



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ELIETE ALMEIDA ALVIN

**FORÇA DE RADIAÇÃO EM UMA ESFERA EMBUTIDA EM UM SÓLIDO  
ELÁSTICO**

Maceió - AL  
2018

ELIETE ALMEIDA ALVIN

**FORÇA DE RADIAÇÃO EM UMA ESFERA EMBUTIDA EM UM SÓLIDO  
ELÁSTICO**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito necessário para a obtenção do título de Mestra em Física.

Orientador: Prof. Dr. Glauber T. Silva  
Co-orientador: Prof. Dr. José Pereira Leão Neto

Maceió - AL

2018

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

- A475f Alvin, Eliete Almeida.  
Força de radiação em uma esfera embutida em um sólido elástico / Eliete Almeida Alvin. – 2018.  
52 f. : il. color.
- Orientador: Glauber Tomaz Silva.  
Coorientador: José Pereira Leão neto.  
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física, Maceió, 2018.
- Bibliografia: f. 47-51.  
Apêndice: f. 52.
1. Física da matéria condensada. 2. Espalhamento acústico. 3. Onda elástica.  
4. Força de radiação acústica. 5. Propagação de ondas em sólidos. I. Título.

CDU: 538.9:531.77

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

***“Força de radiação em uma esfera embutida em um  
sólido elástico”***

**por**

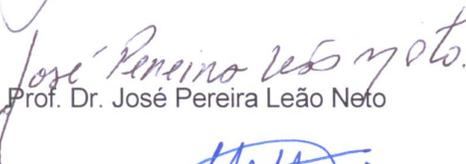
**Eliete Almeida Alvin**

A Banca Examinadora composta pelos professores Glauber Tomaz Silva (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, José Pereira Leão Neto (co-orientador), da Universidade Federal de Alagoas (Campus-Arapiraca), Jose Henrique Araujo Lopes de Andrade, da Universidade Federal de Alagoas (Campus-Arapiraca), e Rodrigo de Paula Almeida Lima, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas consideram a **candidata aprovada com grau B.**

Maceió, 09 de julho de 2018



Prof. Dr. Glauber Tomaz Silva



Prof. Dr. José Pereira Leão Neto



Prof. Dr. Jose Henrique Araujo Lopes de Andrade



Prof. Dr. Rodrigo de Paula Almeida Lima

## **DEDICATÓRIA**

*Dedico a Jeová Deus, e aos meus pais: Edson César Alvin e Matilde Almeida Alvin.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Jeová Deus, por dar-me vida, forças, saúde e coragem para prosseguir.

Aos amores da minha vida Matilde Alvin e Edson César Alvin por amar, cuidar e apoiar-me sempre. Por terem abrido mão de alguns sonhos e planos, para dedicar a vida a mim e aos meus irmãos. Vocês são minhas fontes de inspiração.

Às minhas avós (*in-memoriam*), Maria Alves e Petronilia Alvin, pelos ensinamentos que carrego por toda a vida.

Aos meus amores e irmãos Edson Alvin, Elielma Alvin, Elissandra Alvin e Elcio Alvin, por todos os bons conselhos, cuidado e amor. Aos meus amores e irmãos: Emerson, Erick e Ester, pelo amor e bons momentos compartilhados.

A Paulo Roberto, por estar sempre perto, apesar da distância, por sempre estar pronto a ajudar-me, pelo carinho, paciência e compreensão.

Aos meus tios Alcides, Osvaldo e Antônio, pelo carinho e dedicação.

À todas as minhas tias, em especial as tias Célia Elma e a sua família e a tia Adelaide Almeida pelo carinho e dedicação.

A Maria Edjane Marinho de Abreu, a mãe que Deus colocou no meu caminho. Obrigada pelos sábios conselhos, pelo cuidado com a minha saúde, pelos ensinamentos que carregarei para a vida e por todos os momentos em que encontrei abrigo em sua abençoada casa.

Aos meus amigos: José Monteiro (*in-memoriam*), Paula Monteiro e a sua família, pelo apoio e por ter apresentado-me a grande família Felix!

A Suzana Amorim de Oliveira Felix, Antônio Felix Neto e Daniel Amorim de Oliveira Felix, pela amizade e por terem me acolhido com muito amor!

A minha prima Lourdes, pela amizade e por me abrigar em sua adorável casa em momentos que precisei!

Aos meus amigos Jaciara e Aroldo, pelo apoio e suporte mesmo a longa distância.

As amigas Luana Teles e Geziane Pereira, pelos bons momentos compartilhados e pela amizade.

Ao meu amigo irmão Ronaldo Rêgo, pela parceria acadêmica, pelas longas horas de estudos e conversas, pela irmandade que carregarei para a vida.

A Daniel Alfredo, pelo apoio, carinho, inspiração e incentivo, pela amizade e parceria.

A amiga Fabiana, por me ter acolhido em sua casa e pela amizade.

Aos meus amigos do GAF: Everton, Giclênio e Victor, pela amizade e por toda

colaboração.

Ao amigo Lendel, pela parceria e por compartilhar suas experiências de vida.

Ao professor Glauber, por todo ensinamento, por acreditar na concretização desse trabalho, pelo tempo dedicado, pela paciência, por ser um grande exemplo de cientista e professor.

Ao Professor Leão Neto, pelos ensinamentos, paciência, ajuda e, pelo grande apoio que sempre deu ao longo da construção desse trabalho. E também, por ser um grande exemplo de professor!

Aos professores Henrique Lopes e André Baggio, por também terem contribuído na minha formação esclarecendo-me algumas dúvidas.

Aos professores da banca, por aceitar participar deste momento importante na minha formação e contribuir positivamente com este trabalho.

Ao Victor e Felipe pelo excelente trabalho prestado na secretaria.

A Sílvia, pelo cuidado contínuo com todos do Laboratório.

A todos os professores do IF, que contribuíram significativamente com a minha formação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio Financeiro durante o Mestrado.

*Porque eu sei que o meu Redentor vive, e que por fim se levantará sobre a terra.*

*Jó 19:25*

## RESUMO

O estudo relacionado ao fenômeno de espalhamento das ondas acústicas em sólidos, têm atraído o interesse da comunidade científica devido às inúmeras aplicações nas mais diversas áreas da ciência. Para obter as propriedades mecânicas dos materiais, diversos tipos de técnicas podem ser utilizadas, desde as baseadas em ensaios não destrutivos, às que utilizam os ensaios destrutivos. O método de ensaio não destrutivo destaca-se dentre os demais por ser uma técnica não invasiva, como por exemplo o uso do ultrassom, que baseia-se no espalhamento de ondas acústicas. Os estudos referentes ao espalhamento de ondas, pode ser útil na caracterização de compósitos particulados e no desenvolvimento de dispositivos implantados ativados pela força de radiação. Por esse motivo foi realizado um estudo teórico sobre a força de radiação, devido ao espalhamento de uma onda plana longitudinal incidente em uma inclusão esférica homogênea embutida em uma matriz sólida elástica. Nesse estudo, utilizou-se à aproximação no limite de Rayleigh, onde considera-se que o raio da inclusão é muito menor que comprimento de onda incidente. O trabalho foi desenvolvido com base na lei de Hooke generalizada, assumindo que as componentes do estresse são linearmente relacionadas com as da deformação. Também foi utilizado o método da expansão de ondas parciais em coordenadas esféricas, em relação às ondas ondas incidente e espalhada. A solução das equações são dadas em termo dos harmônicos esféricos vetoriais. As expressões para o campo de deslocamento são dadas em termo dos coeficientes de espalhamento para aproximação de monopolo, dipolo e quadrupolo, que serão utilizadas nas fórmulas da força de radiação acústica. A equação analítica, para a força de radiação acústica, foi calculada utilizando-se o princípio da conservação do momento linear e então calculou-se também, as eficiências de absorção, espalhamento e radiação. As eficiências são grandezas adimensionais que representam as potências absorvidas, espalhadas e de radiação elástica na partícula. Na aproximação quadrupolar, elas são expressas em termo de funções de contraste. Essas expressões foram utilizadas para a obtenção dos resultados, a partir de simulação numérica, onde foram consideradas duas configurações: partícula de polietileno de alta densidade (PEAD), embutida em uma matriz sólida (sólido - polímero); e uma partícula de ferro, embutida em uma matriz sólida (sólido - sólido), respectivamente. Em cada configuração, utilizou-se diferentes materiais para a matriz sólida, esses foram: alumínio, cobre, latão e titânio, respectivamente. Os resultados obtidos para a partícula de PEAD e de ferro, mostraram uma boa concordância entre os modelos. Esses resultados também mostraram que o modelo proposto funciona bem para frequências de até  $5MHz$ , que corresponde ao parâmetro de tamanho no limite de Rayleigh. Observou-se, que as propriedades acústicas do material que constitui a matriz sólida influencia fortemente nos resultados, e esses podem ser úteis na caracterização de materiais compósitos, contendo inclusões e também podem ajudar o desenvolvimento de dispositivos implantados.

**Palavras-chave:** Espalhamento acústico. Onda elástica. Absorção. Força de radiação acústica. Propagação de ondas em sólidos.

## ABSTRACT

The study related to the phenomenon of scattering of acoustic waves in solids has attracted the interest of the scientific community due to the numerous applications in the most diverse areas of science. To obtain the mechanical properties of the materials, various types of techniques can be used. For example, methods based on non-destructive tests. In particular, tests using ultrasound are based on the scattering of acoustic waves. The studies concerning the scattering of waves can be useful in the characterization of particulate composites and the development of implanted devices activated by the radiation force. For this reason, a theoretical study was carried out on the radiation force due to the spreading of an incident longitudinal plane wave in a homogeneous spherical inclusion embedded in a solid elastic matrix. In this study, we used the approximation at the Rayleigh limit, where the inclusion ray is considered to be much smaller than incident wavelength. The work was developed based on the general Hooke law, assuming that the components of stress are linearly related to those of deformation. We also used the method of partial wave expansion in spherical coordinates, concerning the incident and scattered waves. The solution of the equations is given in terms of vector spherical harmonics. The expressions for the displacement field are given regarding the scattering coefficients for monopole, dipole and quadrupole approximation, which will be used in the formulas of the acoustic radiation force. The analytical equation for the acoustic radiation force was calculated using the principle of the conservation of the linear momentum and then the efficiencies of absorption, scattering and radiation were also calculated. The efficiencies are dimensionless quantities that represent the absorbed, scattered and elastic radiation powers in the particle. In quadrupolar approximation, they are expressed in terms of contrast functions. These expressions were used to obtain the results from a numerical simulation, where two configurations were studied: high-density polyethylene (HDPE) particle, embedded in a solid matrix (border: solid-polymer); and an iron particle, embedded in a solid matrix (boundary: solid-solid) respectively. For each configuration, different materials for the solid matrix were used: aluminum, copper, brass, and titanium, respectively. The results obtained for the HDPE and iron particle showed good agreement between the models. These results also showed that the proposed model works well for frequencies up to  $5MHz$ , which corresponds to the size parameter in the Rayleigh limit. It has been found that the acoustic properties of the solid matrix material strongly influence the results, and these may be useful in characterizing composite materials, containing inclusions and may also assist the development of implanted devices.

**Keywords:** Acoustic scattering. Elastic Wave. Absorption. Acoustic Radiation Force. Wave Propagation in Solids.

## LISTA DE SÍMBOLOS

| <b>Símbolo</b>          | <b>Nome</b>   | <b>Unidades(S.I.)</b>           |
|-------------------------|---|---------------------------------|
| $\rho$                  | densidade   | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ |
| $m$                     | massa   | kg                              |
| $c_L$                   | velocidade do som longitudinal                        | m/s                             |
| $c_S$                   | velocidade do som de cisalhamento                     | m/s                             |
| $a$                     | raio da partícula                                     | m                               |
| $\mathbf{u}$            | vetor deslocamento                                    | m                               |
| $\mathbf{v}$            | velocidade da partícula                               | m/s                             |
| $\boldsymbol{\epsilon}$ | tensor deformação                                     |                                 |
| $\mathbf{q}$            | tensor stress em sólidos                              |                                 |
| $\phi$                  | potencial de velocidade                               | $\text{m}^2/\text{s}$           |
| $\omega$                | frequência angular                                    | $\text{s}^{-1}$                 |
| $\lambda$               | comprimento de onda                                   | $\text{m}^{-1}$                 |
| $k$                     | número de onda  | $\text{m}^{-1}$                 |
| $k_L$                   | número de onda longitudinal                           | $\text{m}^{-1}$                 |
| $k_S$                   | número de onda de cisalhamento                        | $\text{m}^{-1}$                 |
| $K_0$                   | módulo de elasticidade longitudinal                   | $\text{Pa} \cdot \text{s}$      |
| $\varepsilon$           | parâmetro de escala em termos do tamanho da partícula |                                 |
| $K_1'$ e $\mu_1'$       | módulos de armazenamento                              | GPa                             |
| $K_1''$ e $\mu_1''$     | módulo de perda                                       | GPa                             |
| $K_1^*$                 | módulo de massa complexo                              | GPa                             |
| $\mu_1^*$               | módulo de cisalhamento complexo                       | GPa                             |
| $A_1'$                  | módulo de armazenamento em massa                      | GPa                             |
| $B_1'$                  | coeficiente de perda em massa                         | $\text{GPas}^\nu$               |
| $\nu_1'$                | ordem Fracional de Viscoelasticidade                  | $\text{GPas}^\nu$               |
| $Q_{ext}$               | eficiência de extinção                                |                                 |
| $Q_{abs}$               | eficiência de absorção                                |                                 |
| $Q_{sca}$               | eficiência de espalhamento                            |                                 |
| $Q_{rad}$               | eficiência de radiação                                |                                 |
| $\nu_0$                 | coeficiente de Poisson                                |                                 |
| $\varphi$               | ângulo azimutal                                       |                                 |
| $\theta$                | ângulo radial   |                                 |
| $j_n$                   | função de Bessel esférica de ordem $n$                |                                 |

|  |   |                 |
|--|---|-----------------|
| $h_n^{(1)}$                                  | função de Hankel esférica de primeira ordem $n$ |                 |
| $h_n^{(2)}$                                  | função de Hankel esférica de primeira ordem $n$ |                 |
| $Y_n^m$                                      | harmônicos esféricos                            |                 |
| $P_n^m$                                      | funções associadas de Legendre de ordem $n$     |                 |
| $\mathbf{F}^{\text{rad}}$                    | força de radiação acústica                      | N               |
| $\nabla$                                     | operador gradiente                              | $\text{m}^{-1}$ |
| $\nabla \cdot$                               | operador divergente                             | $\text{m}^{-1}$ |
| $\nabla \times$                              | operador rotacional                             | $\text{m}^{-1}$ |
| $\nabla^2$                                   | operador Laplaciano                             | $\text{m}^{-2}$ |
| $\mathbf{r}$                                 | vetor posição                                   | m               |
| $(x, y, z)$                                  | coordenadas cartesianas                         |                 |
| $(r, \theta, \phi)$                          | coordenadas esféricas                           |                 |
| $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ | componentes cartesianas unitárias               |                 |
| $\mathbf{n}$                                 | vetor normal à superfície                       |                 |
| Re   | parte real                                      |                 |
| Im   | parte imaginária                                |                 |
| $i = \sqrt{-1}$                              | unidade imaginária                              |                 |

## LISTA DE FIGURAS

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Deformação de um meio contínuo de volume $V_0$ para o volume $V_0'$ . . . . .  | 15 |
| 2.2 | Tensão de um meio contínuo de volume $V_0$ devido a forças superficiais. . . . .   | 17 |
| 3.1 | Uma onda incidente arbitrária, denotada por barras verticais pretas, é espalhada por uma inclusão esférica de raio $a$ , densidade $\rho_1$ , velocidade longitudinal $c_{L,1}$ e, de cisalhamento $c_{S,1}$ . A esfera é incorporada em uma matriz sólida de densidade $\rho_0$ , velocidade longitudinal $c_L$ e de cisalhamento $c_S$ . As ondas espalhadas são retratadas por arcos pretos. A direção é axial e, o vetor de posição em coordenadas esféricas, é representado por $r(r, \theta, \varphi)$ . . . . . | 27 |
| 3.2 | Coordenadas esféricas, $(r, \theta, \varphi)$ , onde: $\mathbf{r}$ é a distância radial, $\theta$ é o ângulo polar e $\varphi$ o ângulo azimutal, com os correspondentes vetores unitários. . . . .  | 28 |
| 5.1 | Fatores de eficiência de: absorção, espalhamento e radiação, em função da frequência para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de PEAD embutida em uma matriz sólida de alumínio, Fig.(a) e uma matriz sólida de cobre, Fig.(b), respectivamente. As linhas azul, vermelha e verde correspondem às eficiências no limite de Rayleigh. Os marcadores (disco, quadrado e losango) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP. . . . .  | 46 |
| 5.2 | Os fatores de eficiência versus frequência para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de PEAD embutidas em uma matriz sólida de latão, Fig.(a) e uma matriz sólida de Titânio, Fig.(b). As linhas azul, vermelha e verde correspondem às eficiências, no limite de Reyleigh. Os marcadores (disco, quadrado e losango) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP. . . . .  | 47 |

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.3 | Fatores da eficiência de espalhamento e radiação, em função da frequência, para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de ferro embutida em uma matriz sólida de: Alumínio, Fig.(a) e Cobre, Fig.(b), respectivamente. A linha azul e vermelha correspondem às eficiências no limite de Rayleigh. Os marcadores (disco e quadrado) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP. . . . . | 51 |
| 5.4 | Fatores de eficiência de: espalhamento e radiação, em função da frequência, para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de ferro embutida em uma matriz sólida: Latão, Fig.(a); e Titânio, Fig.(b). A linha azul e vermelha correspondem às eficiências no limite de Reyleigh. Os marcadores (disco e, quadrado) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP. . . . .                   | 52 |

## LISTA DE TABELAS

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.1 | Parâmetros físicos e elásticos dos materiais sólidos, [64] | 43 |
| 5.2 | Parâmetros Físicos da Inclusão Esférica.                   | 44 |
| 5.3 | Erro médio quadrático: Partícula de Polietileno            | 49 |
| 5.4 | Erro médio quadrático: Partícula de Ferro                  | 53 |

## SUMÁRIO

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>4</b>  |
| 1.1      | Revisão Histórica . . . . .  | 5         |
| 1.1.1    | Propagação e espalhamento de ondas em sólidos . . . . .  | 5         |
| 1.2      | Aplicações . . . . .   | 8         |
| 1.3      | Motivação . . . . .  | 11        |
| 1.4      | Apresentação geral do trabalho . . . . .   | 11        |
| <b>2</b> | <b>Equações do Modelo</b>  | <b>13</b> |
| 2.1      | Equações de Conservação para Sólidos . . . . .   | 14        |
| 2.1.1    | Deformação . . . . .   | 14        |
| 2.1.2    | Tensão . . . . .   | 17        |
| 2.1.3    | Conservação da massa . . . . .   | 18        |
| 2.1.4    | Conservação do momento . . . . .   | 18        |
| 2.1.5    | Conservação da energia . . . . .   | 19        |
| 2.2      | Propagação de onda em sólidos . . . . .  | 21        |
| <b>3</b> | <b>Espalhamento Acústico de Onda plana elástica no limite de Rayleigh</b>                              | <b>25</b> |
| 3.1      | Espalhamento de onda plana no limite de Rayleigh . . . . .   | 26        |
| <b>4</b> | <b>Força de radiação elástica em uma matriz sólida com uma inclusão esférica devido uma onda plana</b> | <b>35</b> |
| 4.1      | Fatores de eficiência de absorção, espalhamento e extinção . . . . .                                   | 36        |
| 4.1.1    | Conservação do momento e força de radiação . . . . .   | 38        |
| 4.1.2    | Sólidos elásticos incompressíveis . . . . .  | 41        |

## SUMÁRIO

---

5

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>5</b> | <b>Resultados e discussões</b>               | <b>43</b> |
| 5.1      | Matriz Sólida e partícula de PEAD . . . . .  | 45        |
| 5.2      | Matriz sólida e partícula de ferro . . . . . | 50        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões e trabalhos futuros</b>        | <b>55</b> |
| 6.1      | Conclusões . . . . .                         | 55        |
| 6.2      | Trabalhos futuros . . . . .                  | 56        |
| <b>A</b> | <b>Coefficientes de Espalhamento.</b>        | <b>57</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

As ondas mecânicas são perturbações que propagam-se através de um meio material, podendo este ser, sólido, líquido ou gasoso. Nesse processo ocorre a transferência de energia mecânica e momento linear, porém não há transporte de matéria. A energia mecânica faz as partículas de matéria que constituem o meio, como átomos ou moléculas, oscilarem em torno das suas respectivas posições de repouso, provocando um leve deslocamento em relação a sua posição inicial. Exemplos de ondas mecânicas, são: ondas acústicas, oceânicas e sísmicas e essas podem propagar-se, no ar, água e o solo, respectivamente [1].

As ondas mecânicas que propagam-se em sólidos isotrópicos são também conhecidas como ondas elásticas ou de tensão e, podem ser classificadas como:

- Longitudinais, primárias ou tipo  $P$ : podem ser transmitidas em qualquer meio material elástico. Possui direção de propagação paralela à da perturbação e, sua propagação é dada através da compressão e rarefação do meio material, o que provoca alteração no volume, mas não na forma do meio. Durante a propagação, as partículas do meio são deslocadas paralelamente à direção de propagação das ondas [2];

- Transversais, secundárias ou tipo  $S$ : propagam-se em direção perpendicular à da perturbação, apenas em meios materiais que suportam força de cisalhamento. A propagação das ondas  $S$  é, precedida por rotação e cisalhamento do material, o que provoca alteração na forma, mas não no volume do meio. Ondas desse tipo são mais lentas que as ondas tipo  $P$ , porém possui amplitude superior à das ondas  $P$  [3]- [4].

A velocidade das ondas  $P$  e  $S$ , são determinadas através da densidade e elasticidade do meio material por onde ocorre a propagação da onda. As ondas mecânicas propagam-se de forma mais lenta através de sólidos mais densos e de forma mais rápida através de sólidos menos densos ou mais elásticos. A elasticidade é uma propriedade que alguns

materiais possuem em ser deformados por uma determinada força. Cessando a atuação da força o material tende a retornar à sua forma original, sem alterar o volume [5].

Considerando o caso particular de uma onda elástica propagando-se em um sólido elástico, infinito, homogêneo e isotrópico, na ausência de um espalhador a onda irá propagar-se ao longo do sólido sem qualquer alteração. Na presença de uma inclusão qualquer, embutida no sólido elástico, a onda mecânica poderá sofrer reflexão, espalhamento e absorção. As ondas espalhadas, refletidas e absorvidas, podem fornecer informações relevantes em relação ao espalhador. Os ensaios não destrutivos, com ultra som, baseiam-se no princípio do espalhamento de ondas [6].

Desse modo, o estudo relacionado ao espalhamento das ondas mecânicas, em meios elásticos é de grande importância e, possui potenciais aplicações tanto na área médica, quanto na indústria.

Neste capítulo, será realizada uma revisão histórica dos fenômenos de propagação e espalhamento de ondas mecânicas em sólidos. Além disso, será abordada algumas aplicações tecnológicas e apresentada a motivação deste trabalho.

## 1.1 Revisão Histórica

### 1.1.1 Propagação e espalhamento de ondas em sólidos

Os estudos relativos aos fenômenos de propagação de ondas teve início há centenas de anos, através de observações da natureza quantitativa. Esses fenômenos estavam mais relacionados à músicas e propagação de ondas na superfície da água, que por sinal são os fenômenos mais conhecidos relacionados ao conceito de ondas. Com o passar dos anos e o avanço tecnológico, diversos pesquisadores passaram a estudar propagação de ondas em meios materiais.

A compreensão do comportamento dos materiais, quando estão sujeitos a forças mecânicas, tanto em relação à sua deformação quanto a sua ruptura final sob tensões suficientemente grandes, é a base de muitas práticas na ciência dos materiais e envolve a teoria da elasticidade. A teoria moderna da elasticidade passou a ser estudada em 1821, quando Navier apresentou pela primeira vez as equações para o equilíbrio e movimento de sólidos elásticos [7].

No início das investigações, a prática comum era aplicar tensões ao sistema até que houvesse falhas. O sistema era estudado para compreender o comportamento do material

antes da ruptura. Com o avanço nas pesquisas científicas, passou-se a estudar materiais cada vez mais complexos utilizando técnicas não destrutivas como por exemplo: difração de raio X, técnicas ópticas, ressonância magnética, ultra som, dentre outras [8].

Os conhecimentos relacionados aos fenômenos de vibração e propagação de ondas elásticas têm crescido continuamente acompanhando de certa forma, o desenvolvimento da teoria da elasticidade. Seguindo a linha do desenvolvimento da teoria de elasticidade, em meados do século XVIII, Euler e Bernoulli deduziram as equações da vibração em barras e obtiveram os seus modos de vibrações para várias condições de contorno. Nesse mesmo período, D'Alembert obteve a equação de movimento para uma mola [9].

Em 1660, Hooke descobriu a lei da elasticidade, que só foi publicada em 1676. No período de 1680, em Paris, Mariotte dedicava-se ao estudo da resistência dos materiais e conseguiu chegar à resultados semelhantes ao de Hooke porém de maneira independente. Em 1821, Navier apresentou pela primeira vez as equações da elasticidade para o equilíbrio de sólidos elásticos [10].

Cauchy, em 1822, contribuiu com a descoberta da existência de dois tipos de ondas em um corpo elástico: ondas longitudinais e as transversais. Já em 1831, Poisson usou sua teoria para investigar a propagação de ondas através de um sólido elástico isotrópico de extensão ilimitada. Também provou que dois tipos de ondas com diferentes velocidades poderiam se propagar em tal meio. Ele descobriu que, a uma grande distância da fonte de perturbação, o movimento transmitido pela onda mais rápida era longitudinal, e pela onda mais lenta era transversal. Poisson também considerou a vibração de uma esfera. Stokes, em 1849, provou que a onda mais rápida era uma onda de dilatação irrotacional, e a onda mais lenta era uma onda de destorção, caracterizada pela rotação diferencial dos elementos do corpo [11].

Em 1872, Lord Rayleigh havia demonstrado um estudo relacionado ao espalhamento de ondas longitudinais por uma esfera sólida rígida. O espalhamento de uma onda plana longitudinal por uma partícula esférica, que é muito menor do que o comprimento de onda incidente, em uma matriz sólida sem perda, é conhecido como espalhamento Rayleigh [12]-[15]. A abordagem básica para a solução analítica é expandir os campos de deslocamento incidente, transmitido e espalhado em uma série de funções esféricas de ondas parciais. A eficiência, ou seja, a potência de espalhamento por intensidade incidente em uma área da seção transversal de uma partícula é então determinada usando-se os coeficientes de expansão do deslocamento de espalhamento.

No último período do século XIX o interesse pelo estudo das ondas de cisalhamento em corpos elásticos sofreu um incremento considerável, em consequência das suas

aplicações no domínio da Geofísica. Contribuições importantes neste domínio apareceram no período de 1890 a 1910 como resultado dos trabalhos de Rayleigh. Já no início do século XX, Hopkinson realizou importantes experiências no domínio da propagação de impulsos elásticos em barras, enquanto Timoshenko desenvolveu, em 1921, uma teoria para a flexão de barras, que incluía os efeitos da deformação transversal [16].

O caso mais geral, sobre o espalhamento de ondas elásticas por uma inclusão, foi descrito em 1927 por Sezawa. Nesse trabalho, o autor considerou um meio material elástico, isotrópico e homogêneo, com uma inclusão sendo: cilíndrica, esférica ou elíptica; de material rígido ou vazio [17].

O espalhamento de uma onda plana longitudinal, por uma esfera elástica, foi também analisado em 1956 por Ying e TrueII que utilizaram o formalismo escalar na equação de Helmholtz [18]. O espalhamento por uma esfera rígida também foi estudado em 1963 por Pao e Mow. Neste último caso a solução proposta correspondia a um caso especial, onde considerava-se que a densidade de massa da esfera era infinita [19].

Einspruch, Witterholt e TrueII, em 1960, investigaram o espalhamento de uma onda plana transversal por uma inclusão esférica utilizando o formalismo vetorial na equação de Helmholtz [20]. Norris, em 1986, utilizou os harmônicos esféricos vetoriais (HEV), para formular uma solução referente ao espalhamento de ondas longitudinais e transversais por uma inclusão esférica [21].

Posteriormente, em 1991, Hinders derivou a solução para o espalhamento de ondas elásticas por uma inclusão esférica usando harmônicos esféricos escalares [22]. Waterman realizou o estudo do espalhamento de ondas acústicas por uma inclusão com formato arbitrário, e mostrou uma teoria denominada de matriz de transferência ou matriz T [23].

Na década de 80, esta teoria foi estendida para as ondas elásticas por Varatharajulu, Pao, Waterman e Boström. Desde então, o formalismo da matriz T tem sido utilizado no estudo do espalhamento das ondas elásticas por uma inclusão esférica como caso particular. Neste modelo, é possível determinar a distribuição da onda espalhada conhecendo a onda incidente e os parâmetros elásticos da inclusão esférica [24]- [26].

O espalhamento de uma onda por uma inclusão esférica pode ser entendido como a interação das ondas elásticas incidentes, com a inclusão esférica. Ondas elásticas, incidentes e espalhadas (longitudinais e transversais), respectivamente, em um meio elástico estão divididas em três modos: o modo **L**, para a onda longitudinal, **M** e **N**, para os modos transversais [27]. Além disso, uma análise teórica da força de radiação elástica em um sólido sem perda foi realizada usando o método de expansão de onda parcial (EOP) [59]. No contexto do espalhamento Rayleigh, de uma onda elástica, os poucos estudos incluem a

absorção pela partícula [28]. Contudo, uma descrição analítica simples da eficiência de absorção parece não ser encontrada na literatura [29].

Outro fenômeno relacionado ao espalhamento das ondas elásticas é a força que aparece na inclusão, calculada no tempo, referida como força de radiação elástica. Essa força é causada pela transferência de momento linear das ondas elásticas para o objeto [30]. Existem dois tipos de forças de radiação acústica: Langevin e Rayleigh. As forças de radiação de Langevin depende unicamente da onda acústica, enquanto que as forças de radiação de Rayleigh se relacionam com a onda e ao parâmetro de tamanho relacionado ao objeto de estudo [31].

A força de radiação de Rayleigh, exercida sobre uma membrana de Mylar, foi medida por interferometria laser [32]- [33]. Nas últimas décadas a força de radiação de Langevin, exercida sobre uma partícula em um fluido foi amplamente investigada [34]- [37].

Alguns esforços também foram dedicados para investigar a força de radiação elástica em sólidos. Foi prevista a tensão estática devido à força de radiação provocada por ondas elásticas, em sólidos e medida experimentalmente no final de uma laje sólida. Observou-se que a tensão ocorre devido à relação não linear entre estresse e tensão. [38]- [39].

Um estudo preliminar sobre a força de radiação de Langevin, exercida sobre uma esfera embutida em um sólido quase incompressível (sólido macio), foi apresentado por Ilinski e outros autores [40]. Vale ressaltar que a força de radiação elástica por um feixe de ultra-som focalizado em um gel suave foi medida recentemente (2017) [41].

## 1.2 Aplicações

O fenômeno da propagação de ondas elásticas tem constituído uma área muito ativa na investigação em diversos ramos da ciência, pela necessidade crescente na busca de informações relacionadas à materiais sólidos sem provocar danos aos mesmos.

As aplicações práticas dos fenômenos de propagação de ondas elásticas em corpos sólidos, foram registradas desde os princípios da vida humana. Na confecção de utensílios em pedras, por exemplo, era utilizada uma técnica que consistia, estrategicamente, na aplicação localizada de fortes golpes nos bordos de uma rocha. Desde então, o interesse pelos fenômenos de propagação de ondas em sólidos têm crescido continuamente, assumindo grande importância com inúmeras aplicações.

O interesse por esse tipo de fenômeno é de grande relevância na área da construção

civil para à análise de estruturas, devido a sua aplicação no estudo do comportamento de uma determinada estrutura sob ação de cargas dinâmicas ou de impacto. Se a carga dinâmica em questão for moderada não ocorrerá deformações permanentes na estrutura, mas se a carga dinâmica for mais intensa poderá ocorrer pequenas deformações locais permanentes, ou fraturas, que podem ser analisadas através da teoria de propagação de ondas elásticas [42].

Na medicina, as ondas de ultrassom possuem grande importância na aplicação de análise e diagnóstico de patologias. Algumas doenças, estão associadas à modificações nas propriedades elásticas do tecido, em particular ao módulo elástico de cisalhamento. A técnica de ultrassom destaca-se por ser um método de análise não invasivo e não destrutivo, que baseia-se no uso da radiação não ionizante. De modo geral a técnica consiste em excitar o material com um sinal de alta frequência e baixo nível energético, assim pode-se observar que o material alvejado pelo feixe ultrassônico poderá absorver ou refletir parte do sinal incidente.

A partir da análise da propagação, reflexão e atenuação de impulsos ultrassônicos é possível, hoje em dia, determinar muitas propriedades mecânicas de tecidos e materiais, tais como as constantes elásticas e as características de amortecimento. As propriedades mecânicas dos tecidos moles dependem da sua constituição molecular, da presença de gorduras, fibras de colágeno, elastina e da micro organização estrutural macroscópica dos tecidos [43].

Uma técnica que é bastante utilizada na medicina é a elastografia. A técnica utiliza ondas de ultrassom, com a finalidade de analisar a rigidez de uma estrutura em relação aos tecidos adjacentes, ou seja, avaliando a elasticidade do tecido por meio da compressibilidade do mesmo sob a pressão externa. A incorporação do ultrassom na medicina, trouxe uma excelente contribuição para o diagnóstico de patologias, em humanos, de caráter não invasivo com alta precisão. A técnica permite em diversos casos, o diagnóstico diferencial, tratamento precoce e aumento da sobrevida, reduzindo assim as sequelas e as taxas de morbimortalidade em determinados casos de forma evidente. Vale ressaltar que os bio-efeitos, provocados pela radiação ultrassônica, são relativamente pequenos quando comparados com os efeitos provocados pelos métodos de diagnóstico que utilizam a radiação ionizante [44].

Técnicas de análise não destrutivas também vem sendo utilizada na agroindústria, devido a constante evolução do mercado cárneo de importação e exportação. Existe uma necessidade em atender a expectativa dos consumidores e atender aos parâmetros de qualidade exigidos pelo mercado de exportação. Um dos principais atributos relacionados à

avaliação da qualidade da carne é a maciez e, diversas técnicas são utilizadas para melhorar essa característica. As técnicas convencionais de processamento e extração vêm sendo substituídas pelas chamadas tecnologias limpas ou verdes, que tipicamente envolvem menos tempo de processamento, menor gasto de água e energia e menor produção de efluentes e substâncias tóxicas [45].

Dentre as novas tecnologias, destaca-se o uso de fluidos supercríticos, micro-ondas, campos elétricos pulsados, alta pressão hidrostática, luz ultravioleta, luz ultravioleta pulsante, aquecimento ôhmico e ultrassom. Porém, o método do ultrassom destaca-se por ser uma técnica puramente física, não destrutiva, de custo relativamente baixo e não invasiva.

O efeito do ultrassom sobre a textura da carne é basicamente devido aos efeitos de cavitação, que ativa enzimas responsáveis pela maciez, além de romper proteínas miofibrilares e o tecido conjuntivo. O ultrassom pode ser utilizado para inferir o conteúdo de gordura em bovinos vivos, no amaciamento de carnes, na identificação da melhor data de abate, para prever a qualidade e palatabilidade das carcaças bovinas, suínas e ovinas [45].

Na Geofísica, utiliza-se recursos de métodos sísmicos para caracterização geotécnica do subsolo. Esses métodos têm ganhado grande relevância no vasto domínio dos ensaios consagrados para este efeito e, isso resulta do progresso tecnológico verificado nos equipamentos e técnicas de ensaio. A teoria da propagação de ondas de cisalhamento também é a base do estudo de tremores de terra, onde são produzidas ondas elásticas que podem propagar-se por milhares de quilômetros. O estudo sobre a propagação destes fenômenos, quando produzidos artificialmente, contribui de maneira significativa para o conhecimento da constituição do interior da Terra [46].

No ramo industrial à técnica de ultrassom têm sido utilizada em larga escala, nos ensaios não destrutivos, para detectar defeitos e trincas no interior de um determinado material. A indústria de mineração é uma área onde os fenômenos de propagação de ondas de cisalhamento encontram larga aplicação. A utilização de cargas explosivas, por exemplo, tem por objetivo gerar ondas elásticas, com grande intensidade que se propagam através das rochas. As interferências mútuas entre as ondas de cisalhamento com as superfícies rochosas, provocam a fratura e a remoção de grandes pedaços dessas rochas [47].

### 1.3 Motivação

Para se obter as propriedades mecânicas de materiais sólidos diversos tipos de métodos podem ser utilizados, desde os que tem base em ensaios não destrutivos, aos que utilizam os ensaios destrutivos. O método de ensaio destrutivo é apresentado como o mais objetivo e rápido.

Para determinar, por exemplo, a resistência mecânica de um material basta sujeitá-lo a uma força de tração até atingir sua ruptura. Por outro lado, o método de ensaio não destrutivo, por exemplo os ultrassons, permitem o mesmo tipo de teste para análise de um material, porém, mantêm as formas do objeto analisado. Ambos os métodos utilizam basicamente o mesmo tipo de força, porém com intensidades muito inferior. Desta forma os métodos de análise e caracterização de materiais, por meio de ensaios não destrutivos destaca-se por manter a integridade do material analisado.

Quando objetiva-se analisar irregularidades em materiais, utilizando ultrassom, é possível observar que ao incidir à onda ultrassônica sobre o material a mesma irá propagar-se. Ao encontrar um defeito, ou irregularidade no material, ocorrerá o espalhamento da onda e, esse dado pode ser usado para identificar e também classificar este defeito.

Entretanto, as mesmas ondas ultrassônicas, podem ser usadas na caracterização de materiais para a obtenção de grandezas como, os módulos de elasticidade, tamanho de grãos, porosidades ou propriedades mecânicas. Em razão dos argumentos apresentados anteriormente, existe um grande interesse no estudo do espalhamento de ondas acústicas por inclusões, tanto do ponto de vista experimental quanto teórico.

Tendo em vista que a elastografia é uma técnica de grande importância na área médica, faz-se necessário o estudo dos fenômenos que fundamentam a técnica como a força de radiação. A força de radiação acústica também desempenha um papel importante no mecanismo de ativação de ultrassom para dispositivos implantados. Assim, métodos para estimar numericamente a eficiência da força de radiação em meio elástico ajudará no aprimoramento das técnicas que utilizam ultrassom.

### 1.4 Apresentação geral do trabalho

Esse trabalho teve como objetivo o estudo teórico e simulacional do espalhamento de uma onda plana por uma inclusão esférica elástica embutida em uma matriz sólida e a análise das eficiências de espalhamento, absorção e da força de radiação. Para tanto, foi

utilizado o modelo de propagação de ondas elásticas em sólidos no limite de Rayleigh e o método da expansão de ondas planas, para descrever a propagação e o espalhamento da onda na matriz sólida, onde foi considerado o limite incompressível e sem perda.

No capítulo 2, deriva-se as equações do modelo que envolve a propagação de ondas elásticas em sólidos, considerando ondas de cisalhamento e longitudinal, decorrentes da relação do estresse-deformação, com base na lei de Hooke generalizada, assumindo que as componentes do estresse são linearmente relacionadas com as da deformação com termos de derivada fracionária no tempo. Também será mostrada a equação de Helmholtz e a solução geral em termo dos harmônicos esféricos vetoriais.

No capítulo 3, será apresentada a teoria do espalhamento acústico em uma matriz sólida, por uma inclusão esférica. Além disso será derivado os coeficientes de espalhamento para aproximação de monopólo, dipolo e quadrupólo, que será utilizada nas fórmulas da força de radiação acústica. É importante ressaltar que, a teoria do espalhamento está diretamente ligada aos fenômenos da força de radiação acústica.

No capítulo 4, será descrita as expressões analíticas para a força de radiação acústica utilizando-se o princípio da conservação do momento linear e, as eficiências de absorção, espalhamento e radiação que utilizam os fundamentos da teoria do espalhamento.

No capítulo 5, será aplicada a teoria apresnetada nos capítulos anteriores considerando-se uma partícula de polietileno de alta densidade e uma partícula sólida de aço embutida em uma matriz sólida elástica, interagindo com a onda plana acústica no limite de Rayleigh.

E finalmente será apresentado no capítulo 6, as principais conclusões deste trabalho a partir dos resultados obtidos por meio de simulação numérica, e para tanto, utilizou-se o software *Wolfram Mathematica* [66]. Será também mostrada as perspectivas para o desenvolvimento de novos trabalhos.

## Equações do Modelo

Fluidos e sólidos elásticos são constituídos por átomos e moléculas interligados, de modo que a disposição como os átomos estão arrumados entre si é o que distingue um material do outro. Outra característica que difere um sólido elástico de um fluido, é a capacidade de ser deformado.

Quando um sólido é submetido a uma deformação elástica, relacionada com a tensão elástica, cessando a perturbação que provocou a deformação, o mesmo tende a voltar ao seu estado inicial, ou seja, não deformado. Quando um fluido é submetido a uma deformação, ele tende à permanecer no mesmo estado deformado. As leis que descrevem os sistemas constituídos por corpos sólidos elásticos ou fluidos são as mesmas: conservação da massa, momento e energia [48]- [49].

Neste capítulo serão desenvolvidas as equações que descrevem a deformação em um sólido elástico, incluindo as equações de conservação da massa, momento e energia. Será desenvolvido também, a teoria de propagação e espalhamento de ondas planas elásticas, considerando uma matriz sólida, constituída de material isotrópico e homogêneo, na presença de uma inclusão esférica. Será levado em conta que, a equação que descreve o movimento da onda, ou campos de deslocamento, é a conhecida equação de Helmholtz vetorial, escrita utilizando o sistema de coordenadas esféricas, devido a simetria do problema, que possui solução em termos dos harmônicos esféricos vetoriais.

## 2.1 Equações de Conservação para Sólidos

A matéria no estado sólido possui forma e volume constantes bem definidos, devido a grande coesão entre as suas moléculas, são materiais mais rígidos mas apesar disso podem sofrer deformações. Os sólidos elásticos são constituídos por átomos que estão interligados entre si. Quando um sólido homogêneo sofre uma deformação elástica, os átomos que o constituem sofrem um movimento que pode ser descrito por meio do deslocamento de um ponto arbitrário, no sólido, antes e após a deformação.

A deformação elástica é um fenômeno que pode ser analisado tomando um elemento infinitesimal do sólido fixo no espaço, usando o sistema de coordenadas cartesianas, num instante de tempo arbitrário. Assim, as equações de conservação da massa, momento e energia podem ser desenvolvidas analisando um elemento de massa de controle. As equações apresentadas nesta seção serão referidas em relação ao sistema de coordenadas cartesianas  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), permitindo que as complexidades do cálculo tensorial sejam evitadas [53].

### 2.1.1 Deformação

Considere um meio contínuo, de volume  $V_0$  e superfície  $S_0$ , que sofre uma deformação elástica. No instante que antecede a deformação, o ponto  $P_0$  está localizado pelo vetor posição  $X$ . Um ponto vizinho  $P_1$ , situado nas proximidades de  $P_0$ , encontra-se localizado pelo vetor  $dX$ , em relação a  $P_0$ . Após a deformação, o volume e a superfície serão denominados por  $V'_0$  e  $S'_0$ . O ponto  $P_0$ , será representado por  $P'_0$  e, estará localizado pelo vetor deslocamento  $x$ . O ponto  $P_1$ , será representado por  $P'_1$ , que estará localizado pelo vetor  $dx$ , em relação a  $P'_0$ , como mostra a Fig.(2.1). O deslocamento de  $P_0$  para  $P'_0$  é medido pelo vetor deslocamento  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , conforme mostra a Fig.(2.1).

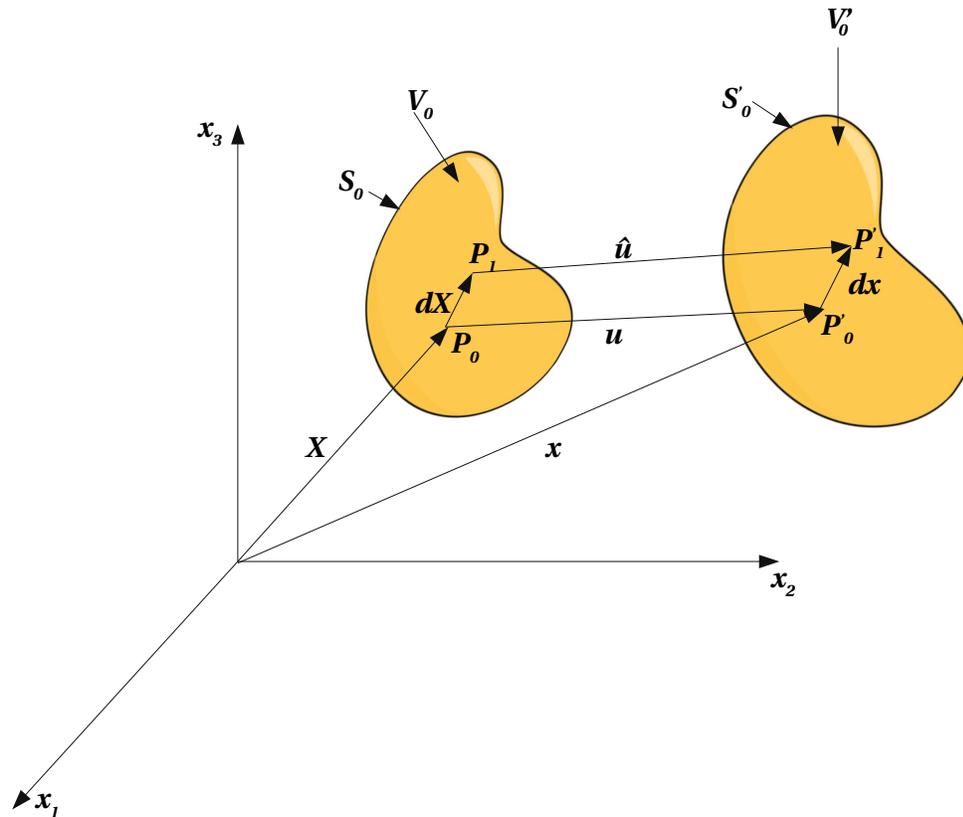
As relações entre os vetores, mostrados na Fig.(2.1) são dadas por:

$$x = X + u, \quad (2.1)$$

$$u + dx = dX + \hat{u}. \quad (2.2)$$

No entanto, da Eq. (2.1), tem-se que  $dx = dX + du$ . Utilizando essa expressão, pode-se reescrever a Eq. (2.2) como:

$$\hat{u} = u + du. \quad (2.3)$$

Figura 2.1: Deformação de um meio contínuo de volume  $V_0$  para o volume  $V'_0$ .

Fonte:Próprio autor

Além disso, pode-se expressar o vetor  $\mathbf{u}$  e  $d\mathbf{u}$  na notação de Einstein. Assim  $d\mathbf{u}$  pode ser reescrito seguinte forma:

$$du_i = \partial_j u_i dx_j, \quad (2.4)$$

onde  $\partial_j = \partial/\partial x_j$ . Essa equação pode ser apresentada na forma:

$$du_i = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) dx_j + \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j) dx_j. \quad (2.5)$$

Assim, para pequenas deformações, define-se as tensões infinitesimais de deformação e

rotação, respectivamente como:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j). \quad (2.6)$$

Escrevendo a deformação na forma vetorial:

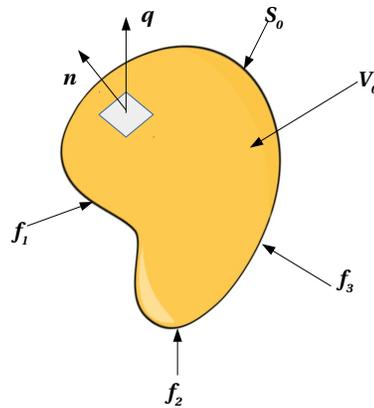
$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (2.7)$$

onde o gradiente,  $\nabla \mathbf{u}$  é o tensor de segunda ordem e o sobrescrito  $T$  denota a transposta de um tensor. O resultado da Eq.(2.5), mostra que a cinemática de um ponto arbitrário na vizinhança de  $P_0$  é governada pelo campo gradiente local  $\partial_j u_i$  e que o movimento é uma combinação de efeitos locais de distorção  $\epsilon_{ij}$ , e rotação de corpo rígido  $\omega_{ij}$ . Esses resultados são importantes e serão utilizados na seção que irá descrever o espalhamento de ondas por uma inclusão.

### 2.1.2 Tensão

Considere um meio contínuo de volume  $V_0$  e superfície  $S_0$  que sofre à ação de forças externas superficiais  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), como mostrado na Fig. (2.2).

Figura 2.2: Tensão de um meio contínuo de volume  $V_0$  devido a forças superficiais.



Fonte:Próprio autor

Quando o objeto é deformado devido a ação dessas forças, a disposição das moléculas são alteradas e o corpo deixa de estar em equilíbrio. Como resultado da atuação dessas forças, o vetor de tração  $q$  vai atuar sobre um elemento de superfície arbitrário com o vetor normal  $n$  a essa superfície, como mostrado na Fig. (2.2). O vetor tração é dado por:

$$q = \sigma \cdot n, \quad (2.8)$$

onde  $\sigma$  é o tensor das tensões e, está relacionado com as forças internas que tendem a devolver o corpo ao estado inicial. Sendo assim, se não há deformação não existe tensão interna.

### 2.1.3 Conservação da massa

A massa contida em um meio contínuo, de volume  $V_0$  e superfície  $S_0$ , para qualquer instante de tempo  $t$ , é dada por:

$$m = \int_{V_0} \rho d^3\mathbf{r}, \quad (2.9)$$

onde  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  é a densidade de massa de um sólido. A conservação da massa requer que taxa de variação da massa seja nula, ou seja,  $dm/dt = 0$ . Assim:

$$\partial_t \int_{V_0} \rho d^3\mathbf{r} = 0. \quad (2.10)$$

O deslocamento de uma partícula devido a uma deformação de volume  $V_0$  após um instante de tempo  $dt$  é  $\mathbf{v}dt$ . Se  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície  $S_0$ , então o volume deslocado pelas partículas de um elemento de área  $d^2\mathbf{r}$  na superfície  $S_0$  é  $d^3\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt d^2\mathbf{r}$ . Portanto:

$$\int_{V_0} \partial_t \rho d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0. \quad (2.11)$$

Utilizando-se o teorema da divergência de Gauss para campos vetoriais, podemos expressar a Eq. 2.11 em termos das integrais de volume. Desta forma, tem-se:

$$\int_{V_0} \partial_t \rho d^3\mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} d^3\mathbf{r} = 0. \quad (2.12)$$

Como o volume  $V_0$  é arbitrário, então a equação de conservação da massa é dada por:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2.13)$$

A Eq.(2.13) estabelece que a variação temporal da massa por unidade de volume, dentro do volume de controle infinitesimal é igual a variação espacial do fluxo líquido de massa através da superfície de controle por unidade de tempo.

### 2.1.4 Conservação do momento

A variação da taxa do momento linear em um meio contínuo de volume  $V_0$  e superfície  $S_0$  é igual a força total aplicada sobre esse volume. Para qualquer instante de tempo  $t$ , o momento linear no volume contínuo  $V_0$  é dado por  $\rho \mathbf{v}$ . Como o corpo está sujeito

a forças de superfícies e volumétricas, a taxa de variação do momento linear do corpo é dado por:

$$\partial_t \int_{V_0} \rho \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} = \int_{S_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3 \mathbf{r}, \quad (2.14)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões em um sólido. Resolvendo a derivada temporal na integral do lado esquerdo da igualdade, e lembrando que a derivada no tempo do elemento de volume é  $\partial_t(d^3 \mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r}$ , assim:

$$\int_{V_0} (\mathbf{v} \partial_t \rho + \rho \partial_t \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} = \int_{S_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3 \mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Substituindo a Eq. (2.11) e  $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$  simplificamos o lado esquerdo da igualdade. Utilizando novamente o teorema de Gauss, na integral de superfície e assim podemos reescrever essa equação da seguinte forma:

$$\int_{V_0} (\rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V) d^3 \mathbf{r}. \quad (2.16)$$

Como o volume  $V_0$  é arbitrário, a equação da conservação do momento é dada por:

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Considerando que as forças volumétricas  $\mathbf{f}^V$  são muito menores que as demais forças da Eq. (2.17), podemos desprezá-las e, assim reescrevemos a Eq. (2.17) da seguinte forma:

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Essa é a equação de conservação do momento para sólidos, e será utilizada nas próximas seções. A Eq.2.18 estabelece que a variação da taxa temporal da quantidade de movimento das partículas infinitesimais, dentro do elemento de volume de controle é igual à resultante das forças de superfície que atuam no volume de controle infinitesimal.

## 2.1.5 Conservação da energia

A Conservação de energia estabelece que a variação da taxa da energia total é igual ao trabalho realizado sobre o corpo, devido a ação de todas as forças externas que atuam

no corpo por unidade de tempo. Assim, a energia cinética  $E_c$  pode ser definida como:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{V_0} v^2 \rho \, d^3 \mathbf{r}. \quad (2.19)$$

A energia interna  $\mathcal{U}$  é dada por:

$$\mathcal{U} = \int_{V_0} \varepsilon_0 \rho \, d^3 \mathbf{r}, \quad (2.20)$$

onde  $\varepsilon_0$  é a energia interna por unidade de massa. O trabalho realizado pelas forças externas é dado por:

$$W = \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r}, \quad (2.21)$$

assim, a conservação de energia é dada por:

$$\partial_t \int_{V_0} \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_0 \right) \rho \, d^3 \mathbf{r} = \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r}. \quad (2.22)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo dessa equação, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \left[ (\mathbf{v} \partial_t \mathbf{v} + \partial_t \varepsilon_0) \rho + \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_0 \right) \partial_t \rho \right] d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_0 \right) \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d^2 \mathbf{r} \\ & = \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Aplicando o teorema de Gauss novamente nas integrais de superfície e, organizando os termos:

$$\int_{V_0} (\mathbf{v} \partial_t \mathbf{v} + \partial_t \varepsilon_0) \rho \, d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_0 \right) [\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}] \, d^3 \mathbf{r} = \int_{V_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r}. \quad (2.24)$$

Analisando a equação, percebe-se que o termo entre colchetes é a equação de conservação da massa, Eq. (2.13), logo terá valor nulo. Substituindo  $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$  e reorganizando os termos, essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{V_0} [(\rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^v) \partial_t \mathbf{u} + (\rho \partial_t \varepsilon_0 - \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{v})] d^3 \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Nota-se que o primeiro parenteses na equação é igual à zero, pois trata-se da equação de conservação do momento (2.17), portanto a equação acima reduz-se a:

$$\rho \partial_t \varepsilon_0 - \sigma \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Essa é a equação de conservação da energia para sólidos.

## 2.2 Propagação de onda em sólidos

Em um material elástico a tensão e à deformação estão relacionados pela rigidez, que é uma medida da resistência do material e a deformação em resposta a uma força aplicada. Para um meio isotrópico, Cauchy generalizou a lei de Hooke assumindo que as componentes do estresse são linearmente relacionadas com as componentes da deformação [54]. Desta forma, pode-se escrever a equação tensorial na notação de Einstein da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.27)$$

onde o  $\sigma_{ij}$  é o tensor das tensões,  $\epsilon_{kl}$  é o tensor deformação e  $C_{ijkl}$  é o tensor das constantes elásticas, ou módulos, do material e é chamado o tensor do módulo de elasticidade. Considerando que  $C_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem, podemos utilizar o teorema [56], então:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.28)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu_0$ , são conhecidas como constantes de Lamé e  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker. Utilizando esse teorema, para os tensores de quarta ordem a relação tensão-deformação do modelo de um sólido elástico pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_0 \epsilon_{ij}, \quad (2.29)$$

ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_0 \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.30)$$

onde,  $\mathbf{I}$  é o tensor unitário de segunda ordem, 'tr' significa o traço de um tensor,  $\lambda = K_0 - \frac{2}{3}\mu_0$  e  $\mu_0$ , são as constantes elásticas longitudinal e cisalhamento em unidades de

Pa · s. Substituindo a Eq.(2.7), na Eq.(2.30), tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ (K_0 - \frac{2}{3}\mu_0)(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \mathbf{I} + \mu_0 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.31)$$

Substituindo a Eq.(2.31) na equação de conservação do momento Eq.(2.18), é possível reescrever essa relação como função do deslocamento  $\mathbf{u}$ :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \left\{ (K_0 - \frac{2}{3}\mu_0)(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} \mathbf{I} + \mu_0 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.32)$$

Agora, utilizando-se a identidade vetorial:  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ , pode-se reescrever essa equação da seguinte forma:

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = (K_0 + \frac{4}{3}\mu_0) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.33)$$

ou

$$\partial_t^2 \mathbf{u} = c_L^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_S^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}. \quad (2.34)$$

A Eq.(2.34), é conhecida como equação do movimento para ondas elásticas ou equação de Navier, que suporta ondas longitudinais e de cisalhamento, onde a velocidade do som longitudinal e cisalhamento são dadas por [57]:

$$c_L = \sqrt{\frac{(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0)}{\rho}}, \quad (2.35)$$

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}, \quad (2.36)$$

observa-se que a velocidade do som longitudinal é maior que a de cisalhamento,  $c_L > c_S$ . Para pequenas deformações harmônicas no tempo  $t$ , com frequência angular  $\omega$ , o vetor  $\mathbf{u}$ , representa o deslocamento induzido no sólido pela propagação de uma onda elástica. Nesse caso têm-se campos de deslocamento nas direções longitudinal e transversal o que torna a equação mais complexa. Com a finalidade de tornar a expressão menos complexa, será utilizado o teorema da decomposição de Helmholtz [1]. Desse modo, é possível escrever a

expressão da amplitude para o deslocamento  $\mathbf{u}$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(L)} + \mathbf{u}^{(S)})e^{-i\omega t}, \quad (2.37)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária,  $\mathbf{u}^{(L)}$  é a componente longitudinal, (irrotacional com  $\nabla \times \mathbf{u}^{(L)} = 0$ ) e,  $\mathbf{u}^{(S)}$  é a componente de cisalhamento, (sem divergência com  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{(L)} = 0$ ). A partir de então, considera-se os deslocamentos longitudinais  $\mathbf{u}^{(L)}$ , e de cisalhamento  $\mathbf{u}^{(S)}$ , como quantidades normalizadas para a magnitude de deslocamento  $u_0$ . Inserindo a Eq.(2.37), na Eq.(2.34), é possível chegar até as equações vetoriais de Helmholtz:

$$\left(\nabla^2 + k_L^2\right) \mathbf{u}^{(L)} = 0; \quad (2.38)$$

$$\left(\nabla^2 + k_S^2\right) \mathbf{u}^{(S)} = 0, \quad (2.39)$$

onde  $k_L$  e  $k_S$ , são os números de onda longitudinal e cisalhamento respectivamente. A Equação de Helmholtz já foi resolvida por diversos autores [49], [56]. A solução geral da equação Vetorial de Helmholtz é dada em termos dos harmônicos esféricos vetoriais conforme pode ser vista em [27]. As equações vetoriais de Helmholtz, para a onda incidente devem ser finitas em todo o espaço. A solução de base regular das equações em coordenadas esféricas são dadas em termos dos vetores Hansen [49]:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(1)} &= \nabla_L [j_n(k_L r) Y_n^m(\theta, \varphi)], \\ &= j_n^{(')} (k_L r) \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) + \frac{j_n(k_L r)}{(k_L r)} \mathbf{\Psi}_n^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n,m}^{(1)} &= \nabla_S [j_n(k_S r) Y_n^m(\theta, \varphi)], \\ &= -j_n(k_S r) \mathbf{\Psi}_{n,m}^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{n,m}^{(1)} &= \nabla_S \times \mathbf{M}_{n,m}^{(1)}, \\ &= n(n+1) \frac{j_n(k_S r)}{(k_S r)} \mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) + \frac{\partial_r j_n(k_S r)}{(k_S r)} \mathbf{\Psi}_n^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde  $\nabla_j = k_j^{-1}$ , com  $j \in [L, S]$ ,  $j_n$ , é a função esférica de Bessel de ordem  $n$ , o símbolo principal significa diferenciação. Os harmônicos esféricos vetoriais (HEV), nessas equações

são definido como:

$$\mathbf{Y}_n^m(\theta, \varphi) \equiv Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{\Psi}_n^m(\theta, \varphi) \equiv \Psi_n^m(\theta, \varphi) r \nabla Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{\psi}_n^m(\theta, \varphi) \equiv r \times \nabla Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.45)$$

onde  $Y_n^m$ , é o harmônico esférico dado por:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-1)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{\Psi}_n^m(\theta, \varphi) \equiv \Psi_n^m(\theta, \varphi) r \nabla Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.47)$$

$$\mathbf{\psi}_n^m(\theta, \varphi) \equiv r \times \nabla Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.48)$$

com  $P_n^m$ , sendo os Polinômios de Legendre de ordem  $n$ , e grau  $m$ . Portanto, de acordo com a solução da equação de Helmholtz desenvolvida em [27], as amplitudes dos campos de deslocamentos incidente e espalhado, podem ser expandidas em série de ondas parciais da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{in}^{(L)}(k_L r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} S_{nm}^{(pp)} \mathbf{L}_{nm}^{(1)}(k_L r, \theta, \varphi), \quad (2.49)$$

$$\mathbf{u}_{in}^{(S)}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} S_{nm}^{(ps,1)} \mathbf{M}_{nm}^{(1)}(k_S r, \theta, \varphi) + S_{nm}^{(ps,2)} \mathbf{N}_{nm}^{(1)}(k_S r, \theta, \varphi), \quad (2.50)$$

onde  $\sum_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$ ,  $S_{nm}^{(pp)}$  é o coeficiente de forma do feixe da onda longitudinal, enquanto que  $S_{nm}^{(ps,1)}$  e  $S_{nm}^{(ps,2)}$  são os coeficientes de expansão da onda de cisalhamento de primeiro e segundo tipo.

## Espalhamento Acústico de Onda plana elástica no limite de Rayleigh

Uma onda elástica é uma perturbação tensional, que se propaga em um meio elástico. As ondas podem ser polarizadas longitudinalmente ou transversalmente. Se a onda propagante não encontrar uma barreira ela se propagará no meio de modo progressivo. Mas se o meio propagante for composto por uma matriz sólida, homogênea, isotrópica, contendo uma inclusão esférica, embutida, parte da onda incidente poderá ser: transmitida ou espalhada. As técnicas de ensaios não destrutivos baseiam-se nesse mecanismo, e possui potenciais aplicações na indústria e na área médica [47].

A técnica de ultrassom consiste em transmitir energia em forma de ondas, através dos materiais a serem examinados, com a finalidade de estimar no referido meio a energia incidente, transmitida, refletida ou espalhada. Na geofísica de exploração, objetos esféricos fornecem uma boa aproximação para objetos reais. A formulação analítica de uma única esfera pode ser usada para construir soluções mais complicadas [49].

A propagação das ondas elásticas foi modelada a partir da teoria da elasticidade linear e, foram encontradas soluções analíticas que descrevem o movimento da onda em meios lineares homogêneos e isotrópicos. Soluções exatas para problemas de espalhamento podem ser muito úteis [53].

Um dos primeiros trabalhos com base teórica para analisar o espalhamento de uma partícula esférica, foi desenvolvido por Rayleigh, em 1872 [48]. Um caso geral para espalhamento por uma esfera ou cilindro rígido, foi desenvolvido, em 1953, por Morse [49], no qual a solução do espalhamento desenvolvida por ele não necessariamente considera que o espalhador é muito menor do que o comprimento de onda.

Neste capítulo, será apresentada a teoria de espalhamento acústico de uma onda plana por uma inclusão esférica de material sólido elástico, embutida em uma matriz sólida elástica. No processo de resolução das equações, será considerado que o comprimento de onda é muito maior do que o raio da inclusão esférica, que é o limite de Rayleigh.

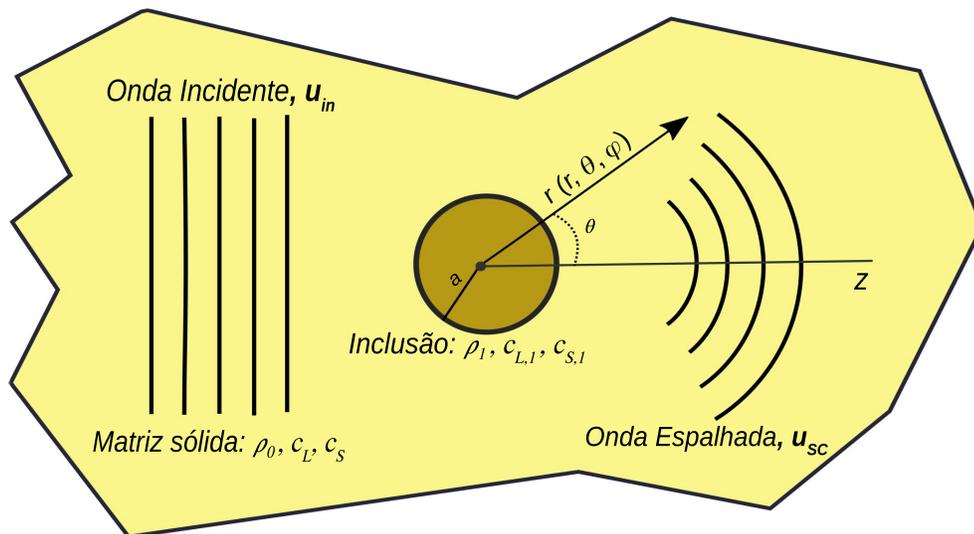
### 3.1 Espalhamento de onda plana no limite de Rayleigh

Considere uma matriz sólida, sem perdas, de extensão infinita, com densidade  $\rho_0$ , e módulos massa isotérmico e de módulo de cisalhamento, denotados por  $K_0$  e  $\mu_0$ , respectivamente. Sob pequenas deformações, a tensão induzida é considerada de acordo com a lei de Hooke [48]. Considere uma onda plana longitudinal, propagando-se nessa matriz, com frequência harmônica angular  $\omega$ , ao longo do eixo  $z$ , e com amplitude de deslocamento dada por:

$$\mathbf{u}_{\text{in}} = u_0 e^{ik_L z} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z, \quad (3.1)$$

onde  $u_0$ , é a magnitude do deslocamento, " $i$ " é a unidade imaginária,  $k_L = 2\pi/\lambda = \omega/c_L$ , com  $\lambda$  sendo o comprimento de onda longitudinal, " $t$ " é o tempo e  $\mathbf{e}_z$  é o vetor unitário na direção axial. Portanto, da Eq.(3.1) verifica-se que a magnitude do deslocamento deve ser muito menor que o comprimento de onda,  $u_0 \ll \lambda$ . O sistema que representa o modelo estudado no presente trabalho é, constituído por uma partícula esférica, viscoelástica ou elástica, de raio  $a$ , densidade  $\rho_1$ , módulo de massa  $K_1$  e, módulo de cisalhamento  $\mu_1$ , embutida em um matriz sólida, conforme ilustra a figura:

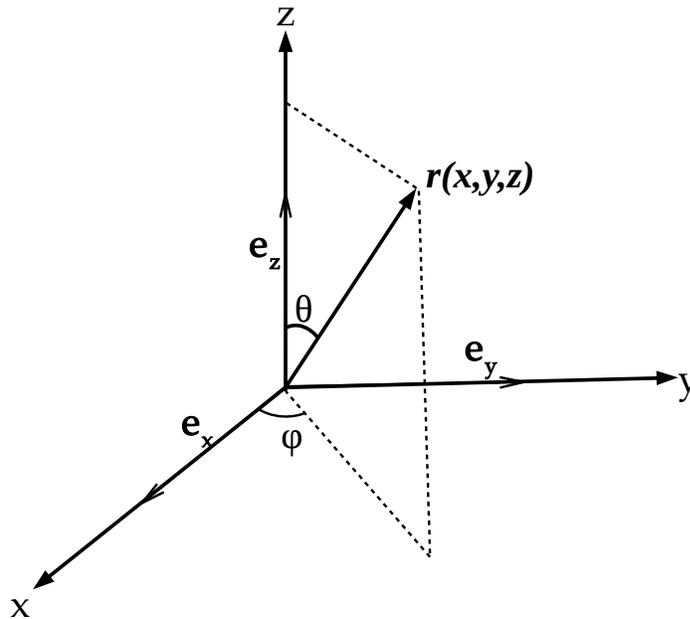
Figura 3.1: Uma onda incidente arbitrária, denotada por barras verticais pretas, é espalhada por uma inclusão esférica de raio  $a$ , densidade  $\rho_1$ , velocidade longitudinal  $c_{L,1}$  e de cisalhamento  $c_{S,1}$ . A esfera é incorporada em uma matriz sólida de densidade  $\rho_0$ , velocidade longitudinal  $c_L$  e de cisalhamento  $c_S$ . As ondas espalhadas são retratadas por arcos pretos. A direção é axial  $e$ , o vetor de posição em coordenadas esféricas, é representado por  $r(r, \theta, \varphi)$ .



Fonte:Próprio autor

Para descrever as ondas espalhadas, será utilizado o sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , com os correspondentes vetores unitários,  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ :

Figura 3.2: Coordenadas esféricas,  $(r, \theta, \varphi)$ , onde:  $\mathbf{r}$  é a distância radial,  $\theta$  é o ângulo polar e  $\varphi$  o ângulo azimutal, com os correspondentes vetores unitários.



Fonte:Próprio autor

A origem do sistema de coordenadas é definida no centro da esfera estática. A análise futura é limitada a pequenas esferas comparadas ao comprimento de onda incidente. Na análise de espalhamento Rayleigh, é natural definir um parâmetro de escala em termos do tamanho da partícula:

$$\varepsilon = k_L a = 2\pi \frac{a}{\lambda} \ll 1. \quad (3.2)$$

Devido à conversão de modo, as ondas espalhadas longitudinais e de cisalhamento são formadas, respectivamente, no meio. Comumente, essas ondas são referidas como ondas primária  $P$  e secundária  $S$ .

A conversão de modo ocorre quando uma onda longitudinal ou de cisalhamento atinge uma interface em ângulo diferente do ângulo reto. No processo de espalhamento analisado aqui, uma onda  $P$  é convertida em outra onda  $P$  e onda  $S$ . Além disso, para uma inclusão muito menor que o comprimento de onda, é suficiente representar as ondas espalhadas até o modo quadrupolo. No limite de Rayleigh, o campo de deslocamento das ondas espalhadas é dada por [59]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{sc}(r, \theta) = & -\frac{u_0}{k_L} \sum_{n=0}^2 i^{(n+1)} (2n+1) \left[ s_n^{pp} \nabla \left[ h_n^{(1)}(k_L r) P_n(\cos \theta) \right] \right. \\ & \left. + \left( \frac{k_L}{k_S} \right) s_n^{ps} \nabla \times \nabla \times \left[ r h_n^{(1)}(k_S r) P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r \right], \right. \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $h_n^{(1)}$ , é a função esférica de Hankel do primeiro tipo, e  $P_n$  é o polinômio de Legendre de ordem  $n$  e  $k_S = \omega/c_S$ . O primeiro termo, dentro dos colchetes, da Eq.(3.3), corresponde a uma onda longitudinal tipo  $P$ , (essa onda é irrotacional). O segundo termo, está relacionado a uma onda de cisalhamento tipo  $S$ , não divergente. As constantes  $s_n^{(pp)}$  e  $s_n^{(ps)}$ , são respectivamente, os coeficientes de espalhamento primário e secundário. No *Farfield*  $k_L r \gg 1$ , o vetor de deslocamento do espalhamento pode ser expresso por:

$$\mathbf{u}_{sc}(r, \theta) = u_0 \frac{a}{r} [e^{ik_L r} \mathbf{f}^{pp}(\theta) + e^{ik_S r} \mathbf{f}^{ps}(\theta)], \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{f}^{pp}$  e  $\mathbf{f}^{ps}$  são, respectivamente, as funções de espalhamento longitudinal e de cisalhamento. Essas funções são determinadas a partir da expansão assintótica da Eq.(3.3), para  $k_L r \gg 1$ . Assim, substituindo a função Hankel esférica assintótica,  $h_n^{(1)}(k_L r) \approx i^{-n-1} e^{ik_L r} / k_L r$ , para  $k_L r \rightarrow \infty$ , na Eq.(3.3), tem-se:

$$\mathbf{f}^{(pp)}(\theta) = \sum_{n=0}^2 (2n+1) \left[ -\frac{i}{k_L a} s_n^{(pp)} P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r \right], \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f}^{(ps)}(\theta) = \sum_{n=0}^2 (2n+1) \left[ -\frac{i}{k_S a} s_n^{(ps)} P_n'(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \right]. \quad (3.6)$$

Considerando que a onda em questão propaga-se sobre uma inclusão esférica absorvedora, como por exemplo, uma partícula constituída de polímero, têm-se que o módulo de massa e de cisalhamento  $K_1$ , e  $\mu_1$ , serão complexos [61], assim:

$$K_1^* = K_1' + iK_1'', \quad (3.7)$$

$$\mu_1^* = \mu_1' + i\mu_1''. \quad (3.8)$$

As variáveis  $K_1'$  e  $\mu_1'$ , são, respectivamente, os módulos de armazenamento, enquanto  $K_1''$  e  $\mu_1''$  são, módulos referente às perdas. As relações de dispersão longitudinal e de

cisalhamento, dentro da partícula, são expressas por:

$$k_{L,1} = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{K_1(\omega) + \frac{4}{3}\mu_1(\omega)}}, \quad (3.9)$$

$$k_{S,1} = \omega \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1(\omega)}}. \quad (3.10)$$

Observa-se que, a parte imaginária está relacionada com a absorção. Além disso, a velocidade do som dentro da partícula pode ser espalhada. Se o material for puramente elástico,  $K_1$  e  $\mu_1$ , tornam-se funções de valor real, independentes da frequência. Agora, é possível determinar os coeficientes de espalhamento, longitudinal e de cisalhamento, obtidos a partir das condições de continuidade do tensor das tensões e do vetor de deslocamento através da superfície da partícula [27].

As condições de contorno, para o espalhamento por uma esfera sólida, isotrópica, incorporada em uma matriz sólida, elástica, requerem a continuidade dos vetores de deslocamento e do tensor das tensões na superfície da esfera, em  $r = a$  [27], assim temos:

Através das condições de contorno, é possível calcular os coeficientes de espalhamento longitudinal. Para tanto, deve-se substituir os campos de deslocamento e tensor das tensões incidente, espalhado e transmitido, conforme foi resolvido em [27]. Assim, encontramos um sistema de equações lineares para os coeficientes que pode ser resolvido através do cálculo do determinante, conforme a equação abaixo:

$$\oint_{4\pi} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_{in} + \mathbf{u}_{sc} + \mathbf{u}_{tr}) \cdot \mathbf{Y}_{nm}^* \\ (\mathbf{u}_{in} + \mathbf{u}_{sc} + \mathbf{u}_{tr}) \cdot \mathbf{\Psi}_{nm}^* \\ \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{in} + \boldsymbol{\sigma}_{sc} + \boldsymbol{\sigma}_{tr}) \cdot \mathbf{Y}_{nm}^* \\ \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{in} + \boldsymbol{\sigma}_{sc} + \boldsymbol{\sigma}_{tr}) \cdot \mathbf{\Psi}_{nm}^* \end{bmatrix} d\Omega = 0. \quad (3.11)$$

Para calcular os coeficientes de espalhamento longitudinal, é preciso substituir os campos de deslocamento e o tensor das tensões incidente, espalhado e transmitido, conforme foi realizado por [27]. Deste modo, é possível montar um sistema de equações lineares e assim, calcular os coeficientes de espalhamento:

$$s_n^{(pp)} = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ b_2 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ b_3 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ b_4 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}}, \quad (3.12)$$

e

$$s_n^{(ps)} = \frac{k_S}{k_L} \frac{\det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} b_1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ b_2 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ b_3 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ b_4 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}} s_n^{(pp)}. \quad (3.13)$$

Os elementos da matriz são fornecidos no Apêndice, ???. Os coeficientes de espalhamento são funções dos parâmetros de tamanho:  $\varepsilon = k_L a$ ,  $\varepsilon_{L,1} = k_{L,1} a$ ,  $\varepsilon_S = k_S a$  e  $\varepsilon_{S,1} = k_{S,1} a$ .

Para obter os coeficientes de espalhamento no limite de Rayleigh  $\varepsilon \ll 1$ , considera-se que  $\varepsilon_S = (k_S/k_L)\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{S,1} = (k_{S,1}/k_L)\varepsilon$  e  $\varepsilon_{L,1} = (k_{L,1}/k_L)\varepsilon$ . Além disso, considera-se que a matriz sólida não pode se aproximar do regime quase incompressível [61].

Portanto, para evitar o regime quase incompressível, a análise de ondas em sólidos será mantida, considerando,  $(k_S/k_L) = O(1)$ , que restringe o parâmetro de tamanho de cisalhamento à:

$$\varepsilon_S = O(\varepsilon). \quad (3.14)$$

Agora é possível substituir as funções esféricas de Bessel e Hankel, dos elementos da matriz fornecidos no apêndice ??, pelas correspondentes expansões assintóticas [62]:

$$j_n(x) = 2^n x^n \left[ \frac{n!}{(2n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(2n+3)!} x^2 \right], \quad (3.15)$$

$$j_n(x) = -\frac{i(2n)!}{2^n n! x^{n+1}}, \quad x \ll 1. \quad (3.16)$$

Assim, os coeficientes de espalhamento de: monopolo, dipolo e quadrupolo, do modo longitudinal, calculados são dados por:

$$s_0^{pp} = \frac{\varepsilon^3 \left[ 6 + \frac{8(\mu_1 - \mu_0)}{K_0 + \frac{4\mu_0}{3}} - \frac{6\rho_1}{\rho_0} \frac{K_1 + \frac{4\mu_1}{3}}{K_0 + \frac{4\mu_0}{3}} \right]}{\varepsilon^2 \left[ 6(i - \varepsilon) + \frac{3i\rho_1}{\rho_0} \right] - 6i \left[ \frac{4(\mu_0 - \mu_1)}{K_0 + \frac{4\mu_0}{3}} + \frac{3\rho_1}{\rho_0} \frac{K_1 + \frac{4\mu_1}{3}}{K_0 + \frac{4\mu_0}{3}} \right]}, \quad (3.17)$$

$$s_1^{pp} = \frac{\varepsilon^3(\rho_1 - \rho_0)}{2\varepsilon^3 \left( \frac{\mu_0}{K_0 - \frac{4}{3}\mu_0} \right)^{3/2} (\rho_0 - \rho_1) + (\varepsilon^3 - 9i)\rho_0 - \varepsilon^3\rho_1}, \quad (3.18)$$

$$s_2^{pp} = \frac{\frac{4i\varepsilon^3}{3}\mu_0(\mu_0 - \mu_1)}{(9\mu_0 + 6\mu_1) \left( k_0 + \frac{4}{3}\mu_0 \right) - 4\mu_0 \left( k_0 + \frac{4}{3}\mu_0 - \mu_1 \right)}, \quad (3.19)$$

foi considerado os termos até  $O(\varepsilon^3)$ . Da mesma forma, para os coeficientes de espalhamento de cisalhamento de dipolo e quadrupolo, obtém-se:

$$s_1^{ps} = \left( \frac{k_S}{k_L} \right)^3 s_1^{pp}, \quad (3.20)$$

$$s_2^{ps} = \left(\frac{k_S}{k_L}\right)^4 s_2^{pp}. \quad (3.21)$$

No limite de Rayleigh, os coeficientes de monopolo, dipolo e quadrupolo são obtidos, (através de simulação numérica computacional), expandindo as Eqs. (3.17) - (3.21) em série de Taylor e, utilizando o *Software Mathematica* [66], em torno de  $\varepsilon = 0$ , substituindo as Eqs. (3.10) e (3.9). E desta forma:

$$s_0^{(pp)} = -i \left(\frac{f_0}{3}\right) \varepsilon^3, \quad (3.22)$$

$$s_1^{(pp)} = i \left(\frac{f_1}{6}\right) \varepsilon^3, \quad (3.23)$$

$$s_2^{(pp)} = -i \left(\frac{f_2}{15}\right) \varepsilon^3, \quad (3.24)$$

$$s_1^{(ps)} = i \left(\frac{k_S}{k_L}\right)^3 \left(\frac{f_1}{6}\right) \varepsilon^3, \quad (3.25)$$

$$s_1^{(ps)} = -i \left(\frac{k_S}{k_L}\right)^4 \left(\frac{f_2}{30}\right) \varepsilon^3. \quad (3.26)$$

As funções  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  são dadas por:

$$f_0(\omega) = 3 \frac{(K_1(\omega) - K_0)}{3K_1(\omega) + 4\mu_0}, \quad (3.27)$$

$$f_1 = \frac{2}{3} \frac{(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0}, \quad (3.28)$$

$$f_2(\omega) = 20 \frac{(\mu_1(\omega) - \mu_0)}{6(K_0 + 2\mu_0) \frac{\mu_1(\omega)}{\mu_0} + (9K_0 + 8\mu_0)}. \quad (3.29)$$

Ao considerar uma partícula puramente elástica, os coeficientes das Eqs. (3.22) - (3.26), estão de acordo com [58]. Os termos de ordem superior, com  $n > 2$ , têm ordem  $O(\varepsilon)^5$  e portanto, são negligenciados. Vale ressaltar, que fazendo  $\mu_1 = 0$ , é possível obter os fatores de espalhamento para uma cavidade cheia de líquido [57].

No presente trabalho, não foi considerado os efeitos termo viscoso na matriz sólida para derivar os fatores de espalhamento nas Eq.(3.27), (3.28) e (3.29). Tais efeitos podem ser modelados em sólidos, como foi feito para o espalhaento por uma partícula em um fluido termoviscoso [60]. Do mesmo modo espera-se que efeitos termo viscosos modifiquem os fatores de espalhamento.

Neste capítulo foi discutido a teoria do espalhamento acústico de uma onda plana (no limite de Rayleigh), em uma matriz sólida, contendo uma inclusão esférica. Além disso, foram mostrados os coeficiente de espalhamento para aproximação de monopolo, dipolo e quadrupolo que serão utilizados nas fórmulas de força de radiação acústica. É importante ressaltar que o espalhamento acústico está diretamente relacionado com o fenômeno da força de radiação elástica.

No próximo capítulo, será mostrado como obter expressões analíticas para a força de radiação acústica e as eficiências de absorção, espalhamento e radiação que utilizam os fundamentos de espalhamento.

# Capítulo 4

## Força de radiação elástica em uma matriz sólida com uma inclusão esférica devido uma onda plana

A força da radiação acústica é um fenômeno causado pela transferência de impulso das ondas para um determinado objeto. Devido a essa interação, o objeto absorve e/ou espalha a onda acústica ocasionando uma transferência de momento da onda para o objeto. Assim, o fluxo de momento linear médio e a tensão que atuam sobre o objeto é conhecido como força de radiação acústica.

A força de radiação elástica, exercida sobre uma inclusão, está relacionada com a mudança na taxa de variação do momento extraído da onda incidente, menos o impulso linear retirado pela onda espalhada ao longo da direção axial.

Neste capítulo, serão apresentadas as expressões analíticas para a força de radiação acústica, exercidas sobre uma matriz sólida com uma inclusão esférica, devido a uma frente de onda plana e as eficiências de absorção, espalhamento e extinção, utilizando a extensão do teorema óptico [27].

## 4.1 Fatores de eficiência de absorção, espalhamento e extinção

Quando ondas elásticas propagam-se ao longo de uma matriz sólida, no eixo  $z$ , contendo uma inclusão esférica, parte da potência incidente na partícula, é extraída por absorção e espalhamento. A conservação de energia requer que a média temporal da potência de extinção seja:

$$P_{ext} = P_{abs} + P_{sca}, \quad (4.1)$$

onde:  $P_{abs}$  é a média temporal da potência absorvida e  $P_{sca}$  a media no tempo da potência espalhada. É útil definir as eficiências dessas grandezas físicas como:

$$Q_{ext,abs,sca} = \frac{P_{ext,abs,sca}}{\pi a^2 I_0}, \quad (4.2)$$

onde  $I_0 = \rho_0 c_L^3 (k_L u_0)/2$  é a magnitude média da onda plana longitudinal, com  $u_0$  sendo a magnitude do campo de deslocamento. Assim, tem-se que:

$$Q_{ext} = Q_{abs} + Q_{sca}. \quad (4.3)$$

Os fatores de eficiências são dados em termo dos coeficientes de espalhamento, da seguinte forma [37]:

$$Q_{abs} = -\frac{4}{\varepsilon^2} Re \sum_{n=0}^2 (2n+1) \times \left[ s_n^{(pp)} + |s_n^{(pp)}|^2 + n(n+1) \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 |s_n^{(ps)}|^2 \right], \quad (4.4)$$

$$Q_{sca} = -\frac{4}{\varepsilon^2} Re \sum_{n=0}^2 (2n+1) \left[ |s_n^{(pp)}|^2 + n(n+1) \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 |s_n^{(ps)}|^2 \right], \quad (4.5)$$

$$Q_{ext} = \frac{4}{\varepsilon^2} Re \sum_{n=0}^2 (2n+1) s_n^{(pp)}, \quad (4.6)$$

onde " $Re$ ", significa a parte real. Substituindo os coeficientes de espalhamento dados na Eqs. (3.22) - (3.26) na Eq.(4.5), tem-se:

$$Q_{sca} = \frac{4\varepsilon^4}{9} \left[ |f_0|^2 + \frac{3}{4} \left[ 1 + 2 \left( \frac{k_s}{k_L} \right)^3 \right] f_1^2 + \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{k_s}{k_L} \right)^5 \right] |f_2|^2 \right]. \quad (4.7)$$

A eficiência do espalhamento, varia com  $\varepsilon^4$  que, representa uma característica universal do espalhamento no limite de Rayleigh. No entanto, a dependência com a frequência também está relacionada aos fatores de contraste de monopolo  $f_0$  e quadrupolo  $f_2$ . Observa-se que a Eq.(4.7), está de acordo com os resultados derivados anteriormente para o caso de uma partícula puramente elástica em [55].

Para calcular a eficiência de absorção, é necessário expandir  $Q_{ext}$ , em torno de  $\varepsilon = 0$  até  $O(\varepsilon^4)$ , que é a ordem mais baixa de  $Q_{sca}$ , assim:

$$Q_{ext} = Q_{ext}^{(1)}\varepsilon + Q_{ext}^{(2)}\varepsilon^2 + Q_{ext}^{(3)}\varepsilon^3 + Q_{ext}^{(4)}\varepsilon^4, \quad (4.8)$$

com  $Q_{ext}^{(n)}$  sendo, a eficiência de extinção de ordem  $n$ . Claramente, para  $n = 1, 2, 3$ , a eficiência de extinção é devido apenas à absorção, uma vez que  $Q_{sca}^{(n)} = O(\varepsilon^4)$ . A Eq. (4.8) é substituída na Eq.(4.3), produzindo a eficiência de absorção como:

$$Q_{abs} = Q_{ext}^{(1)}\varepsilon + Q_{ext}^{(2)}\varepsilon^2 + Q_{ext}^{(3)}\varepsilon^3. \quad (4.9)$$

Portanto, a eficiência de absorção de menor ordem é  $Q_{abs} = Q_{ext}^{(1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . Inserindo os coeficientes das Eqs. (3.27), (3.28) e (3.29) na Eq. (4.6), obtém-se:

$$Q_{ext}^{(1)} = -\left(\frac{4}{3}\right) Im[f_0 + f_2]. \quad (4.10)$$

De modo que, a eficiência de absorção torna-se:

$$Q_{abs}^{(1)} = -\left(\frac{4\varepsilon}{3}\right) Im[f_0 + f_2], \quad (4.11)$$

onde " $Im$ ", significa a parte imaginária. Apesar dessa quantidade variar linearmente com a frequência  $Q_{abs} \sim \varepsilon \sim \omega$ , também adquire dependência da frequência em relação aos fatores de contraste  $f_0$  e  $f_2$ . Além disso, para uma partícula absorvedora  $Q_{abs} > 0$ , portanto, a seguinte condição deve ser satisfeita:  $Im[f_0] > Im[f_2]$ . Combinando as Eq.(4.7) e (4.11), obtém-se a seguinte expressão para a eficiência de extinção:

$$Q_{ext} = -\left(\frac{4\varepsilon}{3}\right) \text{Im}[f_0 + f_2] + \frac{4}{9}\varepsilon^4 \left[ |f_0|^2 + \frac{3}{4} \left[ 1 + 2 \left(\frac{k_S}{k_L}\right)^3 \right] f_1^2 + \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{k_S}{k_L}\right)^5 \right] |f_2|^2 \right]. \quad (4.12)$$

Para uma partícula não absorvedora  $Q_{abs} = 0$ , isso implica em  $Q_{ext} = Q_{sca}$ . Finalmente, de acordo com o teorema óptico, desenvolvido por [27], que expressa a eficiência de extinção em termos da função de espalhamento longitudinal na direção dianteira  $\theta = 0$ :

$$Q_{ext} = Q_{abs} + Q_{sca} = \frac{4}{\varepsilon} \text{Im}[f^{pp}(0)] \cdot \mathbf{e}_z, \quad (4.13)$$

este resultado será usado posteriormente para conectar a força de radiação e a função de espalhamento longitudinal.

#### 4.1.1 Conservação do momento e força de radiação

A força de radiação elástica exercida sobre uma inclusão esférica, está relacionada com a mudança de taxa do momento extraído da onda incidente,  $c_L^{-1}P_{ext} = c_L^{-1}(P_{sca} + P_{abs})$ , menos o momento linear retirado pela onda espalhada ao longo da direção axial  $\theta = 0$ .

Para obter-se o momento axial, suportado pelas ondas espalhadas, longitudinal e de cisalhamento, deve-se obter a potência diferencial de espalhamento que passa através de uma área diferencial  $r^2 d\Omega$ , onde  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  é o ângulo sólido diferencial em coordenadas esféricas. A expressão para a potência de espalhamento pode ser escrita na forma diferencial [27], e é dada por:

$$dP_{sca} = \omega^2 r^2 \text{Im} \left[ \frac{1}{k_L^2} u_{sc,r} \partial_r u_{sc,r}^* + \frac{1}{k_S^2} u_{sc,\theta} \partial_\theta u_{sc,\theta}^* \right] d\Omega. \quad (4.14)$$

Considerando-se que não existe perda de energia na matriz sólida, é possível usar o deslocamento de espalhamento de campo distante, dado na Eq.(3.4), e assim, obtém-se:

$$dP_{sca} = \pi a^2 I_0 c_L^3 \left[ |f^{pp}|^2 + \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 |f^{ps}|^2 \right] d\Omega. \quad (4.15)$$

Assim, o momento diferencial projetado na direção axial, será:

$$\frac{\cos \theta}{c_L} dP_{sca} = \pi a^2 I_0 c_L^2 \cos \theta \left[ |f^{pp}|^2 + \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 |f^{ps}|^2 \right] d\Omega. \quad (4.16)$$

Integrando-se essa expressão na superfície da esfera  $S_1$ , produz o momento axial total tomado pelas ondas espalhadas longitudinal e de cisalhamento:

$$\frac{1}{c_L} \int \int_{S_1} \cos \theta dP_{sca} = \langle \cos \theta \rangle \frac{dP_{sca}}{c_L}, \quad (4.17)$$

onde

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi \cos \theta \pi a^2 I_0 c_L^3 \left[ |f^{pp}|^2 + \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 |f^{ps}|^2 \right] \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \pi a^2 I_0 c_L^3 \left[ |f^{pp}|^2 + \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 |f^{ps}|^2 \right] \sin \theta d\theta}. \quad (4.18)$$

Esta quantidade, dá o grau de assimetria das ondas espalhadas em relação ao plano  $z = 0$ , que varia entre  $-1 \leq \langle \cos \theta \rangle \leq 1$ , com os limites inferior e superior correspondendo ao espalhamento total nas regiões para trás e para frente. A força de radiação elástica é então expressa como:

$$F_{rad} = \frac{1}{c_L} (P_{ext} - \langle \cos \theta \rangle P_{sca}). \quad (4.19)$$

Em termos da eficiência de radiação, tem-se que, a força de radiação será:

$$F_{rad} = \pi a^2 \frac{I_0}{c_L} Q_{rad}, \quad (4.20)$$

onde  $Q_{rad}$ , é a eficiência da força de radiação, dada por:

$$Q_{rad} = Q_{abs} + (1 - \langle \cos \theta \rangle) Q_{sca}, \quad (4.21)$$

sabendo que  $Q_{rad}$ , é a eficiência da força de radiação. Vale ressaltar que a força de radiação elástica, como dada na Eq. (4.20), também foi obtida para ondas acústicas em fluidos e, ondas eletromagnéticas [51].

O fator de assimetria é calculado substituindo as funções de espalhamento da Eq.(3.4) na (4.18), [27]. Assim, obtem-se:

$$\langle \cos \theta \rangle = -\frac{8}{\varepsilon^2 Q_{sca}} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^1 \left\{ (n+1) \times \left[ s_n^{pp} s_{n+1}^{pp*} + n(n+2) \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^3 s_{n+1}^{ps*} s_n^{ps} \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Substituindo-se os coeficientes de espalhamento dados nas Eqs.(3.22) - (3.26), nesta equação e as Eqs.(4.7) e (4.13), organizando o resultado na Eq. (4.20), chega-se à eficiência da força de radiação elástica:

$$\begin{aligned} Q_{rad} = & -\frac{4\varepsilon}{3} \operatorname{Im} [f_0 + f_2] + \frac{4\varepsilon^4}{9} \{ |f_0|^2 + \operatorname{Re}[f_0 f_1] \\ & + \frac{3}{4} \left[ 1 + 2 \left( \frac{k_S}{k_L} \right)^3 \right] f_1^2 + \frac{2}{5} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{k_S}{k_L} \right)^4 \right] \operatorname{Re}[f_1 f_2^*] \\ & + \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{k_S}{k_L} \right)^5 \right] |f_2|^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A força de radiação é dada na aproximação quadrupolar. O termo  $\varepsilon$ , é devido à absorção no interior da partícula, enquanto que o termo  $\varepsilon^4$ , está relacionado à contribuição do espalhamento para força de radiação. Os termos  $\left( \frac{k_S}{k_L} \right)$  explicam a conversão de modo longitudinal e de cisalhamento das ondas espalhadas. Para uma partícula não absorvedora, a eficiência da força de radiação é reduzida à

$$Q_{rad} = (1 - \langle \cos \theta \rangle) Q_{sca}, \quad (4.24)$$

neste caso, a relação entre a eficiência da força de radiação com a frequência será:

$Q_{rad} \sim \varepsilon^4 \sim \omega^4$ . Nesta seção derivou-se a força de radiação em termos do momento linear e da eficiência de radiação. Na próxima seção será realizada uma discussão sobre a incompressibilidade dos sólidos elásticos.

### 4.1.2 Sólidos elásticos incompressíveis

A compressibilidade é uma característica relacionada à deformação, que todos os materiais, desde sólidos a líquidos, possuem quando submetidos a forças externas [27]. Os diferentes tipos de materiais, quando submetidos a uma tensão, respondem de maneira diferente devido as suas propriedades.

A razão de Poisson fornece uma maneira universal de contrastar o desempenho estrutural de materiais reais, homogêneos ou não. Materiais com a razão de Poisson  $\nu_0 \approx 1/2$ , são extremamente difíceis de comprimir [52]. Alguns exemplos são: borracha, tecido mole e a maioria dos líquidos [53]- [54]:

$$\frac{K_0}{\mu_0} = \left( \frac{k_L}{k_S} \right)^2 - \frac{4}{3} = \frac{2(1 + \nu_0)}{3(1 - 2\nu_0)} \gg 1, \nu_0 \approx 1/2. \quad (4.25)$$

Na primeira parte da Eq.(4.25), usa-se a expressão da velocidade do som, dadas na Eqs.(2.35) e (2.36). Observa-se que nas Eqs.(3.22) - (3.26), que  $\nu_0$  aproxima-se de 1/2 e, os coeficientes de espalhamento de cisalhamento divergem.

Para um sólido, no regime quase incompressível, a proporção do módulo de massa de cisalhamento torna-se muito grande, de modo que  $K_0/\mu_0 \gg 1$ . Assim, a partir das velocidades do som na Eq.(2.35) e (2.36) observa-se que  $k_S/k_L \gg 1$ . Portanto, para evitar o regime quase incompressível, deve-se manter à análise de ondas em sólidos com  $k_S/k_L = O(1)$ , que restringe o parâmetro de tamanho de cisalhamento a:

$$\varepsilon_S = O(\varepsilon). \quad (4.26)$$

Logo, deve-se concluir que a análise assintótica para o limite de comprimento de onda longo, introduzido nas Eqs.(3.22) - (3.26), falha para uma matriz sólida, com a razão de Poisson aproximando-se à metade. Isso ocorre porque a condição dada na Eq.(4.26),

para o parâmetro de tamanho de cisalhamento é violada:

$$\varepsilon_S = \left( \frac{k_S}{k_L} \right) \varepsilon = O(\varepsilon), \quad (4.27)$$

e a violação ocorre quando:

$$\left( \frac{k_S}{k_L} \right) \varepsilon = O(\varepsilon^{-1}), \quad (4.28)$$

ou

$$\frac{K_0}{\mu_0} = O(\varepsilon^{-2}). \quad (4.29)$$

Consequentemente, os resultados baseados nos coeficientes de espalhamento, no limite de comprimento de onda longo, dado nas Eqs.(3.22) - (3.26), não são adequados para um meio quase incompressível, como os sólidos moles, com:

$$\frac{K_0}{\mu_0} = O(\varepsilon^{-2}). \quad (4.30)$$

Observe também que, o fator de contraste de dipolo, para um meio fluido sem perdas, dado por  $f_1 = (\rho_1 - \rho_0)/(2\rho_1 + \rho_0)$ , não pode ser obtido nas Eq.(3.27), ajustando  $\mu_0 = 0$ .

O motivo é que a Eq.(3.27), dá a mudança de inércia, que decorre da diferença de densidade entre a matriz sólida e a partícula, assumindo que não há movimento relativo entre eles. No entanto, quando uma partícula está em um meio fluido, ocorre o movimento relativo [58]- [60].

No próximo capítulo será realizada uma análise, por meio de simulação computacional e cálculo numérico, de uma onda plana propagando-se em uma matriz sólida, constituída de material metálico, contendo uma inclusão esférica constituída de: material polimérico e material sólido. Serão calculadas, as eficiências de radiação, absorção e espalhamento, para cada configuração: Matriz sólida-inclusão polimérica; Matriz sólida-inclusão sólida.

# Capítulo 5

## Resultados e discussões

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos por simulação computacional, relacionados ao espalhamento de uma onda plana por uma inclusão esférica simples, embutida em uma matriz sólida, no limite de Rayleigh.

Os materiais escolhidos para a matriz sólida foram: aço, alumínio, latão, titânio e cobre, conforme a tabela abaixo. Esses foram selecionados por possuir bastante aplicações na indústria. Os parâmetros físicos dos materiais utilizados para a matriz sólida, estão listados na tabela:

Tabela 5.1: Parâmetros físicos e elásticos dos materiais sólidos, [64]

| Material | $\rho_0(kg/m^3)$ | $K_0(GPa)$ | $\mu_0(GPa)$ | Ref. |
|----------|------------------|------------|--------------|------|
| Alumínio | 2700             | 60         | 26           | [64] |
| Cobre    | 8960             | 133.5      | 47.7         | [64] |
| Latão    | 8500             | 101        | 37           | [65] |
| Titanium | 4700             | 110        | 44           | [64] |

Fonte: Próprio autor

Já para a inclusão esférica, de raio  $a$  e densidade  $\rho$ , foram selecionados: polietileno de alta densidade (PEAD), e o Ferro, conforme a tabela:

Tabela 5.2: Parâmetros Físicos da Inclusão Esférica.

| Parâmetro  | Valor                   |
|--|-------------------------|
| <u>Partícula: PEAD [27]</u>                          |                         |
| Densidade ( $\rho_1$ )                               | 1050 kg m <sup>-3</sup> |
| Raio   | 60 $\mu$ m              |
| Módulo de armazenamento em massa ( $A_1'$ )          | 4.17 GPa                |
| Coefficiente de perda em massa ( $B_1'$ )            | 0.48 GPas <sup>v</sup>  |
| Módulo de cisalhamento de armazenamento ( $\mu_1'$ ) | 0.93 GPa                |
| Ordem fracional de viscoelasticidade ( $\nu_1'$ )    | 0.171 GPa               |
| Coefficiente de perda de cisalhamento ( $\mu_1'$ )   | 0.7 GPas <sup>v</sup>   |
| <u>Partícula: Ferro, [64]</u>                        |                         |
| Densidade ( $\rho_1$ )                               | 7700 kg m <sup>-3</sup> |
| Raio   | 60 $\mu$ m              |
| Módulo de massa ( $k_1'$ )                           | 160 GPa                 |
| Módulo de cisalhamento ( $\mu_1'$ )                  | 74 GPa                  |

Fonte: Próprio autor

Estes materiais foram escolhidos por serem produzidos em larga escala e possuir diversificadas formas de aplicações, tanto na indústria quanto na área médica. Isso os tornam disponíveis para a verificação das eficiências de radiação, espalhamento e absorção. Para tanto, foram consideradas duas configurações:

- Matriz sólida, constituída de material metálico, com uma inclusão esférica de PEAD, embutida na mesma. Nesse caso, quando a onda plana for espalhada pela inclusão, ocorrerá absorção, da energia da onda pelo espalhador, configurando à fronteira sólido-polímero;

- Matriz sólida, constituída de material metálico, e a inclusão esférica de ferro e, nesse caso a absorção da energia da onda espalhada é tão baixa que pode ser desconsiderada, configurando a fronteira sólido-sólido.

Os resultados obtidos para ambas configurações, baseiam-se na solução, por meio de simulação numérica das equações (4.7), (4.11) e (4.23) das eficiências de radiação,

absorção e espalhamento, através do software *Mathematica*.

A interpretação dos resultados será realizada por meio de análise, relacionando as curvas obtidas, das eficiências em função da frequência da onda incidente. Com os resultados obtidos, será efetuado o cálculo do Erro Médio Quadrático, conforme será mostrado nas próximas sessões.

## 5.1 Matriz Sólida e partícula de PEAD

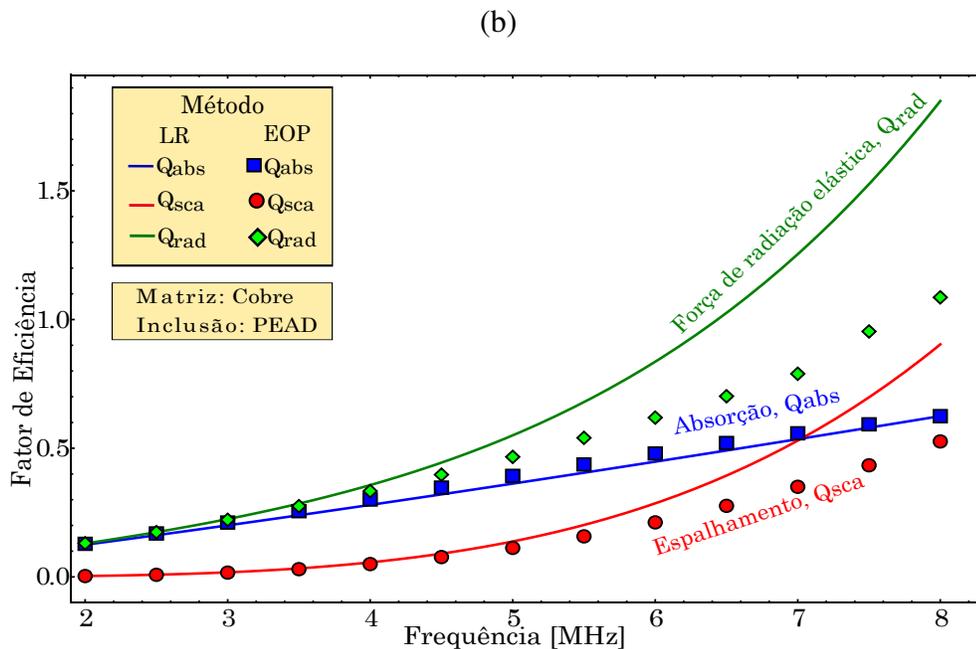
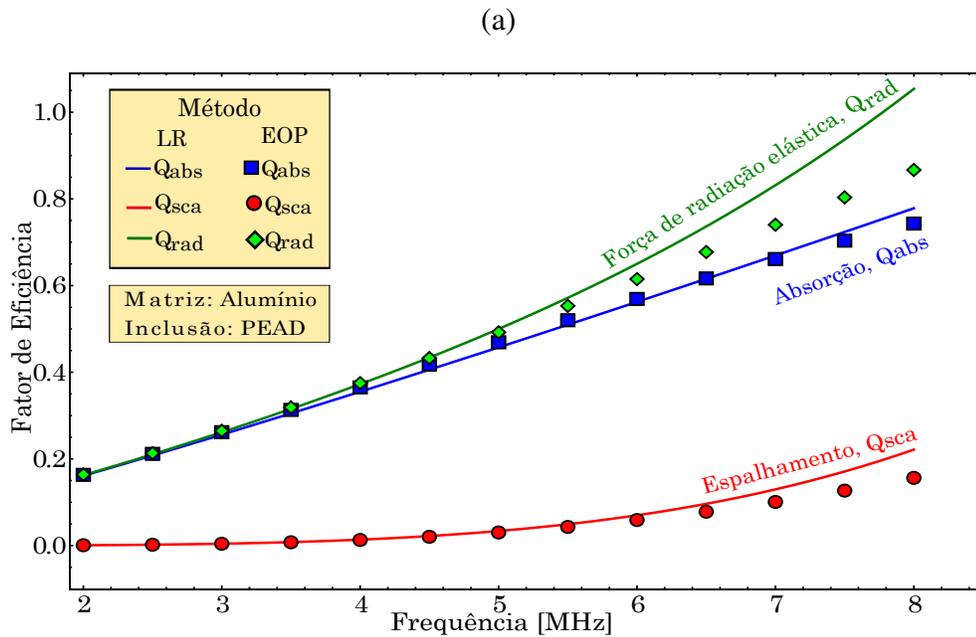
Foi analisado o espalhamento de uma onda do plana longitudinal, por uma partícula esférica, de PEAD, embutida em uma matriz metálica, elástica e isotrópica, conforme a Tab.(5.1). Esses materiais foram escolhidos porque podem ser prontamente organizados em uma configuração experimental.

No presente trabalho foi considerado que a partícula de PEAD comporta-se como um material viscoelástico fracionário, em que o módulo de armazenamento  $K_1'$  e  $\mu_1'$ , são constantes. Assumindo que os módulos de perda são dados por:  $K_1'' = A_1\omega^\nu$  e  $\mu_1'' = B_1\omega^\nu$ , onde  $A_1$  e  $B_1$  possuem valores constantes e  $\nu > 0$ .

Foi calculado, através da simulação, os fatores de eficiência de radiação e espalhamento em uma faixa de frequência variando entre 2MHz à 8MHz. Esta é a faixa de frequência onde as medidas experimentais das propriedades viscoelásticas do PEAD foram analisadas por [59].

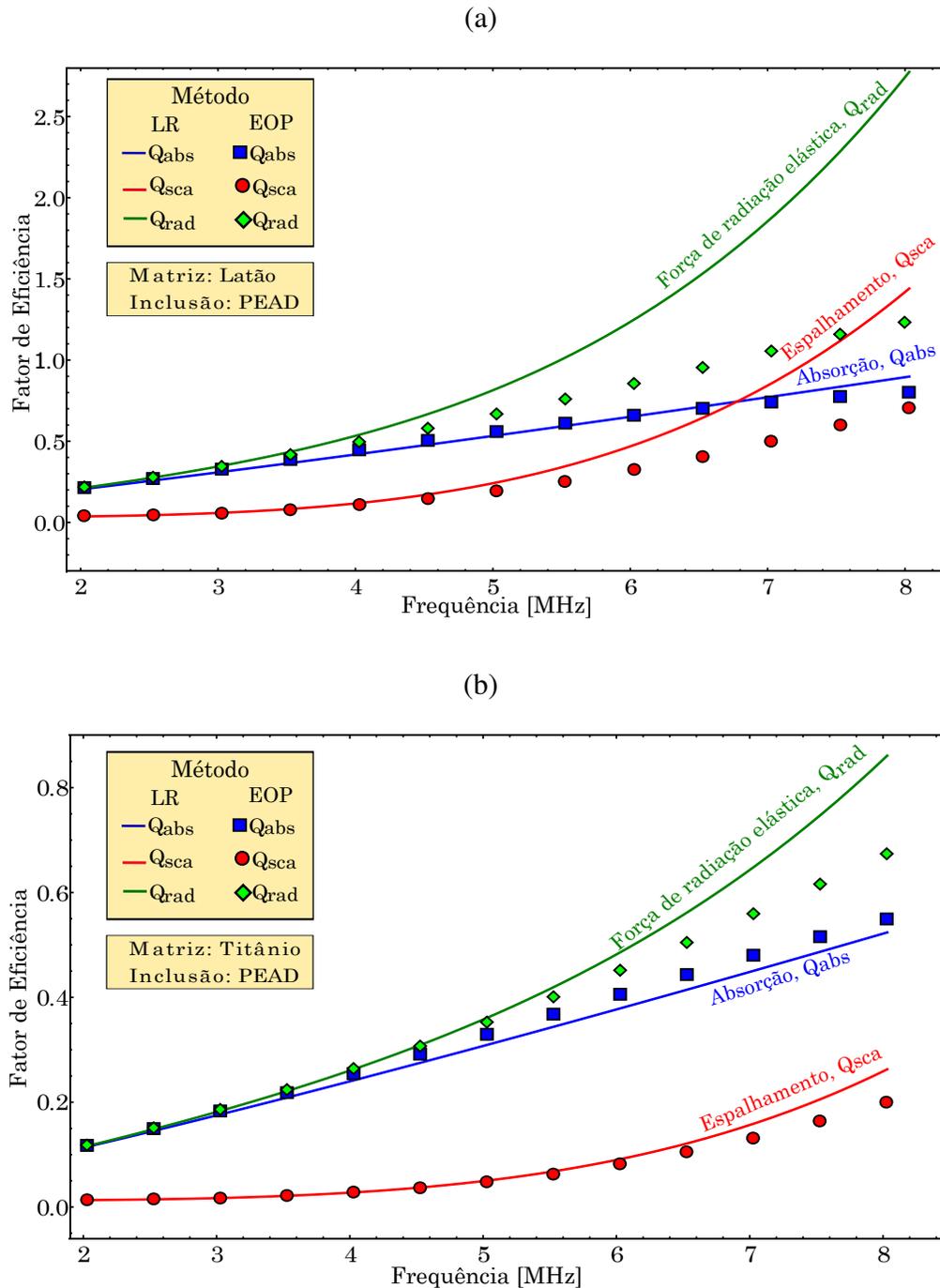
Os parâmetros físicos utilizados no cálculo das eficiências, são apresentados nas tabelas (5.1) e (5.2). As figuras abaixo mostram os resultados obtidos através da simulação numérica. As curvas mostram as eficiências de espalhamento, absorção e radiação em função da frequência, tanto para o método no limite Rayleigh (LR), quanto para o método da expansão de ondas planas EOP, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 5.1: Fatores de eficiência de: absorção, espalhamento e radiação, em função da frequência para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de PEAD embutida em uma matriz sólida de alumínio, Fig.(a) e uma matriz sólida de cobre, Fig.(b), respectivamente. As linhas azul, vermelha e verde correspondem às eficiências no limite de Rayleigh. Os marcadores (disco, quadrado e losango) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP.



Fonte: Próprio autor

Figura 5.2: Os fatores de eficiência versus frequência para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de PEAD embutidas em uma matriz sólida de latão, Fig.(a) e uma matriz sólida de Titânio, Fig.(b). As linhas azul, vermelha e verde correspondem às eficiências, no limite de Reyleigh. Os marcadores (disco, quadrado e losango) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP.



Fonte: Próprio autor

Os fatores de eficiência são calculados com a abordagem no limite de Rayleigh, (*RL*) e o método de expansão de ondas planas, (*EOP*) [27].

Na Fig.(5.1), foram mostrados os resultados referentes às eficiências de absorção, dispersão e radiação em função da frequência. Uma excelente concordância é vista na faixa de frequência entre 2MHz à 5MHz, para a matriz de alumínio e de Titânio, que corresponde ao parâmetro de tamanho, para cada respectivo material:

$$0.13 \leq \varepsilon \leq 0.32, \quad (5.1)$$

$$0.12 \leq \varepsilon \leq 0.31. \quad (5.2)$$

Uma excelente concordância também é vista, para a matriz de cobre e de latão, na faixa de frequência entre 2MHz à 5MHz, que corresponde ao parâmetro de tamanho:

$$0.16 \leq \varepsilon \leq 0.31, \quad (5.3)$$

$$0.18 \leq \varepsilon \leq 0.36. \quad (5.4)$$

Além desse valor, a aproximação de comprimento de onda longo é separada de seu resultado EOP correspondente. Para a matriz de alumínio e titânio, respectivamente, à 2MHz, o espalhamento é de: 46dB e 40dB, abaixo da eficiência de absorção; já para frequência de 5MHz, essa diferença torna-se: 23dB e 19dB, respectivamente.

Observa-se que para a matriz de cobre e latão, à 2MHz o espalhamento é de 31dB e 30dB, abaixo da eficiência de absorção. Para a frequência de 4MHz, essa diferença tornam-se: 15,6dB e 15dB; para a frequência de 5MHz: 11dB e 10dB, abaixo da eficiência de absorção.

Nota-se que para a matriz de cobre e latão, as eficiências em dB à 5MHz, possuem menor intensidade quando comparadas ao alumínio e titânio. Isso pode ser atribuído às propriedades acústicas dos materiais, como pode ser visto na tab.(5.1).

Assim, observa-se que, sob a frequência de 5MHz, para a matriz de: alumínio e titânio a força de radiação elástica é causada principalmente pela absorção de PEAD. Já para a matriz de: cobre e latão, sob à frequência de 4MHz, a força de radiação elástica é causada também, pela absorção da partícula de PEAD.

Com os dados obtidos foi possível também calcular o erro médio quadrático (EMQ),

em relação a cada configuração, através expressão a baixo:

$$EMQ = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2, \quad (5.5)$$

e assim, foi possível montar a seguinte tabela de dados:

Tabela 5.3: Erro médio quadrático: Partícula de Polietileno

| Erro Médio Quadrático das Eficiências |           |           |           |                 |                 |                 |
|---------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Material                              | $Q_{sca}$ | $Q_{rad}$ | $Q_{abs}$ | $Q_{sca}^{EOP}$ | $Q_{rad}^{EOP}$ | $Q_{abs}^{EOP}$ |
| Alumínio                              | 7.7%      | 7.1%      | 11.0%     | 7.6%            | 9.2%            | 4.7%            |
| Cobre                                 | 7.4%      | 8.2%      | 10.1%     | 7.7%            | 7.4%            | 5.6%            |
| Latão                                 | 7.3%      | 8.2%      | 10.3%     | 7.8%            | 7.9%            | 6.6%            |
| Titânio                               | 7.6%      | 6.3%      | 9.2%      | 7.6%            | 7.7%            | 12.1%           |

Fonte: Próprio autor

Observa-se que o erro quadrático médio ( $EMQ$ ), entre as medidas para as eficiências de absorção, espalhamento e radiação, tanto para o método EOP, quanto para o método no limite de Rayleigh em relação aos materiais citados, possuem valores aceitáveis.

Em relação a eficiência de espalhamento  $Q_{sca}$ , observa-se que o EMQ, em percentual em relação a matriz de cobre e latão possuem valores de: 7.4% e 7.3%. Já para  $Q_{sca}^{EOP}$ , o EQM é: 7.7% e 7.8%, respectivamente.

Para  $Q_{rad}$ , em relação à matriz de alumínio e de titânio é: 7.1% e 6.3%; e para  $Q_{rad}^{EOP}$ , o EQM percentual é: 9.2% e 7.7%, respectivamente. Para  $Q_{abs}$ , em relação à matriz de alumínio e de titânio é de: 9.2% e 7.7%; e para  $Q_{abs}^{EOP}$ , o EQM percentual é: 4.7% e 12.1%, respectivamente.

Por tanto, conclui-se que para a faixa de frequência entre 2MHz à 5MHz, os métodos mostram uma boa concordância e os resultados irão depender das propriedades acústicas dos para materiais.

## 5.2 Matriz sólida e partícula de ferro

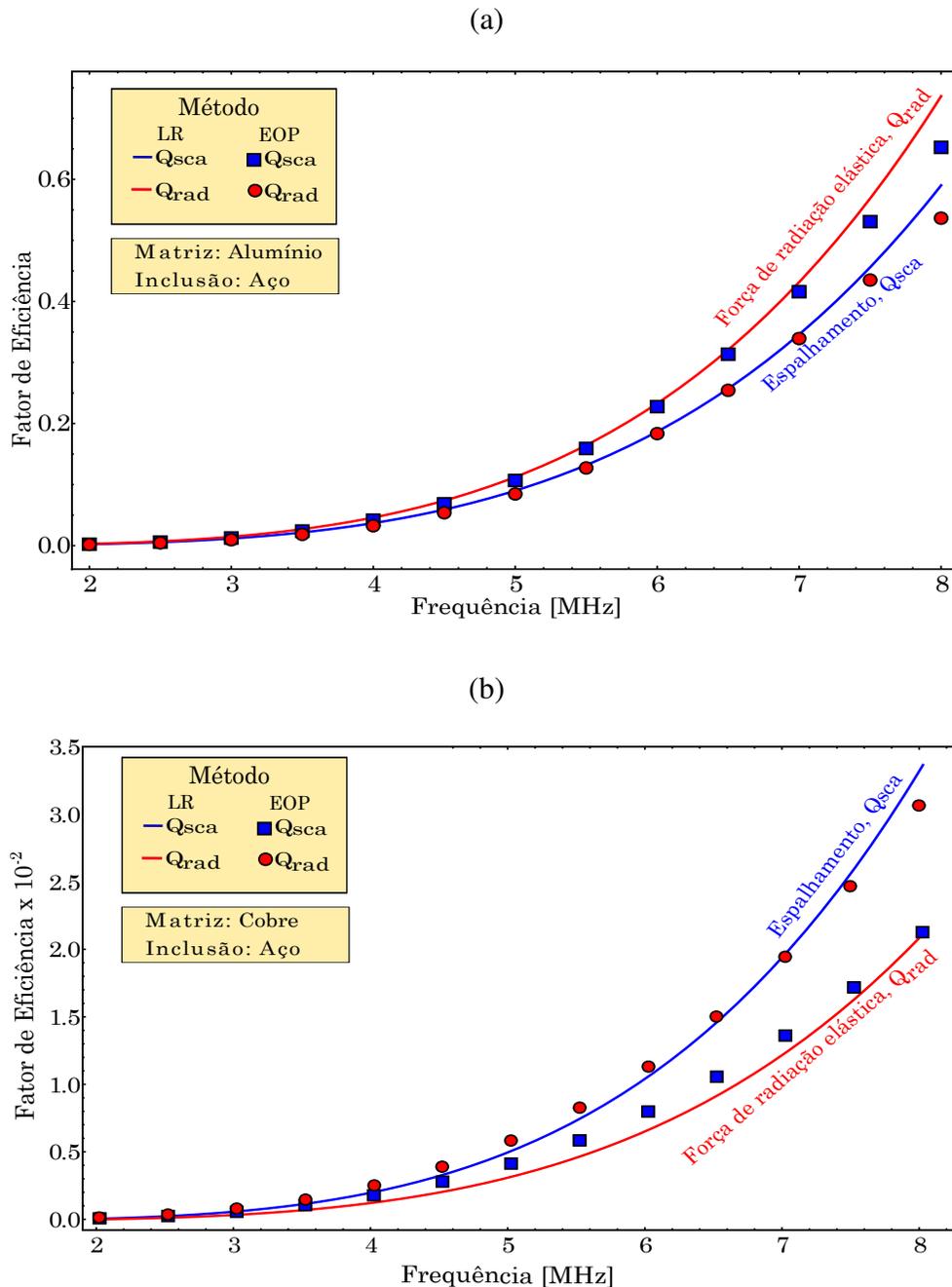
Analizamos o espalhamento de uma onda plana longitudinal, por uma partícula esférica de aço embutida em uma matriz, (sólida), de material metálico, conforme a Tab.(5.1) e Tab.(5.2) respectivamente.

Esses materiais foram escolhidos porque podem ser prontamente organizados em uma configuração experimental. Nessa configuração, sólido-sólido, considerou-se uma inclusão esférica de ferro e, variou-se o material da matriz sólida.

No presente trabalho considerou-se que a partícula de Ferro comporta-se como um material elástico, e não é absorvedora, nesse caso tem-se que  $K_1$  e  $\mu_1$ , são constantes e real.

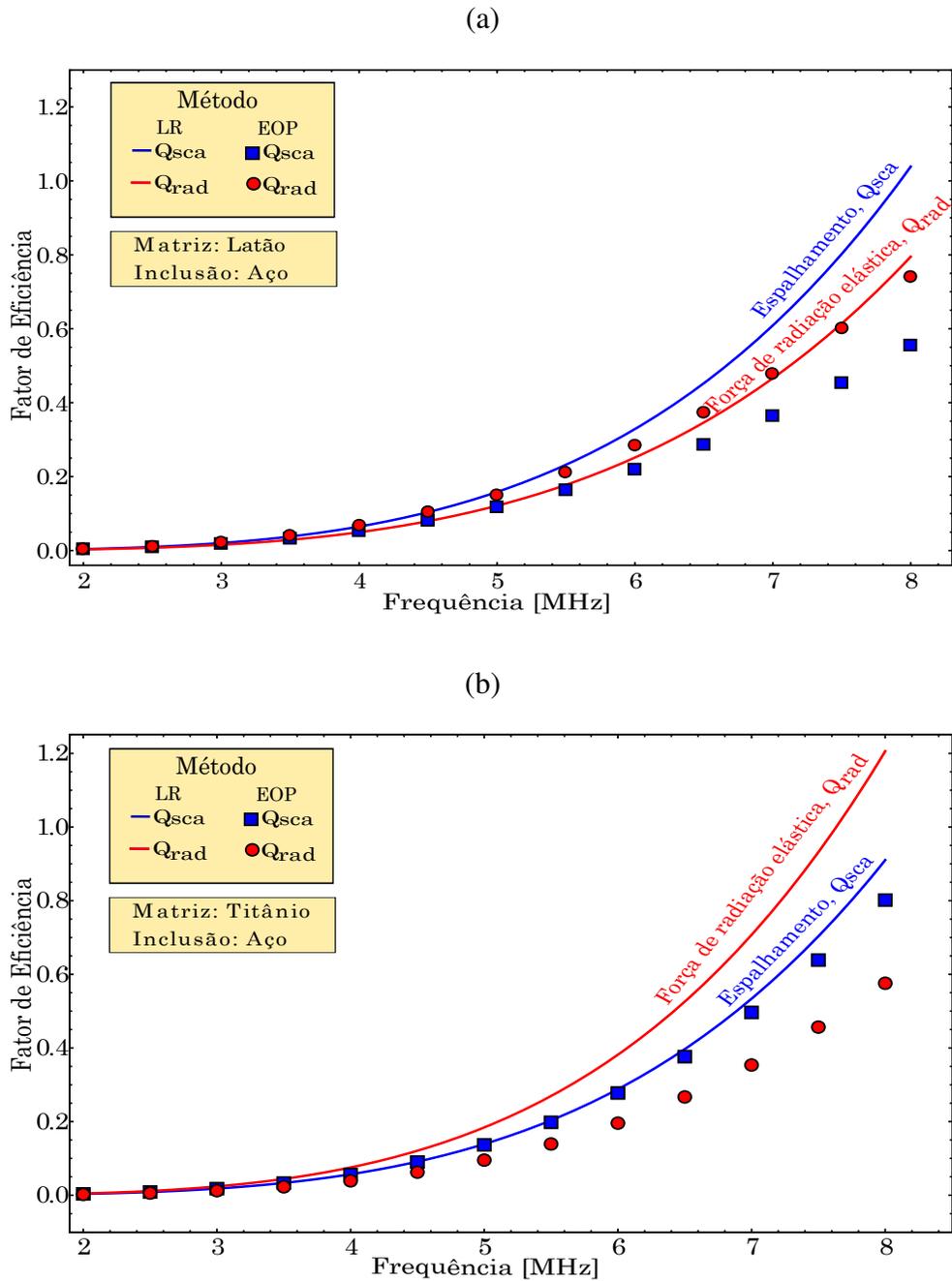
Foram analisados os fatores de eficiência, variando-se apenas o tipo de material constituinte da matriz sólida, conforme a Tab.(5.1), em uma faixa de frequência de 2MHz à 8MHz. Esta é a faixa de frequência onde as medidas experimentais foram realizadas. Os parâmetros físicos que, relacionados à inclusão esférica, foram utilizados para calcular as eficiências são apresentados na Tab.(5.2).

Figura 5.3: Fatores da eficiência de espalhamento e radiação, em função da frequência, para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de ferro embutida em uma matriz sólida de: Alumínio, Fig.(a) e Cobre, Fig.(b), respectivamente. A linha azul e vermelha correspondem às eficiências no limite de Rayleigh. Os marcadores (disco e quadrado) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP.



Fonte: Próprio autor

Figura 5.4: Fatores de eficiência de: espalhamento e radiação, em função da frequência, para o espalhamento de ondas planas por uma partícula de ferro embutida em uma matriz sólida: Latão, Fig.(a); e Titânio, Fig.(b). A linha azul e vermelha correspondem às eficiências no limite de Reyleigh. Os marcadores (disco e, quadrado) descrevem as eficiências calculadas com o método EOP.



Os fatores de eficiência são calculados com a abordagem no limite de Rayleigh e o método (*EOP*) [27].

Na Fig.(5.2), foram mostrados os resultados referentes às eficiências de dispersão e radiação em função da frequência.

Analisando a Fig.(5.3)-(a), relacionada a matriz de alumínio e Fig.(5.3)-(b) relacionada a matriz de titânio, observa-se uma boa concordância na faixa de frequência entre 2MHz à 5MHz. Nota-se que a eficiência de radiação possui maior amplitude em relação eficiência de espalhamento. No entanto, para o método (*EOP*), verificou-se que a eficiência de radiação possui amplitude menor que a eficiência de espalhamento.

Analisando a Fig.(5.4)-(a) e Fig.(5.4)-(b), relacionada a matriz de cobre e latão, observa-se uma boa concordância entre os métodos, na faixa de frequência entre 2MHz à 5MHz. Observa-se também, que a eficiência de espalhamento possui amplitude maior, no limite de Rayleigh em relação à eficiência de radiação. Porém, para o método (*EOP*), verificou-se que a eficiência de radiação possui amplitude maior que a eficiência de espalhamento.

Com os dados obtidos, foi possível também calcular o erro médio quadrático, em relação à configuração matriz sólida-inclusão de ferro, e obteve-se a seguinte tabela de dados:

Tabela 5.4: Erro médio quadrático: Partícula de Ferro

| Erro Médio Quadrático das Eficiências |           |           |                 |                 |
|---------------------------------------|-----------|-----------|-----------------|-----------------|
| Material                              | $Q_{sca}$ | $Q_{rad}$ | $Q_{sca}^{EOP}$ | $Q_{rad}^{EOP}$ |
| Alumínio                              | 7.8%      | 7.5%      | 7.6%            | 7.7%            |
| Cobre                                 | 6.8%      | 7.1%      | 7.5%            | 7.6%            |
| Latão                                 | 7.4%      | 7.5%      | 7.7%            | 7.6%            |
| Titânio                               | 7.4%      | 7.3%      | 7.5%            | 7.6%            |

Fonte: Próprio autor

Observa-se que o erro quadrático médio entre as medidas para as eficiências espalhamento e radiação, tanto para o método (*EOP*), quanto para o Método aproximativo

das ondas parciais no limite de Rayleigh, possuem valores aceitáveis.

Porém, os menores valores de erro, podem ser observados em relação a matriz de cobre e titânio. Assim, é possível observar que o EQM percentual para  $Q_{sca}$ , em relação à matriz de cobre e de titânio é: 6.8% e 7.4%, respectivamente.

E para  $Q_{sca}^{EOP}$ , para a matriz de cobre e titânio, o EQM é: 7.5% e 7.5%, respectivamente. Já para  $Q_{rad}$ , em relação à matriz de cobre e titânio é de: 7.1% e 7.3%, respectivamente.

Para  $Q_{rad}^{EOP}$ , para a matriz de cobre e de titânio, o EQM é: 7.6% e 7.6% , respectivamente. Por tanto, conclui-se que para a faixa de frequência entre 2MHz à 5MHz, e para materiais com valores mais baixos de  $K_0$  e  $\mu_0$ , os métodos mostram uma boa concordância.

## Conclusões e trabalhos futuros

### 6.1 Conclusões

Este trabalho teve como propósito investigar a força de radiação acústica em uma esfera embutida, em uma matriz sólida, elástica e homogênea.

A equação que descreve o fenômeno de espalhamento é a equação de Helmholtz. A solução desta equação foi apresentada em termos do método de ondas parciais e dos harmônicos esférico vetoriais, com o intuito de obter os campos de deslocamento acústicos que são necessários para resolver o problema de espalhamento linear para uma partícula esférica.

Além disso, a propagação de ondas no interior da partícula foi modelado através de lei de Hooke. Esses estudos de propagação de ondas em sólidos, foi de suma importância para a compreensão do problema de espalhamento acústico. É importante ressaltar que o espalhamento está diretamente relacionado com o fenômeno de força, momento linear e as eficiências de espalhamento, absorção e radiação acústica.

Expressões de força, momento linear e eficiências de radiação, absorção e espalhamento acústico foram derivadas na aproximação do campo distante. Essas fórmulas são mais simples e dependem das propriedades físicas do objeto, dadas pelos coeficientes de espalhamento, e das características da onda incidente denotadas pelos coeficientes de forma do feixe. No regime de espalhamento Rayleigh, a eficiência de radiação acústica depende apenas dos coeficientes de espalhamento de monopolo e quadrupolo.

Foi realizada a análise numérica das equações de eficiência de espalhamento, absorção e radiação acústica, utilizando duas configurações.

Na primeira configuração, considerou-se uma partícula viscoelástica de PEAD, e

na segunda uma inclusão esférica de ferro, conforme a tabela(5.2), ambas embutidas em uma matriz sólida constituída por diferentes materiais, conforme a tabela(5.1).

Os resultados obtidos, mostraram que o modelo proposto funciona bem para frequências de até 5MHz. Observou-se também, que a densidade do material que constitui a matriz sólida e as propriedades acústicas, influenciam fortemente nos resultados. Os resultados obtidos mostram uma boa concordância entre os modelos EOP e o limite de Rayleigh conforme foi mostrado na tabelas (5.3) e (5.4).

Esses resultados mostram que, os métodos utilizados no presente trabalho pode ser de grande utilidade na aplicação da caracterização de materiais e compósitos contendo inclusões esféricas, na elastografia, e também podem ajudar no desenvolvimento de dispositivos implantados ativados pela força de radiação elástica.

## 6.2 Trabalhos futuros

A partir deste trabalho, é possível delimitar a faixa de frequência com maior precisão para o estudo do espalhamento de ondas planas no limite de Rayleigh. Desse modo, sugere-se que futuramente, realize-se experimentos de forma prática, utilizando uma partícula embutida em uma matriz constituída de sólido mole.

## Coeficientes de Espalhamento.

Elementos da matriz: coeficientes de espalhamento

$$d_{11} = \varepsilon h_n^{(1)'}(\varepsilon),$$

$$d_{12} = n(n+1)\varepsilon h_n^{(1)}(\varepsilon_S),$$

$$d_{13} = -\varepsilon_{L,1} j_n'(\varepsilon_{L,1}),$$

$$d_{14} = n(n+1)\varepsilon j_n(\varepsilon_{S,1}),$$

$$d_{21} = h_n^{(1)}(\varepsilon),$$

$$d_{22} = \varepsilon S h_n^{(1)'}(\varepsilon_S) + h_n^{(1)}(\varepsilon_S),$$

$$d_{23} = -j_n^{(\varepsilon_{L,1})},$$

$$d_{24} = -[\varepsilon S j_n'(\varepsilon_{S,1}) + j_n(\varepsilon_{S,1})],$$

$$d_{31} = [2n(n+1) - \varepsilon^2] h_n^{(1)}(\varepsilon) - 4\varepsilon h_n^{(1)'}(\varepsilon),$$

$$d_{32} = 2n(n+1) [\varepsilon_S h_n^{(1)'}(\varepsilon_S) - \varepsilon h_n^{(1)}(\varepsilon_S)],$$

$$d_{33} = -\frac{\rho_1}{\rho_0} \left( \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{S,1}} \right)^2 [2n(n+1) - \varepsilon_{S,1}^2] [j_n(\varepsilon_{L,1}) - 4\varepsilon_{L,1} j_n'(\varepsilon_{L,1})],$$

$$d_{34} = -2 \frac{\rho_1}{\rho_0} \left( \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{S,1}} \right)^2 n(n+1) [\varepsilon_{S,1} j_n'(\varepsilon_{S,1}) - j_n(\varepsilon_{S,1})],$$

$$d_{41} = \varepsilon_S h_n^{(1)'}(\varepsilon_S) - h_n^{(1)}(\varepsilon_S),$$

$$d_{42} = \left[ \left( n(n+1) - \frac{\varepsilon_S^2}{2} - 1 \right) h_n^{(1)}(\varepsilon_S) - \varepsilon h_n^{(1)'}(\varepsilon_S) \right],$$

$$d_{43} = -\frac{\rho_1}{\rho_0} \left( \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{S,1}} \right)^2 [\varepsilon_{L,1} j_n'(\varepsilon_{L,1}) - j_n(\varepsilon_{L,1})],$$

---

$$\begin{aligned}d_{44} &= -\frac{\rho_1}{\rho_0} \left( \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{S,1}} \right)^2 \text{left} \left[ \left( n(n+1) - \frac{\varepsilon_{S,1}^2}{2} - 1 \right) j_n(\varepsilon_{S,1}) - \varepsilon j_n'(\varepsilon_{S,1}), \right. \\b_1 &= -\varepsilon j_n'(\varepsilon), \\b_2 &= -j_n(\varepsilon), \\b_3 &= [2n(n+1) - \varepsilon^2] j_n(\varepsilon) - 4\varepsilon j_n'(\varepsilon), \\b_4 &= 2n(n+1) [\varepsilon_S j_n'(\varepsilon_S) - \varepsilon j_n(\varepsilon_S)].\end{aligned}\tag{A.1}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] GRAFF, K. F. Wave motion in elastic solids. Mineola, NY, USA: Dover Publications. ISBN: 0-486-66745-6, 1975.
- [2] GARG, S.; GHOSH, C. K.; GUPTA, S. Oscillations and waves. [S.l.]: PHI Learning (2009). ISBN: 978-81-203-3921-7.
- [3] DE GROSOBOIS, Anne. Fowler CMR: The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics. Environmental Geology, v. 48, n. 7, p. 968-968, 2005.
- [4] LOWRIE, W. Fundamental of Geophysics Cambridge University Press Pp 354. 1997.
- [5] MONROE, James S.; WICANDER, Reed. The changing earth: exploring geology and evolution. Cengage Learning, 2011.
- [6] JAIN, D. L.; KANWAL, R. P. Scattering of P and S waves by spherical inclusions and cavities. Journal of Sound and Vibration, v. 57, n. 2, p. 171-202, 1978.
- [7] KUSTER, Guy T.; TOKSÖZ, M. Nafi. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part I. Theoretical formulations. Geophysics, v. 39, n. 5, p. 587-606, 1974.
- [8] BENECH, Nicolás. Elastografía ultrasonora de medios viscoelásticos con ondas de cizalla baja frecuencia. 2004.
- [9] KOLSKY, Herbert. Stress waves in solids. Courier Corporation, 1963.
- [10] POPOV, Egor P. Introdução á mecânica dos sólidos. Edgard Blücher, 2005.
- [11] NOVOTNY, Oldrich. Seismic surface waves. Bahia, Salvador: Instituto de Geociencias, 1999.

- [12] LIU, Zhengyou et al. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: Theory and experiment. *Physical Review B*, v. 62, n. 4, p. 2446, 2000.
- [13] NORRIS, Andrew N. Scattering of elastic waves by spherical inclusions with applications to low frequency wave propagation in composites. *International journal of engineering science*, v. 24, n. 8, p. 1271-1282, 1986.
- [14] HINDERS, M. K. Plane-elastic-wave scattering from an elastic sphere. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, v. 106, n. 7, p. 799-818, 1991.
- [15] KORNEEV, Valeri A.; JOHNSON, Lane R. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion?I. Theory and numerical results. *Geophysical Journal International*, v. 115, n. 1, p. 230-250, 1993.
- [16] AKI, K.; RICHARDS, P. G. *Quantitative seismology: theory and methods* WH Freeman and Company. San Francisco, California, 1980.
- [17] SEZAWA, K., Scattering of elastic waves and some allied problems, *Bull. Earth-quake Res. Inst., Tokyo Imperial University, Japan* 3, 19, (1927).
- [18] YING, C. F.; TRUELL, Rohn. Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid. *Journal of applied physics*, v. 27, n. 9, p. 1086-1097, 1956.
- [19] PAO, YihHsing; MOW, C. C. Scattering of plane compressional waves by a spherical obstacle. *Journal of Applied Physics*, v. 34, n. 3, p. 493-499, 1963.
- [20] EINSBRUCH, Norman G.; WITTERHOLT, E. J.; TRUELL, Rohn. Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium. *Journal of Applied Physics*, v. 31, n. 5, p. 806-818, 1960.
- [21] NORRIS, Andrew N. Scattering of elastic waves by spherical inclusions with applications to low frequency wave propagation in composites. *International journal of engineering science*, v. 24, n. 8, p. 1271-1282, 1986.
- [22] HINDERS, M. K. Plane-elastic-wave scattering from an elastic sphere. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, v. 106, n. 7, p. 799-818, 1991.
- [23] WATERMAN, P. C. New formulation of acoustic scattering. *The journal of the acoustical society of America*, v. 45, n. 6, p. 1417-1429, 1969.

- [24] VARATHARAJULU, Vasundara; PAO, Yih-Hsing. Scattering matrix for elastic waves. I. Theory. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 60, n. 3, p. 556-566, 1976.
- [25] WATERMAN, P. C. Matrix theory of elastic wave scattering. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 60, n. 3, p. 567-580, 1976.
- [26] BOSTRÖM, Anders. Multiple scattering of elastic waves by bounded obstacles. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 67, n. 2, p. 399-413, 1980.
- [27] LEÃO-NETO, J. P.; LOPES, J. H.; SILVA, G. T. Extended optical theorem in isotropic solids and its application to the elastic radiation force. Journal of Applied Physics, v. 121, n. 14, p. 144902, 2017.
- [28] KUSTER, Guy T.; TOKSÖZ, M. Nafi. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part I. Theoretical formulations. Geophysics, v. 39, n. 5, p. 587-606, 1974.
- [29] BIWA, S.; IDEKOBA, S.; OHNO, N. Wave attenuation in particulate polymer composites: independent scattering/absorption analysis and comparison to measurements. Mechanics of materials, v. 34, n. 10, p. 671-682, 2002.
- [30] LEÃO-NETO, J. P.; SILVA, Glauber T. Acoustic radiation force and torque exerted on a small viscoelastic particle in an ideal fluid. Ultrasonics, v. 71, p. 1-11, 2016.
- [31] LEE, C.P. and WANG, T.G., Acoustic radiation pressure. The Journal of the Acoustical Society of America, 94(2), pp.1099-1109, 1993.
- [32] HASEGAWA, T. and YOSIOKA, K., Acoustic radiation force on a solid elastic sphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 46(5B), pp.1139-1143, 1969.
- [33] RÉNIER, M., BARRIÈRE, C. and ROYER, D., Optical measurements of the self-demodulated displacement and its interpretation in terms of radiation pressure. The Journal of the Acoustical Society of America, 121(6), pp.3341-3348, 2007.
- [34] LEÃO-NETO, J.P., LOPES, J.H. and SILVA, G.T., Core-shell particles that are unresponsive to acoustic radiation force. Physical Review Applied, 6(2), p.024025, 2016.

- [35] BARESCH, D., THOMAS, J.L. and MARCHIANO, R., Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(1), pp.25-36,2013.
- [36] SILVA, Glauber T. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 136, n. 5, p. 2405-2413, 2014.
- [37] SILVA, Glauber T. et al. Computing the acoustic radiation force exerted on a sphere using the translational addition theorem. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, v. 62, n. 3, p. 576-583, 2015.
- [38] CANTRELL JR, John H. Acoustic-radiation stress in solids. I. Theory. *Physical Review B*, v. 30, n. 6, p. 3214, 1984.
- [39] YOST, W. T.; CANTRELL JR, John H. Acoustic-radiation stress in solids. II. Experiment. *Physical Review B*, v. 30, n. 6, p. 3221, 1984.
- [40] ILINSKII, Yurii A.; ZABOLOTSKAYA, Evgenia A.; HAMILTON, Mark F. Acoustic radiation force on a sphere in tissue. In: *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2012. p. 255-258.
- [41] LIDON, Pierre et al. Measurement of the acoustic radiation force on a sphere embedded in a soft solid. *Applied Physics Letters*, v. 110, n. 4, p. 044103, 2017.
- [42] SARVAZYAN, Armen P. et al. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Medicine and Biology*, v. 24, n. 9, p. 1419-1435, 1998.
- [43] CATHELINE, Stefan. *Interferométrie-Speckle ultrasonore: Application á la mesure d'élasticité*. 1998. Tese de Doutorado. Université Paris-Diderot-Paris VII.
- [44] OPHIR, Jonathan et al. Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, v. 213, n. 3, p. 203-233, 1999.
- [45] ALVES, Larissa de Lima et al. The ultrasound on meat tenderization. *Ciência Rural*, v. 43, n. 8, p. 1522-1528, 2013.

- [46] MILLER, G. F.; PURSEY, H. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid. Proc. R. Soc. Lond. A, v. 223, n. 1155, p. 521-541, 1954.
- [47] SARVAZYAN, Armen et al. An overview of elastography-an emerging branch of medical imaging. Current medical imaging reviews, v. 7, n. 4, p. 255-282, 2011.
- [48] RAYLEIGH, Lord. On the diffraction of object glasses. Mon. Not. R. Astron. Soc., v. 33, p. 59-63, 1872.
- [49] MORSE, P. M.; INGARD, K. U. THEORETICAL ACOUSTICS. Princeton University Press, (1987).
- [50] CANTRELL JR, John H. Acoustic-radiation stress in solids. I. Theory. Physical Review B, v. 30, n. 6, p. 3214, 1984.
- [51] VAN DE HULST, H. C. Light Scattering by Small Particles. Dover Publ. New York. 1981.
- [52] GREAVES, George Neville et al. Poisson's ratio and modern materials. Nature materials, v. 10, n. 11, p. 823, 2011.
- [53] FUNG, Yuan-cheng; TONG, Pin; CHEN, Xiaohong. Classical and computational solid mechanics. World Scientific Publishing Company, 2017.
- [54] DA SILVA FERREIRA, José Nuno Varandas. MODELACÃO DA EXCITACÃO DINÂMICA SUPERFICIAL DO SUBSOLO APLICACÃO Á ANÁLISE ESPECTRAL DE ONDAS DE SUPERFÍCIE. 2005. Tese de Doutorado. Universidade Técnica de Lisboa.
- [55] KORNEEV, Valeri A.; JOHNSON, Lane R. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion I. Theory and numerical results. Geophysical Journal International, v. 115, n. 1, p. 230-250, 1993.
- [56] NETO, Leão et al. Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal. 2015.
- [57] BRILL, D.; GAUNAURD, G. Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 81, n. 1, p. 1-21, 1987.

- [58] BARRATT, P. J.; COLLINS, W. D. The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge University Press, 1965. p. 969-981.
- [59] LOPES, J. H.; LEÃO-NETO, J. P.; SILVA, G. T. Absorption, scattering, and radiation force efficiencies in the longitudinal wave scattering by a small viscoelastic particle in an isotropic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 142, n. 5, p. 2866-2872, 2017.
- [60] KARLSEN, Jonas T.; BRUUS, Henrik. Forces acting on a small particle in an acoustical field in a thermoviscous fluid. *Physical Review E*, v. 92, n. 4, p. 043010, 2015.
- [61] YOST, W. T.; CANTRELL JR, John H. Acoustic-radiation stress in solids. II. Experiment. *Physical Review B*, v. 30, n. 6, p. 3221, 1984.
- [62] ABRAMOWITZ, Milton; STEGUN, Irene A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1964.
- [63] RAYLEIGH, Lord. XX. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 14, n. 87, p. 184-186, 1882.
- [64] GORECKI, T. The relations between the shear modulus, the bulk modulus and Young's modulus for polycrystalline metallic elements. *Materials Science and Engineering*, v. 43, n. 3, p. 225-230, 1980.
- [65] HIBBELER, R.C. *Resistência dos materiais*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.
- [66] WOLFRAM, Stephen et al. *Mathematica*. Cambridge: Cambridge university press, 1996.