

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS AXISSIMÉTRICAS DE PAREDE DELGADA VIA**  
**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**GLAUBER BATISTA MARQUES**

**Dissertação de Mestrado**

**Orientador: Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques**

**Coorientador: Prof. Eduardo Nobre Lages**

**MACEIÓ**

**2019**

GLAUBER BATISTA MARQUES

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS AXISSIMÉTRICAS DE PAREDE DELGADA VIA  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil / Estruturas.

Orientador: Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques

Coorientador: Prof. Eduardo Nobre Lages

MACEIÓ

2019

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

M357 Marques, Glauber Batista.  
Análise de estruturas axissimétricas de parede delgada via método dos elementos finitos / Glauber Batista Marques. - 2019.  
142 f. : il. color.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.

Orientador: Eduardo Nobre Lages.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 134-137.

Apêndices: f. 138-142.

1. Reservatórios. 2. Análise estrutural (Engenharia). 3. Método dos elementos finitos - Programas de computador. I. Título.

CDU: 624.04



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

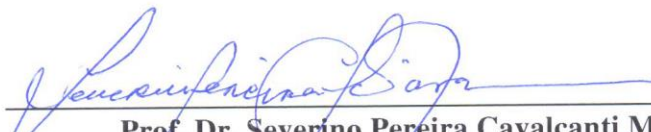



## ANÁLISE DE ESTRUTURAS AXISSIMÉTRICAS DE PAREDE DELGADA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS


GLAUBER BATISTA MARQUES


Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 21 do mês de dezembro do ano de 2018.

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques**  
Orientador – PPGEC/UFAL

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages**  
(Coorientador - PPGEC/UFAL)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. William Wagner Matos Lira**  
(Avaliador Interno - PPGEC/UFAL)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.ª Dr.ª Gabriela Rezende Fernandes**  
(Avaliadora Externa – UFG)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder saúde, paz e fé em todos os momentos, principalmente nos últimos meses de desenvolvimento dessa dissertação.

Agradeço a meus pais, Florisvaldo e Dalvânia, por toda confiança, apoio e carinho depositados em mim, sem os quais eu não estaria concluindo mais esta etapa da minha vida. As minhas irmãs, Gabriela e Grazielle, por entenderem a distância e manterem o afeto e carinho em todos os momentos. A minha namorada, Sabryna, por todo apoio, compreensão e amor durante todo o tempo que precisei me ausentar durante o mestrado, pela cobrança e incentivo na reta final e por estar presente em todos os momentos. Vocês foram e são essenciais em todas as minhas conquistas, obrigado por tudo.

Aos meus orientadores e amigos, Severino Pereira e Eduardo Nobre, pela paciência, confiança e por todo o tempo dedicado ao desenvolvimento deste trabalho, pelas reuniões e instruções de muito conhecimento e por todo o apoio e suporte fornecidos ao longo de todo o curso.

Aos amigos que sempre estiveram presentes e contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho e conclusão do mestrado, principalmente Luiz Carlos, Rafael Leandro, Rodolfo Medeiros e Thiago Barbosa, obrigado pelo apoio, conversas e cafés compartilhados.

A todos que fazem parte do PPGEC/UFAL, principalmente todos os professores e colegas do mestrado, por tudo que me proporcionaram nos últimos anos.

A UFAL e CNPq pelo apoio financeiro e pela estrutura disponibilizada durante todo o mestrado.

## RESUMO

Muitas estruturas usuais possuem formato e carregamento axissimétricos, como reservatórios, cúpulas de coberturas, vasos de pressão e silos. Devido à sua extensa utilização, é necessário conhecer o comportamento estrutural desse tipo de elemento em suas diversas formas de aplicação e sujeita à variados tipos de ações e carregamentos. As teorias clássicas fornecem soluções, a princípio analíticas, para padrões de geometrias e carregamentos por meio da solução de equações diferenciais complexas. Dessa forma, em alguns casos, a resolução analítica se torna exaustiva, enquanto em outros casos essa solução não existe. A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) surge como uma alternativa viável para o estudo dessas estruturas, desde que os modelos numéricos adotados representem de forma precisa o comportamento das mesmas. O presente trabalho estuda o comportamento mecânico, por meio do MEF, de estruturas axissimétricas de geometrias variadas sujeitas a condições de vinculação, apoios e carregamentos de revolução. A análise estrutural é feita por meio de um programa computacional elaborado pelo autor. São apresentados elementos de cascas isoladas, reservatórios cilíndricos com bases plana, cônica e plana com aba, um reservatório completo com anel de rigidez e cúpula de cobertura e por fim é realizado um estudo da aproximação de Hannah para cúpulas esféricas e das simplificações usuais em projetos. Os resultados dos primeiros exemplos verificam que o programa computacional utilizado nas análises apresenta resultados satisfatórios quando comparado aos resultados analíticos. Nos exemplos em que a base elástica é aplicada, nota-se grande influência da rigidez do solo na distribuição dos esforços tanto na placa de fundo com na parede do reservatório. A utilização da base cônica, comumente utilizada para facilitar a limpeza, provoca uma redução nos momentos fletores e um aumento no esforço radial e nos deslocamentos. Os resultados mostram que, até um certo limite de comprimento, a adição de uma aba a placa de fundo provoca uma redução nos esforços, momentos fletores e deslocamentos máximos do reservatório, porém para comprimentos maiores de aba, os esforços internos nos elementos aumentam e inviabilizam sua utilização. Por fim, para o exemplo estudado, verifica-se que a simplificação de Hannah fornece uma boa aproximação para análise estrutural de cúpulas esféricas delgadas, embora maximize os esforços normais e minimize os deslocamentos e momentos fletores. Portanto, a principal contribuição do trabalho é a implementação de uma formulação computacional que possibilita a análise mais abrangente de estruturas delgadas de revolução submetidas a carregamentos axissimétricos.

**Palavras-chave:** estruturas axissimétricas; Método dos Elementos Finitos; comportamento estrutural; reservatórios.

## ABSTRACT

Many usual structures such as reservoirs, roof domes, pressure vessels and silos have both axisymmetric shape and loading. Due to its extensive use, it is necessary to know the structural behavior of this type of element in its various forms of application loading conditions. Classical theories provide solutions, in principle analytical, for geometric and load profiles by solving complex differential equations. Thus, in some cases, the analytic resolution becomes exhaustive, while in other cases this solution does not exist. The application of the Finite Element Method (FEM) appears as a viable alternative for the study of such structures, provided that the numerical models adopted accurately represent their real behavior. This study focuses on the mechanical behavior, through the FEM, of axisymmetric structures of different shapes subject to conditions of connection, supports and revolution loads. The structural analysis is done by means of a computational program elaborated by the author. There are presented elements of isolated shells, cylindrical reservoirs with flat bottom, conical or flat with flap without roof, a complete reservoir with ring of stiffness and roof dome and finally a study of the approach of Hannah for spherical domes and the usual simplifications in projects is realized. The results of the first examples show that the computational program used in the analyzes presents satisfactory results when compared to the analytical results. In the examples where the elastic base is applied, great influence of the soil stiffness in the distribution of stresses is observed in both the bottom plate and the wall of the reservoir. The use of the conical base, commonly used to facilitate cleaning, causes a reduction in bending moments and an increase in radial stress and displacements. The results show that, up to 30 centimeters in length, the addition of a flap to the bottom plate causes a reduction in the stresses, bending moments and maximum displacements of the reservoir, but for longer flap lengths, the moments and stresses in the elements increase and make it unfeasible. Finally, for the example studied, it is found that the Hannah's simplification method provides a good approximation for structural analysis of thin spherical domes, although it maximizes normal stresses and minimizes bending displacements and moments. Therefore, the main contribution of the work is the implementation of a computational formulation that allows a more comprehensive analysis of thin structures of revolution subjected to axisymmetric loading.

**Keywords:** axisymmetric structures; Finite Element Method; structural behavior; reservoirs.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – a) Reservatório elevado; b) torres de resfriamento; e c) vaso de pressão. ....	9
Figura 2 – Representação de uma estrutura axissimétrica, sua seção transversal e eixo de rotação. ....	15
Figura 3 – Representação do sistema de coordenadas cilíndrico. ....	16
Figura 4 – Superposição dos esforços para uma casca delgada ....	17
Figura 5 – Elemento diferencial: esforços de membrana e definições. ....	18
Figura 6 – Equilíbrio da casca. ....	20
Figura 7 – Casca esférica: geometria e esforços. ....	22
Figura 8 – Casca cônica: geometria, esforços e definições. ....	24
Figura 9 – Geometria da superfície média da parede cilíndrica. ....	27
Figura 10 – Casca cilíndrica sob pressão interna uniforme. ....	28
Figura 11 – Casca cilíndrica com variação linear da pressão interna. ....	29
Figura 12 – Momentos fletores e força cisalhante para Teoria de Flexão. ....	29
Figura 13 – Cascas de revolução: a) pequena curvatura e b) grande curvatura. ....	33
Figura 14 – Esforços e sistemas de coordenadas para casca cilíndrica. ....	34
Figura 15 – Casca cilíndrica submetida aos hiperestáticos de bordo. ....	36
Figura 16 – Casca esférica submetida a carregamentos nos bordos. ....	38
Figura 17 – Casca cônica submetida a carregamentos de bordo. ....	39
Figura 18 – Placa e sistema coordenado cartesiano ....	41
Figura 19 – Esforços em um elemento diferencial de uma placa: a) componentes de momentos fletores e b) componentes de esforço cortante. ....	42
Figura 20 – Sistema de coordenadas polares para placas. ....	43
Figura 21 – Placa circular engastada com carregamento uniformemente distribuído. ....	45
Figura 22 – Placa circular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído. ....	46
Figura 23 – Placa circular simplesmente apoiada com momentos uniformes radialmente distribuídos ao longo da borda. ....	47
Figura 24 – Placa sujeita a hiperestático horizontal de bordo ....	48
Figura 25 – a) Ações da cúpula na parede e b) utilização do anel de rigidez. ....	50
Figura 26 – Força radiais existentes no anel de rigidez. ....	51
Figura 27 – Resultante do carregamento radial no anel ....	51

Figura 28 – Deslocamento radial do eixo do anel de rigidez. ....	52
Figura 29 – Momentos fletores atuantes no anel de rigidez .....	53
Figura 30 – Deslocamento radial total e rotação do anel de rigidez.....	54
Figura 31 – a) Casca axissimétrica, b) casca axissimétrica representada pelo agrupamento tronco-cônico e c) elemento finito tronco-cônico destacado.....	59
Figura 32 – Elemento finito retilíneo. ....	59
Figura 33 – Graus de liberdade para o deslocamento axial do elemento retilíneo.....	61
Figura 34 – Graus de liberdade de deslocamento transversal e rotações para elemento retilíneo. ....	62
Figura 35 – Elemento retilíneo e sistemas de coordenadas local e global .....	64
Figura 36 – Sequência de processamento dos módulos do EAPD.....	72
Figura 37 – Diagrama de apresentação dos módulos do EAPD.....	72
Figura 38 – Cúpula com os apoios inclinados.....	74
Figura 39 – Hipótese de Winkler, deformabilidade do solo por molas elásticas.....	75
Figura 40 – Seção simétrica representando a) um reservatório apoiado sobre o solo e b) modelo computacional.....	77
Figura 41 – Elemento representativo do anel de rigidez e seus graus de liberdade.....	78
Figura 42 – Representação do anel de rigidez: a) estrutura real; b) modelo em elementos finitos. ....	79
Figura 43 – Aplicação 1: casca cilíndrica com carregamentos distribuído e concentrado.....	81
Figura 44 – Deslocamentos obtidos para a aplicação 1.....	83
Figura 45 – Momento fletor para a aplicação 1.....	83
Figura 46 – Configuração geométrica da cúpula.....	84
Figura 47 – Configuração deformada e configuração indeformada do exemplo 2. ....	85
Figura 48 – Momento fletor ao longo do meridiano. ....	85
Figura 49 – Esforço normal ao longo do meridiano.....	86
Figura 50 – Reservatório cilíndrico longo da aplicação 3.....	88
Figura 51 – Deslocamentos para aplicação 03. ....	89
Figura 52 – $M_r$ para aplicação 03. ....	90
Figura 53 – $Q_r$ para a aplicação 03. ....	90
Figura 54 – $M_z$ para a aplicação 03.....	91
Figura 55 – $N_\theta$ para a aplicação 03.....	91
Figura 56 – Reservatório cilíndrico da aplicação 4.....	92
Figura 57 – Deslocamentos para o exemplo 4 de SILVA (2017).....	93

Figura 58 – $M_r$ para o exemplo 4 de SILVA (2017).....	93
Figura 59 – $Q_r$ para o exemplo 4 de SILVA (2017). .....	94
Figura 60 – $M_z$ para o exemplo 4 de SILVA (2017).....	94
Figura 61 – $N_\theta$ para o exemplo 4 de SILVA (2017).....	95
Figura 62 – Reservatório cilíndrico com base cônica apoiado em fundação elástica. ....	96
Figura 63 – Tanque cilíndrico com placa circular na base .....	96
Figura 64 – Tanque cilíndrico com base cônica .....	97
Figura 65 – Deslocamentos do fundo do reservatório. ....	97
Figura 66 – Momento fletor ao longo da parede. ....	98
Figura 67 – Esforço radial ao longo da parede. ....	98
Figura 68 – Momento fletor ao longo do fundo do reservatório. ....	98
Figura 69 – Esforço radial ao longo do fundo do reservatório. ....	99
Figura 70 – Modelo de um reservatório apoiado em uma base elástica com aba. ....	101
Figura 71 – Carregamentos atuantes no reservatório apoiado em base elástica.....	102
Figura 72 – Reservatório sem aba e sua deformada. ....	103
Figura 73 – Diagrama de Momento fletor para reservatório sem aba. ....	103
Figura 74 – Reservatório com aba de 30 cm e sua deformada .....	104
Figura 75 – Diagrama de Momento Fletor para o reservatório com aba de 30 cm. ....	104
Figura 76 – Deslocamentos do fundo da placa para reservatórios com aba de até 60 centímetros. .....	106
Figura 77 – Variação do momento fletor ao longo da parede para diferentes comprimentos de aba.....	106
Figura 78 – Variação no esforço radial para diferentes comprimentos de aba. ....	107
Figura 79 – Variação do momento fletor na placa para diferentes comprimentos de aba. ....	107
Figura 80 – Variação no esforço cortante ao longo da placa e aba para diferentes comprimentos de aba.....	108
Figura 81 – Deslocamentos máximos da parede e da placa de fundo do reservatório. ....	109
Figura 82 – Variação do momento fletor máximo positivo no reservatório. ....	109
Figura 83 – Variação do momento fletor mínimo no reservatório. ....	110
Figura 84 – Variação do momento fletor na ligação placa-parede-aba do reservatório. ....	110
Figura 85 – Cúpula esférica com variação da espessura. ....	112
Figura 86 – Estrutura deformada para simplificação de Hannah .....	113
Figura 87 – Esforço normal $N_\phi$ na cúpula.....	113
Figura 88 -Momentos fletores ao longo da cúpula. ....	114

Figura 89 – Cúpula com abertura de 40° - Estrutura deformada.....	115
Figura 90 – Momento fletor ao longo da cúpula.....	116
Figura 91 – Esforço normal ao longo da cúpula.....	117
Figura 92 – Análise da aproximação de Hannah para diferentes aberturas de cúpula. ....	117
Figura 93 – Dimensões do reservatório da aplicação 8.....	118
Figura 94 – Tipos de apoio e carregamentos para a aplicação 8: a) simplesmente apoiado, b) engastado e c) apoiado em base elástica.....	119
Figura 95 – Deslocamentos da placa de fundo do reservatório.....	119
Figura 96 – Deslocamentos horizontais da parede cilíndrica.....	120
Figura 97 – Momento fletor ao longo da parede do reservatório.....	121
Figura 98 – Momento fletor na placa de fundo.....	121
Figura 99 – Esforço anelar atuante na parede.....	122
Figura 100 – Esforço anelar ao longo da placa.....	122
Figura 101 – Reservatório completo com abertura na cúpula, anel de rigidez e engrossamento nos bordos da placa e casca cilíndrica.....	124
Figura 102 – Deslocamentos da placa de fundo.....	125
Figura 103 – Deslocamentos da cúpula esférica.....	125
Figura 104 – Momento fletor ao longo da cúpula.....	126
Figura 105 – Momento fletor ao longo da parede.....	127
Figura 106 – Momento fletor ao longo da placa de fundo.....	127
Figura 107 – Esforço anelar na cúpula.....	128
Figura 108 – Esforço anelar na parede.....	128
Figura 109 – Esforço cortante na placa de fundo.....	129
Figura 110 – $N\phi$ na cúpula esférica.....	129

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Deslocamentos e esforços da Teoria de Flexão em cascas cilíndricas.....	37
Tabela 2 – Esforços e deslocamentos da Teoria de Flexão para casca esférica.....	38
Tabela 3 – Esforços e deslocamentos da Teoria de Flexão para casca cônica.....	39
Tabela 4 – Pontos e pesos de Gauss .....	70
Tabela 5 – Valores máximos e erros relativos do deslocamento horizontal .....	82
Tabela 6 – Valores máximos e erros relativos do momento fletor.....	82
Tabela 7 – Valores máximos do deslocamento $u$ .....	86
Tabela 8 – Valores máximos de $M\phi$ .....	87
Tabela 9 – Valores máximos de $N\phi$ .....	87
Tabela 10 – Comparação e erro para os valores máximos do exemplo 2 de SILVA (2017).....	89
Tabela 11 – Valores e erros máximos para o exemplo 4 de SILVA (2017). .....	92
Tabela 12 – Valores máximos e mínimos para solo mole.....	100
Tabela 13 – Valores máximos e mínimos para solo rígido. ....	100
Tabela 14 – Comparação de deslocamentos e esforços para aplicação .....	105

## LISTA DE SÍMBOLOS

$h$	Espessura da parede da casca
$r$	Menor raio da curvatura da casca
$q$	Carregamento externo aplicado a casca
$H_0$	Carregamento horizontal de bordo
$M_0$	Carregamento de momento no bordo
$\theta$	Ângulo do meridiano
$\phi$	Ângulo do paralelo
$r_0$	Raio de horizontal da casca esférica em certa altura
$r_1$	Raio de curvatura dos meridianos
$r_2$	Raio de curvatura dos paralelos
$p_y$	Componente de carregamento na direção $y$
$p_z$	Componente de carregamento na direção $z$
$p_\theta$	Componente de carregamento na direção $\theta$
$p_\phi$	Componente de carregamento na direção $\phi$
$N'_\phi$	Esforço normal de membrana na direção $\phi$
$N_\phi$	Esforço normal de flexão na direção $\phi$
$N'_\theta$	Esforço normal de membrana na direção $\theta$
$N_\theta$	Esforço normal de membrana na direção $\theta$
$N'_y$	Esforço normal de membrana na direção $y$
$N_y$	Esforço normal de membrana na direção $y$
$N'_{\phi\theta}$	Esforço cisalhante de membrana contido na superfície média
$N_{\phi\theta}$	Esforço cisalhante de flexão contido na superfície média
$N'_{\theta\phi}$	Esforço cisalhante de membrana contido na superfície média
$N'_{\phi\theta}$	Esforço cisalhante de flexão contido na superfície média

$M_\phi$	Momento fletor na direção $\phi$
$M_\theta$	Momento fletor na direção $\theta$
$M_y$	Momento fletor na direção $y$
$M_{\phi\theta}$	Momento torsor na direção $\theta$
$M_{\theta\phi}$	Momento torsor na direção $\phi$
$M_{y\theta}$	Momento torsor na direção $\theta$
$M_{\theta y}$	Momento torsor na direção $y$
$Q_\phi$	Esforço cortante entre duas seções paralelas em relação ao eixo $\phi$
$Q_\theta$	Esforço cortante entre duas seções paralelas em relação ao eixo $\theta$
$Q_y$	Esforço cortante entre duas seções paralelas em relação ao eixo $y$
$v, w$	Deslocamentos
$\varepsilon_\phi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_y$	Deformações
$\sigma_\phi, \sigma_\theta, \sigma_y$	Tensões
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$\Delta_\phi$	Rotação da casca na direção do meridiano
$\Delta_H$	Deslocamento horizontal da casca
$\gamma_a$	Peso específico da água
$\gamma_c$	Peso específico do concreto
$g$	Carga devido ao peso próprio da casca
$q$	Carga uniforme distribuída em relação a projeção horizontal
$p$	Carga de pressão uniforme
$a$	Raio da casca esférica
$L$	Comprimento da casca cônica
$H$	Altura da casca cilíndrica
$r_b$	Raio da base da casca cilíndrica
$K$	Rigidez extensional da casca
$\nu$	Coefficiente de Poisson

$D$	Rigidez a flexão da casca
$w$	Deflexão da placa
$q$	Carregamento vertical distribuído
$D$	Rigidez a flexão da placa
$M_x$	Momento fletor na direção $x$
$M_y$	Momento fletor na direção $y$
$M_r$	Momento fletor na direção $r$
$M_\theta$	Momento fletor na direção $\theta$
$M_{xy}$	Momento torsor na direção $y$
$M_{yx}$	Momento torsor na direção $x$
$M_{r\theta}$	Momento torsor na direção $\theta$
$Q_x, Q_y, Q_r$	Esforços cortantes perpendiculares a superfície média da placa
$\mathbf{N}^e$	Matriz de interpolação do elemento
$\mathbf{u}^e$	Campo de deslocamentos no interior do elemento
$\mathbf{d}^e, \mathbf{d}^g$	Deslocamentos nodais do elemento, deslocamentos nodais globais
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Deformações do elemento
$\mathbf{L}^e$	Matriz dos operadores diferenciais
$\boldsymbol{\sigma}^e$	Tensões no elemento
$\mathbf{D}$	Matriz constitutiva
$\mathbf{K}^e, \mathbf{K}^g$	Matriz de rigidez do elemento, matriz de rigidez global
$\mathbf{f}^e, \mathbf{f}^g$	Vetor de cargas nodais do elemento, vetor de cargas nodais global
$\Pi$	Energia potencial total do sistema
$U$	Energia de deformação do sistema
$W_p$	Trabalho potencial do sistema
$\boldsymbol{\sigma}$	Componentes de tensão
$\mathbf{u}$	Componentes de deslocamento
$\mathbf{b}$	Forças volumétricas
$\mathbf{q}$	Forças de superfície
$\mathbf{P}$	Cargas concentradas nos nós



$\bar{u}, \bar{w}$	Deslocamentos nas direções locais do elemento retilíneo na superfície média
$u, w$	Deslocamentos nas direções locais do elemento retilíneo em qualquer ponto
$L$	Comprimento do elemento retilíneo
$\mathbf{T}$	Matriz de rotação ou transformação de coordenadas
$\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}$	Componentes do tensor de deformações
$\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}$	Componentes do tensor de tensões
$N_{\theta}$	Esforço normal na direção $\theta$
$N_s$	Esforço normal na direção $s$
$M_s$	Momento fletor na direção $s$
$M_{\theta}$	Momento fletor na direção $\theta$
$\xi_i$	Coordenadas de Gauss
$p_i$	Pesos de Gauss

## SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS</b>		<b>III</b>
<b>RESUMO</b>		<b>IV</b>
<b>ABSTRACT</b>		<b>VI</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>		<b>VII</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>		<b>XI</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>		<b>XII</b>
<b>SUMÁRIO</b>		<b>XVI</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
1.1	Justificativa	Erro! Indicador não definido.
1.2	Objetivos	11
1.3	Metodologia	13
1.4	Síntese de capítulos	14
1.5	Delimitações do trabalho	14
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA CASCAS AXISSIMÉTRICAS</b>	<b>15</b>
2.1	Hipóteses básicas	16
2.2	Procedimentos usuais para análise de cascas	17
2.3	Teoria de Membrana	18
2.3.1	Casos particulares de cascas	21
2.4	Teoria de Flexão	29
2.4.1	Aproximação de Geckeler	32
2.4.2	Casos particulares	34
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA PLACAS CIRCULARES</b>	<b>41</b>
3.1	Placas circulares com carregamento axissimétrico	43
3.2	Casos particulares	45
3.2.1	Placa circular engastada com carregamento distribuído uniforme	45
3.2.2	Placa circular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído	46

3.2.3	Placa circular simplesmente apoiada submetida a momentos uniformes radialmente distribuídos ao longo da borda.....	47
3.2.4	Placas de fundo de reservatórios .....	48
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA ANÉIS DE RIGIDEZ.....</b>	<b>50</b>
<b>5</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA ESTRUTURAS AXISSIMÉTRICAS ..</b>	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Formulação geral do método dos elementos finitos para mecânica estrutural</b>	<b>55</b>
<b>5.2</b>	<b>Elemento finito unidimensional retilíneo .....</b>	<b>58</b>
5.2.1	Deslocamentos e funções de interpolação .....	60
5.2.2	Relações deformação-deslocamento.....	63
5.2.3	Relações tensões-deformações .....	66
<b>5.3</b>	<b>Matriz de rigidez do elemento .....</b>	<b>67</b>
<b>5.4</b>	<b>Vetor de forças nodais equivalentes do elemento.....</b>	<b>68</b>
<b>5.5</b>	<b>Regra da quadratura de Gauss .....</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....</b>	<b>72</b>
<b>6.1</b>	<b>Descrição do programa computacional .....</b>	<b>73</b>
<b>6.2</b>	<b>Funcionalidades do EAPD .....</b>	<b>73</b>
6.2.1	Apoios inclinados .....	74
6.2.2	Base elástica .....	74
6.2.3	Ligações flexíveis .....	77
6.2.4	Anel de rigidez.....	78
<b>7</b>	<b>APLICAÇÕES .....</b>	<b>81</b>
<b>7.1</b>	<b>Verificação do programa computacional - EAPD .....</b>	<b>81</b>
7.1.1	Aplicação 1: casca cilíndrica com carregamentos distribuído e concentrado .....	81
7.1.2	Aplicação 2: cúpula esférica sob carregamento distribuído .....	84
7.1.3	Aplicação 3: reservatório cilíndrico longo apoiado em base elástica.....	88
7.1.4	Aplicação 4: reservatório cilíndrico curto apoiado em base elástica.....	92
<b>7.2</b>	<b>Aplicação 5 – reservatório aberto com base cônica .....</b>	<b>95</b>
<b>7.3</b>	<b>Aplicação 6 – reservatório apoiado em base elástica com aba .....</b>	<b>101</b>
<b>7.4</b>	<b>Aplicação 7 – aproximação de Hannah para cúpulas esféricas.....</b>	<b>111</b>
7.4.1	Cúpula com raio 20 metros e ângulo de abertura $\phi_0$ igual a $60^\circ$ .....	112

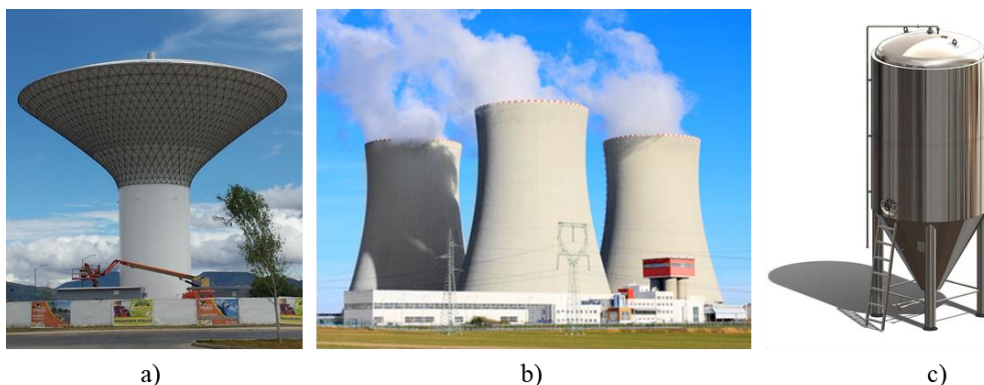
7.4.2	Cúpula com raio 20 metros e ângulo de abertura $\phi_0$ igual a $40^\circ$ .....	115
7.5	<b>Aplicação 8 – reservatório aberto submetido a variadas condições de apoio</b> .....	<b>118</b>
7.6	<b>Aplicação 9 – reservatório completo com anel de rigidez, abertura na cúpula e engrossamento na placa e parede.....</b>	<b>123</b>
8	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>131</b>
8.1	<b>Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>133</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>134</b>
	<b>APÊNDICE A – PARÂMETROS DO EAPD .....</b>	<b>138</b>
A.1.	<b>Entrada de dados .....</b>	<b>139</b>
A.2.	<b>Saída de dados.....</b>	<b>142</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As estruturas de superfície, especialmente as finas ou delgadas, são elementos estruturais amplamente utilizados nas diversas áreas da engenharia e estão disseminadas por todo o mundo. Isso acontece devido a sua versatilidade de aplicação, desde elementos isolados, como cúpulas de cobertura (cascas) e lajes (placas), até estruturas formadas pela união de dois ou mais elementos de superfície, como é o caso de vasos de pressão, reservatórios, silos e torres de resfriamento hiperbólicas.

Essas estruturas complexas ou compostas são formadas por diversos elementos de cascas e as vezes placas. Na união desses elementos atuam esforços oriundos dos carregamentos existentes na estrutura e, devido a sua magnitude, surge a necessidade de minimizar a transmissão desses esforços de um elemento para o outro. A utilização de uma estrutura em formato de anel, geralmente chamado de anel de rigidez, é uma das soluções empregadas pelos engenheiros estruturais com a finalidade de reduzir os esforços atuantes nesses pontos críticos. Os reservatórios elevados, por exemplo, são formados comumente pela combinação de cascas cilíndricas, cascas cônicas, anéis de rigidez e cúpulas esféricas, como o exemplo da Figura 1a). Já as torres de resfriamento hiperbólicas são formadas por cascas hiperbólicas e anéis de rigidez nas extremidades, como pode ser visto na Figura 1b), enquanto alguns vasos de pressão são formados pelo acoplamento entre cascas cônicas, cascas cilíndricas e cascas esféricas, ver Figura 1c).

Figura 1 – a) Reservatório elevado; b) torres de resfriamento; e c) vaso de pressão.



Fonte: a) Geometrica, [s.d.], b) Fogaça, [s.d.] e c) Czech Brewery System Sro, [s.d.].

Devido à sua extensa utilização, é necessário conhecer o comportamento estrutural desse tipo de elemento em suas diversas formas de aplicação e sujeita à variados tipos de ações e carregamentos. Trabalhos e autores clássicos como Timoshenko e Woinowsky-Krieger

(1959), Flügge (1960), Novozhilov e Radok (1964), Ugural (1981) e Billington (1982) apresentam uma abordagem, em princípio analítica, que permite a obtenção de esforços e deslocamentos de estruturas bidimensionais.

Com relação à dificuldade matemática associada a análise de estruturas em casca devem ser feitos alguns comentários. Antes da utilização intensiva de computadores, a análise de uma casca demandava a solução de equações diferenciais complexas por métodos analíticos, e se tornava, de fato, uma tarefa exaustiva. Por isso, Leonhardt e Mönning (1977) cita que a utilização de cascas com predominância de esforços de membrana tinha como justificativa não apenas o bom desempenho desses sistemas estruturais, mas também a possibilidade de calcular os esforços baseando principalmente na teoria de membrana, e em alguns casos complementada com teorias simplificadas de flexão.

O advento de modelos e métodos aproximados junto a difusão da computação apresentaram novas possibilidades para o estudo de placas e cascas, trazendo soluções menos complexas e uma maior possibilidade de aplicação, restando ainda, é claro, a tarefa de elaboração do modelo numérico e a cuidadosa análise dos resultados por parte do engenheiro. Os métodos numéricos mais difundidos para solução de problemas de engenharia são o método dos elementos finitos (MEF), o método dos elementos de contorno (MEC), o método dos volumes finitos (MVF) e o método das diferenças finitas (MDF).

Na literatura existem inúmeros trabalhos que fazem considerações e aplicações de métodos numéricos, principalmente o mais difundido MEF, para análise de superfícies delgadas. No caso de elementos finitos, Zienkiewicz e Taylor (2000) apresentam a formulação para modelagem de placas usando a simplificação de Kirchhoff para placas finas e a teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas, utilizando em ambos os casos elementos quadriláteros e triangulares. O mesmo autor também apresenta a formulação para a modelagem de cascas em elementos finitos, tanto para casos bidimensionais quanto para tridimensionais.

Bathe (1996) apresenta a formulação em elementos finitos para placas fletidas e cascas por meio de elementos quadriláteros e triangulares e faz análise de erro relacionando a quantidade de nós empregada de cada elemento. Segundo Bhatia e Sekhon (1999), quando se trata de método dos elementos finitos e cascas delgadas existem elementos triangulares planos, retangulares, cilíndricos e de dupla curvatura disponíveis na literatura.

As estruturas axissimétricas são estruturas que podem ser representadas ou criadas a partir de um corte da seção transversal e um eixo de revolução. A estrutura é formada a partir da rotação da seção transversal 360° em torno do eixo de revolução, também conhecido como eixo axissimétrico. A análise de estruturas usando a axissimetria fornece valores coerentes com

a análise tridimensional e reduz o domínio do problema significativamente, facilitando a análise e reduzindo o custo computacional quando se trata de métodos numéricos.

Escolhendo-se utilizar o MEF para a análise, depara-se com a necessidade da escolha do elemento finito a ser usado, dentre a grande variedade de elementos disponíveis literatura. É necessário que se conheçam as vantagens e limitações de cada elemento, já que nem sempre se consegue bons resultados em todas as situações para o mesmo elemento.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), nos casos particulares em que a casca e o carregamento são axissimétricos, é possível concluir que os elementos finitos tornam-se unidimensionais. A primeira abordagem da solução em elementos finitos para cascas axissimétricas foi apresentada por Grafton e Stome (1963). Nesse trabalho, os elementos são troncos de cone simples (retilíneos) e uma abordagem direta via funções de deslocamento foi empregada. Uma extensão para o caso de cargas assimétricas, sugerida por Grafton e Stome (1963) foi elaborada por Navaratna (1965), Klein (1966) e Jones e Stome (1966).

Dando continuidade ao aprimoramento de elementos finitos para cascas axissimétricas, Navaratna *et al.* (1966), Ahmad *et al.* (1968), Giannini e Miles (1970) e Zienkiewicz e Taylor (2000) *apud* Delpak (1975) introduziram o elemento finito curvilíneo e apresentaram como aplicar as coordenadas curvilíneas para os vários tipos de análise.

Em cascas axissimétricas, como em cascas em geral, tantos esforços de flexão quanto forças de membrana irão existir. Estes são especificados apenas em termos das deformações generalizadas, as quais envolvem extensões e mudanças na curvatura da superfície média. Se o deslocamento de cada ponto da superfície média é conhecido, tais deformações e esforços internos resultantes podem ser determinados por formulações disponíveis em textos clássicos da teoria de cascas.

## 1.1 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral estudar numericamente, via MEF, o comportamento de estruturas axissimétricas de parede delgada submetidas a carregamentos axissimétricos e constituídas de placas e cascas de revolução.

Os objetivos específicos são:

- a) Revisar as formulações clássicas de placas e cascas delgadas;

- b) Conceber e implementar um programa computacional para análise de superfícies delgadas axissimétricas com formulação baseada no método dos elementos finitos, a qual emprega um elemento finito retilíneo;
- c) Verificar a eficiência do programa computacional a partir de comparações com soluções analíticas;
- d) Avaliar a aplicabilidade das hipóteses simplificadoras usualmente empregadas em projetos de estruturas em casca;
- e) Analisar estruturas axissimétricas complexas, ou seja, compostas por diferentes elementos como cascas, placas e anéis.

## 1.2 Justificativa

A análise estrutural é a etapa mais importante na elaboração de um projeto de estruturas. Consiste em obter a resposta da estrutura perante as variadas ações a qual está submetida, ou seja, encontrar os esforços e os deslocamentos causados pelas cargas atuantes. Esses esforços e deslocamentos são obtidos por meio de um modelo estrutural, que deve simular o comportamento da estrutura da maneira mais realística possível.

Os resultados da análise estrutural influenciam diretamente nas etapas posteriores do projeto, como especificação e execução. Se o modelo estrutural considera os fatores que influenciam nos esforços e deslocamentos de maneira adequada, os resultados da análise revelam o comportamento da estrutura de modo coerente e mais realístico, tornando a especificação mais adequada. Uma análise imprecisa ou extremamente simplificada pode gerar respostas não condizentes com a realidade, fazendo com o que a estrutura fique mal dimensionada.

As abordagens analíticas disponíveis na literatura possuem, muitas vezes, soluções complexas e em outros casos não existem soluções analíticas. Surge então a necessidade da aplicação de modelos numéricos que representem de forma precisa o comportamento da estrutura.

O MEF possui variadas formulações, utilizando diversos tipos de elementos. Torna-se necessário então verificar a eficiência, a precisão e a formulação mais adequada que irá proporcionar resultados mais coerentes sem limitar a aplicabilidade do programa computacional implementado. Diversos autores vêm estudando os elementos tronco-cônico



retilíneo e/ou curvo e verificando sua influência na resposta final da estrutura, como é o caso de Grafton e Stome (1963), Navaratna *et al.* (1966), Giannini e Miles (1970), Bhatia e Sekhon (1999), Tessler (1982), Ahmad *et al.* (1968), Almeida (1989), Babu e Prathap (1986), Ben-Zvi (1992), Cui *et al.* (2016), Bezerra (2013), Cagdas (2011), entre outros.

Embora os trabalhos e autores citados anteriormente apresentem resultados satisfatórios para os elementos finitos utilizados em seus trabalhos, as aplicações desses métodos a estruturas de cascas usuais bem como a verificação das simplificações das soluções analíticas são escassas. Dessa forma, o presente trabalho pretende analisar a influência das simplificações na abordagem analítica, estudar casos complexos ou sem solução analítica e se apresentar como uma opção para análise estrutural de cascas axissimétricas.

A criação do programa computacional utilizado nas análises, denominado EAPD (Estruturas Axissimétricas de Parede Delgada), tem a finalidade de compreender a implementação e o funcionamento de um programa computacional em MEF, ter maior controle das análises feitas e ter liberdade de modificação do código implementado, além de ser um programa de livre acesso.

### **1.3 Metodologia**

Para alcançar os objetivos propostos, o estudo é realizado por meio da modelagem numérica do Método dos Elementos Finitos empregando um elemento finito retilíneo, o qual permite a análise de estruturas de revolução submetidas a carregamentos axissimétricos. Dessa forma, são modelados exemplos de estruturas simples de cascas cilíndricas e cúpulas, bem como reservatórios compostos por placas de fundo, paredes cilíndricas, cobertas por cúpulas esféricas e anel de rigidez. A base pode ser considerada apoiada em suportes axissimétricos, em base elástica ou base rígida. Na base elástica é considerado o modelo de Winkler, no qual o solo é simulado por meio de molas distribuídas continuamente. O procedimento de análise é implementado usando o ambiente de programação MATLAB. Os resultados do código para aplicações práticas são apresentados por meio de gráficos de deslocamentos e esforços e tabelas comparativas.

São modeladas estruturas usuais isoladas como cascas cilíndricas e cúpulas esféricas e estruturas acopladas formando reservatórios abertos e cobertos.

## 1.4 Síntese de capítulos

O Capítulo 2 apresenta a formulação clássica para o estudo do comportamento estrutural de cascas axissimétricas. São apresentadas as hipóteses necessárias para o desenvolvimento da formulação analítica, bem como o procedimento usual para este tipo de análise. Além disso, expõe as Teorias de Membrana e Flexão e as equações de esforços e deslocamentos para casos particulares.

O Capítulo 3, análogo ao Capítulo 2, apresenta a formulação da teoria clássica de placas axissimétricas, a qual possibilita a obtenção analítica de esforços e deslocamentos para este elemento estrutural. Ainda, são apresentadas as equações correspondentes para casos específicos de carregamentos e vinculações de bordo. Já o Capítulo 4 mostra a formulação analítica para o cálculo de esforços e deslocamentos no anel de rigidez

No Capítulo 5, uma breve introdução ao MEF é apresentada, seguido da sua formulação geral e axissimétrica necessária para obtenção da matriz de rigidez do elemento finito retilíneo. Além disso, apresenta o método de integração numérica da Quadratura de Gauss.

O Capítulo 6 explica os aspectos computacionais do EAPD, programa implementado em MEF e adotado do trabalho, bem como suas funcionalidades e um modelo da entrada de dados.

No Capítulo 7 são expostas as aplicações e os resultados obtidos pelo programa computacional. São oito aplicações, das quais quatro são utilizadas na verificação do EAPD e as demais são casos nos quais a solução analítica adota simplificações ou não existe.

Por fim, o Capítulo 8 apresenta as considerações finais da dissertação bem como sugestões para trabalhos futuros.

## 1.5 Delimitações do trabalho

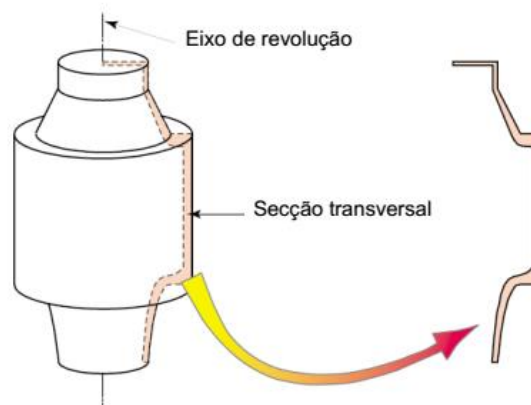
Como explicitado nos itens anteriores, este trabalho apresenta uma solução numérica para problemas axissimétricos envolvendo estruturas delgadas. Dessa forma, não fazem parte desse escopo e não podem ser resolvidos pelo programa computacional proposto quaisquer estruturas que não sejam de revolução e que os carregamentos e as vinculações não sejam axissimétricas. As análises dinâmica, não linear e térmica também não estão presentes nesta abordagem.

## 2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA CASCAS AXISSIMÉTRICAS

A casca é definida como uma estrutura de superfície na qual a superfície média (a que divide em cada ponto a espessura da casca em duas partes iguais) é curva. A espessura é pequena em relação as outras dimensões, podendo ser constante ou variar de ponto a ponto, e é definida com a distância, medida perpendicularmente a superfície média, entre as faces externas e interna. De forma geral, uma casca pode ser representada por sua superfície média e a espessura, de forma análoga a representação de uma barra por seu eixo e sua seção transversal.

Uma casca axissimétrica, ou de revolução, é definida como aquela em que a superfície média é uma superfície de revolução. Isto é, são estruturas que podem ser representadas por uma seção transversal que contém um eixo de revolução, e são geradas a partir da rotação dessa seção transversal  $360^\circ$  em torno do eixo, conforme ilustrado na Figura 2.

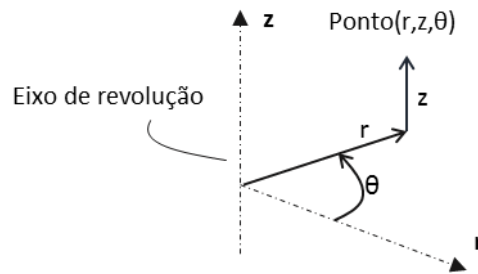
Figura 2 – Representação de uma estrutura axissimétrica, sua seção transversal e eixo de rotação.



Fonte: Rodrigues (2009).

Devido a existência do eixo de revolução, estruturas axissimétricas podem ser representadas em um sistema de coordenadas cilíndricas, como apresentado na Figura 3. Para os casos em que tanto a estrutura quanto o carregamento são axissimétricos, o campo de deslocamentos depende apenas das coordenadas  $r$  e  $z$  e tem apenas dois componentes, pois não existe deslocamento circunferencial devido a simetria.

Figura 3 – Representação do sistema de coordenadas cilíndrico.



Fonte: Adaptado de Rodrigues (2009).

Dessa forma, apresenta-se nesse capítulo a teoria de cascas de revolução sujeitas a carregamentos com simetria axial.

## 2.1 Hipóteses básicas

A teoria detalhada a seguir é baseada nas hipóteses cinemáticas de Kirchhoff-Love, a qual foi desenvolvida para cascas finas e assume que:

- a) O material que constitui a estrutura é homogêneo, isótropo e obedece à lei de Hooke;
- b) A espessura é pequena em relação as demais dimensões e aos raios de curvatura da superfície média;
- c) As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação as demais tensões;
- d) Linhas retas normais à superfície média antes da deformação permanecem retas e normais a superfície média depois da deformação;
- e) Os deslocamentos são muito pequenos em relação a espessura  $h$ , sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de superfície.

A primeira hipótese permite escrever um único conjunto de equações de equilíbrio, válidas para qualquer ponto da estrutura e formuladas com base nos princípios da Teoria da Elasticidade. A segunda é base para as demais e pode ser verificada, segundo Novozhilov e Radok (1964), se a espessura obedecer a relação:

$$\left(\frac{h}{r}\right)_{\max} < \frac{1}{20} \quad (1)$$

em que  $h$  é a espessura e  $r$  é o menor raio da curvatura da casca.

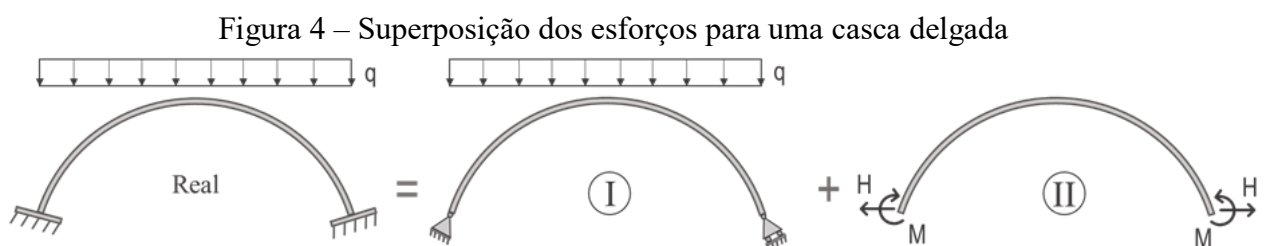
A terceira e quarta hipóteses, as quais representam uma extensão da lei de Bernoulli da Teoria de Vigas para a Teoria de Cascas (seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação), tornam o problema bidimensional, ou seja, pode-se considerar o estado plano de tensões.

A quinta hipótese define que a teoria é linear, isto é, todas as grandezas envolvidas no problema, bem como todas as deduções, podem ser referidas à superfície não deformada da casca. As hipóteses um e cinco conduzem a equações fundamentais lineares e garante a validade da superposição de efeitos.

## 2.2 Procedimentos usuais para análise de cascas

Em uma casca, em geral, podem atuar todos os tipos de esforços, como por exemplo: esforços normais (ou no plano tangente), esforços cortantes perpendiculares a superfície média, momentos fletores e momentos torsores. É possível obter a solução para uma estrutura de casca delgada por meio da Teoria Geral, ou Teoria de Flexão. Embora seja possível, esta tarefa não é comumente adotada nas análises deste tipo de estrutura, pois a solução do sistema de equações diferenciais do problema é complexa e na maioria dos casos exaustiva.

De forma a facilitar a análise e obtenção dos esforços e deslocamentos, na prática, a análise é feita a partir da decomposição de efeitos, de acordo com a Figura 4. Pode-se notar que o sistema I, ou principal, recebe a ação das forças externas e tem vinculações tangentes a superfície média. Os esforços internos provocados pelo carregamento e reações de apoio em cascas delgadas são basicamente esforços na superfície média, sendo os momentos fletores e forças cortantes perpendiculares a essa superfície muito pequenos, podendo ser desprezados. Dessa forma, tem-se uma estrutura compatível com o regime de membrana e sua solução pode ser obtida com a Teoria de Membrana.



Fonte: autor (2018).

O sistema II, ou secundário, não recebe carregamentos externos. Os deslocamentos e esforços internos são provocados apenas pela ação dos hiperestáticos  $H$  e  $M$ . Esses hiperestáticos provocam esforços cortantes perpendiculares a superfície média e momentos fletores significativos, portanto não podem ser desconsiderados. Dessa forma, o sistema II não é compatível com regime de membrana, e deve ser solucionado a partir da Teoria de Flexão.

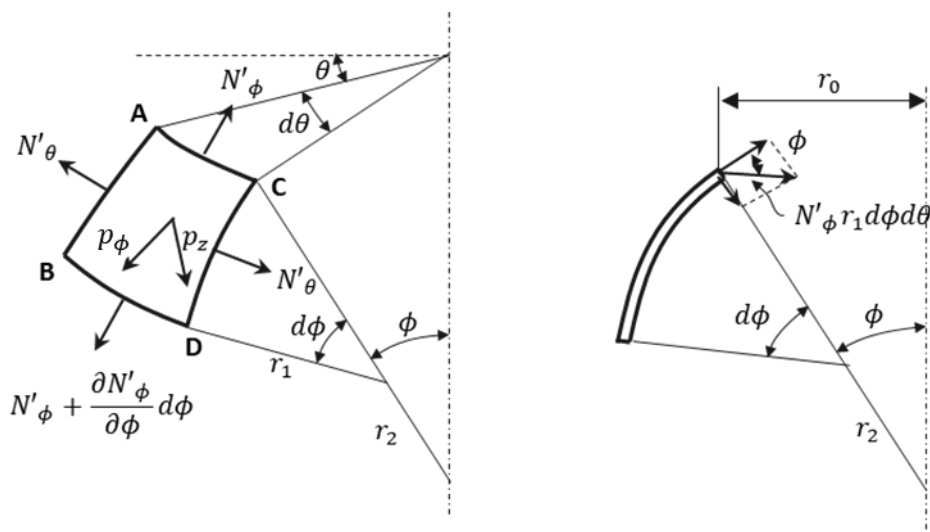
Assim, a análise é realizada pelo método das forças em quatro etapas:

1. Obtenção dos esforços e deslocamentos do sistema primário baseada na Teoria de Membrana;
2. Cálculo dos deslocamentos de bordo em função dos hiperestáticos para o sistema secundário baseado na Teoria de Flexão;
3. Compatibilização dos deslocamentos obtidos pela superposição dos sistemas I e II com o sistema real, encontrando assim os valores para os hiperestáticos de bordo;
4. Superposição de esforços e deslocamentos do sistema I e II para obtenção dos esforços e deslocamentos da estrutura real.

### 2.3 Teoria de Membrana

A Figura 5 mostra um elemento diferencial da superfície média de uma casca em coordenadas polares.

Figura 5 – Elemento diferencial: esforços de membrana e definições.



Fonte: Adaptado de Bezerra (2013).

em que  $N'_\phi$  é o esforço normal de membrana na direção  $\phi$ ,  $N'_\theta$  é o esforço normal de membrana na direção  $\theta$ ,  $p_y$  é a componente de carregamento na direção  $y$ ,  $p_z$  é a componente de carregamento na direção  $z$ ,  $r_0$  é o raio horizontal da cúpula numa altura qualquer,  $r_1$  é o raio de curvatura dos meridianos,  $r_2$  é o raio de curvatura dos paralelos,  $\phi$  é o ângulo de abertura dos paralelos e  $\theta$  é o ângulo de abertura do meridiano.

Para sistemas de cascas axissimétricas com carregamento simétrico ao eixo de revolução, todos os termos de esforços e carregamento envolvendo  $d\theta$  são nulos devido a simetria. Assim, tem-se:

$$p_\theta \equiv 0, N'_{\phi\theta} \equiv 0, N'_{\theta\phi} \equiv 0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0. \quad (2)$$

em que  $p_\theta$  é a componente de carregamento na direção  $\theta$ ,  $N'_{\phi\theta}$  e  $N'_{\theta\phi}$  são os esforços cisalhantes de membrana contido na superfície média.

A partir do elemento diferencial da Figura 5 e das simplificações impostas na Eq. (2), pode-se montar as equações de equilíbrio nas direções  $z$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , isto é:

- Na direção  $\phi$ :

$$-N'_\theta r_1 \cos \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (N'_\phi r_0) + p_\phi r_0 r_1 = 0. \quad (3)$$

- Na direção  $\theta$ :

$$N'_\theta r_1 d\phi - N'_\theta r_1 d\phi = 0 \therefore 0 = 0. \quad (4)$$

- Na direção  $z$ :

$$N'_\theta r_1 \sin \phi + N'_\phi r_0 + p_z r_0 r_1 = 0 \quad (5)$$

Substituindo  $r_0 = r_2 \cdot \sin \phi$  e dividindo a Eq. (5) por  $r_1 r_2$  obtém-se:

$$\frac{N'_\theta}{r_1} + \frac{N'_\phi}{r_2} + p_z = 0. \quad (6)$$

Seguindo o procedimento de análise proposto por BILLINGTON (1982), obtém-se:

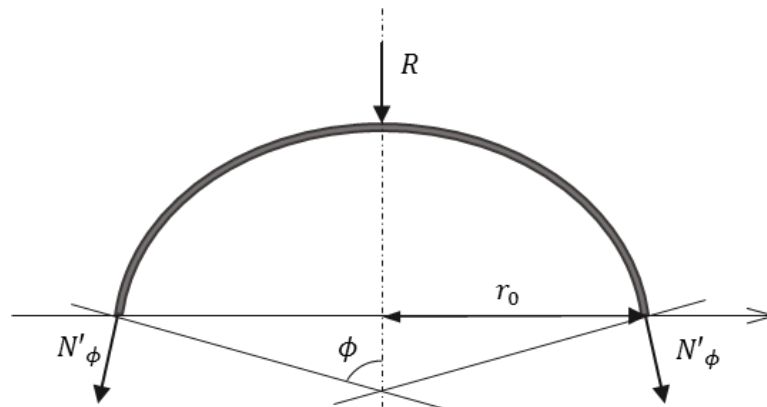
$$N'_{\phi} = -\frac{1}{2\pi r_0 \sin \phi} \int_0^{\phi} (p_z \cos \phi + p_{\phi} \sin \phi) (2\pi r_0) r_1 d\phi. \quad (7)$$

em que:

- $(p_z \cos \phi + p_{\phi} \sin \phi)$  corresponde a componente vertical de carregamento.
- $(2\pi r_0)$  corresponde a intensidade total do carregamento vertical do item anterior sobre um corte paralelo da casca.
- $\int_0^{\phi} r_1 d\phi$  integra o carregamento vertical ao longo do meridiano.

Analisando desta forma, pode-se concluir que a integral da Eq. (7) representa o carregamento vertical total ( $R$ ) sobre um círculo paralelo definido por  $\phi$ , conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Equilíbrio da casca.



Fonte: Adaptado de Billington (1982).

Dessa forma, pode-se definir  $N'_{\phi}$  diretamente por:

$$N'_{\phi} = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin \phi} \quad (8)$$

A obtenção de  $N'_{\theta}$  é dada pela substituição da Eq. (8) na Eq.(6):

$$N'_{\theta} = \frac{R}{2\pi r_1 \sin^2 \phi} - p_z \frac{r_0}{\sin \phi}. \quad (9)$$



Seguindo o procedimento proposto na literatura, mas especificamente o proposto por BILLINGTON (1982), chega-se as expressões para o deslocamento horizontal e para a rotação meridional, respectivamente:

$$\Delta_H = \frac{r_2 \sin \phi}{Eh} (N'_{\theta} - \nu N'_{\phi}) \quad (10)$$

$$\Delta_{\phi} = \frac{v}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{dw}{d\phi} = \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{dv}{d\phi} \cot \phi + v \frac{d}{d\phi} (\cot \phi) + \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{r_2}{Eh} (N'_{\theta} - \nu N'_{\phi}) \right] \right\} \quad (11)$$

em que  $v$  e  $w$  são os deslocamentos na direção longitudinal e perpendicular à superfície média da cúpula, respectivamente,  $h$  é a espessura,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $E$  é o módulo de elasticidade.

Sabe-se que nos bordos, os apoios ao longo do perímetro da casca não permitem deslocamentos verticais, portanto  $v = 0$ . Portanto, no bordo temos:

$$\Delta_{\phi} = \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{\cot \phi}{Eh} \left[ r_1 (N'_{\phi} - \nu N'_{\theta}) + r_2 (N'_{\theta} - \nu N'_{\phi}) \right] - \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\Delta_H}{\sin \phi} \right) \right\} \quad (12)$$

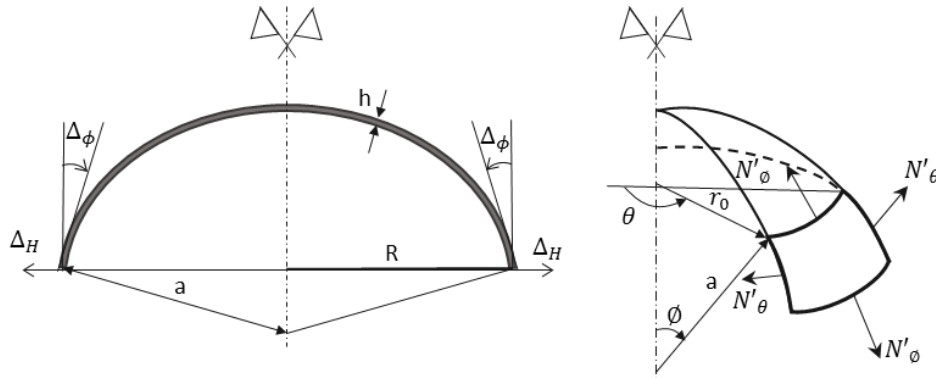
### 2.3.1 Casos particulares de cascas

Para os casos particulares expostos nesta Seção, serão determinados esforços e deslocamentos para carregamentos usuais de estruturas, como por exemplo peso próprio e sobrecarga. As equações encontradas nos subtópicos abaixo, para os casos de carregamento citados, são fornecidas por Billington (1982) e Sabe (1986), sendo feitas modificações de sistemas coordenados e simbologia adotada pelo autor.

#### 2.3.1.1 Casca esférica

Em uma casca esférica, o raio de curvatura do meridiano é igual ao raio de curvatura paralelo, conforme mostrado na Figura 7. Logo, as expressões para a determinação dos esforços e deslocamentos de membrana de uma casca esférica são obtidas substituindo o raio da esfera  $r_1 = r_2 = a$  nas Eqs. (8) a (12).

Figura 7 – Casca esférica: geometria e esforços.



Fonte: Adaptado de Sabe (1986).

Os itens de a) a c) apresentam a particularização dos esforços e deslocamento para carregamentos usuais de estruturas visando facilitar sua aplicação.

a) Peso próprio ( $g$ )

Neste caso, temos:  $p_\phi = g \cdot \sin\phi$ ,  $p_z = g \cdot \cos\phi$  e  $p_\theta = 0$ . Os esforços de membrana em qualquer ponto da casca são dados pelas Eqs. (14) e (15) e a resultante dos carregamentos verticais ( $R$ ) pela Eq. (13):

$$R = 2\pi a^2 g \int_0^\phi \sin\phi d\phi = 2\pi a^2 g(1 - \cos\phi) \quad (13)$$

$$N'_\phi = -\frac{a \cdot g}{1 + \cos\phi} \quad (14)$$

$$N'_\theta = a \cdot g \left( \frac{1}{1 + \cos\phi} - \cos\phi \right) \quad (15)$$

em que  $g = \gamma_{mat} \cdot h$ , sendo  $\gamma_{mat}$  o peso específico do material. Os deslocamentos de membrana na borda são:

$$\Delta_H = \frac{a^2 \cdot g}{E \cdot h} \left( \frac{1 + \nu}{1 + \cos\phi_b} - \cos\phi_b \right) \sin\phi_b \quad (16)$$

$$\Delta_\phi = -\frac{a \cdot g}{E \cdot h} (2 + \nu) \sin\phi_b \quad (17)$$

sendo  $\phi_b$  o ângulo de abertura da base.

b) Carga uniforme vertical em relação a projeção horizontal (q)

Tem-se que  $p_\phi = q \cdot \sin \phi \cos \phi$ ,  $p_z = q \cdot \cos^2 \phi$  e  $p_\theta = 0$ . Esse carregamento uniforme vertical pode ser entendido como uma sobrecarga ou carga acidental.

$$R = q\pi r_0^2 = q\pi a^2 \sin^2 \phi \quad (18)$$

$$N'_\phi = -\frac{aq}{2} \quad (19)$$

$$N'_\theta = -\frac{aq}{2} \cos 2\phi \quad (20)$$

e os deslocamentos de bordo:

$$\Delta_H = \frac{a^2 q}{2Eh} (-\cos 2\phi_b + \nu) \sin \phi_b \quad (21)$$

$$\Delta_\phi = \frac{aq}{2Eh} (3 + \nu) \sin 2\phi_b \quad (22)$$

c) Carga de pressão uniforme (p)

Para carga uniforme de pressão nas paredes da casca tem-se  $p_\phi = 0$ ,  $p_z = p$  e  $p_\theta = 0$ .

Portanto:

$$R = 2\pi a^2 p \int_0^\phi \sin \phi \cos \phi d\phi = \frac{\pi a^2 p}{2} (2 \sin^2 \phi) \quad (23)$$

$$N'_\phi = -\frac{ap}{2} \quad (24)$$

$$N'_\theta = -\frac{ap}{2} \quad (25)$$

Os deslocamentos para este tipo de carregamento são, nos bordos:

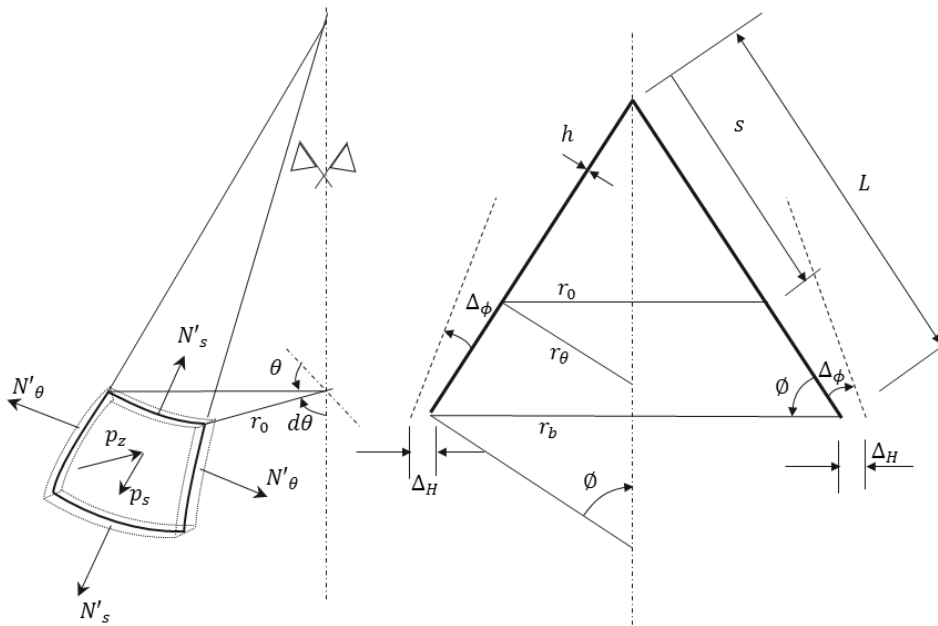
$$\Delta_H = \frac{a^2 p}{2Eh} (-1 + \nu) \sin \phi_b \quad (26)$$

$$\Delta_\phi = 0 \quad (27)$$

### 2.3.1.2 Casca cônica

Para este tipo de geometria não é conveniente incluir  $r_1$  nas equações de equilíbrio, pois  $r_1 \rightarrow \infty$  já que o ângulo  $\phi$  é constante. Neste caso, usa-se uma coordenada adicional  $s$ . A coordenada  $s$  é medida a partir do vértice e é utilizada para referenciar os pontos da superfície média ao longo da linha geratriz, como pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 – Casca cônica: geometria, esforços e definições.



Fonte: Adaptado de Sabe (1986).

em que  $L$  é o comprimento da casca cônica,  $h$  é a espessura e  $s$  é a coordenada ao longo da casca.

Sendo  $\alpha$  o ângulo de abertura da casca cônica, tem-se:

$$\phi = \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (28)$$

$$r_2 = s \cot \phi \quad (29)$$

$$r_0 = s \cos \phi \quad (30)$$

a) Peso próprio

Para a casca cônica, conforme item anterior, tem-se  $p_z = g \cdot \cos\phi$ ,  $p_s = g \cdot \sin\phi$  e  $p_\theta = 0$ , portanto:

$$R = \int_0^s 2\pi r_0 g ds = \pi g s^2 \cos\phi \quad (31)$$

$$N'_s = -\frac{g \cdot s}{2 \sin\phi} \quad (32)$$

$$N'_\theta = -g \cdot s \cot\phi \cos\phi \quad (33)$$

em que  $g = \gamma_{mat} \cdot h$ , sendo  $\gamma_{mat}$  o peso específico do material. Os deslocamentos de membrana na borda são:

$$\Delta_H = \frac{g \cdot L^2}{2E \cdot h} \left( \frac{\nu - 2 \cos^2\phi}{\tan\phi} \right) \quad (34)$$

$$\Delta_\phi = -\frac{g \cdot L}{2E \cdot h} \left[ \frac{1 + 2\nu - 2(2 + \nu) \cos^2\phi}{\sin\phi \tan\phi} \right] \quad (35)$$

b) Carga uniforme vertical em relação a projeção horizontal (q)

Para a carga uniforme vertical em relação a projeção horizontal, tem-se  $p_z = q \cdot \cos^2\phi$ ,  $p_s = q \cdot \cos\phi \sin\phi$  e  $p_\theta = 0$ , o que resulta em:

$$R = \pi s^2 q \cos^2\phi \quad (36)$$

$$N'_s = -\frac{q \cdot s}{2} \cot\phi \quad (37)$$

$$N'_\theta = -qs \cot\phi \cos\phi \quad (38)$$

em que  $d\phi = ds/r_1$ . Os deslocamentos nos bordos são:

$$\Delta_H = \frac{qL^2}{2Eh} \cos\phi \left[ \frac{\nu - 2 \cos^2\phi}{\tan\phi} \right] \quad (39)$$

$$\Delta_\phi = -\frac{qL}{2Eh} \left[ \frac{1 + 2\nu - 2(2 + \nu) \cos^2\phi}{\tan^2\phi} \right] \quad (40)$$

c) Carga de pressão uniforme (p)

Para o carregamento uniforme perpendicular à parede da casca, sabe-se que  $p_z = p$ ,  $p_s = p$  e  $p_\theta = 0$ . Logo:

$$R = 2\pi \int_0^\phi r_0 r_1 (p_z \cos \phi + p_\phi \sin \phi) d\phi = \pi p s^2 \cos^2 \phi \quad (41)$$

$$N'_s = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin \phi} = -\frac{ps}{2} \cot \phi \quad (42)$$

$$N'_\theta = -r_2 \left( p_z + \frac{N'_s}{r_1} \right) = -sp \cot \phi. \quad (43)$$

Os deslocamentos de bordo, são dados por:

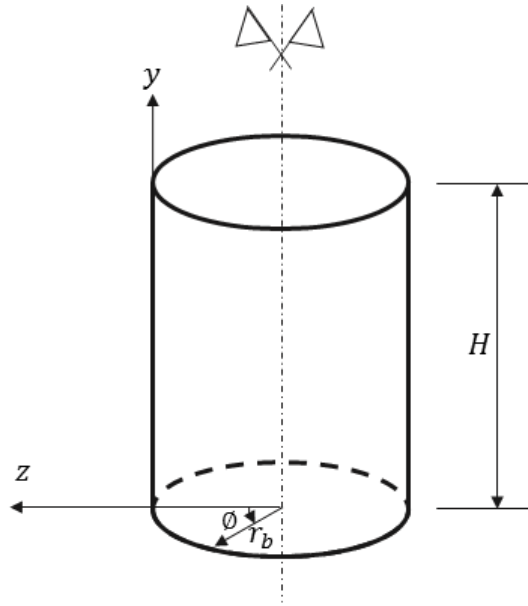
$$\Delta_H = \frac{pL^2}{2Eh} \cos \phi \left( \frac{\nu - 2}{\tan \phi} \right) \quad (44)$$

$$\Delta_\phi = \frac{pL}{2Eh} \cot^2 (1 - 2\nu) \quad (45)$$

### 2.3.1.3 Casca cilíndrica

Analogamente a casca cônica, a casca cilíndrica possui o ângulo  $\phi$  constante e igual a  $\pi/2$  e raio  $r_1 \rightarrow \infty$ . Desta forma, pode-se fazer a associação  $dy = r_1 \cdot d\phi$ . A coordenada  $y$  possui origem na base, o raio do cilindro é  $R$  e  $r_0 = r_2 \sin \phi = r_b$ , como pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Geometria da superfície média da parede cilíndrica.



Fonte: Adaptado de Sabe (1986).

em que  $H$  é a altura da casca cilíndrica.

a) Peso próprio

Para casca cilíndrica sob ação da gravidade, leva-se em consideração o peso próprio do material do cilindro. Assim, para  $p_z = 0$ ,  $p_y = \gamma_p \cdot h$  e  $p_\theta = 0$  tem-se:

$$R = 2\pi \int_y^H r \gamma_p h dy = 2\pi r h (H - y) \gamma_p \quad (46)$$

$$N'_y = -\frac{R}{2\pi r} = -h(H - y) \gamma_p \quad (47)$$

$$N'_\theta = 0 \quad (48)$$

em que  $\gamma_p$  é o peso próprio do material da parede e  $h$  é a espessura. Neste caso os deslocamentos de bordo são desprezíveis.

b) Pressão interna uniforme ( $p$ )

A casca cilíndrica da Figura 10 está submetida ao carregamento:  $p_z = -p$ ,  $p_y = 0$  e  $p_\theta = 0$ . Portanto, os esforços são obtidos pelas equações:

$$N'_y = 0 \quad (49)$$

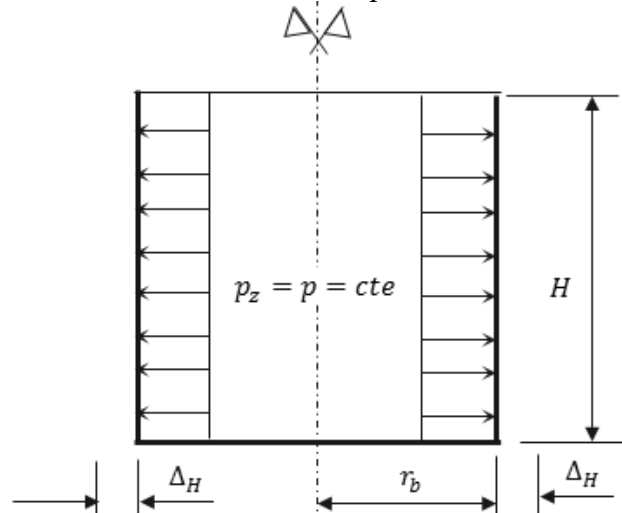
$$N'_\theta = p \cdot r \quad (50)$$

em que  $p$  é a pressão aplicada perpendicularmente a parede. Os deslocamentos na borda são dados pelas seguintes equações:

$$\Delta_H = \frac{p \cdot r^2}{E \cdot h} \quad (51)$$

$$\Delta_\phi = 0 \quad (52)$$

Figura 10 – Casca cilíndrica sob pressão interna uniforme.



Fonte: Adaptado de Sabe (1986).

### c) Variação linear da pressão interna

Para a casca cilíndrica da Figura 11, submetida a uma carga hidrostática, ou seja, com variação linear da pressão interna, pode-se notar que  $p_z = -\gamma_l(H - y)$ ,  $p_y = 0$  e  $p_\theta = 0$ , em que  $\gamma_l$  é o peso específico do líquido, tem-se os seguintes esforços e deslocamentos:

$$N'_y = 0 \quad (53)$$

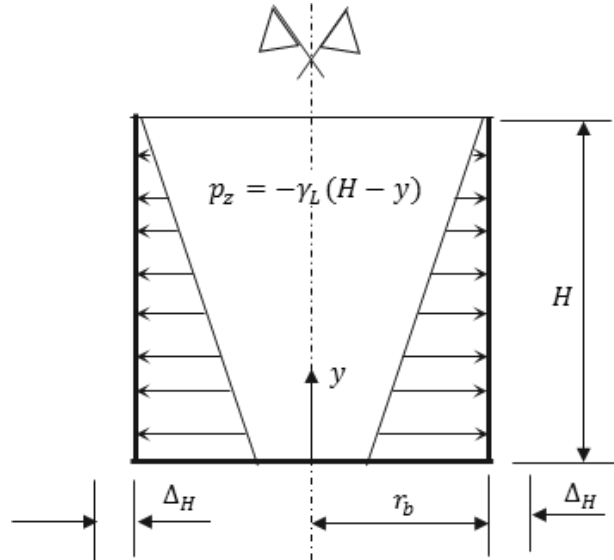
$$N'_\theta = \gamma_l(H - y)r \quad (54)$$

$$\Delta_H = \frac{\gamma_l r^2 H}{E \cdot h} \quad (55)$$



$$\Delta_{\phi} = \frac{\gamma_L r^2}{E \cdot h} \quad (56)$$

Figura 11 – Casca cilíndrica com variação linear da pressão interna.

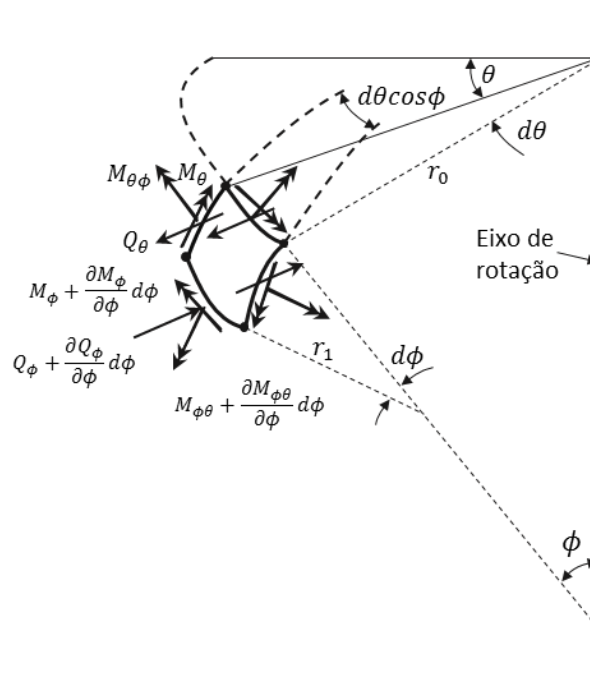


Fonte: autor (2018).

## 2.4 Teoria de Flexão

Para esta teoria, as equações gerais de equilíbrio são análogas as da Seção 2.3, exceto pela adição dos termos referentes ao esforço cortante perpendicular à superfície média e duas equações de momentos fletores, o que resulta num total de cinco equações. Esses esforços adicionais podem ser observados na Figura 12.

Figura 12 – Momentos fletores e força cisalhante para Teoria de Flexão.



Fonte: Adaptado de Billington (1982).

em que  $M_\theta$  é o momento fletor na direção  $\theta$ ,  $M_\phi$  é o momento fletor na direção  $\phi$ ,  $Q_\phi$  é o esforço cortante entre duas seções paralelas em relação ao eixo  $\phi$ ,  $Q_\theta$  é o esforço cortante entre duas seções paralelas em relação ao eixo  $\theta$ ,  $M_{\phi\theta}$  é o momento torsor na direção  $\theta$  e  $M_{\theta\phi}$  é o momento torsor na direção  $\phi$ .

Detalhe especial deve ser dado as equações de equilíbrio de momentos fletores, pois se deve incluir componentes de momento devido aos esforços cortantes. A resultante de momentos em torno do círculo paralelo, após simplificações de termos de ordem maior é:

$$-\frac{\partial(M_\phi r_0)}{\partial\phi} + M_\theta \frac{\partial r_0}{\partial\phi} + r_1 \frac{\partial M_{\theta\phi}}{\partial\theta} + Q_\phi r_0 r_1 = 0 \quad (57)$$

De forma análoga, pode-se montar a equação de equilíbrio para momentos em torno do meridiano:

$$-r_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial\theta} + M_{\theta\phi} \frac{\partial r_0}{\partial\phi} - \frac{\partial(M_{\phi\theta} r_0)}{\partial\phi} + Q_\theta r_0 r_1 = 0 \quad (58)$$

Desta forma, as cinco equações resultantes são:

$$-N_\theta r_1 \cos\phi + \frac{\partial}{\partial\phi}(N_\phi r_0) + p_\phi r_0 r_1 + r_1 \frac{\partial N_{\theta\phi}}{\partial\theta} - Q_\phi r_0 = 0 \quad (59)$$

$$r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + N_{\theta\phi} \frac{\partial r_0}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi\theta} r_0) - Q_\theta r_1 \sin \phi + p_\theta r_0 r_1 = 0 \quad (60)$$

$$r_1 \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} (Q_\phi r_0) + N_\theta r_1 \sin \phi + N_\phi r_0 + p_z r_0 r_1 = 0 \quad (61)$$

$$-\frac{\partial (M_\phi r_0)}{\partial \phi} + M_\theta \frac{\partial r_0}{\partial \phi} + r_1 \frac{\partial M_{\theta\phi}}{\partial \theta} + Q_\phi r_0 r_1 = 0 \quad (62)$$

$$-r_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + M_{\theta\phi} \frac{\partial r_0}{\partial \phi} - \frac{\partial (M_{\phi\theta} r_0)}{\partial \phi} + Q_\theta r_0 r_1 = 0 \quad (63)$$

Aplicando as simplificações devido ao carregamento axissimétrico, apresentadas na Eq. (2), as cinco equações anteriores se resumem em três:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (N_\phi r_0) - N_\theta r_1 \cos \phi - Q_\phi r_0 + p_\phi r_0 r_1 = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (Q_\phi r_0) + N_\theta r_1 \sin \phi + N_\phi r_0 + p_z r_0 r_1 = 0 \quad (65)$$

$$-\frac{\partial (M_\phi r_0)}{\partial \phi} + M_\theta r_1 \cos \phi + Q_\phi r_0 r_1 = 0 \quad (66)$$

Seguindo o procedimento proposto por BILLINGTON (1982), tem-se:

$$N_\theta = K \left( \frac{v}{r_0} \cos \phi - \frac{w}{r_2} + \frac{\nu}{r_1} \frac{dv}{d\phi} - \frac{\nu w}{r_1} \right) \quad (67)$$

$$N_\phi = K \left( \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\phi} - \frac{w}{r_1} + \frac{\nu \nu}{r_0} \cos \phi - \frac{\nu w}{r_2} \right) \quad (68)$$

$$M_\theta = -D \left[ \left( \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \frac{\cos \phi}{r_0} + \frac{\nu}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \right] \quad (69)$$

$$M_\phi = -D \left[ \frac{d}{r_1 d\phi} \left( \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) + \nu \left( \frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \frac{\cos \phi}{r_0} \right] \quad (70)$$

com  $K = Eh/(1-\nu^2)$  definido como a rigidez extensional da casca e  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  é a rigidez à flexão.

Por fim, nota-se que as equações acima formam um sistema determinado com sete equações e sete incógnitas:  $N_\theta, N_\phi, M_\theta, M_\phi, Q_\phi, w$  e  $\nu$ . A solução desse sistema de equações é conhecida para alguns casos particulares, enquanto que, em outros, a complexidade da referida solução exige a aplicação de procedimentos aproximados. Dentre tais procedimentos, cita-se a aproximação de Geckeler, como descrito a seguir.

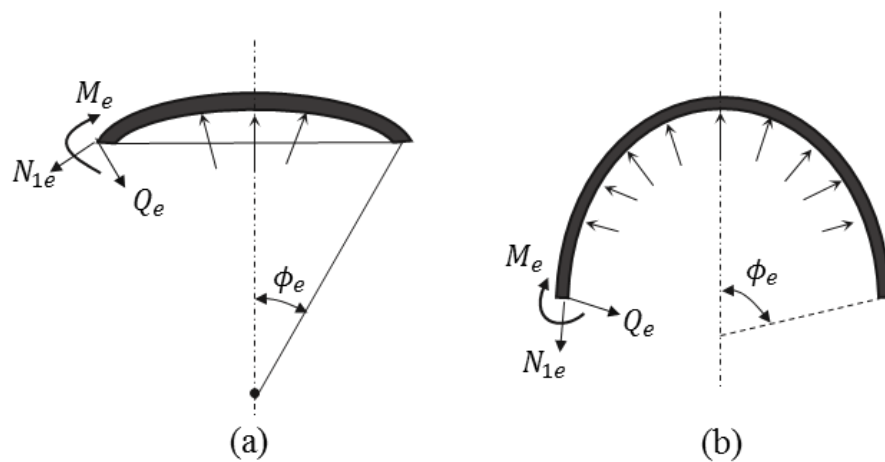
#### 2.4.1 Aproximação de Geckeler

A aproximação de Geckeler é adotada como uma alternativa para análise de flexão de uma casca de revolução sujeita a carregamentos de bordo axissimétricos. A ideia geral consiste em aproximar o comportamento de cascas de revolução de geometrias mais gerais ao de cascas cilíndricas. Essa analogia ocorre devido à facilidade que algumas cascas possuem de amortecer os esforços e deslocamentos em regiões próximas as suas bordas, pois as faixas segundo os paralelos se opõem a deformação dos meridianos, de forma a evitar um aumento radial.

Esse amortecimento é máximo nas cascas cilíndricas, já que a deformação nas geratrizes (que correspondem aos meridianos da cúpula) provoca variações no raio dos paralelos. Nas cúpulas, é máxima quando o ângulo de abertura da borda é  $90^\circ$  (cúpula esférica), ou seja, caso no qual, em regiões próximas a borda, existe maior semelhança entre a cúpula e um cilindro. Quanto maior a redução no ângulo de abertura, menor é o amortecimento provocado pelos paralelos e maiores são as tensões e deformações segundo o meridiano.

Em uma casca rasa como a da Figura 13a), o deslocamento radial e a deformação circunferencial são pequenos próximos ao bordo carregado. Portanto, as deformações causadas pelos momentos fletores diminuem lentamente e sua influência pode se estender sobre praticamente toda a casca. Na Figura 13b), a inclinação da normal  $\Delta_\phi$  é grande. Assim, uma tensão circunferencial considerável ocorre próximo ao bordo carregado a medida que a casca flexiona de forma axissimétrica. Como consequência, as deformações de flexão diminuem rapidamente e quase desaparecem em uma pequena distância da borda.

Figura 13 – Cascas de revolução: a) pequena curvatura e b) grande curvatura.



Fonte: Adaptado de Ventsel e Krauthammer (2001).

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), inicialmente esse método foi desenvolvido por Geckeler (1926) e Reissner (1912) para cascas esféricas e então generalizado para cascas de revolução com meridiano de forma arbitrária por Meissner (1913).

Ainda segundo Ventsel e Krauthammer (2001), este método aproximado tem as seguintes hipóteses:

- a) *Todas as funções que caracterizam os componentes de tensões e deformações nas proximidades da borda da casca, bem como suas primeiras derivadas, são pequenas quando comparadas com suas derivadas de ordem maior. Isso ocorre devido ao fato que estas funções contêm multiplicadores do tipo  $e^{-\beta\phi}$ , em que  $\phi$  é o ângulo medido a partir do bordo de interesse e  $\beta$  algum parâmetro. Ao diferenciar essas funções, o parâmetro  $\beta$  aparece sempre na forma de multiplicador. Desde que essas funções decrescem rapidamente, o valor do parâmetro  $\beta$  é grande. Portanto, valores das primeiras derivadas são suficientemente maiores que os valores das próprias funções, bem como as segundas derivadas são maiores que as primeiras, e assim por diante.*
- b) *Os raios de curvatura  $r_1$  e  $r_2$  são considerados constantes nas regiões próximas ao bordo da casca. A rigor, isto acontece apenas para cascas esféricas. Para cascas de outros formatos esta hipótese é assumida para aproximar o seu formato de uma casca esférica nas proximidades da borda.*

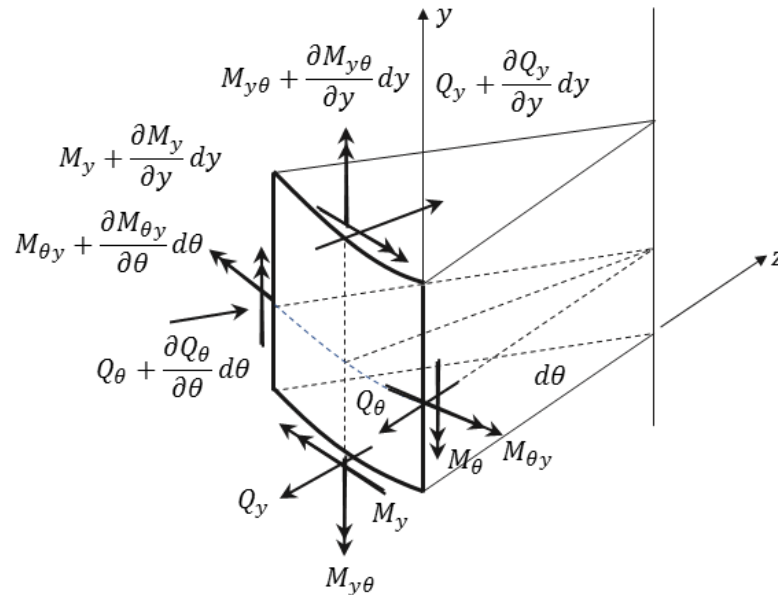
A solução da teoria de flexão para casca cilíndrica submetida aos hiperestáticos de bordo, e as aproximações de Geckeler para casca esférica e cônica são apresentadas na Seção 2.4.2.

## 2.4.2 Casos particulares

### 2.4.2.1 Casca cilíndrica

Para cascas cilíndricas é feita uma mudança de sistema, no qual a coordenada  $\phi$  é substituída pela  $y$ , de acordo com a Figura 14,  $M_y$  é o momento fletor ao longo da direção  $y$  e  $M_{\theta y}$  é o momento torsor na direção  $y$ .

Figura 14 – Esforços e sistemas de coordenadas para casca cilíndrica.



Fonte: Adaptado de Billington (1982).

Para uma casca cilíndrica com carregamento axissimétrico tem-se:

$$N_y = K \left( \frac{dv}{dy} - \nu \frac{w}{r} \right) \quad (71)$$

$$N_\theta = K \left( -\frac{w}{r} + \nu \frac{dv}{dy} \right) \quad (72)$$

$$M_y = -D \frac{d\phi_y}{dy} \quad (73)$$

Substituindo  $N_y = 0$ ,  $dM_y/dy = Q_y$  e  $\phi_y = dw/dy$  na Eq. (65):

$$D \frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{Eh}{r^2} w = p_z \quad (74)$$

Fazendo

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4r^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \quad (75)$$

a Eq. (74) torna-se:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_z}{D} \quad (76)$$

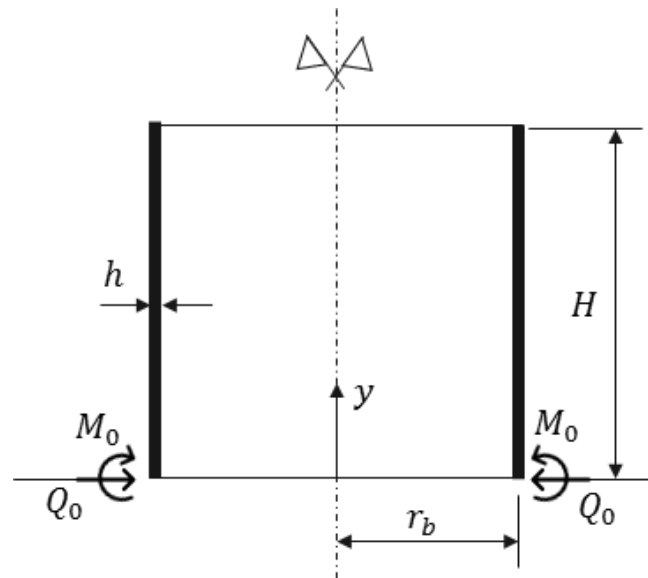
cuja solução geral é dada por:

$$w = e^{\beta y} (C_1 \cos \beta y + C_2 \sin \beta y) + e^{-\beta y} (C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) + f(y) \quad (77)$$

em que  $w$  é a equação da linha elástica da parede do cilindro,  $f(y)$  é a solução particular,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração dependentes das condições de contorno do cilindro: dois deslocamentos na borda superior e dois na borda inferior e  $\beta$  é a constante que corresponde a uma rigidez relativa entre os anéis e as vigas verticais que formam a parede

Em uma casca cilíndrica submetida a ações de hiperestáticos conforme a Figura 15, desde que tais forças axissimétricas sejam auto equilibradas, pode-se notar que seus efeitos ocorrem nas regiões próximas as bordas. Isso acontece porque existe um amortecimento de solicitações e deformações a medida que se distancia da borda carregada. Esse amortecimento acontece devido à ação dos paralelos absorver grande parte das tensões que ocorrem segundo os meridianos.

Figura 15 – Casca cilíndrica submetida aos hiperestáticos de bordo.



Fonte: autor (2018).

em que  $M_0$  e  $Q_0$  são os hiperestáticos de bordo referentes ao momento fletor e ao esforço cortante respectivamente.

Se o cilindro é longo o suficiente, então os efeitos dos hiperestáticos aplicados em um bordo são desprezíveis no outro bordo, e, portanto, cada bordo pode ser tratado independentemente. Alguns autores formularam equações para o cálculo da dependência de bordo. Segundo Hoefakker (2010), para  $h/r \ll 1/50$  essa relação é dada por:

- Se  $H \geq 0,339r$  não existe dependência de bordo.
- Se  $H < 0,339r$  existe a dependência de bordo.

Segundo Venturini (1977), a independência de bordo existe quando a inequação abaixo for verdadeira:

$$\frac{\nu}{\beta} > 5 \quad (78)$$

Enquanto Hauso (2014) sugere a seguinte inequação para não existir dependência de bordo:

$$H > \frac{\pi}{\beta}. \quad (79)$$



Para casos nos quais existam independência de bordo, a Eq. (77) é simplificada para:

$$w = e^{-\beta y} (C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) + f(y) \quad (80)$$

Para uma casca submetida unicamente aos hiperestáticos de bordo, conforme a Figura 15, os deslocamentos e esforços no bordo são dados pelas relações apresentadas na Tabela 1 (BILLINGTON, 1982).

Tabela 1 – Deslocamentos e esforços da Teoria de Flexão em cascas cilíndricas

	Parcela referente a $Q_0$	Parcela referente a $M_0$
$\Delta_H^{(b)}$	$2\beta \frac{r^2}{Eh} Q_0$	$-2\beta^2 \frac{r^2}{Eh} M_0$
$\Delta_\phi^{(b)}$	$-2\beta^2 \frac{r^2}{Eh} Q_0$	$4\beta^3 \frac{r^2}{Eh} M_0$
$N_\theta$	$-2\beta r Q_0 \theta(\beta y)$	$2\psi(\beta y) \beta^2 r M_0$
$M_y$	$-\frac{\zeta(\beta y)}{\beta} Q_0$	$\phi(\beta y) M_0$
$M_\theta$	$-\nu \frac{\zeta(\beta y)}{\beta} Q_0$	$\nu \phi(\beta y) M_0$
$N_y$	$-\psi(\beta y) Q_0$	$-2\zeta(\beta y) \beta M_0$

Fonte: autor (2018).

em que:

$$\phi(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y + \sin \beta y) \quad (81)$$

$$\psi(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y - \sin \beta y) \quad (82)$$

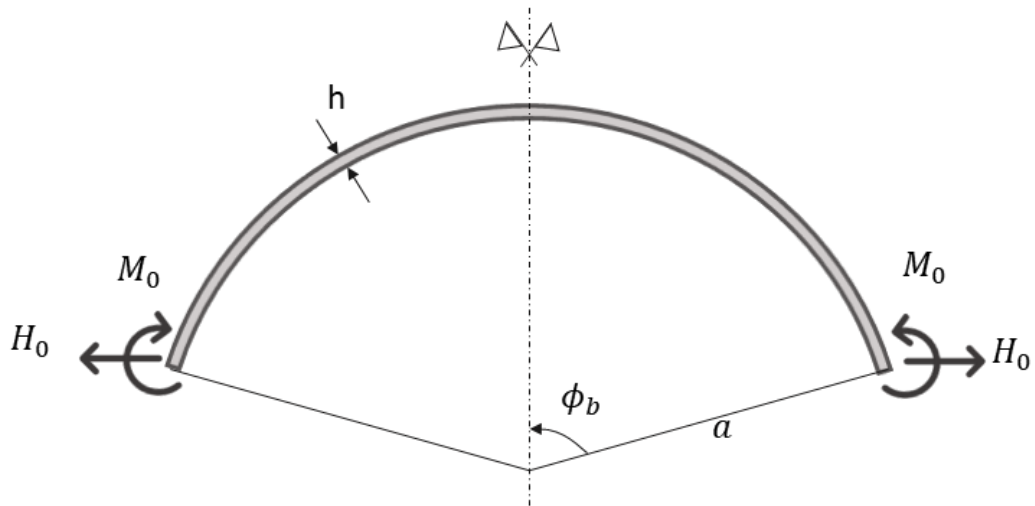
$$\theta(\beta y) = e^{-\beta y} (\cos \beta y) \quad (83)$$

$$\zeta(\beta y) = e^{-\beta y} (\sin \beta y) \quad (84)$$

### 2.4.2.2 Casca esférica

As forças resultantes, momento fletores e deslocamentos de bordo da Teoria de Flexão para cascas esféricas podem ser obtidos a partir de aproximação de Geckeler com base nas expressões obtidas para cilindros na Seção 2.4.2.1, desde que a inclinação do bordo da casca esférica seja levada em consideração para permitir o uso da aproximação. Sendo  $\phi_b$  a inclinação do bordo de acordo com a Figura 16, o esforço  $Q_0$  utilizado na Tabela 1 se torna  $H_0 \sin \phi_b$  e o deslocamento radial  $\Delta_H^{(b)} = w$  se torna  $\Delta_H^{(b)} = w \cdot \sin \phi_b$ .

Figura 16 – Casca esférica submetida a carregamentos nos bordos.



Fonte: autor (2018).

em que  $H_0$  e  $M_0$  são os hiperestáticos de bordo relativos a uma força horizontal e a um momento fletor, respectivamente.

Dessa forma, os esforços e deslocamentos para a casca esférica são mostrados na Tabela 2 (BILLINGTON, 1982):

Tabela 2 – Esforços e deslocamentos da Teoria de Flexão para casca esférica.

	Parcela referente a $H_0$	Parcela referente a $M_0$
$\Delta_H^{(b)}$	$2\beta \frac{a^2}{Eh} H_0 \sin^2 \phi_b$	$2\beta^2 \frac{a^2 \sin \phi_b}{Eh} M_0$
$\Delta_\phi^{(b)}$	$2\beta^2 \frac{a^2}{Eh} H_0 \sin \phi_b$	$4\beta^3 \frac{a^3}{Eh} M_0$
$N_\theta$	$2\beta a H_0 \sin(\phi_b) \theta(\beta y)$	$-2(\beta y) \beta^2 a M_0$

$N_\phi$	$\psi H_0 \sin \phi_b \cot(\phi_b - \psi)$	$-2e^{-\beta y} (\sin \beta y) \beta M_0 \cot(\phi_c - \psi)$
$M_\phi$	$\frac{e^{-\beta y} (\sin \beta y)}{\beta} H_0 \sin \phi_b$	$e^{-\beta y} (\cos \beta y + \sin \beta y) M_0$
$M_\theta$	$\nu \frac{e^{-\beta y} (\sin \beta y)}{\beta} H_0 \sin \phi_b$	$\nu e^{-\beta y} (\cos \beta y + \sin \beta y) M_0$

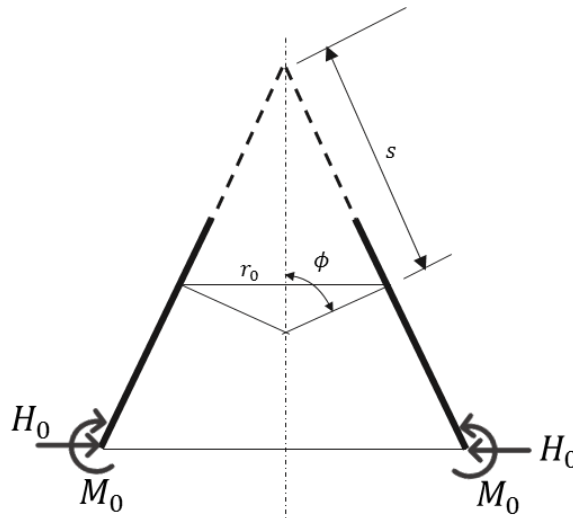
Fonte: autor (2018).

em que  $\beta^4 = 3(1-\nu^2)/a^2 h^2$ .

#### 2.4.2.3 Casca cônica

De acordo com a Figura 17, para uma casca cônica é mais conveniente adotar a coordenada  $s$  para a distância ao longo da coordenada meridiana, visto que  $\phi$  é constante, analogamente a Seção 2.3.1.2. Utilizando a aproximação de Geckeler, chega-se as expressões da Tabela 3 (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001).

Figura 17 – Casca cônica submetida a carregamentos de bordo.



Fonte: autor (2018).

Tabela 3 – Esforços e deslocamentos da Teoria de Flexão para casca cônica.

	Parcela referente a $Q_0$	Parcela referente a $M_0$
$\Delta_H^{(b)}$	$2\beta \frac{r_2^2}{Eh} Q_0 \sin \phi_b + \nu \frac{r_2^2}{Eh} Q_0 \cos \phi_b$	$-2\beta^2 \frac{r_2^2}{Eh} M_0 \sin \phi_b$

$\Delta_\phi^{(b)}$	$-2\beta^2 \frac{r_2^2}{Eh} Q_0$	$4\beta^3 \frac{r_2^2}{Eh} M_0$
$N_\theta$	$-2\beta r_2 Q_0 \theta(\beta s)$	$2\psi(\beta s) \beta^2 r_2 M_0$
$M_s$	$-\frac{\zeta(\beta s)}{\beta} Q_0$	$\phi(\beta s) M_0$
$M_\theta$	$-\nu \frac{\zeta(\beta s)}{\beta} Q_0$	$\nu \phi(\beta s) M_0$
$N_s$	$-\psi(\beta s) Q_0 \cot \phi$	$-2\zeta(\beta s) \beta M_0 \cot \phi$

Fonte: autor (2018).

em que  $Q_0 = H_0 \sin \phi$  e  $\theta(\beta s)$ ,  $\phi(\beta s)$ ,  $\psi(\beta s)$  e  $\zeta(\beta s)$  são definidos nas Eqs. de (81) a (84), substituindo o  $y$  por  $s$ .

### 3 FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA PLACAS CIRCULARES

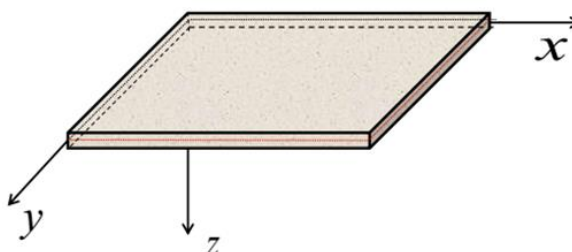
Placas são elementos estruturais com superfície média plana, apresentando comprimentos e largura grandes em relação a sua espessura. São solicitadas predominantemente por cargas transversais a superfície média.

As propriedades à flexão de uma placa dependem principalmente da sua espessura quando comparada as outras dimensões. Assim, existem teorias distintas para placas de acordo com a sua espessura e sua deflexão. Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), em placas finas de pequenas deflexões, essas deflexões  $w$  são reduzidas quando comparadas a sua espessura  $h$ , e uma aproximação satisfatória para a Teoria de Flexão pode ser aplicada a partir das seguintes hipóteses:

- I. Não existem deformações específicas no plano médio da placa;
- II. Todo segmento de reta normal à superfície média da placa antes da deformação permanece reto e normal à superfície elástica depois da deformação e, além disto, não apresenta variação de comprimento;
- III. As tensões normais na direção transversal ao plano médio da placa podem ser pequenas em comparação com os outros componentes de tensões, podendo, portanto, serem desconsideradas.

Usando essas hipóteses, todas as componentes de tensões podem ser expressas em função da deflexão  $w$ , a qual é função de duas coordenadas do plano da placa. Essa função satisfaz uma equação diferencial parcial linear, a qual, junto as condições de contorno, definem  $w$ , que ocorre segundo o eixo  $z$ , como ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – Placa e sistema coordenado cartesiano



Fonte: Adaptado de Marques (2016).

A partir das relações deformação-curvatura e das tensões e esforços internos na placa, é possível obter a deflexão  $w$  pela equação diferencial para placas delgadas baseada nas hipóteses de Kirchhoff (UGURAL, 1981):

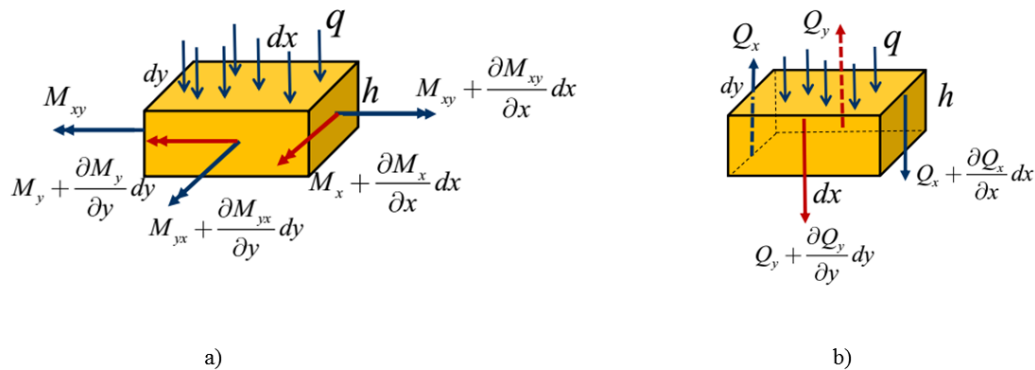
$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (85)$$

em que  $D$  é a rigidez à flexão da placa,  $q(x, y)$  é a carga distribuída por unidade de área e  $\nabla$  é o operador bi-harmônico:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (86)$$

Os esforços em função da deflexão (ver Figura 19) são dados pelas Eqs. (87) a (92) (UGURAL, 1981):

Figura 19 – Esforços em um elemento diferencial de uma placa: a) componentes de momentos fletores e b) componentes de esforço cortante.



Fonte: Adaptado de Marques (2016).

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (87)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (88)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (89)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} \quad (90)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (91)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (92)$$

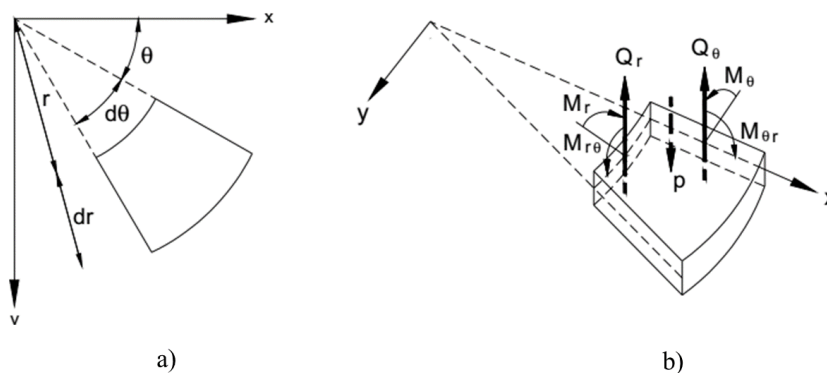
em que  $Q_x, Q_y, M_{xy}, M_y$  e  $M_x$  são os esforços cortantes perpendiculares a superfície média, o momento torção na direção  $y$  e os momentos fletores na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente.

As placas tratadas neste trabalho serão, essencialmente, placas circulares e constituirão, na maioria dos casos, as bases de reservatórios e vasos de pressão, estando submetidas a esforços axissimétricos.

### 3.1 Placas circulares com carregamento axissimétrico

Neste caso, geralmente adota-se o sistema de coordenadas polar, devido a simetria da geometria e do carregamento, conforme ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Sistema de coordenadas polares para placas.



Fonte: autor (2018).

em que  $Q_r$  e  $Q_\theta$  são os esforços cortantes perpendiculares a placa circular,  $M_r$  e  $M_\theta$  são os momentos fletores nas direções  $r$  e  $\theta$  e  $M_{r\theta}$  é o momento torsor na direção  $\theta$ . O sistema de coordenadas polares se relaciona com o cartesiano pelas equações (93) a (96):

$$x = r \cos \theta \quad (93)$$

$$y = r \sin \theta \quad (94)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (95)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (96)$$

Segundo Ugural (1981), a equação governante diferencial para placas em coordenadas polares e os esforços são dados por:

$$\nabla^4 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r)}{D} \quad (97)$$

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (98)$$

$$M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (99)$$

$$M_{r\theta} = -(1-\nu) D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (100)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \quad (101)$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \quad (102)$$

A deflexão  $w$  de uma placa irá depender da posição  $r$  apenas quando o carregamento aplicado e as condições de apoio forem independentes do ângulo  $\theta$ . Neste caso, apenas  $M_r$ ,  $M_\theta$  e  $Q_r$  agem em um elemento de placa circular.

Devido a simetria do carregamento e dos apoios, a Eq. (97) torna-se:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D} \quad (103)$$

E os esforços são dados por:

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (104)$$



$$M_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (105)$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = -D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (106)$$

A deflexão  $w$  pode ser obtida por integrações sucessivas quando  $q(r)$  é dado. Na seção a seguir serão apresentados casos usuais de carregamentos e vinculações para placas axissimétricas.

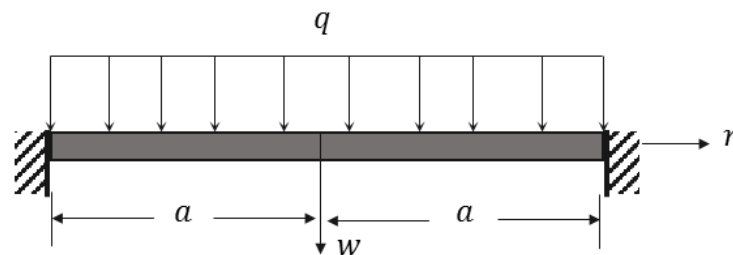
### 3.2 Casos particulares

Nesta seção são apresentadas particularizações de placas circulares de acordo com o carregamento ao qual estão submetidas.

#### 3.2.1 Placa circular engastada com carregamento distribuído uniforme

Este caso trata de uma placa delgada circular, submetida a um carregamento uniformemente distribuído em toda sua superfície de intensidade  $q$ , conforme é apresentado na Figura 21. As condições de contorno são deflexão e rotação iguais a zero no engaste ( $r = a$ ) e rotação igual a zero no centro da placa ( $r = 0$ ) devido à simetria.

Figura 21 – Placa circular engastada com carregamento uniformemente distribuído.



Fonte: autor (2018).

As equações para deflexão e esforços em função do carregamento e do raio, são (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959):

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (107)$$

$$M_r = \frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)] \quad (108)$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} [a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (109)$$

A deflexão máxima ocorre no centro ( $r = 0$ ):

$$w_{máx} = \frac{q}{64D} a^2 \quad (110)$$

e os momentos fletores no engaste:

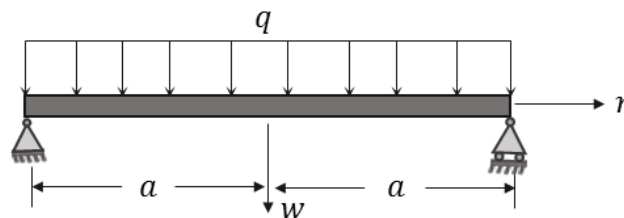
$$(M_r)_{r=a} = -\frac{qa^2}{8} \quad (111)$$

$$(M_\theta)_{r=a} = -\frac{\nu qa^2}{8} \quad (112)$$

### 3.2.2 Placa circular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído

Este caso trata de uma placa circular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído. Diferentemente do caso anterior, neste caso a rotação nos apoios é diferente de zero. Dessa forma, adota-se como condições de contorno a deflexão e momentos fletores iguais a zero nos apoios ( $r = a$ ), e a rotação igual a zero no centro de placa ( $r = 0$ ). A Figura 22 ilustra uma placa simplesmente apoiada.

Figura 22 – Placa circular simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.



Fonte: autor (2018).

A deflexão e os momentos em qualquer ponto da placa e os seus valores máximos que ocorrem no centro são (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959):

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right) \quad (113)$$

$$w_{\max} = \frac{q(5+\nu)}{64D(1+\nu)} a^4 \quad (114)$$

$$M_r = \frac{q}{16} (3+\nu) (a^2 - r^2) \quad (115)$$

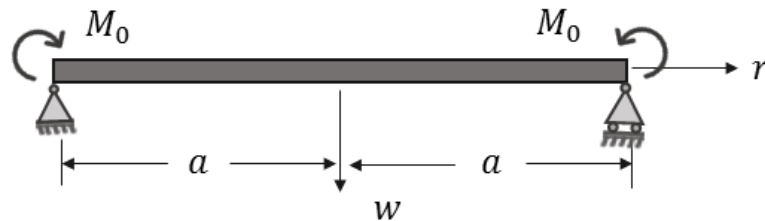
$$M_t = \frac{q}{16} [a^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)] \quad (116)$$

$$(M_r)_{r=0} = (M_t)_{r=0} = \frac{q}{16} (3+\nu) a^2 \quad (117)$$

### 3.2.3 Placa circular simplesmente apoiada submetida a momentos uniformes radialmente distribuídos ao longo da borda

Este caso trata de uma placa circular simplesmente apoiada em seu perímetro, submetida a momentos fletores uniformes ( $M_0$ ) distribuídos radialmente ao longo da borda, conforme mostra a Figura 23.

Figura 23 – Placa circular simplesmente apoiada com momentos uniformes radialmente distribuídos ao longo da borda



Fonte: autor (2018).

Para o caso da Figura 23 as condições de contorno são:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad (118)$$

$$w \Big|_{r=a} = 0 \quad (119)$$

$$M_r \Big|_{r=a} = M_0 \quad (120)$$

$$Q_r = 0 \quad (121)$$

Utilizando as condições de contorno na Eq. (106) e resolvendo o sistema de equações para as constantes de integração, obtém-se:

$$w = \frac{M_0}{2D(1+\nu)}(a^2 - r^2) \quad (122)$$

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{M_0}{2D(1+\nu)}a^2 \quad (123)$$

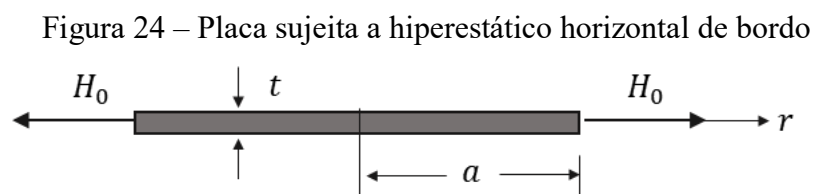
$$M_r = M_0 \quad (124)$$

$$M_\theta = M_0 \quad (125)$$

### 3.2.4 Placas de fundo de reservatórios

As placas de fundo de reservatório, além de estarem submetidas as ações e vinculações que provocam deslocamentos transversais ao plano médio (apresentados nas seções anteriores), podem apresentar um pequeno deslocamento horizontal devido aos hiperestáticos resultantes da sua ligação com os demais elementos que formam a estrutura.

A Figura 24 apresenta uma seção de uma placa circular sujeita a hiperestáticos de bordo resultantes de tais ligações.



em que  $t$  é a espessura e  $a$  o raio da placa.

O deslocamento horizontal provocado pelo hiperestático  $H_0$  é dado por Roark (1975 *apud* VICHARE e INAMDAR, 2010):

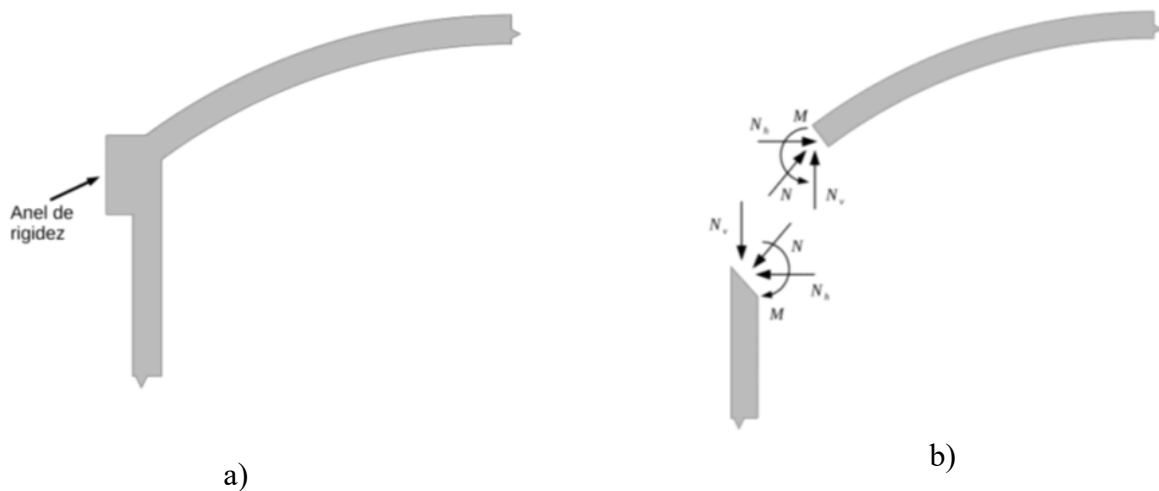
$$\Delta_h^{H_0} = \frac{(1-\nu)r}{Et} H_0 \quad (126)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do material da placa,  $r$  é a posição em que se deseja obter o deslocamento,  $t$  é a espessura e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson da placa.

#### 4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA ANÉIS DE RIGIDEZ

O anel de rigidez é um elemento estrutural comumente utilizado em estruturas de reservatório com a finalidade de minimizar a transmissão de esforços entre os demais elementos. Um exemplo dessa ação é sua utilização na ligação entre uma cúpula de cobertura e a parede para reservatórios cilíndricos (Figura 25 a)), em que o elemento de anel tem a finalidade de enrijecer a região para reduzir as cargas inclinadas e os momentos fletores (Figura 31 b)) transmitidos pela cúpula que provocariam grandes deformações na borda superior da parede.

Figura 25 – a) Ações da cúpula na parede e b) utilização do anel de rigidez

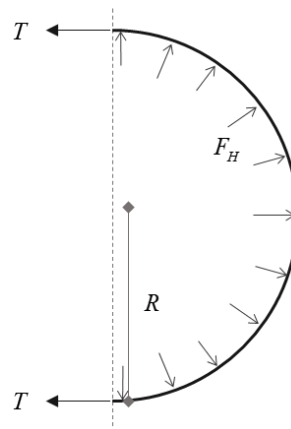


Fonte: Adaptado de Silva (2017).

Na Figura 25,  $M$  e  $N$  são os momentos fletores e os esforços normais transferidos da cúpula para parede na ligação.

As ações transferidas pela cúpula provocam forças radiais no anel, e a partir dessas surgem tensões normais, como mostra a Figura 26.

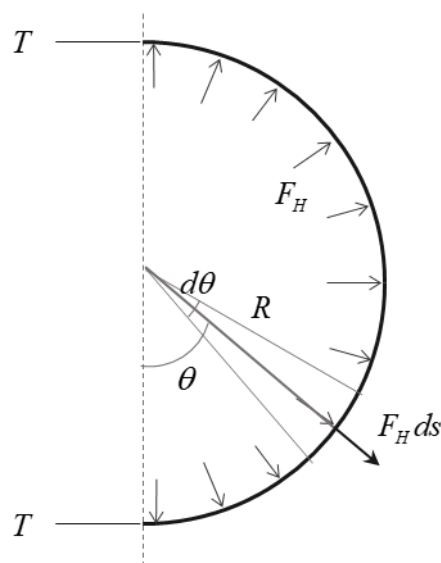
Figura 26 – Força radiais existentes no anel de rigidez



Fonte: autor (2018).

A resultante  $T$  surge devido as tensões normais na seção transversal do anel. Para o cálculo de sua intensidade é necessário encontrar a resultante das forças  $F_H$  com base na Figura 27.

Figura 27 – Resultante do carregamento radial no anel



Fonte: autor (2018).

Na figura acima,  $ds$  é o comprimento do arco de ângulo  $d\theta$ . Dessa forma, a resultante  $T$  é dada por:

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_H ds \cdot \sin \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_H \cdot R \cdot d\theta \cdot \sin \theta = F_H \cdot R \cdot \cos 0 \quad (127)$$

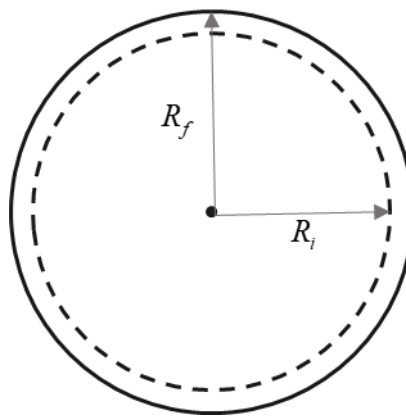
$$T = F_H R \quad (128)$$

A deformação circunferencial elástica provocada pela força horizontal  $F_H$  pode ser obtida por:

$$\varepsilon_\theta = \frac{T}{E \cdot A_A} = \frac{F_H R}{E \cdot A_A} \quad (129)$$

na qual  $A_A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de Young. A Figura 28 mostra o deslocamento horizontal sofrido pelo eixo do anel de rigidez.

Figura 28 – Deslocamento radial do eixo do anel de rigidez.



Fonte: autor (2018).

Na Figura 28, tem-se que  $R_f$  e  $R_i$  são o raio final e inicial, respectivamente.

A deformação na direção radial sofrida pelo anel é:

$$\varepsilon_r = \frac{R_f - R_i}{R_i} = \frac{\frac{L_f}{2\pi} - \frac{L_i}{2\pi}}{\frac{L_i}{2\pi}} = \frac{\Delta L}{L_i} \quad (130)$$

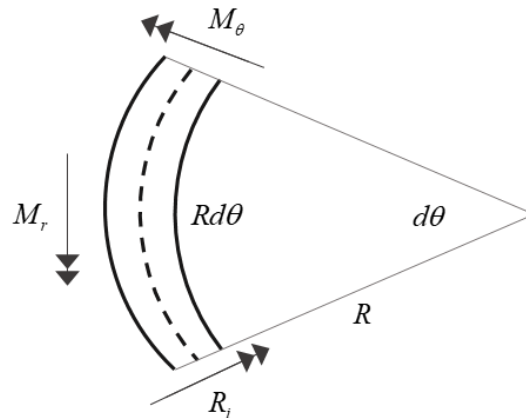
Pela equação acima, nota-se que a deformação radial é dada pela variação no comprimento da circunferência dividida pelo comprimento inicial da circunferência, ou seja, a deformação radial é igual a deformação circunferência. Por este motivo, o deslocamento horizontal é:

$$\Delta_h^{F_H} = R \cdot \varepsilon_r = \frac{F_H \cdot R^2}{E \cdot A_A} \quad (131)$$

Os momentos aos quais o anel está submetido são mostrados na Figura 29.



Figura 29 – Momentos fletores atuantes no anel de rigidez



Fonte: Adaptado de Hauso, (2014).

Na Figura 29,  $M_r$  corresponde ao momento tursor transmitido pelos elementos conectados ao anel, e  $M_\theta$  o momento fletor na seção do anel. O equilíbrio dos momentos em relação ao eixo tangente, conforme mostra a Figura 29, leva a:

$$M_r \cdot R \cdot d\theta - M_\theta \cdot d\theta = 0 \Rightarrow M_\theta = M_r \cdot R \quad (132)$$

Tal momento provoca uma tensão na seção do anel, dada por:

$$\sigma = \frac{M_\theta y}{I_A} \quad (133)$$

em que  $I_A$  é o momento de inércia do anel em relação ao seu centroide e  $h_A$  a altura da seção transversal. Em consequência, a deformação provocada pelo momento é:

$$\varepsilon_\theta = \frac{M_\theta \frac{h_A}{2}}{EI_A} = \frac{RM_\theta h_A}{2EI_A} \quad (134)$$

Analogamente para a força horizontal, as deformações radial e circunferencial são iguais, portanto, o deslocamento horizontal provocado por  $M_r$  é:

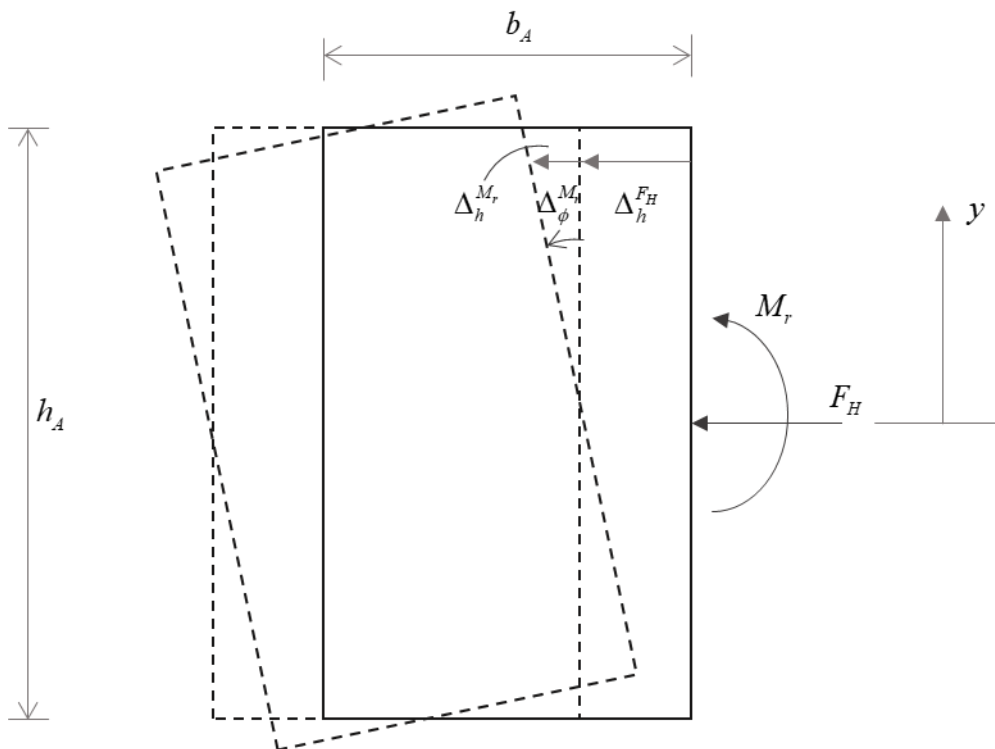
$$\Delta_h^{M_r} = R \cdot \varepsilon_r = \frac{R^2 h_A}{2EI_A} M_r \quad (135)$$

A rotação provocada por  $M_r$  é constante e dada pela derivada da deformação radial em relação a  $y$ , o que resulta em:

$$\Delta_{\phi}^{M_r} = \frac{R^2}{EI_A} M_r \quad (136)$$

As Eqs. (131), (135) e (136) apresentam os deslocamentos totais e a rotação sofrida pelo anel de rigidez, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Deslocamento radial total e rotação do anel de rigidez.



Fonte: adaptado de Hauso (2014).

Na Figura 30,  $b_a$  é a largura e  $h_a$  a altura do anel.

## 5 FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA ESTRUTURAS AXISSIMÉTRICAS

Neste capítulo é apresentada uma formulação para análise de estruturas axissimétricas em elementos finitos. De uma maneira geral, pode-se dizer que a ideia central do Método dos Elementos Finitos (MEF) é subdividir o domínio do problema em subdomínios nos quais o campo da variável fundamental (em análise mecânica, o deslocamento) pode ser aproximado por uma combinação linear de funções preestabelecidas, normalmente em formato polinomial. Nas análises mecânicas, os coeficientes dessa combinação linear são associados aos graus de liberdade do elemento, geralmente colocados em função dos valores dos deslocamentos e rotações nos vértices, também conhecidos por nós, e seus valores podem ser determinados pela minimização de um funcional associado à equação diferencial que descreve o fenômeno físico.

Neste trabalho será dada ênfase à formulação específica para estruturas axissimétricas, principalmente no tocante ao elemento finito unidimensional utilizado. Dessa forma, na seção a seguir é apresentado o procedimento para obtenção da matriz de rigidez local e global do problema proposto utilizando o elemento retilíneo.

### 5.1 Formulação do método dos elementos finitos para análise estática de estruturas

É possível obter a formulação geral do método dos elementos finitos a partir da forma geral do funcional que representa a energia potencial total, desde que se tenha um sistema conservativo. Para o meio contínuo, elástico linear e estático adotam-se as seguintes hipóteses (VAZ, 2010):

- a) O contínuo é idealizado por um conjunto de elementos discretos ligados por vértices (nós).
- b) A matriz de interpolação do elemento ( $\mathbf{N}^e$ ) é aquela cujos termos são funções conhecidas como funções de interpolação ou de forma, que fornecem os campos de deslocamento ( $\mathbf{u}^e$ ) no interior dos elementos em função dos deslocamentos nodais do elemento ( $\mathbf{d}^e$ ):  $\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e$ .
- c) O vetor das deformações no interior do elemento ( $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ) pode ser obtido por derivação dos campos de deslocamento ( $\mathbf{u}^e$ ) em relação às coordenadas do sistema, a partir da expressão  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{u}^e$ , na qual  $\mathbf{L}^e$  é uma matriz de operadores diferenciais.

- d) As tensões no interior do elemento ( $\boldsymbol{\sigma}^e$ ) são obtidas em função das deformações pelas relações constitutivas  $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , na qual  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva.
- e) As matrizes de rigidez ( $\mathbf{K}^e$ ) e as cargas nodais equivalentes de cada elemento ( $\mathbf{f}^e$ ) são combinadas adequadamente de forma a montar a matriz de rigidez global ( $\mathbf{K}^g$ ) e o vetor de cargas nodais ( $\mathbf{f}^g$ ) da estrutura.

A energia potencial total ( $\Pi$ ) de um sistema conservativo é definida como:

$$\Pi = U + W_p \quad (137)$$

em que  $U$  é a energia de deformação, ou seja, aquela que traz a estrutura de volta à configuração inicial caso as forças externas sejam retiradas da estrutura e  $W_p$  é o trabalho potencial, ou seja, aquele que seria utilizado caso a estrutura voltasse a sua configuração inicial e as cargas permanecessem atuando sobre ela. Assim,  $\Pi$  é a energia total necessária para trazer de volta a estrutura a sua configuração inicial com as cargas atuando sobre ela. A energia de deformação da estrutura e o trabalho potencial das forças externas são dados, respectivamente, por

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (138)$$

$$W_p = - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS - \sum_{i=1}^{ncc} \mathbf{d}_i^T \mathbf{P}_i \quad (139)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são as componentes de deformação,  $\boldsymbol{\sigma}$  as componentes de tensão,  $\mathbf{u}$  são as componentes de deslocamento,  $\mathbf{b}$  as forças volumétricas,  $\mathbf{q}$  as forças de superfície,  $\mathbf{d}_i$  e  $\mathbf{P}_i$  são deslocamentos e as cargas concentradas em pontos da estrutura,  $ncc$  é o número de cargas concentradas na estrutura,  $V$  e  $S$  representam o volume e a superfície da estrutura, respectivamente. A energia potencial total do sistema é obtida substituindo as Eqs. (138) e (139) na Eq. (137):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS - \sum_{i=1}^{ncc} \mathbf{d}_i^T \mathbf{P}_i \quad (140)$$

Em um sistema discreto, a energia potencial total do sistema é dada pela soma das contribuições de cada elemento, isto é:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N.E.} \Pi_i^e - \mathbf{d}^g{}^T \mathbf{P} \quad (141)$$

em que os índices  $e$  representa que o funcional é relativo ao elemento finito e o  $\mathbf{g}$  que os graus de liberdade dos deslocamentos são globais.

É importante ressaltar que para a igualdade anterior ser verdadeira é necessário que as funções de forma utilizadas sejam tais que provoquem uma compatibilidade de deslocamentos na fronteira entre os diversos elementos.

Aplicando as equações definidas nas hipóteses e substituindo a Eq. (140) na Eq. (141) obtém-se

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N.E.} \left[ \frac{1}{2} \int_{V^e} \mathbf{d}_i^T \mathbf{B}_i^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}_i^e \mathbf{d}_i dV^e - \int_{V^e} \mathbf{d}_i^T \mathbf{N}_i^T \mathbf{b}_i dV^e - \int_{S^e} \mathbf{d}_i^T \mathbf{N}_i^T \mathbf{q}_i dS^e \right] - \mathbf{d}^{gT} \mathbf{P} \quad (142)$$

em que  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$ .

A Eq. (142) pode ser escrita na forma

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N.E.} \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_i^e \mathbf{d}_i - \sum_{i=1}^{N.E.} \mathbf{d}_i^T \mathbf{f}_i^e - \mathbf{d}^{gT} \mathbf{P} \quad (143)$$

desde que

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^e \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e dV^e \quad (144)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b}_i dV^e + \int_{S^e} \mathbf{N}_i^T \mathbf{q}_i dS^e \quad (145)$$

e definidos como a matriz de rigidez do elemento e vetor de cargas nodais equivalentes do elemento, respectivamente. Aplicando a matriz de incidência cinemática do elemento ( $\mathbf{A}$ ), que faz a correspondência entre os graus de liberdade locais do elemento e os graus de liberdade global da estrutura, nas Eq. (143), (144) e (145) obtêm-se:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{gT} \mathbf{K}^g \mathbf{d}^g - \mathbf{d}^{gT} \mathbf{f}^g \quad (146)$$

$$\mathbf{K}^g = \sum_{i=1}^{N.E.} \mathbf{A}_i^T \mathbf{K}_i^e \mathbf{A}_i \quad (147)$$

$$\mathbf{f}^g = \sum_{i=1}^{N.E.} \mathbf{A}_i^T \mathbf{f}_i^e + \mathbf{P} \quad (148)$$

com  $\mathbf{K}^g$  e  $\mathbf{f}^g$  sendo a matriz de rigidez global e o vetor de cargas nodais equivalentes em coordenadas globais, respectivamente.

A minimização deste funcional resulta da nulidade da primeira variação de  $\Pi$ :

$$\delta\Pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}^g} = \mathbf{0} \quad (149)$$

A Eq. (149) resulta no sistema de equações de equilíbrio nas direções dos graus de liberdade  $i$ , e, portanto:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (150)$$

Uma vez introduzidas as condições de contorno e resolvido o sistema de equações, as deformações e tensões nos elementos podem ser calculadas a partir das equações abaixo:

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{A}_i \mathbf{d}^e \quad (151)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i^e \quad (152)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (153)$$

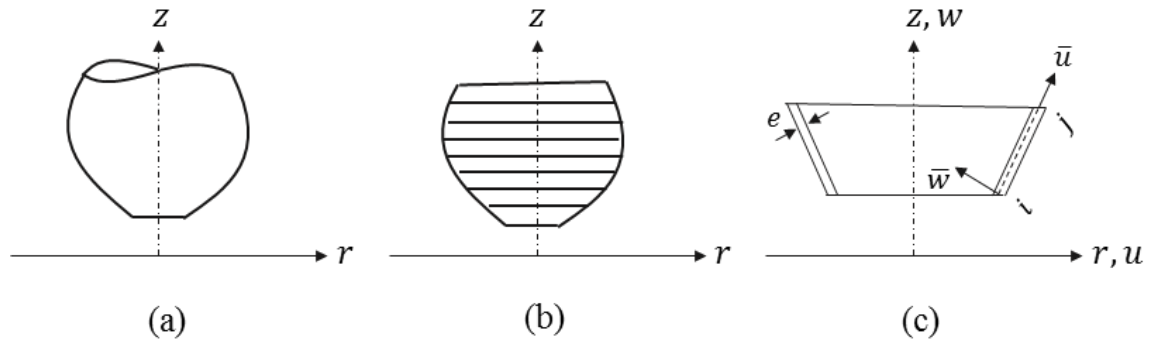
Para modelagem de estruturas axissimétricas, podem ser usados elementos finitos tridimensionais como também bidimensionais e unidimensionais, considerando a simetria de revolução. Neste trabalho serão utilizados elementos unidimensionais, pois estes apresentam resultados eficazes e coerentes aliados a um baixo custo computacional desde que uma malha suficientemente refinada seja aplicada (CUI; WANG; LI, 2016; ZIENKIEWICZ et al., 1977).

Na Seção 5.2 é apresentada a formulação para obtenção da matriz de rigidez local para o elemento finito unidimensional retilíneo, o qual é utilizado neste trabalho.

## 5.2 Elemento finito unidimensional retilíneo

A Figura 31a) apresenta uma casca axissimétrica sujeita a um carregamento axissimétrico. Essa casca pode ser modelada por um agrupamento de elementos retilíneos formando troncos de cone, com inclinação variável, como mostram a Figura 31b) e c).

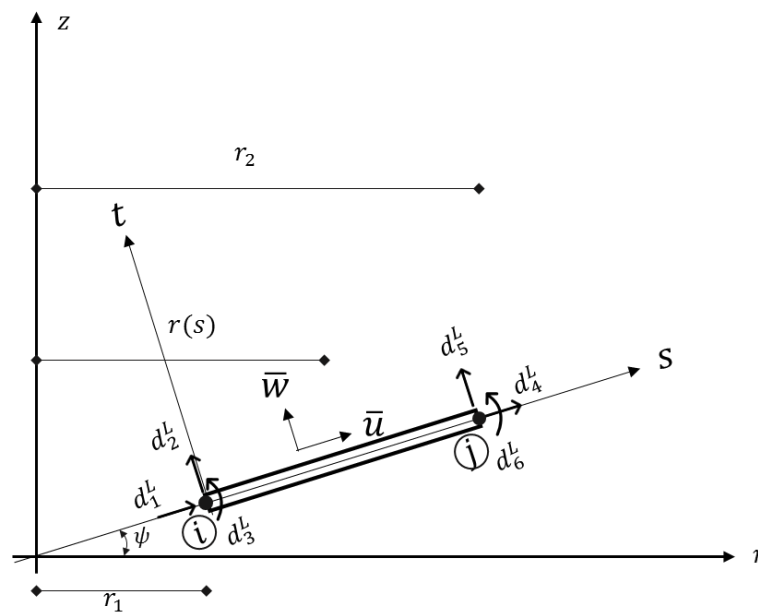
Figura 31 – a) Casca axissimétrica, b) casca axissimétrica representada pelo agrupamento tronco-cônico e c) elemento finito tronco-cônico destacado.



Fonte: autor (2018).

Nesta seção, é sistematicamente aplicada a formulação apresentada na seção anterior para um elemento finito geral, fazendo uso de um campo de deslocamentos admissível para um modelo de elemento finito retilíneo axissimétrico, conforme ilustrado na Figura 32. As coordenadas globais  $r$  e  $z$  são relacionadas com as coordenadas locais  $s$  e  $t$ .

Figura 32 – Elemento finito retilíneo.



Fonte: autor (2018).

O elemento possui dois nós  $i$  e  $j$ , ângulo de inclinação com a horizontal  $\psi$ , funções de deslocamento do elemento  $\bar{u}$  e  $\bar{w}$  e comprimento  $L$ . Considerando que cada nó possui três deslocabilidades generalizadas (duas translações e uma rotação), tem-se:

$$\mathbf{d}^e = \begin{Bmatrix} d_1^L \\ d_2^L \\ d_3^L \\ d_4^L \\ d_5^L \\ d_6^L \end{Bmatrix} \quad (154)$$

em que  $\mathbf{d}^e$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento. A distância de qualquer ponto ao longo do elemento ao eixo de simetria  $r(s)$  e o comprimento  $L$  em função das coordenadas dos nós são, respectivamente:

$$r(s) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} s \quad (155)$$

$$L = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (156)$$

Em que  $r_1$  e  $r_2$  são as coordenadas dos nós 1 e 2 em relação ao eixo  $r$  e  $z_1$  e  $z_2$  são as coordenadas dos nós 1 e 2 referentes ao eixo  $z$ .

### 5.2.1 Deslocamentos e funções de interpolação

Os deslocamentos ao longo do eixo do elemento devem obedecer a continuidade das rotações e deslocamentos e devem ser determinados unicamente pelos valores nodais ( $\mathbf{d}^e$ ) e pela posição  $s$ , a qual está presente nas funções de interpolação, como segue:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(s)\mathbf{d}^e \quad (157)$$

As funções de interpolação, ou funções de forma, estão associadas aos possíveis deslocamentos do elemento. Neste trabalho serão adotadas as funções polinomiais de Lagrange para o deslocamento axial e as funções polinomiais de Hermite para o deslocamento transversal.



### 5.2.1.1 Interpolação linear do deslocamento axial – Polinômio de Lagrange

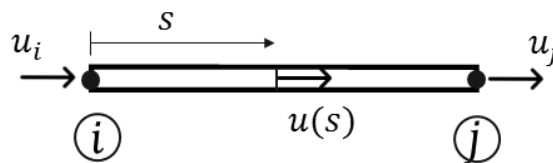
Para interpolação do deslocamento axial  $\bar{u}$  é utilizada uma função linear de classe  $C^0$ , a qual permite a continuidade no campo da variável fundamental (deslocamento) entre os diversos elementos. No entanto, suas derivadas podem não ser contínuas nesses pontos.

Considerando o elemento finito com um grau de liberdade axial por nó mostrado na Figura 33, tem-se o seguinte polinômio aproximador:

$$u_N(s) = a + b \cdot s \quad (158)$$

em que  $a$  e  $b$  são as constantes, o índice  $N$  representa a função de forma e  $s$  a coordenada ao longo do elemento.

Figura 33 – Graus de liberdade para o deslocamento axial do elemento retilíneo.



Fonte: autor (2018).

Desde que, para qualquer função de forma  $N_i$ ,  $N_i = 1$  quando  $s = s_i$  e  $N_i = 0$  quando  $s = s_j$  para todo  $i \neq j$ , obtêm-se ao aplicar as condições de contorno, em que  $L$  é o comprimento do elemento:

$$u_N(0) = d_1^L \Rightarrow a = d_1^L \quad (159)$$

$$u_N(L) = d_4^L \Rightarrow b = \frac{d_4^L - d_1^L}{L} \quad (160)$$

E, portanto:

$$u_N(s) = \left(1 - \frac{s}{L}\right) d_1^L + \frac{s}{L} d_4^L \quad (161)$$

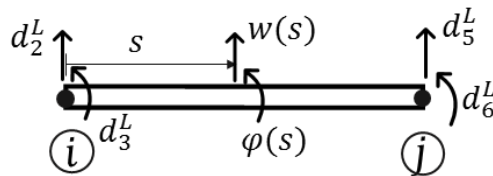
### 5.2.1.2 Interpolação do deslocamento transversal – Polinômio de Hermite

Para interpolação do deslocamento transversal  $\bar{w}$  e das rotações  $d\bar{w}/ds$  ao longo do elemento será adotada uma função aproximada de classe  $C^1$ , pois esta possibilita a continuidade da função fundamental, neste caso o deslocamento, bem como de sua primeira derivada, a rotação, entre os diversos elementos.

De acordo com o elemento mostrado na Figura 34, a função de interpolação de terceiro grau, conhecida por polinômio de Hermite, é dada por:

$$w_N(s) = a + b \cdot s + c \cdot s^2 + d \cdot s^3 \quad (162)$$

Figura 34 – Graus de liberdade de deslocamento transversal e rotações para elemento retilíneo.



Fonte: autor (2018).

Aplicando as seguintes condições de contorno:

$$w_N(0) = d_2^L \quad (163)$$

$$w'_N(0) = d_3^L \quad (164)$$

$$w_N(L) = d_5^L \quad (165)$$

$$w'_N(L) = d_6^L \quad (166)$$

e, resolvendo o sistema de quatro equações e quatro incógnitas, obtêm-se:

$$w_N(s) = \left(1 - \frac{3s^2}{L^2} + \frac{2s^3}{L^3}\right) d_2^L + \left(s - \frac{2s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2}\right) d_3^L + \left(\frac{3s^2}{L^2} - \frac{2s^3}{L^3}\right) d_5^L + \left(-\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2}\right) d_6^L \quad (167)$$

### 5.2.1.3 Matriz das funções de interpolação

A matriz das funções de forma é dada pela composição das funções de ponderação de cada deslocamento nodal obtidas nas equações dos itens 5.2.1.1 e 5.2.1.2, resultando em:

$$\mathbf{N}_{(1,1)} = 1 - \frac{s}{L} \quad (168)$$

$$\mathbf{N}_{(1,4)} = \frac{s}{L} \quad (169)$$

$$\mathbf{N}_{(2,2)} = 1 - \frac{3s^2}{L^2} + \frac{2s^3}{L^3} \quad (170)$$

$$\mathbf{N}_{(2,3)} = s - \frac{2s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \quad (171)$$

$$\mathbf{N}_{(2,5)} = \frac{3s^2}{L^2} - \frac{2s^3}{L^3} \quad (172)$$

$$\mathbf{N}_{(2,6)} = -\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \quad (173)$$

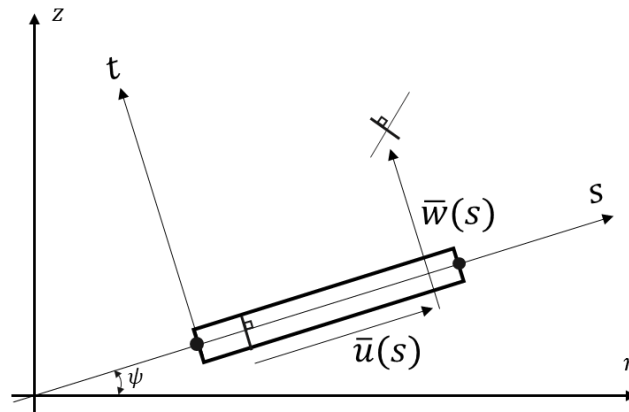
Os termos não apresentados acima são iguais a zero. Portanto, reescrevendo esses termos na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{L} & 0 & 0 & \frac{s}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3s^2}{L^2} + \frac{2s^3}{L^3} & s - \frac{2s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} & 0 & \frac{3s^2}{L^2} - \frac{2s^3}{L^3} & -\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (174)$$

### 5.2.2 Relações deformação-deslocamento

A Figura 35 mostra o elemento retilíneo de espessura  $t$  e os deslocamentos de uma seção no sistema de coordenadas local.

Figura 35 – Elemento retilíneo e sistemas de coordenadas local e global



Fonte: autor (2018).

No regime de pequenos deslocamentos e rotações, os deslocamentos em qualquer ponto ao longo do elemento em função do deslocamento da linha média e da espessura são dados por:

$$u(s, t) = \bar{u}(s) - t \frac{d\bar{w}(s)}{ds} \quad (175)$$

$$w(s, t) = \bar{w}(s) \quad (176)$$

Transformando os deslocamentos do sistema local para o global, tem-se:

$$u_r(s, t) = u(s, t) \cos \psi - w(s, t) \sin \psi \quad (177)$$

$$u_z(s, t) = u(s, t) \sin \psi + w(s, t) \cos \psi \quad (178)$$

As deformações em coordenadas cilíndricas com base nas devidas simplificações para o problema axissimétrico são:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r(s, t)}{\partial r} = \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r} \right) u_r(s, t) \quad (179)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z(s, t)}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} \right) u_z(s, t) \quad (180)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (181)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = 0 \quad (182)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} \right) u_r(s,t) + \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r} \right) u_z(s,t) \right] \quad (183)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = 0 \quad (184)$$

Para transformar o tensor de deformações do sistema global para o local utiliza-se a matriz de transformação ou rotação  $\mathbf{T}$ , como segue

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{T}^T \quad (185)$$

em que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (186)$$

Portanto, os componentes não nulos do tensor de deformações em coordenadas locais resultam em:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{d\bar{u}(s)}{ds} - t \frac{d^2 \bar{w}(s)}{ds^2} \quad (187)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\bar{u}(s) \cos \psi - \bar{w}(s) \sin \psi}{r} - t \frac{\cos \psi}{r} \frac{d\bar{w}(s)}{ds} \quad (188)$$

Sabendo que  $\varepsilon_{ss} = \bar{\varepsilon}_s + t \bar{\chi}_s$  e que  $\varepsilon_{\theta\theta} = \bar{\varepsilon}_\theta + t \bar{\chi}_\theta$  pode-se reescrever as deformações na forma vetorial:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_s \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\chi}_s \\ \bar{\chi}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\bar{u}(s)}{ds} \\ \frac{\bar{u}(s) \cos \psi - \bar{w}(s) \sin \psi}{r} \\ -\frac{d^2 \bar{w}(s)}{ds^2} \\ -\frac{\cos \psi}{r} \frac{d\bar{w}(s)}{ds} \end{Bmatrix} \quad (189)$$

Vale ressaltar que foram utilizadas as hipóteses de Kirchhoff-Love e que o ângulo  $\psi$  não varia no elemento.

Como  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{u}^e$ , a matriz dos operadores diferenciais é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{\cos \psi}{r} & -\frac{\sin \psi}{r} \\ 0 & -\frac{d^2}{ds^2} \\ 0 & -\frac{\cos \psi}{r} \frac{d}{ds} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{Bmatrix} \bar{u}(s) \\ \bar{w}(s) \end{Bmatrix} \quad (190)$$

Dessa forma, desde que a matriz de incidência cinemática entre os graus de liberdade local do elemento e as deformações generalizadas seja dada por  $\mathbf{B}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{N}^e$ , tem-se:

$$\mathbf{B}^{e^T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{\cos \psi}{r(s)} \left(1 - \frac{s}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \psi}{r(s)} \left(1 - \frac{3s^2}{L^2} + \frac{2s^3}{L^3}\right) & -\frac{6}{L^2} + \frac{12s}{L^3} & \frac{\cos \psi}{r(s)} \left(-\frac{6s}{L^2} + \frac{6s^2}{L^3}\right) \\ 0 & -\frac{\sin \psi}{r(s)} \left(s - \frac{2s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2}\right) & -\frac{4}{L} + \frac{6s}{L^2} & \frac{\cos \psi}{r(s)} \left(1 - \frac{4s}{L} + \frac{3s^2}{L^2}\right) \\ \frac{1}{L} & \frac{\cos \psi}{r(s)} \frac{s}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \psi}{r(s)} \left(\frac{3s^2}{L^2} - \frac{2s^3}{L^3}\right) & \frac{6}{L^2} - \frac{12s}{L^3} & \frac{\cos \psi}{r(s)} \left(\frac{6s}{L^2} - \frac{6s^2}{L^3}\right) \\ 0 & -\frac{\sin \psi}{r(s)} \left(-\frac{s^2}{L} + \frac{s^3}{L^2}\right) & -\frac{2}{L} + \frac{6s}{L^2} & \frac{\cos \psi}{r(s)} \left(-\frac{2s}{L} + \frac{3s^2}{L^2}\right) \end{bmatrix} \quad (191)$$

### 5.2.3 Relações tensões-deformações

Para problemas elásticos, as deformações generalizadas do elemento podem ser relacionadas às tensões generalizadas pela Lei de Hooke por:

$$\sigma_{ss} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ss} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (192)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{ss}) \gamma_{a2} \quad (193)$$

Os esforços generalizados para um material homogêneo ao longo da espessura  $h$  são dados por:

$$N_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss} dt = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta) \quad (194)$$

$$N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dt = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_s) \quad (195)$$

$$M_s = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ss} t dt = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_s + \nu\chi_\theta) \quad (196)$$

$$M_\theta = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} t dt = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_\theta + \nu\chi_s) \quad (197)$$

Para a igualdade da Eq. (198) ser verdadeira

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} \quad (198)$$

tem-se:

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \nu \frac{h^2}{12} \\ 0 & 0 & \nu \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \quad (199)$$

### 5.3 Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez elementar é obtida na forma da Eq. (200). Da condição axissimétrica permite integrar o domínio da casca em função da seção de revolução multiplicada pelo perímetro correspondente a coordenada  $r$  de um ponto da seção. Logo, a matriz de rigidez do elemento pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_0^L \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e \cdot r(s) ds \quad (201)$$

Essa matriz de rigidez do elemento está escrita segundo o sistema local de graus de liberdade, necessitando-se transformá-la em relação ao sistema global.

#### 5.4 Vetor de forças nodais equivalentes do elemento

As forças equivalentes nodais são calculadas utilizando as mesmas funções de forma usadas para calcular a matriz e rigidez do elemento. Elas são estaticamente equivalentes ao carregamento distribuído original, pois os trabalhos produzidos são equivalentes desde que seja dado um campo de deslocamentos compatível com as funções de forma.

De forma prática, os carregamentos distribuídos ao longo do elemento são transformados em carregamentos equivalentes e aplicados nos nós. Dessa forma, podem ser somados aos carregamentos concentrados nodais para montagem do vetor de forças da estrutura.

Nesta dissertação não se consideram deformações iniciais dos elementos, a seção de revolução representada por um elemento finito é constituída por material homogêneo de peso constante e uniforme e a espessura da casca de um elemento é constante no seu domínio.

Os carregamentos distribuídos são considerados aplicados no domínio do elemento, dessa forma:

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega^e \quad (202)$$

Transformando a integração do domínio para a seção de revolução, tem-se:

$$\mathbf{f}^e = 2\pi \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{q}(s) ds \quad (203)$$

em que  $\mathbf{q}$  é um vetor que descreve o carregamento no domínio, considerando um carregamento longitudinal, um carregamento transversal e um momento fletor, todos variando linearmente ao longo do elemento.

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_{s_1} \left(1 - \frac{s}{L}\right) + Q_{s_2} \frac{s}{L} \\ Q_{t_1} \left(1 - \frac{s}{L}\right) + Q_{t_2} \frac{s}{L} \\ M_1 \left(1 - \frac{s}{L}\right) + M_2 \frac{s}{L} \end{Bmatrix} \quad (204)$$



Dessa forma, o vetor de forças nodais equivalentes para um elemento é:

$$\mathbf{f}^e = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \pi L \left[ \left( r_1 + \frac{1}{3} r_2 \right) Q_{s_1} + \frac{1}{3} Q_{s_2} (r_1 + r_2) \right] \\ \frac{8}{15} \pi \left\{ \left[ \left( Q_{t_1} + \frac{5}{16} Q_{t_2} \right) L - \frac{9}{8} M_1 - \frac{3}{4} M_2 \right] r_1 + \frac{5}{16} r_2 \left[ \left( Q_{t_1} + \frac{4}{5} Q_{t_2} \right) L - \frac{12}{5} M_1 - \frac{18}{5} M_2 \right] \right\} \\ \frac{1}{15} \pi L \left\{ \left[ \left( Q_{t_1} + \frac{1}{2} Q_{t_2} \right) r_1 + \frac{1}{2} r_2 (Q_{t_1} + Q_{t_2}) \right] L + \left( 3M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) r_1 - \frac{1}{2} r_2 (M_1 + 4M_2) \right\} \\ \frac{1}{6} \pi L \left[ (r_1 + r_2) Q_{s_1} + Q_{s_2} (r_1 + 3r_2) \right] \\ \frac{2}{15} \pi \left\{ \left[ \left( Q_{t_1} + \frac{5}{4} Q_{t_2} \right) L + \frac{9}{2} M_1 + 3M_2 \right] r_1 + \frac{5}{4} \left[ \left( Q_{t_1} + \frac{16}{5} Q_{t_2} \right) L + \frac{12}{5} M_1 + \frac{18}{5} M_2 \right] r_2 \right\} \\ - \frac{1}{30} \pi L \left\{ \left[ (Q_{t_1} + Q_{t_2}) r_1 + r_2 (Q_{t_1} + 2Q_{t_2}) \right] L + r_1 (4M_2 + M_2) + r_2 (M_1 - 6M_2) \right\} \end{array} \right\} \quad (205)$$

em que  $M_1, M_2, Q_{s_1}, Q_{s_2}, Q_{t_1}$  e  $Q_{t_2}$  são os momentos e os esforços nas direções  $s$  e  $t$  aplicados nas extremidades do elemento finito retilíneo.

## 5.5 Regra da quadratura de Gauss

Para o cálculo da matriz de rigidez é necessário efetuar a integração no domínio do elemento. A matriz  $\mathbf{B}$  é composta por termos não polinomiais, os quais as primitivas não são fáceis de se determinar. Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), é conveniente usar integrações numéricas para estes casos, especificamente a quadratura de Gauss.

Segundo Assan (2003), seja  $f$  uma função contínua de apenas uma variável, definida no intervalo  $[a, b]$ , tal que  $a \leq x \leq b$ . Para calcular o valor aproximado da integral definida, utiliza-se uma combinação linear de valores da função  $f(x)$  em certos pontos  $x_i$ , tal que  $a \leq x_i \leq b$  e certos valores de  $p_i$ , que são pesos, de modo que a integral seja calculada somando os produtos da função e do pesos em cada ponto, resultando:

$$\int_a^b f(x) dx \cong p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n) \quad (206)$$

Os pontos  $x_i$  e os pesos  $p_i$  são determinados de tal forma que a regra seja exata para qualquer polinômio de grau menor ou igual a  $2n-1$ , sendo  $n$  o número de pontos tomados no intervalo  $[-1, 1]$ .

O intervalo  $[-1,1]$  corresponde a uma mudança da variável  $x$  para variável  $\xi$ , que é adimensional. Assim, é necessário proceder com a seguinte transformação da integral:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(\xi)d\xi = J \sum_{j=1}^i p_j g(\xi_j) \quad (207)$$

em que  $i$  é o número do ponto de integração,  $\xi_i$  é a coordenada do ponto  $i$ ,  $p_i$  o peso associado ao ponto  $i$  e  $J$  é o Jacobiano da transformação, resultante de

$$\begin{vmatrix} x & \xi & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (208)$$

Logo,

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{a+b}{2} \quad (209)$$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}(b-a) \quad (210)$$

Para resolver a integral da matriz de rigidez da Eq. (201), tem-se:

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot r(s) ds = \pi L \int_{-1}^1 r(\xi) \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi \quad (211)$$

com  $s = (1+\xi)L/2$  e  $J = L/2$ . A

Tabela 4 mostra as coordenadas e pesos para alguns números de pontos de Gauss.

Tabela 4 – Pontos e pesos de Gauss

$n$	$i$	$\xi_i$	$p_i$
1	1	0	2
2	1	$-1/\sqrt{3}$	1
	2	$1/\sqrt{3}$	1

3	1	$-\sqrt{0,6}$	$5/9$
	2	0	$8/9$
	3	$\sqrt{0,6}$	$5/9$
4	1	-0,8611363115	0,3478548451
	2	-0,3399810435	0,6521451548
	3	+0,3399810435	0,6521451548
	4	+0,8611363115	0,3478548451

Fonte: autor (2018).

## 6 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

O programa computacional desenvolvido nas análises desta dissertação, denominado EAPD (Estruturas Axissimétricas de Parede Delgada), é formulado pelas equações do Método dos Elementos Finitos e está implementado na linguagem de programação MATLAB®.

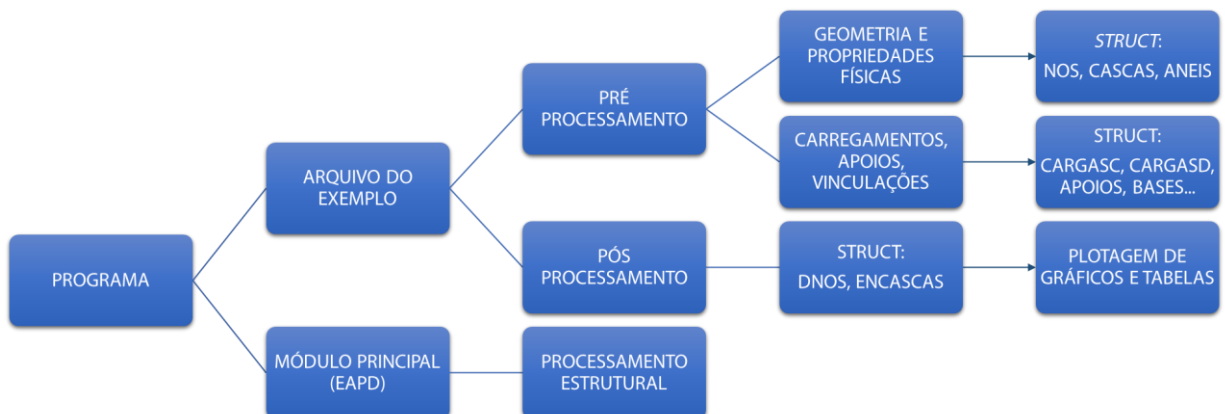
O programa é constituído por um módulo principal, o qual é responsável pelo processamento estrutural e é acessado pelo arquivo dos exemplos, que contém a entrada e saída dos dados, como mostra a Figura 36. A entrada de dados é feita por elementos do tipo *struct* que contém informações sobre a geometria e discretização da estrutura, as propriedades mecânicas do material adotado, os apoios, as ligações, as bases elásticas e os carregamentos aplicados, conforme apresentado na Figura 37. O módulo de processamento resolve as equações do MEF levando em consideração as condições de contorno e restrições do problema. Por fim, a saída de dados é feita por meio de gráficos de esforços e deslocamentos, podendo também ser salva em tabelas em um arquivo de dados.

Figura 36 – Sequência de processamento dos módulos do EAPD.



Fonte: autor (2019).

Figura 37 – Diagrama de apresentação dos módulos do EAPD.



Fonte: autor (2019).

## 6.1 Descrição do programa computacional

O EAPD possibilita a análise elástica linear de esforços e deslocamentos de estruturas axissimétricas de parede delgada de geometrias variadas, incluindo o acoplamento entre mais de um elemento, desde que esta esteja submetida a um carregamento também axissimétrico. Dessa forma, não é possível levar em consideração a influência do vento no cálculo dos carregamentos atuantes na estrutura, visto que este não é axissimétrico.

Segundo RODRIGUES (2009), o MEF fornece soluções exatas para os deslocamentos nodais se as funções utilizadas para o campo de deslocamento coincidir com a solução homogênea de deslocamento da estrutura. Na formulação adotada, o campo de deslocamentos é aproximado por funções polinomiais que não coincidem com a equação governante do campo de deslocamentos de cascas axissimétricas. Dessa forma, os deslocamentos obtidos são aproximações as quais tendem a solução exata a medida que a discretização da estrutura é refinada de forma mais apropriada.

Além disso, mesmo que a regra de quadratura de Gauss de  $n$  pontos produza o resultado exato de uma função polinomial de grau  $2n-1$  ou menor, algumas das funções a integrar no método dos elementos finitos não são polinomiais devido à existência de um operador de divisão polinomial na matriz  $\mathbf{B}^e$ , em que o operador em questão é função do raio. Assim, a regra de quadratura de Gauss fornecerá uma aproximação da integral das funções não polinomiais, que será tanto mais precisa quantos mais elementos forem utilizados.

De forma a facilitar a utilização e o entendimento do programa proposto, no Apêndice A é apresentado a criação dos parâmetros de entrada necessários para utilização do EAPD.

## 6.2 Funcionalidades do EAPD

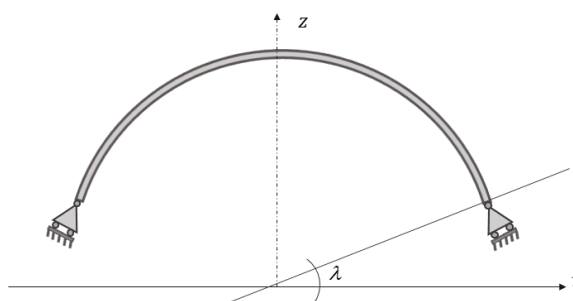
Com a finalidade de proporcionar modelos mais realísticos, além de configurações básicas de estruturas (ligação simples entre diversos elementos, apoios de 1º, 2º e 3º gênero e ligação monolítica nas junções) o EAPD possui algumas funcionalidades comumente aplicadas em projetos de estruturas, como inclinação dos apoios, base elástica ou rígida para simular o comportamento do solo, anel de rigidez para a redução da transmissão de esforços entre diferentes elementos estruturais e as ligações flexíveis que possibilitam o estudo de contatos não monolíticos.

### 6.2.1 Apoios inclinados

Em uma estrutura de casca, os apoios inclinados podem ser aplicados com o objetivo de evitar esforços fora do plano médio da estrutura. Dessa forma, é possível obter uma casca atuando apenas em regime de membrana, o que facilita a análise estrutural e a especificação da mesma.

A Figura 38 mostra uma cúpula cujo os elementos de apoio estão inclinados em relação aos eixos principais.

Figura 38 – Cúpula com os apoios inclinados.



Fonte: autor (2018).

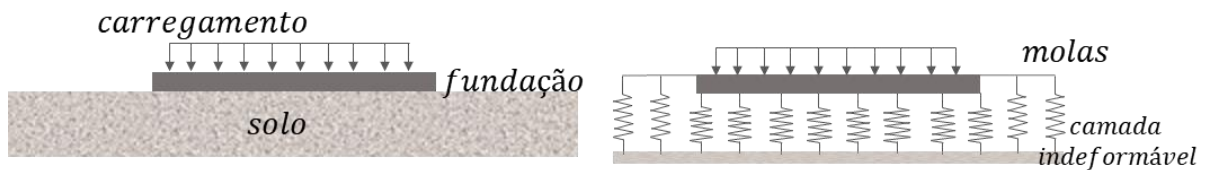
O ângulo  $\lambda$  é a inclinação do apoio, necessária para correta definição deste tipo de situação no modelo computacional. Esse tipo de aplicação possibilita o deslocamento da base da cúpula segundo alguma direção não principal, o que não seria permitido com a situação convencional de apoios.

### 6.2.2 Base elástica

Base ou fundação elástica é uma analogia comumente feita para representar solos deformáveis nas análises estruturais. De forma simplista, a fundação elástica costuma ser analisada com base na hipótese formulada por WINKLER (1867), que considera a força reativa da base elástica proporcional à deflexão do elemento de apoio sobre o solo em cada ponto.

O solo é idealizado como um sistema de molas lineares, independentes, sem resistência ao cisalhamento e infinitamente próximas, mas espaçadas entre si, sendo consideradas apenas as deformações ocorridas nas regiões de contato entre a estrutura e a base. A Figura 39 mostra um solo representado por uma fundação elástica com deformação na região de contato devido ao carregamento.

Figura 39 – Hipótese de Winkler, deformabilidade do solo por molas elásticas.



Fonte: autor (2018).

Neste modelo, as pressões de contato são proporcionais aos deslocamentos, podendo ser utilizados tanto para ações verticais como horizontais. Dessa forma, são determinados valores do coeficiente de reação, ou coeficiente da mola, para cada tipo de solo e sistema de fundação considerando que para cada direção de deslocamento pode haver uma flexibilidade diferente. Ou seja, é estabelecida uma relação discreta entre fundação e solo mediante a definição da constante da mola que representa a rigidez do maciço.

As Eqs. (212) e (213) mostram as relações lineares entre as pressões de contato e os deslocamentos correspondentes:

$$\sigma_t(s) = k_t \cdot w(s) \quad (212)$$

$$\sigma_s(s) = k_s \cdot u(s) \quad (213)$$

na qual,  $\sigma$  são as tensões médias de contato da fundação na direção  $z$ ,  $u$  e  $w$  são os deslocamentos e  $k$  módulo de reação da base elástica ou coeficiente de mola na direção indicada, que depende do tipo de maciço.

O principal problema para o uso desse modelo é a associação de um maciço altamente complexo, com variados tipos de solos e variação da capacidade resistente com um número. A estimativa desse coeficiente deve ser precisa e pode ser realizada com procedimentos baseados em ensaios de campo, com a associação destes coeficientes com as próprias equações de Mindlin ou até por procedimentos ditos de semi-empíricos por associar dados de ensaios com formulações analíticas.

Uma base elástica para problemas em elementos finitos pode ser considerada a partir da contribuição provocada por essa base na energia de deformação do sistema. Essa contribuição energética para um elemento finito retilíneo axissimétrico é dada por:

$$U_{base} = 2\pi \int_0^L \left( \frac{k_s u(s)^2}{2} + \frac{k_t w(s)^2}{2} \right) r(s) ds \quad (214)$$

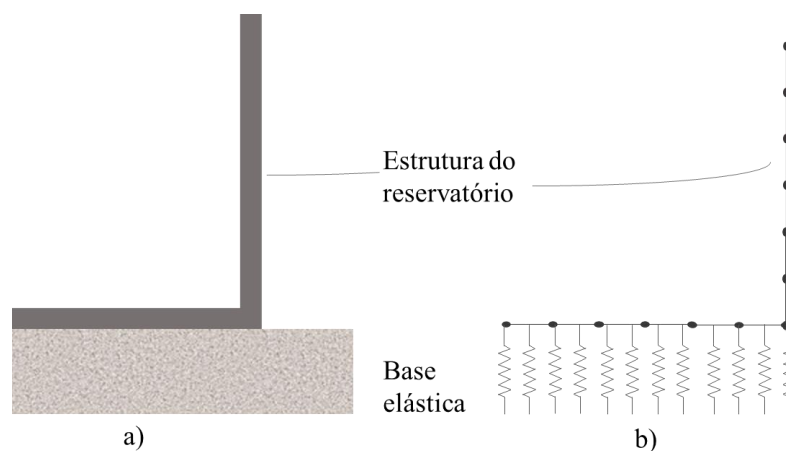
na qual  $k_s$  e  $k_t$  são as rigidezes da base elástica na direção axial e transversal ao elemento. A obtenção dessa contribuição em forma de matriz de rigidez pode ser obtida pelo cálculo das derivadas parciais da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais, isto é, a Hessiana da energia de deformação, o que resulta em:

$$K_{base} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \pi k_s L (3r_1 + r_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{35} \pi k_t L (10r_1 + 3r_2) & \frac{1}{210} \pi k_t L^2 (15r_1 + 7r_2) \\ 0 & \frac{1}{210} \pi k_t L^2 (15r_1 + 7r_2) & \frac{1}{420} \pi k_t L^3 (5r_1 + 3r_2) \\ \dots & & \\ \frac{1}{6} \pi k_s L (r_1 + r_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} \pi k_t L (r_1 + r_2) & \frac{1}{210} \pi k_t L^2 (6r_1 + 7r_2) \\ 0 & -\frac{1}{210} \pi k_t L^2 (7r_1 + 6r_2) & -\frac{1}{140} \pi k_t L^3 (r_1 + r_2) \\ \dots & & \\ \frac{1}{6} \pi k_s L (r_1 + r_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} \pi k_t L (r_1 + r_2) & -\frac{1}{210} \pi k_t L^2 (7r_1 + 6r_2) \\ 0 & \frac{1}{210} \pi k_t L^2 (6r_1 + 7r_2) & -\frac{1}{140} \pi k_t L^3 (r_1 + r_2) \\ \dots & & \\ \frac{1}{6} \pi k_s L (r_1 + 3r_2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{35} \pi k_t L (3r_1 + 10r_2) & -\frac{1}{210} \pi k_t L^2 (7r_1 + 15r_2) \\ 0 & -\frac{1}{210} \pi k_t L^2 (7r_1 + 15r_2) & \frac{1}{420} \pi k_t L^3 (3r_1 + 5r_2) \end{bmatrix} \quad (215)$$

A Figura 40 exemplifica uma aplicação em elementos finitos para essa funcionalidade de uma estrutura usual de reservatório.



Figura 40 – Seção simétrica representando a) um reservatório apoiado sobre o solo e b) modelo computacional



Fonte: autor (2018).

No EAPD as bases elásticas são associadas como distribuídas ao longo dos elementos, sendo necessário usar um *struct* com informações sobre o elemento e a rigidez da base elástica em relação as duas coordenadas principais para cada elemento formado pela base, conforme apresentado no apêndice A1.

### 6.2.3 Ligações flexíveis

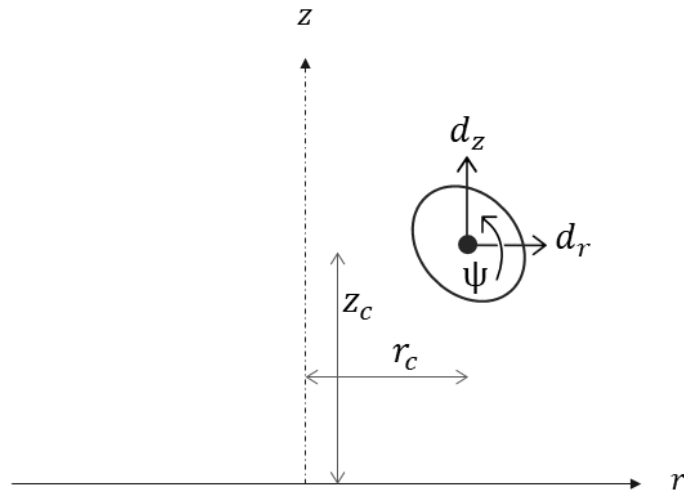
As ligações entre os elementos são realizadas por meio dos nós. Em um primeiro modelo de ligação, os elementos adjacentes são unidos por um único nó. Neste caso, todos os esforços e deslocamentos sofridos por esse nó em comum serão aplicados a extremidade dos elementos adjacentes de forma única. Dessa forma, podemos considerar que os graus de liberdade são os mesmos para os elementos unidos a este nó.

A segunda opção de vinculação ocorre quando não existe essa vinculação entre os graus de liberdade dos elementos adjacentes. Assim, é possível simular situações em que uma mesma coordenada de nó possua deslocamentos diferentes. Caso comum em reservatórios que utilizam Neoprene no perímetro da parede, provocando um deslocamento relativo entre a base da parede cilíndrica e a placa de fundo do reservatório.

#### 6.2.4 Anel de rigidez

No plano axissimétrico, o elemento do anel de rigidez é representado por um nó. Este nó possui três graus de liberdade, assim como os nós do elemento de casca, referente a um deslocamento vertical, um horizontal e uma rotação, como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Elemento representativo do anel de rigidez e seus graus de liberdade.



Fonte: autor.

Os deslocamentos em qualquer ponto do anel relacionado aos deslocamentos do centroide são:

$$u = d_r - \psi(z - z_c) \quad (216)$$

$$w = d_z + \psi(r - r_c) \quad (217)$$

nas quais  $z$  e  $r$  são as coordenadas do ponto citado. A deformação e a tensão circunferenciais são dadas por:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \frac{d_r - \psi(z - z_c)}{r} \quad (218)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = E\varepsilon_{\theta\theta} = E \frac{d_r - \psi(z - z_c)}{r} \quad (219)$$

Portanto, a energia de deformação, para materiais com comportamento elástico linear, do anel de rigidez pode ser obtida por:

$$U = 2\pi \int_A \frac{E}{2} \left[ \frac{d_r - \psi(z - z_c)}{r} \right]^2 r dA \quad (220)$$

Os termos da matriz de rigidez do anel podem ser obtidos pelo cálculo da Hessiana da energia de deformação relacionada aos graus de liberdade, resultando em:

$$K_{d_r, d_r} = \frac{\partial^2 U}{\partial d_r^2} = 2\pi E \int_A \frac{1}{r} dA \quad (221)$$

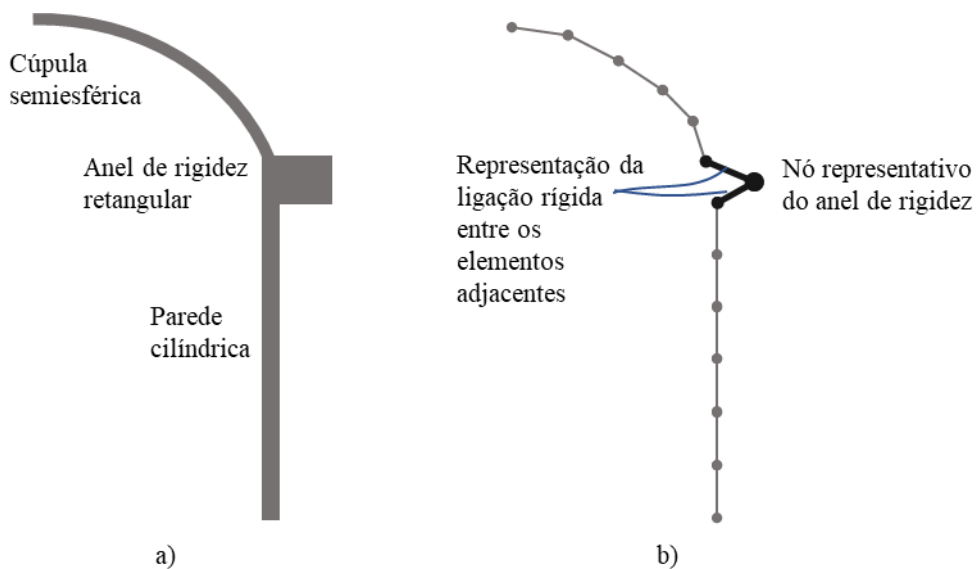
$$K_{d_r, \psi} = K_{\psi d_r} = \frac{\partial^2 U}{\partial d_r \partial \psi} = -2\pi E \int_A \frac{z - z_c}{r} dA \quad (222)$$

$$K_{\psi \psi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 2\pi E \int_A \frac{(z - z_c)^2}{r} dA \quad (223)$$

Na direção  $z$ , o anel se desloca sem provocar nenhuma deformação e, portanto, os termos da matriz de rigidez referentes a este grau de liberdade devem ser nulos.

No EAPD o anel de rigidez deve ser posicionado no centroide do elemento real e possuir vinculações rígidas com os elementos conectados a ele. A Figura 42 mostra um corte da seção de revolução de uma estrutura com elemento de anel bem como sua representação no modelo de análise do EAPD.

Figura 42 – Representação do anel de rigidez: a) estrutura real; b) modelo em elementos finitos.



As ligações rígidas entre o anel de rigidez e os elementos conectados a ele são necessárias para simular o idealizado no modelo analítico da estrutura, no qual o topo da parede cilíndrica e a base da cúpula esférica se movem igualmente ao elemento de anel.

## 7 APLICAÇÕES

Este capítulo apresenta aplicações de estruturas axissimétricas simples e complexas, sujeitas a diversos tipos de carregamentos e vinculações. Inicialmente são apresentados exemplos para a verificação do EAPD (código desenvolvido pelo autor, em elementos finitos, para análise de estruturas axissimétricas de parede delgada) e em seguida as aplicações de estruturas complexas a fim de estudar seu comportamento mecânico.

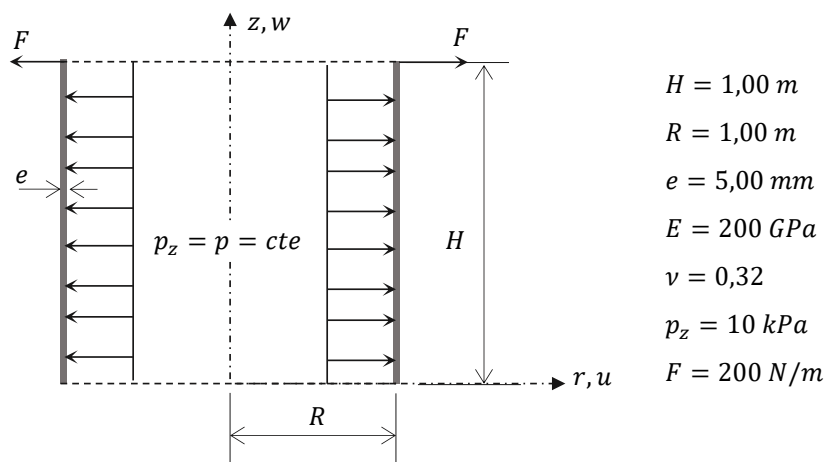
### 7.1 Verificação do programa computacional - EAPD

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações com a finalidade de verificar o código computacional desenvolvido no presente trabalho, denominado EAPD. As aplicações consistem em exemplos publicados em outros trabalhos, analisados por meio de formulações analíticas e/ou numéricas para estruturas axissimétricas de parede delgada. De forma geral, os momentos são definidos como positivos ao tracionar a face externa da estrutura e são traçados na direção das fibras tracionadas.

#### 7.1.1 Aplicação 1: casca cilíndrica com carregamentos distribuído e concentrado

Trata-se de uma casca cilíndrica com carregamento uniformemente distribuído ao longo da parede e uma carga concentrada na borda superior, conforme ilustrado na Figura 43.

Figura 43 – Aplicação 1: casca cilíndrica com carregamentos distribuído e concentrado.



Fonte: Adaptado de BEZERRA (2013).

Utiliza-se uma malha uniforme com 30 elementos ao longo da parede cilíndrica, mesmo número adotado pela discretização MEF I proposta por BEZERRA (2013). Em seu trabalho, BEZERRA (2013) utiliza o elemento unidimensional com dois nós e seis graus de liberdade, mas informações sobre a obtenção dos esforços não foram apresentados, o que não permitiu exatidão nos resultados. Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos para o problema. Os valores máximos (em módulo) de  $u$  e  $M_z$  nos bordos da casca cilíndrica, para cada discretização e para as soluções analíticas são apresentados nas Tabelas 5 e 6. Os erros apresentados são calculados em relação aos resultados da solução analítica.

Tabela 5 – Valores máximos e erros relativos do deslocamento horizontal

Modelo	Bordo superior		Bordo inferior	
	$u_{máx}$ (m)	Erro (%)	$u_{máx}$ (m)	Erro (%)
EAPD	-1,721E-05	0,24	-1,066E-05	0,09
Analítico – BEZERRA (2013)	-1,725E-05	-	-1,067E-05	-
MEF I – BEZERRA (2013)	-1,721E-05	0,24	-1,066E-05	0,09

Fonte: Adaptado de BEZERRA (2013).

Tabela 6 – Valores máximos e erros relativos do momento fletor

Modelo	Bordo superior		Bordo inferior	
	$M_{z máx}$ ( $N \cdot \frac{m}{m}$ )	Erro (%)	$M_{z máx}$ ( $N \cdot \frac{m}{m}$ )	Erro (%)
EAPD	-3,55	0,19	4,80	2,24
Analítico – BEZERRA (2013)	-3,56	-	4,91	-
MEF I – BEZERRA (2013)	-3,40	4,46	4,80	3,91

Fonte: Adaptado de BEZERRA (2013).

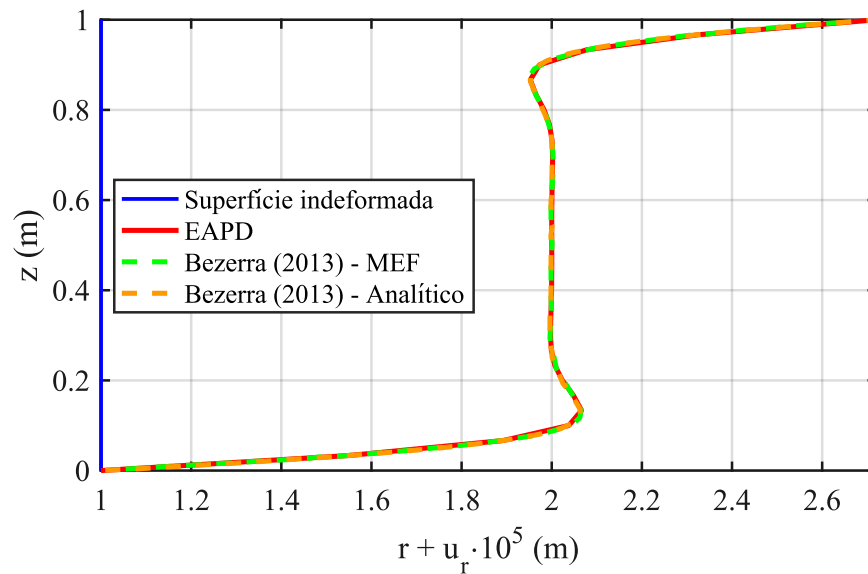
Segundo BEZERRA (2013), o erro de uma solução numérica pode ser determinado de maneira exata caso haja uma solução analítica disponível. O erro pode ser expresso de forma absoluta ou relativa, sendo a última definida por:

$$E_{rel} = \left| \frac{E}{a_{ex}} \right| = \frac{|a_{ex} - a_{num}|}{a_{ex}} \quad (224)$$

em que  $a_{ex}$  e  $a_{num}$  são, respectivamente, os valores exato e numérico da grandeza considerada.

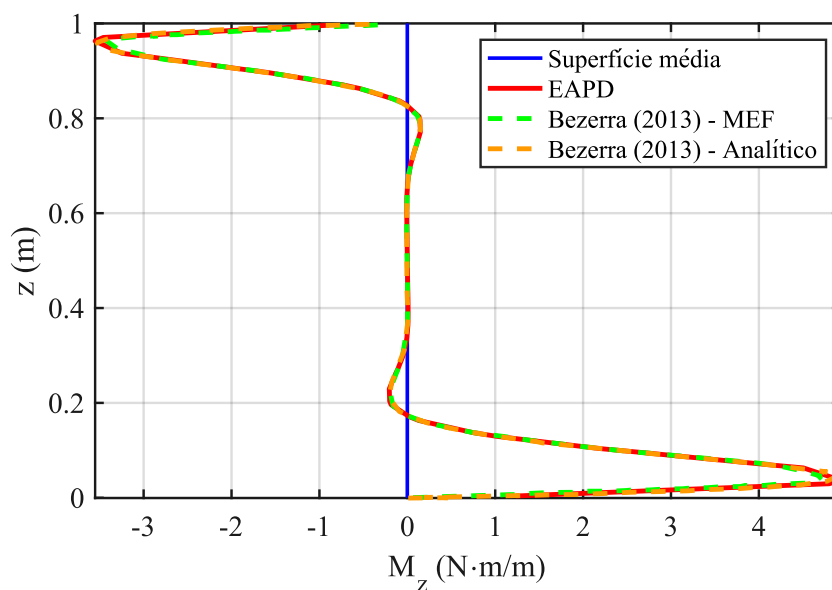
As curvas de  $u$  (ampliado  $1 \times 10^5$  vezes) e  $M_z$  ao longo da casca cilíndrica estão representadas nas Figuras 44 e 45.

Figura 44 – Deslocamentos obtidos para a aplicação 1.



Fonte: autor (2018).

Figura 45 – Momento fletor para a aplicação 1.



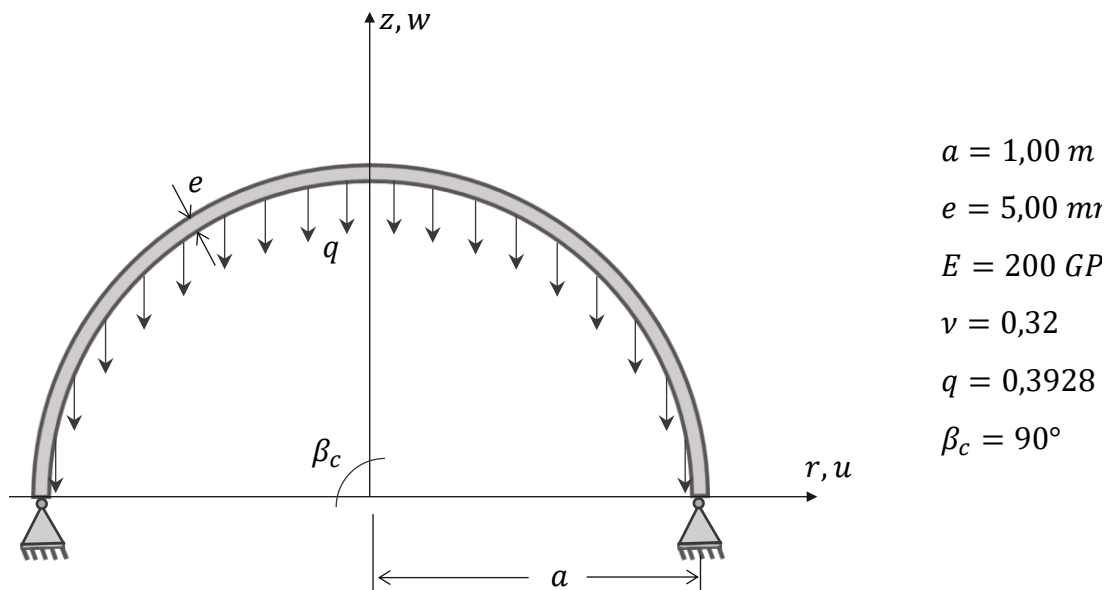
Fonte: autor (2018).

Como esperado, os deslocamentos máximos ocorrem no bordo superior devido à ausência de apoios e ainda a aplicação de uma carga linearmente distribuída. Em relação aos momentos fletores, é possível notar que existem picos nas proximidades das extremidades superior e inferior da casca cilíndrica, motivado pelo tipo de vinculação na base e o carregamento, o que provocam efeitos de flexão a estrutura. Esses efeitos decrescem e tendem a zero ao aproximarem-se do centro da parede devido a boa capacidade de amortecimento de esforços de flexão das cascas.

### 7.1.2 Aplicação 2: cúpula esférica sob carregamento distribuído

Trata-se de uma cúpula esférica articulada na base sob ação do seu peso próprio. A configuração geométrica do exemplo, bem como os dados do problema estão apresentados na Figura 46.

Figura 46 – Configuração geométrica da cúpula.

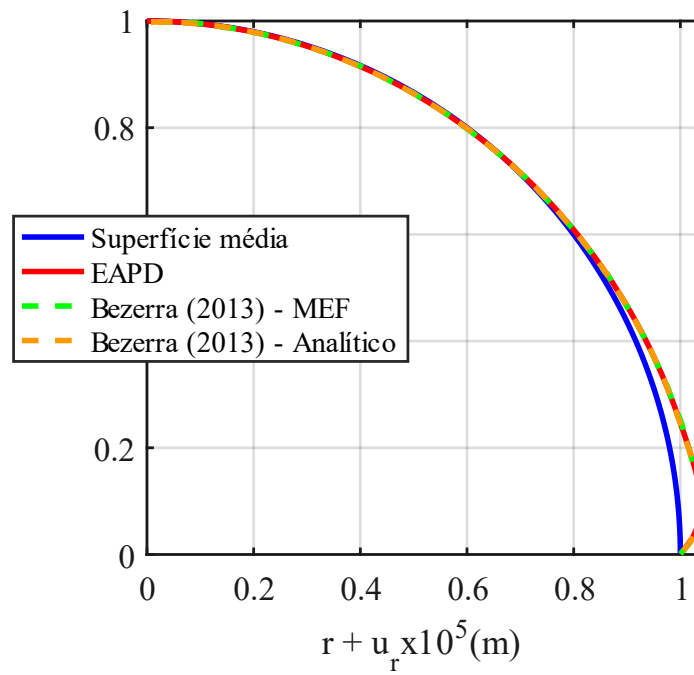


Fonte: adaptado de BEZERRA (2013).

Para fins de comparação com os resultados obtidos por BEZERRA (2013), adotam-se a mesma discretização e propriedades do material, dessa forma, a seção simétrica é dividida em 50 (cinquenta) elementos lineares de comprimento uniforme. As Figuras 47, 48 e 49 apresentam as variações de deslocamentos, momento fletor e esforço normal ao longo do meridiano, respectivamente.

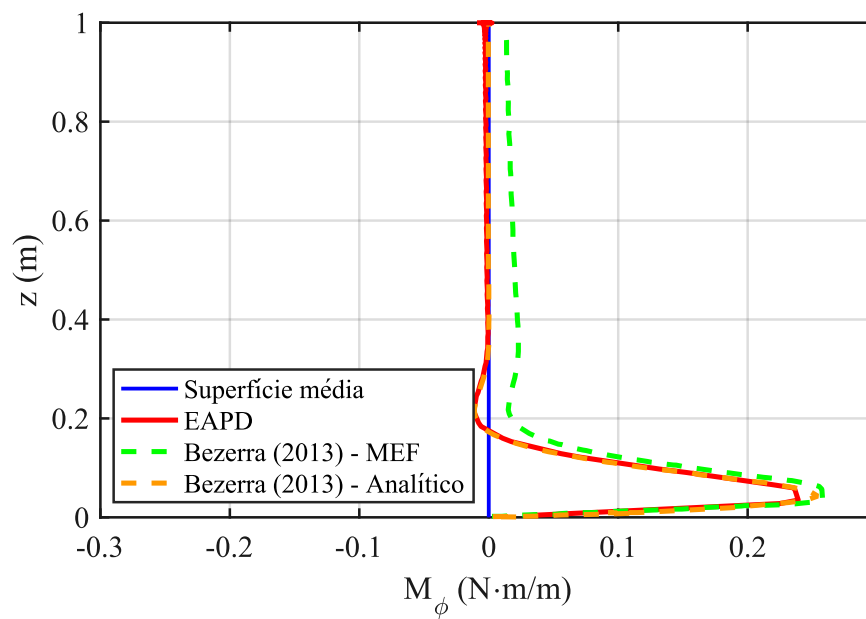


Figura 47 – Configuração deformada e configuração indeformada do exemplo 2.



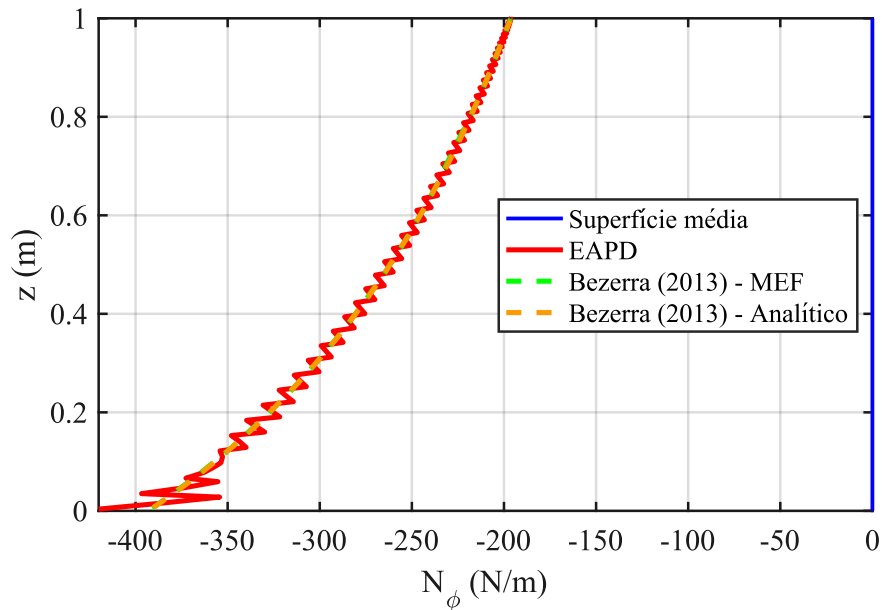
Fonte: autor (2018).

Figura 48 – Momento fletor ao longo do meridiano.



Fonte: autor (2018).

Figura 49 – Esforço normal ao longo do meridiano.



Fonte: autor (2018).

As curvas que apresentam os resultados analíticos e numéricos de BEZERRA (2013), Figura 49, estão sobrepostas, o que indica um ótimo resultado obtido pela formulação numérica. A plotagem da curva referente ao EAPD apresenta pequenas variações devido a PLOTAGEM dos esforços nos pontos de Gauss, conforme indicado na Figura 49. O trabalho de BEZERRA (2013) apresenta a suavização dos esforços em tais pontos, algo que não foi implementado no EAPD propositalmente para possibilitar a análise das descontinuidades entre os diversos elementos.

Os valores máximos e o erro (em módulo) de  $u$  e  $M_\phi$  nas proximidades dos bordos da casca esférica, para cada discretização e para as fórmulas analíticas são apresentados na Tabela 7 e Tabela 8.

Tabela 7 – Valores máximos do deslocamento  $u$ .

Modelo	Bordo inferior	
	$u_{m\acute{a}x}$ (m)	Erro (%)
EAPD	4,428E-07	1,56
Analítico – BEZERRA (2013)	4,499E-07	-
MEF I – BEZERRA (2013)	4,428E-07	1,56

Fonte: adaptado de BEZERRA (2013).

Tabela 8 – Valores máximos de  $M_\phi$ 

Modelo	Bordo inferior	
	$M_{\phi\text{máx}}$ (m)	Erro (%)
EAPD	2,54E-01	0,39
Analítico – BEZERRA (2013)	2,55E-01	-
MEF I – BEZERRA (2013)	2,56E-01	0,69

Fonte: adaptado de BEZERRA (2013).

Tabela 9 – Valores máximos de  $N_\phi$ 

Modelo	Bordo inferior	
	$N_{\phi\text{máx}}$ (m)	Erro (%)
EAPD	-4,29E+02	9,32
Analítico – BEZERRA (2013)	-3,93E+02	-
MEF I – BEZERRA (2013)	-3,93E+02	0,03

Fonte: adaptado de BEZERRA (2013).

Para esta discretização não muito refinada, os resultados apresentados para deslocamentos e momentos fletores são satisfatórios, com erros relativos de até 1,50% em relação à solução analítica. Já para os esforços normais o erro absoluto apresentou valor máximo de 9,32%, sendo necessário um refinamento da discretização para a obtenção de resultados mais precisos.

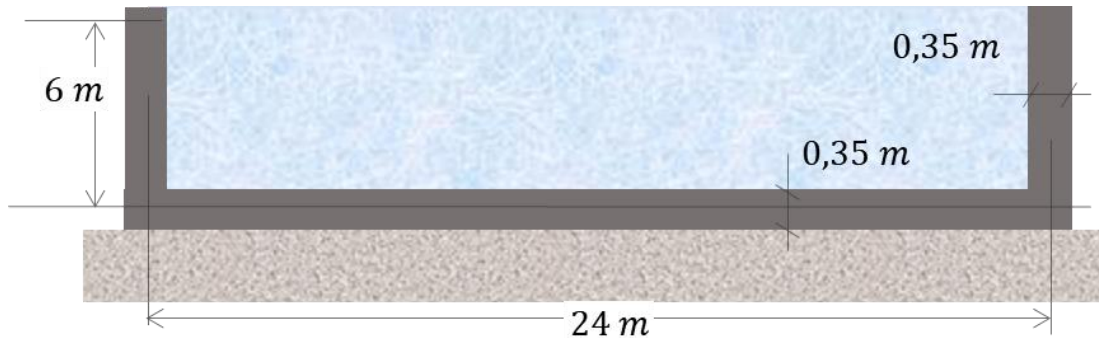
Segundo ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000), sobre o problema da aproximação de uma casca curva por um modelo poligonal, muitos exemplos indicam que ocorre convergência. Quando o carregamento causa esforços predominantemente de membrana, existem discrepâncias no valor do momento, que tendem a desaparecer com o aumento do número de elementos finitos. Esse refinamento é necessário para eliminar a aproximação física envolvida na representação da casca por uma série de troncos de cone.

Dessa forma, ao melhorar a discretização do exemplo anterior para 250 elementos ao longo da casca, os erros relativos se tornam iguais a 0,06%, 0,07% e 0,31% para o deslocamento, o momento fletor e o esforço normal, respectivamente.

### 7.1.3 Aplicação 3: reservatório cilíndrico longo apoiado em base elástica

Esta aplicação trata de um reservatório composto por uma parede cilíndrica e uma placa circular de fundo, apoiado em um solo deformável, isto é, uma base elástica. A configuração e as dimensões dos reservatórios em questão são mostradas na Figura 50.

Figura 50 – Reservatório cilíndrico longo da aplicação 3.



Fonte: adaptado de SILVA (2017).

O módulo de elasticidade do material do reservatório é  $3,3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ , o coeficiente de Poisson é 0,2, o peso específico da água é  $10 \text{ kN/m}^3$  e o do concreto é  $25 \text{ kN/m}^3$ . O solo é considerado como uma base elástica com nível de rigidez intermediário, representada pelo coeficiente de reação vertical igual a  $50.000 \text{ kN/m}^3$ .

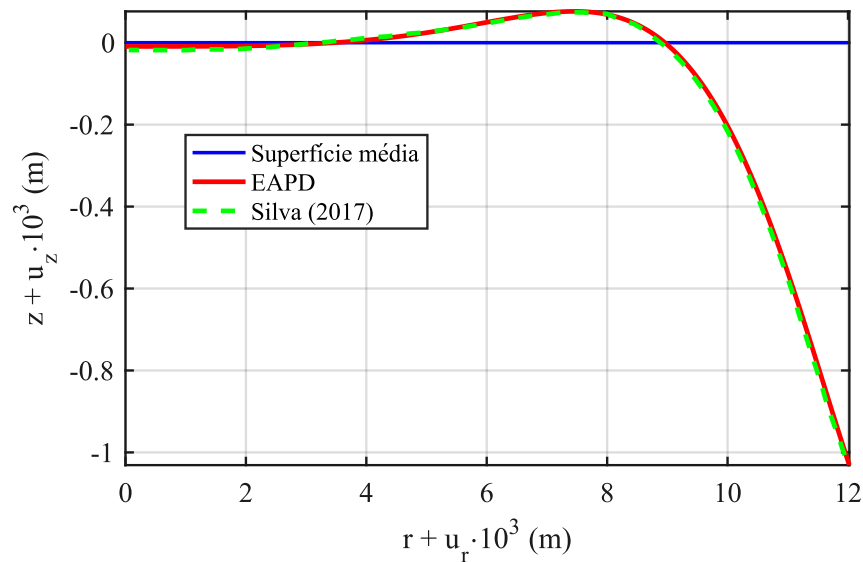
Na discretização são adotados 200 elementos finitos de comprimento uniforme para a placa e 200 elementos lineares para a casca cilíndrica. Para comparação dos resultados obtidos por SILVA (2017) e pelo EAPD, o carregamento atuante na placa devido ao peso próprio e ao peso do fluido não é considerado. Os resultados obtidos são apresentados da Figura 51 a 55 e na Tabela 10. Em suas análises, SILVA (2017) utiliza solução analítica via teorias clássicas de cascas e placas sobre bases elásticas.

Tabela 10 – Comparação e erro para os valores máximos do exemplo 2 de SILVA (2017).

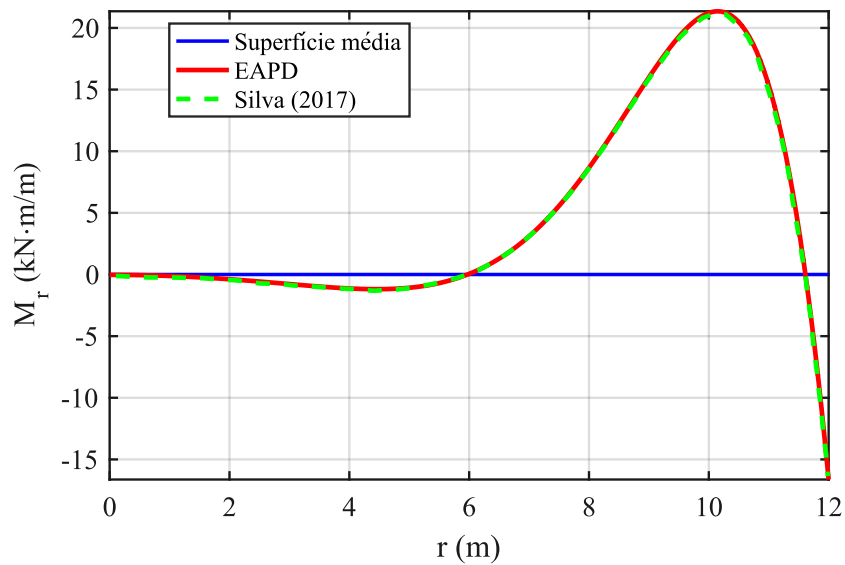
	Modelo		Erro (%)
	EAPD	SILVA (2017)	
$w_{máx}$ (mm)	0,076	0,076	0
$w_{mín}$ (mm)	1,031	1,028	0,29
$M_{r_{máx}}$ (kN · m/m)	16,63	16,91	1,65
$M_{r_{mín}}$ (kN · m/m)	-21,35	-21,19	0,76
$Q_{r_{máx}}$ (kN/m)	51,22	52,50	2,43
$Q_{r_{mín}}$ (kN/m)	-8,69	-8,61	0,99
$M_{z_{máx}}$ (kN · m/m)	29,88	29,83	0,16
$M_{z_{mín}}$ (kN · m/m)	-0,01	-1,29	99,61
$N_{\theta_{máx}}$ (kN/m)	465,90	467,37	0,32
$N_{\theta_{mín}}$ (kN/m)	-4,77	9,70	149,13

Fonte: autor (2018).

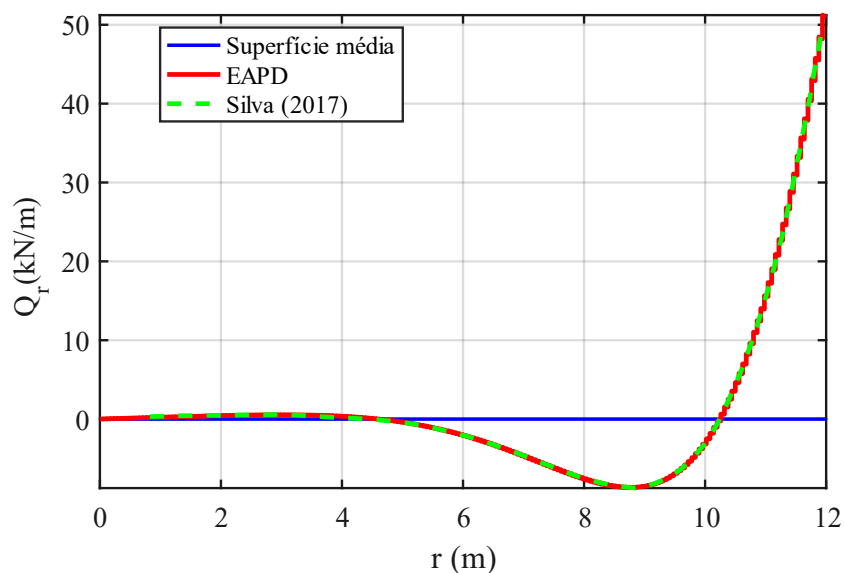
Figura 51 – Deslocamentos para aplicação 03.



Fonte: autor (2018).

Figura 52 –  $M_r$  para aplicação 03.

Fonte: autor (2018).

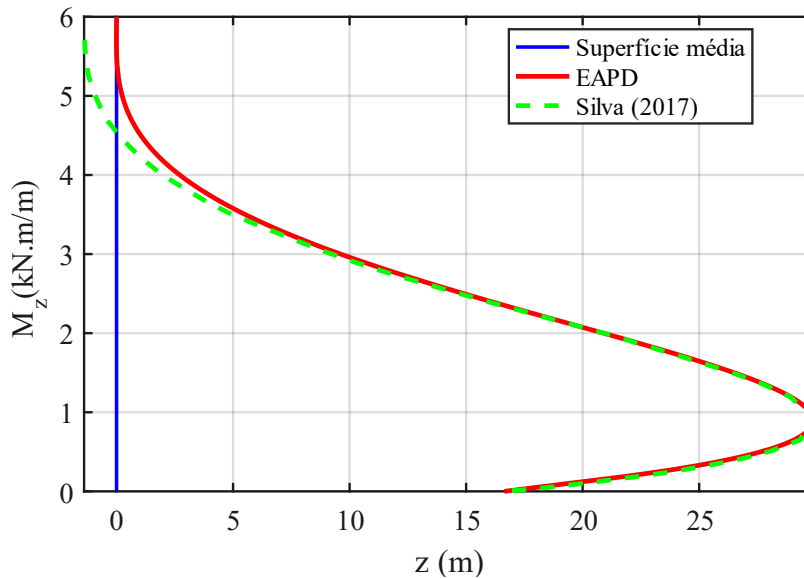
Figura 53 –  $Q_r$  para a aplicação 03.

Fonte: autor (2018).

Por meio da tabela e dos gráficos apresentados anteriormente, é possível notar que os resultados do EAPD são fisicamente coerentes e muito próximos aos valores da solução analítica obtida por SILVA (2017), com erros relativos máximos de 2,5%, exceto para  $M_{z_{\min}}$  e  $N_{\theta_{\min}}$ , atuantes no topo da casca. As diferenças nos dois itens mencionados podem ser

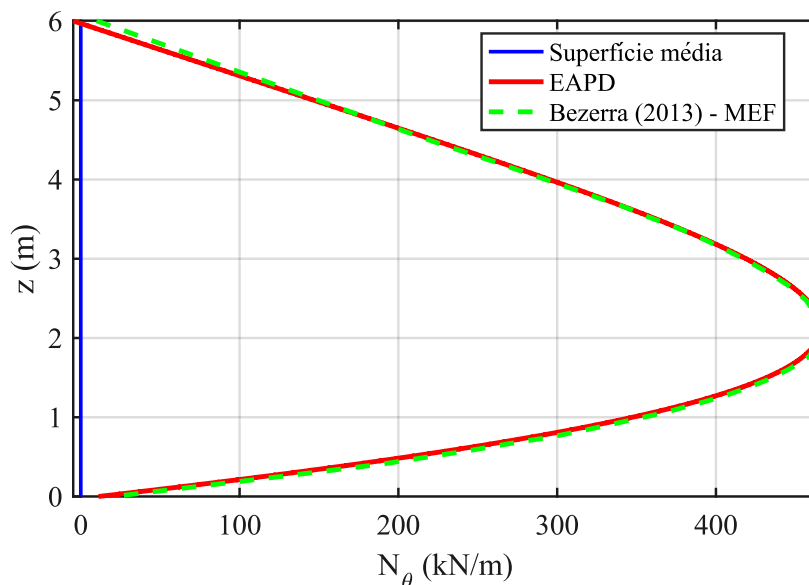
justificadas pela adoção de equações aproximadas utilizadas nas soluções de SILVA (2017) para reservatórios considerados longos, caso deste exemplo, nos quais são desconsiderados os temas referentes a dependência de bordos. Além disso, a diferença na metodologia de solução pode provocar diferenças nos resultados obtidos. A próxima aplicação, também apresentada por SILVA (2017), trata de um reservatório curto e apresenta soluções exatas para os esforços, sem a aproximação mencionada para a aplicação anterior.

Figura 54 –  $M_z$  para a aplicação 03.



Fonte: autor (2018).

Figura 55 –  $N_\theta$  para a aplicação 03.

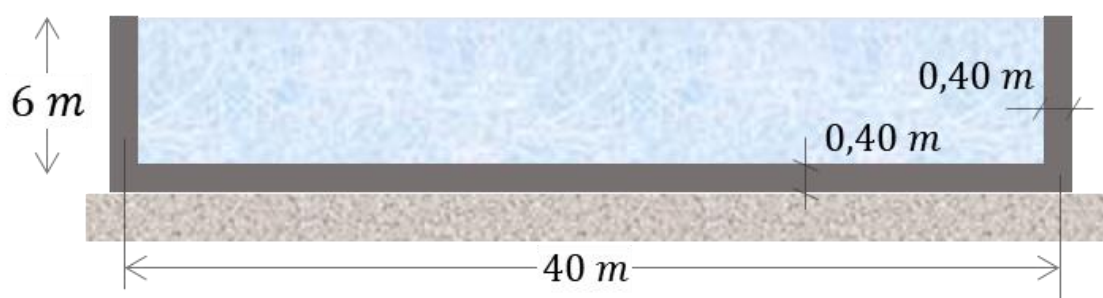


Fonte: autor (2018).

#### 7.1.4 Aplicação 4: reservatório cilíndrico curto apoiado em base elástica

Esta aplicação trata de um reservatório cilíndrico curto, sem cobertura, apoiado em base elástica, sujeito a carregamentos devido ao fluido em seu interior e ao peso próprio dos materiais, conforme ilustrado na Figura 56. Neste caso, para a solução analítica adotada por SILVA (2017) não é necessário usar equações aproximadas de independência de bordos.

Figura 56 – Reservatório cilíndrico da aplicação 4.



Fonte: SILVA (2017).

Os resultados para esta aplicação são apresentados da Figura 57 a 61 e na Tabela 11.

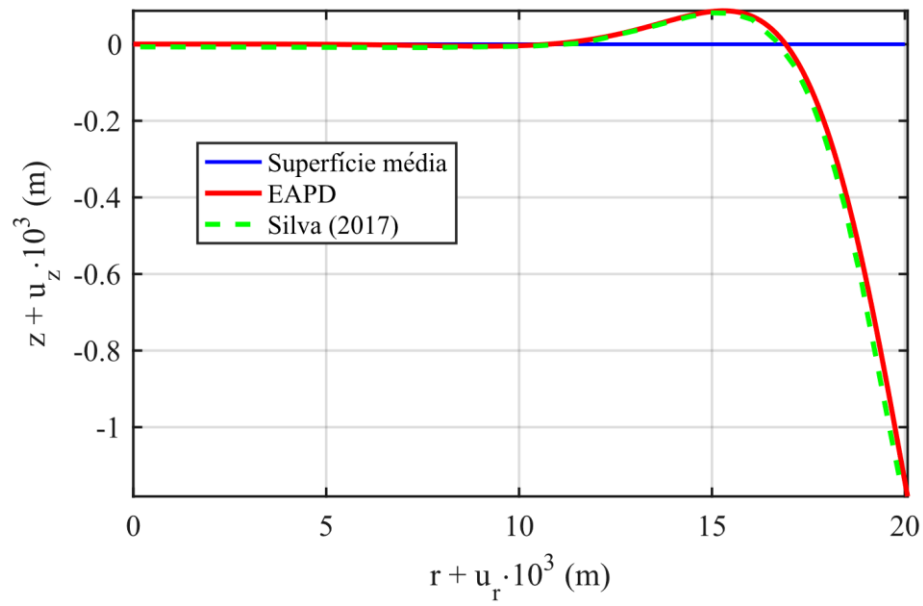
Tabela 11 – Valores e erros máximos para o exemplo 4 de SILVA (2017).

	Modelo		Erro (%)
	EAPD	SILVA (2017)	
$w_{máx}$ (mm)	0,087	0,087	0,00
$w_{mín}$ (mm)	-1,180	-1,178	0,17
$M_{r máx}$ (kN · m/m)	8,50	8,82	3,69
$M_{r mín}$ (kN · m/m)	-33,71	-33,52	0,57
$Q_{r máx}$ (kN/m)	57,38	60,00	4,37
$Q_{r mín}$ (kN/m)	-11,94	-11,83	0,96
$M_{z máx}$ (kN · m/m)	45,61	45,31	0,66
$M_{z mín}$ (kN · m/m)	0	0	0,00
$N_{\theta máx}$ (kN/m)	569,19	570,93	0,30
$N_{\theta mín}$ (kN/m)	34,51	46,12	25,17

Fonte: autor (2018).

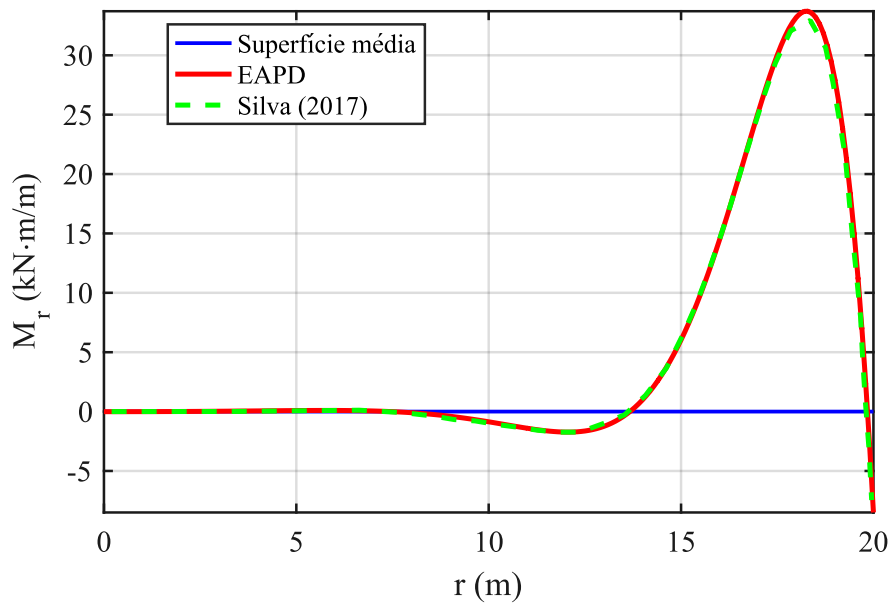


Figura 57 – Deslocamentos para o exemplo 4 de SILVA (2017).



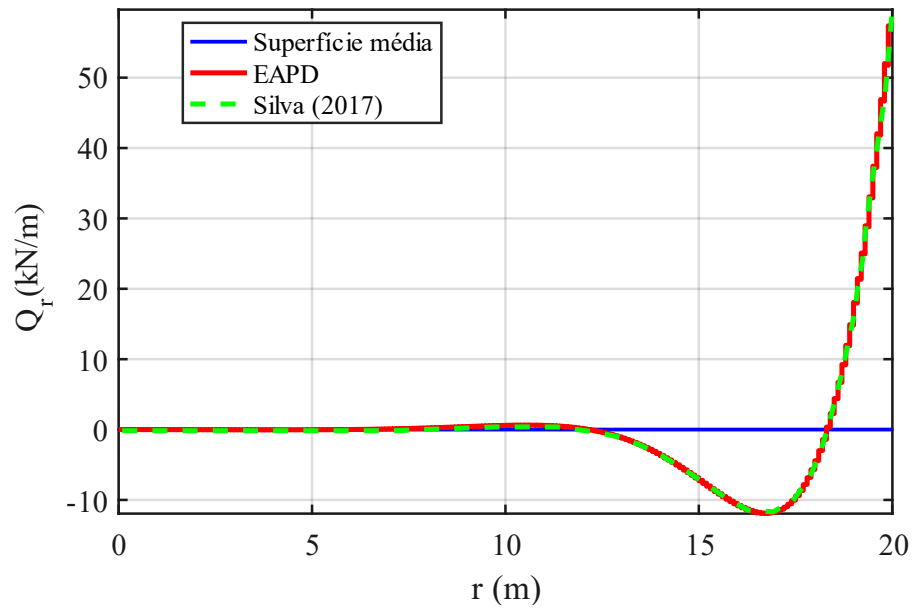
Fonte: autor (2018).

Figura 58 –  $M_r$  para o exemplo 4 de SILVA (2017).



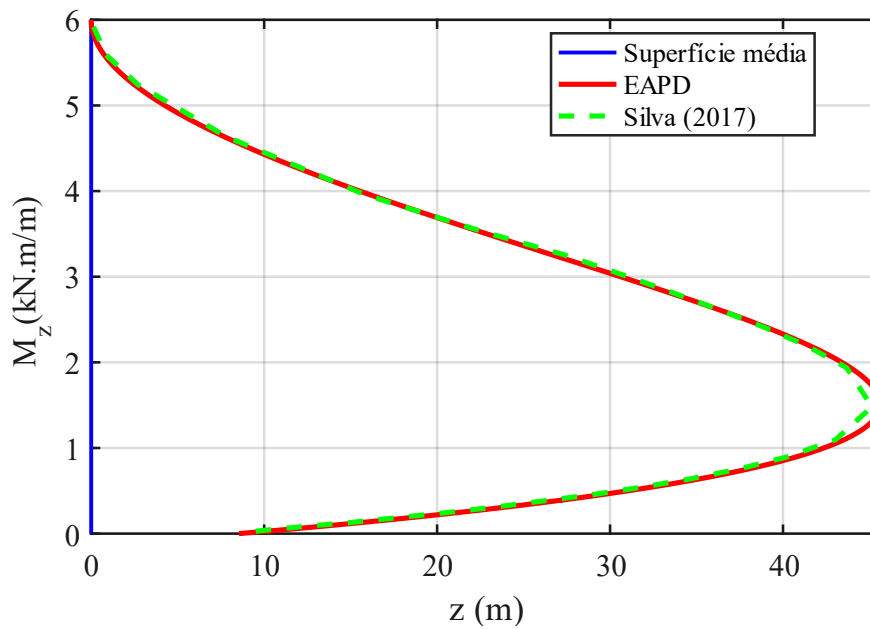
Fonte: autor (2018).

Figura 59 –  $Q_r$  para o exemplo 4 de SILVA (2017).

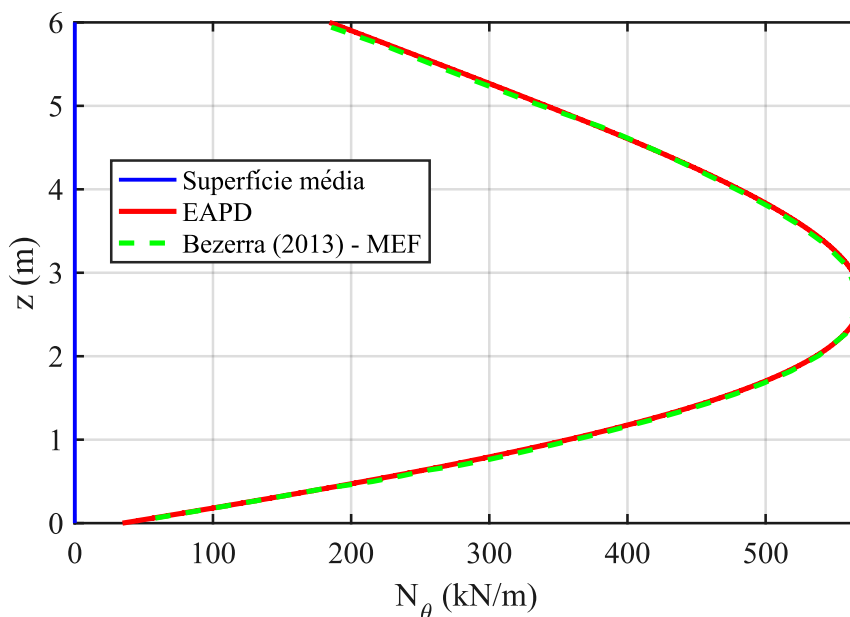


Fonte: autor (2018).

Figura 60 –  $M_z$  para o exemplo 4 de SILVA (2017).



Fonte: autor (2018).

Figura 61 –  $N_\theta$  para o exemplo 4 de SILVA (2017).

Fonte: autor (2018).

Como esperado, os erros relativos diminuiram consideravelmente, principalmente se tratando de  $M_{z_{min}}$  e  $N_{\theta_{min}}$ . Além disso, também é possível observar uma maior aproximação entre as curvas definidas pelo EAPD e pela fornecida por SILVA (2017). Os pequenos erros ainda presentes podem ser justificados pelas diferentes metodologias utilizadas, enquanto o EAPD utiliza métodos numéricos, SILVA (2017) utiliza soluções analíticas.

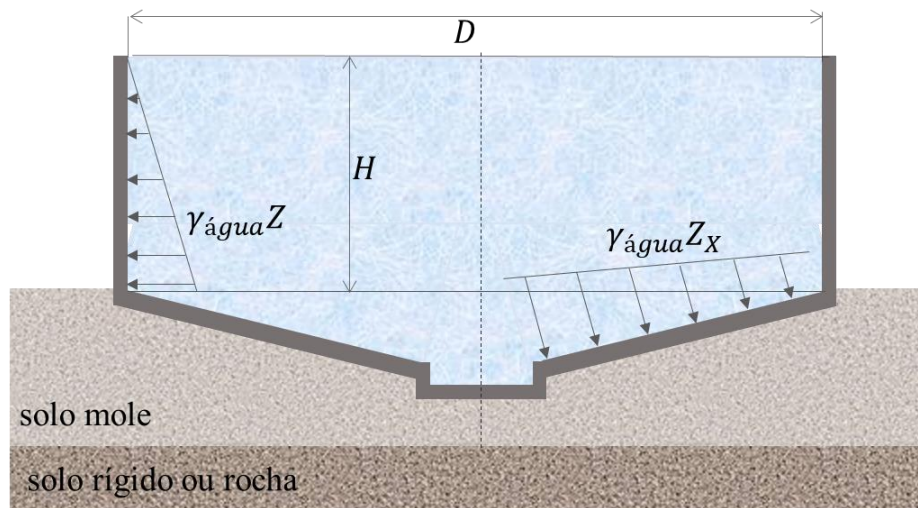
## 7.2 Aplicação 5 – reservatório aberto com base cônica

Reservatórios com base cônica geralmente são utilizados com a finalidade de facilitar a sua manutenção, pois, a abertura feita no fundo é usualmente empregada na sua limpeza. O objetivo principal deste exemplo é mostrar os efeitos da interação solo-estrutura nas forças de projeto de tanques cilíndricos com base cônica ou reta. Diferentes condições de sub-base são consideradas. Esse tipo de estrutura tem dois carregamentos predominantes: pressão da água (PA) e peso próprio (PP) dos tanques.

A Figura 62 mostra a representação do solo, carregamento e geometria do reservatório. Nesse tipo de reservatório, comumente existe um recalque diferencial sob o perímetro das paredes cilíndricas. Esse recalque diferencial é provocado principalmente pelo peso próprio das

paredes e algum carregamento concentrado ao longo do perímetro da base, bem como pela variação da espessura e propriedades das camadas de solo abaixo da base do reservatório.

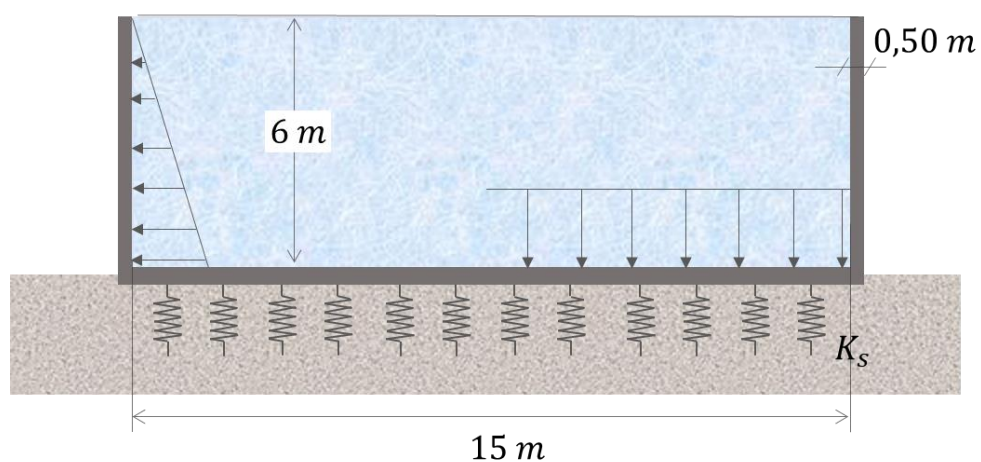
Figura 62 – Reservatório cilíndrico com base cônica apoiado em fundação elástica.



Fonte: Adaptado de MEZAINI e ASCE (2006).

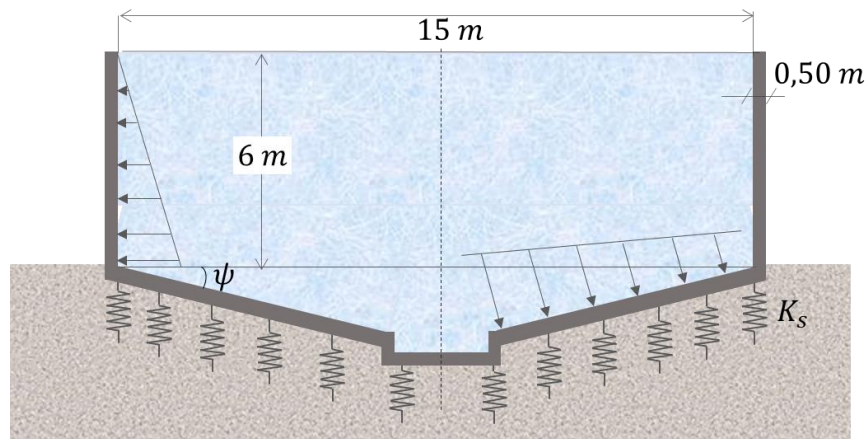
Para estudar o efeito da interação solo-estrutura e da geometria da base, dois tanques são analisados, conforme ilustrado nas Figuras 63 e 64.

Figura 63 – Tanque cilíndrico com placa circular na base



Fonte: Adaptado de MEZAINI e ASCE (2006).

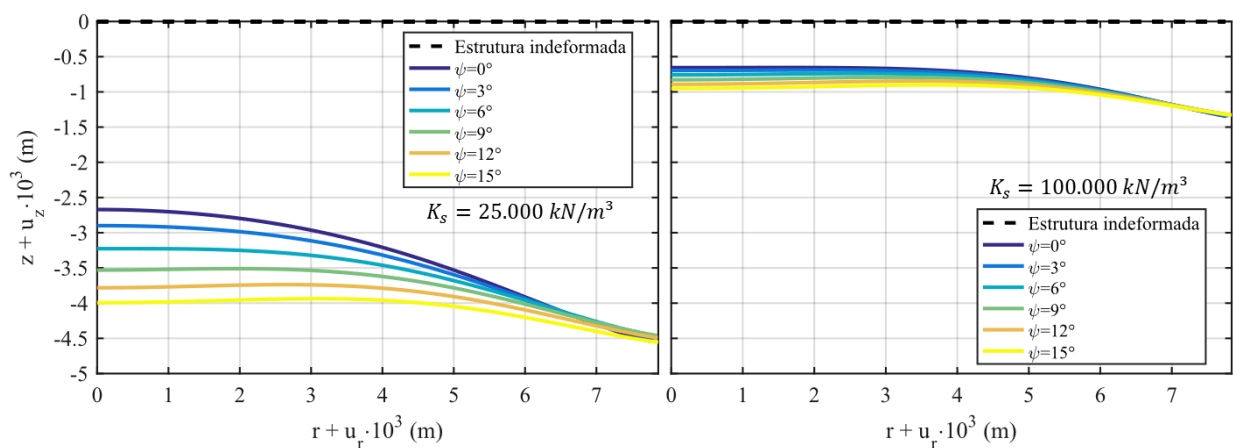
Figura 64 – Tanque cilíndrico com base cônica



Fonte: Adaptado de MEZAINI e ASCE (2006).

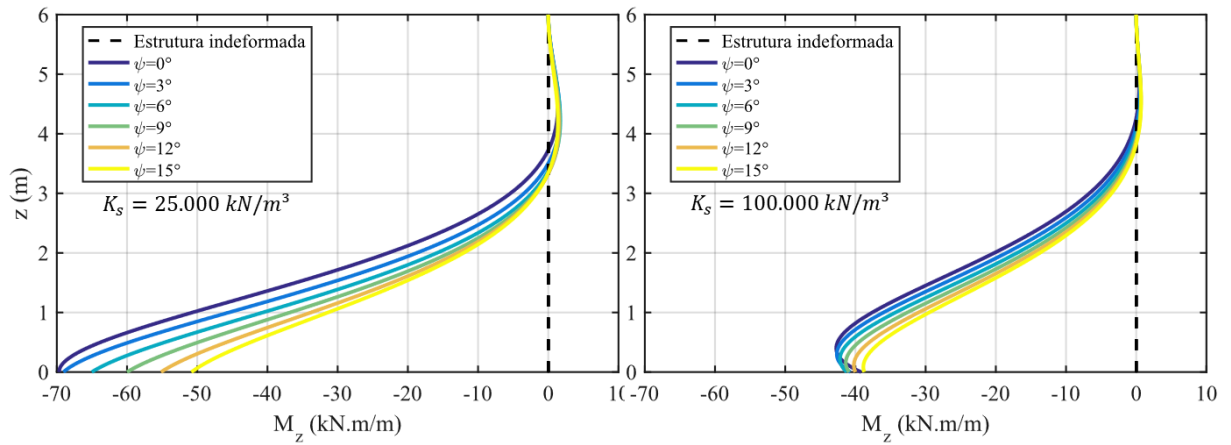
Como mostrado nas figuras acima, ambos os tanques possuem 15 metros de diâmetro interno, altura da parede de 6 metros e espessura da parede e base de 0,50 metros. Os dois tanques são analisados para dois tipos diferentes de condições de solo: rígido e mole. A constante de reação da fundação elástica ( $K_S$ ) para cada tipo de solo é dada por  $100.000 \text{ kN/m}$  e  $25.000 \text{ kN/m}^3$ , respectivamente. Para analisar a influência da inclinação da base, é feita uma modelagem paramétrica com  $\psi$  variando entre  $0^\circ$  e  $15^\circ$ , em que  $\psi = 0^\circ$  representa a base plana. Os resultados obtidos estão apresentados da Figura 65 a 69.

Figura 65 – Deslocamentos do fundo do reservatório.



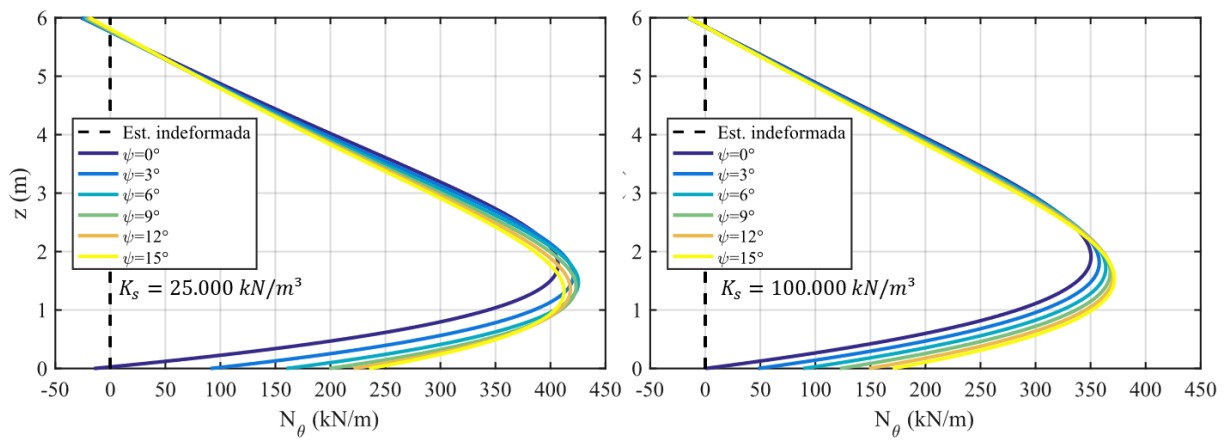
Fonte: autor (2018).

Figura 66 – Momento fletor ao longo da parede.



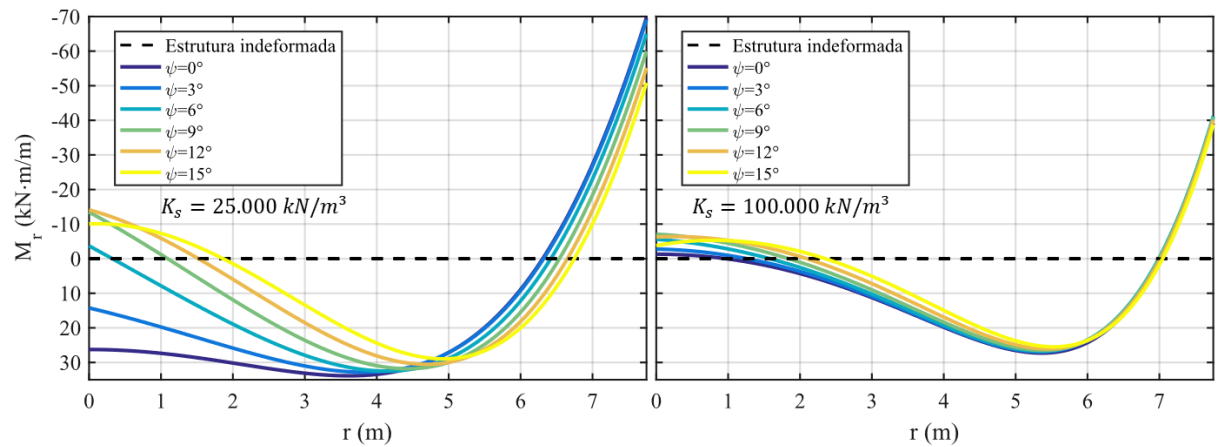
Fonte: autor (2018).

Figura 67 – Esforço radial ao longo da parede.



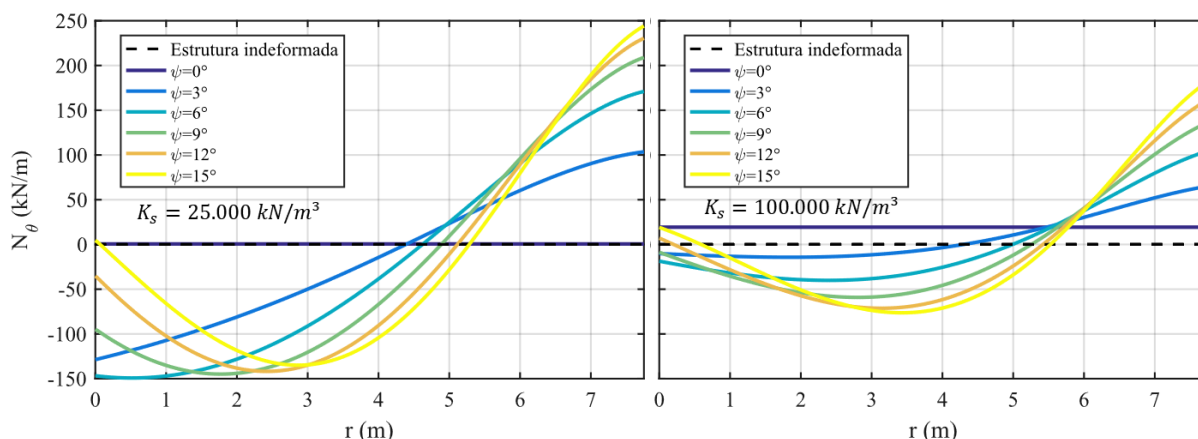
Fonte: autor (2018).

Figura 68 – Momento fletor ao longo do fundo do reservatório.



Fonte: autor (2018).

Figura 69 – Esforço radial ao longo do fundo do reservatório.



Fonte: autor (2018).

A Figura 65 mostra que, para ambos os solos, os deslocamentos no centro do fundo do reservatório aumentaram enquanto a extremidade não sofreu variações significativas. No centro, a diferença entre os deslocamentos verticais para base plana ( $\psi = 0$ ) e o caso de maior inclinação de base ( $\psi = 15^\circ$ ) são de 47,50% para o solo mole e 38,50% para o solo rígido.

Para o momento fletor na parede,  $M_z$ , a Figura 66 mostra uma redução próximo a base de  $-69,67 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  para  $-50,83 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ , totalizando uma redução de 27,04% para o caso mais extremo e solo mole, enquanto para o solo rígido essa redução cai para 9,09% variando entre  $-42,73 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  e  $-38,87 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ . Já para o momento ao longo do fundo, Figura 68, houve uma redução de 27,04% para o momento negativo máximo e de 14,44% para o momento positivo máximo em solo mole e de 1,09% para o momento negativo máximo e 6,59% para o momento positivo máximo em solo rígido.

Diferente da redução ocorrida para os momentos fletores, o esforço radial aumentou tanto na parede quanto na base de fundo, para ambos os solos, como mostra a Figura 67 e a Figura 69. Em termos de porcentagem, observa-se um aumento de 4,5% para o solo mole e 6,06% para o solo rígido, em relação ao esforço radial positivo na parede. Já para a base de fundo observa-se uma variação de  $0,58 \text{ kN}/\text{m}$  até  $244,07 \text{ kN}/\text{m}$  para o solo mole e de  $19,31 \text{ kN}/\text{m}$  até  $181,92 \text{ kN}/\text{m}$  para o solo rígido.

As tabelas 12 e 13 mostram os valores extremos obtidos no exemplo anterior.

Tabela 12 – Valores máximos e mínimos para solo mole.

<b>Inclinação (<math>\psi</math>)</b>	<b>0°</b>	<b>3°</b>	<b>6°</b>	<b>9°</b>	<b>12°</b>	<b>15°</b>
$w_{min}$ (mm)	-4,54	-4,51	-4,47	-4,46	-4,49	-4,56
$w_{max}$ (mm)	-2,67	-2,90	-3,23	-3,51	-3,74	-3,94
$M_{r_{min}}$ (kNm/m)	-69,66	-69,05	-65,02	-60,00	-55,15	-50,82
$M_{r_{max}}$ (kNm/m)	33,86	32,83	32,50	31,82	30,55	28,97
$N_{\theta_{max}}$ placa (kN/m)	0,58	103,49	170,92	208,86	230,38	244,07
$N_{\theta_{min}}$ placa (kN/m)	0,58	-128,62	-149,24	-144,92	-141,89	-135,00
$Q_{r_{min}}$ (kNm/m)	-4,25	-8,35	-15,73	-17,75	-16,84	-15,64
$Q_{r_{max}}$ (kNm/m)	74,58	73,98	72,72	71,39	70,11	68,85
$M_{z_{max}}$ (kNm/m)	69,67	69,06	65,03	60,01	55,16	50,83
$M_{z_{min}}$ (kNm/m)	-1,36	-1,64	-1,71	-1,64	-1,51	-1,37
$N_{\theta_{max}}$ parede (kN/m)	406,98	420,81	425,43	423,32	418,22	412,43
$N_{\theta_{min}}$ parede (kN/m)	-26,46	-25,98	-24,36	-22,45	-20,64	-19,04

Fonte: autor (2018).

Tabela 13 – Valores máximos e mínimos para solo rígido.

<b>Inclinação (<math>\psi</math>)</b>	<b>0°</b>	<b>3°</b>	<b>6°</b>	<b>9°</b>	<b>12°</b>	<b>15°</b>
$w_{min}$ (mm)	-1,35	-1,34	-1,33	-1,33	-1,33	-1,33
$w_{max}$ (mm)	-0,65	-0,69	-0,74	-0,79	-0,85	-0,90
$M_{r_{min}}$ (kNm/m)	-39,17	-40,72	-41,22	-40,89	-39,98	-38,74
$M_{r_{max}}$ (kNm/m)	27,29	26,93	26,73	26,49	26,09	25,49
$N_{\theta_{max}}$ placa (kN/m)	19,31	65,07	104,44	136,23	161,45	181,92
$N_{\theta_{min}}$ placa (kN/m)	19,31	-14,29	-40,14	-59,15	-71,32	-76,40
$Q_{r_{min}}$ (kNm/m)	-11,26	-11,42	-11,79	-12,16	-12,42	-12,55
$Q_{r_{max}}$ (kNm/m)	74,47	74,78	74,72	74,19	73,35	72,27
$M_{z_{max}}$ (kNm/m)	39,17	40,72	41,22	40,89	39,98	38,74
$M_{z_{min}}$ (kNm/m)	-0,45	-0,54	-0,62	-0,66	-0,69	-0,69
$N_{\theta_{max}}$ parede (kN/m)	350,43	357,92	363,86	367,95	370,40	371,69
$N_{\theta_{min}}$ parede (kN/m)	-15,38	-15,82	-15,91	-15,71	-15,32	-14,82

Fonte: autor (2018).



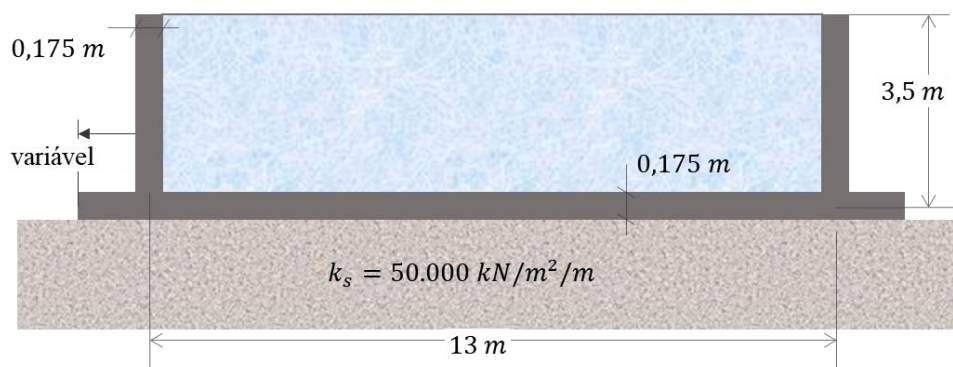
Pode-se concluir, a partir dos dados e figuras analisadas que, para essa geometria de reservatório, a utilização da inclinação da base fornece uma redução dos momentos fletores na parede e no fundo do reservatório, bem como na ligação parede-fundo. Em contrapartida, os valores absolutos de deslocamentos e esforço radial aumentam de acordo com o aumento da inclinação do fundo. Esse fato ocorre para ambas rigidezes do solo, mole e rígido.

É possível concluir também que quanto maior a deformabilidade do solo, maior será a influência da inclinação da base, como visto da Figura 68 a 72.

### 7.3 Aplicação 6 - reservatório apoiado em base elástica com aba

Esta aplicação trata do estudo da influência das abas em reservatórios apoiados em base elástica. A configuração geométrica do reservatório e alguns dados numéricos são apresentados na Figura 70. Diferentes condições de sub-base são consideradas.

Figura 70 – Modelo de um reservatório apoiado em uma base elástica com aba.



Fonte: autor (2018)

O carregamento considerado é devido ao peso próprio da água e ao peso próprio do material do reservatório. Inicialmente foram feitas análises sem aba e com a aba de comprimento igual a 30 centímetros a fim de verificar as principais variações de esforços e deslocamentos da estrutura.

A Figura 71 mostra um esquema dos carregamentos atuantes na estrutura, em que:

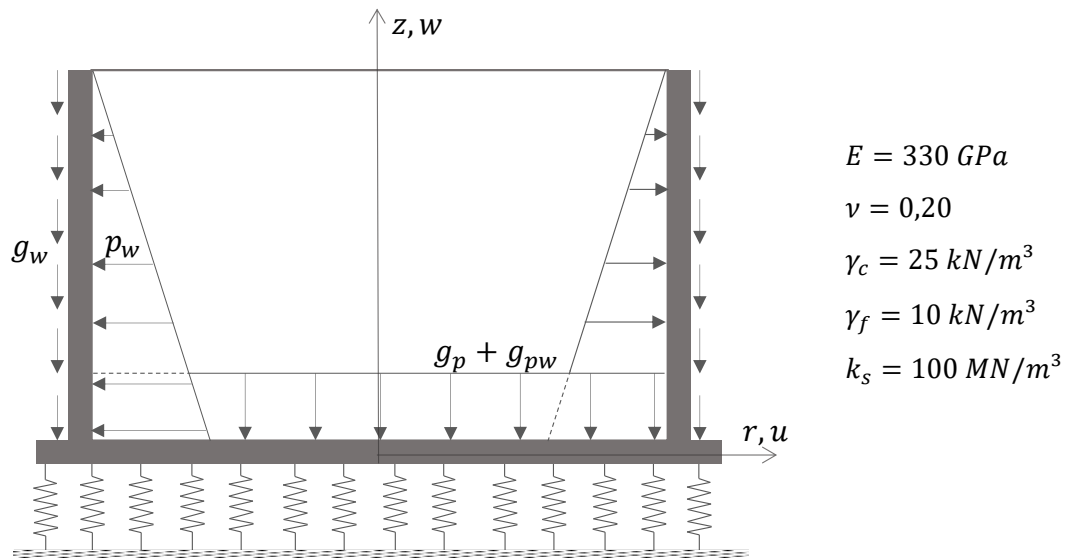
$g_w$  - carregamento distribuído ao longo da parede devido a ação do seu peso próprio;

$p_w$  - pressão hidrostática exercida na parede devido ao fluido;

$g_p$  - peso próprio da placa de fundo;

$g_{pw}$  - peso de fluido atuando sobre a placa.

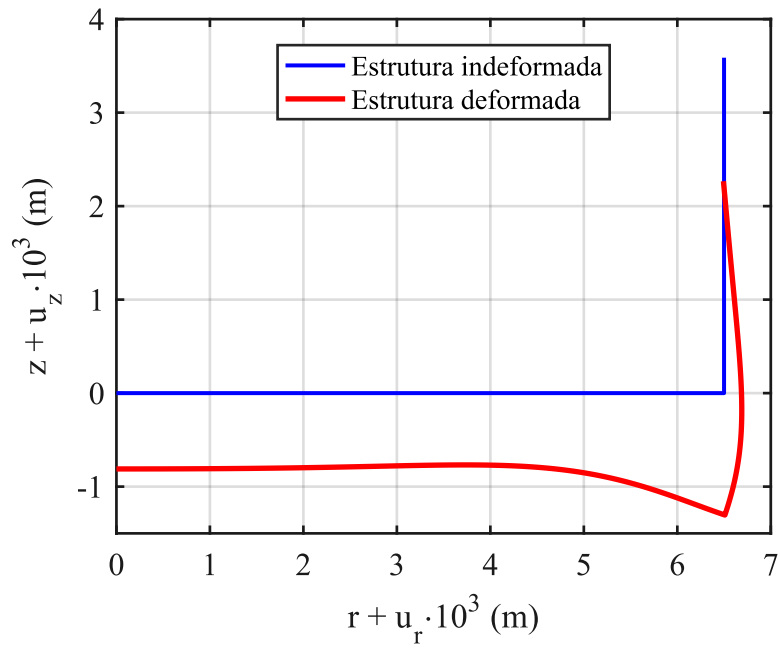
Figura 71 – Carregamentos atuantes no reservatório apoiado em base elástica.



Fonte: autor (2018).

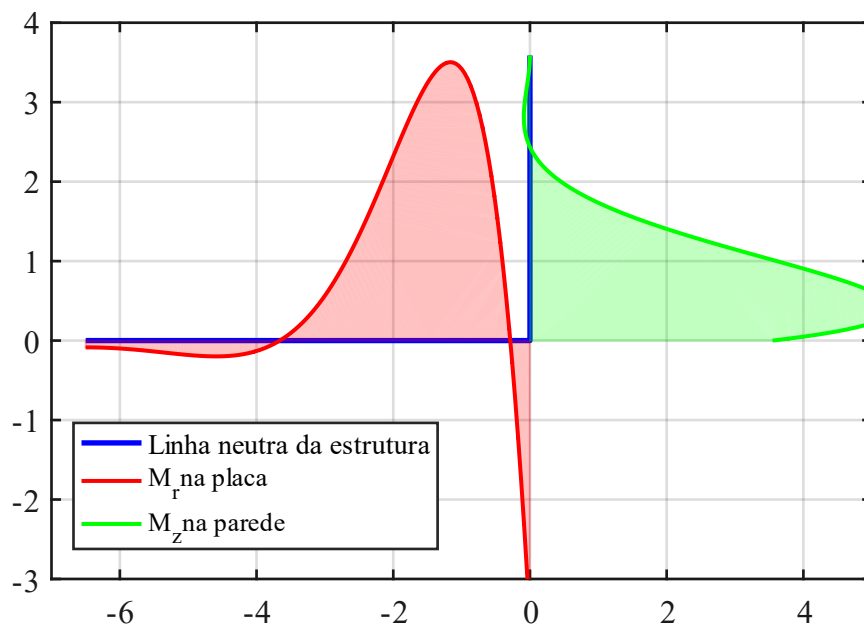
As Figuras 72 e 73 apresentam a configuração deformada e o diagrama momento fletor para o reservatório sem aba, respectivamente. Já as Figuras 74 e 75 apresentam a configuração deformada e o diagrama de momentos fletores para o reservatório com aba de 30 centímetros.

Figura 72 – Reservatório sem aba e sua deformada.



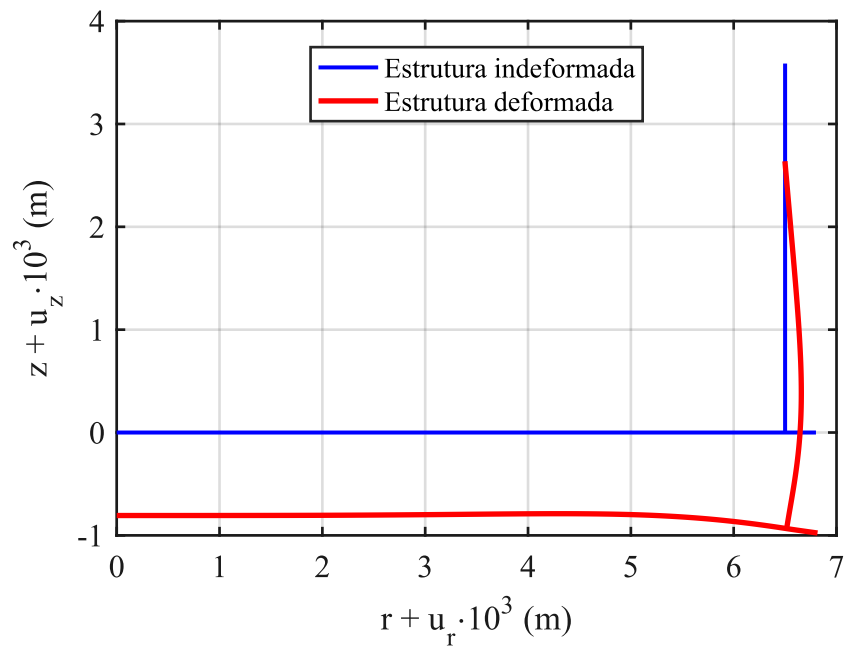
Fonte: autor (2018)

Figura 73 – Diagrama de Momento fletor para reservatório sem aba.



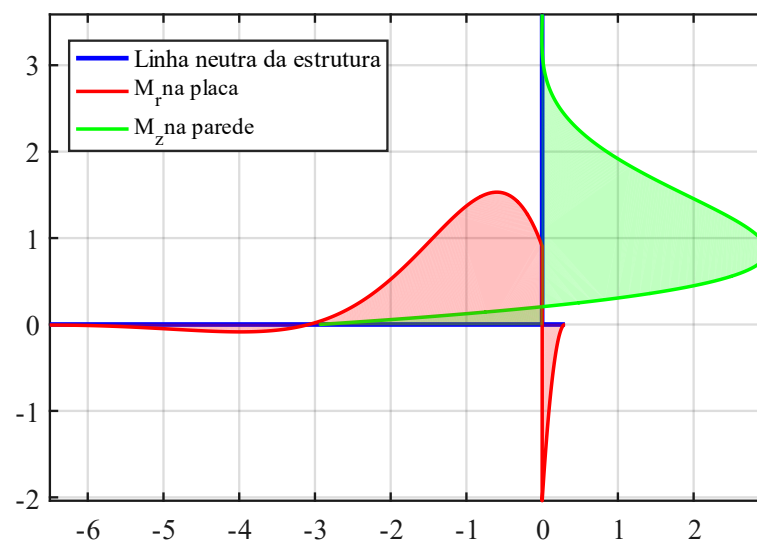
Fonte: autor (2018)

Figura 74 – Reservatório com aba de 30 cm e sua deformada



Fonte: autor (2018)

Figura 75 – Diagrama de Momento Fletor para o reservatório com aba de 30 cm.



Fonte: autor (2018)

A Tabela 14 mostra os valores máximos para cada caso.

Tabela 14 – Comparação de deslocamentos e esforços para aplicação

Comprimento da aba ( <i>m</i> )	0	0,3
Deslocamento horizontal da parede ( <i>mm</i> )	0,1895	0,1577
Deslocamento vertical da parede ( <i>mm</i> )	-1,3209	-0,9771
Deslocamento horizontal da placa ( <i>mm</i> )	0,0090	0,0153
Deslocamento vertical da placa ( <i>mm</i> )	-1,3038	-0,9771
Ms máximo na parede ( <i>kNm/m</i> )	5,3083	2,9685
Ms mínimo na parede ( <i>kNm/m</i> )	-0,0896	-2,9431
Ms máximo na placa ( <i>kNm/m</i> )	3,5455	0,0854
Ms mínimo na placa ( <i>kNm/m</i> )	-3,5038	-1,5311
Ms na placa na ligação ( <i>kNm/m</i> )	3,5455	-0,9052
Ms na parede na ligação ( <i>kNm/m</i> )	3,5503	-2,9431
Ms na aba na ligação ( <i>kNm/m</i> )	0	2,0392

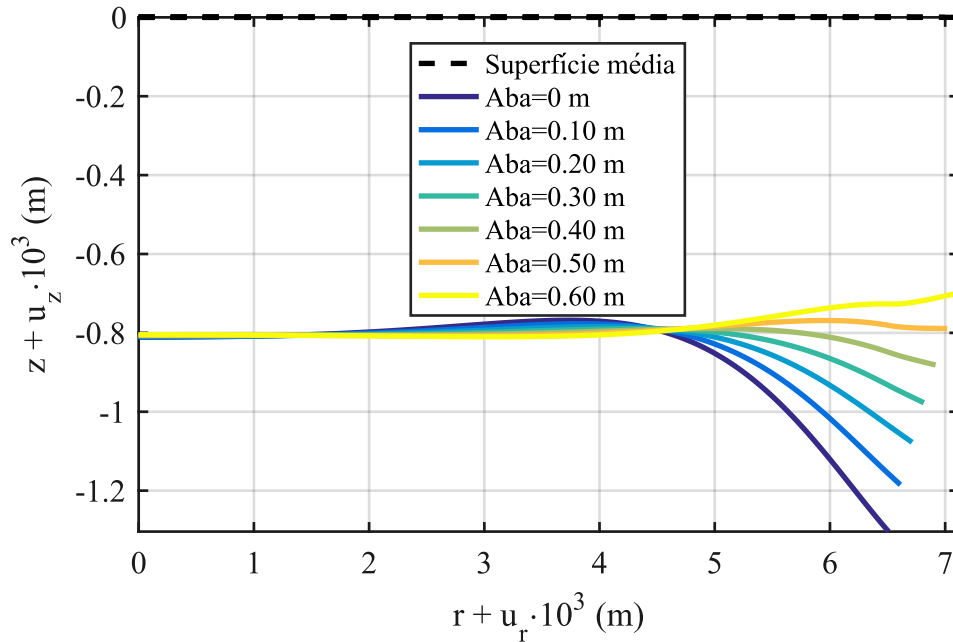
Fonte: autor (2018).

É possível notar que a adição de uma aba de 30 centímetros ao reservatório proporcionou uma redução nos deslocamentos e nos momentos máximos positivos da parede cilíndrica e da placa. Em contrapartida, essa aba também provoca um aumento dos momentos fletores mínimos na ligação.

Para analisar a influência de outros comprimentos de aba, é apresentado para o mesmo reservatório os esforços e deslocamentos causados por abas com comprimento de até 60 centímetros. A Figura 76 mostra o deslocamento da placa de fundo para os diferentes comprimentos de aba.

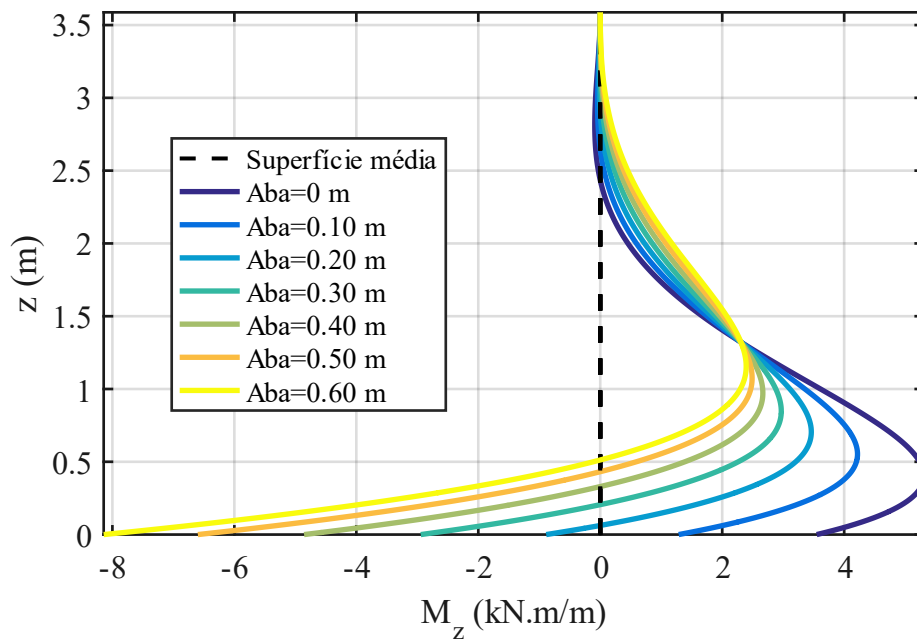
Da Figura 77 a 80 é mostrado as variações nos momentos fletores, esforços radiais e cortantes para reservatórios com aba de até 60 centímetros.

Figura 76 – Deslocamentos do fundo da placa para reservatórios com aba de até 60 centímetros.



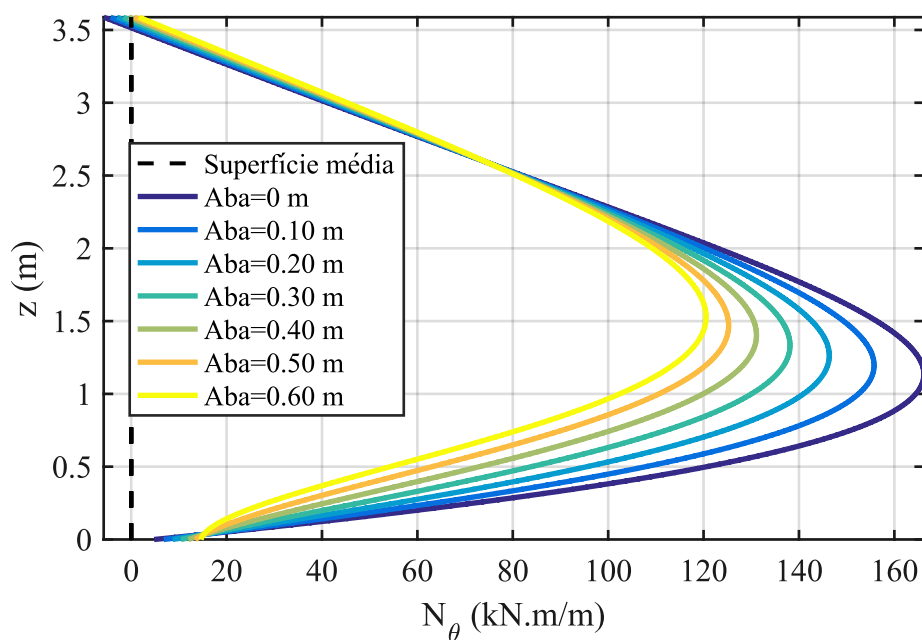
Fonte: Autor (2018).

Figura 77 – Variação do momento fletor ao longo da parede para diferentes comprimentos de aba.



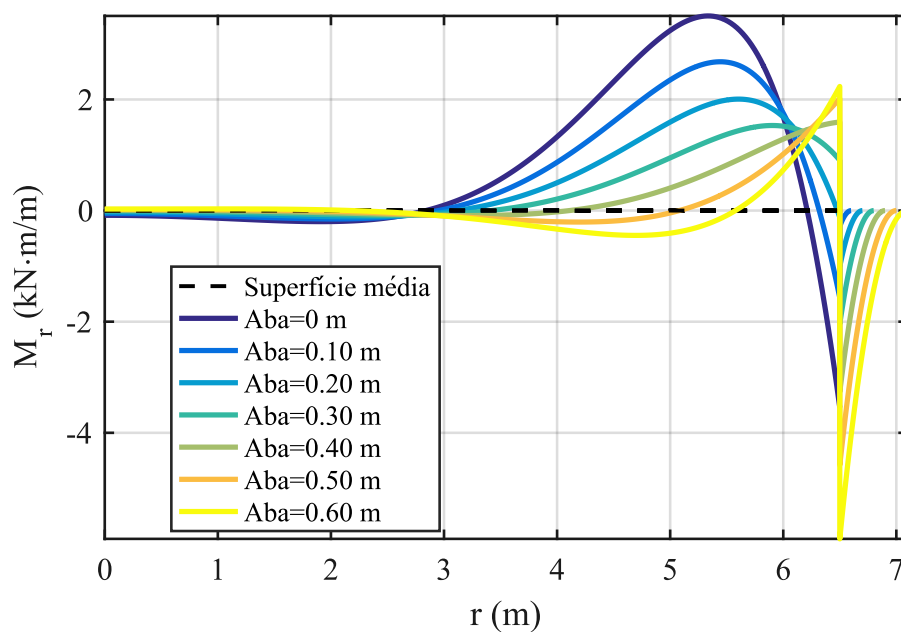
Fonte: Autor (2018).

Figura 78 – Variação no esforço radial para diferentes comprimentos de aba.



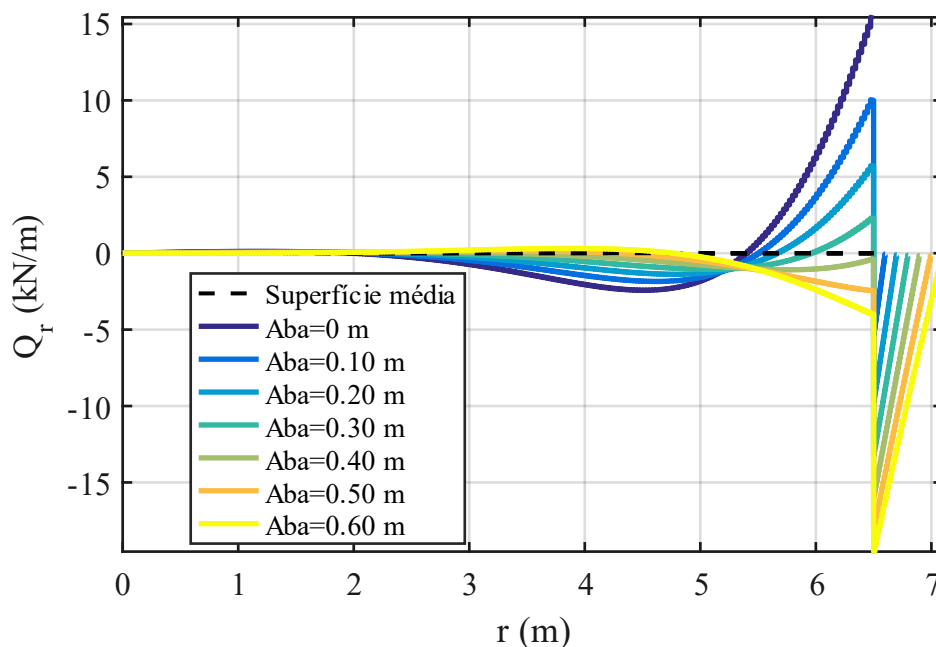
Fonte: Autor (2018).

Figura 79 – Variação do momento fletor na placa para diferentes comprimentos de aba.



Fonte: Autor (2018).

Figura 80 – Variação no esforço cortante ao longo da placa e aba para diferentes comprimentos de aba.



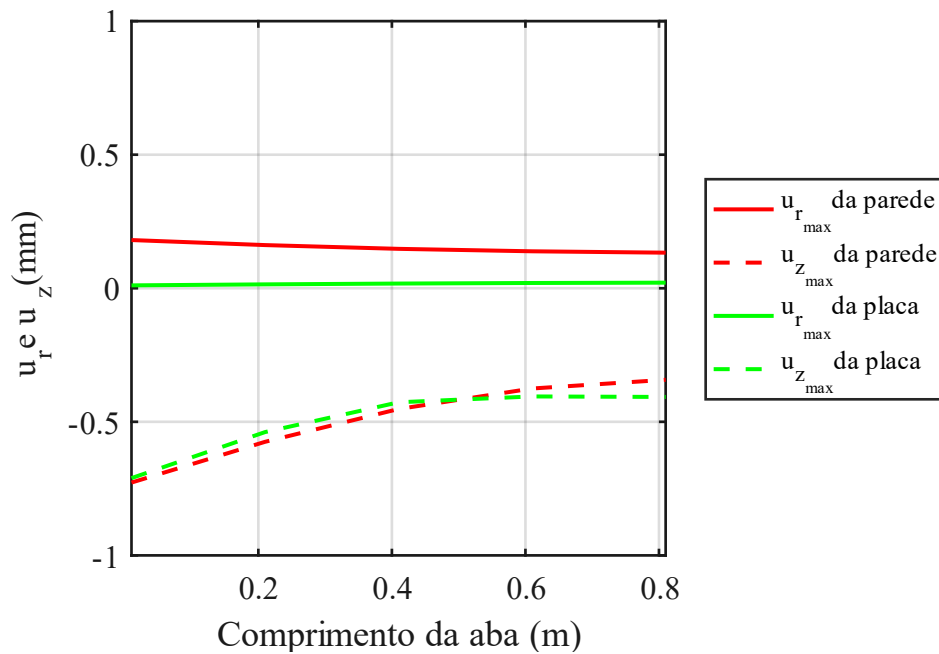
Fonte: Autor (2018).

A Figura 81 apresenta a variação nos deslocamentos máximos de acordo com a variação do comprimento da aba. As Figuras 82 e 83 mostram a variação no momento fletor máximo e mínimo da parede, placa e aba para os diferentes comprimentos da aba. Por fim, a Figura 84 mostra os momentos fletores atuantes em cada elemento do reservatório na ligação placa-parede-aba.

A Figura 81 mostra que o aumento da aba contribui para a redução do deslocamento máximo da estrutura e que esses deslocamentos tendem a estabilizar com comprimentos de aba superiores a 60 centímetros. Na Figura 82 pode-se notar uma redução dos momentos fletores máximos positivos em aproximadamente 49% para a parede e 63% para a placa, embora o comportamento da placa não seja linear. Já na aba, o momento fletor aumenta de zero até aproximadamente  $9 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ . Os momentos negativos máximos são mostrados na Figura 83, na qual se nota uma redução no esforço da placa e um aumento de zero até aproximadamente  $-11 \text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  na parede.

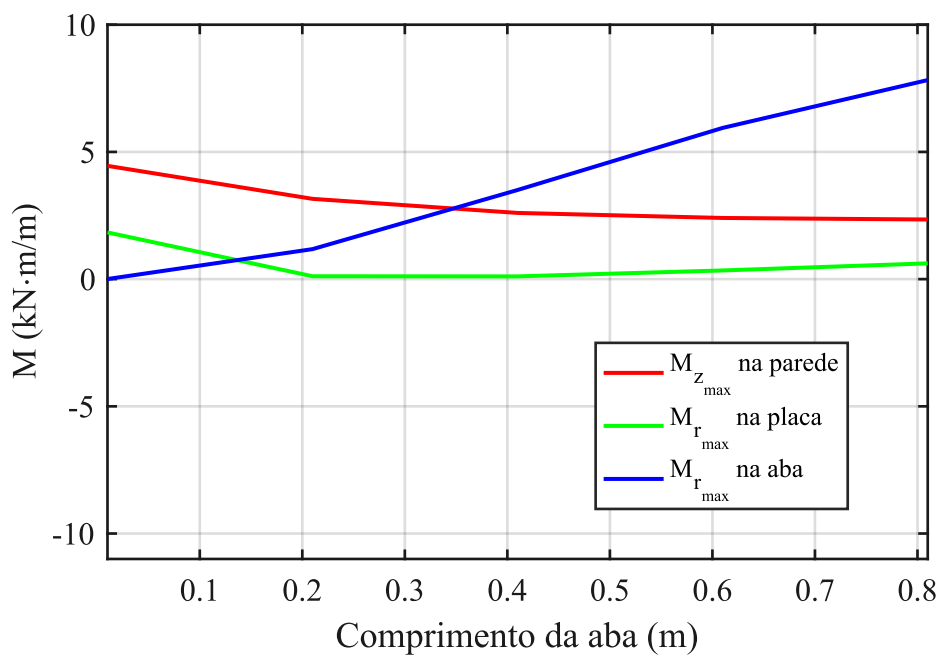


Figura 81 – Deslocamentos máximos da parede e da placa de fundo do reservatório.



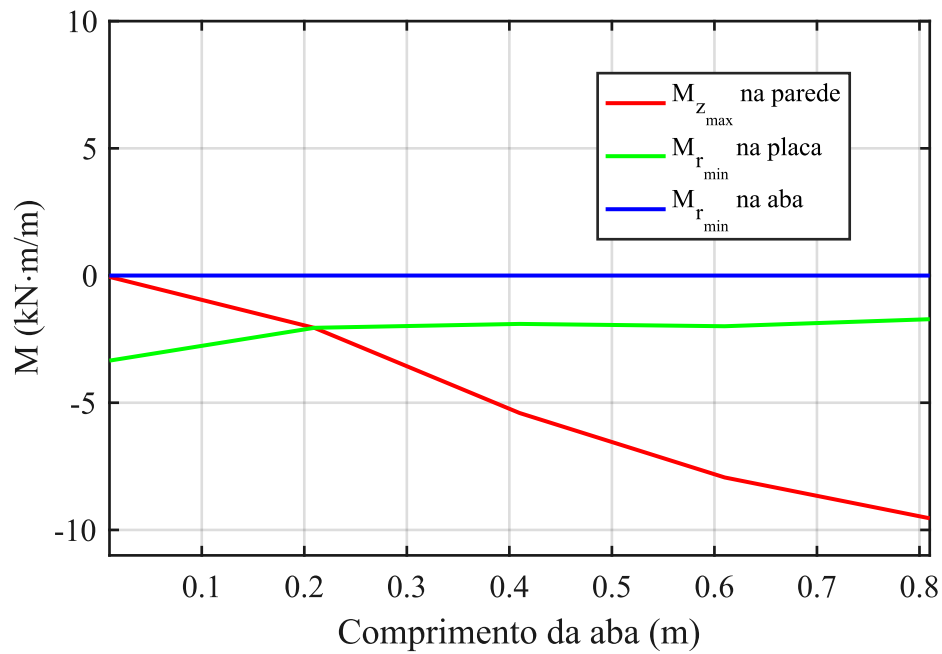
Fonte: autor (2018).

Figura 82 – Variação do momento fletor máximo positivo no reservatório.



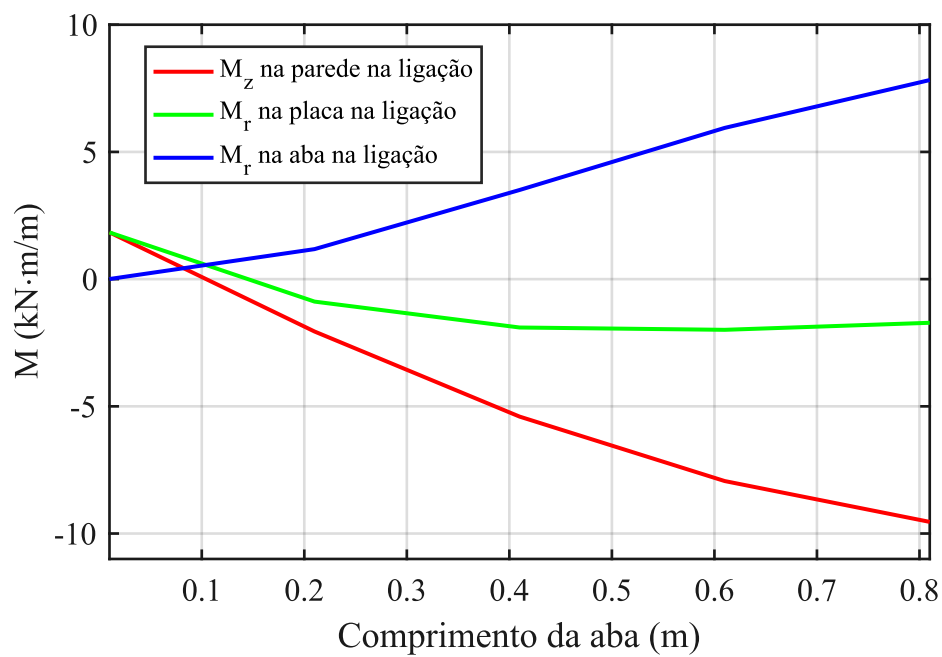
Fonte: autor (2018).

Figura 83 – Variação do momento fletor mínimo no reservatório.



Fonte: autor (2018).

Figura 84 – Variação do momento fletor na ligação placa-parede-aba do reservatório.



Fonte: autor (2018).

Pela Figura 84, nota-se um equilíbrio de tensões para comprimento de aba de 15 centímetros, e o aumento progressivo do momento fletor para aba e parede com o aumento da aba.

#### 7.4 Aplicação 7 - aproximação de Hannah para cúpulas esféricas

Segundo EL DEBS (1976), a aproximação de Hanna indica uma simplificação que permite o cálculo dos esforços da teoria de flexão em cascas esféricas com espessura variável, baseando em resultados experimentais em cúpulas esféricas de alumínio, com espessura variável. Essa aproximação consiste em admitir que as perturbações de borda da casca esférica de espessura variável sejam iguais as da mesma casca com a espessura constante conveniente. Essa espessura é a que a casca de espessura variável apresenta a uma distância  $S_a$  da borda, determinada com:

$$S_a = \frac{\sqrt{a \cdot h_a}}{2} \quad (225)$$

na qual  $a$  é o raio da casca e  $h_a$  é a espessura média da região do engrossamento.

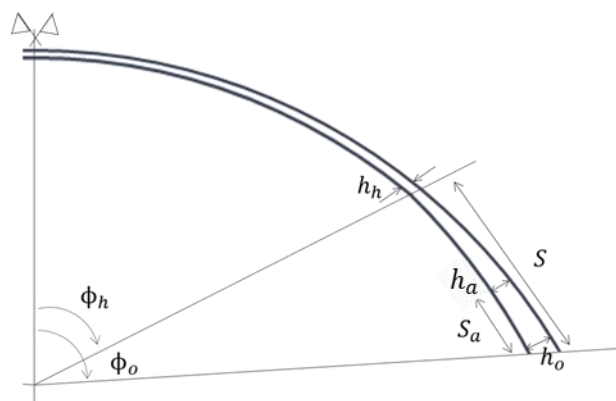
$$h_a = \frac{h_o + h_c}{2} \quad (226)$$

Essa aproximação exige que a região de engrossamento se estenda pelo menos a uma distância  $S$  da borda, dada por:

$$S = 2\sqrt{a \cdot h_a} \quad (227)$$

A Figura 85 mostra uma cúpula com engrossamento da região próxima à borda e as variáveis citadas anteriormente.

Figura 85 – Cúpula esférica com variação da espessura.



Fonte: adaptado de EL DEBS (1976)

De modo a verificar a influência desta simplificação, são apresentadas duas cúpulas com geometrias diferentes e espessura variável compatível com a aproximação de Hannah e também com espessura constante segundo o que sugere a simplificação.

#### 7.4.1 Cúpula com raio 20 metros e ângulo de abertura $\phi_o$ igual a $60^\circ$

Esta aplicação trata de uma cúpula esférica com raio 20 metros, ângulo de abertura da cúpula igual a  $60^\circ$ , espessura variável com  $h_o$  igual a 12 centímetros e  $h_c$  igual a 8 centímetros. As cargas são devido ao peso próprio do concreto armado ( $25 \text{ kN/m}^3$ ) e uma carga acidental de  $10 \text{ kN/m}^2$ . O módulo de elasticidade adotado é  $200 \text{ GPa}$  e são usados 200 elementos finitos na modelagem.

O cálculo dos elementos necessários para aproximação de Hannah resulta em:

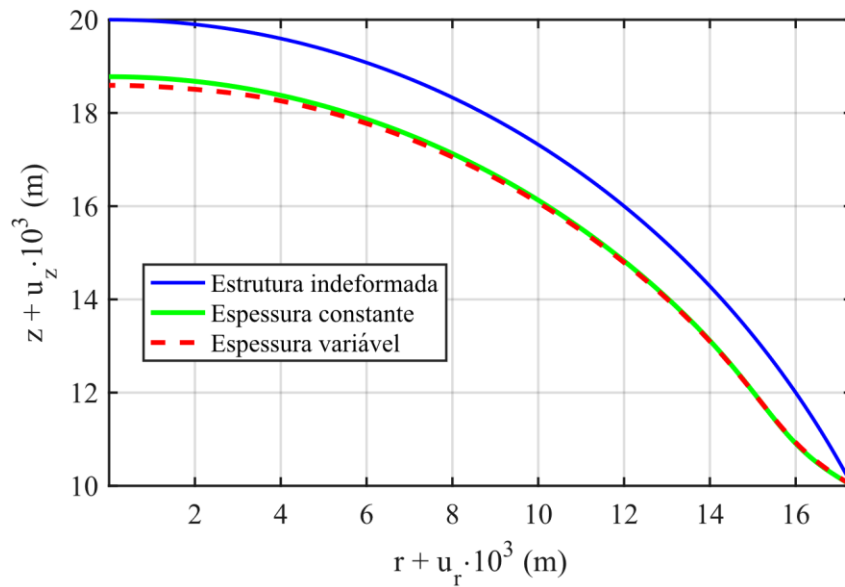
$$h_a = 0,10 \text{ m} \quad (228)$$

$$S_a = 0,7071 \text{ m} \quad (229)$$

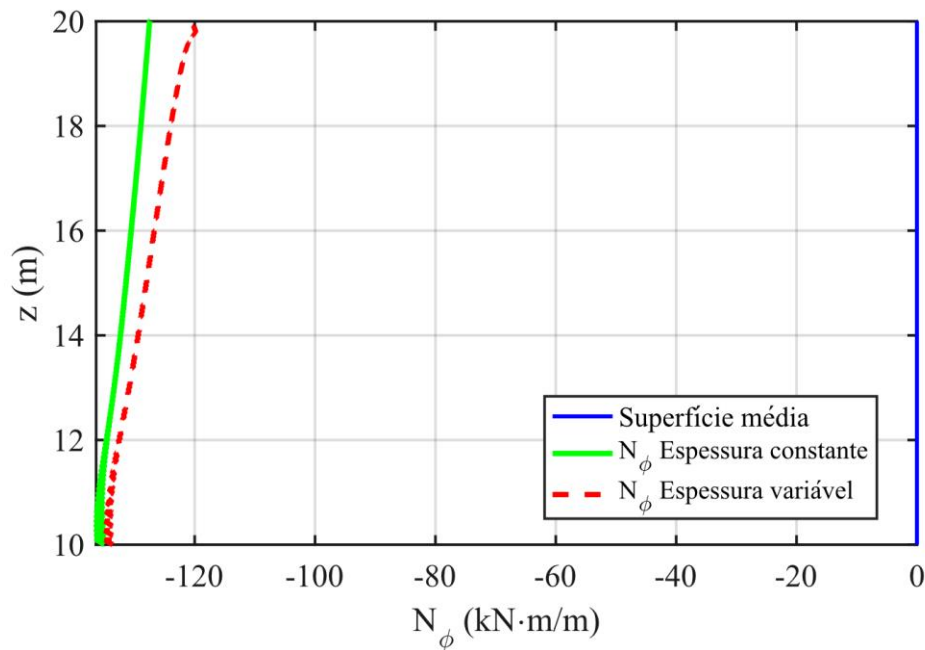
$$S = 2,8284 \text{ m} \quad (230)$$

Dessa forma, a espessura de cálculo da simplificação deve ser calculada em uma distância de  $0,7071 \text{ m}$  da borda, resultando em  $0,11 \text{ m}$  ou  $11 \text{ cm}$ . A Figura 86 mostra a estrutura deformada para ambos os casos, a Figura 87 mostra o esforço normal ao longo da cúpula e a Figura 88 o momento fletor.

Figura 86 – Estrutura deformada para simplificação de Hannah



Fonte: autor (2018).

Figura 87 – Esforço normal  $N_\phi$  na cúpula.

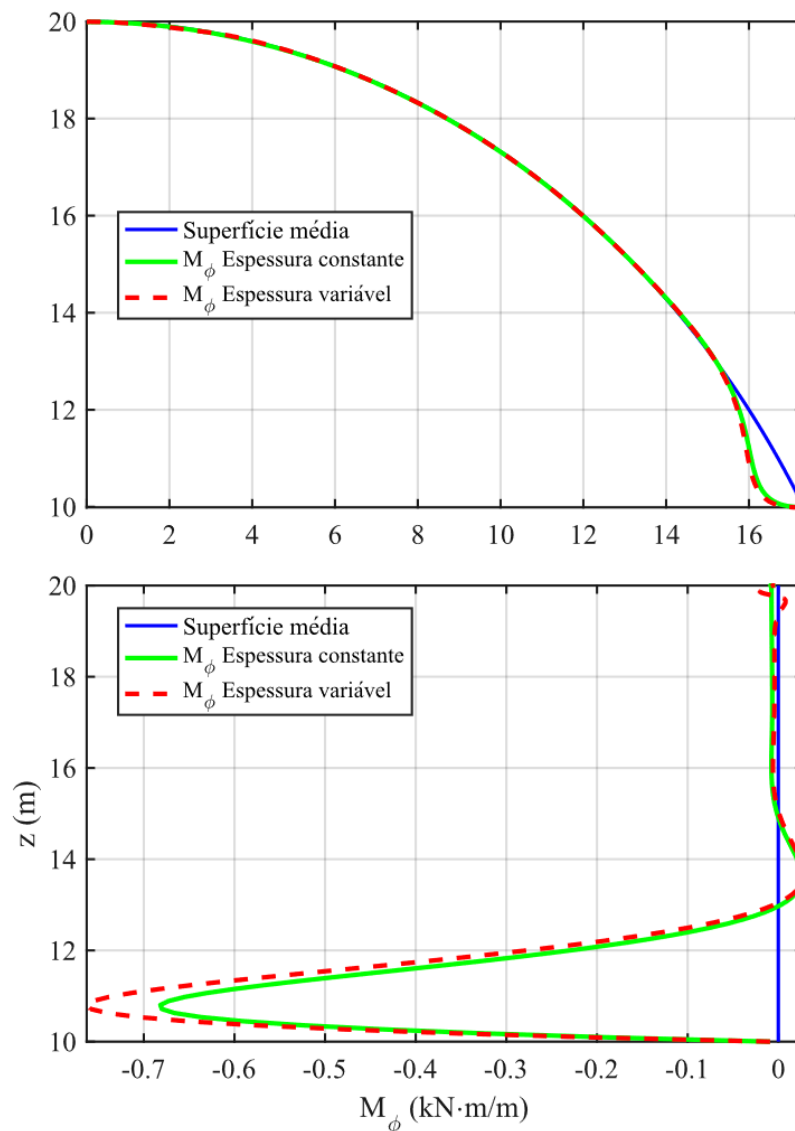
Fonte: autor (2018).

A Figura 87 mostra que as curvas de esforço normal são semelhantes para ambos os casos, embora  $N_\phi$  seja menor ao longo de toda a cúpula na consideração da espessura variável.

Observa-se nos gráficos variações do deslocamento e do momento fletor. Para os deslocamentos, a variação máxima ocorre no eixo de revolução, em que o deslocamento vertical

para cúpula com espessura constante é  $-0,0012\text{ m}$  e para espessura variável é  $-0,0014\text{ m}$ . Já para o momento fletor, a maior diferença ocorre na região próxima à borda, como visto na Figura 88a), com magnitudes de  $-0,6816\text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  para espessura constante e  $-0,7630\text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  para cúpula com engrossamento da espessura. A Figura 91a) ilustra o momento fletor ao longo da curvatura da cúpula e a Figura 91b) ao longo da sua altura, para facilitar a visualização da magnitude do momento em questão.

Figura 88 -Momentos fletores ao longo da cúpula.



Fonte: autor (2018).

De acordo com os resultados obtidos, para esse caso a adoção de uma espessura constante para a cúpula resulta em minorar o momento fletor e os deslocamentos ao mesmo tempo que os esforços normais são majorados. Isso ocorre devido ao enrijecimento da região próxima ao centro da cúpula, o que proporciona uma redução nos deslocamentos e consequentemente nos

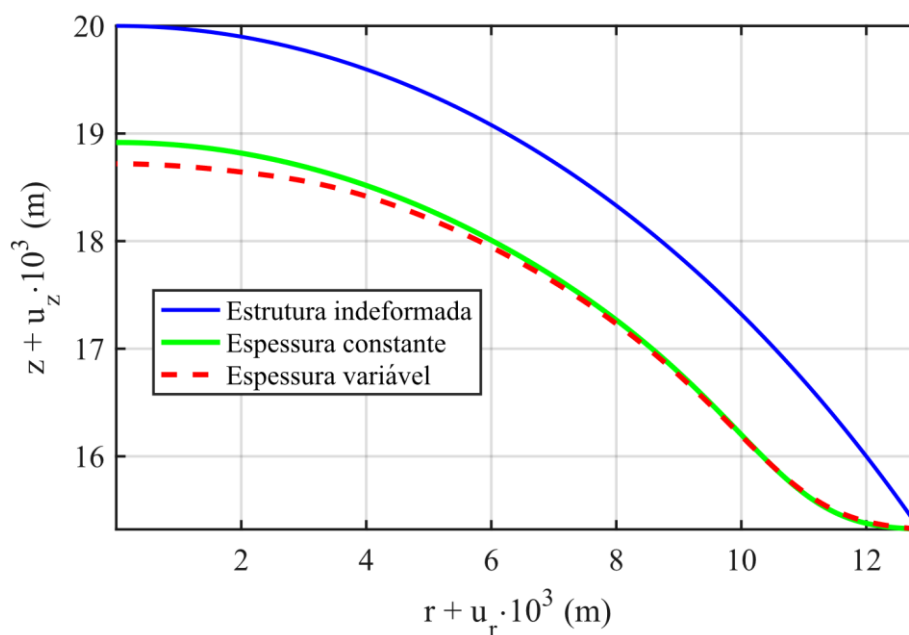
momentos fletores, além disso a consideração de uma espessura constante também provoca o aumento do peso da estrutura, o que provoca um aumento nos esforços normais.

#### 7.4.2 Cúpula com raio 20 metros e ângulo de abertura $\phi_o$ igual a $40^\circ$

Essa aplicação usa as mesmas configurações geométricas e carregamentos do exemplo anterior, exceto pelo ângulo de abertura, que neste é caso igual a  $40^\circ$ . Os elementos necessários para aplicação de Hannah para este exemplo são iguais ao exemplo anterior, pois não houveram modificações nas espessuras e no raio da cúpula.

As Figuras 89 e 90 apresentam os deslocamentos e momentos fletores.

Figura 89 – Cúpula com abertura de  $40^\circ$  - Estrutura deformada.



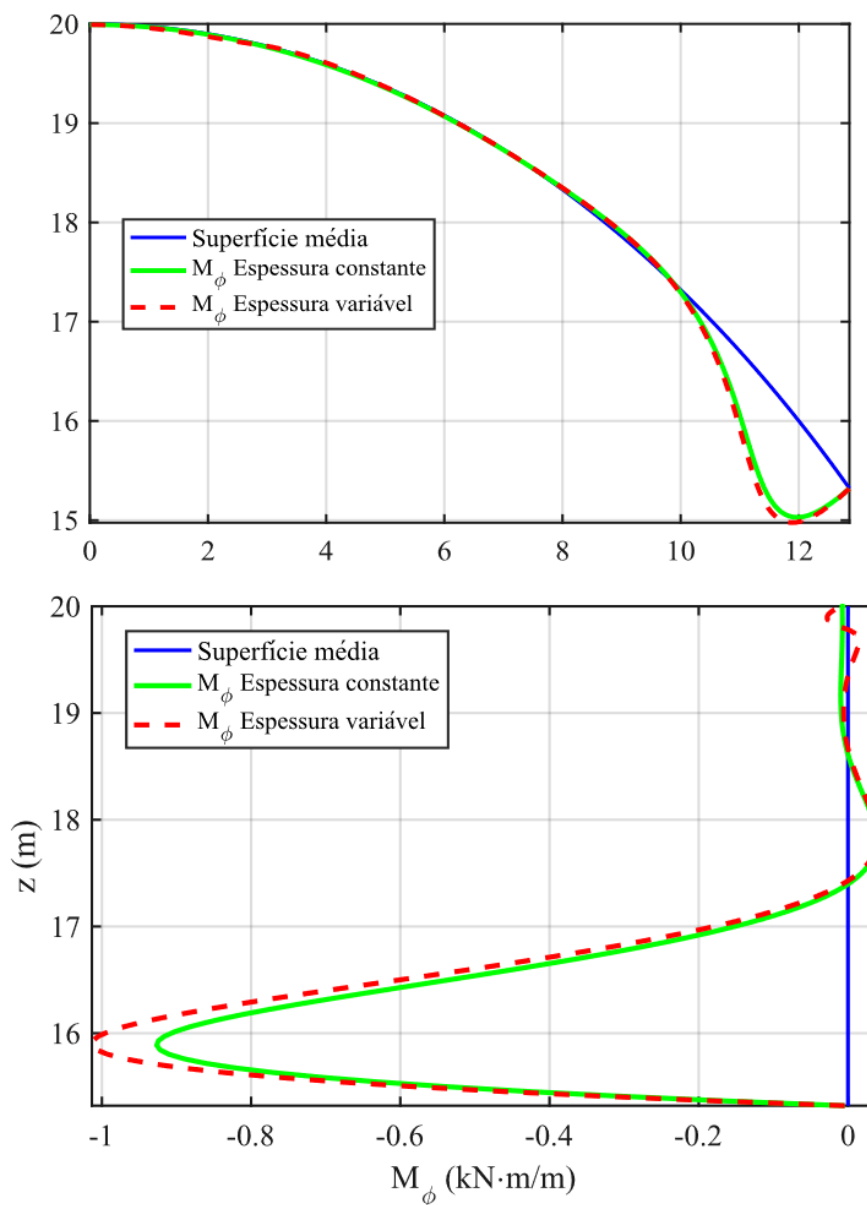
Fonte: autor (2018).

Os deslocamentos máximos, no eixo de rotação, são iguais a  $-0,0011\text{ m}$  e  $0,0013\text{ m}$  para espessura conste e estrutura com engrossamento, respectivamente. Nesse caso, os momentos fletores são maiores, em módulo, do que para a cúpula do exemplo anterior (com maior ângulo de abertura). Os valores máximos são de  $-0,9266\text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  e  $-1,0134\text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$  para cúpula com espessura constante e espessura variável, respectivamente.

A Figura 90 mostra que as curvas de momento fletor possuem boa aderência para maior parte da cúpula, exceto próximo ao bordo, no qual ocorre o momento máximo. Neste caso, a

não consideração da variação da espessura age contra a segurança, pois apresenta momentos fletores menores do que a estrutural real.

Figura 90 – Momento fleto ao longo da cúpula.

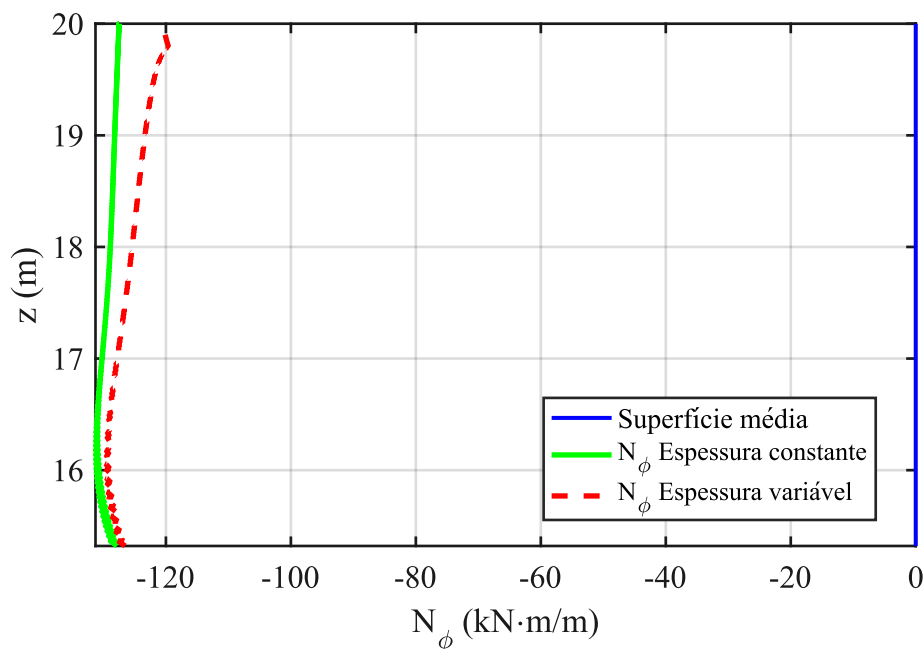


Fonte: autor (2018).

A Figura 91 mostra a distribuição do esforço normal  $N_\phi$  ao longo da cúpula, na qual não existe uma perfeita aderência entre as curvas para espessura constante e variável. Diferentemente do momento fleto, neste caso a adoção de uma espessura variável está a favor da segurança, pois majora o esforço resultando em estruturas mais seguras caso dimensionadas corretamente.



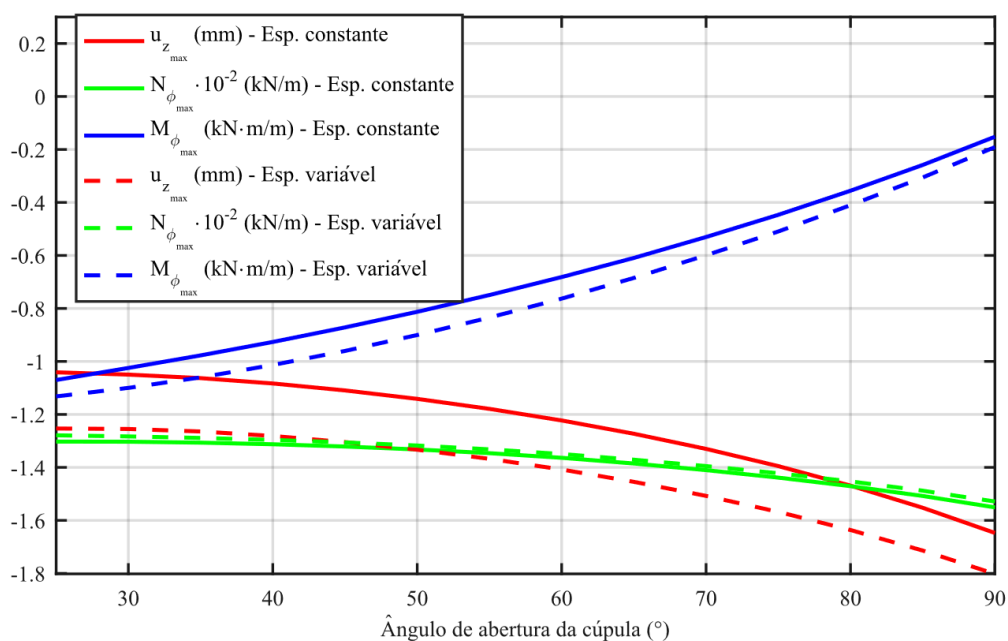
Figura 91 – Esforço normal ao longo da cúpula.



Fonte: autor (2018).

Para verificar a influência da abertura da cúpula na aproximação de Hannah, é apresentada a Figura 92. Nela, pode-se perceber que o aumento do ângulo de abertura (de 25° até 90°) provoca um aumento nos deslocamentos verticais máximos, bem como uma redução nos momentos fletores máximos e um pequeno aumento nos valores de esforço normal.

Figura 92 – Análise da aproximação de Hannah para diferentes aberturas de cúpula.



Fonte: autor (2018).

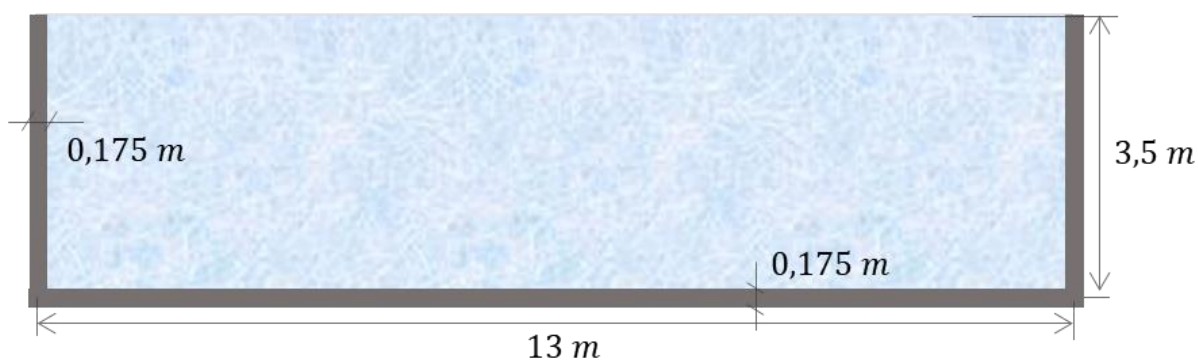
Como nos itens 7.5.1 e 7.5.2, os momentos fletores obtidos pela aproximação de Hannah tem valor máximo (em módulo) menores do que os obtidos quando a cúpula possui espessura variável. O mesmo ocorre para os deslocamentos máximos próximo ao centro da cúpula. Já para o esforço normal, essa simplificação analítica fornece valores maiores do que os obtidos para cúpulas com variável.

Dessa forma, para cúpulas delgadas, a aproximação de Hanna trabalha contra a segurança quando os deslocamentos e momentos fletores máximos estão sendo levados em consideração. Por outro lado, quando o esforço normal é o fator de análise pode-se dizer que essa simplificação está atuando a favor da segurança estrutural, pois majora os esforços normais.

### 7.5 Aplicação 8 – reservatório aberto submetido a variadas condições de apoio

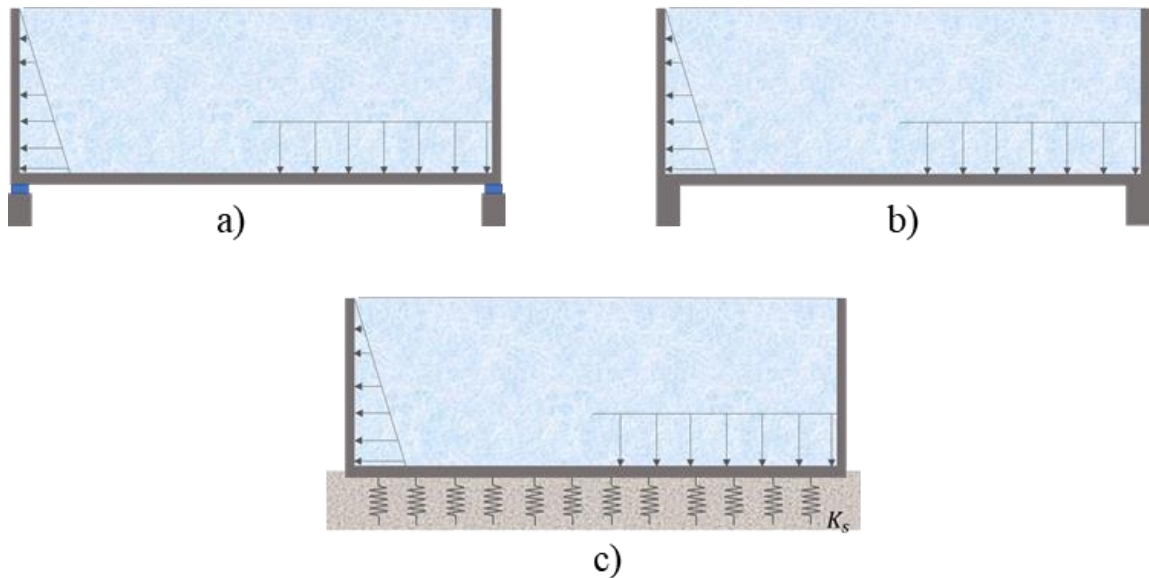
Esta aplicação tem por finalidade estudar a influência dos apoios a qual o reservatório está submetido. São analisadas o reservatório simplesmente apoiado em seu perímetro, engastado em seu perímetro, em base elástica e em base infinitamente rígida. Na base elástica são analisados os solos mole ( $k_s = 25 \text{ kN/m}^3$ ), médio ( $k_s = 50 \text{ kN/m}^3$ ) e rígido ( $k_s = 100 \text{ kN/m}^3$ ). Os carregamentos são devido ao peso próprio do concreto água e peso da água, e os dados dos materiais segue os exemplos anteriores. O reservatório em questão é mostrado na Figura 93 e as condições de apoio na Figura 94.

Figura 93 – Dimensões do reservatório da aplicação 8.



Fonte: autor (2018).

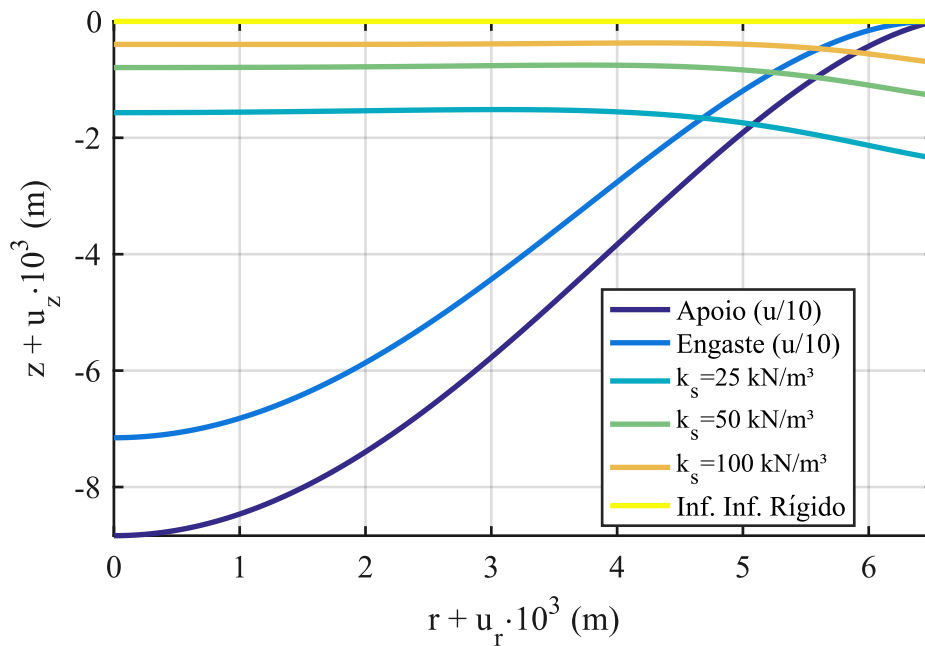
Figura 94 – Tipos de apoio e carregamentos para a aplicação 8: a) simplesmente apoiado, b) engastado e c) apoiado em base elástica.



Fonte: autor (2018).

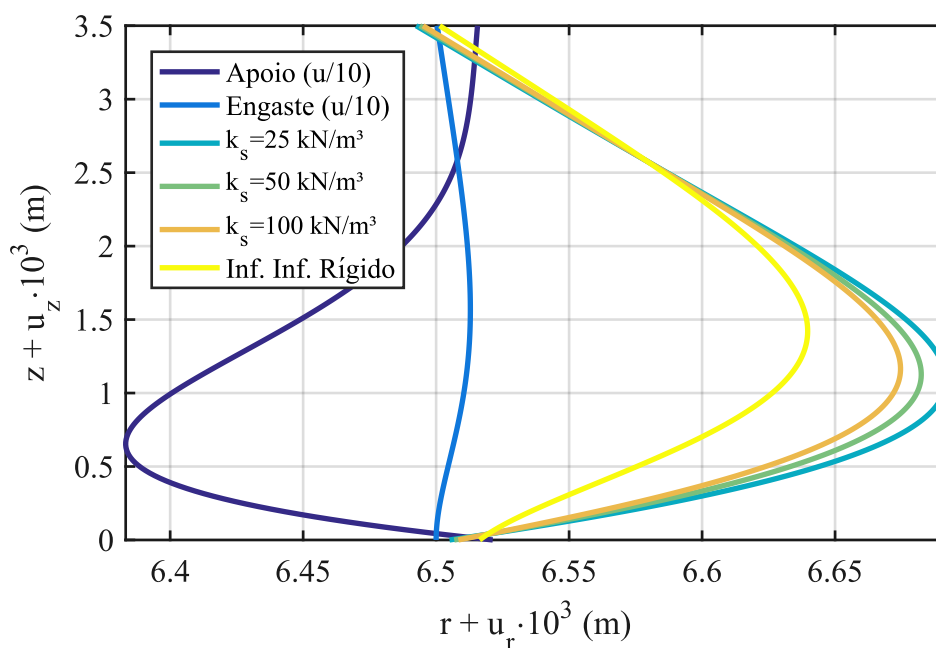
Os resultados são apresentados da Figura 95 a 100. Dá-se ênfase aos deslocamentos, momentos fletores radial e vertical ao longo da parede e ao esforço anelar, visto que são as principais grandezas utilizadas no dimensionamento estrutural. Para facilitar a visualização, os esforços e deslocamentos obtidos para o apoio e o engaste foram divididos por 10.

Figura 95 – Deslocamentos da placa de fundo do reservatório.



Fonte: autor (2018).

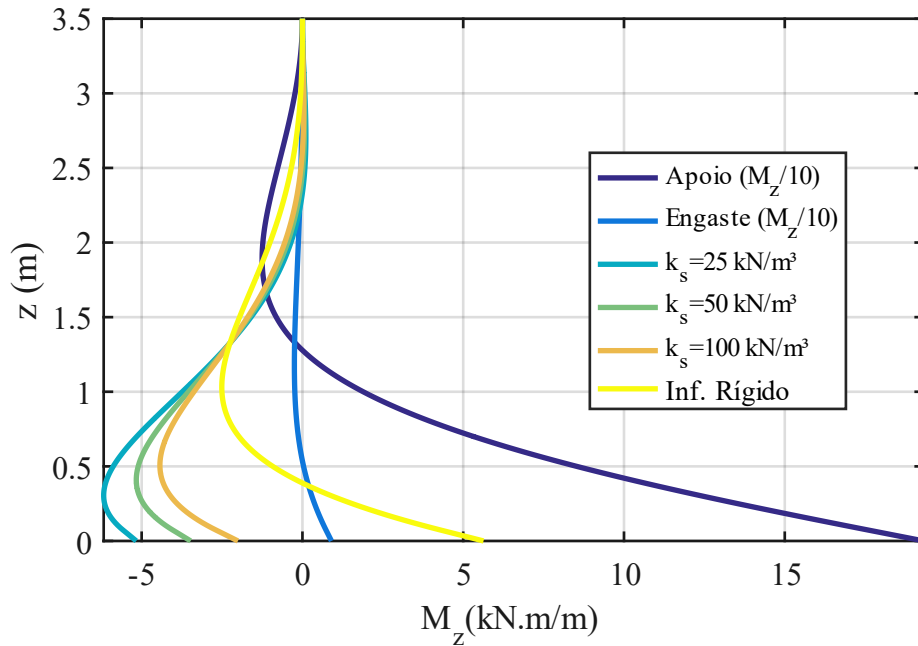
Figura 96 – Deslocamentos horizontais da parede cilíndrica.



Fonte: autor (2018).

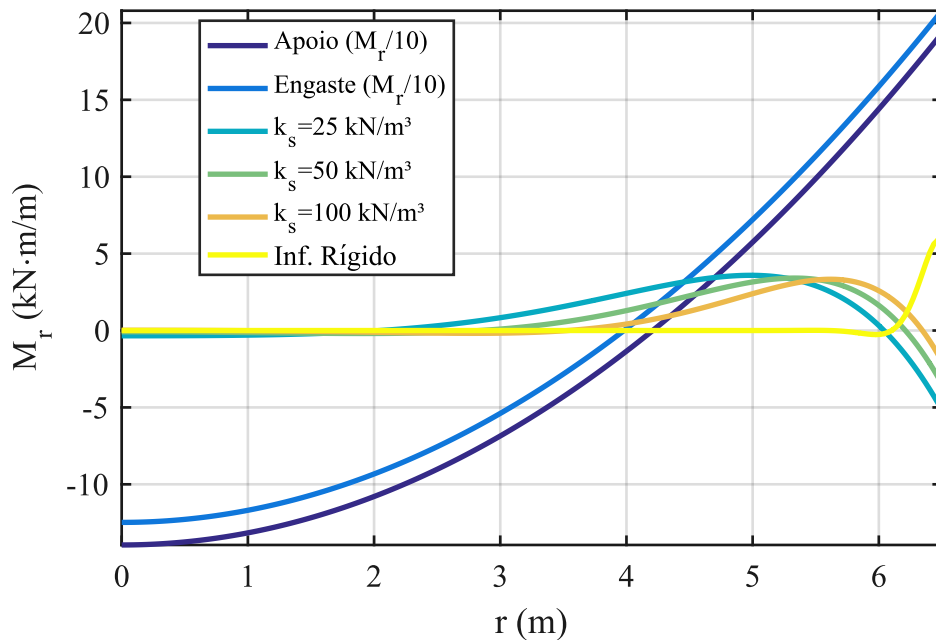
A partir dos gráficos de deslocamento já é possível notar que o tipo de apoio ao qual o reservatório está submetido tem influência direta no comportamento mecânico da estrutura. Mesmo quando comparado ao solo mole, o apoio e o engaste fornecem maiores deslocamentos da placa de fundo. Em relação a parede, nota-se pela Figura 96 que há uma inversão do sentido dos deslocamentos para o reservatório apoiado. Isso ocorre porque o momento radial provocado pelos carregamentos na placa é totalmente transferido para a parede, provocando uma rotação anti-horária próximo a ligação placa-parede, que se desenvolve e reduz ao longo da mesma.

Figura 97 – Momento fletor ao longo da parede do reservatório.



Fonte: autor (2018).

Figura 98 – Momento fletor na placa de fundo.



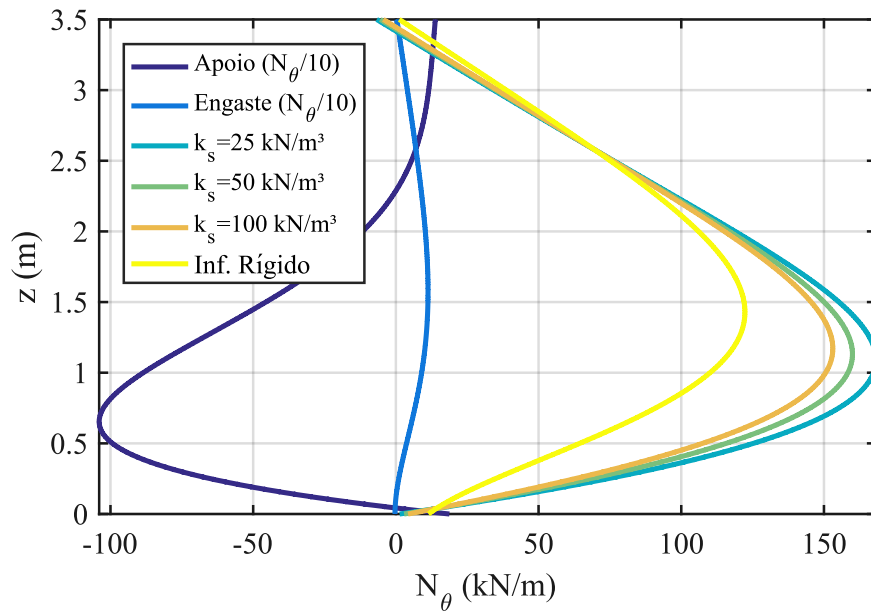
Fonte: autor (2018).

Por meio das Figura 97, 100 e 101 observa-se que o tipo de apoio também influencia na avaliação do momento fletor ao longo da estrutura. Na parede próxima à ligação com a placa, na qual as magnitudes são maiores, há uma inversão dos momentos na consideração de base

infinitamente rígida, apoiada ou engastada para a consideração de base elástica. O mesmo fato acontece para a placa de fundo, nas proximidades da ligação placa-parede.

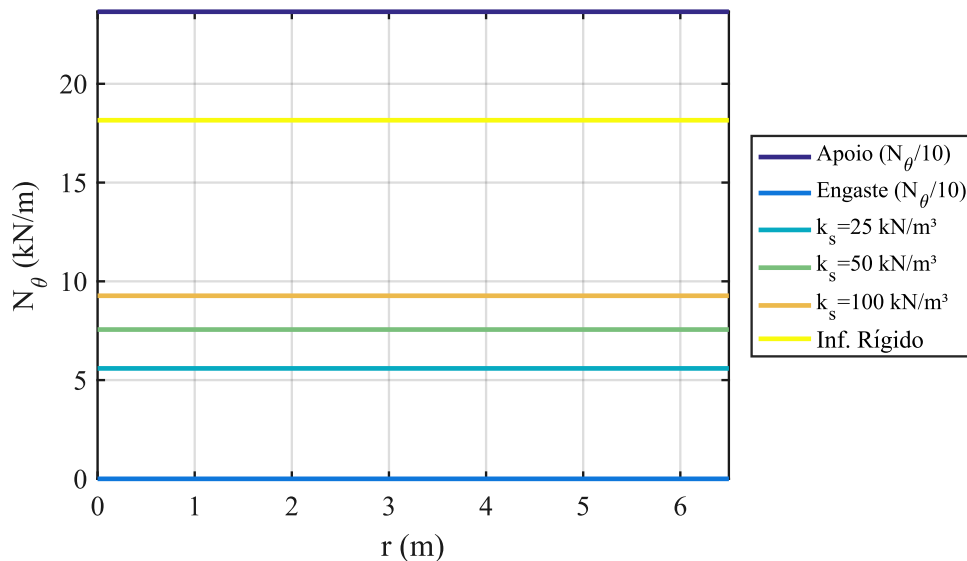
Também é possível observar a compatibilização dos momentos entre placa e parede na ligação, exceto para o caso do reservatório engastado, no qual o engaste do apoio absorve a maior parte do momento que ocorre na placa de fundo, aliviando a parede cilíndrica.

Figura 99 – Esforço anelar atuante na parede.



Fonte: autor (2018).

Figura 100 – Esforço anelar ao longo da placa.



Fonte: autor (2018).

Pela análise dos esforços anelares, ilustrado nas Figuras 102 e 103, nota-se a mesma inversão de sentido que ocorre para os deslocamentos e momentos flettores para o caso do apoio. Para os demais casos, nota-se uma redução em sua intensidade na parede a medida que a rigidez do solo aumenta. Isso ocorre porque nesse caso a placa de fundo está submetida a uma grande deflexão e momentos flettores devido ao peso da água, e a parede (perfeitamente vinculada a placa) reage de forma a reduzir essas ações.

Fica evidente no exemplo estudado que o efeito da interação solo-estrutura (casos de base elástica) na estrutura ocorre predominantemente devido à força concentrada do peso próprio da parede agindo no perímetro do reservatório. Essa força provoca um recalque diferencial no perímetro do reservatório e conseqüentemente uma reação do solo, aumentando a intensidade dos esforços e momentos atuantes na estrutura.

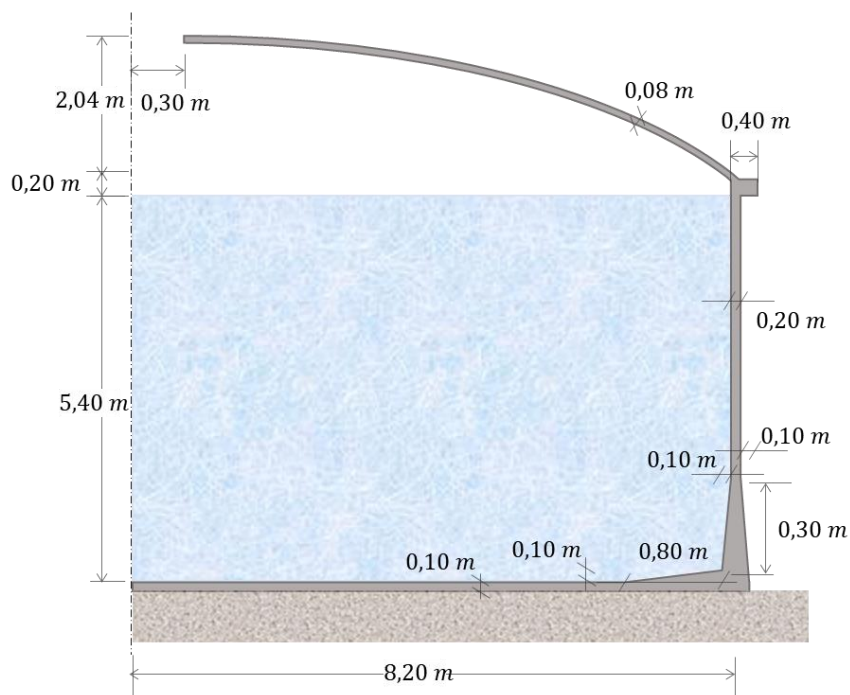
## **7.6 Aplicação 9 – reservatório completo com anel de rigidez, abertura na cúpula e engrossamento na placa e parede**

Para simplificar e tornar possível a solução analítica, muitas vezes é necessário desconsiderar critérios construtivos que visam facilitar a execução e também reforçar a estrutura, como o caso de aberturas nas coberturas (cúpulas ou placas), o engrossamento dos bordos das placas e rodapés das paredes e também a utilização dos anéis de rigidez.

Visando entender o comportamento da estrutura sem essas simplificações, este exemplo analisa a influência destes fatores nos esforços e deslocamentos principais, para a geometria da Figura 101.

Os carregamentos atuantes nesta aplicação ocorrem devido a carga hidrostática na parede e placa, com  $\gamma_a = 10 \text{ kN/m}^3$ , devido ao peso próprio dos materiais com  $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$  e também devido a um revestimento e a carga acidental na cúpula, de intensidades  $0,5 \text{ kN/m}^2$  e  $1 \text{ kN/m}^2$ , respectivamente. O módulo de elasticidade do material do reservatório é  $30 \text{ GP}$  e o coeficiente de Poisson  $0,2$ . A rigidez do solo é considerada média, com  $(k_s = 50.000 \text{ kN/m}^2)/m$  e a discretização possui 600 elementos retilíneos por peça.

Figura 101 – Reservatório completo com abertura na cúpula, anel de rigidez e engrossamento nos bordos da placa e casca cilíndrica.



Fonte: adaptado de Meneses (2013).

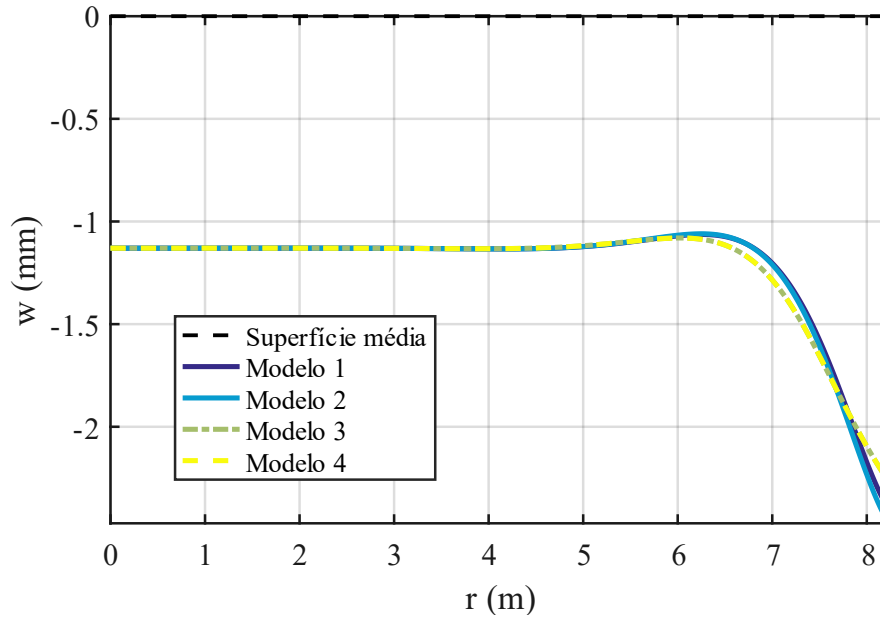
Visando estudar a influência de cada fator (anel, abertura e engrossamento), bem como a influência de todos os itens, são processados quatro modelos:

- Modelo 1: reservatório composto por placa de fundo, parede cilíndrica e cúpula esférica. Nesse modelo não é considerada a abertura da cúpula, o engrossamento e também não possui anel de rigidez;
- Modelo 2: reservatório análogo ao item anterior, exceto pela adição do anel de rigidez;
- Modelo 3: Estrutura modelada com anel e também com o engrossamento dos bordos das placa e parte inferior da parede cilíndrica;
- Modelo 4: estrutura modelada por completo, conforme indicado na Figura 101, nela são considerados os engrossamentos, a abertura da cúpula e o anel de rigidez.

Os resultados obtidos nas análises estão da Figura 102 a 110.

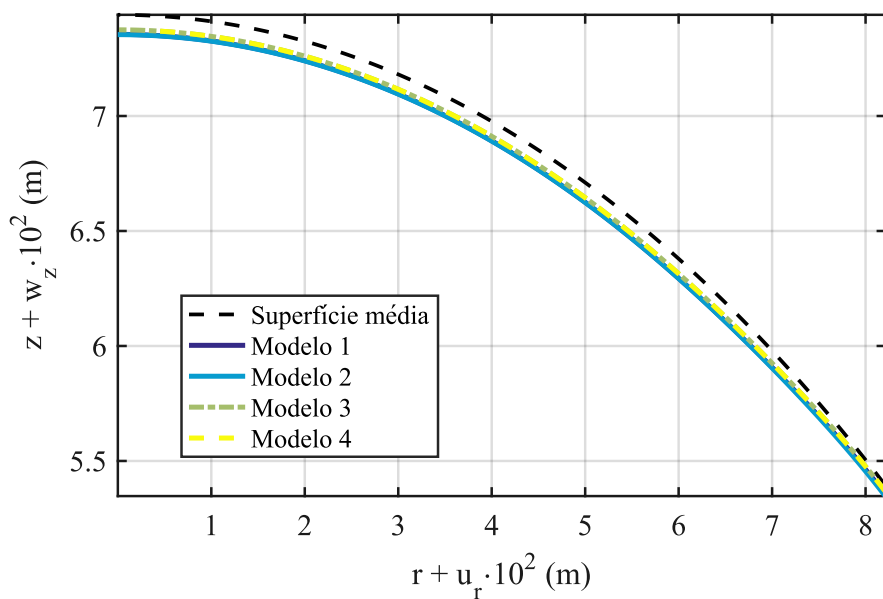


Figura 102 – Deslocamentos da placa de fundo.



Fonte: autor (2018).

Figura 103 – Deslocamentos da cúpula esférica.



Fonte: autor (2018).

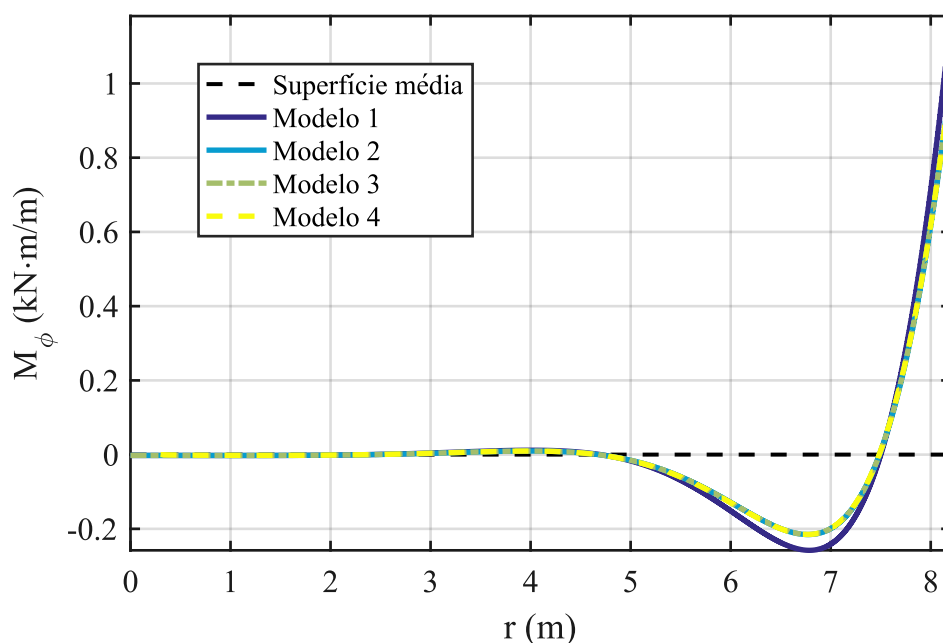
A Figura 102 mostra a configuração deformada da placa de fundo do reservatório. Nela, é possível notar que os deslocamentos nas regiões próximas ao centro sofrem a mesma deflexão. Ao se aproximar do bordo surgem pequenas diferenças com a adição do anel e também com a adição do engrossamento da placa/parede. O anel provoca um aumento na deflexão máxima, visto que seu peso é transferido diretamente pela parede, causando um recalque diferencial no

bordo. Já o engrossamento reduz os deslocamentos máximo, pois sua utilização aumenta a rigidez da placa, reduzindo assim sua deflexão.

A deformada da cúpula, ilustrado na Figura 103, mostra que a adição do anel, do engrossamento e da abertura não provocam diferenças consideráveis nas deflexões da cobertura.

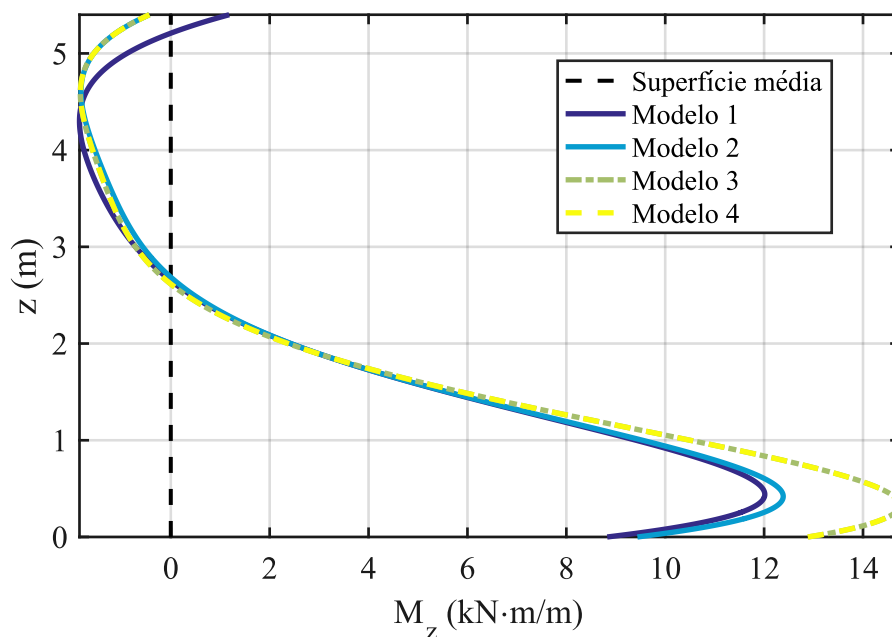
A adição do anel de rigidez provoca uma pequena redução nos momentos máximos e mínimos da cúpula e também no topo da parede cilíndrica, como mostram as Figuras 104 e 105, enquanto o engrossamento e a abertura não variam os esforços. No bordo inferior da parede cilíndrica bem como na placa, o engrossamento provoca um aumento dos momentos máximos. Isso se deve ao fato de o engrossamento aumentar a rigidez da ligação placa-parede e também da região em que ocorre o maior recalque diferencial da estrutura.

Figura 104 – Momento fletor ao longo da cúpula.



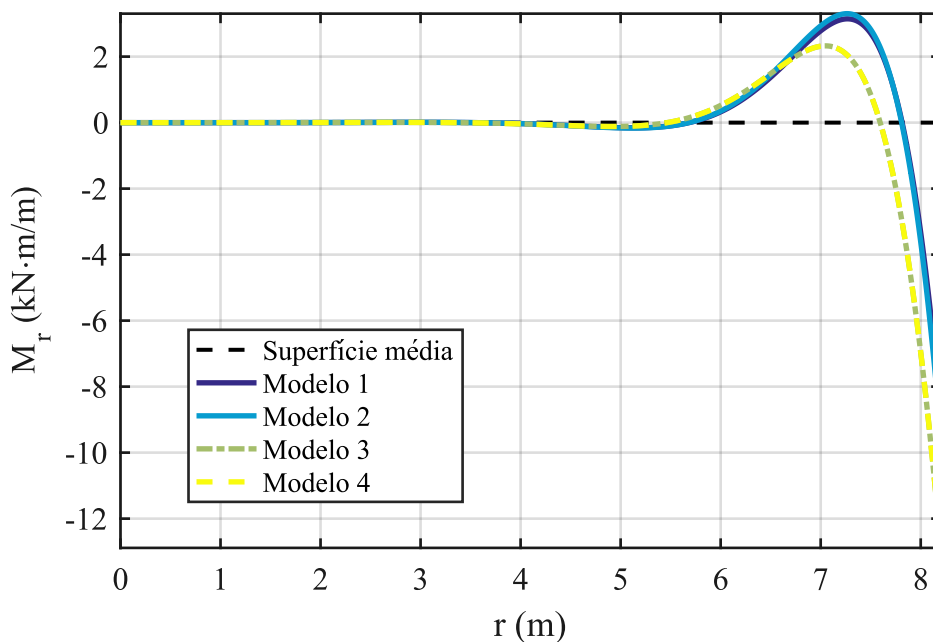
Fonte: autor (2018).

Figura 105 – Momento fletor ao longo da parede.



Fonte: autor (2018).

Figura 106 – Momento fletor ao longo da placa de fundo.

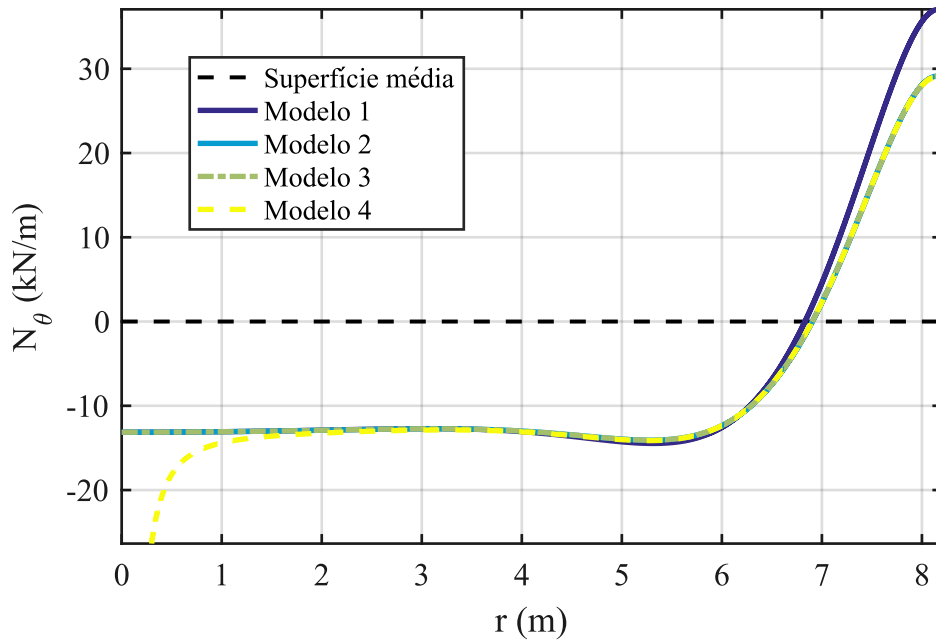


Fonte: autor (2018).

As Figuras 107 e 108 mostram o esforço anelar na parede e na cúpula. O anel provoca uma redução desse esforço na região próxima ao topo da parede, enquanto o engrossamento aumenta o momento máximo próximo ao bordo inferior. Isso ocorre porque o anel de rigidez

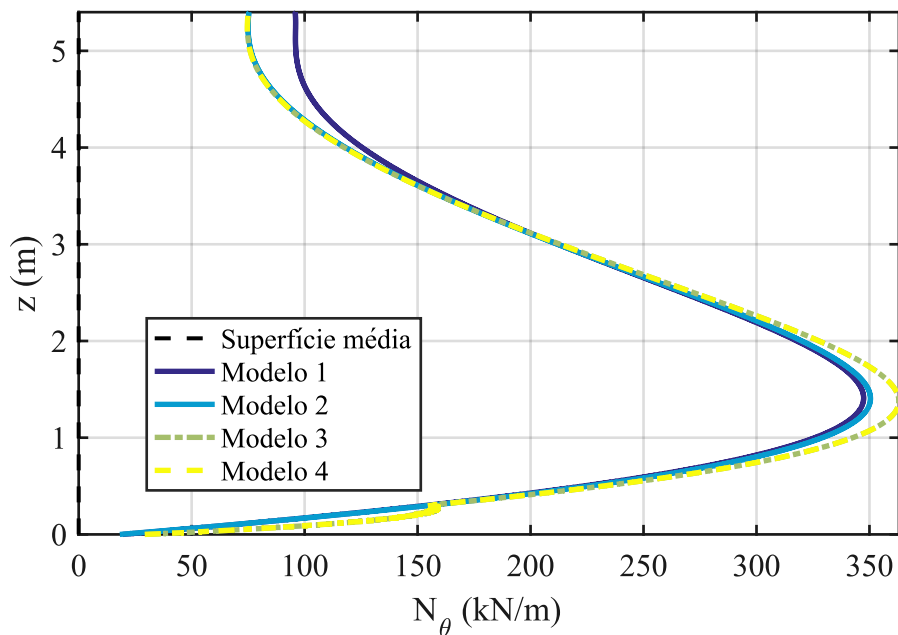
age no sentido contrário ao esforço anelar em suas proximidades, já o engrossamento aumenta a rigidez da região, o que provoca um aumento nos momentos. Na cúpula, a abertura proporciona um aumento de  $N_\theta$  na região próxima ao centro, visto que é necessária uma força nesse sentido para suportar a abertura sem danos a estrutura.

Figura 107 – Esforço anelar na cúpula.



Fonte: autor (2018).

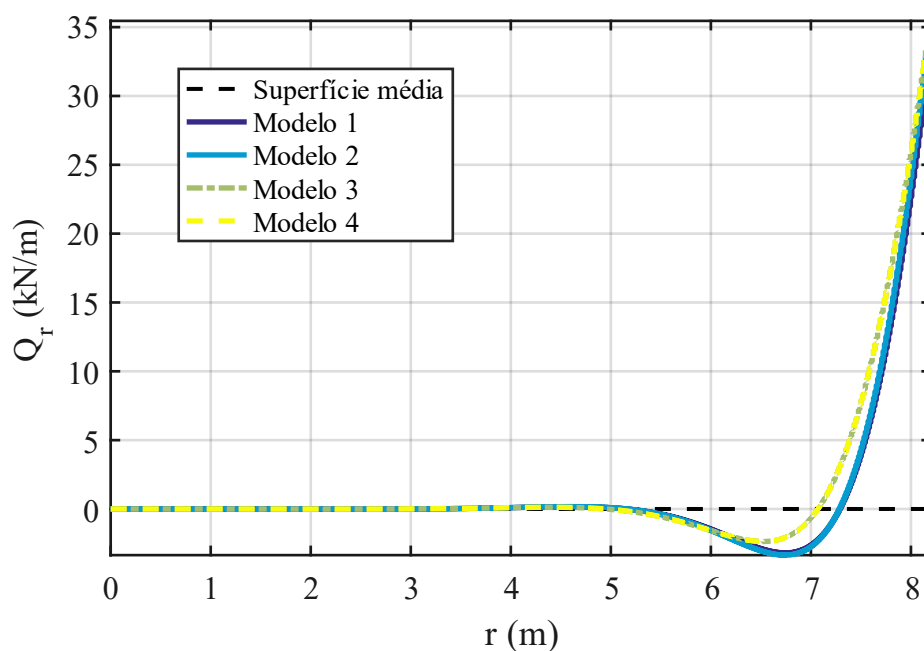
Figura 108 – Esforço anelar na parede.



Fonte: autor (2018).

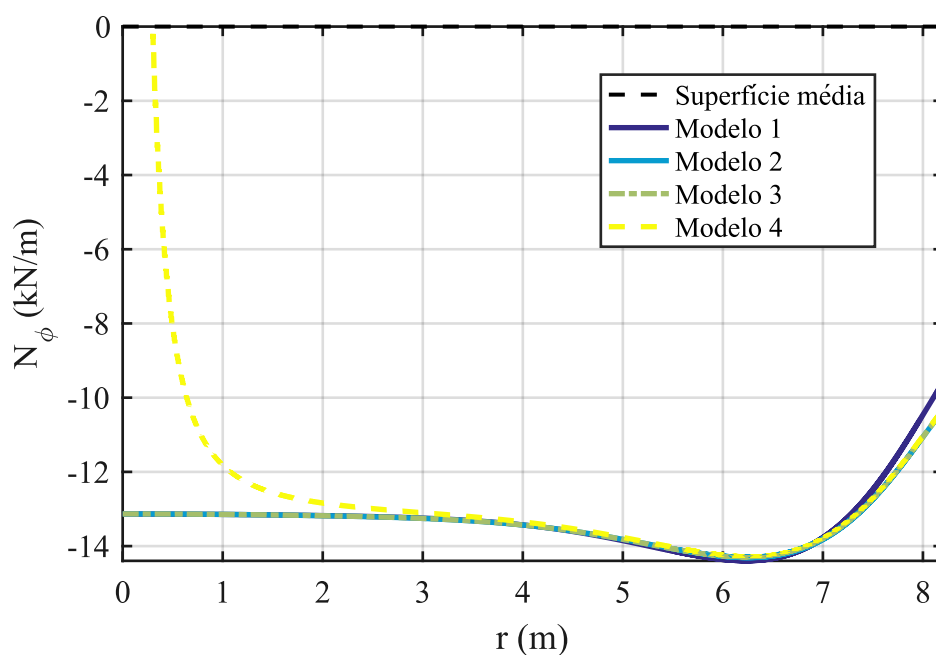
A Figura 109 mostra o esforço cortante ao longo da placa de fundo. A Figura 110 mostra o  $N_\phi$  ao longo da cúpula.

Figura 109 – Esforço cortante na placa de fundo.



Fonte: autor (2018).

Figura 110 –  $N_\phi$  na cúpula esférica.



Fonte: autor (2018).

Esta aplicação mostra a boa capacidade de absorção dos esforços e momentos pelas cascas. Nos casos acima expostos, nota-se que a influência da abertura, engrossamento e anel ocorrem predominantemente nas regiões próximas as suas posições. O anel de rigidez provoca uma redução nos esforços anelar e meridional e do momento fletor na cúpula e no bordo superior da parede. O engrossamento provoca uma redução na deformada, mas em contrapartida aumenta os esforços máximos nas regiões próximas a borda da placa e a borda inferior da parede. Já a abertura só exerce influência na distribuição do  $N_{\theta}$  e  $N_{\phi}$  próximo ao centro da cúpula. Dessa forma, deve ser dada maior atenção a essas disposições construtivas na fase de concepção e especificação para projeto.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um estudo do comportamento mecânico de estruturas de revolução de paredes delgadas sujeitas a carregamentos e vinculações também axissimétricos, tornado possível a simplificação do modelo e o uso do plano de simetria axissimétrico nas análises. Uma abordagem via Método dos Elementos Finitos foi empregada, na qual foram utilizados elementos finitos retilíneos de dois nós e três graus de liberdade por nó.

Casos de cascas cilíndricas e esféricas isoladas e de estruturas complexas (compostas por elementos de cascas, placas e anéis de rigidez acoplados) foram analisados. Essas estruturas estavam sujeitas a carregamentos devido ao peso próprio dos elementos e, em alguns casos, a pressão hidrostática. Foram consideradas estruturas simplesmente apoiadas, engastadas ou em base elástica, nas quais o comportamento do solo foi admitido como elástico linear, simulado pelo modelo de Winkler.

A partir das aplicações da seção 7.1 e também de outros exemplos estudados mas não apresentados neste trabalho, foi possível verificar o desempenho satisfatório do programa computacional desenvolvido tanto para cascas isoladas quanto para estruturas complexas, sujeitas aos vários tipos de carregamento e apoio. Tal desempenho torna-se evidente por meio da acurácia na comparação entre os resultados do EAPD e os valores analíticos e numéricos de outros autores.

Ainda com base nas aplicações da seção 7.1, notou-se que a discretização do problema tem influência direta na acurácia dos resultados, uma vez que problemas com uma discretização pobre pode reproduzir resultados não tão precisos quanto aqueles fornecidos por discretizações mais refinadas, por isso a importância de um estudo de convergência para obtenção da malha mínima necessária para reproduzir resultados coerentes e com um índice de aproximação desejado.

Na aplicação 3, considerada um reservatório longo, foram obtidas diferenças nos esforços do bordo superior do reservatório quando comparado os resultados do EAPD com os fornecidos por SILVA (2017). Neste caso, o autor utilizou uma simplificação na equação da linha elástica da parede cilíndrica a qual desconsidera a dependência de bordos, isto é, os hiperestáticos atuantes no bordo inferior do reservatório não provocam esforços ou deslocamentos no bordo superior e vice-versa. Na aplicação 4, considerada um reservatório curto com os mesmos carregamentos e apoios da aplicação 3, a independência de bordos não foi considerada por

SILVA (2017) e os resultados obtidos pelo EAPD e pelo autor tiveram melhor aderência. Dessa forma, mesmo com as magnitudes dos esforços no bordo superior sendo pequenas quando comparadas aos valores máximos atuantes na parede é necessário dar maior atenção a consideração de independência de bordos, principalmente próximos a esbeltez limite que considera o reservatório como curto ou longo.

Por meio das aplicações 5, 6 e 8, bem como das demais que utilizam base elástica, pode-se fazer as seguintes considerações:

- i. O comportamento dos tanques cilíndricos é muito sensível aos recalques diferenciais, mesmo uma pequena quantidade desse recalque pode alterar significativamente as forças de projeto;
- ii. O recalque diferencial sob a base do tanque é diretamente proporcional a rigidez do solo, isto é, quanto mais macio o solo, maior o recalque diferencial;
- iii. A geometria da base também afeta os recalques. A base cônica exibiu um recalque menor do que a base plana, mas essa geometria também causa um aumento significativo nos esforços anelares da placa. Na base com prolongamento (aba) também houve uma redução nos deslocamentos e momentos fletores positivos a medida que o comprimento da aba aumenta, em contrapartida a utilização da aba também provoca um aumento nos momentos fletores negativos da ligação;
- iv. Os métodos clássicos de análise que negligenciam a interação entre o solo e a estrutura podem levar a um projeto inadequado.

A aproximação de Hannah é uma simplificação comumente utilizada no cálculo analítico de cúpulas esféricas e permite realizar o cálculo de uma cúpula de espessura variável por uma cúpula de espessura constante. Nos exemplos da seção 7.4 essa aproximação forneceu resultados contra a segurança da estrutura para momentos fletores e deslocamentos, nos quais os momentos fletores e os deslocamentos foram inferiores aos da cúpula com espessura variável. Em contrapartida, para os exemplos estudados, essa aplicação majora os esforços normais, trabalhando a favor da segurança. Mesmo com a pequena magnitude de tais esforços, torna-se necessária uma investigação mais precisa ao utilizar tal aproximação a fim de evitar problemas no dimensionamento estrutural.

Na análise do reservatório completo, composto por placa circular e parede cilíndrica com engrossamento próximo a ligação, anel de rigidez e cúpula esférica com abertura foi possível estudar a influência da complexidade geométrica da estrutura nos esforços e deslocamentos.



Notou-se que o anel provoca reduções nos esforços nas regiões de bordo da cúpula e no topo da parede cilíndrica, bem como o espessamento aumentou os esforços nas regiões próximas a ligação placa-parede. Por fim, a abertura da cúpula não provoca variações significativas no momento fletor nem nos deslocamentos, em contrapartida surge um aumento no esforço anelar entorno a abertura.

### **8.1 Sugestões para trabalhos futuros**

De forma a dar continuidade ao tema aqui estudado, apresentam-se como propostas:

- i. Implementar outros tipos de carregamentos atuantes nas estruturas, como: ação da temperatura, retração, carregamento devido à ação do vento, etc.;
- ii. Estudar diferentes tipos de vinculação entre parede e placa de fundo;
- iii. Implementar rotinas para otimização da discretização com base na localização dos esforços atuantes principais, como por exemplo o refinamento da malha próximo à abertura, em regiões de engrossamento, nas proximidades da ligação placa-parede, etc.

## REFERÊNCIAS

AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems. **Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio**, [s. l.], p. 539–572, 1968.

ALMEIDA, C. A.; DE SOUZA, F. M. N. Axisymmetric Thin Shell Analyses With Reduced Degrees-of-Freedom. **Applied Mechanics Reviews**, [s. l.], v. 42, n. 11S, p. S3, 1989. Disponível em: <<http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1394171>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos elementos finitos : primeiros passos**. [s.l.] : UNICAMP, 2003. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Método\\_dos\\_elementos\\_finitos.html?id=NB4vAAACAAJ&redir\\_esc=y&hl=en](https://books.google.com.br/books/about/Método_dos_elementos_finitos.html?id=NB4vAAACAAJ&redir_esc=y&hl=en)>. Acesso em: 6 jun. 2017.

BABU, C.Ramesh; PRATHAP, G. A field-consistent two-noded curved axisymmetric shell element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 23, n. 7, p. 1245–1261, 1986. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1620230705>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

BEN-ZVI, R.; LIBAI, A.; PERL, M. A curved axisymmetric shell element for nonlinear dynamic elastoplastic problems-I. Formulation. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 42, n. 4, p. 631–639, 1992.

BEZERRA, Paulo Henrique Araújo. **Análise de estruturas de superfícies delgadas axissimétricas via método dos elementos finitos com utilização de elemento retilíneo**. 2013. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, [s. l.], 2013.

BHATIA, R. S.; SEKHON, G. S. Generation of exact stiffness matrix for a conical shell element. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 70, n. 4, p. 425–435, 1999. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045794998001631>>

BILLINGTON, David P. **Thin shell concrete structures**. Second ed. [s.l.] : McGraw-Hill, 1982.

CAGDAS, Izzet U. Stability analysis of cross-ply laminated shells of revolution using a curved axisymmetric shell finite element. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 49, n. 6, p. 732–742, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2011.01.005>>

CUI, X. Y.; WANG, G.; LI, G. Y. A nodal integration axisymmetric thin shell model using

linear interpolation. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 40, n. 4, p. 2720–2742, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X15006113>>

CZECH BREWERY SYSTEM SRO. **CCT-16000C Tanque de fermentação cilíndrico-cônico CLASSIC, isolado, 16000 / 18388L.** [s.d.]. Disponível em: <<http://eshop.czechminibreweries.com/pt/product/cct-16000c/>>. Acesso em: 20 out. 2018.

EL DEBS, Mounir Khalil. **Contribuição ao cálculo das cascas de revolução mediante diferenças finitas.** 1976. Universidade de São Paulo, [s. l.], 1976.

FLÜGGE, Wilhelm. **Stresses in shells.** First ed. [s.l.] : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1960.

FOGAÇA, Jennifer Rocha Vargas. **Reator Nuclear. Funcionamento do reator nuclear - Mundo Educação.** [s.d.]. Disponível em: <<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/quimica/reator-nuclear.htm>>. Acesso em: 20 out. 2018.

GECKELER, Josef. **Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen.** [s.l.] : VDI-Verlag, 1926. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books/about/Über\\_die\\_Festigkeit\\_achsensymmetrischer.html?id=ASwYkgEACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.br/books/about/Über_die_Festigkeit_achsensymmetrischer.html?id=ASwYkgEACAAJ&redir_esc=y)>. Acesso em: 18 abr. 2017.

GEOMETRICA. **Tipo Copa de Champaña | Construcción domo | Estructura del marco espacial - Geométrica.** [s.d.]. Disponível em: <<http://geometrica.com/es/tanques>>. Acesso em: 20 out. 2018.

GIANNINI, M.; MILES, G. A. A curved element approximation in the analysis of axisymmetric thin shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 2, n. 4, p. 459–476, 1970. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1620020402>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

GRAFTON, P. E.; STOME, D. R. ANALYSIS OF AXISYMMETRICAL SHELLS BY THE DIRECT STIFFNESS METHOD. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 1, n. 10, p. 2342–2347, 1963. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.2064>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

HAUSO, Andreas. **Analysis methods for thin concrete shells of revolution.** 2014. Norwegian University of Science and Technology, [s. l.], 2014.

HOEFAKKER, J. H. **Theory Review for Cylindrical Shells and Parametric Study of Chimneys and Tanks.** [s.l.] : Eburon Academic Publishers, 2010.

JONES, R. E.; STROME, D. R. A survey of analysis of shells by the displacement method. **1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics**, [s. l.], v. AFFDL-TR-6, p. 205–29, 1966.

KLEIN, S. A study of the matrix displacement method as applied to shells of revolution. **1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics**, [s. l.], v. AFFDL-TR-6, p. 275–98, 1966.

LEONHARDT, F.; MÖNNING, E. **Construções de concreto Volume 1**. Primeira ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

MARQUES, Severino Pereira Cavalcanti. **Placas Delgadas** Notas de Aula., , 2016.

MEISSNER, E. Das elastizitätsproblem für dünne schalen von ringflächen, kugel-, and jegelform. **Physik Zeit**, [s. l.], v. 14, p. 343–349, 1913.

MENESES, Miguel Bacelar Begonha. **Análise e dimensionamento estrutural de um reservatório cilíndrico em betão armado**. 2013. Universidade de Lisboa, [s. l.], 2013.

MEZAINI, Nasreddin; ASCE, M. Effects of Soil-Structure Interaction on the Analysis of Cylindrical Tanks. [s. l.], v. 11, n. February, p. 50–57, 2006.

NAVARATNA, D. R. et al. Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 4, n. 11, p. 2069–2072, 1966. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.3854>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

NAVARATNA, R. Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 3, n. 11, p. 2138–2145, 1965. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.3326>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

NOVOZHILOV, V. V.; RADOK, J. M. R. **Thin Shell Theory**. First ed. [s.l.] : Springer Verlag, 1964. Disponível em: <<http://www.springer.com/gp/book/9789401753548>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

REISSNER, Hans. **Spannungen in kugelschalen (kuppeln) (In Festschrift Heinrich Müller-Breslau gewidmet nach vollendung seines sechzigsten lebensjahres,**. Leipzig: A. Kröner, 1912. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/title/spannungen-in-kugelschalen-kuppeln-in-festschrift-heinrich-muller-breslau-gewidmet-nach-vollendung-seines-sechzigsten-lebensjahres/oclc/13474508>>. Acesso em: 11 abr. 2017.

RODRIGUES, Cristiano Yudok Chung. **Análise de Estruturas Axissimétricas Aplicação a Reservatório**. 2009. Universidade Técnica de Lisboa, [s. l.], 2009.

SABE, Yvonne de Lima F. **Aplicação do processo dos deslocamentos no cálculo dos esforços em tanques cilíndricos circulares**. 1986. Universidade de São Paulo, [s. l.], 1986.

SILVA, Rafael Leandro Costa. **Contribuição ao projeto de reservatórios cilíndricos de concreto armado apoiados em bse elástica**. 2017. Universidade Federal de Alagoas, [s. l.], 2017.

TESSLER, Alexander. An efficient, conforming axisymmetric shell element including transverse shear and rotary inertia. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 15, n. 5, p. 567–574,

1982.

TIMOSHENKO, Stephen; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. Second ed. New York: McGraw-Hill Kogakusha LTDA, 1959. Disponível em: <<https://trid.trb.org/view.aspx?id=102979>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

UGURAL, Ansel. **Stresses In Plates and Shells**. Second ed. New York: McGraw-Hill Inc.,US, 1981.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. [s.l.] : Campus, 2010.

VENTSEL, Eduard; KRAUTHAMMER, Theodor. **Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications**. New York: Marcel Dekker, Inc, 2001. v. 55 Disponível em: <<https://books.google.com/books?id=nvny90yqgOYC&pgis=1>>

VENTURINI, Wilson Sérgio. **Contribuição ao dimensionamento de reservatórios cilíndricos protendidos**. 1977. Universidade de São Paulo, [s. l.], 1977.

VICHARE, Shirish; INAMDAR, Mandar M. An Analytical Solution for Cylindrical Concrete Tank on Deformable Soil. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, [s. l.], v. 2, n. 1, p. 69–90, 2010. Disponível em: <<https://doaj.org/article/189bd9cbb69e4ea4b48dfa4a591c8367>>

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. A simple and efficient element for axisymmetric shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 11, n. 10, p. 1545–1558, 1977. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1620111006>>. Acesso em: 14 mar. 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, Robert L. **The finite element method: Solid Mechanics**. Fifth ed. [s.l.] : Butterworth-Heinemann, 2000.

## APÊNDICE A – PARÂMETROS DO EAPD

O módulo principal do EAPD é uma função global que tem como entrada todos os parâmetros problema, como por exemplo a geometria, os carregamentos, as vinculações e a base elástica e fornece os resultados em deslocamentos dos nós, esforços nos pontos de Gauss e também nos nós da estrutura.

Tanto os dados de entrada como os de saída são do tipo *struct* composto por vetores e constantes referentes ao problema, e a descrição de cada *struct* necessário ao programa é apresentada na Figura A.1.

Figura A.1 – Parâmetros de entrada do EAPD.

```
function [dnos, egcascas, encascas]=eapd(nos, cascas, aneis, apoios, bases, ...
                                       ligacoes, cargasc, cargasd, npg)
%
% -----
% EAPD.M
% -----
% Análise de Estruturas Axissimétricas de Paredes Delgadas considerando
% elementos de casca e de anel, apoios pontuais inclinados e distribuídos
% elásticos, ligações rígidas e livres entre nós e cargas concentradas e
% distribuídas lineares.
% -----
% Parâmetros:
% nos      (E) - Vetor de estruturas dos nós.
% cascas   (E) - Vetor de estruturas dos elementos do tipo casca.
% aneis    (E) - Vetor de estruturas dos elementos do tipo anel.
% apoios   (E) - Vetor de estruturas dos apoios concentrados.
% bases    (E) - Vetor de estruturas das bases elásticas distribuídas.
% ligacoes (E) - Vetor de estruturas das ligações.
% cargasc  (E) - Vetor de estruturas das cargas concentradas nos nós.
% cargasd  (E) - Vetor de estruturas das cargas distribuídas nas cascas.
% npg      (E) - Número de pontos da quadratura de Gauss para a matriz
%             de rigidez (1 a 6).
% dnos     (S) - Matriz dos deslocamentos dos nós.
% egcascas (S) - Vetor de estruturas dos esforços nos pontos de Gauss,
%             fixo para ordem 3.
% encascas (S) - Matriz 3d dos esforços nos nós dos elementos do tipo
%             casca, extrapolados pelo ajuste linear dos valores nos
%             pontos de Gauss, fixo para ordem 3.
% -----
% Universidade Federal de Alagoas - UFAL
% Centro de Tecnologia - CTEC
% Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC
% -----
% Por: Glauber Batista Marques (glauberbatistamarques@gmail.com)
%      Eduardo Nobre Lages (enl@lccv.ufal.br)
%      Severino Pereira Cavalcanti Marques (smarques@lccv.ufal.br)
% -----
% Versão: 22/12/2017
% -----
```

Fonte: autor (2018).

### A.1. Entrada de dados

A entrada de dados é formada pelos vetores de estruturas ou *structs* de *nos*, *cascas*, *aneis*, *apoios*, *bases*, *ligações*, *cargasc*, *cargasd* e *npg*.

O *struct nos* é formado por um campo de vetores, em que cada linha representa as coordenadas *r* e *z* do nó em questão, dessa forma o tamanho desse *struct* é [número de nós do problema  $\times$  1]. Sua criação pode ser feita de acordo com a Figura A.2, na qual *nnt* é o número total de nós e todos os nós estão com coordenadas iguais a zero, sendo necessário inserir as coordenadas reais posteriormente.

Figura A.2 – Criação do *struct nos*.

```
%% GERAÇÃO DA ESTRUTURA DE DADOS
% Montagem da estrutura de nós
nos= repmat(struct('rz', [0;0]), nnt, 1);
```

Fonte: autor (2018).

A Figura A.3 mostra a criação do vetor de estruturas *cascas*, que é formado por três campos, em que dois deles são vetores e o terceiro uma constante. Esse *struct* é responsável pela criação dos elementos de casca por meio da união de dois nós, definição das propriedades mecânicas e espessura da mesma. O campo *nos* contém o par de nós que formam a cascas, o campo *mat* define o Módulo de Young e o Coeficiente de Poisson e o campo *st* a espessura.

Figura A.3 – Criação do *struct cascas*.

```
% Montagem da estrutura dos elementos de casca
cascas= repmat(struct('nos', [0;0], 'mat', [my;nu], 'st', ep), nct, 1);
```

Fonte: autor (2018).

Já o *struct aneis* é definido por quatro campos, como na Figura A.4. O campo *master* é o identificador do nó associado ao centroide da seção transversal do anel de rigidez (*nna*), o campo *slaves* é um vetor com os identificadores dos nós das extremidades dos elementos que estão rigidamente vinculados ao anel (*naa1, naa2*), o campo *mat* é o módulo de elasticidade longitudinal do material do anel (*my*) e o campo *st* é um vetor de três posições com as propriedades da seção transversal do anel (*a<sub>r</sub>, q<sub>r</sub>, i<sub>r</sub>*), conforme obtido no item 6.2.4 nas Eqs. 221, 222 e 223 respectivamente. A sigla *nae* representa o número de anéis da estrutura.

Figura A.4 – Criação do *struct anéis*.

```
% Montagem da estrutura do anel de rigidez retangular
aneis=repmat(struct('master',nna,'slaves',[naa1 naa2],'mat',my,'st',[a_r;q_r;i_r]),nae,1);
```

Fonte: autor (2018).

Os apoios são definidos pelo vetor de estruturas *apoios*, o qual é formado por quatro campos, conforme a Figura A.5. O campo *no* é o identificador no nó da estrutura que contém o apoio, o campo *cod* é um vetor de três posições que representa as coordenadas ou os graus de liberdade prescritos (usar 1 para livre e 0 para prescrito), o campo *valor* é um vetor de três posições com os valores dos deslocamento prescritos e o campo *ang* é o ângulo de inclinação do apoio em questão. O *nap* é o número de apoios da estrutura.

Figura A.5 – Criação do *struct apoios*.

```
% Associação dos apoios da estruturas aos nós
% Apoio dos nós sobre o eixo de simetria
apoios=repmat(struct('no',1,'cod',[r;z;rot],'valor',[0;0;0],'ang',0),nap,1);
```

Fonte: autor (2018).

As bases elásticas associadas a estrutura são aplicadas por meio do *struct bases*, que contém dois campos, como mostra a Figura A.6. O primeiro é o campo *casca*, que define o identificador da casca que está em contato com a base elástica. O segundo *k* é um vetor de duas posições que definem as constantes elásticas nas direções longitudinais e transversais a casca em questão. O *ncae* é o número de cascas em apoio elástico.

Figura A.6 – Criação do *struct bases*.

```
% Bases elásticas representativas do solo
bases=repmat(struct('casca',0,'k',[0;kt]),ncae,1);
```

Fonte: autor (2018).

As ligações são definidas por um vetor de *struct* com os campos *nos* e *cod*. O campo *nos* é um vetor de duas posições com os identificadores dos nós associados à ligação. O campo *cod* é um vetor de três posições que diz como os graus de liberdade dos dois nós associados à ligação estão vinculados. Esse código é 1 quando os correspondentes graus de liberdade são dependentes (iguais) nos dois nós e 0 quando independentes, como ilustrado na Figura A.7. Se o modelo apresentar mais de uma ligação envolvendo o mesmo nó, este nó deverá ter o menor identificador de todos os outros nós envolvidos nessas ligações.



Figura A.7 – Criação do *struct ligacoes*.

```
% Ligações com graus de liberdade independentes
ligacoes=struct('nos',[no1,no2],'cod',[r,z,rot]);
```

Fonte: autor (2018).

O vetor de estruturas *cargasc* é responsável pelos carregamentos concentrados nos nós, como mostra a Figura A.8. O campo *no* é o identificador do nó que recebe o carregamento, já o campo *intensidades* define as magnitudes dos carregamentos aplicados. *Fr* é a força aplicada segundo a direção *r*, *Fz* é a força aplicada segundo a direção *z* e *M* é o momento fletor aplicado no nó.

Figura A.8 – Criação do *struct cargasc*.

```
% Montagem da estrutura de carregamento concentrado
cargasc=repmat(struct('no',1,'intensidades',[Fr;Fz;M]),1,1);
```

Fonte: autor (2018).

*Cargasd* é um vetor de estruturas das cargas distribuídas nas cascas. É formado por quatro campos, como apresenta a Figura A.9, em que *casca* é o identificador da casca na qual o carregamento distribuído atua, *s* é um vetor de duas posições referentes aos valores de carregamento longitudinal nos nós, que permitem um carregamento distribuído de formato trapezoidal ao longo da casca. Da mesma forma que *s*, *t* é um vetor de duas posições para o carregamento transversal a superfície média da casca e *m* o valor do momento atuante nas extremidades da casca, ambos formando um carregamento distribuído trapezoidal. O *nccd* é o número de cascas com carregamento distribuído.

Figura A.9 – Criação do *struct cargasd*.

```
% Carregamentos distribuídos na placa, na cúpula e na parede
cargasd=repmat(struct('casca',0,'s',[s1;s2],'t',[t1;t2],'m',[m1;m2]),nccd,1);
```

Fonte: autor (2018).

Para finalizar a entrada de dados, é necessário o número de pontos da quadratura de Gauss para a matriz de rigidez, definido pela variável *npg* e podendo variar de 1 a 6.

## A.2. Saída de dados

Após o processamento dos dados, o EAPD fornece uma matriz dos deslocamentos dos nós (*dnos*), um vetor de estruturas dos esforços nos pontos de Gauss (*egcascas*) e uma matriz 3d dos esforços nos nós dos elementos do tipo casca, extrapolados pelo ajuste linear dos valores nos pontos de Gauss (*encascas*).

A matriz *dnos* é uma matriz  $[3 \times \text{número de nós}]$ , em que a primeira linha é o deslocamento nodal na direção *r*, a segunda é o deslocamento na direção *z* e a terceira a rotação do nó.

O struct *egcascas* é composto por dois campos, o primeiro, *rz*, é uma matriz  $[3 \times 2]$  que identifica as coordenadas dos pontos de Gauss e o segundo, *NM*, uma matriz  $[5 \times 3]$  define os esforços atuantes nesses pontos.

A matriz *encascas* é uma matriz  $[5 \times 2 \times \text{número de cascas}]$ , na qual as cinco linhas representam os esforços e momentos e cada coluna representa um nó da casca.