vivenciada. A disciplina pode estar mais ligada a questões do dia-a-dia e assim o aluno poderá assimilar melhor o que está sendo estudado e este se sinta mais determinado em compreender e combater os problemas aos quais é exposto habitualmente. As práticas de ensino devem ser caracterizadas de acordo com a necessidade de cada série, abrangendo os aspectos discutidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1998) tal como a utilização da história da Matemática, o manuseio de tecnologias como ferramenta facilitadora no ensino da disciplina, a solução de problemas e contextualização dos assuntos como forma de descomplicar a aprendizagem do estudante e o trabalho do professor.

O estudante necessita vivenciar o magistério desde o início da vida acadêmica, com empreendimentos que envolvam trabalhos com estudantes de escolas públicas e particulares, só assim será possível entender as diferentes realidades existentes. Por meio da experiência e de projetos envolvendo essa temática, torna-se mais equilibrada a passagem do futuro professor pela sala de aula, uma vez que este já terá convivido com estudantes de diferentes realidades, isso irá auxiliá-lo a pensar em diferentes forma de lidar com a imaginação e o raciocínio dos discentes.

A instrução pedagógica também repercute em seu trabalho e adaptação na sala de aula, dessa forma é fundamental que existam disciplinas e trabalhos voltados para a área pedagógica, não omitindo a questão técnica, sendo esta de extrema relevância para uma formação pertinente ao professor. O investimento em formação continuada auxilia o professor na busca de informação e partilha de experiências.

As atividades abrangendo situações-problema e raciocínio lógico concebem aos alunos a possibilidade de desenvolver aptidão para o aprendizado de Matemática e a utilização da inevitabilidade para solucionar problemas de forma mais eficaz e dinâmica. De acordo com os PCN's, as tecnologias constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas (PCN's, 1998, p. 43).

Uma forma prática de facilitar o aprendizado da matemática é a utilização de calculadoras, isso deve ser feito de modo a atuar como instrumento facilitador do aprendizado, desde que o aluno consiga identificar e interpretar o que realiza com a máquina. O seu uso indiscriminado das tecnologias ou qualquer outro método prejudica o desenvolvimento de habilidades e competências adquiridas pelos alunos.

> Cada criança ou jovem brasileiro, mesmo de locais com pouca infraestrutura e condições socioeconômicas desfavoráveis, deve ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania para deles poder usufruir. Se existem diferenças socioculturais marcantes, que determinam diferentes necessidades de aprendizagem, existe também aquilo que é comum a todos, que um aluno de qualquer lugar do Brasil, do interior ou do litoral, de uma

> grande cidade ou da zona rural, deve ter o direito de aprender e esse direito deve ser garantido pelo Estado. (PCN's/MEC/SEF. 1997).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam a princípio os Objetivos Gerais do ensino fundamental, são eles os principais norteadores que regem a estruturação e as metas curriculares a serem alcançadas. A seguir demonstraremos os principais objetivos a serem alcançados:

> • Objetivo Geral do Ensino Fundamental: utilizar diferentes linguagens: verbal, matemática, gráfica, plástica, corporal — como meio para expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções da cultura.
>
> • Objetivo Geral do Ensino de Matemática: analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente.
>
> • Objetivo do Ensino de Matemática para o Primeiro Ciclo: identificar, em situações práticas, que muitas informações são organizadas em tabelas e gráficos para facilitar a leitura e a interpretação, e construir formas pessoais de registro para comunicar informações coletadas. (PCN's/MEC/SEF. 1997).

Tais objetivos integram o ponto inicial para a reflexão a respeito de qual é a formação almejada para os estudantes, para que os mesmos a conquistem, assinalar o que a escola deseja facultar a eles e se tem oportunidades de implementar, sendo, nesse contexto, parâmetros que devem conduzir a ação educacional em todas as áreas de ensino, no decorrer do ensino obrigatório.

É obrigatório, portanto, orientar a triagem dos conteúdos a serem assimilados como meio para o aprimoramento das capacidades cognitivas e indicar as alternativas didáticas apropriadas para que os conteúdos ensinados tenham sentido para os discentes. Finalmente, devem constituir-se uma referência indireta da avaliação da atuação pedagógica da escola.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento atual e coletivo, que referência as instituições educacionais, públicas e particulares, para que possam elaborar e adequar as matrizes curriculares e ações educacionais, de maneira que venha a atender todos os níveis educacionais de nossa Constituição. A implementação do mesmo tem o caráter de unificar as modalidades de ensino e trabalhar em sintonia na amplificação dos saberes e conhecimentos.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BRASIL, 2017, p.7)

Na BNCC, a competência se define por meio de conhecimentos e procedimentos para a efetivação do ensino e a habilidade se dá na execução da aprendizagem, tendo como base valores que contemplem a vida cotidiana e que impactam nas ações cidadãs. A BNCC ao definir as competências, propõe ações didáticas para que sejam implementadas na Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, colaborando com a construção de conhecimentos, no desenvolver de habilidades e a formação de atitudes e valores.

Em seu contexto, trabalha 10 competências gerais que auxiliam para o desenvolvimento e execução das específicas. Em resumo, elas tratam da valorização dos conhecimentos históricos para que possa compreender o meio em que vivemos e como funciona nossa sociedade, a estimulação do conhecimento científico, com caráter investigativo e reflexivo nas diferentes áreas de conhecimento, e a valorização das manifestações culturais e artísticas em que as práticas diversificadas colaboram para o conhecimento das culturas de diversas regiões.

> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece

> referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC. (BRASIL, 2017, p.13)

Essa padronização do ensino, necessita de especificações para as realidades das diferentes modalidades de ensino, para que todos tenham acesso ao conhecimento, mas, que também tenha sua carga cultural respeitada e valorizada. Deve-se incorporar práticas educacionais que venham colaborar positivamente nos resultados das avaliações nacionais.

A BNCC aponta que a Matemática assume um papel fundamental de inclusão do sujeito, a partir de uma reflexão sobre sua cidadania e seu protagonismo na conscientização do direito de aprender.

Para Santos e Matos (2017, p. 6) "o currículo deve ser dinâmico e deve principalmente, atender à realidade do aluno, deve dar total autonomia ao professor, para que este não sufoque sua criatividade em meio a um currículo congelado e engessado (...)". Mas a BNCC ainda se apresenta disciplinar, e, apesar da interdisciplinaridade das ciências ter trazido as vantagens da divisão do trabalho, trouxe também o despedaçamento do saber.

Ainda sobre o direito de aprender, o texto da BNCC coloca o estudante como elemento responsável por sua própria aprendizagem, nessa perspectiva faz-se necessário lembrar o papel do Estado, pois de acordo com a Constituição Federal (BRASIL, 1988).

> Art. 205 a educação é um direito de todos, e um dever do estado. A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho (BRASIL, 1988, p. 156).

O direito de aprender é fundamental, e a aprendizagem como qualidade deve ser a meta principal da escola, fomentada pelo governo. No Brasil, de acordo com nossa Constituição Federal (BRASIL, 1988), a escola, o Estado, a família, todos precisam garantir o direito de aprendizagem e garantir que esse direito seja cumprido. Sobre essa basilar importância da educação, e, por conseguinte, do direito de aprender, Cury (2002) diz:

> O direito à educação parte do reconhecimento de que o saber sistemático é mais do que uma importante herança cultural. Como parte da

> herança cultural, o cidadão torna-se capaz de se apossar de padrões cognitivos e formativos pelos quais tem maiores possibilidades de participar dos destinos de sua sociedade e colaborar na sua transformação. Ter o domínio de conhecimentos sistemáticos é também um patamar sine qua non a fim de poder alargar o campo e o horizonte destes e de novos conhecimentos (CURY, 2002, p. 247).

A função da BNCC é também cumprir o artigo 210 da Constituição Federal (BRASIL, 1988) que já previa a fixação de conteúdos mínimos, vejamos:

> Art. 210. Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. (BRASIL, CF, 1988).

Considerando a data da promulgação da Constituição Federal, a BNCC demorou quase trinta anos (30) anos para ser elaborada, e em 2017, foi apresentada à sociedade, como um documento de caráter mandatório, que deverá reger o ensino e a aprendizagem em nível nacional por muitos anos, haja vista a lacuna temporal entre a publicação dos PCN à BNCC. Portanto, deve-se ficar atentos aos direitos de aprendizagem e suas condições de execução no ambiente escolar.

A BNCC sobre o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, destaca que são vistos como conhecimento legitimado para promover o desenvolvimento de muitas funções intelectuais, dentre elas:

(a) atenção deliberada;

(b) memória lógica;

(c) abstração;

(d) capacidade para comparar

Objetivando desenvolver raciocínio lógico-matemático, e complementamos que os objetivos de aprendizagem devem servir para desenvolver conceitos matemáticos, e, principalmente, para a formação humanística dos estudantes.

3. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM OU PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é um tópico da Análise Combinatória, que por muito tempo era trabalhado apenas no ensino médio, mas por recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e PCN (BRASIL, 1998) nos anos finais do Ensino Fundamental, dever ser trabalhado este tópico, com isso alguns livros didáticos incluíram esse tópico também no ensino fundamental, inclusive em séries diferentes, a depender da editora.

> Para Pessoa e Borba (2009), que afirmam que o PFC é entendido como um princípio implícito na resolução de todos os tipos de problemas combinatórios. Para Borba e Braz (2012) o PFC é uma estratégia válida, também, para problemas que apresentem condições para sua resolução visto que, a aplicação direta da fórmula nem sempre é válida para estes casos.

Existem muitos problemas em nosso cotidiano que são solucionados com uso do princípio multiplicativo. Em alguns desses casos onde a quantidade de agrupamentos é pequena, onde conseguimos descrever todos eles, podemos resolver fazendo contagem direta, ou seja, explicitando todos os casos ou até mesmo usando um raciocino lógico-mental, ou ainda utilizar a árvore de possibilidades. Entretanto, existem casos em que esse processo de contagem direta não é conveniente, pois a quantidade de agrupamentos é muito grande, não sendo “possível” descrever todos os casos, nem tão pouco calcular mentalmente, neste caso faremos uso do Princípio Fundamental da Contagem passo a passo.

> A combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação sem necessariamente ter que contá-los um a um. (PESSOA E BORBA, 2009, p. 3)

3.1. Definição

O Princípio Fundamental da Contagem é aplicado quando um evento é dado por número de possibilidades de fazer em n etapas distintas e independentes, qual é dado pelo produto da quantidade de modos possíveis que cada uma dessas etapas pode ser feita, ou seja, esse princípio que é definido da seguinte forma: Se um evento tiver duas etapas, se a primeira pode ocorrer de p_1 modos e a segunda pode ocorrer de p_2 modos, sendo assim $p_1 \cdot p_2$ é total de formas de fazê-las. De modo geral, se em um problema existem n etapas que podem ser feitas de tal forma que tenham:

p_1 possibilidades para a 1ª etapa;

p_2 possibilidades para a 2ª etapa;

p_3 possibilidades para a 3ª etapa;

.

.

.

p_n possibilidades para a enésima etapa;

então $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n$ é o número total de modos distintos de que o acontecimento pode ocorrer.

Outra linguagem para a definição:

Dadas que um problema existem n etapas, podendo ocorrer de $p_1, p_2, p_3,..., p_n$ possiblidades em cada etapa, então, $\prod_{i=1}^{n} p_i$ é o número total de modos que elas podem ocorrer distintamente.

3.2. Exemplos

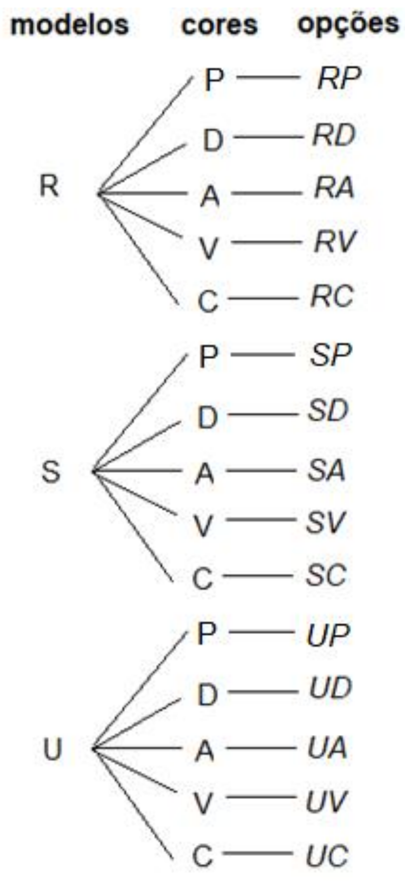
Exemplo 1: Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y\}$, escolha um par ordenado (m, n) tal m$\in$A e $\in$n B. Observe que esse problema é o mesmo que escolher um elemento do conjunto $A \times B = \{(a,x);(a,y);(b,x);(b,y);(c,x);(c,y)\}$. Note que o princípio fundamental da contagem estabelece que existem 3.2 = 6 modos de escolher o par ordenado (m, n), pois m pode ser escolhido de 3 modos diferentes e n pode ser escolhido de 2 modos diferentes.

Exemplo 2: Alice decidiu comprar um carro novo, optando por cor e modelos de seu interesse. Na concessionária que Alice foi, ela descobriu que existiam 3 modelos de seu interesse: R, S e U. E ao indagar sobre as cores foi informada que para cada carro existiam 5 cores: preto, dourado, azul, vermelho e cinza

Solução: Como Alice dispõe de 3 opções de modelos e 5 opções de cores, pelo princípio fundamental da contagem, tem-se:

<u>3</u> . <u>5</u> = 15 opções para fazer a escolha do veículo.

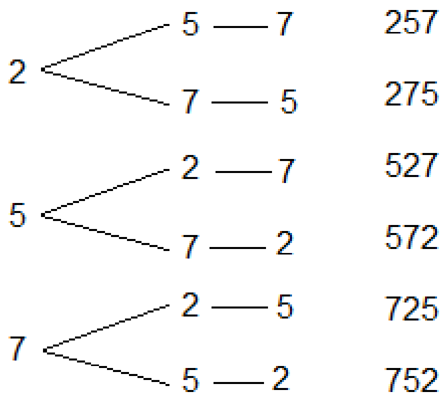
Árvore de possibilidades para exemplo 2):



Exemplo 3: Quantas senhas de três dígitos distintos podem ser formadas usando os algarismos 2, 4 e 8?

Solução: como existem 3 opções para escolha do 1º dígito, 2 opções para escolha do 2º dígito e 1 opção para o 3º dígito, a quantidade vai diminuindo pelo fato dos dígitos serem distintos, pelo princípio fundamental da contagem, tem o número de senhas é: $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$

Árvore de possibilidades para exemplo 3):



Observe que na árvore de possibilidades do exemplo 2 e 3, além de determinar a quantidade de possibilidades de escolha, ela também mostra quais são essas opções de escolhas de carros e as opções de senhas, esse tipo de pratica só é valido se a quantidade de possiblidades de conjuntos não for tão grande.

> A utilização de situações que utilizem diferentes representações como a enumeração por listagem, a árvore de possibilidades ou que valorizem a percepção de regularidades existentes nas situações, diversificando o uso de fórmulas. A discussão, reflexão e a compreensão das propriedades existentes nos problemas combinatórios, como os invariantes de ordenação, repetição, escolha também são importantes e podem auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio combinatório. (ROCHA; BORBA, 2013, p. 557).

Um dos objetivos no estudo da Análise Combinatória é desenvolver métodos que permitem contar o número de elementos de um conjunto, assim se o conjunto for pequeno, como nos dois exemplos anteriores, onde sua quantidade é representada por número “pequeno” de elementos, basta fazer uma lista organizada, como o da árvore de possibilidades feita no exemplo 2) e 3) acima e depois efetuar a contagem. No entanto, existem inúmeros casos onde o número de elementos a serem contados é muito grande, e assim é conveniente utilizarmos métodos (técnicas) que facilitem determinar essa quantidade. No nosso caso usaremos outras estratégias:

> **Postura**: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.

Não adiar dificuldades: pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se cada uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. (coleção PROFMAT, Matemática Discreta p. 118)

Veja os próximos exemplos:

Exemplo 4: Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser pintadas usando apenas as cores vermelho, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e listras adjacentes não podem ser pintadas da mesma cor. De quantas maneiras se pode pintar essa bandeira?

Solução: temos 3 opções para pintar a primeira listra da bandeira, como a segunda listra não pode ser pintada da cor da primeira, pois listras adjacentes não podem ter mesma cor, temos apenas 2 opções essa segunda listra, pelo mesmo motivo para cada umas das listras restantes temos apenas 2 opções de cor, pelo princípio fundamental da contagem essa bandeira pode ser pintada de

$\underline{\ 3\ } . \underline{\ 2\ } . \underline{\ 2\ } . \underline{\ 2\ } . \underline{\ 2\ } . \underline{\ 2\ } . \underline{\ 2\ }$ = 192 maneiras diferentes.

Exemplo 5: Quantas motos podem ser licenciadas se cada placa tiver três vogais e 4 algarismos distintos?

Solução: temos 5 opções de escolha de cada uma das letras, pois só pode ser utilizado vogal e 10 opções para a escolha do 1º algarismo, 9 opções para a escolha do 2º algarismo, 8 opções para a escolha do 3º algarismo e 7 opções de escolha para o ultimo algarismo, pois existe a restrição de não ser permitida a repetição de algarismos, pelo princípio fundamental da contagem,

$\underline{\ 5\ } . \underline{\ 5\ } . \underline{\ 5\ } . \underline{10} . \underline{\ 9\ } . \underline{\ 8\ } . \underline{\ 7\ }$ = 630000 motos podem ser licenciadas.

Exemplo 6: Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?

Solução: temos 9 opções de escolha para o 1º algarismos, pois não pode iniciar por 0 (zero), caso isso aconteça o número não teria três algarismos e sim dois, como a zero pode aparecer nos demais algarismos, mas não é permitida a repetição, então existem 9 opções para 2º algarismo e 8 opções para escolha do último algarismo, pelo princípio fundamental da contagem, podem ser formados

$\underline{\ 9\ } \cdot \underline{\ 9\ } \cdot \underline{\ 8\ } = 648$ números.

Vimos que nos últimos três exemplos a quantidade de grupos formados é grande, não sendo viável fazer a exposição de todos os casos, como foi feito nos três primeiros exemplos, casos como esses não é recomendado construir a árvore de possibilidade e para isso usamos as estratégias recomendadas na última citação.

4. USO DE MATERIAIS CONCRETOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA EM PROBLEMAS DE CONTAGEM

A proposta inicial desse capitulo é antes de realizar uma oficina fazendo uso de material concreto, aplicar um teste sobre PFC com os alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola particular onde leciono no município de Maceió – AL e após a oficina aplicar outro teste similar ao primeiro com o mesmo grupo de alunos, por fim analisar os resultados obtidos nos testes.

Espera-se que após a execução dessa proposta que os alunos desenvolvam algumas competências e habilidades da BNCC relacionadas ao PFC. Seguem algumas competências e habilidades da BNCC que esperamos desenvolver:

C2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

C6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

C8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Desejamos também trabalhar algumas habilidades, destaco duas, sendo que uma delas encontra-se na BNCC do ensino médio, mas nada impede que trabalhemos no ensino fundamental. Veja:

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios
Multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

4.1. Teste 1.

Questão 1: Uma pessoa possui 4 blusas diferentes, 2 calças diferentes e 2 pares de sapatos.

De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa, uma calça e um par de sapatos para se vestir?

a) 8

b) 16

c) 24

d) 32

Resposta: B

Questão 2: Vitória decidiu plantar um tipo de flor em um vaso para enfeitar sua casa. Ela tem 4 possibilidades de escolha para as flores e 3 possiblidades para os vasos, conforme ilustra a figura.

De quantas maneiras diferentes Joana pode fazer essa escolha?

a) 7

b) 10

c) 12

d) 18

Resposta: C

Questão 3: Seis times de futebol disputam um torneio. Quantos são as possibilidades de classificação para os três primeiros lugares?

a) 18

b) 60

c) 120

d) 240

Resposta: D

Questão 4: Em quantas sequências diferentes 4 pessoas podem ser dispostas em fila?

a) 8

b) 12

c) 24

d) 18

Resposta: C

Questão 5: Existe 5 portas de acesso a um teatro. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair do teatro, sem sair pela porta que entrou?

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

Resposta: C

Questão 6: Um jantar é composto por uma entrada, um prato principal e uma sobremesa. De quantas maneiras distintas ele poderá ser composto, se há como 3 opções entradas, 5 pratos principais e 2 sobremesas?

a) 8

b) 10

c) 20

d) 30

Resposta: D

Questão 7: Uma coleção de livros de Matemática é formada por três volumes e uma coleção de livros de ciências é composto por três volumes. Em quantas sequências diferentes podemos dispor essas coleções na prateleira de uma estante, de modo que livros de mesma matéria fiquem sempre juntos?

a) 12

b) 24

c) 36

d) 72

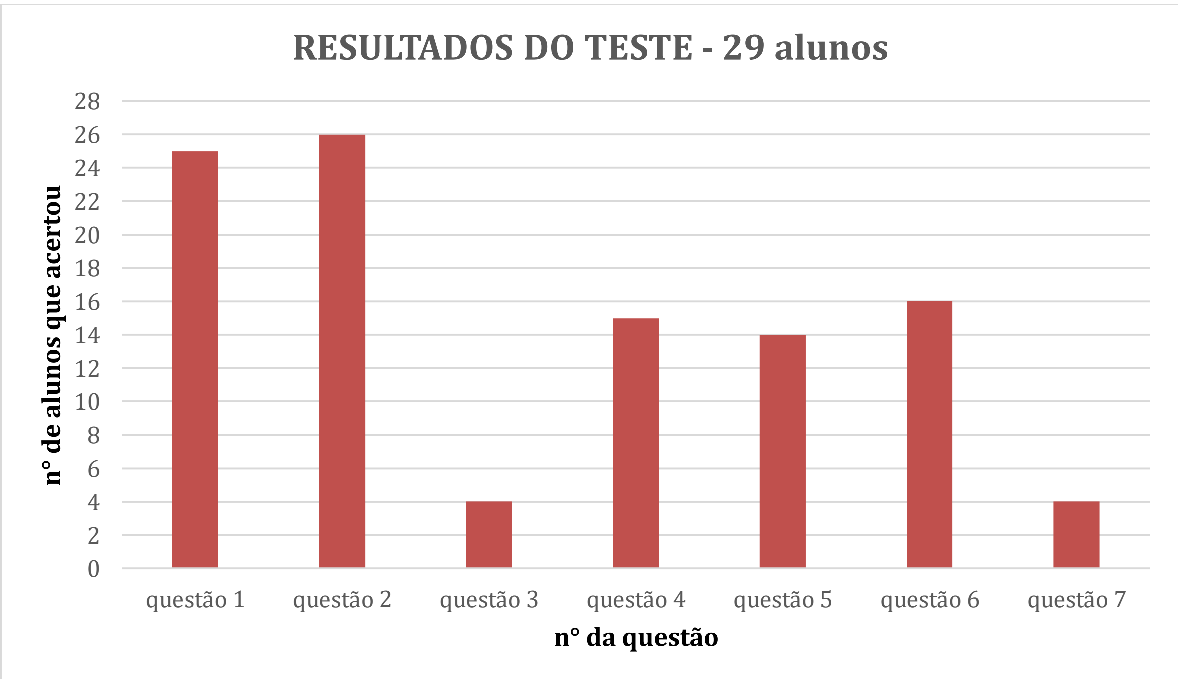
Resposta: D

4.2. Resultados obtidos no teste 1

Esse teste foi aplicado para alunos de duas turmas de 9º ano do ensino fundamental anos finais, uma delas com 36 alunos e outa com 29, no mês de setembro de 2019, após uma exposição do tema, veja o resultado obtido nos gráficos a seguir:

1ª turma:

2ª turma:



4.3. Oficina

É importante conectar a matemática escolar com as experiências da vida diária das crianças. Leitura, escrita e cálculo matemáticos são as bases da educação matemática. (MOSVOLD, 2002, P. 1)

O professor deve assim, estimular a necessidade dos alunos para a atividade e dar-lhes oportunidades para usar suas próprias experiências na tarefa de aprendizagem, deve também tentar aproveitar essa experiência, permitindo que os mesmos formulem suas próprias perguntas e procurem as respostas, bem como levantem problemas que geram um desejo de saber mais e liberar a energia necessária para buscar esse conhecimento. (MOSVOLD, 2002, P. 1)

De acordo com Gardner uma das inteligências é a lógico-matemática e sua conceituação é a seguinte:

> É a habilidade para explorar relações, categorias e padrões, através da manipulação de objetos ou símbolos, e para experimentar de forma controlada; é a habilidade para lidar com séries de raciocínios, para reconhecer problemas e resolvê-los. Assim, a criança que apresenta especial aptidão nesta inteligência demonstra facilidade para contar e fazer cálculos matemáticos e para criar notações práticas de seu raciocínio.

Essa habilidade para explorar relações, categorias e padrões, através da manipulação de objetos ou símbolos, será desenvolvida pelo professor de matemática.

Baseando nesse conceito e tendo como base o resultado da teste aplicado, elaboramos a seguinte oficina:

As turmas foram divididas em grupos. Na turma de 36 alunos trabalhamos com 6 grupos de 5 componentes e 1 grupo com 6 componentes, já com a turma de 29 alunos trabalhamos com 6 grupos de 4 componentes e um grupo com 5 componentes. Como o teste era composto por 7 questões e cada turma tinha 7 grupos, usamos como estratégia cada grupo trabalhar com uma das sete questões do teste aplicado.

A estratégia da oficina aplicada consistia no uso de materiais concretos para exibir todas as combinações, fazendo uso de peças de roupas (ver as combinações de vestimenta), livros (organizar em uma prateleira), dos próprios alunos do grupo (formação de filas), os acessos da escola (ver de quantas maneiras uma pessoas pode entrar e sair nas dependências da escola), escolha de times de futebol (para que eles fizessem por experimento as possíveis classificações) e lanches da cantina (para ver de quantas formas pode ser feita a escolha de um lanche). Portanto, estratégia foi trabalhar de forma concreta as questões aplicadas no teste inicial, após a organização desses casos com de materiais concretos cada equipe socializa com o restante da turma. Percebi muito entusiasmo por parte dos alunos, eles levaram duas aulas para finalizar os experimentos, ao final alguns deles me questionaram “porque o senhor não fez isso antes?”. Após a finalização de “oficina” apliquei um novo teste, similar ao primeiro, tendo como objetivo avaliar se a aplicação da oficina resultou em alguma alteração quantitativa no resultado do teste anterior. Vejam, a seguir, o teste aplicado.

4.4. Teste 2.

Questão 1: Arnaldo planeja ir à praia e deseja utilizar uma camiseta, uma bermuda e um chinelo. Sabe-se que ele possui 5 camisetas, 5 bermudas e 2 chinelos. De quantas maneiras distinta Arnaldo poderá vestir-se?

a) 12

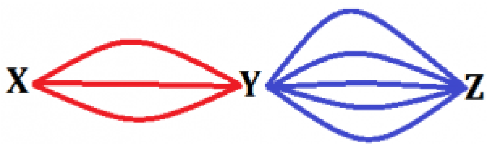
b) 36

c) 50

d) 90

Resposta: C

Questão 2: Há 3 estradas ligando as cidades X e Y, e 5 estradas ligando as cidades Y e Z.



De quantas maneiras distintas é possível ir de X a Z, passando por Y?

a) 8

b) 12

c) 15

d) 20

Resposta: C

Questão 3: Em um campeonato de natação 6 nadadores disputam a prova, sendo premiados os três primeiros colocados com medalhas de ouro, prata e bronze.

Quantas são as possíveis distribuições de medalhas?

a) 18

b) 30

c) 90

d) 120

Resposta: D

Questão 4: De quantas maneiras diferentes 5 amigos podem sentar em um banco para tirar uma foto, sendo que dois deles sempre ficam juntos?

a) 18

b) 24

c) 36

d) 48

Resposta: D

Questão 5: Um estádio possui 7 portões. De quantas maneiras diferentes um torcedor pode entrar e sair desse estádio utilizando, para sair, um portão diferente do que entrou?

a) 12

b) 24

c) 42

d) 49

Resposta: C

Questão 6: Certo modelo de carro é fabricado em 5 diferentes cores, apresentando ainda 2 tipos de motores e 3 opções de estofamento. De acordo com esses 3 itens, que quantidade de carros diferentes desse modelo podem ser fabricados?

a) 10

b) 20

c) 30

d) 45

Resposta: C

Questão 7: Uma pessoa possui 5 livros distintos, sendo quatro de Geometria, três de Álgebra. O número de maneiras pelas quais essa pessoa pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 288

b) 144

c) 7

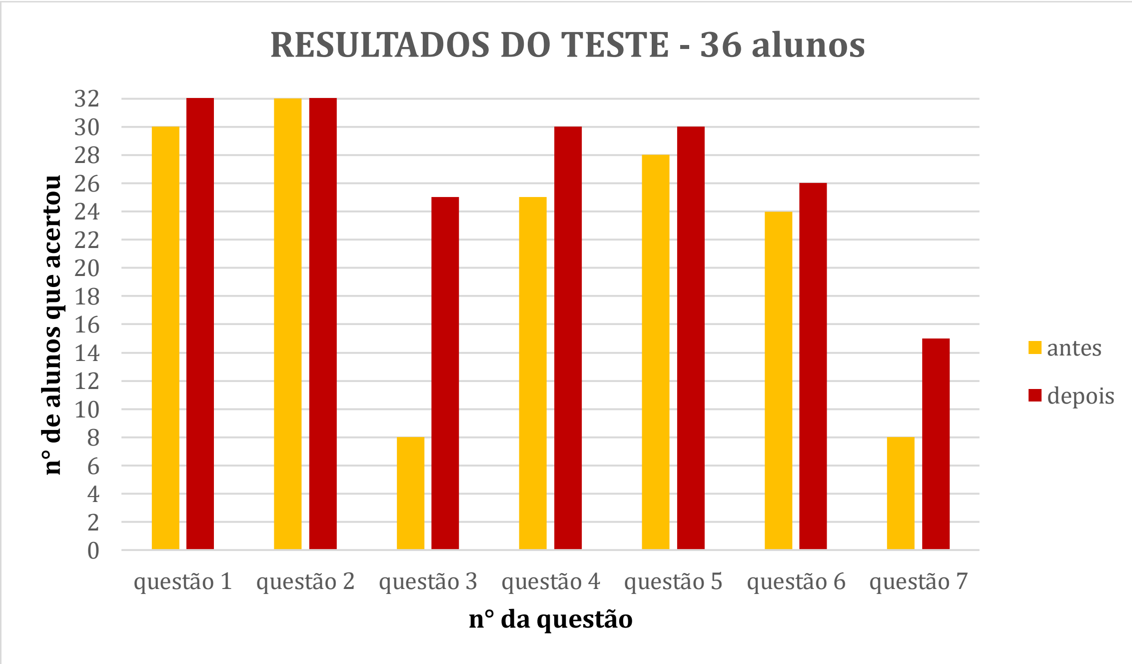
d) 12

Resposta: A

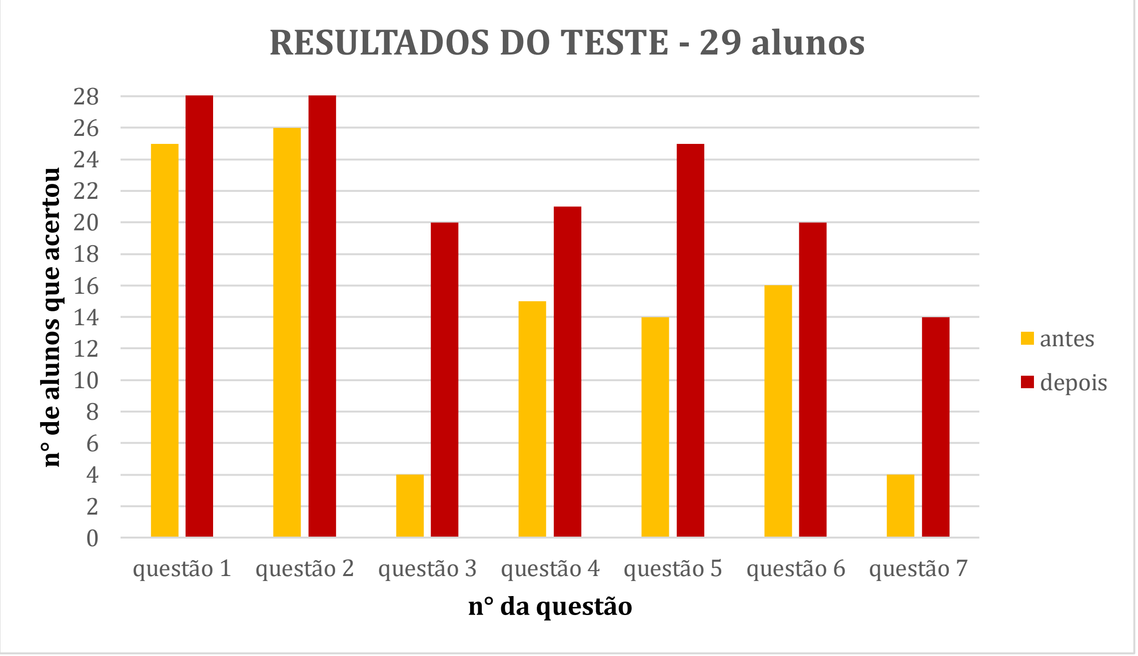
4.5. Resultados obtidos no teste 2

O segundo teste foi aplicado para os mesmos alunos das turmas de 9º ano do ensino fundamental que realizaram o primeiro teste, objetivando comparar os resultados obtidos na aplicação dos dois testes, avaliando se a aplicação da oficina influenciou ou não no resultado obtido algum ganho no resultado. Vejam o resultado comparativo nos gráficos a seguir.

1ª turma:



2ª turma:



Tomando como base os resultados obtidos, a metodologia aplicada foi válida, pois os gráficos mostram que nas duas turmas, a quantidade de acertos nas questões teve aumento comprado com os acertos de antes da oficina. Acredito que isso se deu pelo fato que nesse segundo momento os alunos poderiam usar a competência de conhecer as técnicas do PFC agregada a competência de testar fazendo a descrição do casos para verificar o resultado.

4.6. Outros problemas de contagem

Após a análise feito da oficina com matérias concretos, o objetivo agora é trabalhar alguns problemas mais complexos, um pouco abstratos, inclusive problemas em que a ordem não importa, que geralmente são introduzidos só no ensino médio, que nesse nível de escolaridade são solucionados com uso da fórmula de combinação, consequentemente fazendo uso da definição de fatorial, mostraremos que é possível solucionar tais problemas fazendo uso das técnicas no PFC, com uma divisão no final.

Problema 1. Quantos números pares como 3 algarismos distintos podem ser formados, fazendo uso dos algarismos dos sistemas de numeração decimal?

Solução: faremos uso dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

Para que um número seja par seu último algarismo deve ser par, temos 0, 2, 4, 6, e 8 para ser utilizado no último algarismo, mas não sendo utilizado o 0(zero), temos uma restrição para o primeiro algarismo, pois ele não pode ser 0(zero). Problemas como esse devemos começar sempre pelas posições com mais restrições, nesse caso pelo último algarismo. Vamos dividir o problema em dois casos:

1º caso: terminando com 0(zero), temos: $\underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underset{0}{\underline{1}} = 72$

2º caso: terminando com 2, 4, 6 ou 8, temos: $\underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underset{\substack{2\\4\\6\\8}}{\underline{4}} = 256$

Logo, temos 72 + 256 = 328 números

Problema 2. Um novo sistema de identificação de veículos que está sendo implantado no Brasil e que nesse momento já se faz presente em outros países-membros do Mercosul, sendo eles, Uruguai, Paraguai, Argentina e Venezuela.
O novo emplacamento que já começou a ser inserido no Brasil, tem como objetivo tornar o trânsito mais seguro, oferecendo maior agilidade na identificação de veículos, assim como ajudar a evitar falsificações de placas. Veja o novo modelo:

Além do novo visual, uma das principais diferenças da nova placa está na sequência alfanumérica. O sistema, com três letras e quatro números no modelo antigo será substituído pelo de quatro letras e três números, no exemplo acima a placa **(MTG2E19)** do novo modelo, no antigo essa placa era representada por **(MTG-2419),** note que o número “4” foi trocado pela letra “E”. A placa manterá todas as letras da antiga, o primeiro e os dois últimos algarismos, já o segundo algarismo será trocado por uma letra, de acordo com a seguinte tabela de conversão:

como é	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
como ficará	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Seguindo esse novo padrão, quantas placas podem ser formadas, supondo que as três primeiras letras sejam vogais?

Solução: Nesse problema devemos fazer a escolha primeiro das letras em seguida dos algarismos, também é preciso ficar muito atento as restrições.

As letras serão escolhidas entre A, E, I, O e U, então essa escolha pode ser feita de 5 . 5 . 5 = 125, por outro lado os algarismos podem ser escolhidos de 10 . 10 . 10 . 10 = 10000. Portanto, total de placas possíveis são

125 . 10000 = 1250000

Esse é um daqueles casos que seria improvável alguém pedir para explicitar todos os casos.

Problema 3. Quantas comissões de três pessoas podem ser formadas, se os componentes devem ser escolhidos entre 8 pessoas?

Solução: temos 8 possibilidades para escolher a primeira pessoa, 7 possibilidades para escolher a segunda pessoa e 6 possibilidades de escolher a terceira, pelo PFC temos $\underline{\ 8\ }.\underline{\ 7\ }.\underline{\ 6\ }$ = 336, quando se aplica o PFC considera – se que a ordem importa, mas nesse caso a ordem não importa, para retirar os caso repetidos basta dividir esse valor por $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, que é o mesmo que 3!(fatorial de 3), caso queira pode ser introduzido a ideia de fatorial.

Portanto, temos $336 : 6 = 56$ comissões

Problema 4. Um baralho comum de 52 cartas, de quantas maneiras podemos retiras 5 cartas, sendo 3 reis e 2 valetes?

Solução: Esse é mais um problema onde a ordem não importa, então deve ser efetuada a divisão após a aplicação do PFC, como no exemplo anterior, vejamos:

Como existem 4 reis e 4 valetes no baralho, podemos retirar 3 reis de $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ e 2 valetes de $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$. Portanto podemos retirar essas cinco cartas de $4 \cdot 6 = 24$ maneiras.

Problema 5. As 14 crianças de uma família serão separadas em grupos de 4, para que elas arrecadem prendas para a quermesse da fazenda onde vivem. De quantas maneiras as crianças poderão ser agrupadas?

Solução: Esse é mais um problema onde a ordem não importa, pois se trata da formação de grupo de pessoas, então deve ser efetuada a divisão após a aplicação do PFC, vejamos:

Temos 14 modos de escolher a primeira pessoa, 13 para a escolha da segunda, 12 para a escolha da terceira e 11 para escolha da última pessoa, ou seja, a escolha pode ser feita de $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001$ maneiras de agrupar.

Observe que nos problemas 4) e 5) acima já foi feita a divisão antes, isso é uma técnica que pode facilitar os cálculos, pois pode ser simplificado(divisão) antes da multiplicação.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verificamos que o ensino do Princípio Fundamental da Contagem ficou mais atrativo e, portanto, mais interessante para os alunos quando partimos de situações concretas simples, sem fazer uso de fórmulas nem procedimentos mecânicos. Nestas condições, observamos que a aceitação e compreensão de técnicas mais sofisticadas.

O principal objetivo deste trabalho motivar os alunos na resolução de problemas de contagem, de modo que se torne mais fácil a compreensão de tais problemas.

Para ter uma educação de qualidade em matemática é exigido muita dedicação tanto dos alunos como do professor, para que no final o aluno seja capaz de pôr em prática os conhecimentos adquiridos e consiga reproduzir esses conhecimentos, pois essa uma das diretrizes da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Toda ferramenta que facilite o ensino de cálculos em matemática é fundamental para que o professor torne o aluno competente no desenvolvimento das questões que se lhe apresentam.

As atividades sobre esse tópico usadas neste trabalho foram criadas, adaptadas ou selecionadas por mim com base na convivência com livros didáticos ou sistemas de ensino que já tive a oportunidade de trabalhar nas escolas que leciono, por já ter me deparado com questões semelhantes a essas, tendo em vista que questões assim são bem comuns.

Após a prática aplicada com uso de material concreto, soluções de problemas mais complexos faria mais sentido para os alunos, visto que eles viram que quando a número grupos formados não era tão grande eles conseguiam explicitar todos os casos e que aplicando o PFC conseguia também determinar essa quantidade, assim desenvolvendo seu melhor seu raciocínio.

Acredita-se que é muito importante trabalhar o Princípio Fundamental da contagem no ensino fundamental, para quando aluno se deparar com esse tema no ensino médio tenha maturidade para enfrentar os outros tópicos da Análise Combinatória, tendo em vista que eles já foram motivados no ensino fundamental.

Diante do que foi abordado nessa dissertação, espera-se que a pesquisa tenha contribuído com os professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem do Princípio Fundamental da Contagem.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

Nacional Comum Curricular (**BNC)**, documento previsto desde a Constituição de 1988 e homologado em 2017, portal.mec.gov.br/.../base-nacional-comum-curricular-bncc.

Programa Nacional do Livro didático 2010 Área de Matemática. *portal.mec.gov.br › dmdocuments › matematica*

SAVIANI, D. A pedagogia no Brasil história e teoria. Campinas, SP: Autores Associados, 2008. (Coleção Memória da Educação)

SAVIANI, D. Escola e democracia. São Paulo: Cortez 1985.

SILVA Clóvis Pereira, História da matemática no Brasil(1998).

CURY, Carlos Boberto, Gestão democrática na escola e o direito a educação.

Temas e problemas elementares. LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. Temas e problemas elementares. Sociedade Brasileira Matemática - SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.

Fundamentos da matemática elementar.HAZZAN, S. Fundamentos da matemática elementar 5: combinatória e probabilidade. In: IEZZI, G. São Paulo: Atual, 1977. 5 v.

A teoria das inteligências múltiplas de Gardner. GARDNER, H.

Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. BORBA, R.; ROCHA. AZEVEDO, C.

Análise combinatória e probabilidade MORGADO, A.; CARVALHO, J.; CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. Sociedade Brasileira Matemática -SBM, 9 ed. Rio de Janeiro, 1991.

Matemática Discreta MORGADO, A.; CARVALHO, P. coleção PROFMAT.