

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA NO  
DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA.**

**Humberto Ferreira Rodas Neto**



**Maceió, Dezembro de 2016.**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

HUMBERTO FERREIRA RODAS NETO

**A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA**

MACEIÓ – AL

2016

HUMBERTO FERREIRA RODAS NETO

**A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Vânio Fragoso de Melo

MACEIÓ – AL

2016

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

R685i      Rodas, Humberto Ferreira.  
              A importância da matemática no desenvolvimento da astronomia / Humberto  
Ferreira Rodas Neto. – 2016.  
              85 f. : il.

Orientador: Vânio Fragoso de Melo  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal  
de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 80-81.  
Apêndices: f. 82-85.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Astronomia – Ensino e aprendizagem.  
I. Título.

CDU: 372:52

## Folha de Aprovação


HUMBERTO FERREIRA RODAS NETO

### A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 16 de dezembro de 2016.

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr Vânio Frágoso de Melo - UFAL (Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos- UFAL

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr Vicente Francisco de Souza Neto - UNICAP

*Dedico este trabalho a Deus e a minha família, em especial minha esposa Emanuelle pela parceria de sempre, meus filhos Arthur e Pedro que são meus maiores presentes, minha mãe Rita e meu pai Cosme (in memorian).*

## **Agradecimentos**

Agradeço inicialmente a Deus que é o centro de minha vida, por me proporcionar e me capacitar para este momento, sobretudo em um estado que possui altíssimos índices de analfabetismos.

Agradeço a minha esposa Emanuelle por todos os incentivos, palavras de apoio e compreensão, ao meu filho Arthur que por tantos sábados chorou ao me ver saindo para a Universidade e ao meu filho Pedro que veio para coroar o ano de 2016.

Agradeço aos meus pais Cosme (*in memorian*) e Rita, por todos os ensinamentos e investimentos na minha educação.

Agradeço aos professores do Instituto de Matemática da Universidade pelo auxílio durante todo o curso.

Agradeço aos colegas de curso que por dois anos estiveram comigo nesse desafio árduo, em especial ao amigo Newton Mesquita pela parceria durante todo o curso.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo pela atenção e zelo na elaboração desse trabalho.

“Não se conhece completamente uma ciência enquanto não se souber da sua história”.

*Augusto Comte.*



## RESUMO

Este trabalho trata da forma como a Astronomia se desenvolveu e a importância da Matemática nessa evolução. A necessidade de compreender fenômenos à sua volta, fez com que o homem primitivo se interessasse pela Astronomia. Nesse sentido, a Astronomia é frequentemente considerada como a mais antiga das ciências. Há registros que os babilônios, chineses, assírios e egípcios, por volta de 3000 a.E.C, já tratavam do tema. Estes estudos tinham objetivos práticos, tais como prever a melhor época para plantio e colheita, medir a passagem do tempo. Um dos ápices da Astronomia antiga se deu na Grécia, de 600 a.E.C a 400 d.E.C. A ideia geocêntrica, que consistia na Terra como o centro do Universo, foi dominante na sociedade nesta época. Essa ideia caiu por Terra em meados do século XVI quando o Polonês Nicolau Copérnico publicou um livro defendendo a teoria Heliocêntrica, dando início ao que seria a nova Astronomia. Kepler ao estudar as particularidades de Marte descreveu leis matemáticas para os movimentos dos planetas, bem como a percepção sobre suas órbitas elípticas, enquanto Newton propôs uma relação entre as forças de atração entre os corpos com suas massas e a distância entre eles chamada de Lei da Gravitação Universal. Nesse sentido, a Matemática foi uma das principais ferramentas para que essas teorias se firmassem. Com as descobertas sobre espaço e tempo em sua Teoria da Relatividade Restrita, Einstein propôs, em 1915, a teoria da relatividade geral que é a generalização da teoria gravitacional de Newton. Tal teoria abriu horizontes para o estudo dos céus. Nesse sentido, é de extrema importância se conhecer a parte histórica da Astronomia e o papel da Matemática nesse processo.

Palavras-chave: Astronomia. Matemáticos gregos. Astronomia nova. Einstein.

## ABSTRACT

This paper deals with the way astronomy has developed and the importance of mathematics in this evolution. The need to understand phenomena around them, made the primitive man was interested in astronomy. In that sense, astronomy is often regarded as the oldest of the sciences. There are records that the Babylonians, Chinese, Assyrians and Egyptians, around 3000 BCE, already dealt with this matter. These studies had practical goals, such as predicting the best time for planting and harvesting, measuring the passage of time. One of the summits of ancient astronomy took place in Greece in 600 BCE to 400 dEC. The geocentric idea, which consisted of the earth as the center of the universe, was dominant in society at this time. This idea fell by Earth in mid-sixteenth century when the Polish Nicolaus Copernicus published a book defending the Heliocentric theory, beginning what would be the new astronomy. Kepler to study the particularities of Mars described mathematical laws for the movements of the planets, as well as the perception of their elliptical orbits, while Newton proposed a relationship between the attractive forces between the bodies to their masses and the distance between them called the Law of Universal Gravitation. In this sense, mathematics was a major tool for these theories firmassem. With discoveries about space and time in his Theory of Relativity, Einstein proposed in 1915, the general theory of relativity which is the generalization of Newton's gravitational theory. Such a theory opened new horizons for the study of the heavens. Therefore, it is extremely important to know the historical part of the Astronomy and the role of mathematics in the process.

Keywords: astronomy. Greek mathematicians. New astronomy. Einstein.

## SUMÁRIO

|   |     |
|---|-----|
| <b>Resumo</b> .....   | vi  |
| <b>Abstract</b> .....   | vii |
| <b>Introdução</b> .....   | 1   |
| <b>1 As contribuições dos matemáticos na Astronomia</b> .....         | 4   |
| 1.1 Origem.....   | 4   |
| 1.2 Grécia antiga e a velha Astronomia.....                           | 5   |
| 1.3 O sistema Heliocêntrico e a nova Astronomia.....                  | 12  |
| <b>2 A matemática na Astronomia pré Einstein</b> .....                | 19  |
| 2.1 As primeiras distâncias envolvendo Terra e Sol e Terra e Lua..... | 19  |
| 2.2 Eratóstenes e o cálculo do diâmetro da Terra.....                 | 24  |
| 2.3 Semelhança de triângulos e a Paralaxe estelar.....                | 25  |
| 2.4 Teorema de Tales.....;  | 29  |
| 2.5 Leis de Kepler.....   | 31  |
| 2.6 Newton e a Astronomia.....  | 48  |
| <b>3 Astronomia a partir de Albert Einstein</b> .....                 | 52  |
| 3.1 Relatividade especial ou restrita.....                            | 53  |
| 3.2 A geometria da relatividade.....                                  | 57  |
| 3.3 Teoria da Relatividade Geral (TRG).....                           | 61  |
| 3.4 Astronomia após a relatividade de Einstein.....                   | 65  |
| <b>4 Considerações Finais</b> .....                                   | 70  |
| <b>5 Referências</b> .....  | 72  |
| <b>APÊNDICE A – Dados básicos em Astronomia</b> .....                 | 74  |
| <b>APÊNDICE B – Atividades para sala de aula</b> .....                | 75  |

## INTRODUÇÃO

Minha vivência como docente das disciplinas de Matemática e Física revelou a grande dificuldade dos alunos nessas áreas do conhecimento a cada avanço em sua vida escolar. Um dos pontos de maior frustração por parte dos alunos reside na geometria. Frases como "isso não entra na minha cabeça" são muito comuns nas salas de aula. Não trataremos aqui das causas do aumento na defasagem dos jovens em relação à aprendizagem, sobretudo em Matemática. Mostraremos a importância da Matemática na Astronomia e de que forma ela foi utilizada no desenvolvimento acerca do pensamento celeste.

Esta é a motivação para a elaboração deste estudo. Apresentaremos algumas situações onde a Matemática foi fundamental para o desenvolvimento da Astronomia. Veremos que a geometria, trigonometria e proporcionalidade foram fortemente utilizadas pelos astrônomos. Desta forma, temos a possibilidade de aproximar o conteúdo do cotidiano do aluno e isso é fundamental no processo ensino – aprendizagem. Nessa perspectiva

A contextualização do conteúdo traz importância ao cotidiano do aluno, mostra que aquilo que se aprende, em sala de aula, tem aplicação prática em nossas vidas. A contextualização permite ao aluno sentir que o saber não é apenas um acúmulo de conhecimentos técnico-científicos, mas sim uma ferramenta que os prepara para enfrentar o mundo, permitindo-lhe resolver situações até então desconhecidas...Isto porque o aluno vive num mundo regido pela natureza, pelas relações sociais estando exposto à informação e a vários tipos de comunicação. Portanto, o cotidiano, os ambientes físico e social devem fazer a ponte entre o que se vive e o que se aprende na escola. (Maria Edmir Maranhão, 2009).

Fala-se pouco sobre Astronomia durante a vida escolar e ela poderia ser uma boa ferramenta na inserção da geometria na educação básica. Nesse sentido, mostraremos que o envolvimento de matemáticos na construção de teorias a respeito dos fenômenos celestes foi de fundamental importância para o desenvolvimento da Astronomia. Mostraremos que a Geometria foi fortemente utilizada na Astronomia desde os gregos até a contemporaneidade.

A Astronomia está diretamente ligada ao cotidiano e, portanto, seu entendimento proporciona abrir novos horizontes no que diz respeito à compreensão do funcionamento das esferas celestes. Diante disso, faz-se importante que saibamos como se deu o processo de evolução no pensamento acerca do Universo

e quais foram os métodos utilizados por astrônomos/matemáticos nas mais diversas épocas para explicações de fenômenos da natureza.

Registros por volta de 3000 a.E.C, mostram que povos tais como babilônios e egípcios já conseguiam, por meio de observações, criar calendários. O pensamento do mundo naquela época servia apenas para fins práticos tais como prever a melhor época para plantio e colheita, rotas de navegações, entre outros. A concepção do Universo pode ser dividida em três partes.

A primeira, podemos chamar de Astronomia antiga, que fora desenvolvida quase que em sua totalidade pelos Matemáticos gregos entre 600 a.E.C e 400 a.E.C, com destaque para Aristóteles, Aristarco, Eratóstenes, Hiparco e Ptolomeu. A segunda, que fora chamada de Astronomia Nova que mudou o pensamento da humanidade sobre o movimento dos planetas dois mil anos depois dos gregos, desenvolvida, principalmente, por Copérnico, Galileu, Kepler e Newton. A terceira, pode-se dizer que teve seu início com o surgimento da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein em 1915. Tal teoria amplia conceitos da mecânica celeste de Newton na Astronomia Nova perdurando até os dias atuais. Isso nos mostra que o pensamento em relação ao movimento dos planetas sofreu diversas mudanças, fato que não é de causar estranheza visto que a Astronomia é uma ciência e como tal pode ser refutada.

Para fundamentação desse trabalho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica. Tal pesquisa mostra como o pensamento sobre o Universo mudou e a importância dos Matemáticos nesse processo. O objetivo maior deste estudo foi analisar de que forma e quais as ferramentas utilizadas pelos Matemáticos que ajudaram na construção do conhecimento em relação à Astronomia. Portanto, o trabalho foi dividido em três capítulos que seguem uma sequência lógica para que a leitura seja agradável e de fácil entendimento.

O primeiro capítulo tratará da base dos conceitos astronômicos, isto é, da suposta origem da Astronomia com os babilônios, com os gregos a chamada Astronomia antiga e com os matemáticos da renascença chamada de Astronomia nova, na sequência trataremos de algumas aplicações da Matemática na Astronomia, sobretudo na pré Einstein, onde abordaremos conceitos utilizados na explicação de fenômenos e dados celestes.

Em seguida, trataremos da Astronomia contemporânea, onde mostraremos o que mudou com a teoria da relatividade geral de Albert Einstein. Por fim, teremos a conclusão deste trabalho com as considerações finais.

O primeiro capítulo está dividido em três seções: a primeira mostra a parte da origem da Astronomia; a segunda trata sobre a importância dos gregos no desenvolvimento de conceitos celestes, a chamada Astronomia antiga; a terceira trata da Astronomia na renascença, destacando os vários matemáticos que revolucionaram o pensamento celeste na época. O segundo capítulo tem como finalidade expor alguns tópicos de Astronomia em que a Matemática é utilizada como principal ferramenta. Enquanto que no terceiro e último capítulo desta dissertação, trataremos da Astronomia contemporânea, expondo as principais mudanças no pensamento astronômico após a revolução científica iniciada, principalmente, por Einstein.

## 1. AS CONTRIBUIÇÕES DE MATEMÁTICOS NO DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA

### 1.1 Origem

A Astronomia é considerada por diversos historiadores com uma das ciências mais antigas. Há correntes que colocam seu surgimento se confundindo com a própria história humana. Mesmo com poucos conhecimentos técnicos, sabe-se que há 5000 anos povos antigos já se utilizavam desta ciência para navegações, agricultura e até criação de calendários. Segundo Oliveira Filho (2004, p.1):

Naquela época, os astros eram estudados com objetivos práticos, como medir a passagem do tempo (fazer calendários), para prever a melhor época para o plantio e a colheita, ou com objetivos mais relacionados à astrologia, como fazer previsões do futuro, já que, não tendo qualquer conhecimento das leis da natureza (física), acreditavam que os deuses do céu tinham o poder da colheita, da chuva e mesmo da vida.

O anseio de desvendar os mistérios dos céus fez com que o homem se voltasse às observações dos movimentos dos corpos celestes. É possível que tais observações tenham dado início dos estudos na Astronomia. Seu desenvolvimento possibilitou a descoberta das distâncias entre os mais diversos astros, a forma com que os planetas descrevem suas órbitas, o entendimento sobre a constituição de alguns corpos celestes e a confirmação da existência de outras galáxias externas ao nosso sistema solar.

Os babilônios, como já fora mencionado, utilizaram-se da astronomia em suas colheitas e plantio. A escrita cuneiforme<sup>1</sup> foi ajustada pelos babilônios e é bem provável que tábuas babilônicas tenham servido como influência para os matemáticos gregos. O incêndio na biblioteca de Alexandria, no ano de 48 a.E.C, destruiu boa parte do acervo contido na biblioteca. Esse fato foi preponderante para os poucos manuscritos do período pré-helenístico<sup>2</sup>.

É possível que os poucos vestígios babilônios tenham impulsionado os gregos no desenvolvimento da Astronomia, a partir de 600 a.E.C até por volta de 165 d.E.C, de tal modo que ela se tornou um ramo da Matemática/Física. Em

---

<sup>1</sup> Escrita, supostamente criada pelos sumérios, utilizando objetos em forma de cunha.

<sup>2</sup> Período que antecede a morte de Alexandre o Grande, anterior a 400 a.E.C.

relação a esse período, percebemos em nossa pesquisa que estão entre as principais contribuições gregas: a) a previsão de um eclipse feita por Tales de Mileto; b) a conclusão de Aristóteles sobre a forma esférica da Terra; c) a brilhante medição do diâmetro da Terra feita por Eratóstenes; d) os cálculos, feitos por Aristarco de Samos, para as distâncias Terra–Sol–Lua; e) o modelo geocêntrico proposto por Ptolomeu conforme veremos mais adiante.

## 1.2 Grécia antiga e a velha Astronomia

Vimos que o período helenístico proporcionou um amplo desenvolvimento no que diz respeito ao conhecimento científico. Nesse período, houve ascensão da Matemática com destaque para Euclides, Física com Arquimedes e Astronomia com Aristarco de Samos, Hiparco de Nicéia e Eratóstenes. Nesse sentido, a enciclopédia virtual Wikipédia coloca

...Na matemática, Euclides de Alexandria, autor de "Os Elementos", lançou nesta obra as bases da geometria como ciência...Na astronomia, Aristarco de Samos (c.310 a.C.-230 a.C.) defendeu que o Sol era o centro do sistema planetário (heliocentrismo), teoria que gerou polêmica na época e foi contestada por Arquimedes e Hiparco de Nicéia. Este último foi responsável pela atribuição ao ano solar da duração de 365 dias, 5 horas, 55 minutos e 12 segundos, um cálculo errado apenas por 6 minutos e 26 segundos. Eratóstenes de Cirene (c.275 a.C.-194 a.C.) descreveu a Via Láctea e organizou a geografia como ciência...

Nesse sentido, Wells (1965, p.89) diz que “[...] durante esse período o pensamento e o impulso criativo e artístico dos gregos ascenderam a níveis que os transformaram numa fonte de luz para o resto da História”. Por essa razão, a Grécia é considerada como o berço da civilização moderna.

Veremos mais adiante que o desenvolvimento da Astronomia está intimamente ligado ao desenvolvimento da Geometria, sobretudo ao da trigonometria. A semelhança de triângulos e as diversas relações métricas e trigonométricas em triângulos retângulos foram ferramentas constantemente utilizadas pelos matemáticos. Entre os matemáticos que se debruçaram acerca da Astronomia, há alguns cuja importância se sobrepõe e, por isso, falaremos um pouco da vida de cada um. Na sequência do capítulo falaremos um pouco sobre a vida de alguns deles e tivemos como base para a elaboração do capítulo Boyer (2012), Gleiser (2006), Oliveira Filho (2004) e Pires (2011).



*Tales de Mileto (624–548 a.E.C)*, é considerado o primeiro a estudar a Astronomia e a Cosmologia grega. Durante o século VI a.E.C, o comércio entre os vários Estados gregos cresceu e, com isso, houve melhoria nas condições de vida da região onde o centro das atividades era em Mileto, hoje Turquia. Embora o centro do mundo grego se desse nos mares Egeu e Jônio, a civilização helênica não se localizava somente ali. Tales foi o fundador da filosofia ocidental e, utilizando de seus conhecimentos e certamente influenciado pelos babilônios, conseguiu prever com um ano de antecedência a colheita de azeitonas. Além disso, teria previsto um eclipse que ocorreu no dia 28 de maio de 585 a.E.C, no entanto, não se tem essa informação como comprovada. É considerado por muitos como o primeiro matemático verdadeiro, criador da organização dedutiva da geometria.

Boyer (2012, p.55) coloca que quatro demonstrações são atribuídas a Tales, são elas: um círculo é bissectado por um diâmetro; os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então eles são congruentes. Para Tales, a Terra era um disco plano em uma vasta extensão de água.

Ainda em Mileto, Anaximandro postulou que o Universo era eterno e infinito em extensão com a Terra sendo o centro e cuja forma era cilíndrica. Ele ainda explica o que seria o Sol, eclipse, Lua. Foi o primeiro modelo mecânico do Universo. Para Gleiser:

A Terra era circundada por uma grande roda cósmica, cheia de fogo, e o Sol, um furo na superfície dessa roda, que deixava o fogo escapar. À medida que a roda girava, o Sol também girava, explicando o movimento do Sol em torno da Terra. Eclipses se deviam ao bloqueio total ou parcial do furo. A mesma explicação era dada para as fases da Lua, que também era um furo em outra roda cósmica. Finalmente, as estrelas eram pequenos furos em uma terceira roda cósmica, que Anaximandro curiosamente colocou mais perto da Terra do que a Lua ou o Sol. (2006, p.43)

Anaximandro propõe um modelo de Universo ilimitado e sem um criador. Para ele, o Universo dança sozinho. Além disso, ele substitui a ideia de Tales da água como elemento básico, colocando uma substância indeterminada, ilimitada e possuindo movimento próprio, chamada de *apeíron*. Anaximandro dava grande importância à simetria e introduziu a Geometria em seus estudos sobre o firmamento. Uma justificativa utilizada por ele para a Terra não cair é o fato de seu

centro ser equidistante de todos os pontos da circunferência celeste. Por isso, ela não teria motivos para se deslocar. O espaço deixa de ser mítico para ser um espaço geométrico.

Segundo Pires:

No firmamento havia várias envoltórias destinadas a acomodar os vários corpos celestes. O Sol era um orifício em uma dessas esferas, além da qual havia um fogo. As estrelas, do mesmo modo, eram orifícios [...]. A importância dessa teoria é que ela representa a primeira tentativa do que podemos chamar de um modelo mecânico do Universo na Astronomia grega. (2011, p.16)

Seguindo a linha da escola iônica<sup>3</sup>, Anaxímenes, um discípulo de Anaximandro, coloca como elemento principal o ar. Para ele, conforme sua densidade variava, compunha todas as coisas, quando o ar se tornava rarefeito, tornava-se fogo, à medida que se tornava mais denso, o ar se tornava vento, água, terra e pedra. Além disso, para ele, as estrelas são fixas, presas a uma esfera cristalina e, portanto, transparente, que girava em torno da Terra.

Esses três filósofos não tinham distinções muito claras entre tipos de matéria, forças e qualidades. A mesma entidade aparece de várias formas, ora o ar, ora água ou o *apeíron* representam, para cada um, uma substância essencial. Como os filósofos atribuíam um elemento como origem de tudo, eles não questionaram a origem e causa do movimento. Segundo alguns historiadores, essa escola se caracterizou pela liberdade no pensamento, onde o discípulo criticava o mestre o que deu origem a uma nova Filosofia em cada geração (Gleiser 2006).

A vida de *Pitágoras* é cercada de mistério a começar pelo ano de seu nascimento entre 585 e 565 a.E.C. Uma das primeiras descobertas dos pitagóricos, atribuída ao próprio Pitágoras, foi a relação entre intervalos musicais e proporções numéricas simples. Para a escola pitagórica, o número é a essência e o princípio fundamental de todas as coisas. A crença dos pitagóricos de que tudo viria de números pode ser associada à ideia moderna de que o Universo é descrito por quantidades matemáticas. A ideia da esfericidade da Terra é frequentemente atribuída a Pitágoras.

---

<sup>3</sup>Nomenclatura utilizada para representar uma linha de pensamento de filósofos que viviam na região onde se encontrava a cidade – Estado de Mileto.

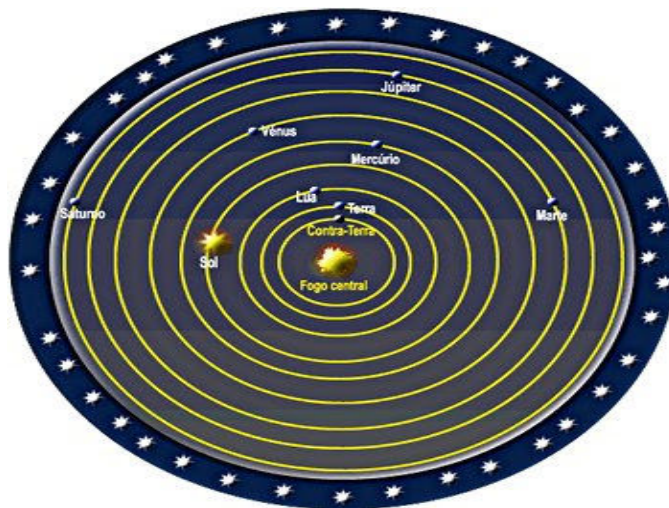
Segundo Boyer:

A própria ideia de que o Universo é um “cosmos”, ou um todo harmoniosamente ordenado, parece ser uma contribuição pitagórica [...] uma ideia que na época tinha pouca base de observação direta, mas que foi enormemente frutífera no desenvolvimento da astronomia. (2012, p.60)

Os astrônomos pitagóricos, em especial Filolau, afirmaram que a Terra se movia e que não era o centro do Universo, indo de encontro ao “senso comum” da época que era o modelo geocêntrico, onde a Terra era o centro do Universo.

Para Filolau, a Terra girava em torno de um “fogo central” que não poderia ser visto devido a sua localização ser sempre oposta à da Terra. Era esse fogo que enviava a energia para o cosmo, assim como gerava o calor do Sol. Esse fogo era invisível e se situava em oposição ao lado habitado da Terra. Além disso, Filolau propôs outro corpo celeste *Antichthon*, que seria uma espécie de contraterra. Após a Terra vinham a Lua e o Sol, seguidos dos cinco planetas conhecidos até então (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno) e pela esfera cristalina que carregava as estrelas (Veja figura 1.1). Essa ideia de Universo foi amplamente aceita e, 2 mil anos depois, Copérnico a utiliza em seu modelo de Universo (Pires 2011).

Figura 1.1 – Modelo de Universo de Filolau

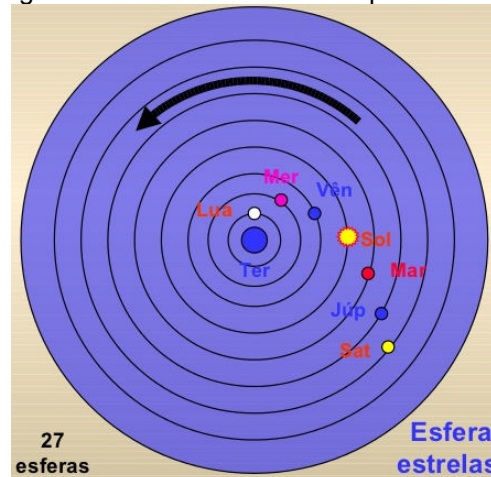


Fonte: <http://ventosdouniverso.blogspot.com.br/2010/08/modelo-geocentrico-e-o-aperfeicoamento.html>

Outro modelo brilhante foi proposto por Eudoxo (408 – 356 a.E.C) como solução de um desafio feito por Platão, seu professor, aos estudantes da Academia. Platão propôs que os astrônomos elaborassem modelos de Universo que salvassem as aparências, isto é, que “corrigisse” as irregularidades dos movimentos planetários em termos de movimentos circulares.

Eudoxo propôs um modelo baseado em uma série de esferas concêntricas, com a Terra imóvel no centro. Cada um dos cinco planetas estava associado a quatro esferas e três esferas para o Sol e três para a Lua, além das estrelas fixas. Sendo assim, o Universo contava com um total de 27 esferas que descreviam os movimentos dos objetos celestes (Ver figura 1.2).

Figura 1.2: Universo defendido por Eudoxo



Fonte: <http://pt.slideshare.net/ifuspescola/est-diss>

Gleiser (2006, p.66) diz que “O modelo proposto por Eudoxo demonstra não só seu domínio da geometria, mas também uma atenção para os detalhes observacionais que até então não faziam parte do pensamento grego”.

*Aristóteles* (384 – 322 a.E.C), discípulo de Platão, dedicou-se a encontrar as motivações que explicavam não somente os movimentos dos corpos celestes, como também de qualquer movimento de quaisquer objetos. Segundo Aristóteles, há dois tipos de movimento, o natural e o forçado. Mais ainda, o movimento natural é linear como o movimento de um objeto em queda livre. Aristóteles sabia que os movimentos dos corpos celestes estavam longe de serem lineares. Por essa razão, postulou a existência do *éter* como quinto elemento (além de fogo, ar, água e terra).

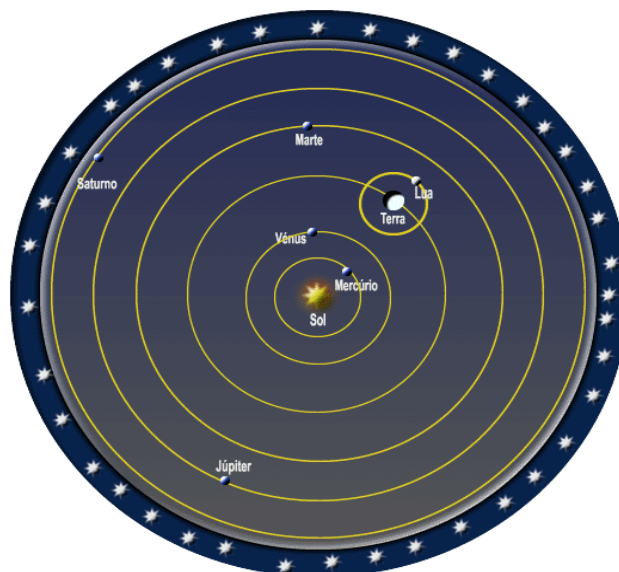
Aristóteles aperfeiçoou a teoria das esferas concêntricas de Eudoxo, propôs em seu livro *De caelo*, explicou que as fases da Lua dependem do quanto de sua face é iluminada pelo Sol, além de explicar os eclipses solar e lunar, afirmou que o Universo não tinha um começo afirmando que sua criação ocorreu simultaneamente com o tempo, isto é, o Universo existe desde sempre e nunca deixará de existir. Além disso, ele considera o cosmos dividido em duas regiões que possuem qualidades diferentes e que são regidas por leis diferentes. Para Aristóteles cada

elemento tinha seu lugar natural e, com isso, associou a noção de pesado e leve. A Terra, por exemplo, é pesada, enquanto que o fogo é leve. O conceito de gravidade aristotélico é associado à propriedade intrínseca de corpos pesados (Oliveira Filho 2004).

Contemporâneo de Aristóteles e, possivelmente, discípulo de Platão, Heraclides (388 – 315 a.E.C) propôs que a Terra girava em torno de si mesma, além da existência de epiciclos. Heraclides coloca, assim como Filolau, a Terra novamente em movimento. Além disso, ele contraria a crença da época e afirma que Vênus e Mercúrio orbitam em torno do Sol e não da Terra. De certa forma, essa crença abrirá o caminho do Heliocentrismo, onde o Sol é o centro do Universo.

*Aristarco de Samos (310 – 230 a.E.C)*, viveu em uma época onde o pensamento aristotélico do cosmos estava profundamente enraizado na sociedade. Com seu brilhantismo e, de certa forma, audácia, propôs um modelo heliocêntrico, onde o centro do Universo não mais é a Terra, e sim, o Sol (Ver figura 1.3). Um fato curioso é que esse modelo proposto por Aristarco foi esquecido por quase 2 mil anos. Possivelmente, se o fenômeno astronômico *paralaxe estelar*<sup>4</sup> fosse conhecido, possivelmente a ideia de Aristarco teria maior força. No entanto, tal fenômeno somente foi comprovado por Friedrich Bessel em 1838.

Figura 1.3 – Universo para Aristarco, limitado e esférico.



Fonte: [http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-2008/Giacomo-Bosco/Aristarco%20de%20Samos%20e%20o%20tratado-hiphelio\\_arquivos/image003.gif](http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-2008/Giacomo-Bosco/Aristarco%20de%20Samos%20e%20o%20tratado-hiphelio_arquivos/image003.gif)

<sup>4</sup>É a diferença na posição aparente de um objeto visto por observadores em locais distintos.

Em sua “obra sobrevivente” *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, ele se utiliza de brilhantes argumentos geométricos e de observações astronômicas para concluir que: a) a distância entre o Sol e a Terra é aproximadamente 19 vezes maior que a distância entre a Terra e a Lua; b) o diâmetro do Sol é aproximadamente 6,8 vezes maior que o da Terra; c) o diâmetro da Lua é aproximadamente 0,36 vezes o da Terra.

Os valores corretos em a, b e c são, respectivamente, 388, 109 e 0,27. Embora em a e b os erros sejam altos, a matemática de Aristarco não estava errada. Certamente, os erros foram ocasionados por suas medições astronômicas, visto que a aparelhagem possuída por ele não tinha uma boa precisão. Outro fator para que o modelo heliocêntrico fosse esquecido por quase 2 mil anos, retornando apenas com Copérnico no século XVI d.E.C, pode estar ligado a forte influência das ideias de Aristóteles sobre o Universo. O Sol, no Universo aristotélico, é feito de éter, logo, estar no centro do cosmos é inconcebível.

Após Aristarco, o maior avanço na Astronomia se deu com a criação dos epiciclos<sup>5</sup>. Acredita-se que tenha sido desenvolvida por Apolônio de Perga (265 – 190 a.E.C). Ele se utilizou de seus conhecimentos teóricos e, aparentemente, não aplicou conceitos geométricos aos movimentos dos corpos celestes (Ver figura 1.4).

Figura 1.4: Epiciclos de Apolônio.



[https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQh9nzqd0H8jTrWamO\\_T9ytxgCnVg6CUJBY2Ovij\\_NR9NwPIWqO](https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQh9nzqd0H8jTrWamO_T9ytxgCnVg6CUJBY2Ovij_NR9NwPIWqO)

<sup>5</sup>É um pequeno círculo formado por um astro em torno de um ponto imaginário, que descreve, a partir de seu novo ponto, outro círculo.

*Hiparco (160 – 125 a.E.C)*, é considerado o maior astrônomo da era pré-cristão, criou um observatório de onde catalogou a magnitude e posição no céu de mais de 800 estrelas. Ele defendia a teoria geocêntrica, deduziu a direção dos pólos celestes e a variação do eixo de rotação da Terra por causa das influências gravitacionais da Lua e do Sol. Hiparco também encontrou que a distância da Lua era de 59 vezes o raio da Terra, o correto é 60. Além de errar somente por 6 minutos a duração de um ano. Boyer (2012) coloca que os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram em problemas de Astronomia.

Ele coloca Hiparco como o pai da trigonometria por ser, possivelmente, o primeiro a compilar uma tábua trigonométrica. Entre os seus feitos, Hiparco inventou a trigonometria, o astrolábio. Em nenhum momento fez menção aos epiciclos para descrever o movimento dos planetas, o que ocorreria mais tarde com Ptolomeu.

*Ptolomeu (85 d.E.C – 165 d.E.C)*, foi o último astrônomo importante da antiguidade. Ajustou o modelo geocêntrico de Hiparco, criando um ponto nos epiciclos chamado de *equante*. Com algumas adaptações, Ptolomeu mostrou que o centro do epiciclo viajava com velocidade angular constante em torno do equante e não da Terra como no modelo de Hiparco.

Esse fato violava o modelo platônico que afirmava que, nos movimentos celestes em torno da Terra ocorriam com a velocidade angular constante. Mas, segundo Gleiser (2006, p.81) “Para ele, a tarefa mais importante de um astrônomo era obter um modelo matemático do cosmos que descrevesse os movimentos dos corpos celestes usando apenas círculos”. Em sua obra *Almagesto* há registros de suas construções e uso de instrumentos astronômicos utilizados na época.

### **1.3 O sistema Heliocêntrico e a nova Astronomia**

A transição da Idade Média para a Moderna foi marcada pelo Renascimento que foi um importante movimento na sociedade entre os séculos XIV e fim do século XVII. Há correntes que colocam que nessa época, em tempos onde o poder da igreja era soberano, a burguesia da época “patrocinava” cientistas para que criassem teorias que iriam de encontro aos dogmas da Idade Média. Gleiser (2006, p.92) coloca que um frade franciscano de Oxford, Roger Bacon, escreveu que se

tivesse autoridade mandaria queimar os livros de Aristóteles. Bacon enfatizou a importância da matemática e da experimentação como instrumentos no estudo da Natureza e acabou sendo preso por ir de encontro aos dogmas da igreja.

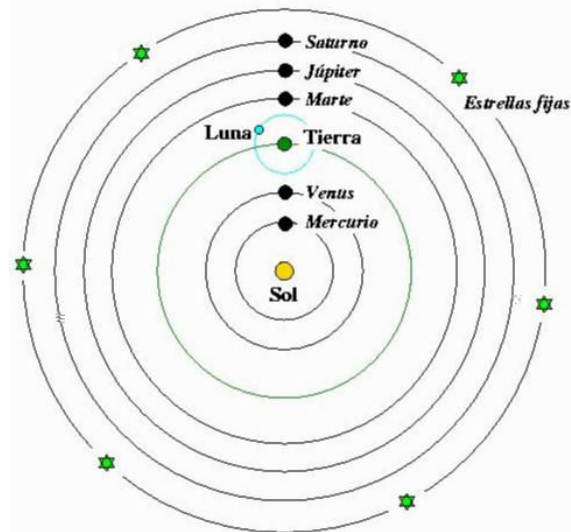
Esse contexto favoreceu a inserção de novas teorias assim como o Heliocentrismo de Copérnico/Aristarco. Livros que tratam sobre a Astronomia, relatam que a nova Astronomia se inicia com Copérnico. No entanto, Copérnico era uma espécie de *revolucionário conservador*. Retomou a ideia de Aristarco com seu fogo central colocando, agora, o Sol como o centro do Universo. Apesar da brilhante ideia, Copérnico era um homem reservado e, certamente por receio de perseguição religiosa visto que o modelo aristotélico e de Ptolomeu era aceito pela igreja, era relutante em relação à publicação de sua teoria.

*Nicolau Copérnico (1473 – 1543)*, polonês teve seus estudos na Itália. Trabalhou por muitos anos como cônego, uma espécie de administrador, na catedral de Frauenberg. Por ser uma pessoa reservada, Copérnico teve apenas um amigo mais próximo, o também cônego Tiedemann Giese. Foi ele o responsável por convencer Nicolau a publicar sua teoria. Koestler (1961, p.145) diz que “Giese foi um desses heróis silenciosos da História, que abrem caminhos sem deixar suas próprias pegadas”.

Copérnico literalmente destrói o universo aristotélico quando coloca o Sol como centro do Universo, a Terra girando em torno de seu eixo, a Lua girando em torno da Terra e todos os planetas em órbitas circulares em torno do Sol. Para ele, o fato de o modelo de Ptolomeu ferir a ideia da velocidade uniforme de Platão mostra que tal modelo não servia para a descrição dos movimentos dos corpos celestes. Para Copérnico, os planetas descreviam órbitas circulares com velocidades orbitais constantes. Ele vai mais além e propõe como seriam as distribuições dos Planetas em torno do Sol (Ver figura 1.6).



Figura 1.6: O universo para Copérnico



Fonte: <http://galeon.hispavista.com/anadcafeudea/img/modelo%20copernico.jpg>

Em seu modelo, a distribuição é feita de modo que a sequência dos planetas segue a ordem das velocidades orbitais das esferas celestes. Daí, Nicolau mostra que o planeta que demora mais para efetuar uma revolução completa é Saturno, por estar mais distante do Sol e o que demora menos tempo é Mercúrio por estar mais próximo do Sol.

Thomas Digges (1543 – 1595) e *Giordano Bruno* (1548 – 1600) ajustaram o modelo de Copérnico. Propuseram que as estrelas não precisariam ser fixas e, assim, foram os primeiros a adotarem o Universo infinito. Bruno teve um fim trágico, foi preso pela igreja, mesmo sendo frade, por se opor as ideias pregadas por ela e foi torturado e queimado em praça pública por não negar a sua crença.

*Tycho Brahe* (1546 – 1601), dinamarquês, foi enviado por seus pais para a Universidade de Copenhague para se tornar estadista, mas quando presenciou um eclipse parcial do Sol, decidiu estudar Astronomia. Em Agosto de 1563, observou que Saturno e Júpiter estavam muito próximos e, ao consultar as tabelas planetárias de Ptolomeu e Copérnico, verificou que estavam erradas por quase um mês e vários dias respectivamente. Brahe foi um observador brilhante, catalogou mais de 700 estrelas e determinou as posições de cada planeta, levando em consideração os erros ocasionados pelos instrumentos e pela refração atmosférica (Gleiser 2006).

*Johannes Kepler* (1571 – 1630) teve boa parte de seu trabalho baseado nas observações feitas por Brahe, pois trabalhou por vários anos com ele. Em 1596 ele

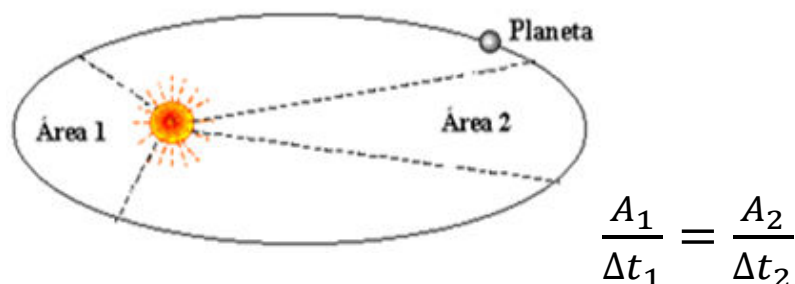
publicou sua primeira grande obra *Mistério cosmográfico*, 53 anos após a publicação de *Sobre as revoluções* de Copérnico, que foi a primeira defesa da teoria copernicana. Estudou profundamente o comportamento de Marte. Esse planeta possuía uma particularidade, dos planetas vistos a olho nu era aquele cuja órbita mais se desviava de um círculo.

Kepler passou vários anos estudando principalmente Marte, pelo que acabamos de mencionar e até chegou a ressuscitar o equante de Ptolomeu em um modelo heliocêntrico, misturando Ptolomeu com Copérnico. Com isso, ele chegou muito próximo aos dados obtidos por Brahe. Johannes continuou em sua busca incessante por um modelo em que a órbita de Marte se enquadrasse. Gleiser (2006, p.121) coloca que, em 1605, Kepler escreveu:

Meu objetivo aqui é mostrar que a máquina celestial não deve ser comparada com um organismo vivo, mas sim com os mecanismos de um relógio [...]. Mais ainda, eu mostro como essa ideia pode ser implementada através de cálculos e da geometria.

Kepler descobriu que a linha imaginária que liga os planetas ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais, essa é a chamada segunda Lei de Kepler, isto é, quanto mais próximo do Sol um planeta estiver, mais rápido ele será. Da mesma forma, quanto mais distante do Sol, mais lento o planeta será. Caso a órbita fosse circular, o que não era verdade, a velocidade seria a mesma. O problema era encontrar a forma correta da órbita. Kepler continuou sua busca até chegar à conclusão que as órbitas dos planetas não eram circulares, e sim, elípticas com o Sol ocupando um dos focos. Essa é conhecida como a *primeira Lei de Kepler*. Em sua segunda Lei, ele rompe com a afirmação que a velocidade de cada planeta é variável, de modo que quanto mais próximos do Sol estiverem, mais rápidos serão (Ver figura 1.7).

Figura 1.7: Segunda Lei de Kepler



Mesmo tendo encontrado uma relação interessante que mostrava as velocidades dos planetas, desvendado a forma das órbitas dos planetas, Johannes não se deu por satisfeito, visto que em nenhuma relação continha nada em relação as distâncias médias entre os planetas e o Sol. Após muitas tentativas, Kepler finalmente encontra uma relação que finaliza as Leis dos corpos celestes. Em sua *terceira Lei*, Kepler afirma que quanto mais distante do Sol um planeta estiver, mais tempo ele gastará para completar uma volta. No entanto essa relação não é direta, o quadrado do período orbital de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.

*Galileo Galilei (1564 – 1642)*, italiano, introduziu nos estudos astronômicos o telescópio. Esse fato lhe rendeu fama, ao mesmo tempo em que possibilitou a descoberta de mais de 500 estrelas nunca vista antes, além de refutar a ideia de a superfície lunar ser suave e uniforme. Galileu viu, com a utilização do telescópio, várias “manchas” na Lua, umas mais claras outras mais escuras. Dentre várias descobertas, ele encontrou os quatro satélites de Júpiter e, assim, resolvendo uma “anomalia” no modelo heliocêntrico. Descobriu também os anéis de Saturno, as fases de Vênus e manchas no Sol. Este último acaba por destruir a imutabilidade dos “céus aristotélicos”.

Galileu, como cientista, viveu na primeira metade do século XVII e nesse período a igreja católica aterrorizava a sociedade com sua *famosa* Inquisição. Foi nesse contexto, de perseguição religiosa, que ele lançou sua cruzada contra o Geocentrismo e em favor do Heliocentrismo. Por isso, ele trava uma verdadeira batalha com a igreja. Conta a história que Galileu só não teve o mesmo fim trágico de Giordano Bruno por ter, na inquisição, refutado suas próprias crenças quanto as questões celestes. No entanto, a “vitória” da igreja foi breve, pois décadas após a morte de Galileu, Isaac Newton desenvolve uma nova Física e, nesse contexto, ele refuta de vez o Geocentrismo (Pires 2011).

*Isaac Newton (1642 – 1727)*, inglês, certamente é um dos maiores cientistas em toda a história. Seus feitos são reverenciados até hoje. Será que podemos imaginar o legado de Newton para a humanidade? Certamente, não. Dono de uma genialidade quase que incomparável Newton atuou em diversas áreas do conhecimento. Organizou toda a mecânica dos corpos, celestes ou não. Seu trabalho representa o clímax da Revolução Científica. Newton elaborou uma base

conceitual que dominou não só a Física, como também a visão de mundo até o início do século XX. Ele mostrou que todos os movimentos observados na Natureza podem ser compreendidos em termos de leis expressas pela matemática.

Em 1687, publicou *Philosophiae naturalis principia matemática* que continha os cálculos feitos por Newton para a demonstração da Lei da Gravitação Universal. Essa Lei fala que todos os corpos se atraem proporcionalmente ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separe. Com isso, ele provou porque os corpos não caem. Elaborou três leis na mecânica explicou, por meio de sua *Terceira Lei*, que os movimentos dos corpos celestes não poderiam ser regulares. Newton não gostava da teoria criada por Descartes para explicar o movimento dos planetas que se baseava em vórtices cósmicos<sup>6</sup> de Descartes. Em seu principia, dividido em três livros, Newton demonstra as Leis de Kepler em seu volume I e no volume III ele descreve a Lei da Gravitação Universal mencionada acima.

Por ser muito religioso, Newton afirmava que a estabilidade das órbitas dos planetas implicava “reajustes” contínuos sobre suas trajetórias impostas pelo poder divino. A teoria celeste newtoniana perdurou por séculos até a chegada de Albert Einstein e sua teoria da relatividade geral no início do século XX (Pires 2011).

*Albert Einstein (1879 – 1955)*, alemão, é seguramente um gigante da ciência e, se partirmos para a Física, representa ao lado de Newton os maiores até então. Einstein costumava se corresponder, diferente de Newton, com vários cientistas sobre seus estudos. Isso ajudou no desenvolvimento, por exemplo, da mecânica quântica. Sua genialidade é mostrada, por exemplo, pelo “simples” fato de provar que distância e tempo são grandezas relativas. Em 1905, em sua *Teoria da Relatividade Restrita*, Einstein cria alguns postulados, dentre os quais a velocidade da luz é absoluta. Tais afirmações quebram com a mecânica newtoniana e, sobretudo, com o senso comum. Os conceitos referentes a essas grandezas estavam enraizados na sociedade e Einstein prova que distância e tempo não eram definidos corretamente pela ciência.

---

<sup>6</sup> Descartes explica que a dinâmica do sistema solar é por meio de um sistema de “fluidos magnéticos” na qual vórtices (turbilhões) eram elementos essenciais.

Essa descoberta de Einstein revoluciona tanto o mundo “terrestre” quanto o celeste. Com as comprovações acerca da teoria da relatividade especial, em 1915, Einstein propõe a *Teoria da Relatividade Geral*. Nela, Einstein revela as limitações da gravitação newtoniana. Ele, em sua teoria, desenvolveu uma estrutura conceitual sem fugir de conceitos matemáticos e físicos. Einstein ousou ir de encontro ao senso comum, em que tempo e espaço eram absolutos, ele propôs, na relatividade geral, que o que temos de fato é o espaço-tempo deformável, onde a presença da matéria (energia) altera a geometria do espaço e o fluxo do tempo. Com sua teoria, a gravitação newtoniana deixa de ser geral e passa a ser um caso particular. Para tanto, Einstein se utiliza de geometrias não-euclidianas.

Para Gleiser

Numa série de descobertas notáveis, na década de 1920, o astrônomo americano Edwin Hubble não só mostrou que o Universo é povoado por inúmeras galáxias como a nossa Via Láctea, como também descobriu algo de importância crucial sobre cosmologia, a expansão do Universo. (2006, p. 306).

A partir das descobertas de Hubble e Einstein, a Astronomia ganhou novos rumos. Como a Astronomia é uma ciência, sabemos que ela passou e passará por mudanças em suas bases, visto que não há verdade absoluta quando tratamos de ciência.

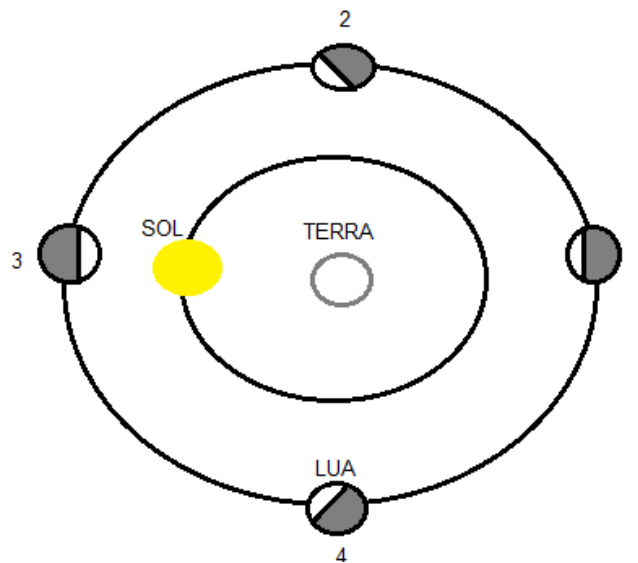
## 2. A MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA PRÉ EINSTEIN

Vimos rapidamente no capítulo anterior que diversos matemáticos pensaram e propuseram vários modelos de Universo. A Matemática, sobretudo a Geometria e Trigonometria, foi uma ferramenta muito utilizada na Astronomia pré Einstein para encontrar o diâmetro da Terra, distância entre Terra e Sol, entre outros. A seguir colocaremos alguns tópicos que mostrarão alguns argumentos utilizados por diversos matemáticos para encontrar valores de grandezas tais como, por exemplo, as distâncias entre Terra, Sol e Lua e o raio da Terra<sup>7</sup>.

### 2.1 As primeiras distâncias envolvendo Terra e Sol e Terra e Lua

Inicialmente, devemos saber quem está mais distante, Sol ou Lua?

Figura 2.1: Representação hipotética em que a lua está mais distante da Terra que o Sol.



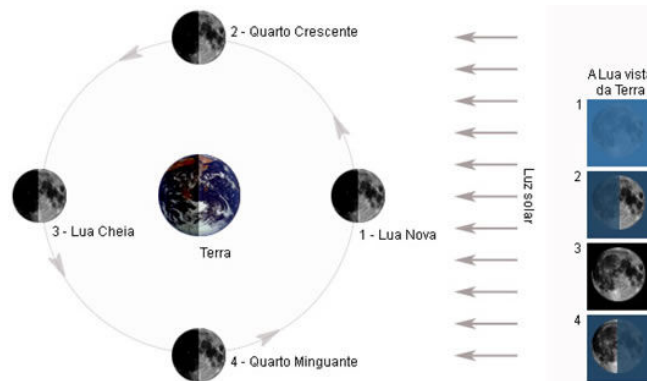
Fonte: Autor 2016

Na representação acima, temos uma situação hipotética onde o Sol está mais próximo da Terra que a Lua. Analisando a figura, se o Sol estivesse mais próximo, em nenhuma das fases teríamos a lua nova e nas fases 1 e 3 teríamos lua cheia. As fases da Lua resultam no fato dela não possuir luz própria e ser iluminada pelo Sol. A parte da Lua que é iluminada e que está voltada para um observador na Terra determina sua fase. Por exemplo, a Lua cheia ocorre quando a face da Lua

<sup>7</sup> Colocamos no apêndice A uma tabela com alguns dados acerca do sistema solar que são aceitos atualmente.

iluminada está totalmente dentro do campo de visão de um observador na Terra, enquanto que na fase da Lua nova, a face iluminada não está voltada para o observador, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 2.2: O círculo externo mostra o movimento da Lua, enquanto que o interno indica a parte da Lua que é vista por um observador na Terra.

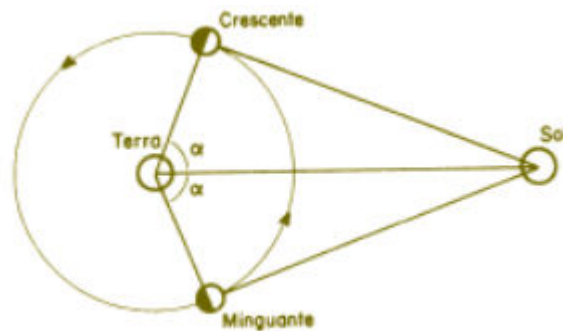


CAVALCANTE, Kleber G. *As fases da Lua*; *Brasil Escola*.

Outro fator que corrobora com o fato da lua estar mais próxima da Terra é que se isso não acontecesse, não teríamos a possibilidade de eclipses solares. Descreveremos a seguir o método de Aristarco de Samos, da escola de Alexandria, para comparar as distâncias entre Terra e Lua e Terra e Sol.

Há duas fases da Lua, quarto crescente e quarto minguante, em que metade do disco lunar está iluminada e a outra metade escura para um observador terrestre (Figura 2.3). Quando isso ocorre, obtemos um triângulo retângulo no vértice ocupado pela Lua. Aristarco teria medido o ângulo  $\alpha$  e teria encontrado um valor de  $87^\circ$ . Assim, basta construir um triângulo com os ângulos de  $90^\circ$ ,  $87^\circ$  e  $3^\circ$  e encontrar a razão entre os lados que correspondem à razão entre TS/TL da figura 2.3. Aristarco encontrou algo em torno de 20 vezes, isto é, a distância entre a Terra e o Sol é 20 vezes maior que entre a Terra e a Lua.

Figura 2.3: Representação Sol, Lua e Terra.



ÁVILA, Geraldo. *A geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga*, 2004.

Tomando novamente a figura 2.3 e o problema de encontrar o ângulo  $\alpha$ . O ciclo lunar dura 29,5 dias e, possivelmente, Aristarco teria observado que a passagem de minguante para crescente durava 14,25 dias. Considerando uniforme a velocidade da Lua em sua órbita, podemos afirmar que os ângulos descritos pelo raio são proporcionais aos tempos gastos nos deslocamentos correspondentes. De forma que podemos escrever

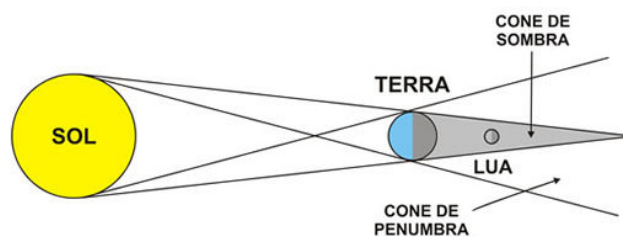
$$\frac{360^\circ}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25} \rightarrow \alpha \cong 87^\circ$$

Como  $\sec \alpha$  corresponde à razão procurada, obtemos que

$$\frac{TS}{TL} = \sec 86,57^\circ \rightarrow TS = 18,8TL$$

Relação que está muito longe da que conhecemos atualmente onde a distância da Terra para o Sol representa 400 vezes à distância para a Lua. Para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua ao raio da Terra, Aristarco observou o que acontecia com a Lua durante seu eclipse quando ela atravessava o cone descrito na figura abaixo.

Figura 2.4: Representação das posições da Lua, Terra e Sol

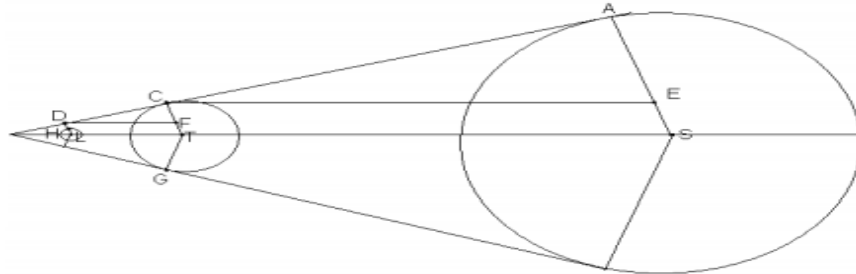


OLIVEIRA, Priscila di C.F. *Eclipses do Sol e da Lua*, 2016.



Pelo tempo gasto nesse percurso, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era  $\frac{8}{3}$  do diâmetro da Terra. Podemos traçar os raios dos três de modo que teremos a seguinte figura:

Figura 2.5: Cones envolvendo as sombras da Lua, Terra e Sol



Fonte: Autor, 2016.

Na figura, temos  $LH = R_L$ ,  $TC = R_T$  e  $SA = R_S$ , além de termos um paralelogramo LDFT em que  $TF = LD$ , onde LD corresponde ao raio do cone de sombra da altura da Lua. De sorte que teremos  $L_D = \frac{8R_L}{3}$ , onde  $L_D$  representa a distância entre a Lua (L) e o ponto D da figura 2.5. Os triângulos DFC e CEA são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA). Por essa semelhança, temos que:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$

Mas

$$CF = TC - TF; TC = R_T \text{ e } TF = LD$$

$$CF = R_T - \frac{8}{3}R_L \text{ e } DF = D_L$$

$$AE = AS - SE \Rightarrow AE = R_S - R_T \text{ e } CE = D_S$$

Onde  $D_L$  e  $D_S$  representam, respectivamente, à distância Lua – Terra e Sol – Terra. Substituindo as expressões na proporção acima, teremos:

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Para Aristarco,

$$\frac{R_L}{D_L} = \frac{R_S}{D_S} = a = tg\alpha \quad \text{e} \quad \frac{D_S}{D_L} = b$$

Com isso,

$$D_S = b D_L, R_S = a D_S = ab D_L, R_L = a D_L$$

Substituindo na proporção,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3} a D_L}{D_L} = \frac{ab D_L - R_T}{b D_L}$$

Efetuada algumas manipulações, obtemos que

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right) R_T = \left(1 + \frac{8}{3}\right) a D_L \Rightarrow D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}$$

Com o valor de  $D_L$ , encontramos que

$$D_S = \frac{3(b+1)R_T}{11a}$$

$$R_S = \frac{3(b+1)R_T}{11}$$

$$R_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}$$

Aristarco encontrou  $1^\circ$  para o ângulo  $\alpha$  e, com isso, o valor de  $a$  é aproximadamente igual a 0,017 e para  $b$  o valor aproximado foi igual a 20. Com os valores obtidos por ele para  $a$  e  $b$ , encontramos todas as distâncias em termos de  $R_T$ , ficando com:

$$D_L \cong 16,8R_T$$

$$D_S \cong 337R_T$$

$$R_S \cong 5,7R_T$$

$$R_L \cong 0,29R_T$$

Atualmente, sabe-se que o valor mais próximo do ângulo  $\alpha$  é de  $0,25^\circ$  o que nos fornece  $a$  aproximadamente igual a 0,0044 e o valor mais correto para  $b$  é 400. Com isso, com uma melhor aproximação, obtemos

$$D_L \cong 62R_T$$

$$D_S \cong 24855R_T$$

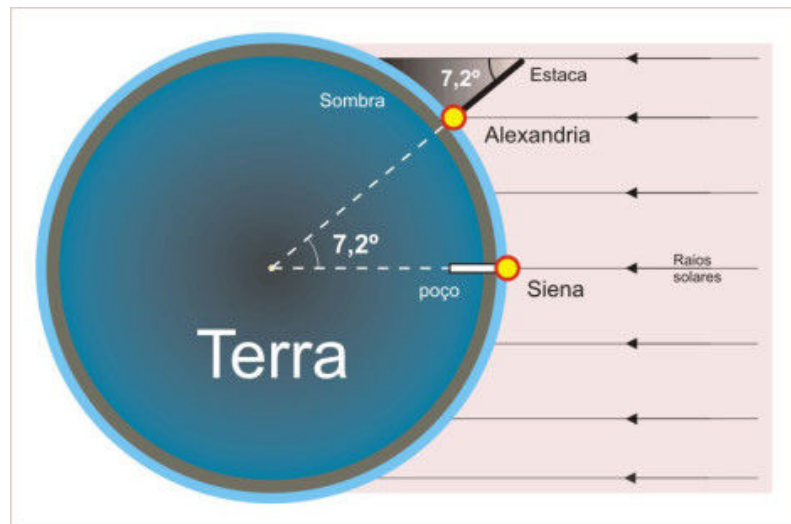
$$R_S \cong 109R_T$$

$$R_L \cong 0,27R_T$$

## 2.2 Eratóstenes e o cálculo do diâmetro da Terra.

O primeiro valor para o diâmetro da Terra foi dado por Eratóstenes (276 a.E.C – 194 a.E.C) que era chefe do setor de biblioteca do museu de Alexandria (antigo Egito). Eratóstenes, ao ser indicado para bibliotecário–chefe do maior museu do mundo naquela época, deparou-se com um problema: as informações estavam separadas em muitos lugares. Para resolver essa problemática, ele decidiu que escreveria um livro completo sobre geografia. Dessa forma, descobrir o valor da circunferência da Terra era de extrema importância. Eratóstenes sabia que uma circunferência tem  $360^\circ$  e que se ele conseguisse o ângulo de uma parte dessa circunferência, ele encontraria o que queria.

Figura 2.6: Esquema da idéia de Eratóstenes



Fonte: <https://astrociencianet.wordpress.com/2016/05/17/httpastrociencianet-worpress-compostagenscienciasexatas/>

Eratóstenes pensou nas cidades de Alexandria e Siena como a representação dessa parte da circunferência. Assim, ele necessitava descobrir a distância entre as cidades e o ângulo formado entre elas em relação ao centro da Terra. Ele percebeu que as sombras provenientes do Sol serviriam para encontrar o ângulo entre as cidades e a distância seria o produto entre o número de passos dados de uma cidade até a outra e o comprimento médio de cada passo. A distância supostamente encontrada por ele foi de 5.000 estádios, onde cada estádio corresponde a 0,157 km. Para descobrir o ângulo  $\theta$  da figura 2.1, ele analisou a sombra de um bastão na vertical na cidade de Alexandria em um instante onde não havia sombra na cidade

de Siena. Usando o triângulo formado pelo bastão e sua sombra, podemos encontrar o ângulo através da relação:

$$\tan \theta = \frac{L'}{L} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{L'}{L}$$

No entanto, naquela época não havia calculadora para resolver a inversa da função tangente. O que provavelmente Eratóstenes utilizou foram tabelas com relação de ângulo com razão entre o comprimento do arco e o raio e obteve um ângulo igual a  $7,2^\circ$  que corresponde aproximadamente a  $0,04 \pi$ . Desta forma, o comprimento da circunferência e o raio são facilmente encontrados.

$$C = \left( \frac{2\pi}{0,04\pi} \right) \cdot 5000 \rightarrow C = 250.000 \text{ estádios}$$

A razão representa a conversão da parte da circunferência no todo. Com isso, sabendo que 1 estádio corresponde a 0,157 km, o valor encontrado por Eratóstenes para o comprimento da circunferência da Terra foi de 39.250 km e, utilizando-se da relação:  $C = 2\pi R$ , com  $\pi = 3,14$ , o raio da Terra encontrado foi de aproximadamente 6.247 km. Atualmente, o raio da Terra tem o valor próximo de 6.370 km. Um erro muito pequeno se tomarmos como referência os instrumentos utilizados por Eratóstenes<sup>8</sup>.

### 2.3 Semelhança de triângulos e a Paralaxe estelar

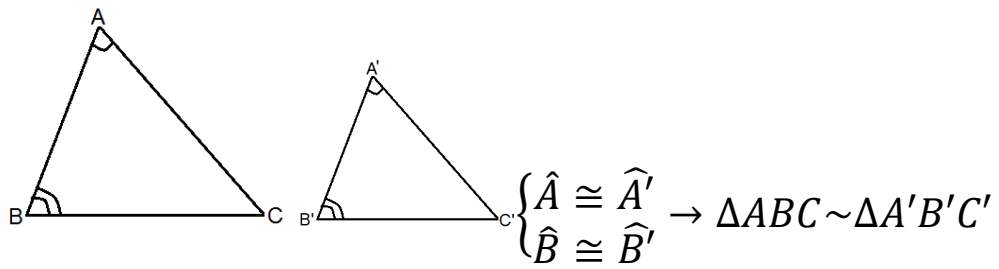
A semelhança de triângulos é um método muito utilizado para encontrar medidas de um triângulo. Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando eles obedecem aos seguintes casos:

- i. Caso AA (Ângulo, Ângulo) – Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo.

---

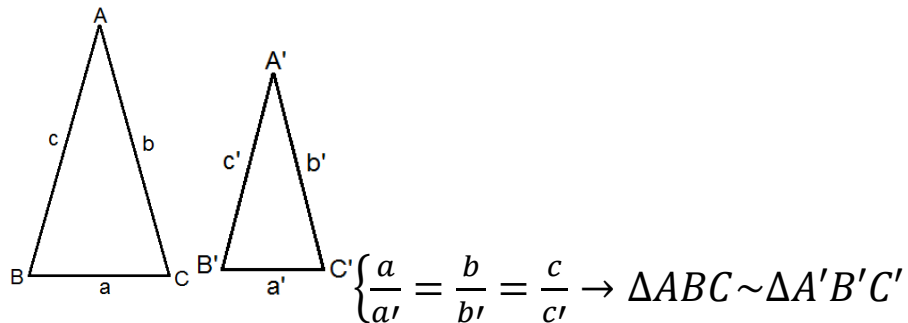
<sup>8</sup> No apêndice B, colocamos atividade 1 como sugestão para aplicação em sala de aula.

Figura 2.7: Caso AA de semelhança de triângulos.



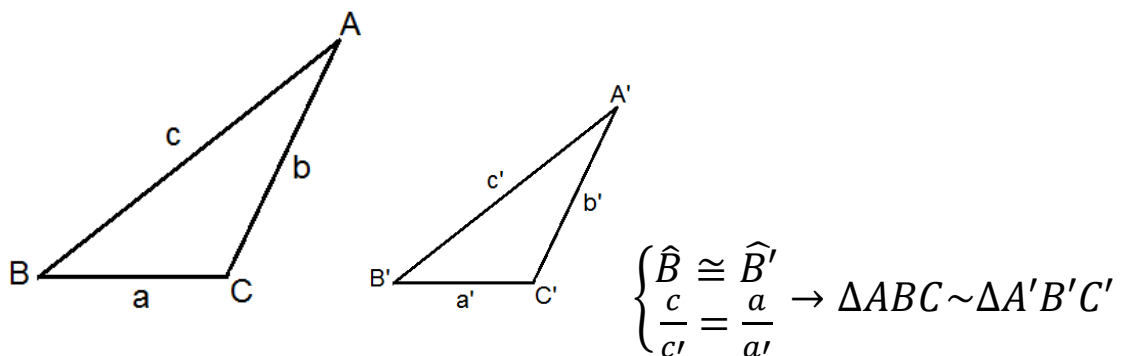
ii. Caso LLL (Lado, Lado, Lado) – Se os lados de um triângulo são proporcionais aos lados de outro triângulo.

Figura 2.8: Caso LLL de semelhança de triângulos.



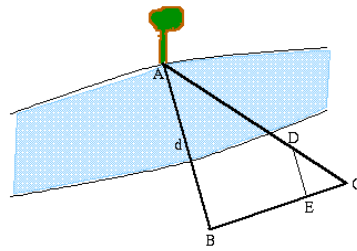
iii. Caso LAL (Lado, Ângulo, Lado) – Se dois lados de um triângulo forem proporcionais a dois lados de outro triângulo e os ângulos formados por esses lados, em cada triângulo, forem congruentes.

iv. Figura 2.9: Caso LAL de semelhança de triângulos.



O método mais comum para se determinar distâncias muito grandes envolvendo pontos inacessíveis é o da triangulação. Sabendo-se um lado de um sistema de triângulos e seus ângulos, é possível encontrar todos os lados. Tome a figura abaixo, em que uma árvore se encontra no vértice A de um triângulo qualquer e B e C são pontos onde a árvore é vista.

Figura 2.10: Árvore em A sendo vista nos pontos B e C.



Sendo B e C pontos onde a árvore é vista, podemos construir um triângulo DEC semelhante ao ABC por possuírem ângulos internos iguais. Tal afirmação somente é possível se tomarmos o segmento de reta AB paralelo ao DE e, com isso, pela transversal AC, teremos o ângulo com vértice em A congruente ao com vértice em D. Como o ângulo em C é comum, teremos, pelo caso AA (ângulo – ângulo) que os triângulos ABC e DEC são semelhantes. Com isso, vale a proporção:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC}$$

Os lados BC, DE e EC são obtidos facilmente pelo observador e, com eles, conseguimos descobrir a distância da árvore para um observador em B. Da mesma forma, pode-se encontrar o valor da distância AC utilizando-se da proporção:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}$$

Pela figura formada, a distância entre a árvore e o observador em B pode ser diferente se o observador estiver em C. Esse deslocamento aparente da árvore devido à mudança de posição do observador é chamado de *paralaxe* (do grego *paralaxis*, mudança). Quanto mais distante o objeto, menor será sua paralaxe<sup>9</sup>.

Para a determinação de distâncias estelares o método é muito semelhante. Escolhe-se uma distância conhecida para servir de base e constrói-se um triângulo com um dos vértices na estrela que se deseja obter a distância. A distância conhecida que serviu como base para os astrônomos foi o diâmetro da órbita da Terra de valor em torno de 300.000.000 km. Em princípio, observando a estrela escolhida em um intervalo de tempo de 6 meses, perceberíamos a estrela na linha de base e, com isso, teríamos o triângulo sendo “fechado”.

<sup>9</sup> <http://astro.if.ufrgs.br/dist/dist.htm>

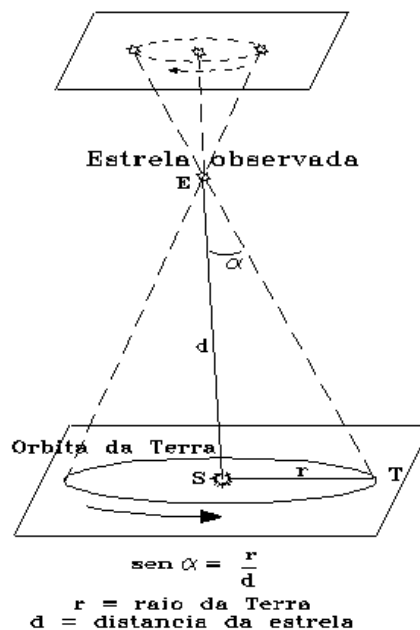
Figura 2.11: Representação da paralaxe estelar



Fonte: Autor, 2016

Entretanto, tal procedimento não pode ser aplicado na prática pela impossibilidade de observar Sol e estrela simultaneamente e, dessa forma, não é possível determinar diretamente os ângulos da base do triângulo. O que se deve fazer, na verdade, é observar a estrela ao longo do ano e determinar os pontos da elipse aparente que ela descreve no céu em relação às demais estrelas, como reflexo do movimento de translação da Terra. A partir daí, determina-se sua paralaxe estelar e, por conseqüência, a distância da estrela ao Sol baseado na figura abaixo.

Figura 2.12: Paralaxe estelar “corrigida”

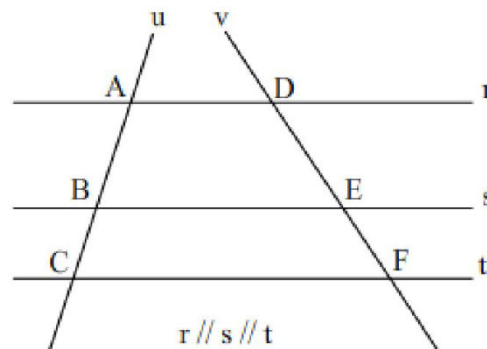


Fonte: <http://cdcc.usp.br/cda/dispositivos/paralaxe/index.html>

## 2.4 Teorema de Tales

Tales, como já foi mencionado, é considerado por muitos o primeiro matemático verdadeiro. Com ele surge a geometria descritiva<sup>10</sup>. Acredita-se que Tales entrou em contato com tabelas astronômicas na Babilônia durante o governo de Nabucodonosor. Boyer (2012) coloca que a ele são atribuídos 5 teoremas muito importantes: a) um círculo é bissectado por um diâmetro; b) os ângulos da base em um triângulo isósceles são iguais; c) os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais; d) se houver um triângulo que possua dois ângulos e um lado iguais aos de outro triângulo, então eles são congruentes. O último e, certamente, o mais famoso é o chamado teorema de Tales que diz: *”Se duas retas transversais são segmentadas por um feixe de paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.* Podemos representar o teorema de Tales por meio da figura abaixo.

Figura 2.13: Retas paralelas cortadas por duas transversais

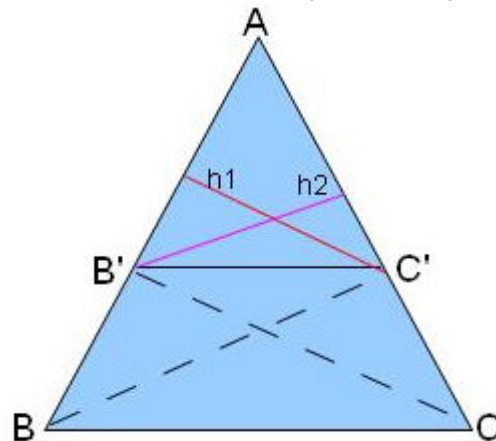


Podemos representar os pontos da situação da figura 2.10 por meio de um triângulo conforme a figura a seguir.

<sup>10</sup>É um ramo da geometria que tem como objetivo representar objetos de três dimensões em um plano bidimensional e, a partir das projeções, determinar distâncias, ângulos, áreas e volumes em suas verdadeiras grandezas.



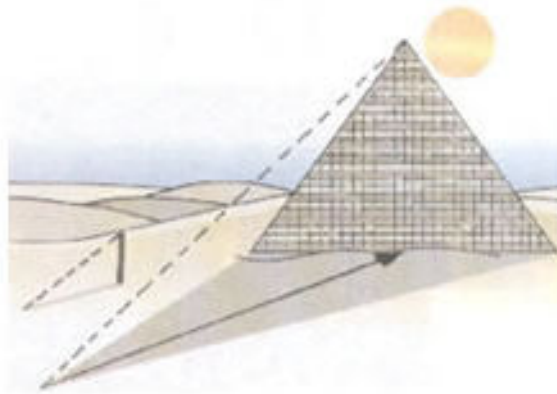
Figura 2.14: Triângulo formado ABC formado pelas retas paralelas e transversais



Fonte: Autor, 2016

Na figura acima, temos que o segmento B'C' é paralelo ao segmento BC. Dessa forma, podemos afirmar que os triângulos B'CC' possuem a mesma área do triângulo C'BB', pois ambos possuem a mesma base que é B'C' e mesma altura relativa a essa base. Através do teorema de Tales foi possível encontrar alturas de pirâmides a partir de sua sombra.

Figura 2.15: Representação de uma pirâmide e de uma estaca e suas sombras



SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Teorema de Tales"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm>>. Acesso em 3 de novembro de 2016.

Podemos perceber que a razão entre a altura da estaca ( $H_e$ ) e a de sua sombra ( $h_e$ ) é proporcional<sup>11</sup> a razão entre a altura da pirâmide ( $H_p$ ) e a sua sombra ( $h_p$ ). Isto é:

$$\frac{H_e}{h_e} = \frac{H_p}{h_p}$$

<sup>11</sup> No apêndice B, colocamos a atividade 2 como sugestão de aplicação de proporcionalidade.

Pela relação acima, podemos dizer que o teorema de Tales é uma importante ferramenta em Astronomia, sobretudo, considerando a Astronomia pré-Einstein, pois a partir das relações de proporcionalidade, podemos encontrar distâncias inacessíveis conforme vimos na figura 2.10. Além disso, vimos que Eratóstenes se utilizou disso para encontrar o raio da Terra e, por conta de seu experimento, teve seu reconhecimento como um dos 10 mais belos experimentos de todos os tempos em Física.

## 2.5 Leis de Kepler

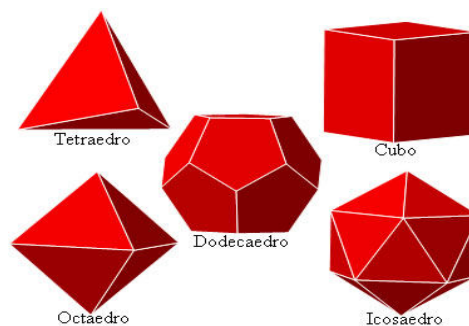
Copérnico, que era adepto do sistema Heliocêntrico, calculou as distâncias entre os planetas e o Sol considerando que eles se deslocavam com velocidades constantes em movimentos circulares centrados no Sol. No entanto, os dados obtidos a partir das observações não eram suficientemente satisfatórios para comprovar tal teoria. Por isso, ele fez algumas alterações em seu modelo de Universo para corrigir tal inconsistência, mas acabou por utilizar recorrendo ao sistema com epiciclos utilizado por Ptolomeu e outros astrônomos da antiguidade. Gleiser (2006) coloca que na tentativa de ajustar os dados obtidos à teoria, Copérnico acabou incluindo 48 epiciclos o que descaracterizava a ideia simplificada do Universo Heliocêntrico, além de se identificar com o antigo sistema de Ptolomeu que se pretendia suplantado. Além disso, seus dados não eram muito precisos. Ele fez poucas observações e confiava muito nos dados fornecidos na antiguidade, sobretudo no Almagesto de Ptolomeu. Isso explica o fato da teoria copernicana, publicada em meados do século XVI, somente ser aceita 100 anos depois.

Nesse sentido, o dinamarquês Tycho Brahe se dedicou a vida toda para superar as dificuldades encontradas por Copérnico. De família nobre, Brahe se encantou com a Astronomia pela previsibilidade de fenômenos tais como eclipse do Sol. Passou sua vida se dedicando a observações dos céus e, pela sua proximidade com o rei Frederico II da Dinamarca, ganhou a ilha de Huen que se localizava entre a Dinamarca e a Suécia que serviu como observatório. De acordo com a riqueza de dados obtidos por ele, a teoria heliocêntrica de Copérnico precisava de ajustes.

Mesmo não tendo conhecimentos matemáticos suficientes para interpretar os dados obtidos pelas observações, ele montou uma espécie de sistema híbrido onde os Planetas giravam em torno do Sol e este, por sua vez, girava em torno da Terra, sistema esse que não vingaria. Após a morte de Frederico, Brahe perdeu força e sua ilha e, com isso, foi morar perto de Praga que o aproximou de Johannes Kepler. (Oliveira filho, 2004)

Kepler viveu, como mencionado anteriormente, entre os séculos XVI e XVII. Neste período, a Europa vivia em constantes guerras e disputas religiosas, sobretudo entre católicos e protestantes. Diferente de Brahe, ele nasceu em uma família pobre e desestruturada. No entanto, o Estado oferecia bolsas de estudo para que jovens inteligentes pudessem se dedicar aos estudos sem maiores preocupações. Foi dessa forma que Kepler, cuja brilhante inteligência se destacou precocemente, embarcou nos estudos que os levou ao seminário e a Universidade e, nela, Kepler se tornou adepto do sistema Copernicano. Na época de Johannes seis planetas eram conhecidos: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. O que intrigava Kepler era o porquê de serem apenas seis planetas. Em 1595, em uma de suas aulas, ele encontrou a “resposta”, que ele considerou o maior achado de sua vida. Para ele, os seis planetas significavam cinco espaços entre os pares de planetas que representariam os cinco poliedros de Platão <sup>12</sup>.

Figura 2.16: Poliedros de Platão.



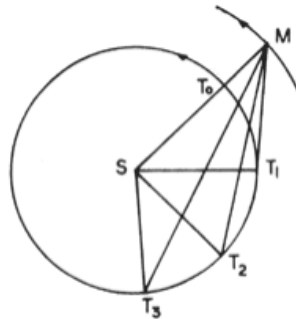
SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Os Sólidos de Platão"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/os-solidos-platao.htm>>. Acesso em 13 de setembro de 2016.

<sup>12</sup>São poliedros convexos que todas as faces são polígonos congruentes e encontramos o mesmo número de arestas em todos os vértices. São eles: tetraedro, hexaedro, octaedro (cubo), dodecaedro e icosaedro.

Nesse sentido, Kepler pensava que entre as esferas de dois planetas consecutivos se encaixaria um poliedro regular circunscrito a uma esfera e inscrito na outra. Essa ideia resultou no primeiro livro de Kepler intitulado *Mysterium Cosmographicum*, em 1596. Quando Brahe recebeu o livro, logo percebeu o brilhantismo matemático de Kepler, porém com pouca capacidade de observação. Assim, Kepler se tornou assistente de Brahe e, após sua morte, Johannes foi nomeado seu sucessor. Após intermináveis tentativas de ajustes da teoria à realidade, Kepler foi abandonando dogmas tais como o da órbita circular e do movimento uniforme. (Gleiser 2006)

Ele se dedicou ao estudo de Marte, pois, pelo fato de estar mais próximo ao Sol, ele se move mais rapidamente em sua órbita, voltando em menos tempo ao ponto inicial e, assim, facilitando o estudo. Além disso, ele é também o planeta cuja órbita é mais elíptica. Kepler calculou várias distâncias da Terra ao Sol, considerando sucessivas posições da Terra a partir de uma oposição de Marte e nos sucessivos retornos de Marte à posição inicial  $M$  (ver figura 2.17).

Figura 2.17: Representação utilizada por Kepler para determinação de distância Terra – Sol.



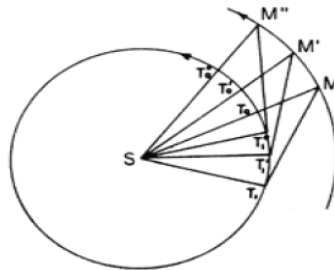
ÁVILA, Geraldo. *Kepler e a órbita elíptica*. Revista do professor de Matemática – RPM 15, 2010.

Inicialmente, Marte se localizava no ponto  $M$ , a Terra  $T_0$  e o Sol em  $S$ . Após 687 dias, Marte volta à posição  $M$ , enquanto a Terra está em  $T_1$  por não ter completado a segunda volta. No segundo retorno de Marte para a posição  $M$ , a Terra estará em  $T_2$  e assim sucessivamente. Kepler podia calcular os ângulos entre  $MST_1$  e  $MST_2$  a partir de dados deixados por Tycho do mesmo modo que os ângulos entre  $MT_1S$  e  $MT_2S$ . Kepler utilizou  $SM$  como unidade de comprimento e, com isso, os triângulos  $SMT_1$  e  $SMT_2$  poderiam ser resolvidos através da trigonometria e encontrar as distâncias  $ST_1$  e  $ST_2$ , em função de  $SM$ , a partir de conhecimentos dos ângulos e do lado  $SM$ . Kepler concluiu que a órbita da Terra era circular e que o Sol

estava a 1/59 do centro da órbita terrestre. Ele notou que a velocidade da Terra não era uniforme, isto é, quanto mais próximo a Terra estivesse do Sol, maior seria sua velocidade.

Em seguida, Kepler resolve se dedicar especificamente a órbita de Marte. Utilizando-se dos triângulos formados por S, M e T com suas variações (figura 2.16), ele encontra a distância SM em termos da distância  $ST_1$  do Sol a Terra. O procedimento é repetido várias vezes, obtendo os triângulos  $SMT_1$ ,  $SM'T_1'$ ,  $SM''T_1''$  (figura 2.17).

Figura 2.18: Método de Kepler para encontrar a distância Sol – Marte.



ÁVILA, Geraldo. *Kepler e a órbita elíptica*. Revista do professor de Matemática – RPM 15, 2010

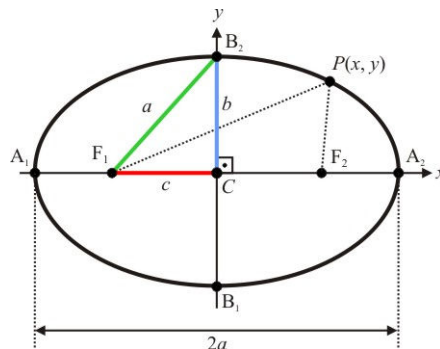
Novamente a partir de dados observados por Brahe, Kepler encontra as distâncias SM, SM', SM'', e assim por diante, em termos de  $ST_1$ ,  $ST_1'$ ,  $ST_1''$ . Realizados os cálculos, Johannes concluiu que a órbita de Marte não era circular, e sim, “oval”. Mas que oval seria esta? Após muitas tentativas, Kepler concluiu que a órbita era elíptica com o Sol ocupando um dos focos<sup>13</sup>. A partir dessa constatação, ele generalizou esse fato para todos os planetas e, assim, criou sua primeira lei a qual afirma que cada planeta descreve uma órbita elíptica com o Sol ocupando um dos focos.

Destaquemos, aqui, a elipse. Conhecida desde a antiguidade a elipse era chamada de seção cônica por ser obtida como a intersecção de um plano com um cone ou cilindro regulares. Definimos elipse como o lugar geométrico de um plano onde a soma da distância a dois pontos fixos,  $F_1$  e  $F_2$ , resulta em um valor constante. Isto é, uma elipse é formada pelo conjunto de pontos P (x,y) que obedeça a relação:

<sup>13</sup> No apêndice B, colocamos a atividade 3 como sugestão de trabalhar a elipse em sala de aula.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Figura 2.19: Elipse com eixo focal coincidindo com o eixo horizontal.



Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de focos da elipse a uma distância  $2c$  um do outro que, pela primeira lei de Kepler, um deles é ocupado pelo Sol,  $A_1$  e  $A_2$  são vértices do eixo maior, distantes  $2a$  um do outro,  $B_1$  e  $B_2$  são vértices do eixo menor, distantes  $2b$  um do outro. O “achatamento” da elipse, também chamada de excentricidade ( $e$ ) é dado pela razão entre a distância  $c$  pela distância  $a$ . Com algumas manipulações algébricas, obtemos que a equação da elipse com eixo focal sobre o eixo  $x$  é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para elipses com eixo focal coincidindo com o eixo vertical, haveria apenas a permuta de  $a$  com  $b$  na equação acima. Caso tenhamos elipses onde seus eixos focais são paralelos a um dos eixos coordenados, teremos um parâmetro  $(x_0, y_0)$  e a equação para uma elipse cujo eixo focal é paralelo ao eixo horizontal ficaria:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

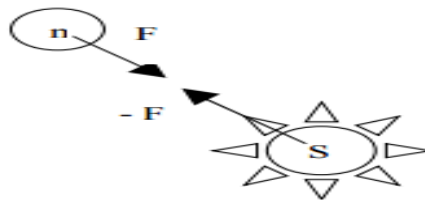
Estudando o movimento dos planetas, Newton chegou à conclusão que eles se atraíam e eram atraídos pelo Sol com uma força gravitacional cujo é dado por

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \vec{u}$$

Na lei da gravitação acima, temos que  $G$  representa o valor da constante gravitacional,  $M$  e  $m$  representam as massas do Sol e o planeta,  $r$  é a distância média entre eles e  $\vec{u}$  é o vetor unitário.

Considere a figura 2.20 em que somente levaremos em consideração a força de atração entre um planeta qualquer e o Sol. Em S, representamos a força negativa para indicar que ela está no sentido contrário da força no planeta.

Figura 2.20: Representação do par de forças de atração entre o Sol e um planeta qualquer.



Como estamos considerando que há apenas a força  $-F$  atuando no Sol, ela já será a força resultante e, pela 2ª Lei de Newton, teremos que:

$$\vec{a} = -\frac{G \cdot M}{r^2} \vec{u}$$

A partir da expressão para a aceleração, onde  $\vec{u}$  é o vetor unitário, conclui-se que o vetor aceleração é paralelo ao vetor raio  $\vec{r}$ , visto que a aceleração da expressão acima é chamada de aceleração centrípeta, isto é, ela aponta para o centro da circunferência e o vetor raio também está na direção do centro da circunferência. Pelas propriedades de vetores, temos que o produto vetorial desses vetores é nulo. Fazemos a derivada do produto vetorial entre o raio  $\vec{r}$  e a velocidade  $\vec{v}$  do planeta.

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}$$

Mas

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \quad e \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

Com isso, teremos que

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}$$

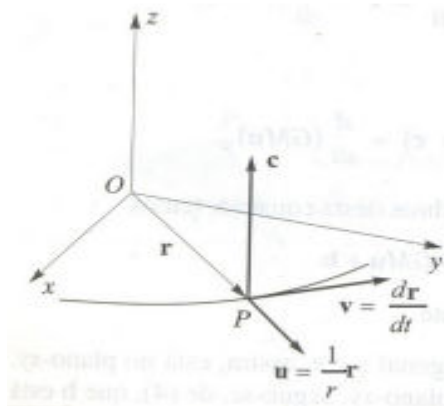
Já vimos que o produto vetorial entre  $\vec{r}$  e  $\vec{a}$  é nulo e sabemos que o produto vetorial de dois vetores coincidentes também é nulo. Com isso, podemos dizer que o produto vetorial entre  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  nos dá uma constante, isto é:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c} \quad (1)$$

Por definição, temos que o produto vetorial de dois vetores é ortogonal a eles e, portanto, temos que  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais a  $\vec{c}$ . Logo, temos que a órbita do planeta está contida em um plano que passa pela origem e é ortogonal ao vetor  $\vec{c}$ .

Consideremos na figura a seguir, o sistema de coordenadas em que o plano  $xy$  seja o plano da órbita, e utilizaremos  $\vec{r} = r \cdot \vec{u}$  e sabemos que  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{u})}{dt}$ .

Figura 2.21: Representação do plano da órbita.



Pela regra da cadeia, teremos:

$$\vec{v} = \frac{d(r\vec{u})}{dt} = r \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dr}{dt} \vec{u} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{r} \times \left( r \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dr}{dt} \vec{u} \right) \\ \vec{c} &= r^2 \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} + r \frac{dr}{dt} \vec{u} \times \vec{u}. \end{aligned}$$

Como  $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ , então



$$\vec{c} = r^2 \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right)$$

A partir da expressão da aceleração dada pela 2ª Lei de Newton, onde  $\vec{a} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$ , temos que:

$$\vec{a} \times \vec{c} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u} \times \left[ r^2 \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \right]$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = -GM \left[ \vec{u} \times \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \right]$$

No entanto, sabemos que uma identidade para o duplo produto vetorial é dada por  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ . Desta forma, a expressão acima pode ser reescrita e, assim, ficamos com:

$$\vec{a} \times \vec{c} = -GM \left[ \left( \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \frac{d\vec{u}}{dt} \right]$$

Mas  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$  e  $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ , pois  $\vec{u}$  é ortogonal a  $\frac{d\vec{u}}{dt}$ . Assim, ficamos com:

$$\vec{a} \times \vec{c} = -GM \left[ 0 - 1 \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right]$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \frac{d}{dt} (GM\vec{u}) \quad (3)$$

Sabemos que  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , assim ficamos com  $\vec{a} \times \vec{c} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{c})$ . Igualando essa expressão a equação (3), teremos:

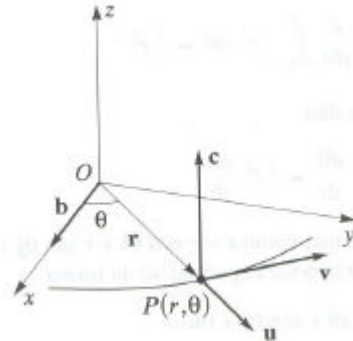
$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{c}) = \frac{d}{dt} (GM\vec{u})$$

Deste modo,

$$\vec{v} \times \vec{c} = GM\vec{u} + \vec{b} \quad (4)$$

O vetor  $\vec{b}$  é um vetor constante e como  $\vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{c}$  e está no plano xy, o vetor  $\vec{b}$  que tem a mesma direção de  $\vec{u}$  também está. Na figura abaixo, temos uma representação do vetor  $\vec{b}$  no plano xy, formando um ângulo  $\theta$  com  $\vec{r}$ .

Figura 2.22: Representação do vetor  $\vec{b}$  no plano xy.



O ponto P possui coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $r = \|\vec{r}\|$ . Deste modo, podemos definir o produto interno de  $\vec{u}$  que é unitário, e  $\vec{b}$  como

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{b} = b \cdot \cos\theta \quad (5)$$

Sabemos que

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = c^2$$

E sabemos que  $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$ , assim:

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{c} = c^2$$

Utilizando-se da propriedade do produto misto  $(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{o} = \vec{m} \cdot (\vec{n} \times \vec{o})$ , em que se  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  e  $\vec{o}$  são vetores, e aplicando na relação acima, ficamos com:

$$c^2 = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{c})$$

Substituindo (4) na expressão acima, ficamos com:

$$c^2 = r\vec{u} \cdot (GM\vec{u} + \vec{b})$$

$$c^2 = rGM(\vec{u} \cdot \vec{u}) + r(\vec{u} \cdot \vec{b})$$

Por (5)

$$c^2 = r(GM + b\cos\theta)$$

Deste modo, isolando  $r$ , teremos:

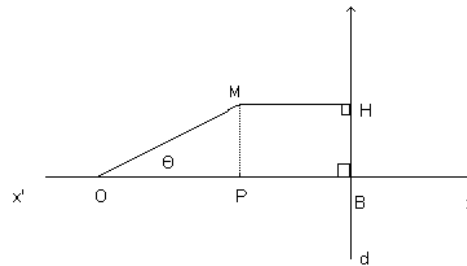
$$r = \frac{c^2}{GM + b \cos \theta}$$

Tomando  $K = \frac{c^2}{GM}$  e  $\varepsilon = \frac{b}{GM}$ , a expressão acima resulta em

$$r = \frac{K}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta} \quad (6)$$

A expressão (6) se trata de uma equação polar das cônicas como veremos a seguir. Na figura abaixo,  $d$  é uma diretriz e  $O$  é o foco. Teremos uma cônica quando a distância de um ponto genérico ao foco está numa razão constante com a distância desse ponto a reta diretriz.

Figura 2.23: Representação base para cônicas.



Na figura acima, seja  $OM = r$ ,  $OB = d$  e  $OP = r \cdot \cos \theta$ , onde  $M$  é um ponto genérico de modo que  $MH = d - r \cdot \cos \theta$ . Seja  $\frac{OM}{MH} = \varepsilon$ , com isso, ficamos com:

$$r = \varepsilon(d - r \cdot \cos \theta)$$

Resolvendo e deixando  $r$  no primeiro membro, teremos:

$$r = \frac{d \cdot \varepsilon}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta} \quad (7)$$

Podemos reescrever as coordenadas do ponto  $P$  da figura 2.24 em coordenadas cartesianas, podemos dizer que  $x = r \cdot \cos \theta$  e  $y = r \cdot \sin \theta$  e, pela relação fundamental da trigonometria,  $x^2 + y^2 = r^2$ . Assim, unindo esse fato à equação (7) e efetuando algumas manipulações, chegamos à equação cartesiana da cônica.

$$(1 - \varepsilon^2) \cdot x^2 + 2d \cdot \varepsilon^2 \cdot x + y^2 = d^2 \cdot \varepsilon^2 \quad (8)$$

A partir a equação (8), teremos as possíveis cônicas de acordo com a excentricidade  $\varepsilon$ . Para  $\varepsilon = 1$  teremos uma parábola,  $\varepsilon > 1$  uma hipérbole,  $\varepsilon = 0$  um

ponto e  $0 < \varepsilon < 1$  uma elipse. Mostraremos o caso para a elipse que representa as órbitas dos planetas, os demais são análogos. A partir da equação (9), dividindo os membros por  $(1 - \varepsilon^2) > 0$ :

$$x^2 + 2 \frac{d \cdot \varepsilon^2 \cdot x}{(1 - \varepsilon^2)} + \frac{y^2}{(1 - \varepsilon^2)} = \frac{d^2 \cdot \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)} \quad (9)$$

Adicionando o termo  $\left(\frac{d \cdot \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right)^2$  para completar quadrado e efetuando algumas manipulações, a equação (9) resulta em:

$$\left(x + \frac{d \cdot \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{d^2 \cdot \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$$

Dividindo os membros pela expressão positiva  $\frac{d^2 \cdot \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}$ , teremos:

$$\frac{\left(x + \frac{d \cdot \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\frac{d^2 \cdot \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{\frac{y^2}{1 - \varepsilon^2}}{\frac{d^2 \cdot \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{d \cdot \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{d \cdot \varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\right)^2} + \frac{\frac{y^2}{1 - \varepsilon^2}}{\frac{d^2 \cdot \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}} = 1$$

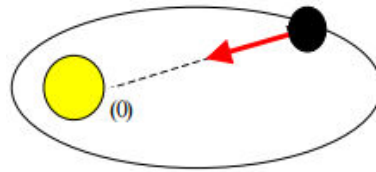
Fazendo  $a = \frac{d \cdot \varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$ ,  $b = \frac{d \cdot \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$  e  $z = -\frac{d \cdot \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$ , chegamos na equação da elipse dada por:

$$\frac{(x-z)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

É importante lembrar que, aqui, consideramos apenas o Sol e um planeta. No entanto, devemos estender considerando os demais corpos celestes. Portanto, nossa demonstração se trata de uma aproximação do que ocorre no movimento dos corpos celestes.

Nesta linha, sabemos que Kepler afirmou que os planetas descreviam órbitas elípticas com o Sol ocupando um dos focos. Isso somente é possível pela ação da força gravitacional que atrai dois a dois os corpos.

Figura 2.24: Representação da força de atração gravitacional Sol – Planeta.

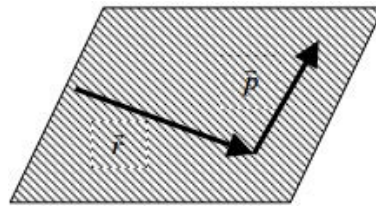


A partir da figura, podemos afirmar que o somatório dos torques<sup>14</sup> em relação ao ponto onde está o Sol é nulo. Além disso,  $\vec{r}$  é paralelo a  $\vec{F}$  para qualquer posição na órbita. A somatória dos torques é dada pela taxa de variação do momento angular<sup>15</sup>.

$$\sum \tau = \frac{d\vec{L}}{dt} \therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Como  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , temos que  $\vec{L}$  não pode variar módulo, direção e nem sentido.

Figura 2.25: Representação do vetor deslocamento e momento linear.



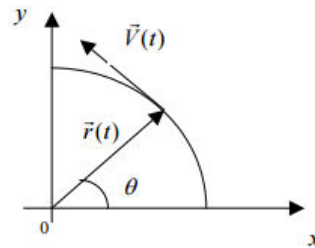
Pela figura acima, pode-se perceber que o momento angular, que é o produto vetorial do vetor  $\vec{r}$  pelo vetor  $\vec{p}$ , é perpendicular ao plano formado pelos vetores. Se a órbita dos planetas mudasse, teríamos o vetor  $\vec{L}$  mudando de direção, mas sabemos que  $\vec{L}$  não pode mudar sua direção e, portanto, a órbita dos planetas é constante.

Considerando a órbita de um planeta de excentricidade nula (circunferência) e com o Sol na origem.

<sup>14</sup>Torque é uma grandeza física associada ao movimento de rotação de um corpo em razão da aplicação de uma força e é dado por  $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$ .

<sup>15</sup> É definido pelo produto vetorial do vetor posição  $\vec{r}$  em relação a um ponto de referência e o momento linear  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .

Figura 2.26: Ponto da elipse de excentricidade nula.



Pela figura, temos que  $x = \vec{r} \cdot \cos\theta$  e  $y = \vec{r} \cdot \sin\theta$ , com  $0 < \theta < 2\pi$ . Deste modo, o vetor posição é dado por:

$$\vec{r} = r \cdot \cos\theta \vec{i} + r \cdot \sin\theta \vec{j} \quad (11)$$

Utilizando-se disso, temos que:

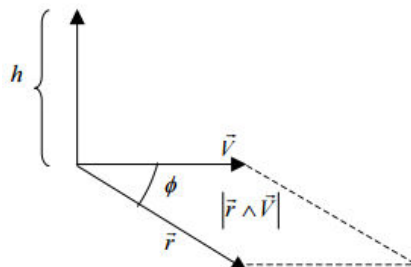
$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = -r \cdot \sin\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \vec{i} + r \cdot \cos\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \vec{j} \quad (12)$$

Tomando um vetor  $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ , substituindo (11) e (12) e efetuando algumas manipulações para encontrarmos o módulo de  $h$ , chegaremos a

$$h = r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (13)$$

Figura 2.27: Representação do vetor  $\vec{h}$ .



Assim, o módulo de  $h$  pode ser interpretado como a área do retângulo formado entre  $\vec{r}$  e  $\vec{V}$ , isto porque como estamos considerando uma circunferência, teremos em qualquer ponto um ângulo entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{V}$  igual a  $90^\circ$ . A partir da relação (13), podemos encontrar o momento angular de um planeta em um ponto qualquer de sua órbita.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

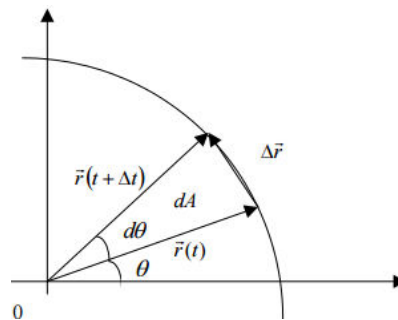
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{V} = m(\vec{r} \times \vec{V})$$

De modo que podemos associar o momento angular  $\vec{L}$  ao vetor  $\vec{h}$ , onde:

$$\vec{L} = m \cdot \vec{h} \rightarrow |\vec{L}| = m \cdot |\vec{h}|$$

Provando, assim, que tanto  $\vec{L}$  quanto  $\vec{h}$  são constantes. Considerando, agora, na figura a seguir duas posições da órbita de um planeta, o vetor deslocamento é a reta que une as posições  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .

Figura 2.28: Deslocamento de um planeta.



Considerando o  $\Delta t \rightarrow 0$ , o módulo do deslocamento ficará muito próximo ao comprimento do arco formado por  $d\theta$ . Assim, a área  $dA$  pode ser encontrada por:

$$dA = \frac{r \cdot r d\theta}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}, h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

Sabemos que  $h$  é constante e, com isso, a razão  $\frac{h}{2}$  é constante. Desta forma, concluímos que a razão  $\frac{dA}{dt}$  é constante. Comprovando, assim, a teoria que é

conhecida como segunda Lei de Kepler: *A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.*

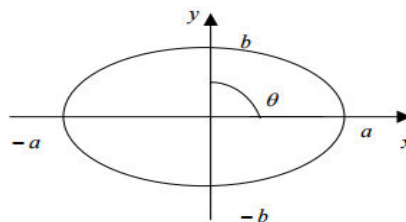
Considerando  $T$  como o período de um planeta em torno do Sol, isto é, o tempo gasto pelo planeta para efetuar uma volta completa ao redor do Sol e tomando uma órbita elíptica de eixo maior  $2a$  e eixo menor  $2b$ , temos que o período do planeta é o tempo gasto para varrer toda a área da elipse.

$$dA = \frac{h}{2} dt$$

$$\int_0^{A_e} dA = \frac{h}{2} \int_0^T dt$$

$$A_e = \frac{h}{2} T \quad (14)$$

Figura 2.29: Elipse de eixo maior  $2a$  e eixo menor  $2b$ .



A área de uma elipse é dada por:

$$A_e = 4 \int_0^b dy \int_0^x dx \quad (15)$$

Pela equação da elipse, temos que:

$$x = a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Substituindo  $x$  em (15) e sabendo que  $\int_0^x dx = x$ , obtemos:

$$A_e = 4 \int_0^b a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dy \quad (16)$$



Pela figura 2.28, temos que  $y = b \cdot \text{sen}\theta$  e, com isso,  $dy = b \cdot \text{cos}\theta d\theta$ . Em relação aos limites de integração, temos que para  $y = b$ , devemos ter  $\text{sen}\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ . Substituindo essas informações em (16):

$$A_e = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} \cdot b \cdot \text{cos}\theta d\theta$$

$$A_e = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{cos}^2\theta} \cdot \text{cos}\theta d\theta$$

$$A_e = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{cos}^2\theta d\theta$$

$$A_e = 4ab \left( \frac{1}{2}\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_e = \pi ab \tag{17}$$

Substituindo (17) em (14), ficamos com:

$$\pi ab = \frac{h}{2} T$$

$$T = \frac{2\pi ab}{h} \tag{18}$$

Sabemos que em uma elipse  $a^2 = b^2 + c^2$ , onde  $c = a \cdot e$ , onde  $e$  é a excentricidade  $e$ , assim, podemos reescrever a igualdade  $a^2 = b^2 + a^2 e^2$ . Assim, podemos dizer que  $b = a \sqrt{1 - e^2}$ . Pela definição de *semi-latus rectum*:

$$\frac{h^2}{GM} = T = a(1 - e^2)$$

Desta forma, temos que:

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$b^2 = aT$$

$$\frac{b^2}{h^2} = \frac{a}{GM} \quad (19)$$

Elevando (18) ao quadrado e substituindo (19), obtemos que

$$T^2 = 4\pi^2 a^2 \frac{a}{GM}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (20)$$

A relação (20) representa a demonstração da terceira Lei de Kepler a qual diz que o quadrado do período de qualquer planeta é diretamente proporcional ao cubo da distância média ao planeta ao Sol. É importante salientar que, como vimos acima, as demonstrações das Leis de Kepler são baseadas no cálculo infinitesimal de Newton e, como sabemos, Newton sucedeu Kepler. Quando Kepler formulou suas leis, ele não possuía o conhecimento matemático suficiente para demonstrar o que propôs o que ocorreria com Newton no século XVII.

Vale salientar que, no Brasil, tivemos algumas tentativas de inserção do cálculo na grade curricular da educação básica antes da década de 1970. No entanto, não houve sucesso e, até os dias atuais, o cálculo não é contemplado na educação básica. Márcio Simões<sup>16</sup>, em seu blog, tratou do tema e, segundo ele, uma das razões para que o ensino de cálculo não obtivesse sucesso tinha relação com o modo como sua inserção fora feita. Para ele

Mas, do modo como era ensinado, não podia dar certo, pois era tão somente uma antecipação do modo como era ensinado na faculdade. [...] na faculdade, a maioria dos cursos começa com o conceito formal de limite e isso foi reproduzido na escola básica. É impossível que uma abordagem como essa dê certo.

Ainda nessa perspectiva acerca da presença do cálculo no ensino médio, Simões faz algumas sugestões em relação aos métodos a serem utilizados para que o estudo do cálculo na educação básica obtenha sucesso. Ele diz que

O professor começa com a ideia mais simples, que é a de integral, e com as funções mais simples, que são as funções polinomiais de primeiro grau.

---

<sup>16</sup><https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/>

Depois ele trabalha a ideia de derivada. E depois, a de equação diferencial. [...] Daí ele recomeça, mas desta vez com as funções polinomiais de grau 2.

Não estamos dizendo, aqui, que o pensamento citado represente o nosso, no entanto, representa uma linha de pensamento em relação à inserção de um tema tão importante na grade curricular dos jovens brasileiros. Não é objetivo do presente trabalho, mas é importante a discussão acerca de tal tema, visto que é de extrema relevância no entendimento sobre, por exemplo, o comportamento de funções.

## 2.6 Newton e a Astronomia

Newton é considerado por muitos cientistas como um dos maiores gênios da ciência. Suas contribuições estão em áreas como Cálculo, sendo um dos inventores junto com Leibniz do cálculo diferencial integral, Óptica com a dispersão das cores, produtos notáveis com seu Binômio de Newton e, o que trataremos com maior ênfase, na Astronomia tratando acerca da mecânica do Universo.

Em 1687, Newton publica sua obra prima *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, o Principia. Nele continham as leis da Gravitação Universal, demonstrando como ocorriam as atrações entre os corpos celestes a uma proporção direta com o produto das massas e inversa com o quadrado da distância que os separava. Esse princípio explica tanto o porquê dos objetos caírem, quanto o fato das órbitas dos planetas serem elípticas. Além de tratar sobre a Astronomia, no Principia também constava as leis do movimento conhecidas como as três leis de Newton: Inércia, Princípio Fundamental da Dinâmica e Ação e Reação. O impacto devido à publicação foi tão grande que a história da ciência pode ser dividida em antes e depois dele.

Em sua primeira lei da mecânica, Newton se utilizou de argumentos de Galileu Galilei e afirmou que um corpo tende a manter seu estado, isto é, se está em repouso tende a permanecer em repouso e se estiver em movimento, tende a continuar em movimento retilíneo e uniforme a não ser que existam forças externas. Esse fato Galileu conhecia, no entanto, Newton definiu a propriedade do corpo que resiste à mudança que é a *inércia* e, por isso, a primeira lei de Newton ficou conhecida como lei da inércia. A medida da inércia de um corpo é o momento linear.

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{constante se } \vec{F} = 0$$

Newton associa a mudança na velocidade de um corpo com a aplicação de uma força. Nesse sentido, surge a segunda lei de Newton que é conhecida como princípio fundamental da dinâmica. De acordo com ela, a força líquida ou resultante é diretamente proporcional ao produto da massa do corpo que sofre a ação da força pela aceleração adquirida por ele.

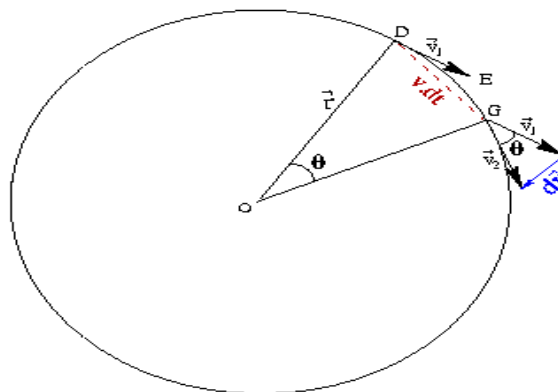
$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ou ainda,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Na terceira lei, Newton estabeleceu que quando uma força atua sobre um corpo (ação) este, por sua vez, devolve a força aplicada (reação) com mesmo módulo, direção, porém, com sentido oposto. Ele explicou o movimento dos planetas em torno do Sol, afirmando que a força dirigida ao Sol produzia aceleração e, com isso, mudava continuamente a direção da velocidade do planeta.

Figura 2.30: Aceleração em órbitas circulares.



Na figura acima, temos que  $\theta$  é o ângulo entre os pontos D e G da trajetória, supostamente circular, de um planeta. Temos que no instante em que o planeta (considerado como partícula) está no ponto D, sua velocidade é  $v_1$ . Após um intervalo de tempo  $dt$  a partícula percorreu uma distância  $v \cdot dt$  e está com uma velocidade  $v_2$  de mesmo módulo que a anterior, mudando apenas a direção. Pela relação entre ângulo e arco, temos que, pela figura 2.29:

$$\theta = \frac{v \cdot dt}{r} = \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r}$$

Mas, sabe-se que  $a = \frac{dv}{dt}$  e, com isso:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

A aceleração em (1) é conhecida como aceleração centrípeta que é a responsável por variar direção e sentido da velocidade tangencial do corpo em um movimento circular. Pela segunda lei de Newton, temos que:

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

Tomando uma trajetória circular, pode-se dizer que a velocidade é a razão entre a distância percorrida que corresponde ao comprimento da circunferência e o tempo gasto pelo planeta para dá uma volta completa, que é dado pelo período  $T$ . Com isso, temos que:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

No entanto, Newton já tinha os dados de Kepler e, através da 3ª lei em que  $T^2 = k \cdot R^3$ , ficamos com:

$$v^2 = \frac{4\pi^2}{k \cdot r} \quad (3)$$

Desta forma, Newton concluiu que o quadrado da velocidade orbital de um planeta era inversamente proporcional a sua distância média ao Sol. Analisando (2) e (3), Newton concluiu que a força centrípeta que atua em um planeta pela ação do Sol é:

$$F \propto \frac{m}{r^2} \quad (4)$$

Por (4), temos que a força centrípeta que atua sobre um corpo em movimento circular, é diretamente proporcional a sua massa e inversamente proporcional ao quadrado do raio de sua trajetória. Por outro lado, Newton, em sua terceira lei,

mostrou que quando uma força atua sobre um corpo (ação), há a devolução dessa força (reação) feita pelo corpo. Com isso, pode-se dizer que o planeta exerce sobre o Sol uma força de mesmo valor e direção, no entanto, em sentido contrário. Logo, para essa força, podemos dizer que a força é também proporcional a massa  $M$  do Sol.

$$F \propto \frac{M}{r^2} \quad (5)$$

Com as relações (4) e (5) demonstradas por Newton, ele deduziu que a força de atração gravitacional que existia entre os dois corpos era diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional a distância média entre os corpos.

$$F = G \frac{M.m}{r^2} \quad (6)$$

Onde  $G$  é a constante Universal da Gravitação e seu valor é de aproximadamente  $6,67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$  que foi medida anos depois a partir de dados obtidos da *experiência de Cavendish*<sup>17</sup> no final do século XVIII. Com a Lei da Gravitação Universal, Newton foi o pioneiro em unificar conceitos terrestres e celestes, isto é, ele estabeleceu um conjunto de teorias que serviam para a mecânica em geral, desde o movimento de um veículo, até para movimentos de Planetas. A teoria de Newton foi válida até que, no início do século passado, Einstein chegou a sua teoria da relatividade geral.

---

<sup>17</sup>Balança de torção projetada por John Michell e realizada por Henry Cavendish para medir a densidade da Terra e, através dos dados obtidos, encontrou-se um valor muito próximo ao que temos hoje para a constante gravitacional  $G$ .

### 3. Astronomia a partir de Albert Einstein.

As teorias de Newton tanto para a Mecânica quanto para a Gravitação, criadas em meados do século XVII, vigoraram até o início do século XX, quando Albert Einstein criou suas teorias da relatividade. Mudança, seja para melhor ou pior, sempre demanda coragem. Abandonar as velhas ideias que, em geral, nos deixam confortáveis e com a sensação de segurança e controle não é nada fácil. No entanto, uma das características mais marcantes de grandes cientistas como Galileu, Kepler, Newton, Einstein e tantos outros, é sua independência intelectual. Para eles, o senso comum não representa acomodação na busca incessante pela explicação de fenômenos.

Em sua juventude, Einstein teve a seguinte ideia: Se eu viajar lado a lado com um raio de luz com a velocidade  $c^{18}$ , eu deveria observar esse raio como uma onda eletromagnética em repouso, oscilando espacialmente como uma corda de violão. No entanto, esse fato ia de encontro aos experimentos e as equações de Maxwell, enquanto que para a física newtoniana, esse fato era bastante razoável. Dessa forma, Einstein encontrou uma inconsistência entre a teoria de Newton aceita na época e as equações de Maxwell<sup>19</sup> para o eletromagnetismo. Para Newton, a velocidade da luz não tinha nada de especial, fora o fato de ser muito alta e para Maxwell, a luz estava sempre em movimento e, portanto, não poderíamos ter um campo magnético em repouso. Logo, havia uma inconsistência em alguma das teorias.

Einstein, como veremos a seguir, irá abandonar a ideia que a velocidade da luz no vácuo (espaço vazio) é igual a todas as outras. Para isso, ele a colocará como velocidade limite na Natureza, isto é, nenhum corpo pode se mover com velocidade igual ou superior ao valor da velocidade  $c$  da luz. Ele vai mais além e afirma que essa velocidade independe da velocidade da fonte.

---

<sup>18</sup> Velocidade da luz no vácuo cujo valor é de  $3 \times 10^8$  m/s.

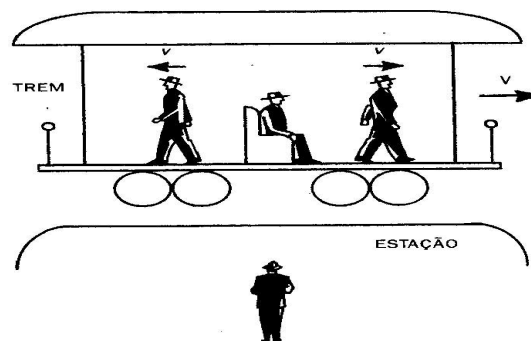
<sup>19</sup> Físico e Matemático escocês.

### 3.1 Relatividade Especial ou Restrita

Inicialmente, é bom salientar que o conceito de relatividade de movimentos é atribuído, em geral, a Galileu. Basicamente, o princípio da relatividade diz que as leis da Física são idênticas para todos os referenciais inerciais<sup>20</sup>. Considere dois carros em uma rodovia com velocidades constantes e com mesma direção. Para um ocupante de um dos carros, a velocidade relativa entre os veículos será a soma das velocidades se eles estiverem em sentidos opostos e será a subtração se estiverem com mesmos sentidos. Parece-nos bastante razoável que seja sempre assim, no entanto, a situação muda quando falamos de corpos com velocidades altas. Neste capítulo, as figuras 3.1 até 3.4 foram retiradas de uma mesma fonte<sup>21</sup>.

Considere a figura 3.1 a seguir a qual mostra um trem se deslocando (plano do papel) para a direita com velocidade  $V$ . Para o passageiro sentado dentro do trem, a impressão é de que a estação é quem se move para a esquerda com velocidade em módulo  $V$ .

Figura 3.1: O famoso trem de Einstein.



Agora, consideremos o passageiro em pé no trem e se deslocando com uma velocidade  $v$  para a direita em relação ao que está sentado. Para tal situação, um observador parado na estação perceberá que o passageiro está se movendo para a direita com velocidade  $V + v$ . Caso o movimento fosse para a esquerda, o observador na estação perceberia o passageiro com velocidade  $V - v$ . Até aqui, nada de novo foi acrescentado. Imagine que ao invés de termos esse passageiro

<sup>20</sup> São aqueles cuja primeira Lei de Newton (Inércia) vale, isto é, corpos parados ou em movimento uniforme.

<sup>21</sup> Fonte: GLEISER, Marcelo. *A dança do universo: dos mitos de criação ao Big Bang* / Marcelo Gleiser. São Paulo: Companhia das letras, 2006.



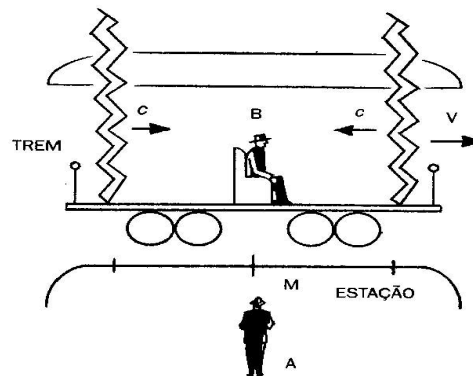
caminhando pelo trem, tenhamos uma lanterna sendo acesa pelo passageiro que está sentado.

Seguindo o mesmo raciocínio anterior, para o observador na estação teríamos a luz se propagando para a direita com velocidade  $c + V$  e para a esquerda com velocidade  $c - V$ . Isto é, se o trem estiver com uma velocidade  $V = c$ , teríamos a luz em repouso em relação ao observador na estação. Já vimos que isso contradiz a teoria eletromagnética de Maxwell ou a mecânica de Newton.

Em 1905, Einstein escreveu um manuscrito intitulado *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento* e, nele, justifica a importância da velocidade da luz. Foi nesse manuscrito que Einstein construiu os pilares de sua teoria da relatividade especial a partir de dois postulados: 1) as leis da Física são as mesmas para observadores se movendo com velocidade relativa constante; 2) a velocidade da luz no vácuo independe do movimento de sua fonte ou do movimento do observador. O primeiro já era conhecido, mas o segundo era novo e nos dizia que a luz estava sempre em movimento e com a mesma velocidade.

O segundo postulado em si parece um tanto quanto inocente (e é), mas o que está por trás é que revolucionou a ciência. Antes disso, voltemos ao trem onde temos um observador parado na estação e um passageiro sentado no meio do trem, sendo levado para a direita com velocidade  $V$ .

Figura 3.2: Dois raios caem ao mesmo tempo no trem.

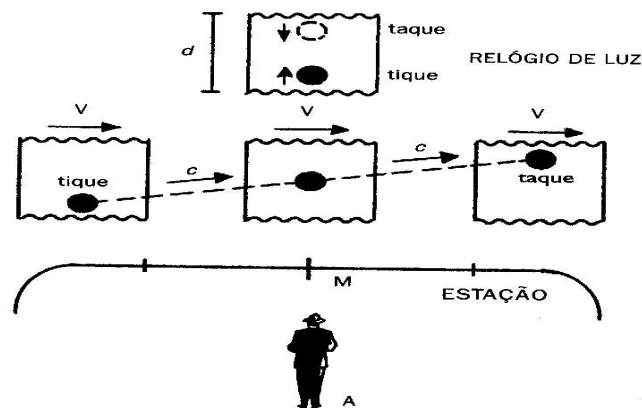


Considere que dois raios caem na dianteira e na traseira do trem se movendo com velocidade  $V$  para a direita. Para o observador na estação, o tempo gasto para a luz sair da dianteira e chegar ao passageiro é igual ao tempo gasto para a luz sair da traseira e chegar ao passageiro, pois ele está parado e o passageiro está na

metade do trem. No entanto, o evento chegada da luz no passageiro não ocorre simultaneamente. Como o passageiro se move na direção do raio da dianteira, ele irá enxergar primeiro o raio que cai na dianteira. Isto é, os dois eventos que foram simultâneos para o observador, não foram para o passageiro, ou seja, o tempo absoluto não existe.

Assim, Einstein quebra dois conceitos do nosso bom senso, com duas consequências de seu segundo postulado que são *dilatação do tempo* e *contração do espaço*. Em outras palavras, temos que um relógio em movimento bate mais lentamente do que um relógio em repouso, e que um bastão encolhe na direção de seu movimento. Na figura 3.3, temos o que chamamos de relógio de luz. Basicamente, temos dois espelhos um no teto e um no chão do trem.

Figura 3.3: Relógio de luz que serve para demonstrar a dilatação temporal.



Na parte superior da figura, temos a distância percorrida  $d$  pela luz quando o trem está parado, ou seja, quando a luz toca no espelho inferior, o observador escuta o tique e, quando toca no superior, o taque. Considerando a velocidade constante  $V$  do trem (parte inferior da figura), temos que a luz percorre uma distância maior que  $d$  e, portanto, o tempo gasto será maior.

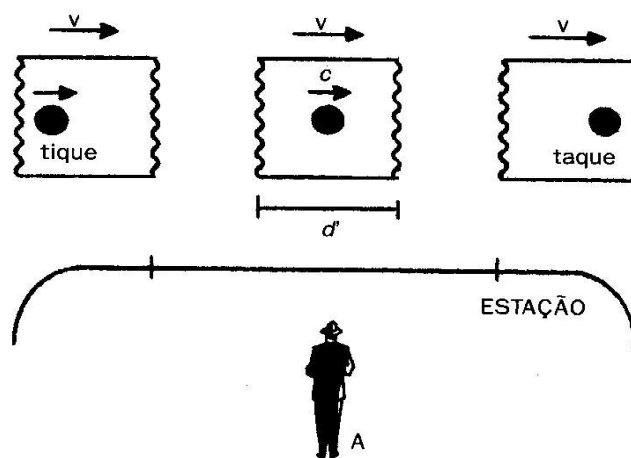
Em resumo, considerando o relógio em movimento relativo em relação ao observador, ele baterá mais lentamente em comparação à primeira situação. Se estivéssemos levando em consideração qualquer relógio ou até mesmo o coração, os resultados seriam idênticos. A relação entre os tempos observados é dada por

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Onde  $\Delta t'$  é o tempo em relação ao referencial  $S'$  e o  $\Delta t$  é o tempo em relação ao referencial  $S$ . A redução para a Física Clássica ocorre quando o valor de  $v$  em relação à  $c$  é muito pequena e, com isso, a divisão é aproximadamente igual a 0 e teremos a igualdade nos tempos registrados.

Para demonstrarmos a contração do espaço, tomemos novamente o relógio de luz (lembrando que esses experimentos são mentais), desta vez com o relógio na horizontal e os espelhos na vertical conforme figura 3.4.

Figura 3.4: Relógio de luz na horizontal e espelhos na vertical em um trem com velocidade  $V$ .



O tempo registrado, entre o tique e taque, pelo observador na estação enquanto o trem mantém uma velocidade constante  $v$  é o mesmo da situação anterior quando o trem também se movia. No entanto, em comparação com a situação da figura 3.3, temos que a luz vai percorrer uma distância maior visto que, além dela percorrer a distância  $d$  entre os dois espelhos, ela terá que alcançá-lo.

Como sabemos que a velocidade da luz é a mesma, para que o tempo registrado seja o mesmo temos que a distância  $d'$  deve ser menor que a distância  $d$  da figura 3.3, ou seja, houve uma contração do espaço na direção de seu movimento. A expressão é dada por:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

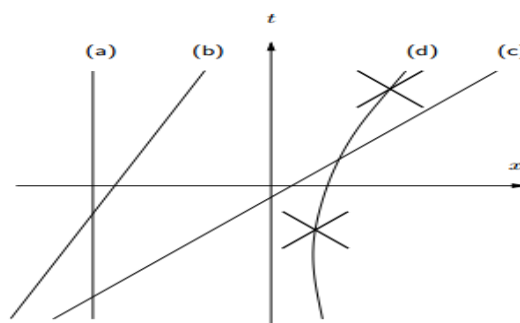
Onde  $L_0$  é comprimento medido no próprio referencial (próprio) e  $L$  é o comprimento medido por um observador com velocidade relativa não nula.

É importante salientar que, aqui, estamos considerando a velocidade da luz. No dia-a-dia, não percebemos a dilatação temporal ou a contração espacial, pois as velocidades alcançadas são extremamente menores que a da luz e, portanto, os efeitos relativísticos são desprezíveis. Com isso, a física newtoniana nos serve, mas ela cai por terra quando tratamos, por exemplo, de raios cósmicos<sup>22</sup>, pois para eles os efeitos relativísticos são relevantes.

### 3.2 A geometria da relatividade

Conforme mencionamos, no início no século XX, os conceitos de espaço e tempo mudaram com a teoria da relatividade restrita. A geometria presente na relatividade difere da que comumente trabalhamos na educação básica que é a Euclidiana. Para tratarmos da relatividade especial, utilizamos a *Geometria de Minkowski*<sup>23</sup>. Para formular geometricamente a teoria da relatividade, escolhemos um referencial inercial  $S$ . Cada evento pode ser representado indicando a posição  $x$  e o instante  $t$  que ocorreu. O diagrama do espaço-tempo expressa, num plano cartesiano, os eventos como pontos com coordenadas  $x$  e  $t$ , onde  $t$  é, por razões históricas, a ordenada. A representação do movimento de uma partícula num diagrama de espaço-tempo pode ser descrito por uma das situações da figura abaixo.

Figura 3.5: Diagrama espaço-tempo: (a) Partícula em repouso; (b) Partícula com velocidade constante; (c) Um raio luminoso; (d) Partícula com velocidade variável.

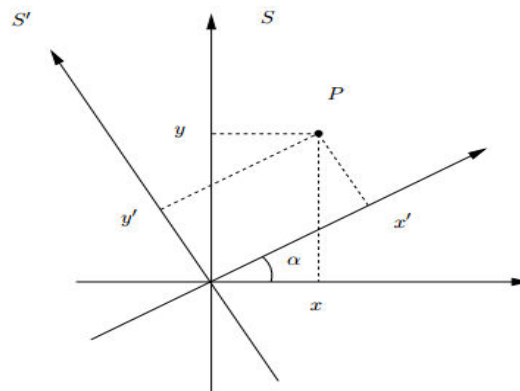


<sup>22</sup> São partículas dotadas de alta energia que se deslocam com velocidades próximas a da luz no espaço.

<sup>23</sup>Hermann Minkowski (1864-1909), antigo professor de Matemática de Einstein que se debruçou na Matemática da teoria da relatividade restrita.

Sabemos que a velocidade de qualquer partícula deve ser menor que a da luz. Portanto, se tivermos dois raios luminosos sendo emitidos, teremos que as retas desses raios não irão se intersectar em outro ponto. A escolha de outro referencial inercial  $S'$  implica em mudança nas coordenadas  $(x', t')$  dado que um evento nesse referencial, em geral, não coincide com um evento no referencial inercial  $S(x, t)$ .

Figura 3.6: Sistema de dois eixos.



Na figura, tomamos uma rotação a partir de um ângulo  $\alpha$  em relação ao sistema cartesiano da geometria euclidiana. Dado um ponto  $P$ , suas coordenadas no plano cartesiano são dadas por  $(x, y)$  em relação ao referencial  $S$ , enquanto que no referencial  $S'$  são dadas por  $(x', y')$  expressas por:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

A introdução de um sistema de eixo de coordenadas nos permite calcular distâncias entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  de coordenadas  $(x'_1, y'_1)$  e  $(x'_2, y'_2)$  no referencial  $S'$  enquanto que no referencial  $S$  as coordenadas são  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . De acordo com a mudança no par ordenado, teremos que as coordenadas dos pontos no referencial  $S'$  em termos do referencial  $S$  são dadas por:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha \\ x'_2 = x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha \\ y'_1 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \\ y'_2 = -x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha \end{cases}$$

Se  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$  e  $\Delta y' = y'_2 - y'_1$  são as diferenças entre os dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  nos respectivos referenciais, temos que a distância entre os pontos no referencial  $S$  é dada através do Teorema de Pitágoras, ficando com:

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Em  $S'$ , teremos

$$\Delta S^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$

Como distância entre dois pontos é uma propriedade geométrica, temos que ela não pode depender do referencial. Utilizando-se das relações das coordenadas no referencial  $S'$ , temos que

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 = (\Delta x \cos\alpha + \Delta y \operatorname{sen}\alpha)^2 + (-\Delta x \operatorname{sen}\alpha + \Delta y \cos\alpha)^2$$

Resolvendo e utilizando a relação fundamental da trigonometria, mostramos que, de fato, a distância não dependerá do referencial. Isto é,

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\Delta S^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$

Na perspectiva do espaço-tempo, não tratamos de distância entre pontos, e sim, do intervalo entre dois acontecimentos. Este intervalo é expresso por

$$\Delta\tau^2 = -\Delta x^2 + \Delta t^2$$

Considerando as quatro dimensões (o tempo sendo a quarta) e tomando um relógio que se mova com velocidade constante entre dois acontecimentos, temos que

$$\Delta\tau^2 = -(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 + (t_2 - t_1)^2$$

Os sinais negativos e o fato de  $\Delta\tau^2 \geq 0$  tem como consequência

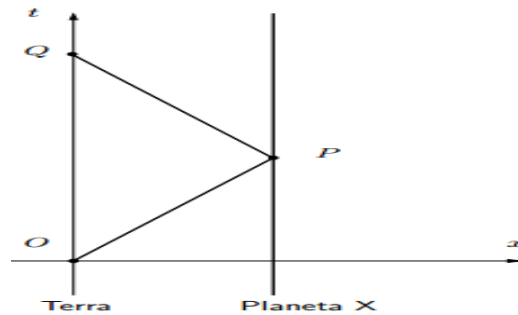
$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} + \frac{(z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \leq 1$$

Confirmando o que Einstein postulou acerca do fato da velocidade da luz ser a maior possível, onde na relação acima o 1 representa o valor de  $c$ .

Mais uma situação hipotética em que não se aplica a Geometria Euclidiana é o *Paradoxo dos Gêmeos*. A situação hipotética é a seguinte: No 20º aniversário, Alice e Bernardo se separam: enquanto a Alice fica na Terra (aproximadamente um referencial inercial), Bernardo parte com 80 % da velocidade da luz para um Planeta

situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança em 10 anos (em relação à Terra). Após sua chegada, ele retorna ao planeta Terra com a mesma velocidade. Com isso, Alice terá 40 anos quando reencontrar o irmão que terá idade diferente. A figura abaixo mostra o diagrama para esse paradoxo.

Figura 3.7: Diagrama do paradoxo dos gêmeos.



De acordo com a relação relativística entre os tempos registrados, pode-se perceber que o tempo em relação a Bernardo é de 6 anos para a ida e 6 para a volta, ou seja, no momento do encontro ele terá 32 anos. Para a Geometria de Minkowski, o caminho para se chegar a essa conclusão é preciso escolher um referencial para se chamar de inercial que, no caso utilizemos a Terra. O ponto  $O$  representa o momento da separação entre os gêmeos, a reta vertical no Planeta  $X$  representa  $x = 8$  (utilizando as unidades anos e anos-luz) que é a distância a ser percorrida por Bernardo até chegar ao Planeta  $X$ .

Neste momento, o tempo em relação ao Planeta Terra é 10 anos e, portanto, o ponto  $P$  é representado pelo par ordenado  $(8,10)$  e o ponto  $Q$  representa o reencontro dos gêmeos de coordenadas  $(20,0)$ . Desta forma, o tempo percebido por Bernardo durante a ida é o intervalo entre os acontecimentos  $O$  e  $P$ , isto é, dado pelo valor do segmento  $\overline{OP}$  que, a partir do Teorema de Pitágoras, é dado por:

$$\overline{OP}^2 = 10^2 - 8^2$$

$$\overline{OP} = 6$$

Na volta, o tempo percebido corresponde ao intervalo entre os acontecimentos  $Q$  e  $P$ . Isto é:

$$\overline{PQ}^2 = (20 - 10)^2 - (0 - 8)^2$$

$$\overline{PQ} = 6$$

Portanto, a viagem de ida e volta para Bernardo foi de 12 anos.

Sabemos que na figura 3.7, o valor do segmento  $\overline{OQ}$  representa o intervalo entre os acontecimentos  $O$  e  $Q$  que vale 20. Desta forma, geometricamente, teremos que

$$\overline{OQ} > \overline{OP} + \overline{PQ}$$

Isso nos mostra que um lado de um triângulo é maior que a soma dos outros dois lados e isso vai de encontro à Geometria Euclidiana. Nela, temos o que é chamada de desigualdade triangular, onde o comprimento de um dos lados de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois.

### 3.3 Teoria da Relatividade Geral (TRG)

Vimos que, com sua relatividade especial em 1905, Einstein modificou as bases da ciência e provocou uma verdadeira revolução no que diz respeito a conceitos básicos como espaço, tempo e a própria relatividade que à época era utilizada a de Galileu. Apenas dois anos depois, Einstein tem, segundo ele, a ideia mais feliz de sua vida. Tal ideia consistia em uma simples queda livre, onde o observador que estava caindo via tudo passar por ele como se não houvesse gravidade. Essa ideia se tornaria, mais tarde, o chamado *Princípio da Equivalência* que é o principal aspecto da TRG. Para compreendermos, pensemos na clássica queda livre de Galileu a qual duas bolas de massas diferentes são soltas e submetidas à mesma aceleração da gravidade. Agora, imaginemos que a pessoa que soltou as bolas caia também em queda livre. Nessa situação, ela iria vê as bolas flutuarem à sua volta como se não houvesse gravidade, que é o que ocorre com astronautas em órbita, conforme a figura abaixo.

Figura 3.8: Astronautas flutuando junto com alimentos no espaço.



Fonte: [http://www.universoracionalista.org/wp-content/uploads/2013/10/fruit\\_1118842i.jpg](http://www.universoracionalista.org/wp-content/uploads/2013/10/fruit_1118842i.jpg)



Há quem acredite que não há ação da gravidade sobre os Astronautas, o que é um grande engano. Afinal, se não houvesse, não haveria força atuando sobre eles e, pelo Princípio da Inércia de Newton, a trajetória seria retilínea. O que ocorre, de fato, é que um veículo espacial em órbita está em queda livre ao redor da Terra e, por isso, os ocupantes parecem flutuar no seu interior. A primeira experiência em que houve a aplicação do princípio da equivalência foi o chamado *desvio gravitacional para o vermelho*.

Essa aplicação consistia, basicamente, no seguinte: Einstein em um andar intermediário da Torre de Pisa envia um sinal luminoso em direção a Galileu no alto da Torre com um período  $T$ . Daí surge o questionamento: Qual o período  $T'$  medido por Galileu para o mesmo sinal? Caso no momento da emissão os dois saltassem em queda livre, o tempo  $T''$  registrado por Galileu seria igual ao período  $T$  para Einstein, isso porque os dois estão em repouso um em relação ao outro em um referencial inercial. Seja  $\Delta z$  a distância vertical entre Einstein e Galileu e  $g$  a aceleração da gravidade. Então, temos que o sinal luminoso demora um tempo  $\Delta z$  para chegar no alto da Torre (em unidades em que  $c = 1$ ) e, nesse intervalo de tempo, a velocidade adquirida por Galileu em relação ao ponto inicial do movimento é  $v = g\Delta z$ . Assim, de acordo com o efeito Doppler<sup>24</sup>, temos que o período  $T'$  é dado por:

$$T' = T(1 + g\Delta z)$$

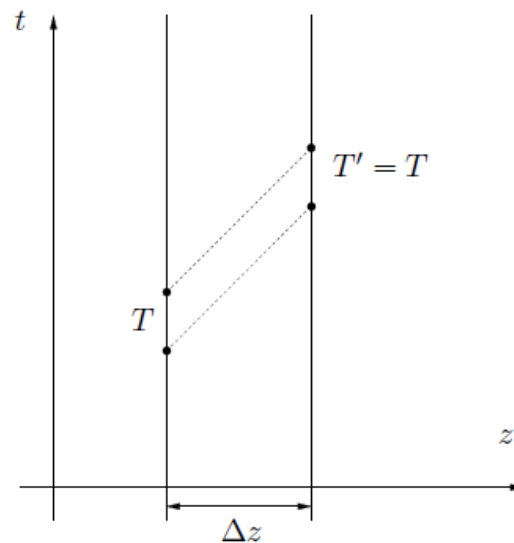
Pela relação acima, temos que se Galileu tivesse ficado no alto da torre, o tempo medido por ele seria maior. Como sabemos, o período da luz visível aumenta do azul para o vermelho, esse efeito é comumente chamado de *desvio para o vermelho*. Podemos ainda representar a relação acima em termos de potencial gravitacional que é dado por  $\phi = gz$ , assim:

$$T' = T(1 + \Delta\phi)$$

---

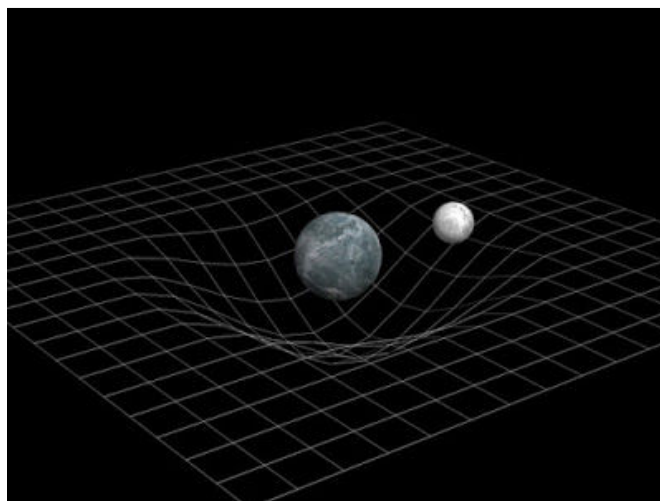
<sup>24</sup> Consiste, basicamente, na variação entre frequência emitida por uma fonte e a percebida por um observador quando o observador está em movimento em relação à fonte.

Figura 3.9: Geometria de Minkowski para a situação descrita acima.



Pela figura acima, podemos perceber que o *desvio gravitacional para o vermelho* não é compatível com a Geometria de Minkowski, onde observadores em repouso em um referencial inercial medem o mesmo período para um sinal luminoso. Nesse sentido, para se representar o desvio gravitacional, necessitamos de um diagrama que distorça intervalos, tais como um mapa esférico distorce distâncias. Esse fato levou Einstein a conjecturar que o campo gravitacional estaria relacionado com um espaço-tempo curvo. Para ele, a gravidade está diretamente ligada à distorção no espaço-tempo causada pelos corpos, onde quanto maior a massa, maior a curvatura causada.

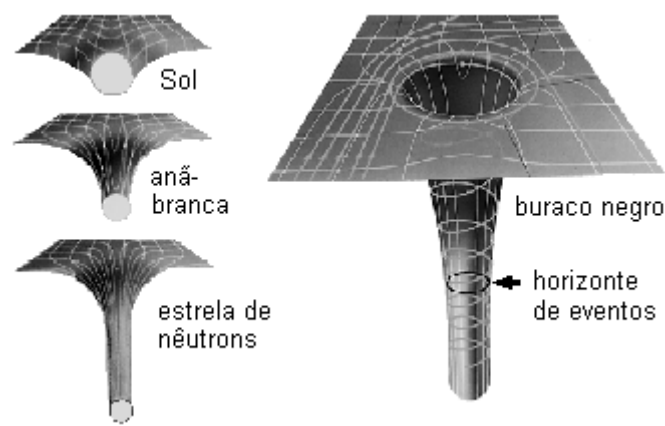
Figura 3.10: Espaço-tempo curvo.



Fonte: <http://www.tecnologiasdeultimogrito.com/wp-content/uploads/2014/10/Curva-espaco-tempo.jpg>

Na figura acima, temos a representação da Terra e da Lua. Para Einstein, a lua gira em torno da Terra por causa da curvatura criada pelo fato da massa da Terra ser muito maior que a da Lua. Seria algo como duas pessoas pulando em uma cama elástica. A princípio, a maior deformação ocorrerá para a pessoa que possuir maior massa. Nessa perspectiva, os buracos negros foram “descobertos”. Tratam-se de corpos massivos e, por conta disso, provocam uma distorção grande no tecido espaço-tempo.

Figura 3.11: Distorções no espaço-tempo provocadas por 4 corpos diferentes.



Fonte: <http://www.fisica.net/ananda/relatividade.html>

Pela figura acima, podemos perceber que a distorção provocada por um buraco negro é tão grande que temos um “buraco profundo”. Com isso, a velocidade de escape em um buraco negro supera a velocidade da luz. Assim, a partir de uma distância, chamada de horizonte de eventos, nada escapa da gravidade desse corpo, nem mesmo a luz.

Para finalizar a questão do espaço-tempo curvo, Einstein precisava calcular a curvatura do espaço-tempo criada pela distribuição da matéria. Após 3 anos de tentativas, em 1915, Einstein *descobriu* uma solução que fora encontrada também pelo matemático alemão Hilbert utilizando-se de outro método. A equação de Einstein é dada por:

$$R = 8\pi T$$

onde  $R$  e  $T$  são objetos matemáticos chamados de tensores. O tensor  $R$  é chamado de tensor de curvatura de *Ricci* e descreve a curvatura do espaço-tempo em cada ponto. O tensor  $T$  é chamado de tensor de *energia-momento reduzido* e descreve a distribuição da matéria. Essa relação de Einstein especifica como é a matéria curva

no espaço-tempo. Além disso, uma relação bastante conhecida é a  $E = mc^2$  que, apesar de aparentar ser algo não tão grandioso, tem por trás da expressão uma equivalência massa-energia.

### 3.4 Astronomia após a relatividade de Einstein

Com as teorias acerca da relatividade no início do século XX, sobretudo a relatividade geral, o conceito sobre o Universo estava sendo modificado. Matemáticos se debruçaram para tentar encontrar uma geometria que se enquadrasse na TRG. Nesse sentido, em 1916, Schwarzschild<sup>25</sup> poucos meses após a TRG de Einstein, conseguiu formular o que é chamada de *métrica de Schwarzschild* para acontecimentos num plano de simetria que passa pelo centro de  $M$  que é dada por:

$$\Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\Delta r^2 - r^2\Delta\theta^2,$$

onde  $r > 2M$ .

Tomando  $M = 0$ , podemos dizer que a métrica de Schwarzschild é uma espécie de generalização da métrica de Minkowski em coordenadas polares, uma vez que ficamos com

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2 - r^2\Delta\theta^2$$

Enquanto que no plano Euclidiano, a métrica de Minkowski é dada por:

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\theta^2$$

Isso faz sentido, pois quando  $M = 0$  não existe gravidade e, portanto, o espaço-tempo deve ser o espaço plano de Minkowski.

Outra contribuição de Schwarzschild foi acerca da compreensão sobre o fenômeno dos buracos negros. Chamado de *Raio de Schwarzschild*, a descrição de quando uma estrela entra em colapso gravitacional diminuindo a um determinado tamanho e seu potencial de atração gravitacional se torna infinito, onde nenhum objeto consegue escapar da área denominada de *horizonte de eventos*, nem mesmo se possuir a velocidade da luz.

---

<sup>25</sup>Karl Schwarzschild (1873 – 1916), físico e astrônomo alemão.

As trajetórias dos raios de luz correspondem às geodésicas<sup>26</sup> nulas da métrica de Schwarzschild e satisfazem as equações:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{L}{r^2}$$

$$\frac{\Delta r}{\Delta\lambda} = \pm \sqrt{2E - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \sqrt{2E}$$

Onde  $\lambda$  desempenha o papel do tempo próprio numa geodésica, isto é, intervalo de tempo para dois eventos e valem para  $E \gg 1$ , uma vez que partículas com energias muito elevadas se deslocam a velocidades próximas a da luz. Para  $M > 0$ , temos que o valor absoluto  $\frac{\Delta r}{\Delta\lambda}$  é maior em relação ao que seria no espaço-tempo de Minkowski. Isso faz com que o raio tenha uma trajetória curva, em vez de linha reta com  $M = 0$ . Esse fato é chamado de *lente gravitacional* e foi um dos testes experimentais propostos por Einstein à Relatividade Geral. A confirmação desse fenômeno foi feita por uma equipe chefiada pelo astrofísico Sir Arthur Eddington em 1919 e tornou, definitivamente, Einstein em uma celebridade.

Basicamente, Sir Eddington deslocou duas equipes de astrônomos para acompanharem e registrarem um eclipse total do Sol. Uma das equipes ficou na Ilha do Príncipe em Portugal e a outra no Nordeste brasileiro, na cidade de Sobral no estado do Ceará. O eclipse do dia 29 de Maio de 1919 oferecia condições ideais para verificar o que Einstein propôs acerca do fenômeno das *lentes gravitacionais*, pois o Sol eclipsado visto da Terra ficaria próximo a estrelas com muito brilho. Na cidade portuguesa, o mau tempo não permitiu que os registros tivessem sucesso. Já no município cearense, a equipe chefiada por Eddington conseguiu comprovar com sucesso a Teoria da Relatividade Geral (ver figuras).

---

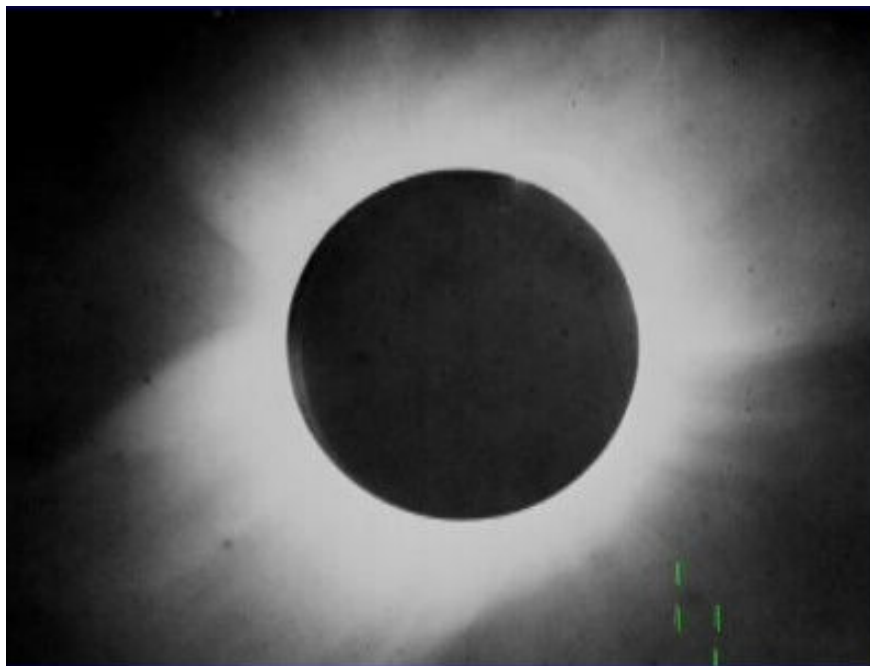
<sup>26</sup>Menor distância entre dois pontos.

Figura 3.12: Local de observações em Sobral.



Fonte: <http://radiosbn.com.br/novoradio/?p=2665>

Figura 3.13: Eclipse de 1919, onde as linhas verdes marcam as posições das estrelas utilizadas para a verificação da TRG.



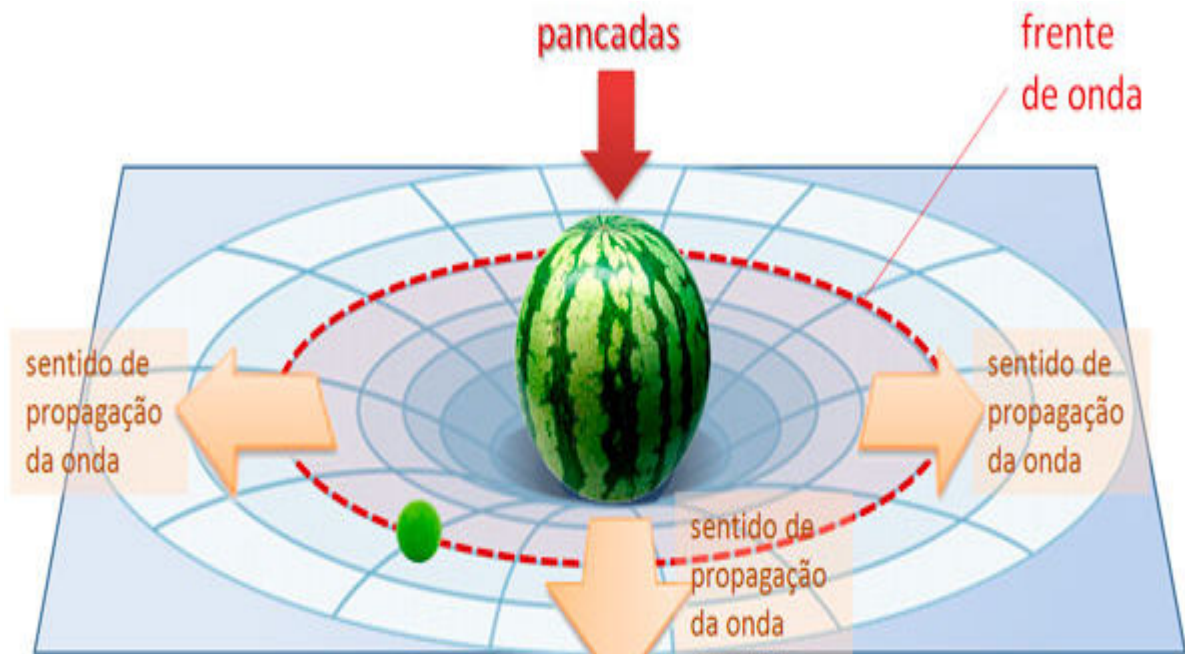
Fonte: <http://radiosbn.com.br/novoradio/?p=2665>

O mundo estava recém saído da primeira guerra mundial e, por isso, estava carente de boas notícias. Nesse sentido, a comprovação de Sir Eddington transformou Einstein em celebridade mundial, sendo capa dos mais diversos meios de comunicação. Além disso, Einstein propôs o que chamamos de ondas

gravitacionais. Para simplificarmos, pensemos na seguinte situação: em um lençol bastante esticado, colocamos um corpo com massa considerável, uma melancia, por exemplo, nela damos algumas pancadas.

É fácil intuir que essas pancadas irão gerar ondas (neste caso mecânicas, mas dá para ter uma ideia). Colocando um limão no lençol (ver figura), essas perturbações serão percebidas pelo limão.

Figura 3.14: Simulação das ondas gravitacionais.



Fonte: [http://fisicanaveia.blogosfera.uol.com.br/2016/02/12/quer\\_entender\\_o\\_que\\_sao\\_ondas-gravitacionais/](http://fisicanaveia.blogosfera.uol.com.br/2016/02/12/quer_entender_o_que_sao_ondas-gravitacionais/)

As ondas gravitacionais, no entanto, vêm de muito longe, por isso, até chegarem ao nosso planeta ficam mais “fracas”. Por essa razão, a dificuldade em detectar a presença dessas ondas é tão grande. No entanto, em Setembro do ano passado o LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), nos Estados Unidos, fez medidas que evidenciam a comprovação de mais uma teoria de Einstein 100 anos após a TRG.

Na sequência da TRG, um grande Astrônomo foi o americano Edwin Hubble (1889–1953). Ele, dentre várias descobertas, mostrou que as que até então chamadas de nebulosas eram, na verdade, galáxias fora da via Láctea que se afastavam umas das outras a uma velocidade proporcional à distância entre elas, conhecida como Lei de Hubble. Em 1990, foi lançado um Telescópio que levou seu

nome e que orbita em torno da Terra. Esse telescópio exerce um papel muito importante para a Astronomia. Registros de fotos e dados de nascimentos estelares, planetas extra-solares são algumas das contribuições do telescópio.

Em 1998, astrônomos descobriram que a velocidade da expansão do Universo não foi sempre a mesma, isto é, ela está acelerando. Quando Einstein propôs a TRG, ele acreditava que o universo era estático e incluiu em suas equações uma “força misteriosa” que hoje é chamada de constante cosmológica. Essa constante que, inicialmente, tinha sido proposta para provar que o universo estaria estático, acabou por provar o contrário. É como se houvesse uma força misteriosa atuando sobre o cosmos, chamada de energia escura. Esta expansão acelerada é o desafio atual da ciência.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na finalização desta dissertação é possível perceber o quanto a Astronomia se desenvolveu enquanto ciência desde os babilônios, passando pelos matemáticos gregos antes da era comum e pelos ocidentais nos séculos XVI e XVII, até Einstein. De acordo com o estudo realizado sobre a Astronomia pode-se afirmar que os matemáticos foram essenciais no processo de desenvolvimento de teorias acerca do Universo. A matemática foi empregada como ferramenta para Eratóstenes encontrar o diâmetro da Terra, Kepler formular suas leis.

A Astronomia é considerada uma das mais antigas ciências, pois ela se confunde com nossa necessidade de explicar fenômenos sejam terrestres ou do cosmos. Passamos a entender como a ciência a qual conhecemos hoje foi construída. Mostramos a importância dos gregos antigos, a impulsão e revolução provocada pelos Astrônomos na Renascença, até chegar na que é considerada uma das maiores, senão a maior, mudança na ciência que foi a relatividade de Einstein.

A geometria acompanhou e acompanha a Astronomia, seja no modelo de Universo proposto por Copérnico ou no modelo proposto por Einstein. O desenvolvimento da Astronomia está diretamente ligado à Matemática. Vimos que as primeiras distâncias envolvendo o planeta Terra e os demais corpos celestes foram encontradas com base, sobretudo, na Geometria. Além disso, os mistérios do Universo são objetos de muito interesse dos jovens. Nesse sentido, a Astronomia poderia servir como uma ferramenta de inserção de conteúdos matemáticos em sala de aula na educação básica.

Desde o homem primitivo, a ligação da Astronomia com Deus é muito forte. Cientistas estudavam os céus como meio de se aproximar com o Ser supremo. Certamente esse fator “travou” o avanço da ciência por vários séculos. A forte influência da igreja, fez com que, por exemplo, a teoria aristotélica e a de Ptolomeu perdurassem tanto tempo. Mesmo quando a teoria Geocêntrica caiu por Terra mediante a Heliocêntrica, percebe-se claramente em cientistas como Galileu e Newton, o receio de estarem em caminhos opostos ao da igreja, diferentemente do que percebemos com Einstein quando a religião é colocada de lado e a ciência passa a “caminhar com as próprias pernas”.

A partir da teoria para a gravitação universal de Newton e com os avanços acerca de telescópios, Hubble conseguiu descobrir que as até então chamadas de nebulosas, eram na verdade galáxias fora da via Láctea e que elas se afastavam umas das outras a uma velocidade que era proporcional à distância que as separa. Em 1990, 100 anos após seu nascimento, foi posto em órbita o primeiro telescópio espacial que ganhou seu nome e desde então vem contribuindo com o avanço na ciência. Foi a partir do Telescópio Espacial Hubble que foram constatados planetas fora do sistema solar, nascimento de estrelas, expansão do Universo, abundância de buracos negros no espaço, entre outros.

Vimos também que, a partir de Einstein, a Astronomia ganhou novos rumos. O novo conceito para a gravidade revolucionou a Astronomia o qual não se encaixa com a geometria euclidiana. Nesse sentido, falamos de algumas geometrias que foram utilizadas para explicar a relatividade de Einstein, tais como a de Minkowski. A Astronomia, como toda ciência, é mutável e já tivemos ajustes na teoria de Einstein como, por exemplo, a expansão do universo. Para Einstein, o universo era estático.

Em meados do século XIX já se falava no que hoje chamamos de buraco negro, conceito esse que foi aperfeiçoado com o tempo. Cientistas dedicaram e dedicam suas vidas em busca de respostas para os mistérios da natureza guiados por observações, experiências e intuições. Certamente, teremos mistérios sendo desvendados e novos conceitos sendo criados. Afinal, isso é ciência.

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. *A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga*. In Explorando o Ensino da Matemática, vol. II, páginas 39-46, 2004.

ÁVILA, Geraldo. *Kepler e a órbita elíptica*. Revista do professor de Matemática – RPM 15, 2010.

BOURROUL, João M. *5 conceitos que foram revolucionados pela Teoria da Relatividade Geral*. Disponível em <<http://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2015/11/5-conceitos-que-foram-revolucionados-pela-teoria-geral-da-relatividade.html>>, acessado por último 25/09/2016.

BOYER, C. B. *História da Matemática / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach, tradução Helena Castro*. 32ª Edição, São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 2012.

CAVALCANTE, Kleber G. "As fases da Lua"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/as-fases-lua.htm>>. Acesso em 17 de outubro de 2016.

GLEISER, Marcelo. *A dança do universo: dos mitos de criação ao Big Bang / Marcelo Gleiser*. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

KOESTLER, Arthur. *Os sonâmbulos*. Trad. Alberto Denis. São Paulo: Ibrasa, 1961.

LINDBERG, David C. *The Beginnings of Western Science*. Chicago: University of Chicago Press, 1994.

NATÁRIO, José. *A geometria da relatividade*, 2010.

OLIVEIRA, Priscila di C.F. *Eclipses do Sol e da Lua*, 2016.

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza. *Astronomia e Astrofísica / Kepler de Souza Oliveira Filho, Maria de Fátima Oliveira Saraiva*. 2ª Edição, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

PIRES, Antonio S. T. *Evolução das idéias da física*. 2ª Edição – São Paulo: Editora Livraria da física, 2011.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Os Sólidos de Platão"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/os-solidos-platao.htm>>. Acesso em 13 de setembro de 2016.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Teorema de Tales"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm>>. Acesso em 03 de novembro de 2016.

WELLS, H.G. *A short history of the world*. Middlesex: Penguin, 1965.

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Período\\_helenístico](https://pt.wikipedia.org/wiki/Período_helenístico), acessado por último 24/11/2015.

<http://www.webartigos.com/artigos/a-importancia-da-interdisciplinaridade-e-contextualizacao/13408/#ixzz3wPBETdzZ>, acessado por último em 05/01/2016.

<http://www.professores.uff.br/salete/trabalu/Kepler.pdf>, acessado por último 18/08/2016.

<http://astro.if.ufrgs.br/univ/univ.htm#einstein>, acessado por último em 18/09/2016

<https://cienciaemnovotempo.wordpress.com/categorias/astronomia-2/astronomia/>, acessado por último em 20/9/2016.

### APÊNDICE A – Dados básicos em Astronomia

| ASTRO    | Raio equatorial (km) | $\frac{R_{Astro}}{R_{Terra}}$ | Diâmetro equatorial (km) | Distância média ao Sol (km) | Tempo de translação (Função da Terra) | Velocidade orbital (km/s) | Tempo de rotação (Função da Terra) |
|----------|----------------------|-------------------------------|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| Sol      | 695.000              | 109                           | 1.390.000                | –                           | –                                     | –                         | –                                  |
| Mercúrio | 2.439,7              | 0,4                           | 4.878,4                  | 57.910.000                  | 87,97 dias                            | 47,89                     | 58,6 dias                          |
| Vênus    | 6.051,8              | 0,9                           | 12.103,6                 | 108.200.000                 | 224,7 dias                            | 35,03                     | 243,0 dias                         |
| Terra    | 6.378,14             | 1,0                           | 12.756,28                | 149.600.000                 | 1 ano                                 | 29,79                     | 23,93 h                            |
| Marte    | 3.397,2              | 0,5                           | 6.794,4                  | 227.940.000                 | 1,88 anos                             | 24,13                     | 24,62 h                            |
| Júpiter  | 71.492               | 11,2                          | 142.984                  | 778.330.000                 | 11,9 anos                             | 13,06                     | 9,92 h                             |
| Saturno  | 60.268               | 9,4                           | 120.536                  | 1.429.400.000               | 29,4 anos                             | 9,64                      | 10,67 h                            |
| Urano    | 25.559               | 4,0                           | 51.118                   | 2.870.990.000               | 84,0 anos                             | 6,81                      | 17,23 h                            |
| Netuno   | 24.746               | 3,9                           | 49.492                   | 4.504.300.000               | 165 anos                              | 5,43                      | 16,12 h                            |

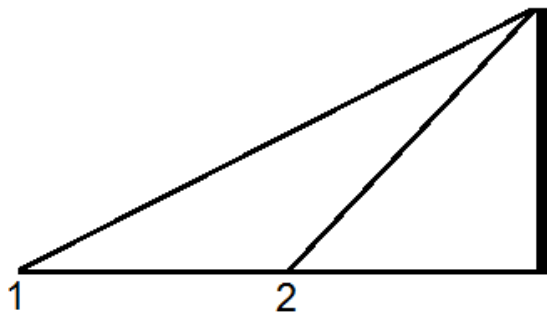
Fonte: <http://www.oba.org.br/>

## APÊNDICE B – Atividades para sala de aula

O professor durante suas aulas de matemática no ensino fundamental quando estiver ministrando as relações entre arcos e ângulos, pode utilizar de conceitos simples de astronomia para tornar o aprendizado mais eficaz. Nesse sentido, propusemos aqui duas atividades simples em que o professor precisará poucas aulas para aplicação.

Atividade 1: Calcular o ângulo formado entre as sombras obtidas a partir de uma barra, fixada no solo, com altura qualquer em quatro momentos distintos, por exemplo, às 10h, 10h30, 11h e 11h30. Em seguida, encontrar o comprimento da Terra, considerando-a como uma circunferência.

Descrição da atividade 1: Basicamente, os alunos irão colocar uma barra de determinada altura na vertical no solo e registrar a altura de suas sombras. Feito isso, ele reproduzirá em uma folha de papel suas observações e se utilizará de conceitos de arco-ângulo para calcular o comprimento de cada arco. Com essas medidas, os alunos efetuam regras de três simples e calculam o comprimento da Terra. Representação sem escala da situação para apenas duas medições.



Fonte: Autor, 2016.

Possivelmente, os quatro valores encontrados possuem alguma disparidade. Para complementar, o professor pode abrir uma discussão em relação aos valores encontrados. Professor, vale chamar atenção após a atividade que um procedimento similar foi feito por Eratóstenes para o primeiro cálculo do raio da Terra e com pequeno erro. Essa atividade poderia ser colocada para alunos de 9º ano do ensino fundamental, onde irão trabalhar com a relação de semelhança de triângulos, trigonometria para o cálculo dos ângulos, relação entre arco e ângulo e proporcionalidade.

Atividade 2: Representar o sistema solar em maquetes mantendo a proporção em relação aos tamanhos dos corpos e em relação às distâncias entre eles.

Descrição da atividade 2: Em sala, o professor mostra e explica aos alunos alguns dados da tabela mostrada no apêndice A. Em seguida, pede que os alunos levem à escola materiais tais como isopor, entre outros, para a confecção dos corpos celestes. Para a confecção dos corpos celestes, o professor deve orientar aos alunos que obedecem à proporção em relação aos tamanhos dos corpos, isto é, Nesse momento, o professor pode mencionar os valores da gravidade em cada planeta, mostrando como ela se relaciona com as massas e os tamanhos dos planetas.

Após a confecção dos corpos celestes, os alunos devem colocá-los no “sistema solar” obedecendo à ordem dos planetas e a proporção entre as distâncias entre eles. Nesse momento, o professor pode chamar a atenção para o fato do planeta mais próximo ao Sol gastar menos tempo e o mais distante gastar mais tempo para efetuar uma volta completa. Além disso, é interessante mencionar que a proporção não é “de grau 1”, pois sabemos pela 2ª Lei de Kepler que o quadrado do período de translação é proporcional ao cubo da distância média do planeta ao Sol.

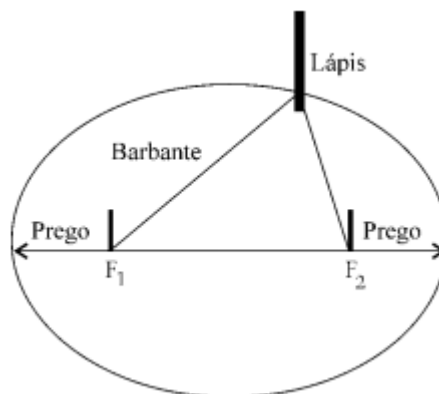
A proposta da atividade é trabalhar a ideia de proporcionalidade associada a dados astronômicos. Desta forma, o professor pode e deve mencionar que nós temos grandezas diretamente e inversamente proporcionais e que, além disso, essa proporcionalidade pode ser, por exemplo, linear ou quadrática.

Para a aplicação dessa atividade, sugerimos que seja feita em aulas para alunos do 7º ano do ensino fundamental no conteúdo de proporção, visto que no ensino fundamental II é a primeira vez que esse conteúdo é visto.

Atividade 3: Construir uma elipse a partir do método do jardineiro, para representar a órbita da Terra ao redor do Sol.

Descrição da atividade 3: O professor, quando estiver falando sobre círculos e circunferências em suas aulas do 8º ano do ensino fundamental II, pode mencionar a elipse e traçar um paralelo com a Astronomia. Esse paralelo pode ser feito contando um pouco da história acerca da órbita terrestre durante a era pós cristã. Após uma breve explanação do que é a cônica chamada de elipse, o professor pede que seus alunos desenhem uma elipse, utilizando-se do método do jardineiro, de excentricidade 0,02 que representa a excentricidade terrestre.

O método consiste em: escolher um tamanho arbitrário para o eixo maior  $A$  da elipse; determinar, a partir da excentricidade e do valor de  $A$ , a distância focal  $f$ ; somar o valor de  $f$  e  $A$  para encontrar o tamanho do barbante a ser utilizado de modo que o tamanho seja um pouco maior que a soma; abrir um compasso com a separação  $f$  (ou colocar dois pregos separados por uma distância  $f$ ), envolver as pontas do compasso com o barbante e, com um lápis na vertical e o barbante esticado, traçar a elipse. Vejamos um esboço na figura abaixo.



Fonte: Autor, 2016

Para diversificar, o professor pode separar a turma em grupos e solicitar que cada grupo se encarregue de traçar a elipse descrita por cada um dos oito planetas do sistema solar. Para tal, temos que as excentricidades são: Mercúrio (0,206), Vênus (0,007), Terra (0,017), Marte (0,093), Júpiter (0,049), Saturno (0,056), Urano (0,044) e Netuno (0,011). Após a execução, o professor pode comentar em sala que a pequena excentricidade indica que temos uma órbita quase que circular. Isso faz com que vejamos o Sol diariamente com o mesmo tamanho. Caso a excentricidade fosse grande, teríamos o Sol variando de tamanho.