UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Parábola e suas aplicações no ensino médio

José Cristiano Cavalcante dos Santos

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Maceió, Novembro de 2016.

PROFMAT

PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática

JOSÉ CRISTIANO CAVALCANTE DOS SANTOS

PARÁBOLA E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

MACEIÓ

2016

JOSÉ CRISTIANO CAVALCANTE DOS SANTOS

PARÁBOLA E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas, sob a coordenação da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac

MACEIÓ

2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237e Santos, José Cristiano Cavalcante dos.
Parábola e suas aplicações no ensino médio / José Cristiano Cavalcante dos Santos. - 2016.
96 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 95-96.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Parábolas – Ensino e aprendizagem. 3. Ensino médio. 4. Interdisciplinaridade. I. Título.

CDU: 372:51

Folha de Aprovação

JOSÉ CRISTIANO CAVALCANTE DOS SANTOS

PARÁBOLA E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 18 de novembro de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Isnaldo Isaac Barbosa - UFAL (Presidente)

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima- UFAL

Prof. Dr Carlos Árgolo Pereira Alves - IFAL

Dedico esta dissertação

À Deus, minha família, amigos, colegas pessoais do PROFMAT e ao meu orientadora pelo apoio, força, incentivo, companheirismo e amizade. Sem eles nada disso seria possível.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, pela minha existência, por todas as graças que tem realizado na minha vida, por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e
me suprir em todas as minhas necessidades.

À minha esposa VANUSIA pelo incentivo, compreensão e paciência. A minha filha LIVIA e ao meu filho GABRIEL pelos momentos de descontração e alegria.

A minha mãe por ser a pessoa que me deu mais incentivo para estudar, enfim a toda à minha família, a qual amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo.

Aos amigos que fizeram parte desses momentos colaborando, me ajudando e incentivando, em especial ao amigo FERNANDO EREMITA, que sempre esteve à disposição, sem medir esforços, para me ajudar.

Ao meu orientador Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa, pela orientação, apoio e paciência, por ter dedicado parte do seu tempo para que este trabalho tornasse possível, estando sempre disponível nos momento em que precisei, por acreditar em mim e por ser exemplo de profissional.

À sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa do PROFMAT.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida durante o curso.

A todos os professores da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) que fizeram parte do curso, contribuindo para meu crescimento acadêmico.

Aos amigos e colegas da turma PROFMAT/UFAL – 2014.

"Todo o futuro da nossa espécie, todo o governo das sociedades, toda a prosperidade moral e material das nações dependem da ciência, como a vida do homem depende do ar. Ora, a ciência é toda observação, toda exatidão, toda verificação experimental. Perceber os fenômenos, discernir as relações, comparar as analogias e as dessemelhanças, classificar as realidades, e induzir as leis, eis a ciência; eis, portanto, o alvo que a educação deve ter em mira. Espertar na inteligência nascente as faculdades cujo concurso se requer nesses processos de descobrir e assimilar a verdade."

Rui Barbosa.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a parábola e suas aplicações utilizando formas diferentes daquelas habitualmente tratadas no âmbito do Ensino Fundamental e Médio. No desenvolvimento do trabalho procurou-se em contemplar a sua forma algébrica através de deduções de formulas; bem como a sua forma geométrica, explorando a sua definição e analisando a secção cônica que resulta em parábola, fato não comum as atividades pedagógicas atuais, deixando de ser apenas uma representação gráfica da função quadrática. Foi realizado um estudo mais aprofundado nos aspectos teóricos das parábolas e suas aplicações em diferentes áreas, como em Física e engenharia mostrando a importância deste conceito no avanço tecnológico. Neste trabalho, pode-se observar que foi dada ênfase a uma maneira diferente de expor o conteúdo, daquelas que consiste basicamente em memorizar conteúdos propostos e utilizá-los de forma mecânica, não permitindo que se desenvolvam habilidades necessárias a autonomia dos discentes. Vale salientar ainda, que as ilustrações e exemplos feitos, são de fáceis visualizações no cotidiano e de aplicações benéficas para vida humana. Como resultado, o material desenvolvido se tornou mais interessante, atrativo e agradável, que possibilita a compreensão por parte dos discentes e facilita o trabalho dos docentes ao abordarem os conteúdos que envolvem parábola.

Palavras-chave: Aplicações de parábolas. Ensino Médio. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

The aim of this work is to present a study on the parabola and its applications using different forms of those usually treated under the Elementary and Secondary Education. In developing this work we tried to address its algebraic form through formulas deductions; as well as its geometric shape, exploring its definition and analyzing the conic section that results in parabola, not common fact the current educational activities, no longer just a graphical representation of the quadratic function. Further study was carried out on the theoretical aspects of the parabola and their applications in different areas, such as physics and engineering showing the importance of this concept in technological advancement. In this work, it can be noted that emphasis was given to a different way of exposing the content of those consisting primarily of memorizing proposed contents and use them mechanically, not allowing them to develop skills necessary autonomy of students. It should also be noted that the illustrations and examples made are easy views on every day and beneficial applications for human life. As a result, the material developed has become more interesting, attractive and enjoyable, enabling the understanding by the students and facilitates the work of teachers to address the content involving parable.

Keywords**:** Parabola applications. Interdisciplinarity.

LISTA DE FOTOS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Nesta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\angle$, para representar a medida do ângulo.

$dist(P,Q)$, para representar a distancia do ponto P ao ponto Q.

$\square$, para indicar que uma demonstração terminou.

$|\ |$, para representar o módulo de um número.

$\in$, para indicar a pertinência.

$>$, o símbolo significa maior que.

$\leq$, símbolo significa menor ou igual que.

$\varnothing$, para representar o conjunto vazio.

$\bigcap$, para representar a intersecção.

$\perp$, o símbolo é usado para indicar perpendicularidade.

$\Rightarrow$, símbolo de implicação lógica.

$\Leftrightarrow$, símbolo de equivalência lógica.

: é usado para significar que o que vem depois dois pontos é definição do que antes.

min, é usado no sentido de menor. Por exemplo, **min dist**(P,Q), significa menor distância do ponto P ao ponto Q.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O estudo da matemática vem sendo realizado, queira ou não, ainda de uma forma muito abstrata em sala de aula, onde vários conteúdos são abordados e desenvolvidos apenas teoricamente e com fórmulas, não tendo sentido para os discentes e para parte dos docentes. Esta firmação se encontra no artigo de M.T.G: PARÁBOLAS - AS CURVAS PRECIOSAS, disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/ artigo_mirtes_tamy_gomes_machado.pdf, visitado em 24/05/2016.

Com o estudo das Parábolas, não sendo diferente, pois, nas aulas de matemática, se faz este estudo, em geral de forma superficial, na maioria das vezes com uma representação gráfica da função quadrática, não dando ênfase aos principais elementos da parábola, nem tão pouco analisando a sua origem e nem as suas importantes aplicações que sempre esteve presente na História da humanidade, desde Menaecmus com a construção mecânica da parábola para ser usada na duplicação do cubo até os dias atuas com muitas aplicações como por exemplos antenas parabólicas, faróis de automóveis e muitas outras, que dariam significado ao assunto em questão, pois, estamos deparando com parábolas o tempo todo.

Para que os alunos possam observar as parábolas no mundo em que vivem, é necessário que o seu interesse seja despertado para esta finalidade, através de observações do meio em que vivem, pois encontramos parábola em fontes aquáticas (Vide foto 1), bebedouros de água (veja foto 2), antenas receptoras de sinal e luz de abajur inclinado (fotos 3), em nosso próprio corpo na arcada dentária (veja imagem 1) como diz o Instituto Northo na afirmação: os dentes devem formar um arco em forma parabólica, disponível em: www.northo.com.br/dicas.php, visitado em 23/05/2016 .

Foto 1: Fonte do Parque Ibirapuera

Fonte: http://www.ime.unicamp.br/lem/material-deapoio/Parabola_experimento.pdf. Acesso em: 26 mai. 2016.

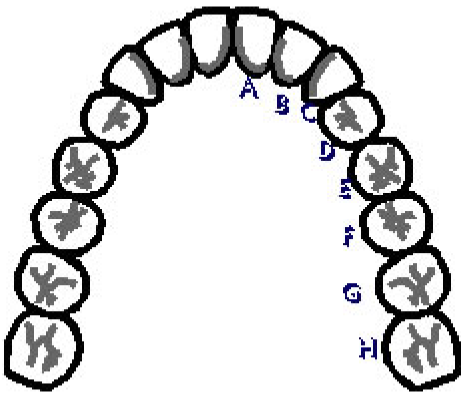
Foto 2: Água do bebedouro

Fonte: http://www.ime.unicamp.br/lem/material-deapoio/Parabola_experimento.pdf. Acesso em: 26 mai. 2016.

Foto 3 Atena receptora de sinal e luz do abajur inclinado

Fonte: http://www.ime.unicamp.br/lem/material-deapoio/Parabola_experimento.pdf. Acesso em: 26 mai. 2016.

Imagem 1: Arcada dentaria



Fonte: https://www.wwow.com.br/portal/sala_espera/sala.asp?secao=3&aid=49. Acesso em: 26 mai.2016.

Diante destes fatos apresentados anteriormente, procuramos neste trabalho ilustrarmos os conteúdos que abordam o estudo das parábolas de forma singelas, sempre com fotografias e gráficos que darão um embasamento para a compreensão por parte dos alunos das definições, proposições e teoremas aqui apresentados.

1.1 Justificativa

Em primeiro lugar, entendemos que o processo de ensino-aprendizagem de Matemática se mostra como um desafio muito árduo no cotidiano da sala de aula, existindo um forte desinteresse por grande parte dos alunos. Este quadro caótico vem trazendo resultados visíveis, como aponta o relatório ***Programme for International Student Assessment*** – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA, 2012), que coloca o Brasil em uma das últimas posições entre os países avaliados quanto ao aprendizado de Matemática.

Tabela 1: Ranking PISA 2012 quanto a aprendizagem de Matemática

1. Xangai (China) 613	18. Áustria 506	35. Eslováquia 482	52. Malásia 421
2. Cingapura 573	19. Austrália 504 pontos	36. Estados Unidos 481	53. México 413
3. Hong Kong (China) 561	20. Irlanda 501	37. Lituânia 479	54. Montenegro 410
4. República da China 560	21. Eslovênia 501 pontos	38. Suécia 478	55. Uruguai 409
5. Coreia 554	22. Nova Zelândia 500	39. Hungria 477	56. Costa Rica 407
6. Macau (China) 538	23. Dinamarca 500	40. Croácia 471	57. Albânia 394
7. Japão 536	24. República Checa 499	41. Israel 466	58. **Brasil 391**
8. Liechtenstein 535	25. França 495	42. Grécia 453	59. Argentina 388
9. Suíça 531	26. Reino Unido 494	43. Sérvia 449	60. Tunísia 388
10. Holanda 523	27. Islândia 493	44. Turquia 448	61. Jordânia 386
11. Estônia 521	28. Letônia 491	45. Romênia 445	62. Colômbia 376
12. Finlândia 519	29. Luxemburgo 490	46. Chipre 440	63. Catar 376
13. Polônia 518	30. Noruega 489	47. Bulgária 439	64. Indonésia 375
14. Canadá 518	31. Portugal 487	48. Emirados Árabes 434	65. Peru 368
15. Bélgica 515	32. Itália 485	49. Cazaquistão 432	
16. Alemanha 514	33. Espanha 484	50. Tailândia 427	
17. Vietnã 511	34. Rússia 482	51. Chile 423	

Fonte: http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/marcelo_kropf.pdf. Acesso em: 25 mai.2016.

O PISA foi criado em 2000, a avaliação tem como objetivo realizar uma comparação entre o desempenho de alunos em diversos países e é aplicada em estudantes de 15 anos de idade - faixa etária média do término da escolaridade básica obrigatória. A avaliação, que é aplicada em 65 países a cada três anos, abrange três áreas do conhecimento: leitura, matemática e ciências. Em cada edição, porém, cada uma dessas áreas é priorizada. Em 2000, por exemplo, o foco foi em Leitura; em 2003, Matemática; e em 2006, Ciências. Em 2009, o PISA iniciou um novo ciclo do programa, com o foco novamente recaindo sobre o domínio de Leitura, seguido por Matemática em 2012 e em 2015, Ciências. São avaliados entre 4.500 e 10.000 alunos em cada país.

No último ranking, com os resultados da avaliação de 2012, o Brasil ocupou o 58º lugar, com 391 em Matemática, uma das piores classificações da lista. Ao lado do Brasil, mais seis nações foram incluídas na lista dos piores sistemas de educação do mundo: Turquia, Argentina, Colômbia, Tailândia, México e Indonésia. Já entre os melhores colocados estão China, Coreia, Finlândia e Cingapura, respectivamente. Adaptado do texto Redação Educar, disponível em : http://educarparacrescer.abril.com.br/indicadores/pisa-299330.shtml e visitado em 26/05/2016

Além do Pisa, temos os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica- (SAEB, 2012), em que se constata que apenas 10,3% dos jovens brasileiros terminam o terceiro ano do Ensino Médio com um conhecimento satisfatório em Matemática.

Acreditamos que essa dificuldade se apoia em dois fatores fundamentais: a forma, muitas vezes empobrecida, com que a Matemática é apresentada nos livros didáticos, como é visto em Exames de Textos (LIMA,2001) e a baixa procura pelos cursos de licenciatura como um todo, em especial pelo curso de Matemática.

A baixa procura pelos cursos de licenciatura causa uma situação alarmante na educação brasileira, uma vez que além de gerar uma escassez quantitativa de mão de obra na área de educação, acaba acarretando numa falta de reciclagem dos professores, fazendo assim com que o abismo entre o que é ensinado e a vida cotidiana se acentue. Dados do Censo da Educação superior 2012, realizado pelo Ministério da Educação, apontam que enquanto o número total de matrículas aumentou 4,4% em relação ao ano anterior a procura pelos cursos de licenciatura sofreu um acréscimo de apenas 0,8% como verificamos abaixo.

Tabela 2: Matrículas em Cursos de Graduação por Modalidade de Ensino segundo o Grau Acadêmico – Brasil 2011/2012.

Ano	Grau acadêmico	Total
2011	**Total**	**6.739.689**
	Bacharelado	4.495.831
	Licenciatura	1.356.329
	Tecnológico	870.534
	Não aplicável	16.995
2012	**Total**	**7.037.688**
	Bacharelado	4.703.693
	Licenciatura	1.366.559
	Tecnológico	944.904
	Não aplicável	22.532

Fonte: MEC/INEP. Acesso em: 23 mai. 2016.

1.2 Motivação

Os livros didáticos no que se referem ao ensino de Matemática apresentam muitos problemas, como percebemos tomando como referência a análise de textos (Exame de Textos) executada pelos professores Elon Lages Lima, Augusto C. Morgado, Edson D. Júdice, Eduardo Wagner, João Bosco P. de Carvalho, José Paulo Q. Carneiro, Maria Laura M. Gomes e Paulo Cezar P. Carvalho (Lima, 2001) sobre 12 coleções. A situação é tão evidente que em sua reunião de 28 de novembro de 2014, o Conselho Diretor da SBM decidiu relançar os estudos com vista à elaboração de uma proposta curricular para os diferentes segmentos do ensino de Matemática, e em especial para o ensino médio, nessa proposta são sugeridos os principais conteúdos a serem estudados no ensino médio (SBM, 28 de Novembro de 2014). Disponível em: http://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Ensino_Meio_FINAL.pdf e visitado em 03/06/2016.

Um ponto importante que este estudo destaca é a enorme falta de aplicações a serem apresentadas e trabalhadas com os alunos no tocante ao conteúdo ensinado. Quando o assunto abordado trata de parábolas, a ausência de aplicações se torna ainda mais grave. As parábolas constituem um campo riquíssimo de aplicações que se estendem pelas mais diversas áreas do conhecimento. Fazendo uma pesquisa para a realização desse trabalho, encontramos os seguintes exemplos:

- ***Faróis de automóveis (foto 4):*** Todo farol de carro possui uma lâmpada que é colocada no foco da superfície parabólica. Neste caso podemos ter acesso às propriedades óticas das parábolas, que fazem parte de nosso cotidiano. (PAIVA, 1999: p.81) ;

Foto 4: Forol de motocicleta

Fonte: http://www.ime.unicamp.br/lem/material-deapoio/Parabola_experimento.pdf. Acesso em: 26 mai. 2016.

-***Fornos solares (foto 5):*** Este exemplo não é comumente encontrado em nosso cotidiano, mas é importante para mostrar como o conceito de parábolas pode ser utilizado em benefício da humanidade;

Foto 5: Forno solar - Odeillo, sul da Franca

Fonte: http://www.mdig.com.br/?itemid=3922. Acesso em: 30 mai. 2016.

-***Antenas parabólicas (Imagem 2):*** São objetos bastante utilizados na comunicação atual, através de transmissão via satélite, telefonia móvel e GPS (*Global Positioning System)* – sistema de radio navegação baseado em satélites. Desta forma, as pessoas passam a entender o funcionamento da antena parabólica, que a maioria delas utiliza em casa, podendo compreender a relação que ha entre a forma geométrica da parábola e a *"incidência de raios paralelos sobre a superfície côncava"*, estudada em Física;

Imagem 2: Antena parabólica

Fonte: http://gigantesdomundo.blogspot.com.br/2013/04/as-10-maiores-antenas-parabolicas-do.html. Acesso em: 26 mai. 2016.

-***Pontes Penseis (fotos 6 e 7):*** Utilizadas na engenharia na construção de pontes estáveis e econômicas, sendo que todas elas são de formato parabólico.

Foto 6: Ponte sobre o Rio de Jequiá da Praia

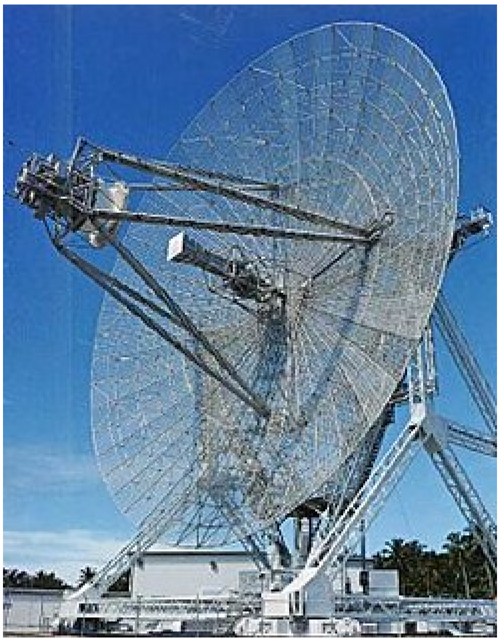
Fonte: https://www.google.com.br/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=ponte%20jequia%20da%20praia. Acesso em: 27 mai. 2016.

Foto 7: Ponte *Akashi Kaikyo*

Fonte: http://depedraecal.blogspot.com.br/. Acesso em : 27 mai. 2016

-***Radares (foto8)***: Os radares usam as propriedades óticas da parábola, similares ás citadas anteriormente para a antena parabólica e para os faróis;

Foto 8: Radar parabólico



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Radar. Acesso em: 07 jun. 2016

-***Lançamento de projéteis (foto 9):*** Ao lançar um objeto no espaço (dado, pedra, tiro de canhão, etc.) visando alcançar a maior distância possível tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar não existe ou é pequena.

Foto 9: Uma erupção vulcânica

Fonte: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000300013. Acesso em: 27 mai. 2016.

Para a realização do presente trabalho de conclusão de curso foi necessário restringir a área de estudo e quais aplicações seriam trabalhadas, não obstante permanece o desejo de que outros autores explorem e desenvolvam aplicações para o que não foi abordado nesse trabalho.

A escolha que se mostrou mais oportuna foi a de relacionar as parábolas em atividades que envolvessem a área da Física. Isso se deve basicamente por dois fatores.

Em primeiro lugar por acreditarmos que a Matemática possui uma enorme importância no que diz respeito a diferentes aspectos relacionados à cidadania e ao cotidiano. Como ressaltam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) que indicam como uma das finalidades do ensino de Matemática:

> *"aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas".*

Ainda segundo o PCNEM no que se refere às competências e às habilidades a serem desenvolvidas em Matemática no âmbito da contextualização sociocultural:

> *"Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real."*
>
> *"Aplicar o conhecimento e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento".*

Em segundo lugar, pela quase inexistência de aplicações exploradas nos livros didáticos em seus capítulos sobre parábolas na área da Física.

1.3 Objetivo e estrutura

Todo o presente trabalho é pensado do ponto de vista de um Mestrado Profissional na área da educação, isto é, levando em conta o objetivo claro de possibilitar, de maneira concreta, instrumentos para o favorecimento da prática em sala de aula. Como vemos no regimento do PROFMAT.

> *"**Artigo 1**- O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática."*

Por conta disso todas as aplicações que serão propostas bem como as atividades a serem realizadas em sala de aula estarão acompanhadas de uma introdução embasamento teórico com o objetivo de contextualizar as aplicações, dando assim maior segurança ao professor em abordar o tema com seus alunos.

Sendo assim, neste trabalho apresentaremos os conteúdos referentes às parábolas de forma diferentes das formas abordadas pelos livros didáticos utilizados em nosso sistema de ensino.

O capítulo 1 é formado pela introdução, que é detalhado em quatro seções que são a justificativa, motivação, objetivo e estrutura, e a contextualização histórica.

Fizemos uma introdução fundamentada em bases teóricas sólidas de outros estudiosos com retorica ilibada e sempre que possível ilustramos com fotografias que nos dão a ideia de Parábola.

A justificativa deste trabalho é pautada em alguns órgãos como PISA, SAEB, Redação Educar e no pesquisador Elon Lages Lima. O que nos motivou para o presente trabalho foi à falta de aplicações nos livros didáticos no que se refere ao conteúdo abordado, apresentamos fotografias que ilustram possíveis aplicações do conteúdo de parábola.

Já no objetivo e estrutura aqui exposto foi feito todo detalhamento do trabalho incluindo títulos e subtítulos. Em seguida fizemos a contextualização histórica, onde mostramos fatos estudados e provados por renomados nomes das ciências do passado, como Arquimedes (287-212 A.C), Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton.

No capitulo 2, é trabalhado o Referencial Teórico com alguns conceitos de Geometria Euclidiana, mas no geral este capítulo da todo enfoque a Geometria Analítica, sendo subdividido em trezes seções.

A seção 2.1, mostra intuitivamente (com o auxílio de figura) que a parábola é uma curva obtida através da intersecção da superfície de um cone com um plano paralelo a uma de suas geratrizes, assim como a parábola é uma curva simétrica.

Já na seção 2.2, enunciamos e fizemos uma demonstração do famoso Teorema de Pitágoras, que faremos uso para calcular distância entre dois pontos do plano.

Em seguida, na seção 2.3, fornecemos a definição da distancia entre dois pontos do plano e usamos o Teorema de Pitágoras para encontrar uma relação matemática para cálculo dessas distancias.

Na seção seguinte, continuamos o cálculo de distancia definido a distancia de um ponto a uma reta, em seguida fizemos uma definição de parábolas, onde não depende do uso de sistemas de coordenadas.

Na seção 2.5, indicamos em um gráfico os principais elementos de uma parábola. Demostramos um teorema sobre parábolas, cuja demonstração segue o esquema que foi realizado por Germinal Dandelin (1794 -1847) e extraído do livro “A rainha das ciências” (GARBI, 2006: p. 80 - 81) e mostramos que toda parábola é simétrica em relação a sua reta focal.

Nas seções 2.6 e 2.7, usamos a definição de parábola para encontrar as equações canônicas da parábola. A seção 2.6, e subseções são dedicadas ao estudo da forma canônica da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX ou o eixo OY. Na seção 2.7, foi feita a translação dos eixos coordenados para serem usados nas subseções 2.7.1 e 2.7.2, para encontrarmos a forma canônica da parábola transladada. Na subseção 2.7.3, mostramos que o gráfico de uma função quadrática f , $G_r(f)=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid y=ax^2+bx+c\}$ é uma parábola. Determinamos seu foco, sua reta diretriz, seu vértice, sua reta focal e seu parâmetro, fizemos também uma interpretação dos valores das constantes a, b, e c do gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. A subseção 2.7.4, é direcionada a aplicações de parábolas onde ser evidenciadas algumas propriedades e elementos estudados.

No capítulo 3, fizemos uma proposta didática detalhada visando uma interdicisplinaridade do conteúdo da Matemática (Parábola) com a Física.

Na primeira seção deste capítulo, mostramos uma ideia intuitiva de "área sob a curva" no gráfico da velocidade x tempo, provamos também que a "área sob a curva" no gráfico da velocidade x tempo é igual ao deslocamento.

Na seção seguinte, fizemos uma interpretação do gráfico da função do 2º grau em relação á Física, mostrando que a posição fica no eixo das ordenadas e o tempo no eixo das abscissas, bem como as raízes da função representam, na descrição do movimento, os instantes em que o ponto material passa pela origem e os pontos de ordenadas máximas e mínimas representam os instantes em que o ponto material está mais distante ou mais próximo da origem.

Já na seção 3.3, usamos o gráfico da velocidade x tempo e a formula da área do trapézio para deduzirmos a função do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado.

Na quarta seção, apresentamos e resolvemos uma lista de oito problemas selecionados distintamente de acordo com o grau de relevância, afim de que, todo embasamento teórico apresentado anteriormente faça sentido.

A última seção, disponibiliza uma sugestão de plano de aula para dar maior suporte para quem pretende usar esse trabalho como referencia didática.

No capítulo 4, apresentamos a conclusão do trabalho, onde procuramos ratificar o que foi exposto e fazer sugestões para trabalhos futuros.

No último capitulo, deixamos as referencias bibliográficas para dar maior suporte a quem pretende usar esse trabalho.

1.4 Contextualizações históricas

A Menaecmus, por volta de 350 a.C., discípulo e sucessor do matemático Eudoxo na direção da Escola de Cizico (Ásia Menor), atribui-se a invenção da curva parábola por ele construídas mecanicamente e utilizadas na resolução do clássico problema da duplicação do cubo (problema de Delos), assim como as outras cônicas. Mas foi Apolônio (III séc. a.C.) quem extraiu essa curva de uma superfície cônica, mediante seção plana. Daí a denominação comum de seção cônica.

O nome parábola foi mesmo usado por Apolônio, que o tirou de uma terminologia pitagórica (VI séc. a.C.) específica para áreas.

Assim, quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de elipse, parábola ou hipérbole, conforme a referida base fosse menor do que o segmento, com ele coincidisse ou o excedesse. E observamos que a razão dessas designações está na própria significação dos termos, pois elipse quer dizer falta, parábola corresponde a igual e hipérbole exprime excesso.

Adaptado do artigo de Geni shulz da Sil va e disponível em:
portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf. Acesso em: 29 mai. 2016.

Muitos outros matemáticos estudaram as propriedades da parábola, como Arquimedes (287-212 a.C) que calculou a área delimitada por uma reta e uma parábola (quadratura da parábola), e Galileu Galilei (1564-1642) que provou que a trajetória de um projétil é uma parábola. Isaac Newton desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico para aperfeiçoar o telescópio de Galileu que apresentava problemas na quanto a nitidez das imagens (para mais informações acesse http://astro.if.ufrgs.br/telesc/node2.htm Acesso em: 29 mai. 2016.
).

A palavra parábola está, para os estudantes do ensino médio, associada ao gráfico da função polinomial do segundo grau. Embora quase todos conheçam as antenas parabólicas, nem todos fazem ligação entre uma coisa e outra. Os espelhos dos telescópios e dos faróis dos automóveis também são parabólicos.

Adaptado do artigo de Eduardo Wagner e disponível em:
portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf . Acesso em: 29 mai. 2016.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

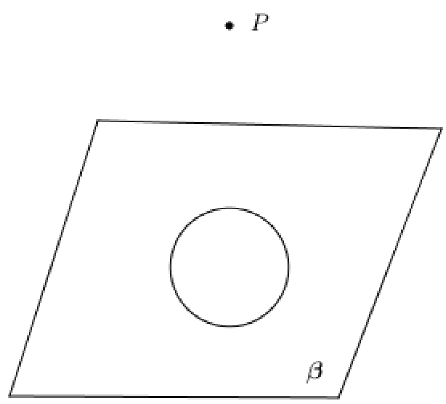
O conteúdo deste capítulo é basicamente oriundo da Geometria Analítica. No estudo da parábola apresentado neste trabalho, obtemos a parábola como sendo uma curva de intersecção de um plano paralelo a uma geratriz do cone com o cone. Introduzimos o famoso Teorema de Pitágoras, que usamos nesta obra para calcular distância entre pontos, também definimos aqui como calcular distância de um ponto a uma reta. Em seguida, definimos a curva como um conjunto de pontos em um plano. Provamos que tal definição é consequência da definição da curva como uma secção cônica aqui apresentada.

2.1 Parábola

Antes de começarmos a falar de parábola precisamos da definição de um cone, assim como de alguns conceitos básicos de geometria espacial que serão apresentados logo abaixo.

Considere uma região plana limitada por uma circunferência e um ponto P fora desse plano conforme figura 1.

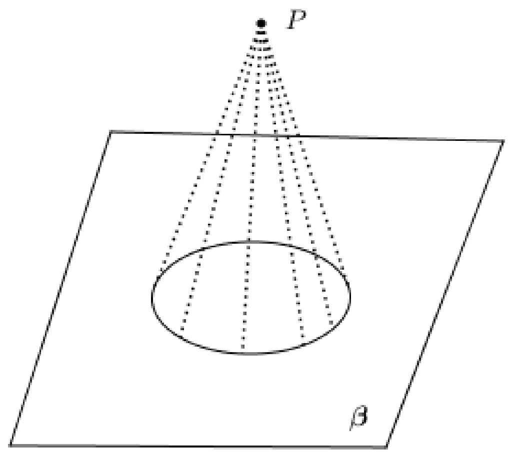
Figura 1: Circunferência e um ponto P fora do plano da circunferência



Fonte: Autor, 2016

Denominamos cone ao sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto P e a outra num ponto qualquer da circunferência de acordo como mostra figura 2.

Figura 2: Cone formado por suas geratrizes.

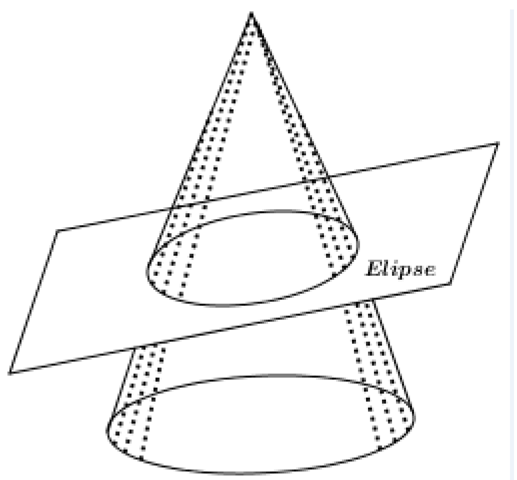


Fonte: Autor, 2016

Geratriz de um cone é qualquer segmento de reta que tenha uma extremidade no vértice do cone (ponto P) e a outra na circunferência que envolve a base do cone.

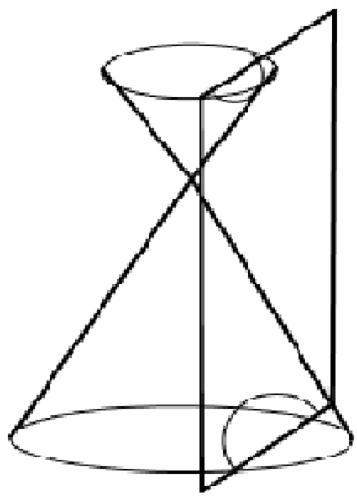
Tendo apresentado o cone anteriormente, sentimo-nos na obrigação de mostrar as principais cônicas obtidas através de um corte feito por um plano num cone de uma ou duas folhas, como mostra a (figura 3, elipse), (figura 4, hipérbole) e (figura 5, parábola).

Figura 3: Elipse como seção cônica.



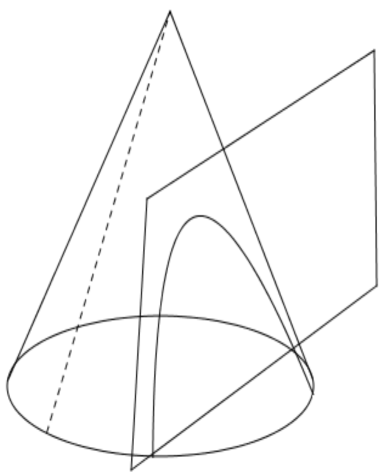
Fonte: Autor, 2016

Figura 4: Hipérbole como seção cônica.



Fonte: Autor, 2016

Figura 5: Parábola como seção cônica.



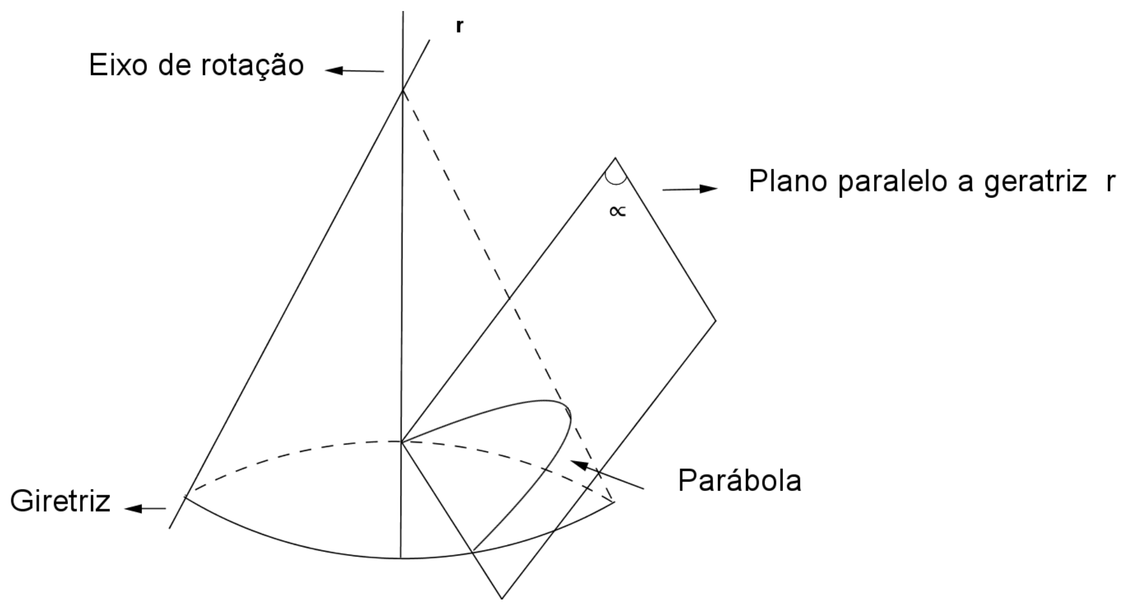
Fonte: Autor, 2016

Como o objetivo dessa dissertação é o estudo da parábola, então para análise do estudo em questão, que é a parábola, podemos nos limitar ao cone de apenas uma folha, vide figura 5.

Assim diante desses conceitos elementares da geometria espacial, podemos começar a falar da parábola como uma seção cônica.

A parábola é uma curva obtida através da intersecção da superfície de um cone com um plano paralelo a uma de suas geratrizes conforme figura 6.

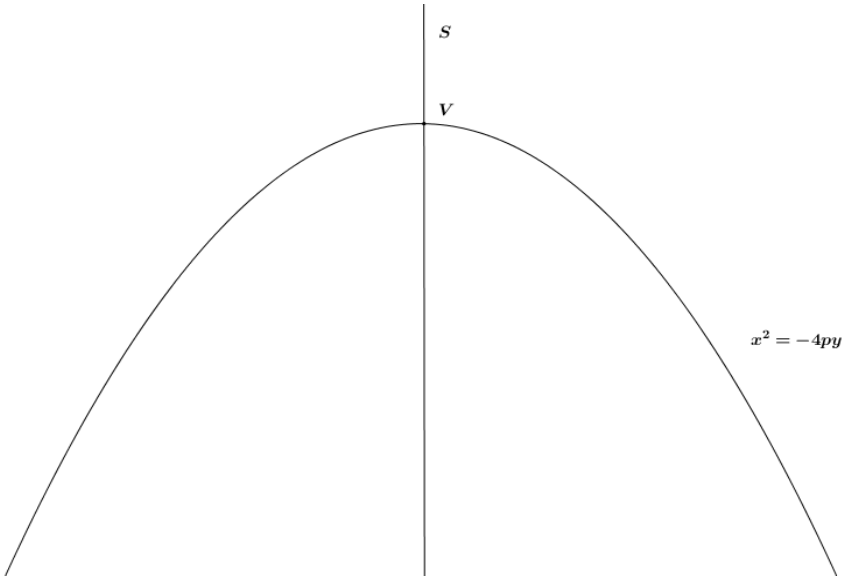
Figura 6: Parábola obtida pela intersecção de um plano paralelo a uma geratriz do cone.



Fonte: Autor, 2016

A parábola é uma curva simétrica, possuindo um eixo de simetria que passa pelo seu vértice. Esse eixo divide a parábola em duas partes iguais, como mostra a figura 7.

Figura 7: Parábola com eixo de simetria e seu vértice



Fonte: Autor, 2016.

Na figura acima *V* representa o vértice da parábola $x^2 = -4py$ e *s* o eixo de simetria.

2.2 Teorema de Pitágoras

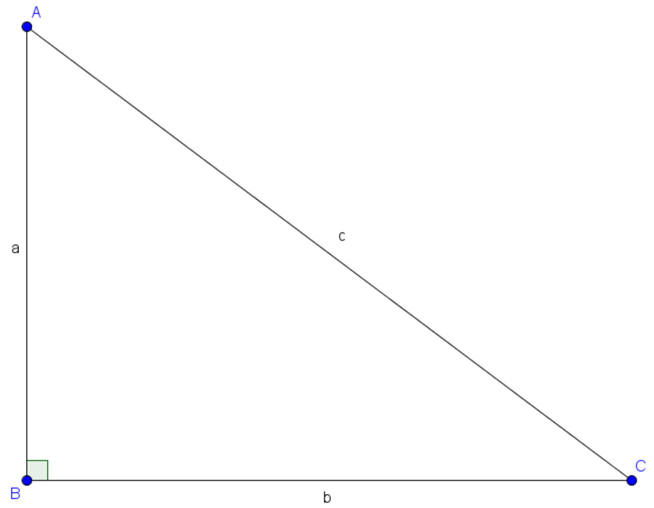
Pitágoras foi um matemático grego que teve sua história envolta em lendas fantasiosas e mitos uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida. Pitágoras viveu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, por volta de 572 a.C. O fato é que foi atribuído a Pitágoras o teorema que leva o seu nome, um dos mais famosos e úteis teorema da geometria elementar. Faremos uso do Teorema de Pitágoras para calcular distâncias entre dois pontos que aparece na definição de Parábola.

A demonstração que faremos abaixo usa comparação de áreas, mas existem muitas outras demonstrações do Teorema de Pitágoras, o leitor interessado pode pesquisar algumas ou mesmo até fazer.

Teorema: Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos desse triângulo.

<u>Demonstração:</u> A figura 8 mostra um triangulo retângulo de catetos a e b, e hipotenusa c.

Figura 8: Triângulo retângulo



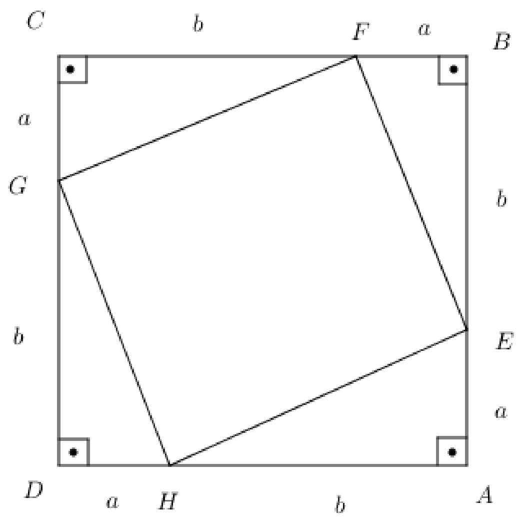
Fonte: Autor, 2016.

Queremos mostrar que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para isso desenhamos um quadrado de lados $a+b$,

Figura 9: Quadrado de lados $a+b$



Fonte: autor, 2016.

Observe que na figura 9 os triângulos:

$$AEH, BFE, CGF \ e \ GDH,$$

São todos triângulos retângulos congruentes pelo caso LAL. Portanto,

$$HE \equiv EF \equiv FG \equiv GH = c.$$

Daí,

$$\angle FEB \equiv \angle GFC \equiv \angle HGD \equiv \angle AHE = \alpha.$$

Como os triângulos são retângulos, então:

$$\angle BFE \equiv \angle CGF \equiv \angle DHG \equiv \angle AEH = 90^0 - \alpha,$$

Logo,

- $\angle GFC + \angle GFE + \angle BFE = 180^0$.

  Substituindo o $\angle GFC$ por α e o $\angle \mathrm{BFE}$ por 90^0 - α, temos que:

$$\alpha + \angle GFE + 90^0 - \alpha = 180^0$$

$$\angle GFH = 90^0$$

- $\angle CGF + \angle FGH + \angle HGD = 180^0$.

  Substituindo o $\angle CGF$ por 90^0 - α e o $\angle HGD$ por α, temos que:

$$90^0 - \alpha + \angle FGH + \alpha = 180^0$$
$$\angle FGH = 90^0$$

- $\angle DHG + \angle GHE + \angle AHE = 180^0$.

  Substituindo o $\angle DHG$ por 90^0 - α e o $\angle AHE$ por α, temos que:

$$90^0 - \alpha + \angle GHE + \alpha = 180^0$$

$$\angle GHE = 90^0$$

- $\angle AEH + \angle HEF + \angle FEB = 180^0$

  Substituindo o $\angle AEH$ por 90^0 - α e o $\angle FEB$ por α, temos que:

$$90^0 - \alpha + \angle HEF + \alpha = 180^0$$

$$\angle HEF = 90^0$$

Provamos assim que o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado.

A área do quadrado $ABCD$ é igual à área dos quatros triângulos mais a área do quadrado $EFGH$, ou seja,

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

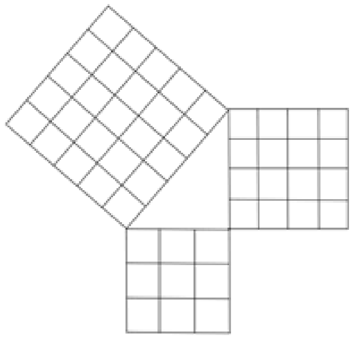
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

□

Outra demonstração poderia ser feita a partir da figura 10 baixo:

Figura 10: Demonstração alternativa do Teorema de Pitágoras



Fonte: autor, 2016.

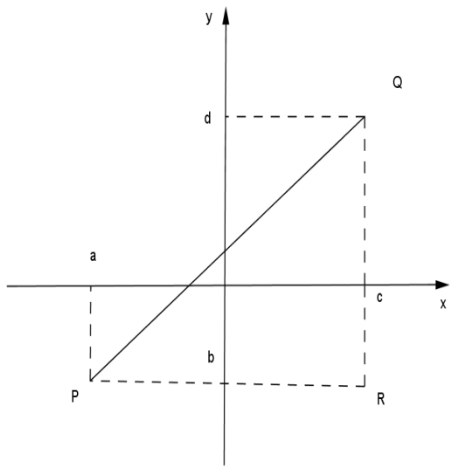
2.3 Distâncias entre dois pontos do plano

A distância entre dois pontos do plano definhada abaixo terá grande utilidade neste trabalho, quando procurarmos as equações da parábola segundo a definição de parábola como um conjunto de pontos do plano.

Definição: Sejam $P(a,b)$ e $Q(a,b)$ pontos do plano π dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais *OXY*.

A distância de P a Q, que designamos $dist(P,Q)$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo PQR de catetos PR e QR, onde $R=(c,b)$, conforme figura 11.

Figura 11: Distância de P a Q



Fonte: Autor, 2016.

Sendo a distância entre dois pontos de um eixo igual ao modulo da diferença de suas coordenadas, as medidas destes catetos são, respectivamente, $|PR|=|c-a|$ e $|QR|=|b-d|$.

Então, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$dist(P,Q)=|PQ|$$

$$=\sqrt{|PR|^2+|QR|^2}$$

$$=\sqrt{|c-a|^2+|b-d|^2}$$

Assim, a distância de $P(a,b)$ e $Q(a,b)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

2.4 Distâncias de um ponto a uma reta

A distância de um ponto a uma reta apresentada nesta seção será usada para calcular a distancia de um ponto P genérico da parábola a equação de sua reta diretriz *d* a partir seção 2.6, quando deduzimos as equações da parábola através da definição de parábola como um conjunto de pontos do plano.

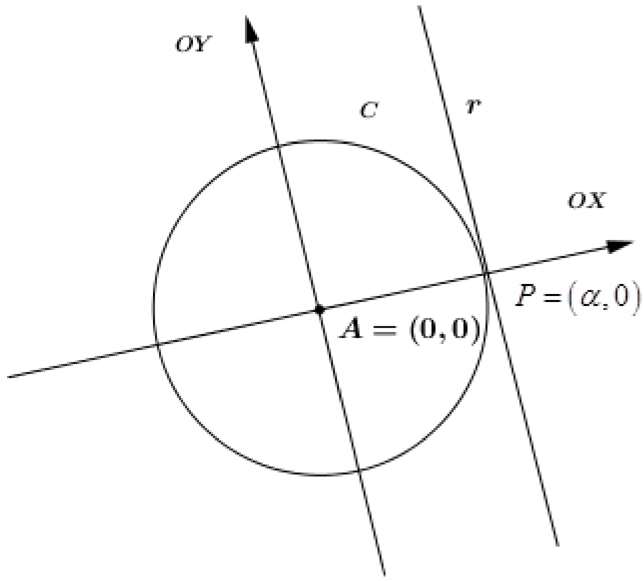
A reta diretriz de uma parábola é uma fixa que juntamente com um ponto fora desta reta, chamado foco, definem, unicamente, parábola como lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que equidistam desta reta e do foco.

Dados um ponto P e uma reta r no plano, já sabemos calcular a distância de P a cada ponto $P^{'} \in r$.

Teorema 1: Se a reta r é tangente no ponto P (ponto de tangência) ao círculo C de centro A e raio $\alpha > 0$, então a reta que passa por A e P é perpendicular à reta r.

Prova.

Figura 12: Escolha do sistema de coordenadas



Fonte: Autor, 2016

Seja OXY o sistema de eixos ortogonais que tem origem no ponto A e eixo OX positivo contendo o ponto P conforme figura 12. A escolha desse sistema de eixos ortogonais visa facilitar a demonstração do Teorema.

Neste sistema de coordenadas, $A=(0,0)$ e $P=(\alpha,0)$.

Para demonstrar o Teorema, basta mostrar que a equação da reta r no sistema de coordenadas escolhido é:

$$r: x=\alpha.$$

Observação: o símbolo "**:**" é utilizado neste trabalho no sentido de definir um conjunto, no caso acima, a reta r é definida como o conjuntos dos pontos do plano cartesianos cuja primeira coordenada é igual a α .

Suponhamos, raciocinando por absurdo, que r não é vertical. Isto é, $r: y=ax+b$. Como $P=(\alpha,0)\in r$, devemos ter $0=a\alpha+b$.

Logo $b=-\alpha a$, e a equação de r é:

$$r: y=ax+-a\alpha \text{, ou seja, } r: y=a(x-\alpha).$$

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} y=a(x-\alpha) \\ x^2+y^2=\alpha^2 \end{cases},$$

onde $x^2+y^2=\alpha$ é a equação do círculo C no sistema de coordenadas escolhido.

Um ponto é comum à reta r e ao círculo C se, e somente se, suas coordenadas satisfazem as duas equações do sistema anterior.

Substituindo y da primeira equação na segunda, obtemos:

$$x^2+a^2(x-\alpha)^2=\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-\alpha^2+a^2(x-\alpha)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x+\alpha)+a^2(x-\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\left[x+\alpha+a^2(x-\alpha)\right]=0.$$

Então

$$x=\alpha \text{ ou } x+\alpha+a^2(x-\alpha)=0,$$

isto é,

$$x = \alpha \text{ ou } x = \frac{\alpha\left(a^2 - 1\right)}{1 + a^2}$$

Logo, o sistema anterior tem duas soluções:

- $P = (\alpha, 0)$, correspondente a $x = \alpha$;
- $P'\left(\frac{\alpha\left(a^2-1\right)}{1+a^2}, -\frac{2a\alpha}{1+a^2}\right)$, correspondente a $x = \frac{\alpha\left(a^2-1\right)}{1+a^2}$

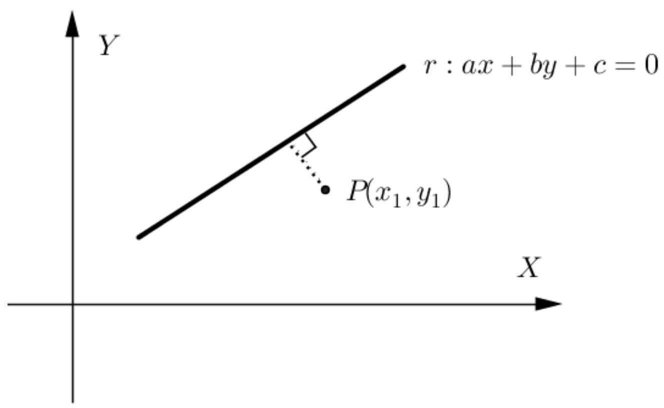
Mas isso é absurdo, pois a reta r e o círculo C são tangentes e $P' \neq P$.

Assim, a hipótese de que r é uma reta não-vertical é falsa.

□

Agora vamos ver como calcular a distância do ponto P à reta r. Para ter uma ideia intuitiva do que pretendemos a figura 13 serve como ilustração.

Figura 13: Distância entre ponto e reta



Fonte: Autor, 2016.

Definição: A distância, $dist(P, r)$, do ponto P à reta r é dada por

$$dist(P,r) = \min\{dist(P,P') \mid P' \in r\}.$$

Dizemos que um ponto $P^* \in r$ realiza a distância do ponto P à reta r se

$$dist((P,P^*) \leq dist(P,P'),$$

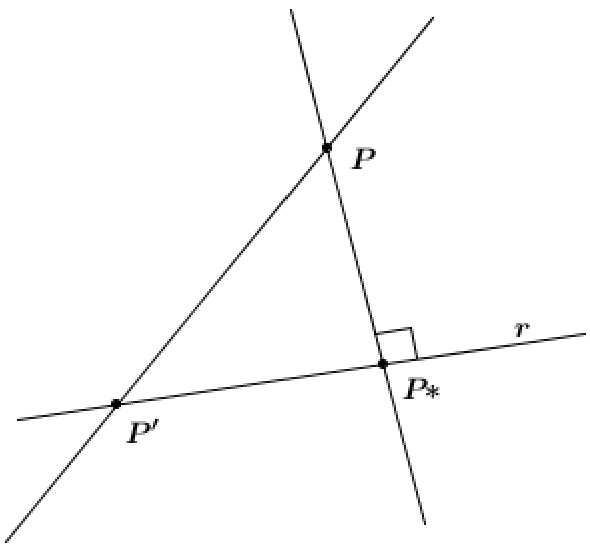
para todo $P' \in r$.

Para ilustrar o que menciona esta definição usaremos como base a figura 14.

De outro modo, baseado em [35], seja a reta *r* e o ponto P, que não pertence à reta r. Desejamos determinar a distancia entre o ponto P e a reta r, isto é, $dist(P,r)$. Seja P' um ponto qualquer de r. Então, temos que: $\min dist(P,P') = dist(P,r) \leq dist(P,P')$, ocorrendo a igualdade em um ponto específico: o pé da perpendicular à reta r que passa pelo ponto P. Chamemos esse ponto correspondente ao pé da perpendicular a r que passa por P de $P*$.

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos ver facilmente que a menor distância $dist(P,P')$ ocorre quando $P' = P*$, onde $dist(P,r) = dist(P,P*)$, que é outro modo de escrever a conclusão acima, pois, para $P' \neq P*$, o segmento $PP*$ é sempre um dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PP', portanto $dist(P,P*) \leq dist(P,P')$, e a igualdade ocorre quando $P' = P*$.

Figura 14: **P* realiza distância de à reta r**



Fonte: Autor, 2016.

Há outra maneira de ver a distância de um ponto P a uma reta r:

Vide figura 15.

- Se $P \in r$, a distância de P a r é igual a zero.

- Se $P \notin r$, consideremos os círculos **c** de centro P e raio $\alpha > 0$.

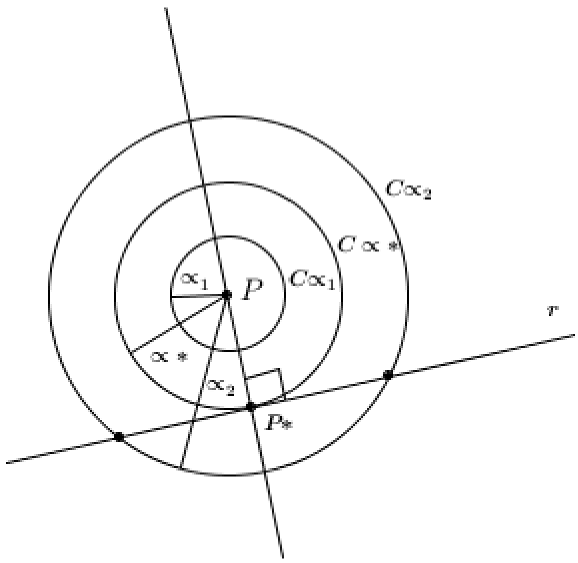
Se α é pequeno então $C_\alpha \cap r = \emptyset$, e se α é grande então $C_\alpha \cap r$ consiste de exatamente dois pontos.

Portanto, existe um único valor $\alpha^* > 0$ tal que C_α^* é tangente à reta r num ponto P^*. Isto é, $C_\alpha^* \cap r = \{P^*\}$.

Pelo Teorema anterior, a reta que passa por P e P^* é perpendicular a r. Logo α^* é a distância de P a r, ou seja:

$$\alpha^* = dist(P, r).$$

Figura 15: $\alpha_1 < \alpha^* = dist(P, r) < \alpha_2$



Fonte: Autor, 2016.

No seguinte Teorema, estabelecemos uma fórmula para o cálculo da distância de um ponto P a uma reta r no plano do papel.

Teorema 2:

Sejam $r: ax+by=c$ uma reta e $P=(x_1,y_1)$ um ponto no plano. Então, a distância de P a r é dada por:

$$dist(P,r)=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Demonstração:

Nesta demonstração usamos a figura 15 como base ilustrativa.

Se $P\in r$, então as coordenadas de P satisfazem a equação de r, ou seja,

$ax_1+by_1=c$, e, portanto,

$$dist(P,r)=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{0}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e o Teorema está provado neste caso.

Suponhamos agora que $P\notin r$, e consideremos, para todo $\alpha>0$, o sistema de equações:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)=\alpha^2 \end{cases},$$

Com $\alpha>0$.

Onde a primeira equação é da reta r e a segunda equação é do círculo C_α de centro no ponto $P=(x_1,y_1)$ e raio $\alpha>0$.

Vamos determinar α para o qual a solução do sistema é única. Isto é, para o qual o círculo C_α de raio α é tangente à reta r.

- Se $b\neq 0$, então a primeira equação do sistema anterior nos dá

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}.$$

Em particular, a reta r não é vertical. Substituindo essa expressão de y na segunda equação do sistema anterior, obtemos:

$$(x-x_1)^2+\left(-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}-y_1\right)^2=\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)^2 + \left(-\frac{1}{b}[ax - c + by_1]\right)^2 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)^2 + \left(-\frac{1}{b}\right)^2 [ax - c + by_1]^2 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)^2 + \frac{1}{b^2}(ax - c + by_1)^2 = \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 (x - x_1)^2 + (ax - c + by_1)^2 = \alpha^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 (x - x_1)^2 + (ax - ax_1 + ax_1 + by_1 - c)^2 = \alpha^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 (x - x_1)^2 + \{a(x - x_1) + [ax_1 + by_1 - c]\}^2 = \alpha^2 b^2$$

Fazendo $x' = x - x_1$ e $Q_1 = ax_1 + by_1 - c$, temos:

$$b^2 (x')^2 + \left(a(x') + Q_1\right)^2 = \alpha^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 (x')^2 + a^2 (x')^2 + 2ax'Q_1 + Q_1^2 = \alpha^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 + b^2\right)(x')^2 + 2aQ_1 x' + \left(Q_1^2 - \alpha^2 b^2\right) = 0$$

Esta última equação (de grau dois) terá uma única solução para x' (e, portanto, uma única solução para x) se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero:

$$\Delta = (2aQ_1)^2 - 4\left(a^2 + b^2\right)\left(Q_1^2 - \alpha^2 b^2\right) = 0$$

Ou seja

$$4a^2Q_1^2 - 4a^2Q_1^2 + 4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_1^2 + 4\alpha^2 b^4 = 0$$

$$4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_1^2 + 4\alpha^2 b^4 = 0$$

$$4b^2\left(a^2\alpha^2 - Q_1^2 + \alpha^2 b^2\right) = 0$$

$$a^2\alpha^2 - Q_1^2 + \alpha^2 b^2 = 0.$$

Pois b $\neq$ 0

$$\alpha^2\left(a^2+b^2\right)-Q_1^2=0$$

$$\alpha^2\left(a^2+b^2\right)=Q_1^2$$

$$\alpha^2=\frac{Q_1^2}{a^2+b^2},$$

Lembrando que $Q_1=ax_1+by_1-c$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\alpha=\frac{\left|ax_1+by_1-c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Na situação em que a reta r é vertical (b = 0), r: x = c, temos $Q_1=x_1-c$, e o ultimo sistema fica

$$\begin{cases} x=c \\ \left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2=\alpha^2 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos,

$$\left(c-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2=\alpha^2$$

Essa equação terá uma única solução para y se, e somente se,

$$x^2=\left(c-x\ \right)^2.$$

Logo,

$$\alpha=\left|x_1-c\right|=\left|Q_1\right|=\frac{\left|1\cdot x_1+0\cdot y_1-c\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

□

Exemplo:

Calcular a menor distância do ponto $P\left(-1\ ,\ 2\right)$ à reta $r:\ 3\mathrm{x}-4\mathrm{y}+1=0$.

SOLUÇÃO:

$$dist\left(P,r\right)=\frac{\left|3\cdot\left(-1\right)+\left(-4\right)\cdot 2-1\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$dist\left(P,r\right)=\frac{12}{\sqrt{25}}$$

$$dist\left(P,r\right)=\frac{12}{5}$$

Definição: Sejam d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d. A parábola $\wp$ de foco F e diretriz d é o conjunto de pontos do plano equidistante de F e d:

$\wp=\left\{P \mid dist\left(P,F\right)=dist\left(P,d\right)\right\}$, onde *P* é um ponto genérico do plano.

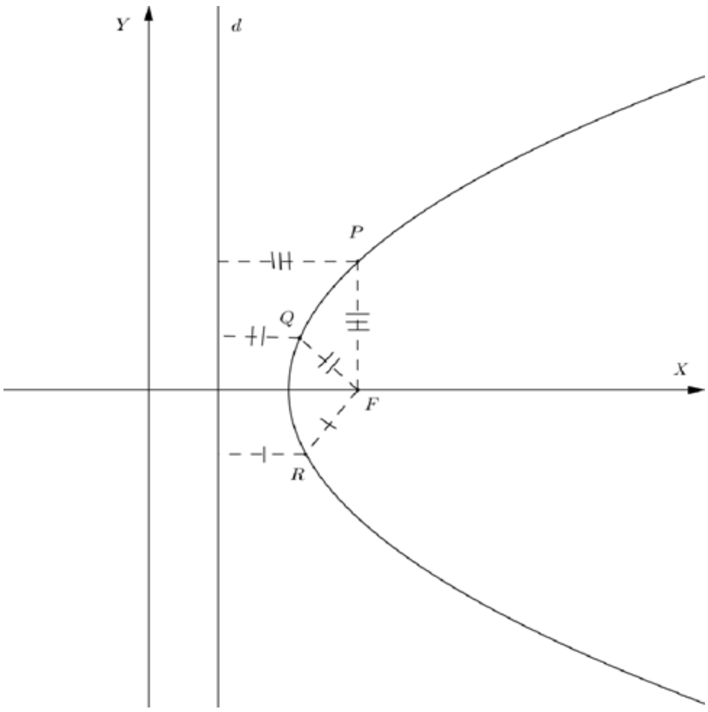
Observação: Esta definição não depende do uso de sistema de coordenadas.

Exemplo:

Sendo F, P, Q e R pontos de um plano α e d uma reta desse mesmo plano que não contém nenhum desses pontos, temos:

$$\begin{cases} dist\left(P,F\right)=dist\left(P,d\right) \\ dist\left(F,Q\right)=dist\left(Q,d\right) \\ dist\left(F,R\right)=dist\left(R,d\right) \end{cases}$$

Figura 16: Parábola com pontos P, Q, R; foco F e diretriz d.



Fonte: Autor, 2016.

A figura 16, obtida acima, representa uma parábola.

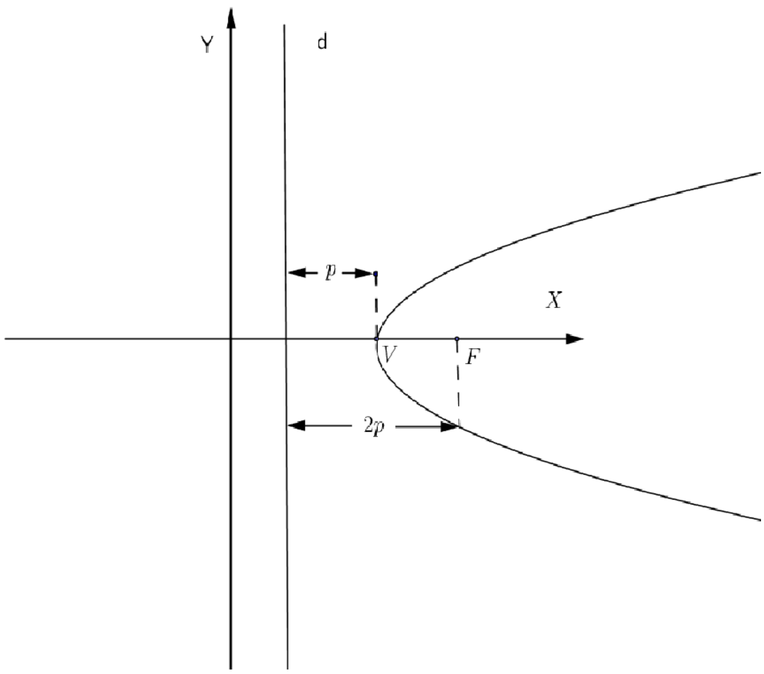
2.5 Elementos de uma parábola

Nesta seção indicamos através de uma figura a localização dos principais elementos de uma parábola, o foco F, a diretriz d, o vértice V e o parâmetro 2p. Sendo essa uma representação de modo particular, isto é, seu foco esta a direita da diretriz, mas se a parábola tiver seu foco a esquerda da diretriz, seu foco acima da diretriz e seu foco abaixo da diretriz, a representação de sues elementos se faz de modo semelhante. Apresentamos e provamos que a secção do cone com o plano paralelo a uma de suas geratrizes é uma parábola e para finalizar a seção também enunciamos e provamos que toda parábola é simétrica em relação a sua reta focal.

Na figura 17 que segue representamos os principais elementos mencionados no início do parágrafo anterior.

Na parábola temos:

Figura 17: Parábola com seus elementos



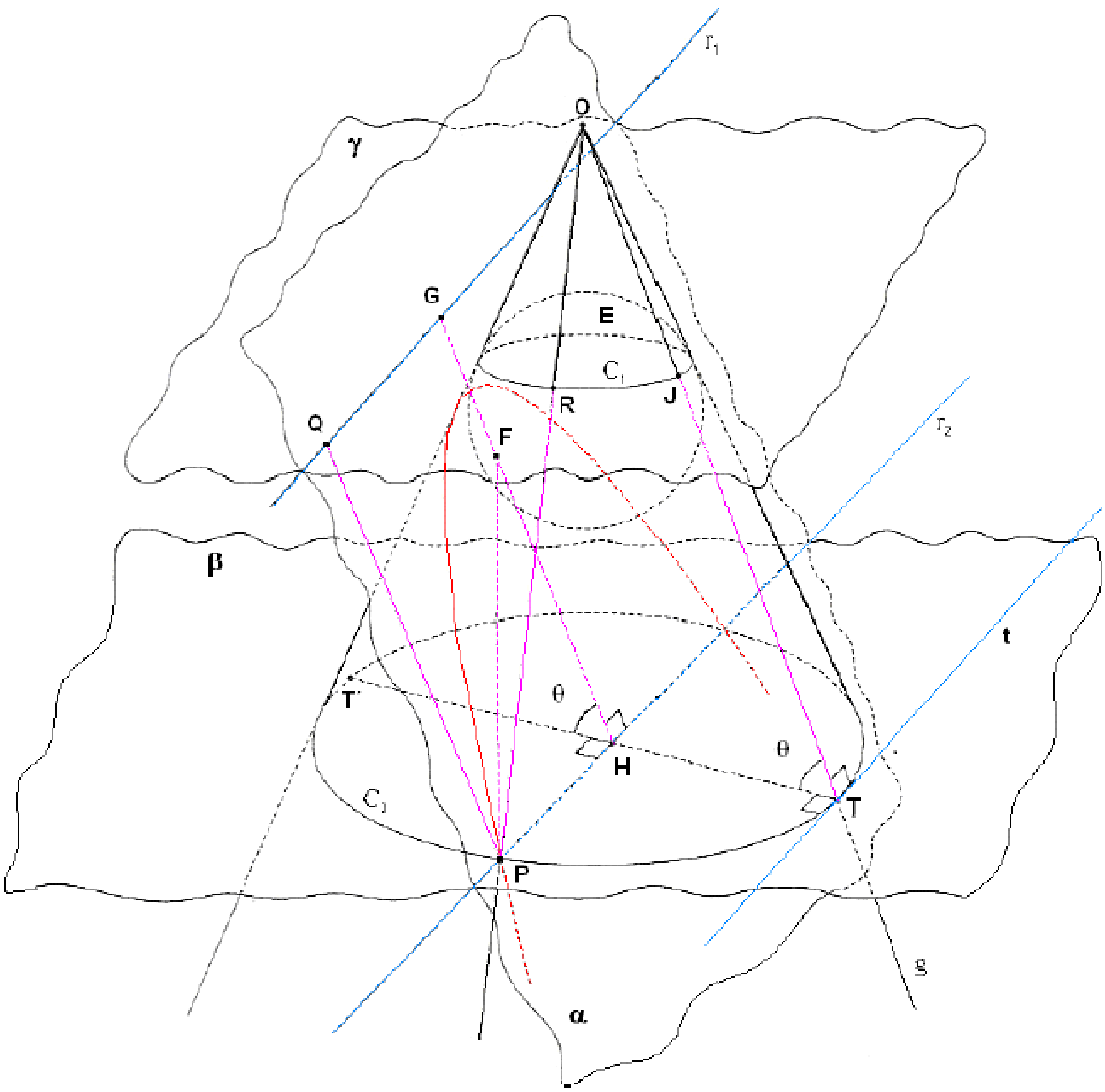
Fonte: Autor, 2016.

$$\begin{cases} F \text{ é o foco;} \\ d \text{ é a diretriz} \\ V \text{ é o vértice} \\ 2p \text{ é o parâmetro} \end{cases}$$

Teorema: A secção do cone com o plano paralelo a uma de suas geratrizes é uma parábola.

Demonstração: O esquema que segue foi realizado por Germinal Dandelin (1794 -1847) e extraído do livro “A rainha das ciências” (GARBI, 2006: p. 80 -81). Conforme figura 29.

Figura 18: Construção espacial de Dandelin



Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/mirtes-parabolas-curvas-preciosas.pdf. Acesso em: 28 mai. 2016.

a) De acordo com a figura 18, considerar uma das folhas de uma superfície cônica circular e sobre ela uma geratriz g.

b) Traçar um plano α com a condição de ser paralelo somente a g.

c) Sobre a intersecção de α com a superfície, tomar um ponto P e por ele traçar o plano β perpendicular ao eixo da superfície.

d) Chamar de C_2 a circunferência intersecção de β com a superfície e de r_2 a intersecção de α com β.

e) Imaginar agora um plano tangente à superfície e contendo a geratriz g. A intersecção de tal plano o com β é a reta t, tangente a C_2 no ponto T e perpendicular à reta OT e ao diâmetro TT'. O plano das retas g e t é paralelo a α. Logo, r_2 e t são paralelas.

f) Seja E a esfera inscrita na superfície e tangente a α.

g) Seja F o ponto de tangência de α com a esfera E. Os pontos de contato entre a superfície e a esfera estão sobre a circunferência C_1, situada sobre um plano γ ortogonal ao eixo e, portanto o, paralelo a β. Logo, a intersecção de α com γ (a reta r_1) é paralela a r_2.

h) Por P traçar a perpendicular PQ a r_1 e r_2.

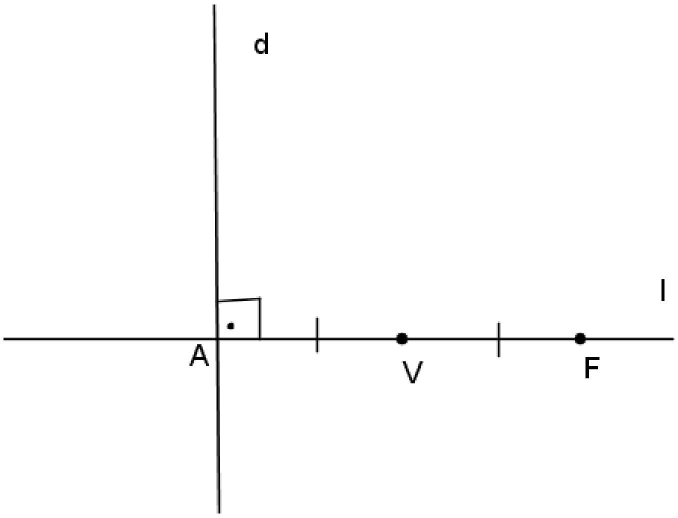
i) Por F, traçar a perpendicular GH a r_1 e r_2. Logo, $PQ = GH$. A aresta g e a reta do segmento GH são paralelas, por serem, respectivamente, perpendiculares às paralelas t e r_2 e, fazerem com TT' o mesmo ângulo θ (característico daquela superfície cônica). Os segmentos GH e c são iguais, por serem paralelos e estarem entre dois planos paralelos.

j) Unir O a P e seja R a intersecção de OP com C_1. Então $JT = PR$ (segmentos de geratrizes entre planos paralelos ortogonais ao eixo). Por sua vez, $\mathrm{PF} = \mathrm{PR}$ (tangentes à esfera E pelo ponto P). Logo, $\mathrm{PQ} = \mathrm{GH} = \mathrm{JT} = \mathrm{PR} = \mathrm{PF}$, ou seja: PF (distância de P ao ponto fixo F) $= \mathrm{PQ}$ (distância de P à reta fixa r_1). Como o ponto P é arbitrário a curva, ela é, por definição, uma Parábola $\wp$.

Observação: Veja figura 19:

- A reta focal l da parábola $\wp$ é a reta que contém o foco e é perpendicular a diretriz d.
- O ponto V da parábola $\wp$ que pertence à reta focal é o vértice da parábola $\wp$**.** Se A é o ponto onde d intersecta l, então V é o ponto médio do segmento AF.
- Note que $dist(V,F) = \mathrm{dist}(V,d) = \mathrm{p}$. Sendo p um número sempre positivo, por se tratar da distancia entre elementos da parábola, ou seja, p é a distancia do vértice ao foco e também é a distancia do vértice a reta diretriz d.

Figura 19: Diretriz d, reta focal l, vértice V e foco F de uma Parábola.



Fonte: Autor, 2016.

Proposição: Toda parábola é simétrica em relação a sua reta focal.

Demonstração: Seja $\wp$ uma parábola de foco F, vértice V, diretriz d e reta focal l. Seja $P \in \wp$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação a reta l. O segmento PP' é perpendicular a l e intercepta a reta focal l num ponto Q que é ponto médio do segmento PP'. Como o triângulo PQF e $P'QF$, são congruentes LAL, segue, pela figura 20, que:

$$dist(P,F) = dist(P',F).$$

Além disso,

$$dist(P,d) = \mathrm{dist}(Q,d) = \mathrm{dist}(P',d),$$

pois $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos.

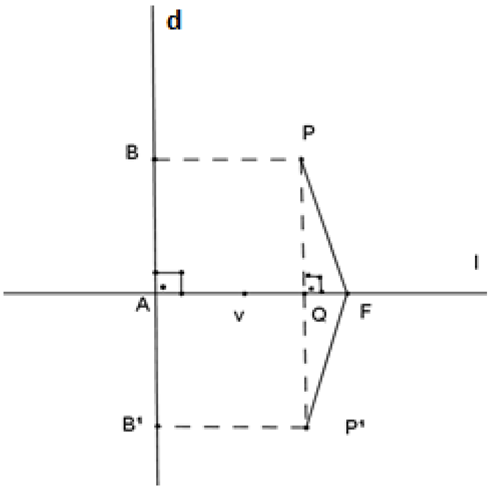
Logo,

$$dist(P',F) = dist(P,F) = dist(P,d) = dist(P',d),$$

e portanto $P' \in \wp$.

□

Figura 20: P e P' simétricos em relação à reta focal l.



Fonte: Autor, 2016.

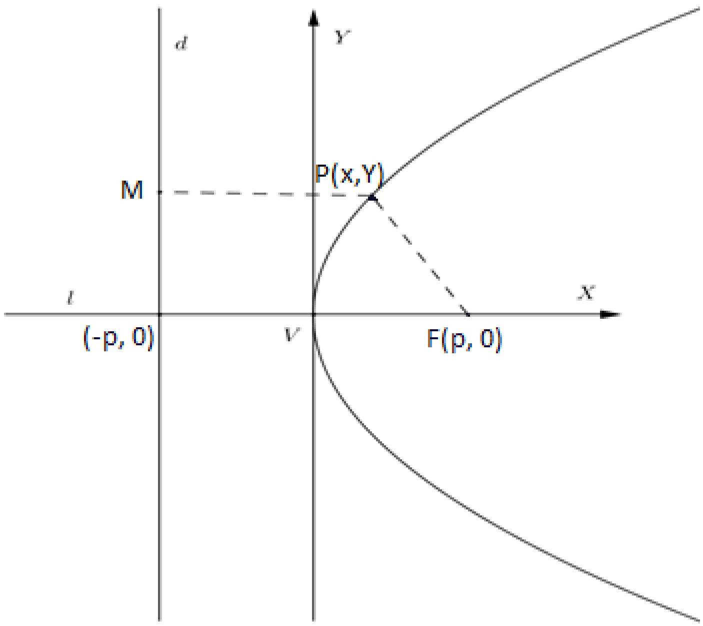
2.6 Formas canônicas da parábola

Vamos estabelecer as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas OXY no plano. Consideremos primeiro os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados, e depois os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

2.6.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX*.

CASO I. O foco F está à direita da diretriz d, figura 21.

Figura 21: Parábola com foco a direita da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

Consultando a figura 21, temos:

- Equação da reta d :

$$x = -p$$

$$x + p = 0 \quad .$$

Assim,

$$a = 1,\ b = \ 0 \text{ e } c = p$$

- Pela figura 21, $F = (p, 0)$;
- Da definição de parábola, temos:

$$dist(P, F) = dist(P, d);$$

- Sendo M ponto de d e $PM \perp d$, vem que:

$$\sqrt{|p - x|^2 + |y - 0|^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - 2px + p^2 + y^2} = \frac{|x + p|}{\sqrt{1 + 0}}$$

Note que na última igualdade acima usamos o fato que a distancia de P a F é igual ao módulo de x menos -p.

$$\sqrt{x^2 - 2px + p^2 + y^2} = |x + p|$$

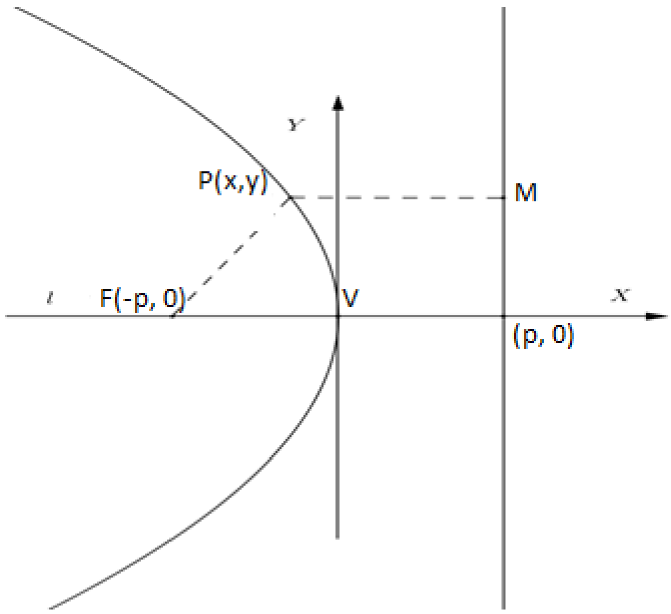
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

CASO II. O foco F está à esquerda da diretriz d, figura 22.

Figura 22: Parábola com foco à esquerda da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

- Da equação da reta d figura 22, temos:

$$x = p$$

$$x - p = 0$$

Assim,

$$a = 1,\ b = 0 \text{ e } c = -p$$

- Pela figura 22, $F = (-p, 0)$;
- Da definição de parábola, temos:

$$d(P,F)=d(P,d);$$

- Sendo M ponto de d e $PM \perp d$, temos:

$$\sqrt{x^2+2px+p^2+y^2}=\frac{|1\cdot x+0\cdot y-p|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\sqrt{x^2-2px+p^2+y^2}=|x-p|$$

$$x^2+2px+p^2+y^2=(x-p)^2$$

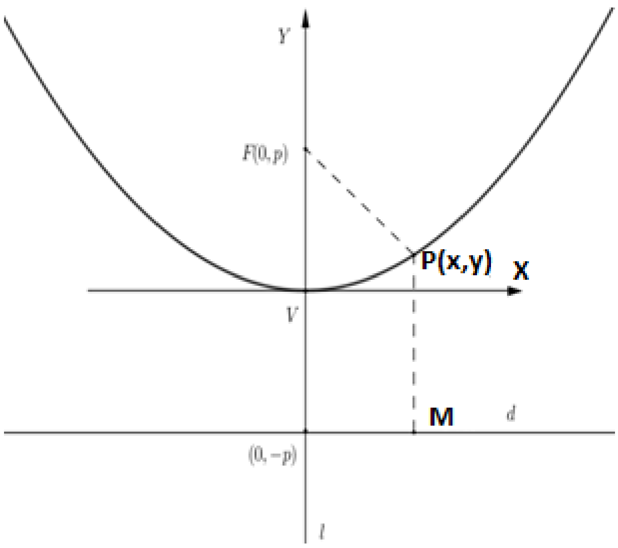
$$x^2+2px+p^2+y^2=x^2-2px+p^2$$

$$y^2=-4px$$

2.6.2 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo *OY*.

CASO I. O foco F está acima da diretriz d, figura 23.

Figura 23: **Parábola com foco acima da diretriz**



Fonte: Autor, 2016.

- Da equação da reta d figura 23, temos:

$$y=-p$$

$$x+p=0$$

Assim,

$a=0$, $b=1$ e $c=p$

- Pela figura 23, $F=(0,p)$;

  Da definição de parábola, temos:

$$d(P,F)=d(P,d);$$

- Sendo M ponto de d e $PM \perp d$, temos:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\frac{|0\cdot x+1\cdot y+p|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$$

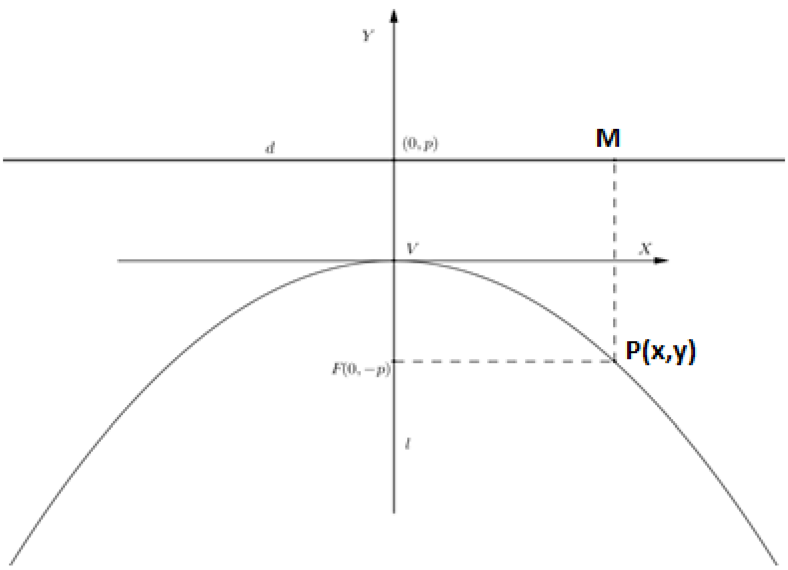
$$x^2+y^2-2py+p^2=(y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

$$x^2=4py$$

CASO II. O foco F está abaixo da diretriz d, figura 24.

Figura 24: Parábola com foco abaixo da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

- Da equação da reta d figura 24, temos:

$$y=p$$

$$y-p=0.$$

Assim,

$a = 0$, $b =$ 1 e c = - p

- Pela figura 24, $F = (0, -p)$;
- Da definição de parábola, temos:

$$d\left(P,F\right) = d\left(P,d\right)$$

- Sendo M ponto de d e $PM \perp d$, vem:

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y+p\right)^2} = |y - p|$$

$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = \left(y - p\right)^2$$

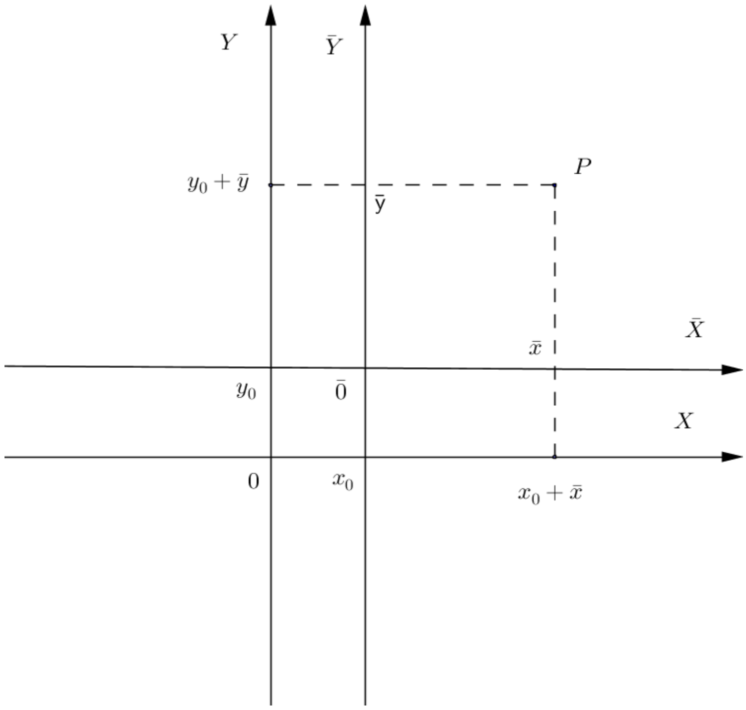
$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2$$

$$x^2 = -4py$$

2. 7 Translação dos eixos coordenados

Sejam OXY um sistema de eixos coordenados, $\bar{O} = \left(x_0, y_0\right)$ um ponto do plano e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos OX e a OY e tem o mesmo sentido destes eixos, respectivamente (figura25). Designamos por $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixo $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por $\left(x, y\right)$ as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

Figura 25: Translação de eixos coordenados



Fonte: Autor, 2016.

Pela figura 25 temos que as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ são relacionadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \overline{x} \\ y = y_0 + \overline{y} \end{cases}$$

2.7.1 Forma canônica da parábola transladada

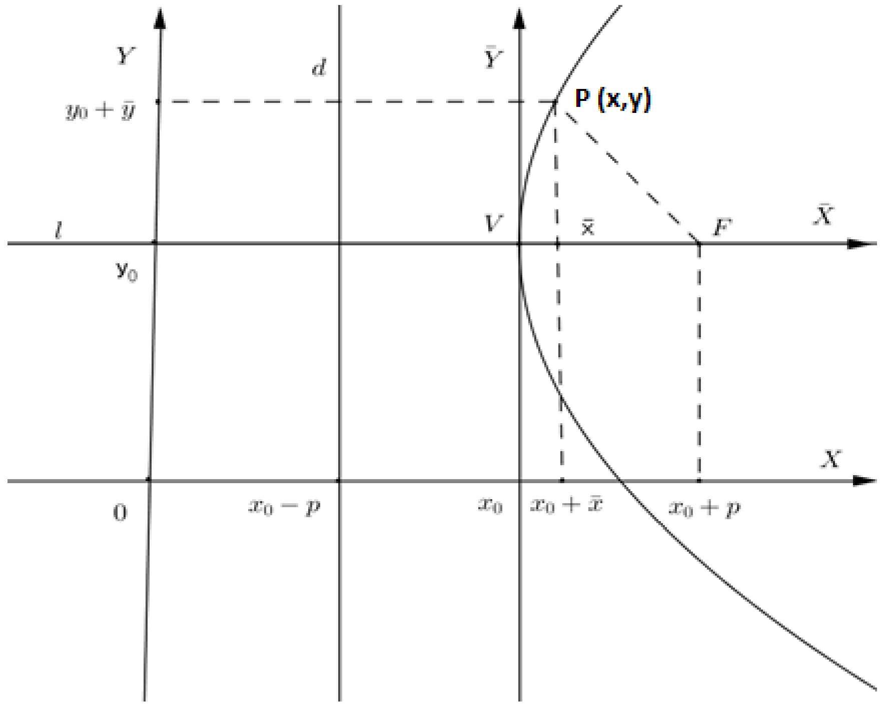
Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação da parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, onde x_0 e y_0 não são simultaneamente nulos.

Seja $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtidos transladando o sistema OXY para nova origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$. Figura 25.

Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX.

CASO I. O foco F está à direita da diretriz d, figura 26.

Figura 26: Parábola com vértice em (x_0, y_0) e foco a direita da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

Sabemos que, no sistema de coordenadas $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ a equação da parábola é $\wp : \bar{y}^2 = 4p\bar{x}$;

O foco é $F(p,0)$; o vértice, $V = (0,0)$; a reta diretriz, $d : \bar{x} = -p$; e a reta focal, $l : \bar{y} = 0$.

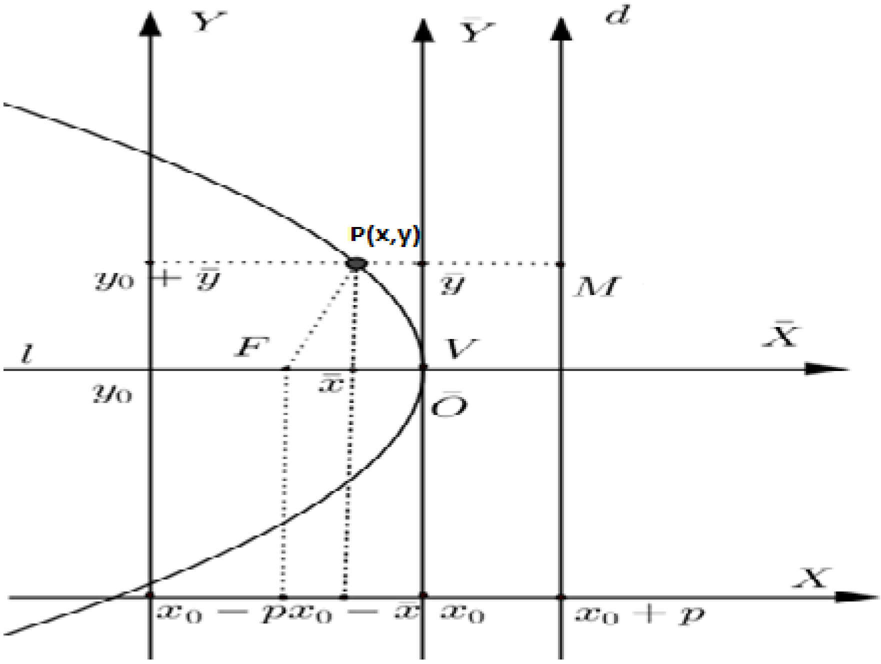
Como $x = x_0 + \bar{x}$ e $y = y_0 + \bar{y}$ a equação da parábola $\wp$ é:

$\wp : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ e seus elementos são:

- Foco: $F = (x_0 + p, y_0)$;
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$;
- Diretriz: $d : x - x_0 = -p$
- Reta focal: $l : y - y_0 = 0$

Caso II. O foco F está à esquerda da diretriz d, figura 27.

Figura 27: Parábola com vértice em (x_0, y_0) e foco a esquerda da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

No sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a equação da parábola é $\wp : \bar{y}^2 = 4p\bar{x}$ e seus elementos são:

Foco $\bar{F} = (-p, 0)$;

Vértice $\bar{V} = (0, 0)$;

Diretriz $d : \bar{x} = p$;

Reta focal $\bar{l} : \bar{y} = 0$.

Como $x = x_0 + \bar{x}$ e $y = y_0 + \bar{y}$ a equação da parábola $\wp$ é: $\wp : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$ e seus elementos são:

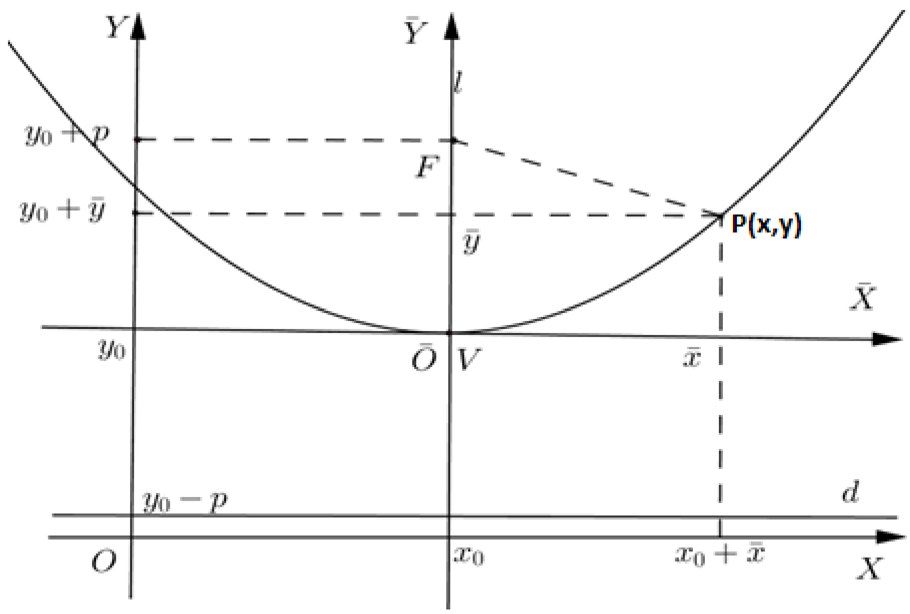
- Foco: $F = (x_0 - p, y_0)$;
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$;
- Diretriz: $d : x - x_0 = p \Rightarrow d : x = x_0 + p$;
- Reta focal $l : y - y_0 = 0 \Rightarrow l : y = y_0$.

2.7.2 Parábola com vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela eixo OY

Como no caso anterior, considerando o sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$, com origem $\overline{O}=V=(x_0,y_0)$ e eixos $\overline{O}\overline{X}$ e $\overline{O}\overline{Y}$ que tem a mesma direção e sentido dos eixos OX e OY, respectivamente podemos obter as equações e os elementos das parábolas com vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY.

CASO I. O foco F está acima da diretriz d, figura 28.

Figura 28: Parábola com vértice em (x_0,y_0) e foco acima da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

No sistema de coordenadas $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ a equação da parábola é $P : \bar{x}^2 = 4p\bar{y}$ e seus elementos são:

Foco: $\overline{F}=(0,p)$;

Vértice: $V=(0,0)$;

Diretriz: $d:\overline{y}=-p$;

Reta focal: $l:\overline{x}=0$.

Como $x=x_0+\overline{x}$ e $y=y_0+\overline{y}$ a equação da parábola $\wp$ é: $\wp:(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$ e seus elementos são:

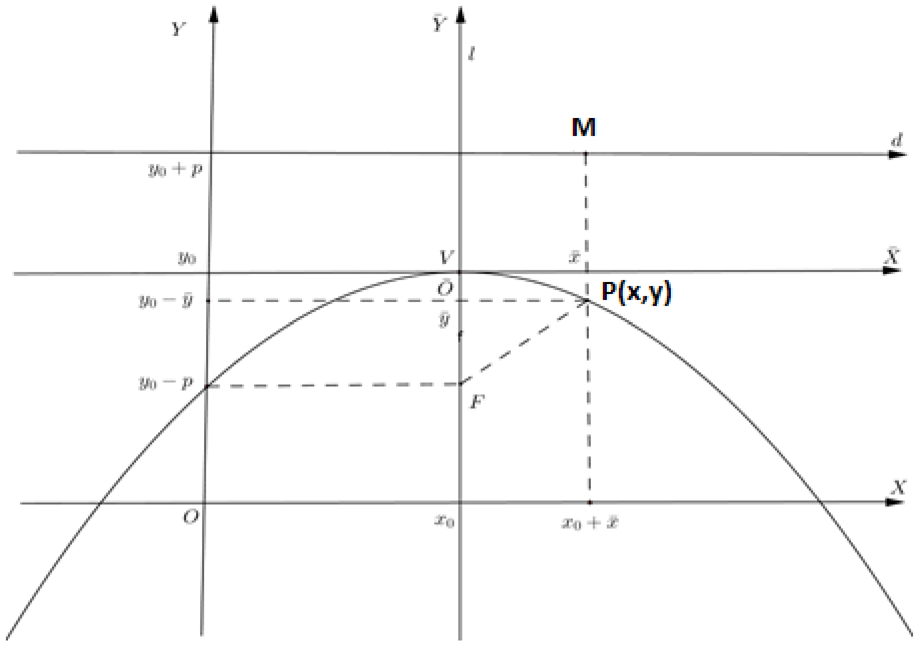
Foco é $F = (x_0, y_0 + p)$;

A diretriz é $d : y = y_0 - p$;

A reta focal é $l : x = x_0$.

CASO II. O foco F está abaixo da diretriz d, figura 29.

Figura 29: Parábola com vértice em (x_0, y_0) e foco abaixo da diretriz



Fonte: Autor, 2016.

No sistema de coordenadas $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ a equação da parábola $\wp$ é: $\wp : \bar{x}^2 = -4p\bar{y}$ e seus elementos são:

Foco: $\bar{F} = (0, -p)$;

Vértice: $V = (0,0)$;

Diretriz: $d : \bar{y} = p$;

Reta focal: $l : \bar{x} = 0$.

Como $x = x_0 + \overline{x}$ e $y = y_0 + \overline{y}$ a equação da parábola $\wp$ é: $\wp : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$ seus elementos são:

Neste caso, o:

Foco é $F = (x_0, y_0 - p)$;

A diretriz é $d : y = y_0 + p$;

A reta focal é $l : x = x_0$.

2.7.3 O gráfico de uma função quadrática

Proposição.

O gráfico de uma função quadrática de uma variável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c,$ onde a, b e c com $a \neq 0$ é o subconjunto $G_r \subset \mathbb{R}^2$, tal que $G_r(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\}$. Mostre que o gráfico de f, $G_r(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\}$ é uma parábola e determine seu foco, sua reta diretriz, seu vértice, sua reta focal e seu parâmetro.

Demonstração:

Como o gráfico de f é $G_r(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\}$, então fazendo $f(x) = y$, na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, segue que:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

como $a \neq 0$,

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{bx}{2a}\right) + c$$

Completando quadrado fica,

$$y = a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = y+\frac{b^2}{4a^2}-c$$

Como $a \neq 0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y}{a}+\frac{b^2}{4a^3}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2}{4a^2}-c\right)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2-4a^2c}{4a}\right)(I)$$

Logo, $f(x)=ax^2+bx+c$ é uma parábola, cujo vértice V é:

$$V=\left(-\frac{b}{2a},\frac{4a^2c-b^2}{4a}\right).$$

Da equação (I) da parábola temos que:

$$4p=\frac{1}{a}$$

$$p=\frac{1}{4a}$$

$$2p=\frac{1}{2a}$$

- Portanto, o seu parâmetro é:

$$\frac{1}{2a}$$

- Sua reta focal é:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

- Seu foco é:

$$F=\left(-\frac{b}{2a},\frac{4a^2c-b^2+1}{4a}\right).$$

- Sua diretriz é:

$$y = -\frac{4a^2c - b^2 + 1}{4a}$$

$$y = -\frac{1}{4a}\left(b^2 - 4a^2c + 1\right)$$

Logo, o gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola.

Qual o significado gráfico dos coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$?

O mais óbvio é o significado de c: O valor $c = f(0)$ é a ordenada do ponto em que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta o eixo OY.

O coeficiente a mede a maior ou menor abertura da parábola.

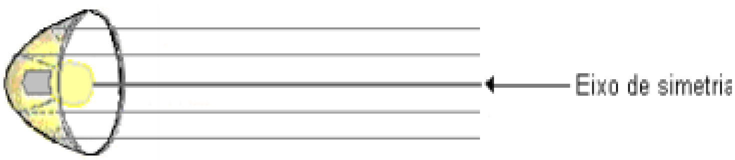
O gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se obtém do gráfico de $g(x) = ax^2$ por uma translação horizontal seguida de uma translação vertical.

O coeficiente b é a inclinação da reta tangente à parábola no ponto $P = (0, c)$, interseção da parábola com o eixo Y.

2.7.4 Exemplos de aplicações de parábolas

1. Ao acendermos os faróis do carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada, incidem num espelho parabólico e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria, como mostra a imagem 3.

Imagem 3: Feixe luminosos de um farol de carro



Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/mirtes-parabolas-curvas-preciosas.pdf. Acesso em: 02 jun.2016.

2. Como a distância do Sol à Terra é de cerca de 150 milhões de quilômetros, quando feixe de luz solar nos atinge seus raios já estão praticamente paralelos. Então quando o feixe de luz

solar atinge o espelho côncavo do forno solar (foto 10), ao se refletirem no espelho, os raios desse feixe convergem para seu foco, onde haverá uma grande concentração de energia, tanto luminosa quanto térmica. Assim, no foco do espelho há uma elevação de temperatura e, nesse ponto, é colocado o dispositivo que irá utilizar a energia concentrada.

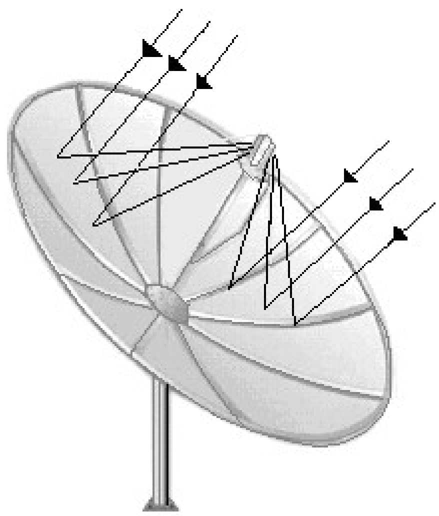
Foto 10: Forno solar

Fonte: https://www.google.com.br/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=forno%20solar. Acesso em: 02 jun. 2016.

3. As antenas parabólicas, apesar de não refletirem luz, são como espelhos. Elas são construídas para refletir ondas de radiofrequências, que tem comprimento de onda muito maior do que o da luz, com valores que variam de algumas centenas de metros até o mínimo de cerca de 0,3 m. Para esses comprimentos de onda, quase todas as superfícies são espelhos, mesmo que sejam cheias de buracos, como uma tela de arame.

Se as ondas eletromagnéticas emitidas por um satélite, atingirem a antena Parabólica, ocorrera a reflexão desses raios a um ponto chamado *foco da parábola* (Imagem 4), onde esta um aparelho receptor que convertera as ondas eletromagnéticas em um sinal que a TV transformara em ondas, que serão os programas que passam e as pessoas assistem diariamente. Informações disponíveis em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matemática/fundam/eq2g/quadratica.htm.

Imagem 4: Antena parabólica

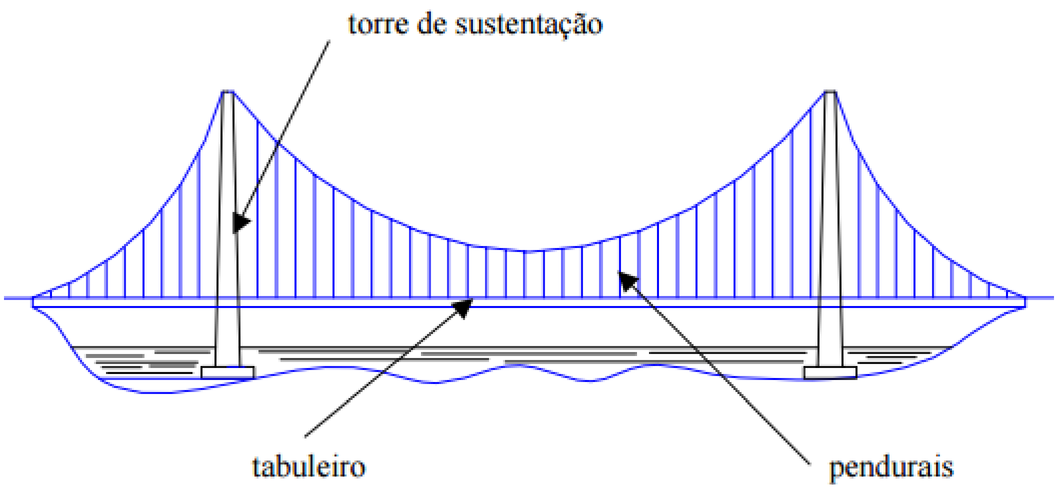


Fonte: http://gigantesdomundo.blogspot.com.br/2013/04/as-10-maiores-antenas-parabolicas-do.html. Acesso em: 26 mai. 2016.

4. Os comentários que seguem, sobre as pontes penseis, foram extraídos da tese de mestrado apresentada a UFRJ: *"Programa para análise de superestruturas de pontes de concreto armado e protendido"* (MATOS, 2001: p. 35).

As pontes penseis ou suspensas, são umas das que possibilitam os maiores vãos. Nelas o tabuleiro continuo é sustentado por vários cabos metálicos atirantados ligados a dois cabos maiores que, por sua vez, ligam-se as torres de sustentação. Os cabos comprimem as torres de sustentação, que transferem os esforços de compressão para as fundações. Nas pontes penseis os tirantes são espaçados regularmente, então a carga da ponte é uniformemente distribuída nos cabos e estes formam uma parábola, imagem 5.

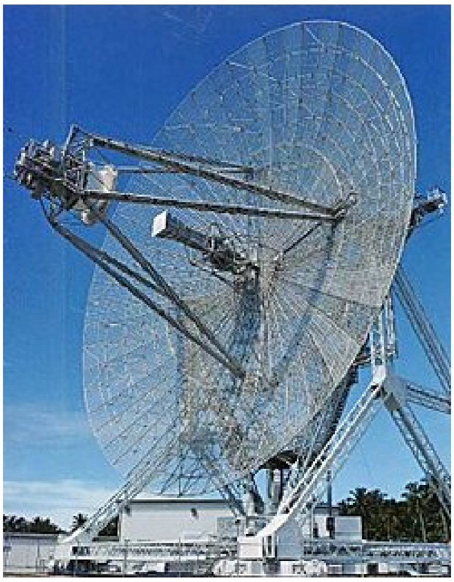
Imagem 5: Esquema de ponte pênsil



Fonte: Fonte: http://depedraecal.blogspot.com.br/. Acesso em : 27 mai. 2016.

5. Os radares usam as propriedades óticas das parábolas, similares as citadas anteriormente para antena parabólica e os faróis. Depois que o transmissor amplifica o sinal no nível desejado, ele envia para a antena, que em alguns radares tem a forma de um prato de metal. As ondas eletromagnéticas, depois de geradas e amplificadas, são levadas por guias de onda em direção ao foco do disco parabólico. Disparadas contra a parábola, se propagam para o ambiente. O extremo de saída da guia de onda é localizado no foco da parabólica. Semelhante às ondas luminosas no foco de num espelho parabólico, as ondas de radar se propagam em direção à parábola e por esta são emitidas em unidirecionalmente ao alvo. A foto 11 representa um radar.

Foto 11: Radar parabólico



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Radar. Acesso em: 07 jun. 2016

3. Proposta didática

Considerando todo referencial teórico apresentado no capítulo anterior, sentimos a necessidade e o conforto de inter-relacionar o conteúdo de parábola estudado normalmente na terceira série do ensino médio, de forma seca e abstrata nos livros de Matemática de tal série, a outra área do conhecimento humano, no entanto nos limitamos aqui especialmente a interdicisplinaridade com estudo de conteúdo da Física, costumeiramente estudados na primeira série do ensino médio. Para a abordagem desta proposta é necessário que os alunos tenham alguns requisitos de Física, isto é, conheçam um pouco de mecânica, essencialmente a parte da mecânica que faz análise dimensional do movimento como a cinemática que estuda os movimentos dos corpos sem se preocupar com suas causas.

Por outro lado, precisamos de alguns conhecimentos básicos de Matemática, como álgebra elementar estudada também no ensino médio, noção de área sob a curva e da área de algumas figuras planas como retângulo e trapézio, pois conhecendo as fórmulas para se calcular a área dessas figuras, fazemos o relacionamento dessas fórmulas com as variações do movimento para obtermos, o deslocamento do movimento Δx, assim como a principal função do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado que uma parábola, damos a interpretação do gráfico de uma parábola segundo o estudo do movimento da Física.

Para melhor fixação dos conteúdos exposto neste trabalho disponibilizamos uma lista de problemas diversificados, onde o primeiro problema da lista é uma questão do (ENEM, 2013), o qual faz referencia ao estudo de parábola de maneira inovadora que exige interpretação do aluno para solucioná-lo. O segundo problema semelhantemente ao primeiro é um problema simples, mas que requer do aluno um bom entendimento do Referencial Teórico, para uma ligeira aplicação e uma rápida solução. O terceiro problema intimamente ligado ao estudo do parâmetro da parábola que é de fácil compreensão, de maior potencial teórico que os anteriores e é dificilmente encontrado em livros didáticos do ensino médio. O quarto problema é um pouco mais elaborado, nele suponha-se que os alunos já tenham feito estudos da reta (Geometria Analítica), assim com detenham noção de reta tangente para uma boa inteligibilidade do problema em questão.

Todos os problemas apresentados até o quarto problema, jugamos servir como embasamento para podermos aplicar o conteúdo de parábola na área da Física fazendo assim mais sentido para os alunos do ensino médio, visto que estes estão o tempo todo perguntando para que sirva e onde vão usar os conteúdos estudados. Diante do exposto aqui nos sentimos a vontade e confiantes de poder contribuir com os quatros ultimo problemas da lista relacionados a área da Física e para deixarmos alunos e professores mais confiantes em poder utilizar este trabalho como referencia didática, solucionamos todos os problemas da lista.

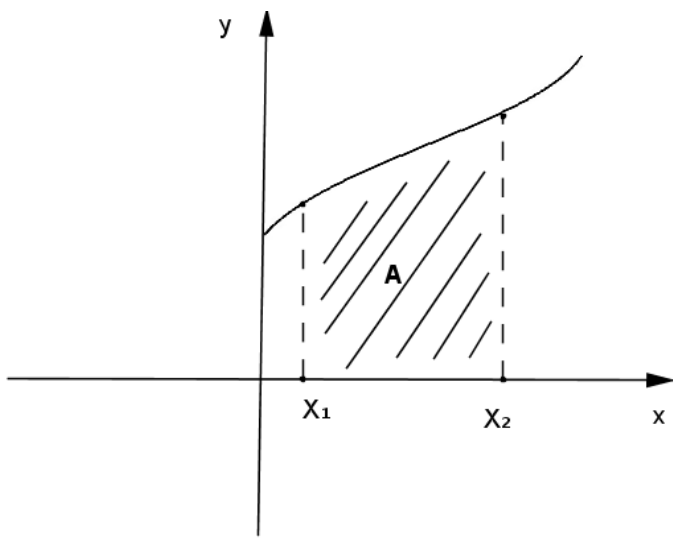
O quinto e o sexto problema são problemas mais de transição dos problemas que envolvem o conteúdo de parábola propriamente dito, são exposto de uma maneira mais leve e mais singela para que os alunos vão se acostumando com a ideia de poder usar o conteúdo abordado sobre parábola para resolver novos problemas, aqui restrito a área da Física.

O sétimo problema é mais sutil em relação ao quinto e ao sexto problema dentro do conhecimento da Física, sua solução é dada em função dos parâmetros apresentados e requer dois passos na resolução, primeiro a fatoração de um polinômio do 2º grau, segundo a substituição de um ponto dado além de utilizar o ponto médio das abscissas.

O ultimo problema da lista foi o problema motivador de ter escolhido a abordagem de parábola para fazer este trabalho e direcionarmos a sua aplicação ao ensino médio. É um problema que não é encontrado no ensino médio, mas que pode ser facilmente trabalhado no ensino médio, desde que, seja feito um embasamento teórico, que dê suporte para a transmissão por parte dos docentes e clareza no entendimento por parte dos discentes, é um problema que exige um amadurecimento teórico maior que os sete anteriores e uma boa utilização do Referencial Teórico para chegar a solução.

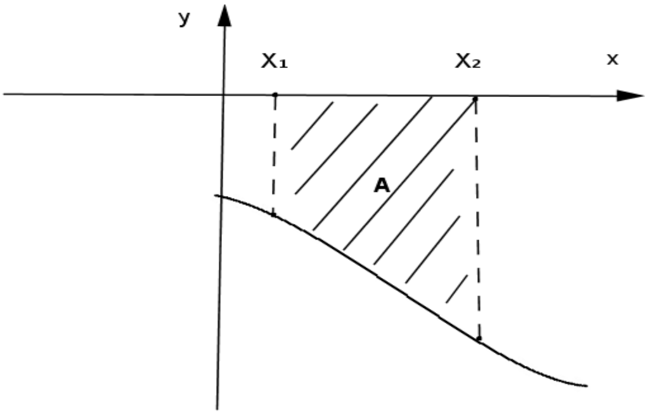
3.1 Física “Área sob a curva”

Figura 30: Área sob a curva



Fonte: Autor, 2016.

Figura 31: Área sobre a curva



Fonte: Autor, 2016.

No plano coordenado, chama-se "área sob a curva" a região compreendida entre a curva da função e o eixo das abscissas. Na figura 30, a "área sob a curva" está compreendida entre a curva e as coordenadas x_1 e x_2 do eixo das abscissas. (na figura 31, temos a "área sobre a curva"). Essa área é calculada da mesma forma que a área da figura plana correspondente, mas tem significado diferente, por isso sempre nos referimos a ela entre aspas. Assim a "área sob a curva" do gráfico da velocidade x tempo é um triângulo, mas não tem a dimensão de superfície:

$$comprimento \cdot comprimento = comprimento^2$$

A dimensão da "área sob a curva" é igual a dimensão do produto das grandezas representadas nos eixos cartesianos. No gráfico velocidade x tempo, é igual a dimensão de velocidade ($comprimento \div tempo$) multiplicada pela dimensão do tempo, resultando na dimensão de comprimento, pois:

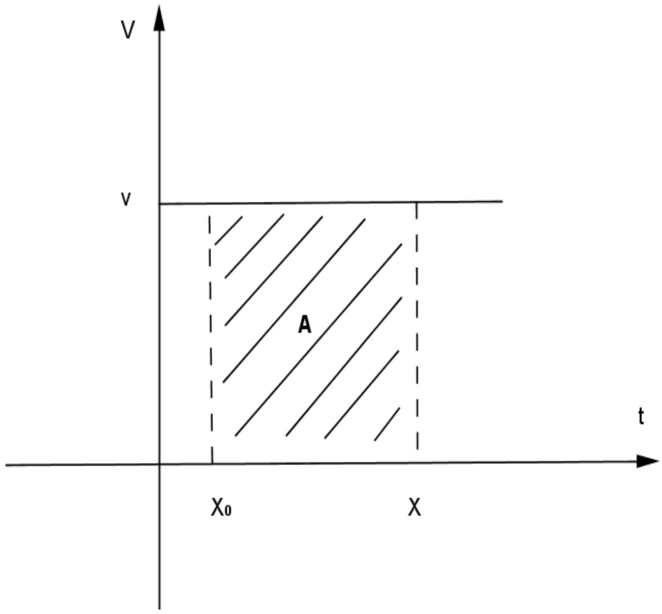
$$\frac{comprimento \cdot tempo}{tempo} = comprimento\,.$$

<u>Proposição</u>

No gráfico $velocidade \times tempo$ (figuras 32 e 33) a "área sob a curva" é igual a Δx, isto é, $A = \Delta x = x - x_0$.

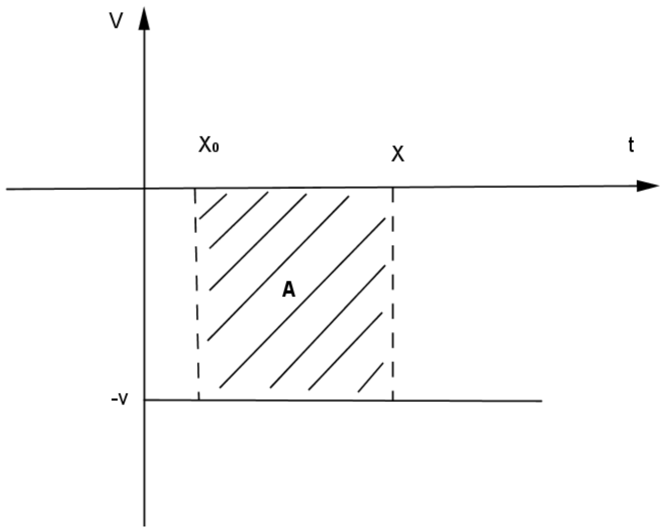
<u>Demonstração:</u>

Figura 32: Gráfico velocidade x tempo



Fonte: Autor, 2016.

Figura 33: Gráfico da velocidade x tempo



Fonte: Autor, 2016.

No gráfico $velocidade \times tempo$, a "área sob a curva" correspondente a um intervalo de tempo Δt é igual ao módulo do deslocamento do ponto material nesse intervalo de tempo.

Das expressões:

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 (I) \\ v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0} (II). \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ x - x_0 = v\left(t - t_0\right) \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda equação, temos que:

$$\Delta x = v\left(t - t_0\right)(III)$$

Verificando que a "área sob a curva" das figuras acima são retângulos, portanto: $A = v\left(t - t_0\right)\left(IV\right)$

De (III) e (IV), concluímos que:

$$\Delta x = A$$

Outra maneira de enunciar a proposição anterior seria:

O deslocamento no intervalo de tempo Δt, aqui representado por Δx, é igual a "área sob a curva" do gráfico $velocidade \times tempo$ nesse mesmo intervalo de tempo.

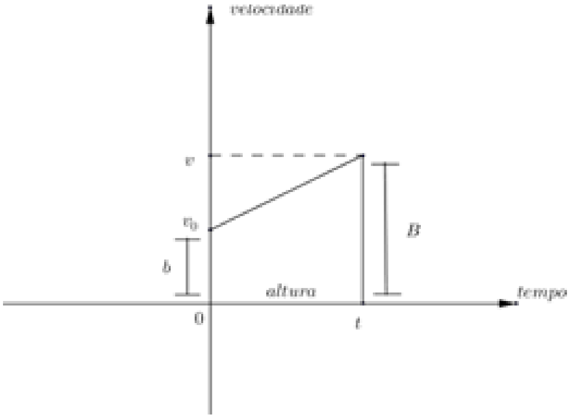
3.2 Gráfico de uma função do 2º grau

No gráfico de uma função do 2º grau, colocamos a posição (x) no eixo das ordenadas e o tempo (t) no eixo das abscissas. Assim, os pontos em que a curva corta o eixo das abscissas (raízes da função) representam, na descrição do movimento, os instantes t em que o ponto material passa pela origem $(x = 0)$. Os pontos de ordenada máxima $(x_{máx})$ ou mínima (x_{mix}) representam os instantes t em que o ponto material está mais distante ou mais próximo da origem.

3.3 Função da posição do *MRUV*

Para obter a função da posição em relação ao tempo, vamos recorrer ao gráfico da $velocidade \times tempo$, figura 34. Sabemos que $\Delta x = A$, onde A é a área do trapézio, cuja base maior é v, a base menor é v_0 e a altura é t.

Figura 34: Velocidade x tempo



Fonte: Autor, 2016.

Como a área do trapézio é,

$$A_t = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

o deslocamento Δx pode ser obtido pela expressão:

$$\Delta x = \frac{(v+v_0)\cdot t}{2} (I) .$$

Sendo,

$$\Delta x = x - x_0$$

e

$$v = v_0 + at ,$$

substituindo em (I) obtemos:

$$x - x_0 = \frac{(v_0 + at + v_0)\cdot t}{2}$$

$$x - x_0 = \frac{(2v_0 + at)\cdot t}{2}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} (III)$$

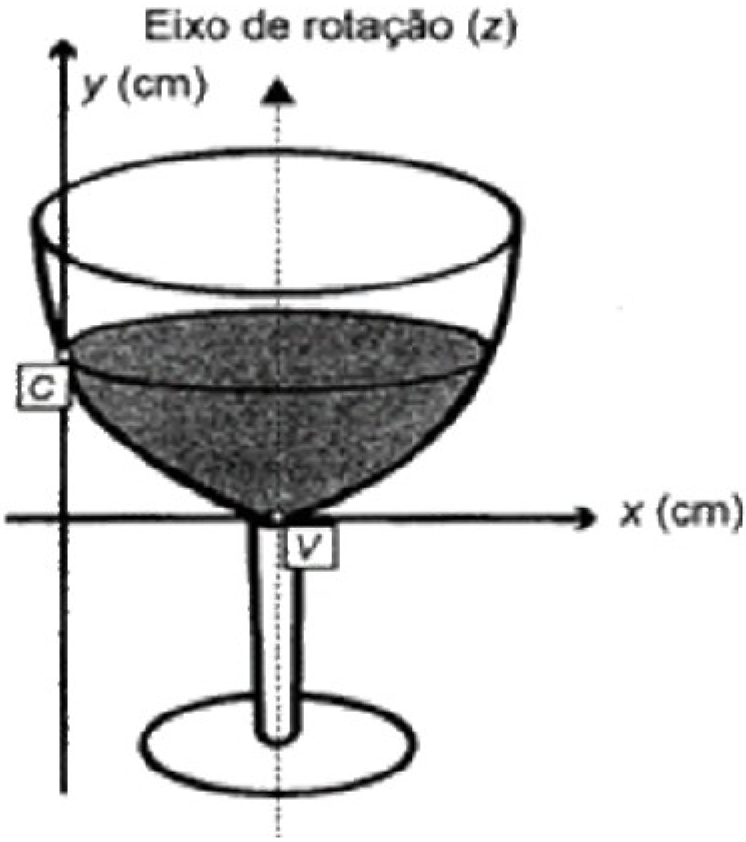
A expressão (II) é a função da posição x em relação ao tempo t do ponto material em $MRUV$, isto é, uma função quadrática $y = at^2 + bt + c$, onde

$$y = x, a = \frac{1}{2}a, b = v_0 \ e \ c = x_0.$$

3.4 Problemas

1. **(ENEM 2013)** A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura 25.

Figura 35: rotação de uma parábola em torno do eixo Z



Fonte: ENEM, 2013.

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C,$$

onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo X. Nessas condições, qual é a altura do líquido contido na taça em centímetros?

SOLUÇÃO:

Nesta função temos:

$$a = \frac{3}{2} \ e \ b = -6$$

Sabemos que o x do vértice dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Daí,

$$x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot \frac{3}{2}}$$

$$x_v = 2$$

Por outro lado, sabemos que :

$$f(x_v) = 0,$$

isto é,

$$\frac{3}{2}x_v^2 - 6x_v + C = 0$$

$$\frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + C = 0$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4 - 12 + C = 0$$

$$-6 + C = 0$$

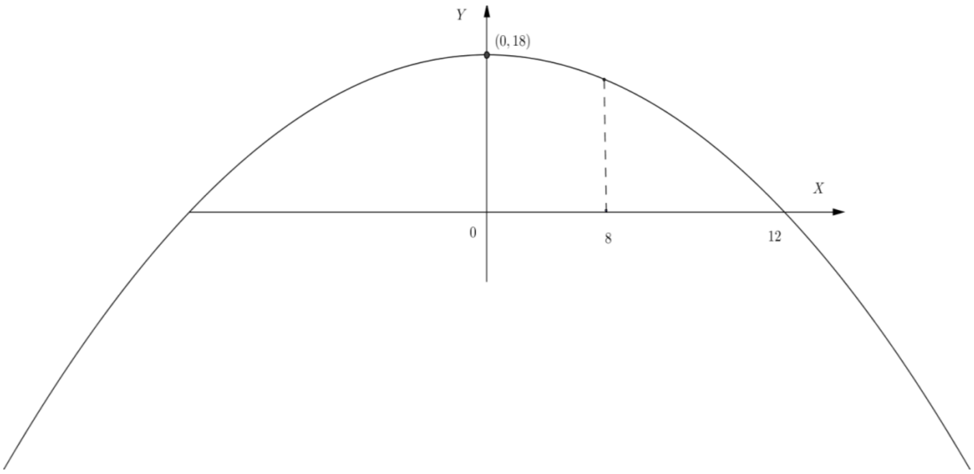
$$C = 6$$

□

2. Seja c um arco parabólico (figura 36), quem tem 18 metros de altura e 24 metros de base. Encontre a altura de um ponto de c situado a 8 metros da reta focal de c.

SOLUÇÃO:

Figura 36: Arco parabólico



Fonte: Autor, 2016.

Segundo as equações estudadas e o desenho acima a parábola tem equação do tipo $(x-x_0)^2=-4p(y-y_0)$.

Como $V=(0,18)$ e o ponto $(12,0)$ pertence a ela, então:

$$(12-0)^2=-4(y-y_0)$$

$$144=72p$$

$$4p=8.$$

Logo, a equação é,

$$x^2=-8(y-18)$$

Para $x=8$, vem:

$$8^2=-8(y-18)$$

$$64=-8y+144$$

$$8y=144-64$$

$$8y = 80$$

$$y = \frac{80}{8}$$

$$y = 10$$

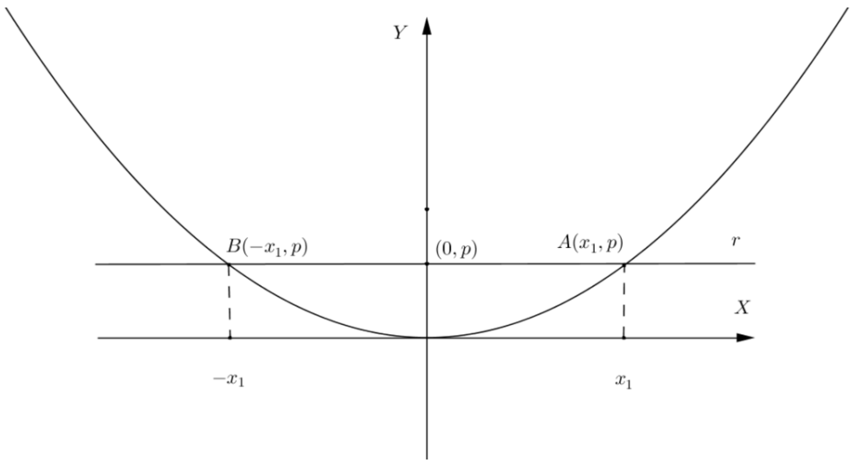
Portanto a altura de um ponto de *c* situado a 8 metros da reta focal de é 10 m.

3. O *latus rectum* de uma parábola $\wp$ é o comprimento da corda de $\wp$ perpendicular a reta focal que passa pelo foco da parábola. Mostre que o *latus rectum* de uma parábola é igual ao dobro do parâmetro de $\wp$.

   SOLUÇÃO:

   Considerando a seguinte figura 37, ilustrativa:

Figura 37: Parábola com *latus rectum*



Fonte: Autor, 2016.

Como a forma canônica da parábola $\wp$ representada na figura é $x^2 = 4py$ e como $A \in \wp$, temos:

$$x^2 = 4py,$$

substituindo A obtemos,

$$x_1^2 = 4p \cdot p$$

$$x_1^2 = 4p^2$$

$$x_1 = 2p.$$

Seja L_r o *latus rectum*, logo

$$\begin{aligned} L_r &= d(A,B) \\ &= \sqrt{[x_1 - (-x_1)]^2 + (p-p)^2} \\ &= \sqrt{4x_1^2 + 0^2} \end{aligned}$$

Como $x_1 = 2p$, então

$$\begin{aligned} L_r &= \sqrt{4 \cdot 4p^2} \\ &= \sqrt{16p^2} \\ &= 4p, \end{aligned}$$

isto é,

$$2 \cdot 2p = 4p = L_r$$

$\square$

4. A reta tangente de uma parábola $\wp$ num ponto $p \in \wp$ é a única reta, não paralela à reta focal l, que intersecta a parábola apenas no ponto P. O ponto P é chamado ponto de tangência da reta com $\wp$. Mostre que a reta tangente à parábola $\wp : y^2 = 4px$, $P \neq 0$, no ponto $P = (x_0, y_0) \in \wp$ é a reta $r : y_0 x - 2x_0 y = -x_0 y_0$, se $x_0 \neq 0$, e é a reta $r : x = 0$, se $x_0 = 0$.

SOLUÇÃO:

A parábola passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$. Então, achando o valor de P.

$$y_0^2 = 4px_0.$$

- Para $x_0 \neq 0$, temos:

$$P = \frac{y_0^2}{4x_0}$$

Então substituindo o valor de p na equação da parábola, temos:

$$y^2 = 4 \cdot \frac{y_0^2}{4x_0} \cdot x$$

$$y^2 = \frac{y_0^2}{x_0} \cdot x$$

Insolando x segue que,

$$x = \frac{y^2 x_0}{y_0^2}$$

A equação da reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0)$ é:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

com $m \in \mathbb{R}$, assim

$$\frac{y - y_0}{m} + x_0 = x.$$

Os pontos em comum entre a reta e parábola são dados pelo sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 x_0}{y_0^2} = x \\ \dfrac{y - y_0}{m} + x_0 = x \end{cases}$$

Igualando as duas equações temos,

$$\frac{y^2 x_0}{y_0^2} = \frac{y - y_0}{m} + x_0$$

colocando todos os termos no primeiro membro temos a equação do segundo grau

$$\frac{x_0}{y_0^2} \cdot y^2 - \frac{1}{m} y + \frac{y_0}{m} - x_0 = 0$$

Então:

$$\Delta = \frac{1}{m^2} - 4 \cdot \frac{x_0}{y_0^2} \cdot \left(\frac{y_0}{m} - x_0 \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{m^2} - \frac{4x_0}{y_0 m} + \frac{4x_0^2}{y_0^2}$$

Para que a reta seja tangente devemos ter $\Delta = 0$, então:

$$\frac{1}{m^2}-\frac{4x_0}{y_0 m}+\frac{4x_0^2}{y_0^2}=0$$

$$1-\frac{4x_0}{y_0}m+\frac{4x_0^2}{y_0^2}m^2=0$$

Fatorando o trinômio, temos:

$$\left(1-\frac{2x_0}{y_0}m\right)^2=0.$$

Calculando o valor de m,

$$\left(1-\frac{2x_0}{y_0}m\right)=0.$$

$$\frac{2x_0}{y_0}m=1$$

$$m=\frac{y_0}{2x_0}$$

Logo, a reta tangente é:

$$y-y_0=m\left(x-x_0\right),$$

substituindo m, temos:

$$y-y_0=\frac{y_0}{2x_0}\left(x-x_0\right)$$

daí,

$$2x_0y-2x_0y_0=y_0x-x_0y_0$$

$$r: y_0x-2x_0y=-x_0y_0,$$

Se $x_0 \neq 0$

- Para $x_0=0$, temos:

$$y_0^2=4px_0$$

logo,

$$y_0=0,$$

Com $p \neq 0$.

Seja r a reta que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0) = (0,0)$.

Então $\exists n \in \square$ tal que:

$$r : x - x_0 = n(y - y_0)$$

$$r : x = ny.$$

Pontos em comum a reta $r : x = ny$ e a parábola $\mathbb{P} : y^2 = 4px$ é dados pelo sistema:

$$\begin{cases} y^2 = 4px \\ x = ny \end{cases}$$

Daí,

$$x^2 = n^2 y^2$$

Substituindo y^2 por $4px$ segue que,

$$x^2 = n^2 4px$$

$$x^2 - n^2 4px = 0,$$

Calculando, Δ e fazendo igual a zero para que a reta seja tangente a parábola, temos:

$$\Delta = n^2 \cdot 16p^2 = 0,$$

como $p \neq 0$, então

$$\Delta = 0$$

$$n^2 = 0$$

$$n = 0$$

$$r : x = 0$$

□

5. A função da posição de um $MRUV$, no SI, é $x = 10 + 2t + 2t^2$. Determine:
   a) Posição inicial (x_0), a velocidade inicial (y_0) e a aceleração;

   SOLUÇÃO:

   Temos que a equação do $MRUV$ é:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Como a equação da foi $x = 10 + 2t + 2t^2$, então:

- $x_0 = 10m$

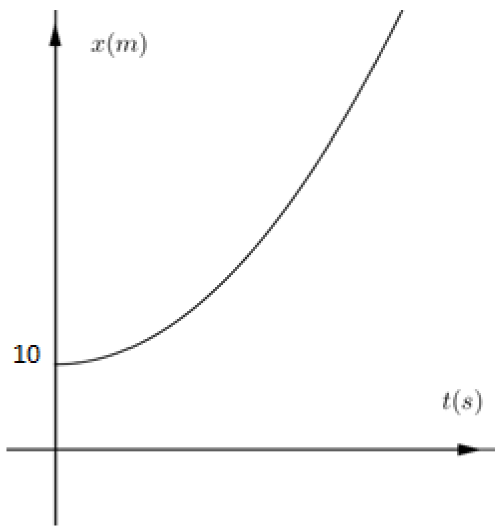
- $v_0 2m / s$

- $\frac{1}{2} a = 2$

$a = 4m / s^2$

b) O gráfico da $posição \times tempo$, figura 38.

Figura 38: gráfico posição x tempo



Fonte: Autor, 2016.

6. Um móvel percorre uma reta no sentido positivo do eixo com aceleração constante. No instante $t_0 = 0$ ele passa pela origem com velocidade $v_0 = 40m / s$; no instante $t = 4s$ ele está com velocidade $v = 8m / s$. Determine a aceleração;

   SOLUÇÃO:

   Sendo $v_0 = 40m / s$ para $t_0 = 0$ e $v = 8m / s$ para $t = 4s$, temos:

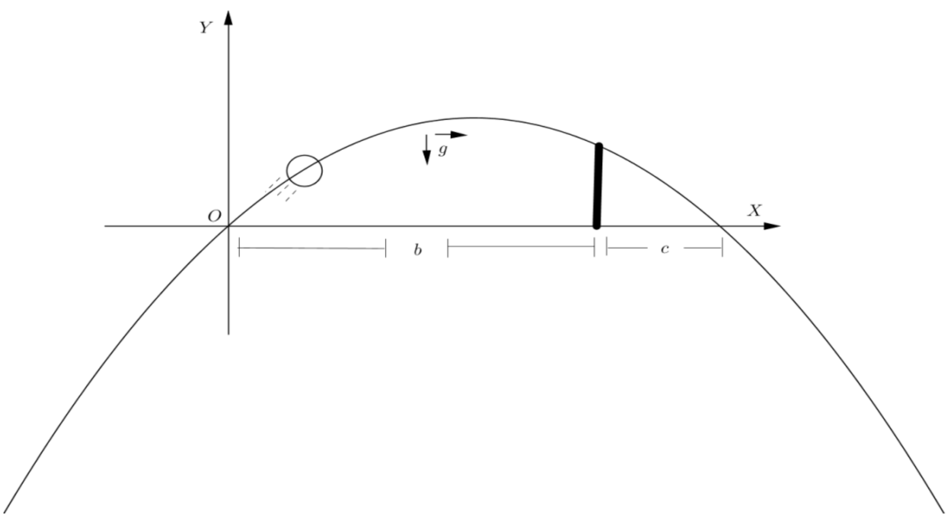
$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$a = \frac{8 - 40}{4 - 0}$$

$$a = -8m / s^2$$

7. Uma bola é lançada, como mostra a (figura 39) e passa pela quina de um muro de altura h. Encontre a altura máxima em função dos parâmetros dados.

Figura 39: Bola lançada com trajeto parabólico



Fonte: Autor, 2016.

SOLUÇÃO:

Adotando-se o sistema OXY como referencial, então, $x' = 0$ e $x'' = b + c$ são as raízes de numa equação parabólica. Toda função do segundo grau pode ser escrita como:

$$y = a(x - x')(x - x''),$$

onde x' e x'' são as raízes da equação $a(x - x')(x - x'') = 0$.

Colocando-se as raízes na equação dada, tem-se:

$$y = a(x - 0)(x - (b + c))$$

$$y = a \cdot x \cdot (x - (b + c))$$

Colocando-se o ponto (b,h) na equação anterior se chega ao valor de a.

$$h = a \cdot b \cdot (b - b - c)$$

$$h = a \cdot (b \cdot (-c)).$$

Daí,

$$a = -\frac{h}{bc}$$

Substituindo o valor de a na equação

$$y = a \cdot x \cdot (x - (b + c)),$$

obtemos:

$$y = -\frac{h}{bc} \cdot x \cdot (x - (b + c))$$

Escolhendo o ponto médio das abscissas fará com que achemos o maior valor das alturas, assim:

$$\left(\frac{b+c}{2}, H\right),$$

logo,

$$H = -\frac{h}{bc} \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{b+c}{2}\right) - (b+c)\right]$$

$$H = -\frac{h}{bc} \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right) \cdot \left[(-1)\left(\frac{b+c}{2}\right)\right]$$

$$H = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{h}{bc} \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{h}{bc} \cdot \frac{(b+c)^2}{4}$$

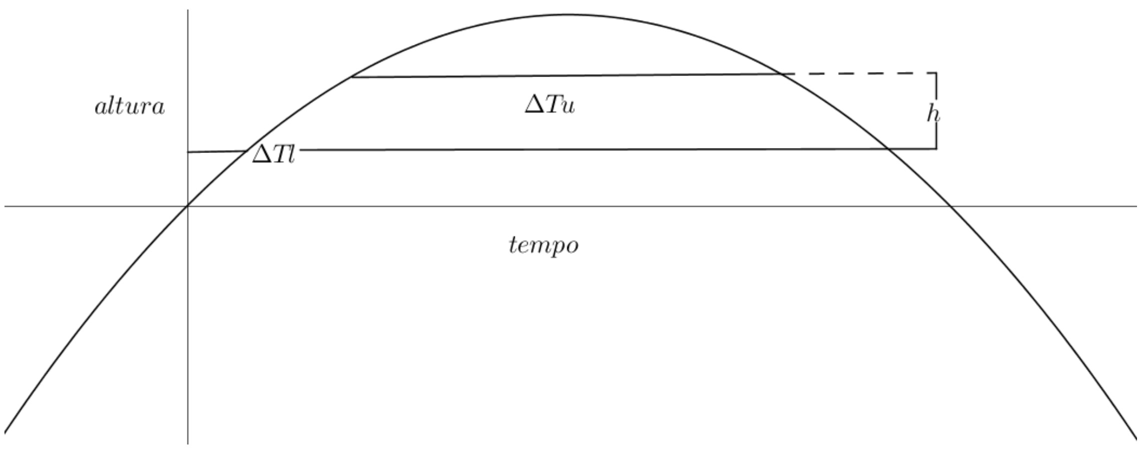
$$H = \frac{(b+c)^2}{4bc} \cdot h$$

$\square$

8. No laboratório Nacional de Física na Inglaterra, uma medida da aceleração de queda livre g foi feita lançando-se uma bola de vidro para cima em um tubo evacuado e deixando-se retornar. Seja Δt_L na figura 40, o intervalo de tempo entre duas passagens da bola através de certo nível inferior, Δt_U o intervalo de tempo entre duas passagens por um nível superior e Δt_U a distância entre os dois níveis. Mostre que,

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$

Figura 40: Arco parabólico com dois níveis

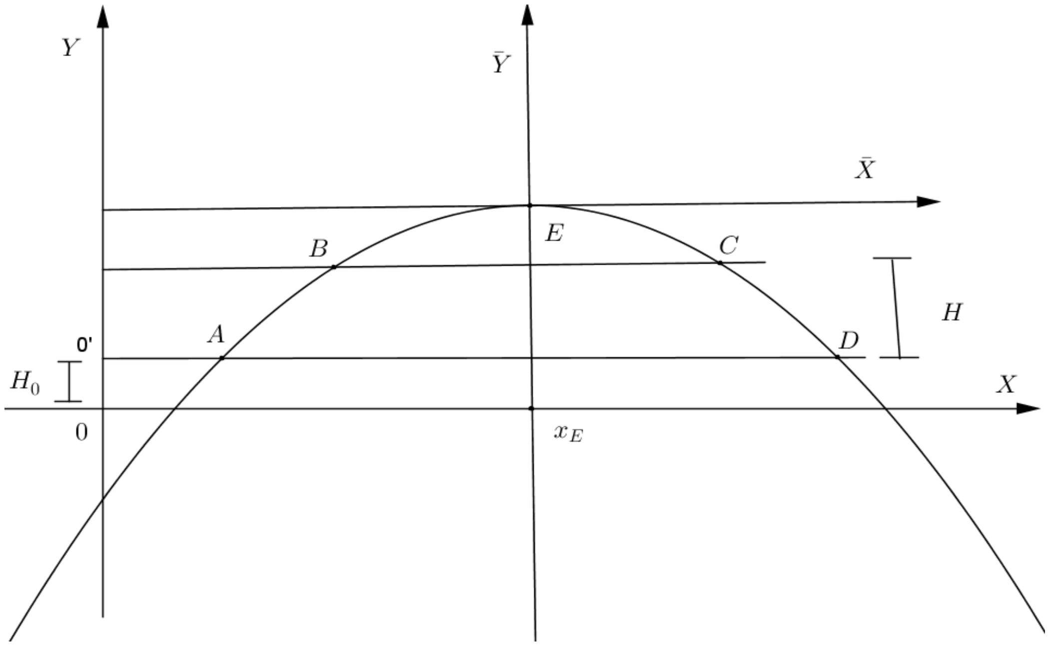


Fonte: Autor, 2016.

SOLUÇÃO:

Colocando a origem no ponto E (translação dos eixos) (figura 41), teremos as seguintes novas coordenadas:

Figura 41: Transladando a origem do sistema



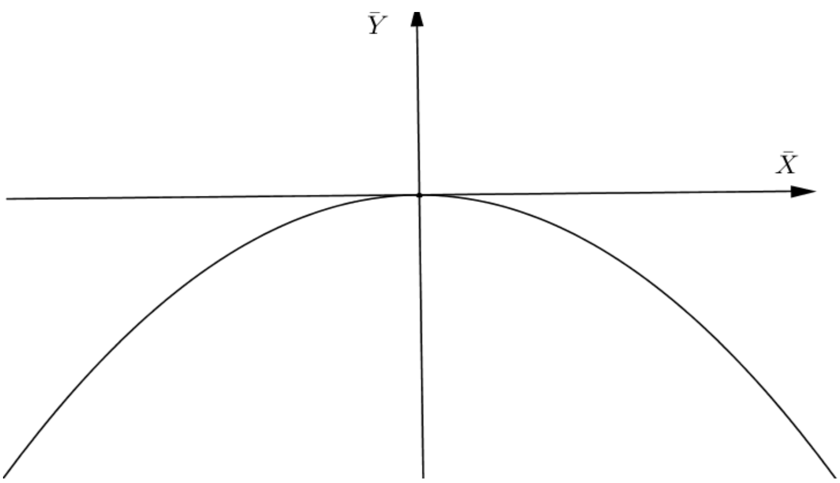
Fonte: Autor, 2016.

Da translação dos eixos coordenados temos:

$$\begin{cases} x = x_E + \overline{x} \\ y = y_E + \overline{y}. \end{cases}$$

Agora temos o seguinte gráfico (parábola) (figura 42),

Figura 42: Parábola no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$



Fonte: Autor, 2016.

cuja a função é dada por:

$$y = -k\overline{x}^2 \text{, com } k \in \mathbb{R} .$$

Então:

$$y - y_E = -k\left(x - x_E\right)^2 . \left(I\right)$$

Do ponto O' ao ponto E $\left(FÍSICA\right)$ temos um $\left(MRUV\right)$ com movimento contrário a aceleração g. Então, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} y_E = y_0 + v_0 x_E - \dfrac{gx^2}{2}(1) \\ v_{y_E} = v_{0_y} - gx_E\left(2\right) \end{cases}$$

No ponto de máximo temos que:

$$v_{y_E} = 0$$

Logo, de (2)

$$v_{0_y} - gx_E = 0$$

$$v_{0_y} = gx_E .$$

Substituindo em (1), segue que:

$$y_E = y_{0'} + gx_E^2 - \frac{gx_E^2}{2}$$

$$y_E - y_{0'} = \frac{gx_E^2}{2}$$

$$y_{0'} - y_E = -\frac{gx_E^2}{2}\left(II\right).$$

Fazendo a substituição das coordenadas de O' na equação $\left(I\right)$, temos:

$$y_{0'} - y_E = -k\left(x_{0'} - x_E\right)^2 .$$

Como $x_{0'} = 0$. Então:

$$y_{0'} - y_E = -kx_E^2\left(III\right).$$

Comparando (II) e (III), vemos que

$$-\frac{gx_E^2}{2} = -kx_E^2$$

$$k = \frac{g}{2}$$

Voltando a Matemática:

$$y - y_E = -\frac{g}{2}(x - x_E)^2 \,(IV)$$

Antes de prosseguimos, destacamos que o eixo $\overline{Y}$ é o eixo de simetria da parábola, e como $y_A = y_D$ e $y_B = y_C$, então:

$$\begin{cases} y_D - y_A = \Delta t_L = 2(x_E - x_A) \\ y_C - y_B = \Delta t_U = 2(x_E - x_B). \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} x_E - x_A = \dfrac{\Delta t_L}{2} \\ x_E - x_C = \dfrac{\Delta t_U}{2} \end{cases} (V).$$

Substituindo os pontos A e C, na equação (IV) temos:

$$\begin{cases} y_A - y_E = -\dfrac{g}{2}(x_A - x_E)^2 \\ y_C - y_E = -\dfrac{g}{2}(x_C - x_E)^2. \end{cases} -\uparrow$$

Subtraindo a primeira equação da segunda equação do sistema anterior, temos:

$$y_C - y_A = -\frac{g}{2}\left[(x_C - x_E)^2 - (x_A - x_E)^2\right](VI)$$

Substituindo (V) em (VI), temos:

$$H = y_C - y_A = -\frac{g}{2}\left[\left(\frac{\Delta t_U}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta t_L}{2}\right)^2\right]$$

$$H = -\frac{g}{2}\left[\frac{\Delta t_U^2}{4} - \frac{\Delta t_L^2}{4}\right]$$

$$8H = -g\left(\Delta t_U^2 - \Delta t_L^2\right)$$

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$

$\square$

3.5 Plano de Aula

Nesta seção apresentamos uma proposta de plano de aula, onde imaginamos que para uma boa execução do trabalho aqui apresentado serão necessárias cinco aulas de 50 minutos cada sendo divididas em duas aulas de Física e três aulas de Matemática.

Convém ressaltar que as informações que estão grifadas em fundo amarelo no quadro resumo do plano de aula devem ser alteradas, por quem pretende usar esse trabalho, pois representa informações genéricas.

Tabela 3: Proposta de plano de aula

I. Plano de Aula: Data: xy/xz/2016
II. *Dados de Identificação*: Escola: Momorrenga. Professor (a): Nefelibata Disciplina: Matemática Ano: 1º
III. *Tema:* Parábola e suas aplicações no ensino médio
IV. Objetivos. • **Objetivo geral**: Nesta aula tem-se como pretensão possibilitar aos alunos: Reconhecer e ampliar os conhecimentos sobre Geometria Analítica: Parábola. • **Objetivos específicos**: Identificar Parábola, bem como diferenciar e classificar seus elementos (vértice, reta focal, foco, diretriz e parâmetro); Resolver situações-problemas que envolvam o estudo de parábola e suas propriedades.
V. *Desenvolvimento do tema*: Aula expositiva e dialogada. Iniciaremos com uma breve observação em fotografias e do meio em que vivemos, onde será dada ênfase e feitas conjecturas a respeito do tema estudado. Passaremos a uma introdução histórica do conceito de parábola. Identificaremos e caracterizaremos as

propriedades de parábola. Faremos a sugestão de uma pesquisa sobre o uso de parábola em instrumentos do nosso cotidiano, como por exemplo (faróis de automóveis, antenas parabólicas, etc.). Concluiremos resolvendo alguns exercícios-problemas sobre parábolas.
VII. ***Recursos didáticos:*** Quadro branco, material de estudo, giz, apagador, etc. Fontes histórico-escolares (fotos, gravuras, etc.) e observação do meio.
VIII. ***Avaliação:*** pode ser realizada com diferentes propósitos (diagnóstica, formativa e somativa). Discriminar, com base nos objetivos estabelecidos para a aula: ***- atividades*** (ex: respostas às perguntas-problema ao final da aula, discussão de roteiro, compreensão de gravuras, trabalho com documentos, etc.)

A ideia de apresentar esta proposta de trabalho para primeira serie do ensino médio é que o conteúdo referente à parábola geralmente são estudados na terceira série do ensino médio, ano em que os alunos estão mais focados no exame do ENEM e menos interessados em aplicações reais, como tal conteúdo é pouco cobrado nesses exames, o referido conteúdo passa sem nenhuma relevância para os discentes que perdem a oportunidade de conhecer inúmeras aplicações praticas de parábola.

Levando em consideração o que foi exposto neste trabalho se faz necessário que o conteúdo de parábola seja aplicado na primeira serie do ensino médio em conjunto com os professores de Física e de Matemática.

Ao professor de Física serão dedicadas duas aulas, espera-se que em uma aula ele faça a introdução de alguns conceitos básicos de Física e em outra aula associe o estudo de parábola a aplicações de tais conceitos.

Já ao professor de Matemática que fara todo embasamento teórico serão dedicadas três aulas, pretende-se que na primeira aula ele faça observações, cite fatos históricos a respeito de parábola, analise fotos e proponha algumas conjecturas para que possa mostrar aplicações reais do conteúdo de parábola.

A partir da segunda aula o professor deverá formalizar conceito de parábola, começando mostrando que a parábola é uma curva obtida através da intersecção da superfície de um cone com um plano paralelo a uma de suas geratrizes, fazendo definições, enunciando e demonstrando teoremas, demonstrando proposições, deduzindo as formas canônicas da parábola e no final da terceira aula resolvendo uma lista de problemas variados envolvendo diversas propriedades da parábola com grau de dificuldade crescente.

É claro que este plano de aula pode ser modificado a critério de cada um que pretende usar este material como referencia, assim como o próprio material poderá ser modificado, retirando-se ilustrações e acrescentando outras para se adaptar aos objetivos das aulas e as realidades dos discentes.

4. CONCLUSÃO

Procurou-se fazer a exposição deste trabalho, de maneira simples e atrativa, levando sempre em consideração o âmbito que em vivemos, sejam observando coisas naturais como à arcada dentaria e a erupção de lavas vulcânicas, ou artificiais construídas e modificadas pelo homem em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, óptica e em especial na Física. É um trabalho que no inicio do seu desenrolo começa com ideias intuitivas de parábolas apresentadas através de fotos ilustrativas que farão o elo entre foco visual e a teoria de parábola, foi aproveitado o ensejo das ilustrações fotográficas para indicar possíveis aplicações de parábola a beneficio da humanidade e pensado constantemente que na explanação do Referencial Teórico faça sentido para os discentes depois dessas aferições visuais e dê confiança a que vai transmiti-lo.

Diante de uma enorme variedade de aplicações de parábolas, limitou-se a exposição de uma quantidade restrita neste trabalho, mas que possibilitou uma ideia natural de onde encontrar e aplicar o conteúdo de parábola, fazendo assim amplo sentido, a introdução de todo Referencial Teórico apresentado. Para a explanação do Referencial Teórico, imagina que se conheça um pouco de Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Analítica e conhecimento de álgebra elementar do ensino médio, estudado normalmente no primeiro e segundo ano do ensino médio, já que esse trabalho deve ser usado no primeiro ano do ensino médio. Foi considerada situações problemas possíveis de serem contextualizadas para construir melhor conhecimento com base na realidade concreta. Acredita-se que usando esta metodologia pode vir a se tornar mais interessante e motivador para observar melhores conhecimentos em relação ao tema.

Contudo, pode-se observa que foi dada ênfase a uma maneira diferente de expor o conteúdo, daquelas que consiste basicamente em memorizar conteúdos propostos e utilizá-los de forma mecânica, não permitindo que se desenvolvam habilidades necessárias a autonomia dos discentes. Vale salientar ainda, que as ilustrações e exemplos feitos, com exceção da figura 22, são de fáceis visualizações no cotidiano e de aplicações benéficas para vida humana.

Como as parábolas constituem um campo riquíssimo de aplicações que se estendem pelas mais diversas áreas do conhecimento, fica aqui o desejo retumbante a quem pretende usar esta obra de fazer as adaptações necessárias com novos exemplos e aplicações cabíveis de acordo com o escopo que se quer alcançar ou até mesmo fazer aprofundamentos para estudos mais relevantes.

Portanto, levando em consideração o que foi abordado neste trabalho, pretende-se que o professor não deva medir esforços e aceitar o desafio de procurar aplicações do conteúdo de parábola no ensino médio, assim como desenvolver atividades que os envolvam, para que se possa despertar o interesse dos alunos, fácil entendimento dos conteúdos abordados e aumentar a participação durante as aulas de matemática, sanando a maioria das dificuldades encontradas atualmente ao lecionar o conteúdo de parábola. Pretende-se com isso mostrar que quando se apresenta aplicações do conteúdo matemático trabalhado e quando são desenvolvidas atividades relacionadas a ele, a sua assimilação torna-se muito mais rápida e significativa para os alunos.

Vale salientar, com mencionado na seção 1.2 que para a realização do presente trabalho de conclusão de curso foi necessário restringira área de estudo e quais aplicações seriam trabalhadas, não obstante permanece o desejo de que outros autores explorem e desenvolvam aplicações para o que não foi abordado nesse trabalho

REFERÊNCIAS

[1] PAIVA, Manoel. Matemática. Vol. Ú. São Paulo. Editora Moderna, 1999.p. 378-380.

[2] SILVA, Geni shulz. Por que os nomes elipse, parábola e hipérbole. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf. Acesso em: 23 mai. 2016.

[3] EDUARDO, W**.** Por que as antenas são parabólicas. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 33, p. 10-15. Quadrimestral. 1997.. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf. Acesso em: 24 mai. 2016.

[4] MACHADO, M. T. G. Trabalhos da Professora Mirtes: PARÁBOLAS - AS CURVAS PRECIOSAS, disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_mirtes_tamy_gomes_machado.pdf e visitado em: 24 mai. 2016.

[5] NORTHO, Instituto. Arcada dentaria. Disponível em: www.northo.com.br/dicas.php, visitado em: 23 mai. 2016.

[6] EDUCAR, Redação. Educar para crescer. Disponível em: http://educarparacrescer.abril.com.br/indicadores/pisa-299330.shtml e visitado em: 26 mai. 2016.

[7] MATRÍCULAS EM CURSOS DE GRADUAÇÃOC POR MODALIDADE DE ENSINO SEGUNDO O GRAU ACADÊMICO – Brasil 2011/2012. Fonte: MEC/INEP. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=14153-coletiva-censo-superior-2012&Itemid=30192. Acesso em: 23 mai. 2016.

[8] DADOS DO CENSO DA EDUCAÇÃO SUPERIOR 2012. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=14153-coletiva-censo-superior-2012&Itemid=30192). Acesso em: 23 mai. 2016.

[9] CARVALHO, João Bosco Pitombeira e ROQUE, Tatiane. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro: 1ª edição, 2012.

[10] RANKING, Programa Internacional de Avaliação do Estudante 2012. Disponível em: https://www.google.com/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=pisa%202012%20ranking.

[11] Sistema de Avaliação da Educação Básica, 2012. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/2012/Saeb_2011_primeiros_resultados_site_Inep.pdf.

[12] LIMA, Elon Lages, 2001. Exames de Textos.

[13] MEC/INEP. (Ministério da Educação e Cultura/ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira).

[14] SBM, 28 de Novembro de 2014. Disponível em: http://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Ensino_Meio_FINAL.pdf.

[15] BARBIERI, A. F.; SODRE, U. Aplicações práticas das parábolas. Antenas parabólicas. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq2g/quadratica.htm>. Acesso em: 07 jun. 2016.
[16] GARBI, G. G. A Rainha das Ciências*:* Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 1. ed. São Paulo. Livraria da Física, 2006. p. 80-81.
[17] LUZ, A. M. R; ALVES, B. A. Física. De olho no mundo do trabalho. 1. ed. São Paulo. Scipione, 2005. p. 283-284.
[18] MARQUES, J. De Pedra e Cal. Akashi Kaikyo - A rainha das pontes suspensas. Disponível em: <http://www.depedraecal.blogspot.com/>. Acesso em: 27 mai. 2016.
[19] MATOS, T. S. Programa para análise de superestruturas de pontes de concreto armado e protendido. p. 35. Dissertação de Mestrado em Ciências Sociais – UFRJ, Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/teses/mestrado/estruturas/2001/teses/MATTOS_TS_M_01_t_M_est.pdf>. Acesso em: 27 mai. 2016.
[20] SATO, J. As Cônicas e suas Aplicações: A construção da parábola pelo método da dobradura. p. 32. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/curso_ConicasAplicações.pdf>. Acesso em: 24 mai. 2016.
[21] Forno solar Odeillo, França. Disponível em: <http:www.mdig.com.br/?itemeid=3922>. Acesso em: 30 mai. 2016.
[22] Galeria de Fotos do Guia Floripa. Disponível em: <http://www.guiafloripa.com.br/galeriadefotos/publicacao/index3.php?idtipo=12&idelemento=45>. Acesso em: 30 mai. 2016.
[23] GASPAR, Alberto. Física, mecânica volume 1, editora ática, 1ª edição 4ª impressão, 2003.
[24] GENTIL, Nelson; SANTOS, CARLOS Alberto Marcondes; GRECO, Antônio Carlos e GRECO, Sérgio Emílio. Matemática para o 2º grau, volume 3, editora ática, 1996.
[25] BOYER, Carl B. História da matemática. São Paulo, Edgar Blücher/edusp, 1974.
[26] HOFFMANN, L. D. Cálculo1 – Um curso moderno e suas aplicações. Rio de janeiro, L.T.C.E., 1990.
[27] KASNER, Edward & NEWMAN, James. Matemática e imaginação. Rio de Janeiro, Zahar, 1976.
[28] MOISE, Edwin E. Cálculo, um curso universitário. São Paulo, Edusp, 1970.
[29] SIMMONS, George S. Cálculo com Geometria analítica. São Paulo, McGraw-Hill, 1987.
[30] TAHAN, Malba. As maravilhas da matemática. Rio de Janeiro, Bloch,1972.
[31] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT, Editora SBM, (2012).
[32] BARBOSA, João L. Geometria Euclidiana Plana. Editora SBM, Rio de Janeiro, (2006).
[33] LEHMANN, Charles. Geometria Analítica. Ed. Globo Livros, 8ª Edição, (1985).
[34] LIMA, Elon L. Coordenadas no Plano. Editora SBM, Rio de Janeiro, (1992).
[35] LIMA, Elon L. Coordenadas no Espaço. Editora SBM, Rio de Janeiro, (1993).
[36] LIMA, Elon L. Geometria Analítica e Álgebra Linear. Editora SBM, 2ª edição, Rio de Janeiro, (2011).
[37] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia e CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. Coleção PROFMAT, editora SBM, (2013).
[38] LIMA, Elon L; CARVALHO, Paulo C.P; WAGNER, Eduardo e MORAGADO, Augusto P. temas e problemas. Coleção do professor de Matemática. Editora SBM, 3ª edição, Rio de Janeiro, (2011).
[39] INEP/ ENEM 2013. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos. Acesso em: 17 jun. 2016.