

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL  
CENTRO DE TECNOLOGIA – CTEC  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL -PPGEC**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS  
COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS  
LINEARES ATRAVÉS DA TEORIA DE  
VOLUMES FINITOS**

Romildo dos Santos Escarpini Filho

MACEIÓ

2010

**ROMILDO DOS SANTOS ESCARPINI FILHO**

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS  
COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS  
LINEARES ATRAVÉS DA TEORIA DE  
VOLUMES FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques

Co-orientador: Prof. Dr. Guillermo Juan Creus

**MACEIÓ**

**2010**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

- E74a Escarpini Filho, Romildo dos Santos.  
Análise de estruturas de materiais compósitos viscoelásticos lineares através da teoria de volumes finitos / Romildo dos Santos Escarpini Filho, 2010.  
xvii, 86 f. : il., tabs., grafs.
- Orientador: Severino Pereira Cavalcanti.  
Co- Orientador: Guilherme Juan Creus.  
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2010.
- Bibliografia: f. 71-74.  
Apêndices: f. 75-86.
1. Formulação paramétrica da teoria de volumes finitos. 2. Materiais heterogêneos. 3. Viscoelasticidade linear. I. Título.

CDU: 691.53



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC  
Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
Tel/Fax: (82) 3214-1276  
E-mail: [ppgec@ctec.ufal.br](mailto:ppgec@ctec.ufal.br)  
Homepage: [www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec](http://www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec)



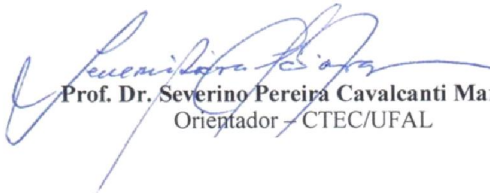
---

## ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS VISCOELÁSTICOS LINEARES ATRAVÉS DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS

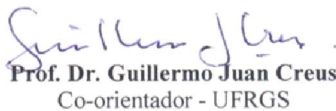
**ROMILDO DOS SANTOS ESCARPINI FILHO**

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 11 do mês de maio do ano de 2010.

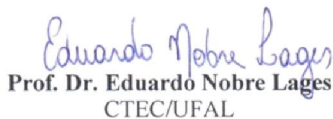
Banca Examinadora:



**Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques**  
Orientador – CTEC/UFAL



**Prof. Dr. Guillermo Juan Creus**  
Co-orientador - UFRGS



**Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages**  
CTEC/UFAL



**Prof. Dr. Samir Maghous**  
UFRGS

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, pois tudo que fazemos é para Ele, à minha mãe, Vivian, por seu amor incondicional, ao meu pai Romildo e ao meu irmão Raffael.

# Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por ter me dado saúde e disposição, além de uma equipe de excelentes professores durante toda a minha vida acadêmica.

À minha família por ter me apoiado nos momentos difíceis, de descontração, de briga e de reconciliamento, agradeço a todos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Severino Marques (Severo), pelo constante incentivo, apoio e direcionamento para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Laboratório de Computação Científica e Visualização pela disponibilidade de suas instalações e infraestrutura.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Guillermo Juan Creus, que mesmo com todas as suas atribuições, disponibilizou seu precioso tempo para tratar comigo questões sobre viscoelasticidade.

Ao Prof. Dr. Eduardo Nobre, que em momentos de dificuldade me mostrou alguns caminhos pelo qual poderia caminhar.

Aos Professores Eduardo Nobre, William Wagner, Adeildo Soares Ramos e Eduardo Setton que contribuíram para minha formação e pelo incentivo dentro do laboratório (LCCV).

Ao amigo Clayton Tavares pelas horas de descontração, estudo e desenvolvimento de trabalhos relacionados à Teoria de Volumes Finitos.

Aos amigos que conquistei em toda a minha jornada e aos membros do LCCV, que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

“São os passos que fazem o caminho.”

Mario Quintana

## Resumo

O presente trabalho tem por objetivo expandir a formulação numérica denominada Formulação Paramétrica da Teoria de Volumes Finitos para o caso de materiais com comportamento dependente do tempo. Tal teoria tem demonstrado ser uma eficiente alternativa ao Método dos Elementos Finitos para a modelagem de materiais heterogêneos elásticos lineares.

Primeiramente, expressões gerais da viscoelasticidade linear são apresentadas, empregando-se uma formulação baseada em Variáveis de Estado para determinação das deformações dependentes do tempo. Expressões para os modelos reológicos básicos são dadas, estendidas para situações tridimensionais e estabelecidas em adequada forma matricial. A influência da temperatura sobre as propriedades viscoelásticas é modelada através de um princípio de equivalência tempo-temperatura. Em seguida, a Formulação Paramétrica da Teoria de Volumes Finitos é revisada e estendida para incluir a consideração de deformações viscoelásticas. Expressões detalhadas para a solução incremental de problemas termoviscoelásticos lineares são apresentadas.

Os resultados numéricos são verificados através de vários exemplos usando soluções analíticas disponíveis na literatura ou determinadas pelo uso do Princípio da Correspondência.

**Palavras-Chave:** Materiais avançados, Teoria de volumes finitos, Materiais Heterogêneos, Viscoelasticidade linear.



## Abstract

The present work extends the Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory to the case of heterogeneous materials with time-dependent behavior. Such a theory has already proved to be an efficient alternative to the Finite Element Method in the modeling of linear elastic heterogeneous materials.

Firstly, general expressions for linear viscoelasticity are considered, determining deferred strains with a State Variables formulation. Expressions for the basic rheological models are given, extended to 3D situations and set in an adequate matrix form. Temperature dependence is modeled using the time-temperature equivalence principle. Then, the Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory is reviewed and extended including the consideration of viscoelastic deformations. Detailed matrix expressions for the incremental solution of linear thermoviscoelastic problems are given.

The numerical results are verified with several examples using analytical solutions found in the literature or determined by using the Correspondence Principle.

**Keywords:** Advanced materials, Finite-volume theory, Heterogeneous materials, Linear viscoelasticity.

## Lista de Figuras

Figura 1 – Modelo viscoelástico de Maxwell.....	8
Figura 2 – Histórico de tensão prescrita no teste de fluência do material.....	9
Figura 3 – Curva de fluência para o modelo de Maxwell.....	10
Figura 4 – Deformação imposta ao modelo no teste de relaxação do material.....	10
Figura 5 – Curva de relaxação para o modelo de Maxwell.....	11
Figura 6 – Modelo viscoelástico de Kelvin.....	11
Figura 7 – Curva de fluência para o modelo de Kelvin.....	12
Figura 8 – Curva de relaxação para o modelo de Kelvin.....	13
Figura 9 – Modelo de Sólido Linear Padrão.....	13
Figura 10 – Modelo de Kelvin Generalizado.....	15
Figura 11 – Curva de relaxação para um material termo-reologicamente simples.....	17
Figura 12 – Decomposição do estado de tensão.....	25
Figura 13 – Discretização do domínio em subvolumes quadrilaterais.....	33
Figura 14 – Parametrização do subvolume bidimensional.....	33
Figura 15 – Propriedades físicas dos modelos viscoelásticos volumétrico e desviador.....	53
Figura 16 – Histórico de deformação para o espécime sob tensão axial.....	55
Figura 17 – Bloco confinado.....	56
Figura 18 – Tensão horizontal no cilindro confinado.....	57
Figura 19 – Variação do coeficiente de Poisson ao longo do tempo.....	59
Figura 20 – Painel heterogêneo laminado e malha de subvolumes.....	60
Figura 21 – Propriedades viscoelásticas do painel heterogêneo.....	60
Figura 22 – Variação do deslocamento horizontal da extremidade direita do painel.....	61
Figura 23 – Barra viscoelástica com reforço elástico interno (malha 10x15 subvolumes). .....	62
Figura 24 – Relaxação das tensões axiais para a barra heterogênea.....	63
Figura 25 – Viga sanduíche e discretização com 25x14 subvolumes.....	64
Figura 26 – Variação do deslocamento vertical no extremo da viga viscoelástica.....	65
Figura 27 – Variação do deslocamento vertical nas vigas elásticas e sanduíche.....	66
Figura 28 – Deslocamentos horizontais para a extremidade direita da barra.....	67

Figura 29 – Seções transversais onde foram estudadas as tensões horizontais. ....	67
Figura 30 – Tensões horizontais médias ao longo das seções transversais. ....	68

## Lista de Abreviaturas

TVF	Teoria de Volumes Finitos
PPFVT	<i>Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory</i>
MVE	Método das Variáveis de Estado
FVDAM	Finite Volume Direct Averaging Method
EPT	Estado Plano de Tensão
EPD	Estado Plano de Deformação

## Lista de Símbolos

$\sigma_i(t)$	Componente de tensão para um tempo $t$
$C_{ij}(t - \tau)$	Módulos ou funções de relaxação do material viscoelástico
$\varepsilon_j(t)$	Componente de deformação para um tempo $t$
$D_{ij}(t - \tau)$	Módulos ou funções de fluência do material viscoelástico
$\sigma_m(t)$	Tensão aplicada à mola
$\sigma_a(t)$	Tensão aplicada ao amortecedor
$\varepsilon_m(t)$	Deformação da mola
$\varepsilon_a(t)$	Deformação do amortecedor
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$K$	Módulo de elasticidade volumétrico
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$\eta$	Constante do amortecedor (viscosidade)
$\dot{\varepsilon}_a(t)$	Taxa de deformação do amortecedor
$\dot{\varepsilon}(t)$	Taxa de deformação total
$\dot{\sigma}(t)$	Taxa de tensão total
$\sigma_0$	Tensão inicial
$\varepsilon_0$	Deformação inicial
$u(t)$	Função passo unitário
$\delta(t)$	Delta de Dirac
$L_{ij}$	Funções que dependem do tempo
$T$	Temperatura

H	Umidade
$T_0$	Temperatura de referência
$H_0$	Teor de umidade de referência
$\Psi_{ij}(T)$	Funções de translação do tempo
$\Psi_{ij}(T, H)$	
$\zeta_{ij}$	Tempos reduzidos
$\chi_{ij}(T)$	Fatores de translação do tempo (shift factor)
$\chi_{ij}(T, H)$	
$\chi_{ij}^T(T)$	Fatores de translação do tempo para temperatura T e para teor de umidade $H_0$ e para uma umidade H e temperatura $T_0$ , respectivamente
$\chi_{ij}^H(H)$	
$D_{ij}^0, D_{ij}^p$	Parâmetros do material viscoelástico
$\theta_{ij}^p$	Parâmetros do material viscoelástico chamado de tempos de retardação do material.
$F_{ij}^p$	Componente da matriz que relaciona alguns parâmetros do material viscoelástico
$\epsilon_i^e(t)$	Componente da deformação elástica para um tempo t
$\epsilon_i^T(t)$	Componente da deformação térmica para um tempo t
$\epsilon_i^v(t)$	Componente da deformação viscoelástica para um tempo t
$\varphi_{ij}^p(t)$	Variáveis de estado
$b_x$	Força de corpo na direção x
$b_y$	Força de corpo na direção y
$\Delta\sigma_i$	Incremento de tensão
u	Campo de deslocamento na direção horizontal
$\Delta u$	Campo de deslocamento incremental na direção horizontal
v	Campo de deslocamento na direção vertical
$\Delta v$	Campo de deslocamento incremental na direção vertical

[C]	Matriz constitutiva do material
{ $\varepsilon$ }	Deformação total
{ $\varepsilon^T$ }	Deformação térmica
{ $\varepsilon^V$ }	Deformação viscoelástica
{ $\Delta\varepsilon$ }	Incremento de deformação total
{ $\Delta\varepsilon^T$ }	Incremento de deformação térmica
{ $\Delta\varepsilon^V$ }	Incremento de deformação viscoelástica
$\Delta U_{i(aa)}$	Coeficiente aa do campo de deslocamento na direção i
$\eta$	Coordenada paramétrica (direção horizontal)
$\xi$	Coordenada paramétrica (direção vertical)
f	Representa a face de estudo do subvolume, que pode variar de 1 à 4
$\left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Média da derivada parcial do campo incremental em relação à coordenada paramétrica $\eta$ nas faces $\eta = \pm 1$ , o mesmo serve para as outras médias
$\left\langle \frac{\partial \Delta u}{\partial x_1} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Média da derivada parcial do campo incremental em relação à coordenada cartesiana $x_1$ nas faces $\eta = \pm 1$ , o mesmo serve para as outras médias
[ $\bar{J}$ ]	Matriz inversa da Jacobiana
[E]	Matriz que relaciona a deformação total com as derivadas do campo de deslocamentos
$\langle \Delta t_i \rangle$	Incremento médio de traction na direção i
$n_1, n_2$	Normais às faces na direção $x_1$ e $x_2$ , respectivamente
[D]	Matriz composta pelas normais às faces do subvolume
[C]	Matriz composta pela matriz constitutiva do subvolume
{ $\langle \Delta\varepsilon \rangle$ }	Incremento médio de deformação total
{ $\langle \Delta\varepsilon^T \rangle$ }	Incremento médio de deformação térmica
{ $\langle \Delta\varepsilon^V \rangle$ }	Incremento médio de deformação viscoelástica

[E]	Matriz composta por matrizes [E]
[B]	Matriz composta por matrizes inversa da Jacobiana
[A]	Matriz que relaciona a média da derivada parcial do campo incremental em relação a coordenada paramétrica com os coeficientes do campo de deslocamento
$\bar{A}$	Multiplicação das matrizes [D][C][E][B][A]
$\Delta u_{Fi}$	Incremento de deslocamento horizontal na face i
$\Delta v_{Fi}$	Incremento de deslocamento vertical na face i
$\alpha_{ii}$	Coefficiente de expansão térmica na direção $x_i$
$\Gamma_i$	Variável com propriedades elásticas e térmicas na direção $x_i$
$\Delta V_i$	Variável que guarda as derivadas dos incrementos de deformação viscoelástica para direção $x_i$
$W_{ij}$	Componentes que relacionam coeficientes do campo de deslocamentos e componentes da matriz inversa da Jacobiana
[ $\Phi$ ]	Matriz que relaciona coeficientes do campo de deslocamentos e componentes da matriz inversa da Jacobiana
[ $\theta$ ]	Matriz que relaciona coeficientes do campo de deslocamentos e componentes da matriz inversa da Jacobiana
[P]	Matriz auxiliar utilizada no cálculo do $\bar{B}$
[M]	Matriz auxiliar utilizada no cálculo do $\bar{B}$
[N]	Matriz auxiliar utilizada no cálculo do $\bar{B}$ e na relação entre os coeficientes do campo de deslocamentos com as forças de corpo
$\bar{B}$	Matriz que relaciona os coeficientes do campo de deslocamentos com as componentes dos deslocamentos médios nas faces do subvolume
{ $\Delta\psi$ }	Vetor utilizado no cálculo do pseudo vetor de forças iniciais e é composto por termos dependentes do campo de temperatura e das deformações viscoelásticas
{ $\Delta t^0$ }	Pseudo vetor de forças iniciais
[K]	Pseudo matriz de rigidez



[F]	Matriz composta por componentes da matriz inversa da Jacobiana
$\{r(t)\}$	Vetor com as derivadas dos campos de deslocamento em relação as coordenadas paramétricas
$R_{ij}^p$	Matriz composta pelas constantes viscoelásticas do material
$S_{ij}^p(t)$	Matriz composta pela variável de estado e por constantes viscoelásticas do material
[F]	Matriz composta por matrizes [F]
$\{r(t)\}$	Vetor composto por vetores $\{r(t)\}$
[Q]	Matriz composta por componentes da matriz inversa da Jacobiana
$\{1\}$	Vetor composto por uns
$\frac{\partial S_{ij}^p(t)}{\partial \eta}$	Derivada das componentes da matriz $S_{ij}^p(t)$ com relação à coordenada paramétrica $\eta$
$\frac{\partial S_{ij}^p(t)}{\partial \xi}$	Derivada das componentes da matriz $S_{ij}^p(t)$ com relação à coordenada paramétrica $\xi$
$\frac{\partial r(t)}{\partial \eta}$	Derivada das componentes do vetor $r(t)$ com relação à coordenada paramétrica $\eta$
$\frac{\partial r(t)}{\partial \xi}$	Derivada das componentes do vetor $r(t)$ com relação à coordenada paramétrica $\xi$
$\delta_h$	Deslocamento horizontal
$\delta_v$	Deslocamento vertical
I	Momento de inércia

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1.	OBJETIVOS.....	4
1.2.	RESUMO DOS CAPÍTULOS.....	5
<b>2</b>	<b>Fundamentos da Teoria da Viscoelasticidade Linear.....</b>	<b>6</b>
2.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	6
2.2.	VISCOELASTICIDADE LINEAR .....	6
2.2.1.	<i>Modelos para a Representação do Comportamento Viscoelástico de Materiais</i> .....	7
2.3.	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA .....	16
2.4.	MÉTODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO (MVE) PARA AVALIAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICAS DE MATERIAIS ANISÓTROPAS .....	19
2.5.	AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO PARA ESTADOS DE DEFORMAÇÃO DESVIADOR E VOLUMÉTRICO .....	25
<b>3</b>	<b>Formulação Viscoelástica da Teoria de Volumes Finitos Bidimensional.....</b>	<b>30</b>
3.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	30
3.2.	EQUAÇÕES INCREMENTAIS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO BIDIMENSIONAL.....	30
3.3.	FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA BIDIMENSIONAL TERMOVISCOELÁSTICA DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS.....	32
3.4.	AVALIAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES VISCOELÁSTICAS.....	47
<b>4</b>	<b>Exemplos e Discussões.....</b>	<b>53</b>
4.1.	CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	53

4.2. DETERMINAÇÃO DA CURVA DE FLUÊNCIA PARA UM ESPÉCIME SOB TRACÇÃO .....	53
4.3. TENSÃO TRANSVERSAL EM BLOCO VISCOELÁSTICO CONFINADO ....	56
4.4. ESTUDO DA VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON EM FUNÇÃO DO TEMPO .....	57
4.5. FLUÊNCIA DE UM PAINEL HETEROGÊNEO.....	59
4.6. DETERMINAÇÃO DA CURVA DE RELAXAÇÃO PARA UMA BARRA VISCOELÁSTICA COM REFORÇO ELÁSTICO.....	62
4.7. AVALIAÇÃO DA FLUÊNCIA DE UMA DE VIGA DO TIPO SANDUÍCHE...	64
4.8. ESTUDO DE UMA BARRA VISCOELÁSTICA REFORÇADA POR FIBRA ELÁSTICA SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO TÉRMICO.....	66
<b>5 Considerações Finais .....</b>	<b>69</b>
5.1. CONCLUSÕES .....	69
5.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	70
<b>6 Referências Bibliográficas.....</b>	<b>71</b>
<b>7 Apêndices .....</b>	<b>75</b>
7.1. APÊNCIDE A: DERIVADA DAS VARIÁVEIS DE ESTADO .....	75
7.2. APÊNCIDE B: VARIÁVEIS DE ESTADO CORRESPONDENTE AO TEMPO $T+\Delta T$ .....	77
7.3. APÊNCIDE C: TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS EM SUBVOLUME .....	79
7.4. APÊNCIDE D: MATRIZES PARA A FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS .....	82
7.5. APÊNCIDA E: ALGORITMO INCREMENTAL DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS PARA VISCOELASTICIDADE LINEAR PELO MÉTODO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO .....	85

# 1 Introdução

O rápido avanço tecnológico tem motivado uma crescente necessidade do emprego de materiais com avançado desempenho e características desejáveis em importantes áreas da ciência e nos mais diversos setores industriais. Este fato tem proporcionado um desenvolvimento substancial na tecnologia de fabricação e projeto de novos materiais e nas investigações teóricas e experimentais de seus comportamentos. Dentro de uma importante classe destes modernos materiais encontram-se aqueles que apresentam uma microestrutura heterogênea, constituída pela combinação discreta de diferentes fases. Nesta classe se enquadram, por exemplos, os compósitos reforçados por fibras e os materiais particulados, os quais são constituídos por uma matriz envolvendo fibras ou inclusões (partículas) que, normalmente, servem como materiais de reforço ou de enrijecimento. Os materiais compósitos avançados, reforçados por fibras, apresentam como principal característica as suas altas relações resistência/peso e rigidez/peso o que justifica, nas últimas décadas, o seu intenso emprego nas indústrias aeroespacial, automobilística e naval. Porém, a cada dia aumenta o leque de aplicações de tais materiais compósitos avançados. Atualmente, dentre as mais diversas aplicações, eles vêm sendo utilizados na construção civil e também nas estruturas *offshore* destinadas à exploração de petróleo e gás. Neste último caso, por exemplo, eles já são utilizados na confecção de *risers* para águas profundas, tanques, vasos de pressão, painéis e em outros elementos da plataforma, tais como: escadas, tubulações de água, vigas, etc. As vantagens do emprego dos mesmos em estruturas *offshore* são: as elevadas relações resistência mecânica/peso e rigidez/peso, assim como a excelente resistência à corrosão, ao impacto e à fadiga.

Os materiais compósitos avançados mais comuns são aqueles que possuem uma matriz polimérica envolvendo fibras de alta resistência. A matriz usualmente consiste em uma resina apresentando frações volumétricas na ordem de 30 a 40%. As matrizes frequentemente empregadas são de poliéster, de epóxi e fenólicas. As fibras mais usadas

em tais materiais compósitos são as de carbono/grafite, de vidro e poliméricas (Kevlar, por exemplo).

Usualmente, as limitações do uso de material compósito são definidas pelas propriedades da matriz. Por exemplo, a estabilidade higrotérmica e os valores máximos de temperatura e umidade do compósito são fortemente dependentes do desempenho da matriz. Adicionalmente, ambientes quimicamente agressivos ou com severas condições de temperatura podem provocar a degradação das propriedades da matriz antes da ocorrência de qualquer dano às fibras. Enfim, o desempenho de um material compósito está intimamente relacionado ao comportamento de sua matriz.

Como já se conhece, os polímeros apresentam um comportamento mecânico dependente do tempo, especialmente quando na presença de elevadas condições de temperatura e umidade (Marques e Creus, 1994). Isto é, sob tais condições, os compósitos com matriz polimérica podem apresentar importantes efeitos viscoelásticos, exibindo, portanto, os fenômenos de fluência e relaxação. Por se tratar de materiais com microestrutura heterogênea, este comportamento dependente do tempo apresenta uma complexidade superior aos dos tradicionais materiais homogêneos viscoelásticos. Com base nestas considerações, uma modelagem mais realística do comportamento de materiais compósitos avançados exige a utilização de uma formulação que leve em conta aqueles efeitos de fluência e relaxação.

Na realidade, já existe na literatura um grande número de trabalhos tratando da descrição do comportamento viscoelástico de materiais compósitos avançados. Uma relevante parte destes trabalhos é voltada para a determinação de propriedades efetivas de compósitos viscoelásticos através de técnicas de homogeneização. Contribuições pioneiras nestes estudos foram dadas por Hashin (1965, 1970), Schapery (1967) e Christensen (1969). No trabalho publicado em 1965, Hashin apresentou uma expressão para determinação do módulo volumétrico (*bulk*) efetivo para compósitos viscoelásticos e, em 1970, publicou resultados para obtenção do módulo efetivo de cisalhamento. Em 1969, Christensen, por sua vez, divulgou expressões para avaliação dos módulos volumétricos e de cisalhamento para aqueles compósitos viscoelásticos. Os resultados encontrados nestes trabalhos pioneiros foram obtidos através do modelo de esferas para compósitos elásticos lineares desenvolvido por Hashin (1962). No entanto, tais resultados, por terem o modelo de esferas como base, não são adequados para

compósitos reforçados por fibras. Schapery (1967) aplicou o Princípio da Correspondência para obtenção das funções de fluência e de relaxação efetivas para compósitos, incluindo efeitos de temperatura e usando técnicas aproximadas de inversão para o domínio do tempo.

Todas essas contribuições acima citadas empregaram o Princípio da Correspondência para determinação das propriedades viscoelásticas lineares em função de resultados obtidos mediante o uso de modelos previamente formulados para compósitos similares elásticos lineares. O Princípio da Correspondência também tem sido aplicado para determinação de propriedades efetivas de compósitos viscoelásticos, usando modelos elásticos lineares derivados da teoria micromecânica de campos médios (Eshelby, 1957). Nesta linha, pode ser citado o trabalho de Laws e Mc Laughlin (1978) que estendeu resultados do modelo *Self-Consistent* para compósitos viscoelásticos. Como outro exemplo, Brinson e Lin (1998) empregaram o modelo de Mori-Tanaka para aquele fim. O princípio variacional de Hashin-Shtrikman (1962) também tem sido utilizado para obtenção de valores limites de propriedades efetivas para compósitos viscoelásticos (DeBotton e Tevet-Deree, 2004; Gibiansky *et al.*, 1999). Chandra *et al.* (2002) apresentaram um estudo comparativo entre resultados para propriedades efetivas de compósitos viscoelásticos reforçados por fibras obtidos a partir da aplicação conjunta de modelos micromecânicos elásticos lineares e do Princípio da Correspondência, como também pelo método dos elementos finitos.

Modelos baseados na teoria funcional da viscoelasticidade também têm sido empregados para obtenção da resposta efetiva de compósitos viscoelásticos (Rougier *et al.*, 1993). Outros métodos propostos se fundamentam em teorias constitutivas baseadas em variáveis de estado e são formulados diretamente no espaço do tempo (Lahellec e Suquet, 2007).

As diferentes formulações propostas para determinação de propriedades e respostas efetivas de compósitos viscoelásticos apresentam, no entanto, suas peculiares limitações e dificuldades. Para aquelas baseadas no Princípio da Correspondência, dependendo da complexidade da microestrutura, os módulos complexos do compósito no domínio de Laplace não podem ser obtidos analiticamente, o que pode inviabilizar o processo de transformação para o domínio do tempo. Por outro lado, as formulações

funcionais geralmente exigem o armazenamento das histórias de tensão e de deformação, tornando as mesmas inadequadas do ponto de vista computacional.

A natureza heterogênea, anisótropa e complexa da microestrutura dos materiais compósitos apresenta-se como um fator complicador na análise de estruturas por eles constituídas. Levar em conta todos os detalhes microestruturais do material ao longo de uma estrutura real é uma tarefa na maioria das vezes inviável. Além disto, a complexidade do comportamento reológico do material, tais como a presença de efeitos dependentes do tempo, acentua ainda mais as dificuldades. Uma estratégia para contornar estes obstáculos consiste em se realizar análises em escala macroscópica, onde são empregadas as propriedades efetivas do material homogeneizado (Marques e Creus, 1994). Através destas análises são obtidos os macro-campos de deslocamentos, tensões e deformações. Desta forma, com o uso de propriedades efetivas não se consegue capturar os micro-campos daquelas variáveis que se apresentam na escala da heterogeneidade. Considerando as dificuldades acima mencionadas, a solução vislumbrada consiste em se recorrer a uma análise multi-escala do tipo macro/micromecânica. Neste caso, os resultados obtidos em prévias análises macromecânicas auxiliam análises micromecânicas efetuadas em pequenos subdomínios ou regiões de interesse, nas quais os detalhes da microestrutura do material são considerados (Oden *et al.*, 1999; Romkes *et al.*, 2006). A definição do tamanho das regiões para execução das citadas análises micromecânicas é uma tarefa delicada que ainda carece de aprofundada investigação, especialmente quando se trata de materiais heterogêneos que não são elásticos lineares.

## **1.1. Objetivos**

Pretende-se neste trabalho dar continuidade à Formulação Paramétrica da Teoria de Volumes Finitos (Cavalcante, 2006; Cavalcante *et al.* 2007a,b) mediante a implementação de efeitos viscoelásticos lineares. Essa nova formulação pode ser utilizada em análises macromecânicas com o material homogeneizado e também nas análises micromecânicas onde se considera a heterogeneidade presente na microestrutura. A implementação desses efeitos viscoelásticos vem como um diferencial

para a Teoria de Volumes Finitos (TVF), considerando que essa formulação é bastante recente e se encontra em pleno desenvolvimento.

Como objetivos específicos do presente trabalho, podem ser citados os seguintes:

- a) Desenvolvimento de uma formulação que se apresente como uma eficiente alternativa para a análise de materiais viscoelásticos com microestrutura heterogênea;
- b) Desenvolvimento de um código computacional que permita a execução das análises baseadas na referida formulação;
- c) Proporcionar um melhor entendimento do comportamento dos compósitos que apresentem constituintes viscoelásticos lineares;
- d) Fortalecer a linha de pesquisa voltada para o estudo de novos materiais no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFAL.

## **1.2. Resumo dos capítulos**

No Capítulo 2 são apresentados os principais conceitos e procedimentos da teoria da viscoelasticidade linear utilizados na elaboração do modelo proposto. O Capítulo 3 trata do desenvolvimento de uma formulação viscoelástica linear tendo como base a Formulação Paramétrica da Teoria de Volumes Finitos Bidimensional. Os exemplos de aplicação e discussões são mostrados no Capítulo 4 e por fim a conclusão no Capítulo 5.



## 2 Fundamentos da Teoria da Viscoelasticidade Linear

### 2.1. Considerações Iniciais

Muitos componentes estruturais utilizados na prática apresentam em sua constituição materiais que podem ser modelados como viscoelásticos lineares. Como exemplos, têm-se os materiais compósitos laminados reforçados por fibras, as quais são envolvidas por uma matriz polimérica.

A maioria dos materiais usuais exibe um comportamento viscoelástico se observados por um período de tempo suficientemente longo, ou se submetidos a altas temperaturas ou umidade (Barbero, 2007).

Em geral, observa-se que o comportamento viscoelástico se acentua quando o material absorve umidade ou é submetido a aumentos de temperatura (Marques, 1994).

### 2.2. Viscoelasticidade Linear

O comportamento dependente do tempo dos materiais é estudado através dos ensaios de fluência, de relaxação de tensões e de velocidade de tensões ou deformações constantes (Findley *et al.*, 1976). Através desses ensaios é possível encontrar as funções que relacionam a tensão com a deformação.

Para materiais viscoelásticos lineares as tensões e as deformações podem ser relacionadas através da seguinte expressão (Schapery, 1968 *apud* Marques, 1994, p. 25):

$$\sigma_i(t) = \int_0^t C_{ij}(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_i$  é a componente de tensão,  $\varepsilon_j$  é a componente de deformação,  $t$  é o tempo,  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) são os módulos ou as funções de relaxação do material e  $\tau$  a variável

de integração. Relaxação é o fenômeno caracterizado pela redução das tensões ao longo do tempo quando ao material viscoelástico é imposta uma deformação constante. Em (2.1) o tempo inicial de referência é tomado como  $t = 0$ , significando que antes dele as tensões e as deformações são nulas.

Alternativamente, a relação entre tensões e deformações pode ser expressa na forma

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t - \tau) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.2)$$

onde  $D_{ij}$  são as funções de fluência do material. A fluência ou *creep* é uma deformação lenta contínua do material sobre tensão constante. A velocidade de fluência, em geral, aumenta com a carga e com a temperatura aplicada ao material. A deformação total, em qualquer instante de tempo, pode ser definida como a soma da deformação elástica instantânea com a deformação de fluência (Findley et al., 1976).

A seguir serão apresentados alguns modelos que visam representar o comportamento viscoelástico linear de materiais.

### **2.2.1. Modelos para a Representação do Comportamento Viscoelástico de Materiais**

Como forma de simplificar e representar o comportamento viscoelástico dos materiais, alguns modelos foram desenvolvidos utilizando-se de elementos unidimensionais, os quais são representados por combinações de molas (modelos Hookeanos) e amortecedores (modelos Newtonianos). Apresentam-se em seguida os tradicionais modelos da viscoelasticidade linear.

#### **2.2.1.1. Modelo de Maxwell**

O modelo de Maxwell consiste na ligação de uma mola e um amortecedor lineares colocados em série (Figura 1).



Figura 1 – Modelo viscoelástico de Maxwell.

Para o modelo uniaxial de Maxwell, pode-se estabelecer as seguintes equações:

a) Equação de Equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) = \sigma_a(t) \quad (2.3)$$

onde  $\sigma(t)$ ,  $\sigma_m(t)$  e  $\sigma_a(t)$  são, respectivamente, as tensões aplicadas ao conjunto, à mola e ao amortecedor no tempo  $t$ .

b) Equação de Compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_a(t) \quad (2.4)$$

onde  $\varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon_m(t)$  e  $\varepsilon_a(t)$  são, respectivamente, as deformações total, da mola e do amortecedor.

Percebe-se que as tensões atuantes nos elementos do modelo são iguais e coincidem com aquela externamente aplicada, enquanto que a deformação total é a soma das deformações elástica e viscosa. As relações constitutivas para cada elemento do modelo são como se seguem:

c) Equações Constitutivas:

$$\begin{aligned} \sigma_m(t) &= E\varepsilon_m(t) \\ \sigma_a(t) &= \eta\dot{\varepsilon}_a(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal da mola e  $\eta$  é a constante do amortecedor. Neste trabalho, o uso de um ponto ( $\dot{\cdot}$ ) sobre uma variável representa a taxa temporal da mesma.

A partir das Equações (2.3), (2.4) e (2.5) pode-se chegar à equação diferencial do modelo de Maxwell, mostrada abaixo:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.6)$$

cuja solução geral pode ser determinada quando são conhecidas as funções de tensão  $\sigma(t)$  ou de deformação  $\varepsilon(t)$ . Resolvendo-se a equação diferencial linear, não homogênea, acima apresentada, utilizando como condição inicial  $\sigma(0) = \sigma_0$ , ou seja, resolvendo-a para o teste de fluência (Figura 2), chega-se à seguinte equação:

$$\varepsilon(t) = \left[ \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \right] u(t) \quad (2.7)$$

onde  $u(t)$  é a função passo unitário, definida como se segue:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

As Figuras Figura 2 e Figura 3 mostram, respectivamente, os gráficos representativos da carga aplicada (tensões) e das deformações, ao longo do tempo, correspondentes ao teste de fluência do material.

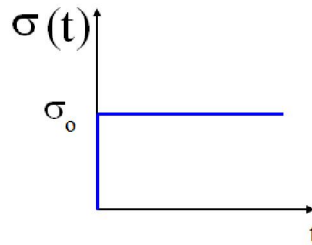


Figura 2 – Histórico de tensão prescrita no teste de fluência do material.

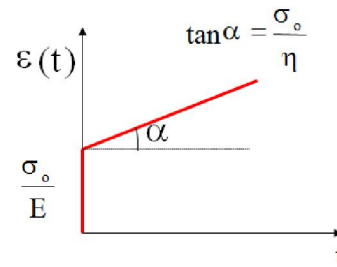


Figura 3 – Curva de fluência para o modelo de Maxwell.

Percebe-se que, para o modelo de Maxwell, à medida que o tempo passa a deformação cresce linearmente e indefinidamente, mostrando que o mesmo não traduz com fidelidade o comportamento de sólidos reais para grandes tempos de análise.

Resolvendo-se agora a Equação (2.6) para um teste de relaxação, onde aplica-se uma deformação constante  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  (Figura 4), tem-se:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} u(t) \quad (2.9)$$

cuja representação gráfica é ilustrada na Figura 5, a qual exhibe a redução da tensão atuante ao longo do tempo.

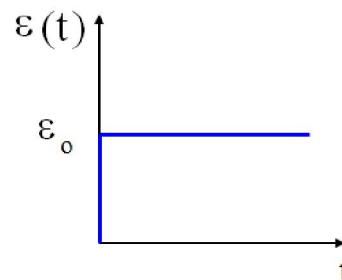


Figura 4 – Deformação imposta ao modelo no teste de relaxação do material.

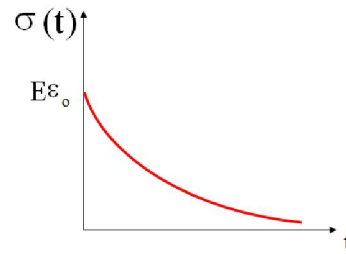


Figura 5 – Curva de relaxação para o modelo de Maxwell.

### 2.2.1.2. Modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin consiste na ligação em paralelo dos elementos de mola e amortecedor, de acordo com a Figura 6.

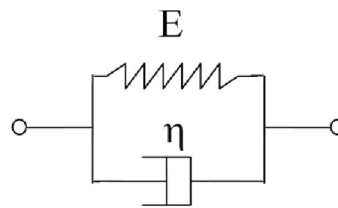


Figura 6 – Modelo viscoelástico de Kelvin.

Da mesma forma que para o modelo de Maxwell, podem-se estabelecer, para o caso do modelo de Kelvin, as equações de equilíbrio, de compatibilidade, constitutiva e diferencial, como pode ser observado a seguir.

a) Equação de Equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_m(t) + \sigma_a(t) \quad (2.10)$$

b) Equação de Compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) = \varepsilon_a(t) \quad (2.11)$$

c) Equações Constitutivas:

$$\sigma_m(t) = E\varepsilon_m(t) \quad (2.12)$$

$$\sigma_a(t) = \eta\dot{\varepsilon}_a(t)$$

Utilizando-se as Equações (2.10), (2.11) e (2.12) chega-se à equação diferencial para o modelo de Kelvin.

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\eta}\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (2.13)$$

Para o teste de fluência, onde uma tensão constante ( $\sigma(t) = \sigma_0$ ) é aplicada, tem-se a seguinte expressão para o comportamento da deformação ao longo do tempo.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right] \quad (2.14)$$

onde a deformação na vizinhança de zero, ou seja, a direita de zero, uma vez que não existe tempo negativo, seu valor é  $\varepsilon(0^+) = 0$  e  $\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E}$ . Segue abaixo o gráfico que representa tal comportamento.

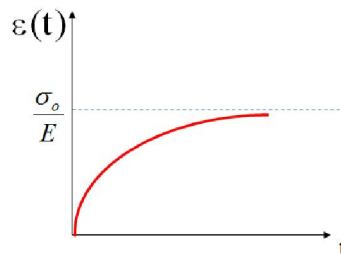


Figura 7 – Curva de fluência para o modelo de Kelvin.

De acordo com o gráfico da Figura 7, à medida que o tempo passa a deformação tende ao valor da deformação elástica correspondente à tensão  $\sigma_0$ .

Para o teste de relaxação, ou seja,  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ , tem-se a seguinte equação para representar a tensão ao longo do tempo:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0[\eta\delta(t) + Eu(t)] \quad (2.15)$$

onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac, como se segue:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t \neq 0 \\ \infty & , \text{ para } t = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

A representação gráfica da Equação (2.15) é mostrada na Figura 8. Observa-se que para  $t = 0$  a tensão tende para o infinito, uma vez que a deformação instantânea do amortecedor é nula.

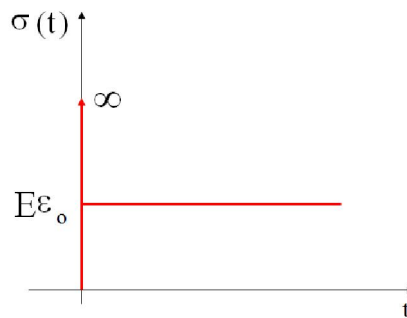


Figura 8 – Curva de relaxação para o modelo de Kelvin.

### 2.2.1.3. Modelo de Sólido Linear Padrão ou Standard

O modelo de Sólido Linear Padrão consiste na união de um modelo Kelvin com uma mola linear (Figura 9).

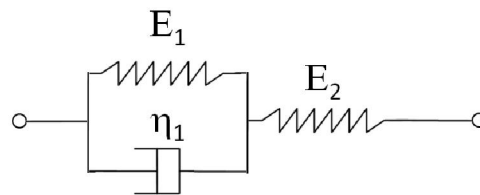


Figura 9 – Modelo de Sólido Linear Padrão.

Esse modelo proporciona uma melhor representação dos materiais viscoelásticos lineares, uma vez que para uma carga inicial o mesmo responde com uma deformação



elástica devido à distensão da mola ( $E_2$ ) e, mantendo-se a carga aplicada, deformações devido ao modelo Kelvin ocorrem ao longo do tempo. As equações que representam tal modelo seguem abaixo.

a) Equação de Equilíbrio:

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) = \sigma_2(t) \quad (2.17)$$

ou

$$\sigma(t) = \sigma_{m2}(t) = \sigma_{m1}(t) + \sigma_a(t)$$

onde  $\sigma_1(t)$  é a tensão aplicada ao modelo de Kelvin e  $\sigma_2(t)$  à mola.

b) Equação de Compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \quad (2.18)$$

ou

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{m1}(t) + \varepsilon_{m2}(t)$$

$$\varepsilon_{m1}(t) = \varepsilon_a(t)$$

c) Equações Constitutivas:

$$\sigma_{m1}(t) = E_1 \varepsilon_{m1}(t) \quad (2.19)$$

$$\sigma_{m2}(t) = E_2 \varepsilon_{m2}(t)$$

$$\sigma_a(t) = \eta \dot{\varepsilon}_a(t)$$

De posse das equações acima, pode-se encontrar a seguinte equação diferencial do modelo de Sólido Linear Padrão:

$$\frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma}(t) + \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) \sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) + E_1 \varepsilon(t) \quad (2.20)$$

Para o teste de fluência, tem-se a equação a seguir:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right)$$

com

$$\theta = \frac{\eta}{E_1}$$
(2.21)

e para relaxação

$$\sigma(t) = E_2 e^{-\frac{t}{\rho}} \varepsilon_0 + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\rho}}\right) \varepsilon_0$$

com

$$\rho = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$
(2.22)

#### 2.2.1.4. Modelo de Kelvin Generalizado

Outro modelo, mais complexo, que proporciona uma boa representação do comportamento dos materiais sólidos viscoelásticos, é o de Kelvin Generalizado. Esse modelo consiste na ligação em série de  $n+1$  modelos Kelvin. Tal modelo responde às tensões ao longo do tempo, tendo deformação nula para  $t = 0$ . Dessa forma, para se ter uma deformação inicial, ou seja, para representar o comportamento elástico do material, pode-se considerar  $\eta_0 = 0$  como mostrado na Figura 10.

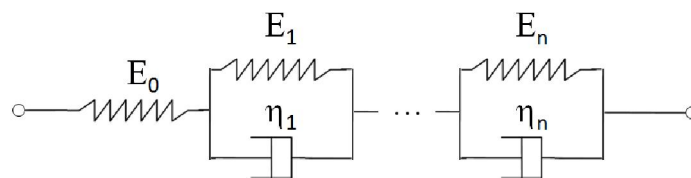


Figura 10 – Modelo de Kelvin Generalizado.

Para este modelo de Kelvin Generalizado com associação de uma mola, a função de fluência é:

$$D(t - \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{g=1}^n \frac{1}{E_g} \left( 1 - e^{-\frac{t-\tau}{\theta_g}} \right) \quad (2.23)$$

com

$$\theta_g = \frac{\eta_g}{E_g} \quad (2.24)$$

onde  $\tau$  é o tempo inicial de referência.

Na literatura, por exemplo Barbero (2007), outros modelos para representar o comportamento viscoelástico podem ser encontrados.

### 2.3. Influência da Temperatura

Em geral, o comportamento viscoelástico se acentua quando o material absorve umidade ou é submetido a aumentos de temperatura (Marques, 1994).

Suponha-se um corpo viscoelástico linear submetido a uma temperatura  $T$  para a qual as funções de relaxação são dadas por  $C_{ij}(t, T)$ . Adotando-se  $T_0$  como temperatura de referência, é possível definir funções  $L_{ij}$ , dependentes de  $\log(t)$ , tais que

$$\bar{C}_{ij}(t, T_0) = L_{ij}(\log(t)) \quad (2.25)$$

Um material é termo-reologicamente simples se suas funções de relaxação satisfazem a condição (Muki e Sternberg, 1961 *apud* Marques, 1994)

$$\bar{C}_{ij}(t, T) = L_{ij}(\log(t) + \Psi_{ij}(T)) \quad (2.26)$$

O qual pode ser observado na Figura 11

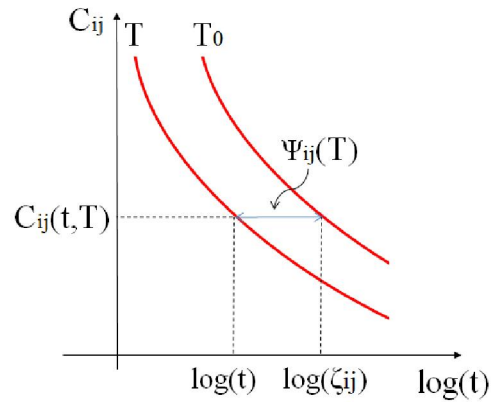


Figura 11 – Curva de relaxação para um material termo-reologicamente simples.

com  $\Psi_{ij}(T_0) = 0$  e  $\frac{d\Psi_{ij}(T)}{dT} > 0$ . As funções  $\Psi_{ij}(T)$  são aqui denominadas como funções de translação do tempo.

que

$$\log(\zeta_{ij}) = \log(t) + \Psi_{ij}(T) \quad (2.27)$$

onde  $\zeta_{ij}$  são os tempos reduzidos. Fazendo-se

$$\log(\chi_{ij}(T)) = -\Psi_{ij}(T) \quad (2.28)$$

pode-se reescrever a Equação (2.27) da seguinte forma:

$$\log(\zeta_{ij}) = \log(t) - \log(\chi_{ij}(T)) \quad (2.29)$$

Logo,

$$\log\left(\frac{t}{\zeta_{ij}}\right) = \log(\chi_{ij}(T)) \quad (2.30)$$

que implica em

$$\zeta_{ij} = \frac{t}{\chi_{ij}(T)} \quad (2.31)$$

onde  $\chi_{ij}(T)$  são fatores de translação do tempo (*shift factor*). Com isso, pode-se escrever

$$\bar{C}_{ij}(t, T) = L_{ij} \left[ \log \left( \frac{t}{\chi_{ij}(T)} \right) \right] \quad (2.32)$$

Fisicamente,  $\zeta_{ij}$  representa o tempo para o qual a função de relaxação  $\bar{C}_{ij}$ , correspondente à temperatura  $T_0$ , tem o mesmo valor que  $\bar{C}_{ij}$  no tempo  $t$  e na temperatura  $T$  (Marques, 1994).

Quando a temperatura do corpo muda com o tempo, os tempos reduzidos podem ser obtidos pela expressão (Morland e Lee, 1960 e Lin e Hwang, 1989 *apud* Marques, 1994)

$$\zeta_{ij} = \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T(\tau))} d\tau \quad (2.33)$$

De forma similar, pode-se estender as equações apresentadas acima para um corpo submetido a distribuições uniformes de temperatura ( $T$ ) e de umidade ( $H$ ). Assim sendo,

$$\bar{C}_{ij}(t, T, H) = L_{ij}(\log(t) + \Psi_{ij}(T, H)) \quad (2.34)$$

onde  $\Psi_{ij}(T_0, H_0) = 0$ ,  $\frac{d\Psi_{ij}(T, H)}{dT} > 0$  e  $\frac{d\Psi_{ij}(T, H)}{dH} > 0$ .

Com base nas equações apresentadas anteriormente, pode-se escrever

$$\log(\zeta_{ij}) = \log(t) + \Psi_{ij}(T, H) \quad (2.35)$$

Fazendo-se

$$\log(\chi_{ij}(T, H)) = -\Psi_{ij}(T, H) \quad (2.36)$$

chega-se a:

$$\zeta_{ij} = \frac{t}{\chi_{ij}(T, H)} \quad (2.37)$$

onde

$$\zeta_{ij} = \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T(\tau), H(\tau))} d\tau \quad (2.38)$$

Os fatores de translação de tempo devem ser encontrados em laboratório através de testes de fluência ou relaxação, considerando diferentes combinações de temperatura e umidade (Crossman *et al.*, 1978 *apud* Marques, 1994).

Uma aproximação para esses valores pode ser encontrada em Halpin (1968, *apud* Marques, 1994), dada por:

$$\chi_{ij}(T, H) = \frac{1}{\chi_{ij}^T(T)\chi_{ij}^H(H)} \quad (2.39)$$

onde  $\chi_{ij}^T$  indicam fatores de translação do tempo para uma temperatura T e um teor de umidade constante  $H_0$  e  $\chi_{ij}^H$  são os fatores de translação do tempo correspondentes a uma umidade H e uma temperatura constante  $T_0$ .

#### **2.4. Método das Variáveis de Estado (MVE) para avaliação das deformações viscoelásticas de materiais anisótropos**

Neste tópico serão mostradas as equações para o método das variáveis de estado, método este que permite o cálculo analítico das deformações de um passo, tendo como base apenas os valores das tensões e deformações do passo anterior.

A deformação pode ser relacionada com a tensão para um tempo  $t$  através da seguinte relação.

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t \bar{D}_{ij}(T, H, t - \tau) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.40)$$

onde  $\bar{D}_{ij}(T, H, t)$  são chamadas de funções de fluência do material para temperatura  $T$  e umidade  $H$ .

Tendo  $T_0$  e  $H_0$  como temperatura e umidade de referência, respectivamente, e aplicando o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Umidade, pode-se escrever as funções de fluência como:

$$D_{ij}(T_0, H_0, \zeta_{ij}) = \bar{D}_{ij}(T, H, t) \quad (2.41)$$

onde  $D_{ij}$  representam as funções de fluência para a temperatura e concentração de umidade de referência, assim como  $\zeta_{ij}$  representam os tempos reduzidos.

Substituindo a Equação (2.41) na Equação (2.40), chega-se:

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T_0, H_0, \zeta_{ij} - \zeta'_{ij}) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.42)$$

onde  $\zeta'_{ij} = \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} d\tau$ .

Integrando por partes a Equação (2.42), tem-se:

$$\varepsilon_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0) \sigma_j(t) - \int_0^t \frac{\partial D_{ij}(T_0, H_0, \zeta_{ij} - \zeta'_{ij})}{\partial \tau} \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.43)$$

O comportamento das funções de fluência ao longo do tempo pode ser aproximado por uma série de Dirichlet-Prony, que consiste de decaimentos exponenciais

$$D_{ij}(T_0, H_0, \zeta_{ij} - \zeta'_{ij}) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^n D_{ij}^p \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \right] \quad (2.44)$$

onde  $D_{ij}^0$ ,  $D_{ij}^p$  e  $\theta_{ij}^p$  são parâmetros que dependem do material, devendo ser determinados em laboratório e  $\theta_{ij}^p$  são conhecidos como tempos de retardação do material. Uma importante colocação sobre a Equação (2.44) é que a notação indicial de somatório não deve ser aplicada, uma vez que os índices são referentes à componente.

Aplicando-se a derivada em relação à  $\tau$  na Equação (2.44), tem-se:

$$\frac{\partial D_{ij}(T_0, H_0, \zeta_{ij} - \zeta'_{ij})}{\partial \tau} = - \sum_{p=1}^n \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \frac{\partial \zeta'_{ij}}{\partial \tau} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \quad (2.45)$$

onde

$$\zeta'_{ij} = \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} d\tau \quad (2.46)$$

logo,

$$\frac{\partial \zeta'_{ij}}{\partial \tau} = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \quad (2.47)$$

Dessa forma, substituindo a Equação (2.47) na (2.45), chega-se à:

$$\frac{\partial D_{ij}(T_0, H_0, \zeta_{ij} - \zeta'_{ij})}{\partial \tau} = - \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \sum_{p=1}^n \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \quad (2.48)$$

Com isso, pode-se substituir a Equação a (2.48) na (2.43), encontrando-se a seguinte equação:



$$\varepsilon_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0)\sigma_j(t) + \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \sum_{p=1}^n \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij}-\zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

ou

$$\varepsilon_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^n \int_0^t F_{ij}^p \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.50)$$

onde

$$F_{ij}^p = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij}-\zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \quad (2.51)$$

Pode-se ainda reescrever a Equação (2.50) como segue:

$$\varepsilon_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}^p(t) \quad (2.52)$$

onde

$$\varphi_{ij}^p(t) = \int_0^t F_{ij}^p(t, \tau) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.53)$$

não devendo ser aplicado o somatório devido aos índices, uma vez que o índice  $j$  é dado na variável  $\varphi_{ij}^p(t)$ . O número de elementos Kelvin é definido pelo índice  $n$  e  $m$  é o número de componentes do vetor de tensões.

Observando a Equação (2.52), percebe-se que a mesma é composta por duas partes, uma que está explícita e diretamente relacionada com a tensão e outra parcela que leva em consideração as propriedades viscoelásticas do material. Dessa forma pode-se dizer que a deformação total é composta por uma parte elástica

$$\varepsilon_i^e(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0)\sigma_j(t) \quad (2.54)$$

e outra viscoelástica

$$\varepsilon_i^v(t) = \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}^p(t) \quad (2.55)$$

Logo, percebe-se que para se obter o valor da deformação viscoelástica é necessário o cálculo dos  $\varphi_{ij}^p$ . Tais valores podem ser encontrados resolvendo-se, através de técnicas numéricas, o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem, que se trata da derivada dos  $\varphi_{ij}^p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{11}^p}{\partial t} + \frac{1}{\chi_{11}(T, H)\theta_{11}^p} \varphi_{11}^p &= \frac{1}{\chi_{11}(T, H)} \frac{D_{11}^p}{\theta_{11}^p} \sigma_1(t) \\ \frac{\partial \varphi_{12}^p}{\partial t} + \frac{1}{\chi_{12}(T, H)\theta_{12}^p} \varphi_{12}^p &= \frac{1}{\chi_{12}(T, H)} \frac{D_{12}^p}{\theta_{12}^p} \sigma_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi_{33}^p}{\partial t} + \frac{1}{\chi_{33}(T, H)\theta_{33}^p} \varphi_{33}^p &= \frac{1}{\chi_{33}(T, H)} \frac{D_{33}^p}{\theta_{33}^p} \sigma_3(t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

O desenvolvimento matemático para se encontrar as Equações (2.56) encontram-se no Apêndice A.

Segundo Creus (1986), o procedimento descrito acima para avaliação das deformações viscoelásticas pode ser chamado de Método das Variáveis de Estado.

Outra maneira de se determinar as deformações viscoelástica é através do procedimento mostrado a seguir. Usando-se as Equações (2.51) e (2.53), pode-se escrever:

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} + \Delta\zeta_{ij} - \zeta_{ij}'}{\theta_{ij}^p}\right)} \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.57)$$

A integral da Equação (2.57) pode ser dividida em duas partes, uma para o intervalo  $[0, t]$  e outra para  $[t, t + \Delta t]$ , onde admite-se que  $\sigma_j(\tau)$  é constante no último intervalo, sendo igual a  $\sigma_j(t)$ . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = & \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} + \Delta\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \sigma_j(\tau) d\tau \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} + \Delta\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} d\tau \sigma_j(t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Observando-se que  $\frac{d\zeta_{ij}}{d\tau} = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)}$  e utilizando a Equação (2.58), pode-se mostrar que

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \varphi_{ij}^p(t) e^{-\left(\frac{\Delta\zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} + D_{ij}^p \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\Delta\zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \right] \sigma_j(t) \quad (2.59)$$

A dedução da Equação (2.59) encontra-se no Apêndice B. A equação acima fornece para o tempo  $t + \Delta t$  o valor das variáveis de estado em função dos valores das mesmas e das tensões para o tempo  $t$ . Ressalta-se que para  $t = 0$  as variáveis de estado são nulas.

É importante salientar que o procedimento exposto acima, para o cálculo das variáveis de estado, é somente válido quando são adotados intervalos de tempo para os quais os valores das componentes de tensão possam ser considerados praticamente constantes. Assim, quanto menor forem tais intervalos de tempo, mais preciso são os resultados (Marques, 1994).

De posse da Equação (2.59) pode-se calcular a deformação para um próximo passo de acordo com a seguinte equação:

$$\varepsilon_i^y(t + \Delta t) = \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}^p(t + \Delta t) \quad (2.60)$$

## 2.5. Avaliação do comportamento viscoelástico para estados de deformação desviador e volumétrico

Como observado no tópico anterior, para se encontrar as deformações viscoelásticas em um determinado tempo, são necessários o campo de tensão do passo anterior e as propriedades referentes aos modelos Kelvin, chamadas de  $D_{ij}^p$  e  $\theta_{ij}^p$ .

Considerando que o estado de tensão em um ponto pode ser decomposto em dois estados particulares (Figura 12), conhecidos respectivamente como estados volumétrico e desviador, é possível a dedução da formulação viscoelástica tendo como base tal decomposição. Vale também ressaltar que vários materiais usuais da engenharia apresentam comportamento viscoelástico para estado de tensão desviador e elástico para estado de tensão volumétrico.

O estado de tensão, ou de deformação, desviador é obtido subtraindo-se do tensor tensão, ou deformação, um tensor diagonal com componentes não nulas iguais ao valor dado pela média das tensões, ou deformações, principais.

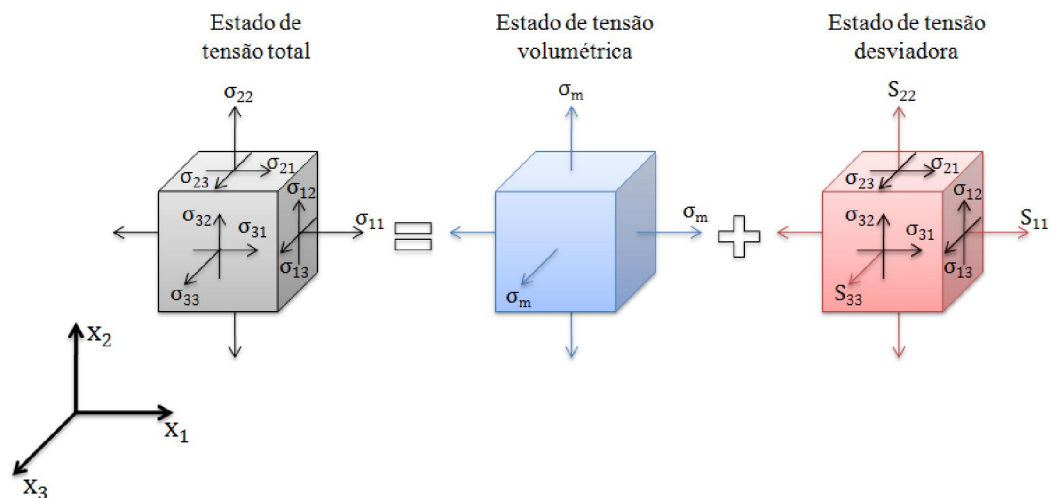


Figura 12 – Decomposição do estado de tensão.

Na Figura 12,  $\sigma_m$  é a média aritmética das tensões normais e  $S_{ij}$  é a componente de tensão desviadora atuante na direção  $j$  e sobre o plano que tem como normal a direção  $i$ .

Reescrevendo a Equação (2.42) para o estado desviador tem-se

$$\eta_{ij}(t) = \int_0^t \psi_S(t - \tau) \frac{\partial S_{ij}}{\partial \tau} d\tau \quad (2.61)$$

onde  $\eta_{ij}(t)$  é a componente da deformação em um tempo  $t$  e  $\psi_S$  é a função de fluência para o estado desviador. Escrevendo cada uma das componentes da deformação desviadora e substituindo  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Dirac, chega-se a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \eta_{11}(t) \\ \eta_{22}(t) \\ \eta_{33}(t) \\ \eta_{23}(t) \\ \eta_{13}(t) \\ \eta_{12}(t) \end{Bmatrix} = \int_0^t \psi_S(t - \tau) [\mathbb{A}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} \end{Bmatrix} d\tau \quad (2.62)$$

onde

$$[\mathbb{A}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

De forma similar, pode-se escrever a Equação (2.42) para o estado volumétrico, resultando em:

$$\varepsilon^{\text{Vol}}(t) = 3e = \int_0^t \psi_K(t - \tau) \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau} d\tau \quad (2.64)$$

onde  $\varepsilon^{\text{Vol}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3e$  e  $\psi_K$  é a função de fluência para o estado volumétrico.

Desenvolvendo-se a Equação (2.64), pode-se chegar à seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} e(t) \\ e(t) \\ e(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \int_0^t \psi_K(t - \tau) [\mathbb{B}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} \end{Bmatrix} d\tau \quad (2.65)$$

onde

$$[\mathbb{B}] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Com base no exposto acima, as componentes da matriz constitutiva viscoelástica tem a seguinte forma:

a) Para estado desviador:

$$D_{ij}^p = A_{ij} \psi_S^p(t - \tau) \text{ e } \theta_{ij}^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \eta_S^p \\ G_S^p \end{matrix} \quad (2.67)$$

onde  $\eta_S^p$  e  $G_S^p$  são as constante do amortecedor e da mola, respectivamente, para p-ésimo elemento Kelvin em estado desviador.

b) Para estado volumétrico:

$$D_{ij}^p = \mathbb{B}_{ij} \psi_K^p(t - \tau) e \theta_{ij}^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \eta_K^p \\ K_K^p \end{matrix} \quad (2.68)$$

onde  $\eta_K^p$  e  $K_K^p$  são as constante do amortecedor e da mola, respectivamente, para p-ésimo elemento Kelvin em estado volumétrico.

Como as componentes de  $\theta$  estão diretamente ligadas à razão entre a constante do amortecedor ( $\eta$ ) e a constante da mola ( $G$  e/ou  $K$ ), para estado desviador e/ou volumétrico, para sua composição foram adotados valores unitários nas posições não nulas das matrizes  $\mathbb{A}$  e/ou  $\mathbb{B}$ , respectivamente.

Neste trabalho, por se tratar de uma análise bidimensional, as matrizes  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  foram reduzidas para o caso de estado plano de tensão (EPT) e de deformação (EPD), como apresentadas a seguir:

a) Estado plano de tensão

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) \\ \varepsilon_{22}(t) \\ \varepsilon_{12}(t) \\ \varepsilon_{33}(t) \end{Bmatrix} = \int_0^t \{ \psi_S(t - \tau) [\mathbb{A}'_{EPT}] + \psi_K(t - \tau) [\mathbb{B}'_{EPT}] \} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} \end{Bmatrix} d\tau \quad (2.69)$$

onde

$$[\mathbb{A}'_{EPT}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} e [\mathbb{B}'_{EPT}] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 0 \\ 1/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/9 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

b) Estado plano de deformação

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) \\ \varepsilon_{22}(t) \\ \varepsilon_{12}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \int_0^t \{ \psi_S(t-\tau)[\mathbb{A}''_{EPD}] + \psi_K(t-\tau)[\mathbb{B}''_{EPD}] \} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \tau} \end{Bmatrix} d\tau \quad (2.71)$$

onde

$$[\mathbb{A}''_{EPD}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbb{B}''_{EPD}] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 0 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/9 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$



## 3 Formulação Viscoelástica da Teoria de Volumes Finitos Bidimensional

### 3.1. Considerações Iniciais

A formulação conhecida como *Finite Volume Direct Averaging Method* (FVDAM) (Bansal e Pindera, 2003; Zhong *et al.*, 2004) tem se mostrado adequada para análises macro/micromecânica de materiais. Uma nova versão desta teoria é a *Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory* (PFFVT) (Cavalcante, 2006; Cavalcante *et al.*, 2007a, b), que incorpora um mapeamento paramétrico que possibilita uma modelagem eficiente de microestruturas e contornos curvos, que podem não ser tão facilmente modelados utilizando subvolumes retangulares, os quais são empregados na FVDAM.

Neste capítulo, apresenta-se um modelo numérico para a análise bidimensional de estruturas de materiais heterogêneos com constituintes viscoelásticos lineares. Tal modelo tem como base a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos (TVF) proposta em Cavalcante (2006) e emprega o método das variáveis de estado para a avaliação das deformações viscoelásticas (Marques, 1994).

### 3.2. Equações Incrementais da Mecânica do Contínuo Bidimensional

As equações diferenciais de equilíbrio para um corpo contínuo bidimensional em um tempo genérico  $t$  são apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial \sigma_{11}(t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}(t)}{\partial x_2} + b_1(t) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}(t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(t)}{\partial x_2} + b_2(t) = 0 \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{22}$  representam as componentes de tensão em relação a um sistema de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$  e  $b_1$  e  $b_2$  são as forças de volume nas direções  $(x_1, x_2)$ , respectivamente.

Para um instante  $t + \Delta t$  as seguintes expressões podem ser utilizadas:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t + \Delta t) &= \sigma_{11}(t) + \Delta\sigma_{11} \\ \sigma_{12}(t + \Delta t) &= \sigma_{12}(t) + \Delta\sigma_{12} \\ \sigma_{22}(t + \Delta t) &= \sigma_{22}(t) + \Delta\sigma_{22}\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde  $\Delta\sigma_{11}$ ,  $\Delta\sigma_{12}$  e  $\Delta\sigma_{22}$  indicam os incrementos das componentes de tensão correspondentes ao intervalo de tempo  $\Delta t$ . Com base nas Equações (3.1)-(3.3), podem-se deduzir as equações incrementais de equilíbrio, apresentadas a seguir:

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial x_2} + \Delta b_1 = 0\tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta\sigma_{22}}{\partial x_2} + \Delta b_2 = 0\tag{3.5}$$

onde  $\Delta b_1$  e  $\Delta b_2$  são incrementos temporais das referidas forças volumétricas.

Para o tempo  $t$  as relações deformações-deslocamentos podem ser escritas de forma vetorial como segue:

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{11}(t) \quad \varepsilon_{22}(t) \quad \gamma_{12}(t)] = \left[ \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_1} \right]\tag{3.6}$$

ou, na forma incremental, como:

$$\{\Delta\varepsilon\}^T = [\Delta\varepsilon_{11} \quad \Delta\varepsilon_{22} \quad \Delta\gamma_{12}] = \left[ \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1} \right]\tag{3.7}$$

As variáveis  $u_1$  e  $u_2$  indicam as componentes de deslocamentos segundo as direções  $x_1$  e  $x_2$ .

Para o caso de um sólido viscoelástico linear submetido a cargas mecânicas e térmicas, as equações constitutivas, reunidas na forma vetorial e relativas ao tempo  $t$ , são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) \\ \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{12}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) \\ \varepsilon_{22}(t) \\ \gamma_{12}(t) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^T(t) \\ \varepsilon_{22}^T(t) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^V(t) \\ \varepsilon_{22}^V(t) \\ \gamma_{12}^V(t) \end{Bmatrix} \right) \quad (3.8)$$

ou, em forma compacta,

$$\{\sigma(t)\} = [C](\{\varepsilon(t)\} - \{\varepsilon^T(t)\} - \{\varepsilon^V(t)\}) \quad (3.9)$$

onde  $[C]$  é a matriz constitutiva elástica linear do material, assim como  $\{\varepsilon^T(t)\}$  e  $\{\varepsilon^V(t)\}$  são, respectivamente, os vetores de deformações térmicas e viscoelásticas para o tempo  $t$ .

Em termos incrementais, a Equação (3.8) se expressa na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11}^T \\ \Delta\varepsilon_{22}^T \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11}^V \\ \Delta\varepsilon_{22}^V \\ \Delta\gamma_{12}^V \end{Bmatrix} \right) \quad (3.10)$$

ou

$$\{\Delta\sigma\} = [C](\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon^T\} - \{\Delta\varepsilon^V\}) \quad (3.11)$$

### 3.3. Formulação Paramétrica Bidimensional Termoviscoelástica da Teoria de Volumes Finitos

Assim como no método dos elementos finitos, para o estudo do comportamento de um sólido através da formulação paramétrica da teoria de volumes finitos, o domínio

do mesmo deve ser discretizado em pequenos domínios, com geometria quadrilateral, chamados subvolumes, tal como mostrado na Figura 13.

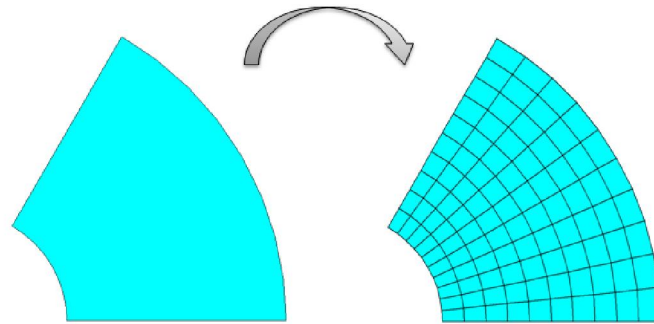


Figura 13 – Discretização do domínio em subvolumes quadriláteros.

Cada subvolume tem geometria e localização definidas pelos quatro vértices e quatro faces como mostrado na Figura 14, onde também se apresenta o esquema de mapeamento expresso por uma correspondência entre coordenadas  $(x,y)$  cartesianas e  $(\eta, \xi)$  paramétricas, conforme exposta no Apêndice C.

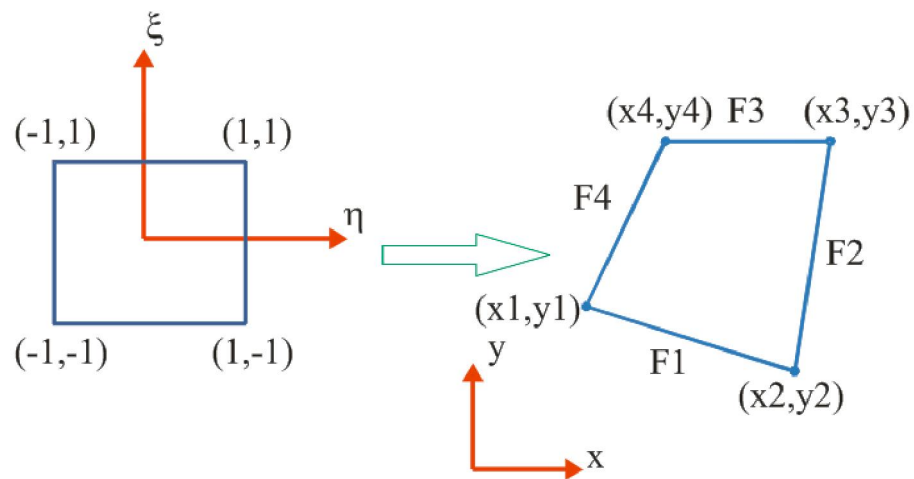


Figura 14 – Parametrização do subvolume bidimensional.

Os deslocamentos dentro de um subdomínio e relativos a um tempo  $t$  são aproximados por polinômios do segundo grau conforme mostrado abaixo (Cavalcante, 2006):

$$u_1(t) = U_{1(00)}^t + \eta U_{1(10)}^t + \xi U_{1(01)}^t + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)U_{1(20)}^t + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)U_{1(02)}^t \quad (3.12)$$

$$u_2(t) = U_{2(00)}^t + \eta U_{2(10)}^t + \xi U_{2(01)}^t + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)U_{2(20)}^t + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)U_{2(02)}^t \quad (3.13)$$

onde os valores  $U_{i(mn)}^t$  representam coeficientes dos campos polinomiais de deslocamento  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

Os incrementos de deslocamentos referentes ao intervalo  $\Delta t$  são, por sua vez, expressos na forma:

$$\Delta u_1 = \Delta U_{1(00)} + \eta \Delta U_{1(10)} + \xi \Delta U_{1(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\Delta U_{1(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)\Delta U_{1(02)} \quad (3.14)$$

$$\Delta u_2 = \Delta U_{2(00)} + \eta \Delta U_{2(10)} + \xi \Delta U_{2(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\Delta U_{2(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)\Delta U_{2(02)} \quad (3.15)$$

onde  $\Delta U_{i(mn)}$  são os coeficientes do campo aproximado dos incrementos de deslocamentos.

Derivando-se os campos incrementais de deslocamentos ( $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$ ), dados pelas Equações (3.14) e (3.15), em função das coordenadas paramétricas ( $\eta$  e  $\xi$ ), obtêm-se:

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} = \Delta U_{1(10)} + 3\eta \Delta U_{1(20)} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} = \Delta U_{1(01)} + 3\xi \Delta U_{1(02)} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} = \Delta U_{2(10)} + 3\eta \Delta U_{2(20)} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} = \Delta U_{2(01)} + 3\xi \Delta U_{2(02)} \quad (3.19)$$

Os valores médios das derivadas que figuram nas Equações (3.16)-(3.19) nas faces do subvolume são definidos a seguir:

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} \right\rangle_{f=2,4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} d\xi = \Delta U_{1(10)} \pm 3\Delta U_{1(20)} \quad (3.20)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} \right\rangle_{f=2,4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} d\xi = \Delta U_{1(01)} \quad (3.21)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} \right\rangle_{f=1,3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} d\eta = \Delta U_{1(10)} \quad (3.22)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} \right\rangle_{f=1,3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} d\eta = \Delta U_{1(01)} \pm 3\Delta U_{1(02)} \quad (3.23)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} \right\rangle_{f=2,4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} d\xi = \Delta U_{2(10)} \pm 3\Delta U_{2(20)} \quad (3.24)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} \right\rangle_{f=2,4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} d\xi = \Delta U_{2(01)} \quad (3.25)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} \right\rangle_{f=1,3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} d\eta = \Delta U_{2(10)} \quad (3.26)$$

$$\left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} \right\rangle_{f=1,3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} d\eta = \Delta U_{2(01)} \pm 3\Delta U_{2(02)} \quad (3.27)$$

onde  $f$  representa a face na qual se está aplicando ou calculando a quantidade considerada. Com isso, para  $f$  variando de 1 a 4, tem-se a seguinte sequência de faces  $\xi = -1$ ,  $\eta = 1$ ,  $\xi = 1$  e  $\eta = -1$ . Para explicar a notação utilizada acima, tem-se que  $\left\langle \frac{\partial \Delta u_i}{\partial \eta} \right\rangle_{f=1,3}$  representa a média da derivada do campo de deslocamento incremental  $\Delta u_i$  nas faces onde  $f = 1$  e 3. Por conveniência, as Equações (3.20)-(3.27) podem ser organizadas na forma de matrizes, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{1(10)} \\ \Delta U_{1(01)} \\ \Delta U_{1(20)} \\ \Delta U_{1(02)} \\ \Delta U_{2(10)} \\ \Delta U_{2(01)} \\ \Delta U_{2(20)} \\ \Delta U_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_{1(10)} \\ \Delta U_{1(01)} \\ \Delta U_{1(20)} \\ \Delta U_{1(02)} \\ \Delta U_{2(10)} \\ \Delta U_{2(01)} \\ \Delta U_{2(20)} \\ \Delta U_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Podem-se encontrar as derivadas dos campos incrementais de deslocamentos médios nas faces do subvolume em relação às coordenadas cartesianas com aquelas relativas às coordenadas paramétricas, através da matriz inversa da Jacobiana, conforme indicado abaixo:

$$\left. \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \right\rangle \end{pmatrix} \right|_{f=2,4} = \begin{bmatrix} [\bar{J}] & [0] \\ [0] & [\bar{J}] \end{bmatrix} \left. \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} \right\rangle \end{pmatrix} \right|_{f=2,4} \quad (3.30)$$

$$\left. \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \right\rangle \end{pmatrix} \right|_{f=1,3} = \begin{bmatrix} [\bar{J}] & [0] \\ [0] & [\bar{J}] \end{bmatrix} \left. \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \xi} \right\rangle \end{pmatrix} \right|_{f=1,3} \quad (3.31)$$

onde  $[\bar{J}]$  e  $[0]$  são a inversa da matriz Jacobiana e uma matriz composta por termos nulos, respectivamente. Tais matrizes são quadradas de ordem 2. O cálculo da inversa da matriz Jacobiana e algumas considerações utilizadas na parametrização do domínio encontram-se no Apêndice C.

Logo, de posse das derivadas dos campos incrementais de deslocamentos em relação às coordenadas cartesianas, as deformações médias nas faces podem ser calculadas utilizando-se as relações entre as deformações e os deslocamentos, em conformidade com a Equação (3.7), como seguem:

$$\left. \begin{pmatrix} \langle \Delta \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \Delta \gamma_{12} \rangle \end{pmatrix} \right|_{f=2,4} = [E] \left. \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \right\rangle \end{pmatrix} \right|_{f=2,4} \quad (3.32)$$

e



$$\left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \Delta \gamma_{12} \rangle \end{array} \right|_{f=1,3} = [E] \left. \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} \right\rangle \end{array} \right|_{f=1,3} \quad (3.33)$$

onde [E] tem a seguinte forma:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

De posse das médias das deformações incrementais, pode-se facilmente encontrar as respectivas médias das tensões incrementais, utilizando-se a relação constitutiva apresentada na Equação (3.10). Considerando-se os valores incrementais médios em cada face, resultam as seguintes expressões:

$$\left. \begin{array}{l} \langle \Delta \sigma_{11} \rangle \\ \langle \Delta \sigma_{22} \rangle \\ \langle \Delta \sigma_{12} \rangle \end{array} \right|_{f=2,4} = [C] \left( \left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \Delta \gamma_{12} \rangle \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11}^T \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22}^T \rangle \\ 0 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11}^V \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22}^V \rangle \\ \langle \Delta \gamma_{12}^V \rangle \end{array} \right\} \right|_{f=2,4} \quad (3.35)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \langle \Delta \sigma_{11} \rangle \\ \langle \Delta \sigma_{22} \rangle \\ \langle \Delta \sigma_{12} \rangle \end{array} \right|_{f=1,3} = [C] \left( \left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \Delta \gamma_{12} \rangle \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11}^T \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22}^T \rangle \\ 0 \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \langle \Delta \varepsilon_{11}^V \rangle \\ \langle \Delta \varepsilon_{22}^V \rangle \\ \langle \Delta \gamma_{12}^V \rangle \end{array} \right\} \right|_{f=1,3} \quad (3.36)$$

Aplicando-se a fórmula de Cauchy, obtém-se a relação entre o vetor e o tensor de tensão médios incrementais, na forma

$$\{\langle \Delta t \rangle\} = [\langle \Delta \sigma \rangle] \{n\} \quad (3.37)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \langle \Delta t_1 \rangle \\ \langle \Delta t_2 \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \Delta \sigma_{11} \rangle & \langle \Delta \sigma_{12} \rangle \\ \langle \Delta \sigma_{12} \rangle & \langle \Delta \sigma_{22} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

onde  $\langle \Delta t_i \rangle$  e  $n_i$  representam as componentes de tensão incremental média e do vetor unitário normal externo na face em questão e na direção  $i$ , respectivamente. Assim, para cada face tem-se:

$$\{\langle \Delta t \rangle\}_{f=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \{\langle \Delta \sigma \rangle\}_{f=1,2,3,4} \quad (3.39)$$

onde  $\{\langle \Delta \sigma \rangle\}^T = [\langle \Delta \sigma_{11} \rangle \quad \langle \Delta \sigma_{22} \rangle \quad \langle \Delta \sigma_{12} \rangle]$ .

Reescrevendo-se na forma matricial, chega-se:

$$\begin{Bmatrix} \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \sigma \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta \sigma \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta \sigma \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta \sigma \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

onde  $[\mathbf{D}]$  é uma matriz composta pelas componentes dos vetores normais às faces do subvolume (Apêndice D).

Substituindo-se as Equações (3.35) e (3.36) na (3.40), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}][\mathbf{C}] \left( \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta \varepsilon \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta \varepsilon \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta \varepsilon \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.41)$$

Através da substituição das Equações (3.28)-(3.33) em (3.41), pode-se encontrar a relação entre as componentes do vetor incremental médio de tensão e os coeficientes do campo de deslocamento, como segue:

$$\begin{Bmatrix} \{\langle \Delta t \rangle|_{f=1} \} \\ \{\langle \Delta t \rangle|_{f=2} \} \\ \{\langle \Delta t \rangle|_{f=3} \} \\ \{\langle \Delta t \rangle|_{f=4} \} \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{A}}] \begin{Bmatrix} \Delta U_{1(10)} \\ \Delta U_{1(01)} \\ \Delta U_{1(20)} \\ \Delta U_{1(02)} \\ \Delta U_{2(10)} \\ \Delta U_{2(01)} \\ \Delta U_{2(20)} \\ \Delta U_{2(02)} \end{Bmatrix} - [\mathbf{D}][\mathbf{C}] \left( \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle|_{f=1} \} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle|_{f=2} \} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle|_{f=3} \} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle|_{f=4} \} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle|_{f=1} \} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle|_{f=2} \} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle|_{f=3} \} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle|_{f=4} \} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.42)$$

onde  $[\bar{\mathbf{A}}] = [\mathbf{D}][\mathbf{C}][\mathbf{E}][\mathbf{B}][\mathbf{A}]$ . As matrizes que aparecem na definição de  $[\bar{\mathbf{A}}]$  são encontradas no Apêndice D.

Os coeficientes  $\Delta U_i$  da Equação (3.42) podem ser obtidos através do cálculo dos incrementos de deslocamentos médios nas faces, utilizando-se as equações apresentadas abaixo para as direções horizontal e vertical, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Delta u_{1F1} &= \langle \Delta u_1 |_{f=1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_1 d\eta = \Delta U_{1(00)} - \Delta U_{1(01)} + \Delta U_{1(02)} \\ \Delta u_{1F2} &= \langle \Delta u_1 |_{f=2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_1 d\xi = \Delta U_{1(00)} + \Delta U_{1(10)} + \Delta U_{1(20)} \\ \Delta u_{1F3} &= \langle \Delta u_1 |_{f=3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_1 d\eta = \Delta U_{1(00)} + \Delta U_{1(01)} + \Delta U_{1(02)} \\ \Delta u_{1F4} &= \langle \Delta u_1 |_{f=4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_1 d\xi = \Delta U_{1(00)} - \Delta U_{1(10)} + \Delta U_{1(20)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
\Delta u_{2F1} &= \langle \Delta u_2 |_{f=1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_2 \, d\eta = \Delta U_{2(00)} - \Delta U_{2(01)} + \Delta U_{2(02)} \\
\Delta u_{2F2} &= \langle \Delta u_2 |_{f=2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_2 \, d\xi = \Delta U_{2(00)} + \Delta U_{2(10)} + \Delta U_{2(20)} \\
\Delta u_{2F3} &= \langle \Delta u_2 |_{f=3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_2 \, d\eta = \Delta U_{2(00)} + \Delta U_{2(01)} + \Delta U_{2(02)} \\
\Delta u_{2F4} &= \langle \Delta u_2 |_{f=4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Delta u_2 \, d\xi = \Delta U_{2(00)} - \Delta U_{2(10)} + \Delta U_{2(20)}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Colocando-se as Equações (3.43) e (3.44) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{iF1} \\ \Delta u_{iF2} \\ \Delta u_{iF3} \\ \Delta u_{iF4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_{i(10)} \\ \Delta U_{i(01)} \\ \Delta U_{i(20)} \\ \Delta U_{i(02)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta U_{i(00)} \\ \Delta U_{i(00)} \\ \Delta U_{i(00)} \\ \Delta U_{i(00)} \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

Dessa forma, explicitando-se os coeficientes  $\Delta U_{i(10)}$ ,  $\Delta U_{i(01)}$ ,  $\Delta U_{i(20)}$  e  $\Delta U_{i(02)}$  da Equação (3.45), chegam-se às seguintes expressões:

$$\Delta U_{i(10)} = \frac{1}{2} (\Delta u_{iF2} - \Delta u_{iF4}) \tag{3.46}$$

$$\Delta U_{i(01)} = \frac{1}{2} (\Delta u_{iF3} - \Delta u_{iF1}) \tag{3.47}$$

$$\Delta U_{i(20)} = \frac{1}{2} (\Delta u_{iF2} + \Delta u_{iF4}) - \Delta U_{i(00)} \tag{3.48}$$

$$\Delta U_{i(02)} = \frac{1}{2} (\Delta u_{iF1} + \Delta u_{iF3}) - \Delta U_{i(00)} \tag{3.49}$$

Considerando-se que os coeficientes  $\Delta U_{1(00)}$  e  $\Delta U_{2(00)}$  ainda são desconhecidos, faz-se necessário o uso das equações diferenciais de equilíbrio, Equações (3.4) e (3.5), como expressões adicionais. Utilizando-se as Equações (3.6), (3.10), (3.14)-(3.19), podem-se deduzir as seguintes derivadas que figuram nas referidas equações incrementais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \sigma_{11}}{\partial x_1} = & 3C_{11}[(\bar{J}_{11})^2 \Delta U_{1(20)} + (\bar{J}_{12})^2 \Delta U_{1(02)}] \\ & + 3C_{12}(\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} \Delta U_{2(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} \Delta U_{2(02)}) - (C_{12}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2) \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \\ & - C_{11} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial x_1} - C_{12} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_2} = & 3G[(\bar{J}_{21})^2 \Delta U_{1(20)} + (\bar{J}_{22})^2 \Delta U_{1(02)} + \bar{J}_{11}\bar{J}_{21} \Delta U_{2(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} \Delta U_{2(02)}] \\ & - G \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \sigma_{12}}{\partial x_1} = & 3G[\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} \Delta U_{1(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} \Delta U_{1(02)} + (\bar{J}_{11})^2 \Delta U_{2(20)} + (\bar{J}_{12})^2 \Delta U_{2(02)}] \\ & - G \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \sigma_{22}}{\partial x_2} = & 3C_{21}(\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} \Delta U_{1(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} \Delta U_{1(02)}) \\ & + 3C_{22}[(\bar{J}_{21})^2 \Delta U_{2(20)} + (\bar{J}_{22})^2 \Delta U_{2(02)}] - (C_{21}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2) \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \\ & - C_{21} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial x_2} - C_{22} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os coeficientes de expansão térmica nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

Substituindo-se as Equações (3.50)-(3.53) nas equações de equilíbrio, tem-se:

$$\begin{aligned}
& 3C_{11}[(\bar{J}_{11})^2\Delta U_{1(20)} + (\bar{J}_{12})^2\Delta U_{1(02)}] + 3C_{12}(\bar{J}_{11}\bar{J}_{21}\Delta U_{2(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}\Delta U_{2(02)}) \\
& + 3G[(\bar{J}_{21})^2\Delta U_{1(20)} + (\bar{J}_{22})^2\Delta U_{1(02)} + \bar{J}_{11}\bar{J}_{21}\Delta U_{2(20)} \\
& + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}\Delta U_{2(02)}] + \Delta b_1 - \Gamma_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} - \Delta V_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
& 3G[\bar{J}_{11}\bar{J}_{21}\Delta U_{1(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}\Delta U_{1(02)} + (\bar{J}_{11})^2\Delta U_{2(20)} + (\bar{J}_{12})^2\Delta U_{2(02)}] \\
& + 3C_{21}(\bar{J}_{11}\bar{J}_{21}\Delta U_{1(20)} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}\Delta U_{1(02)}) \\
& + 3C_{22}[(\bar{J}_{21})^2\Delta U_{2(20)} + (\bar{J}_{22})^2\Delta U_{2(02)}] + \Delta b_2 - \Gamma_2 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \\
& - \Delta V_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 \\
\Gamma_2 &= C_{21}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2
\end{aligned} \tag{3.56}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta V_1 &= C_{11} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial x_1} + G \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial x_2} \\
\Delta V_2 &= C_{21} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial x_2} + C_{22} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial x_2} + G \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Isolando-se os coeficientes  $\Delta U_{1(20)}$ ,  $\Delta U_{1(02)}$ ,  $\Delta U_{2(20)}$  e  $\Delta U_{2(02)}$  nas Equações (3.54) e (3.55) e reorganizando-os na forma de um vetor, chega-se à seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_{1(20)} \\ \Delta U_{1(02)} \\ \Delta U_{2(20)} \\ \Delta U_{2(02)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \\ \Gamma_2 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.58}$$

onde

$$\begin{aligned}
W_{11} &= C_{11}(\bar{J}_{11})^2 + G(\bar{J}_{21})^2 \\
W_{12} &= C_{11}(\bar{J}_{12})^2 + G(\bar{J}_{22})^2 \\
W_{13} &= C_{12}\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} + G\bar{J}_{11}\bar{J}_{21} \\
W_{14} &= C_{12}\bar{J}_{12}\bar{J}_{22} + G\bar{J}_{12}\bar{J}_{22} \\
W_{21} &= \bar{J}_{11}\bar{J}_{21}(G + C_{21}) \\
W_{22} &= \bar{J}_{12}\bar{J}_{22}(G + C_{21}) \\
W_{23} &= G(\bar{J}_{11})^2 + C_{22}(\bar{J}_{21}) \\
W_{24} &= G(\bar{J}_{12})^2 + C_{22}(\bar{J}_{22})
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Substituindo-se as Equações (3.46)-(3.49) em (3.58), chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} W_{11} + W_{12} & W_{13} + W_{14} \\ W_{21} + W_{22} & W_{23} + W_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_{1(00)} \\ \Delta U_{2(00)} \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{1F2} + \Delta u_{1F4} \\ \Delta u_{1F1} + \Delta u_{1F3} \\ \Delta u_{2F2} + \Delta u_{2F4} \\ \Delta u_{2F1} + \Delta u_{2F3} \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{Bmatrix} \\
&- \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} \\ \Gamma_2 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

ou, em forma compacta,

$$[\Phi] \begin{Bmatrix} \Delta U_{1(00)} \\ \Delta U_{2(00)} \end{Bmatrix} = [\Theta] \begin{Bmatrix} \Delta u_{1F2} + \Delta u_{1F4} \\ \Delta u_{1F1} + \Delta u_{1F3} \\ \Delta u_{2F2} + \Delta u_{2F4} \\ \Delta u_{2F1} + \Delta u_{2F3} \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Delta b_1 - \Gamma_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_1} - \Delta V_1 \\ \Delta b_2 - \Gamma_2 \frac{\partial \Delta T}{\partial x_2} - \Delta V_2 \end{Bmatrix} \tag{3.61}$$

onde

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} W_{11} + W_{12} & W_{13} + W_{14} \\ W_{21} + W_{22} & W_{23} + W_{24} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

$$[\theta] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Da mesma forma que em Cavalcante (2006), foram utilizadas as médias no volume para os termos dependentes da temperatura que figuram na Equação (3.61). Assim sendo, resulta:

$$[\phi] \begin{Bmatrix} \Delta U_{1(00)} \\ \Delta U_{2(00)} \end{Bmatrix} = [\theta] \begin{Bmatrix} \Delta u_{1F2} + \Delta u_{1F4} \\ \Delta u_{1F1} + \Delta u_{1F3} \\ \Delta u_{2F2} + \Delta u_{2F4} \\ \Delta u_{2F1} + \Delta u_{2F3} \end{Bmatrix} + \{\Delta\psi\} \quad (3.64)$$

onde

$$\{\Delta\psi\} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} \Delta b_1 - \Gamma_1 (\bar{J}_{11} \Delta T_{1(10)} + \bar{J}_{12} \Delta T_{1(01)}) - \Delta V_1 \\ \Delta b_2 - \Gamma_2 (\bar{J}_{21} \Delta T_{1(10)} + \bar{J}_{22} \Delta T_{1(01)}) - \Delta V_2 \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

Isolando-se os incrementos de coeficientes  $\Delta U_{1(00)}$  e  $\Delta U_{2(00)}$  e utilizando-se as Equações (3.46)-(3.49), pode-se chegar à seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta U_{1(10)} \\ \Delta U_{1(01)} \\ \Delta U_{1(20)} \\ \Delta U_{1(02)} \\ \Delta U_{2(10)} \\ \Delta U_{2(01)} \\ \Delta U_{2(20)} \\ \Delta U_{2(02)} \end{Bmatrix} = [\bar{B}] \begin{Bmatrix} \Delta u_{1F1} \\ \Delta u_{2F1} \\ \Delta u_{1F2} \\ \Delta u_{2F2} \\ \Delta u_{1F3} \\ \Delta u_{2F3} \\ \Delta u_{1F4} \\ \Delta u_{2F4} \end{Bmatrix} - [N][\phi]^{-1} \{\Delta\psi\} \quad (3.66)$$

onde  $[\bar{B}] = [P] - [N][\phi]^{-1}[\theta][M]$ . As matrizes  $[P]$ ,  $[M]$  e  $[N]$  são apresentadas no Apêndice D.

Com isso, pode-se substituir a Equação (3.66) em (3.42), chegando-se ao seguinte sistema de equações:



$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta t \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} &= [\bar{\mathbf{A}}] \begin{Bmatrix} [\bar{\mathbf{B}}] \begin{Bmatrix} \Delta u_{1F1} \\ \Delta u_{2F1} \\ \Delta u_{1F2} \\ \Delta u_{2F2} \\ \Delta u_{1F3} \\ \Delta u_{2F3} \\ \Delta u_{1F4} \\ \Delta u_{2F4} \end{Bmatrix} - [\mathbf{N}][\Phi]^{-1} \{\Delta \Psi\} \end{Bmatrix} \\
&- [\mathbf{D}][\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=1} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=2} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=3} \\ \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}_{f=4} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Reescrevendo-se a equação acima na forma de matriz, tem-se:

$$\{\Delta t\} = [\mathbf{K}]\{\Delta u\} - \{\Delta t\}^{(0)} \tag{3.68}$$

onde

$$[\mathbf{K}] = [\bar{\mathbf{A}}][\bar{\mathbf{B}}] \tag{3.69}$$

$$\{\Delta t\}^{(0)} = [\bar{\mathbf{A}}][\mathbf{N}][\Phi]^{-1}\{\Delta \Psi\} + [\mathbf{D}][\mathbf{C}](\{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\} + \{\langle \Delta \varepsilon^V \rangle\}) \tag{3.70}$$

sendo  $[\mathbf{K}]$  uma pseudo matriz de rigidez e  $\{\Delta t\}^{(0)}$  um pseudo vetor de forças iniciais nas faces do subvolume.

Vale ressaltar que, em um passo incremental onde não existe variação de força externa, o vetor  $\{\Delta t\}$  é nulo, acontecendo o mesmo com o vetor  $\{\langle \Delta \varepsilon^T \rangle\}$  e a parte térmica de  $\{\Delta \Psi\}$  se a temperatura não sofre variação. Em tais casos, resta apenas a parcela correspondente às tensões viscoelásticas no vetor  $\{\Delta t\}^{(0)}$ .

Para uma melhor compreensão do procedimento acima abordado, pode-se encontrar no Apêndice E o algoritmo desenvolvido para a avaliação do processo viscoelástico através da Teoria de Volumes Finitos e Método das Variáveis de Estado.

### 3.4. Avaliação das Deformações Viscoelásticas

Seguindo-se os procedimentos apresentados anteriormente para o cálculo das deformações viscoelásticas (Capítulo 2), apresenta-se em seguida a sistemática empregada para incorporar o método das variáveis de estado na formulação paramétrica da teoria de volumes finitos.

A Equação (3.9) pode ser reescrita na forma:

$$\{\sigma(t)\} = [C]\{[F]\{r(t)\} - \{\varepsilon^T(t)\} - \{\varepsilon^V(t)\}\} \quad (3.71)$$

onde  $\{\varepsilon(t)\} = [F]\{r(t)\}$ , sendo

$$[F] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

e

$$\{r(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(t)}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{1(10)}(t) + 3\eta U_{1(20)}(t) \\ U_{1(01)}(t) + 3\xi U_{1(02)}(t) \\ U_{2(10)}(t) + 3\eta U_{2(20)}(t) \\ U_{2(01)}(t) + 3\xi U_{2(02)}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

Ressalta-se que em  $t = 0$ , o vetor de deformação viscoelástica  $\{\varepsilon^V(0)\} = 0$  e, conseqüentemente, o campo de tensão no domínio do sólido depende somente das forças externas e da variação de temperatura, podendo ser calculado através de uma análise termoelástica linear. Conhecendo-se as tensões em qualquer ponto do domínio, os valores das variáveis de estado podem ser avaliados para o próximo passo incremental mediante a Equação (2.59) e, por conseguinte, obtido o vetor de deformações viscoelásticas  $\{\varepsilon^V(0 + \Delta t)\}$ . Como sistemática geral, as deformações

viscoelásticas relativas ao tempo  $t + \Delta t$  são obtidas através do campo de tensões correspondente ao tempo  $t$ .

Através das Equações (2.59) e (2.60), o vetor de deformação viscoelástica para o tempo  $t + \Delta t$  pode ser organizado como:

$$\{\varepsilon^V(t + \Delta t)\} = \sum_{p=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} S_{11}^p(t) & S_{12}^p(t) & S_{13}^p(t) \\ S_{21}^p(t) & S_{22}^p(t) & S_{23}^p(t) \\ S_{31}^p(t) & S_{32}^p(t) & S_{33}^p(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11}^p & R_{12}^p & R_{13}^p \\ R_{21}^p & R_{22}^p & R_{23}^p \\ R_{31}^p & R_{32}^p & R_{33}^p \end{bmatrix} \{\sigma(t)\} \right\} \quad (3.74)$$

onde

$$S_{ij}^p(t) = \varphi_{ij}^p(t) e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \quad (3.75)$$

e

$$R_{ij}^p = D_{ij}^p \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \right] \quad (3.76)$$

Em forma sintética, a Equação (3.74) pode ser expressa como

$$\{\varepsilon^V(t + \Delta t)\} = \sum_{p=1}^n \{ [S^p(t)] \{1\} + [R^p] \{\sigma(t)\} \} \quad (3.77)$$

Como explicado anteriormente, para se obter o vetor de forças viscoelásticas é necessário o cálculo das deformações viscoelásticas incrementais médias nas faces e de suas derivadas. Considerando-se que o incremento de deformação viscoelástica correspondente ao intervalo de tempo  $\Delta t$  é definido pelo vetor:

$$\{\Delta \varepsilon^V\} = \{\varepsilon^V(t + \Delta t)\} - \{\varepsilon^V(t)\} \quad (3.78)$$

então, o vetor de deformação viscoelástico médio nas faces do subvolumen pode ser dado por:

$$\begin{Bmatrix} \{\{\Delta \varepsilon^V\}|_{f=1}\} \\ \{\{\Delta \varepsilon^V\}|_{f=2}\} \\ \{\{\Delta \varepsilon^V\}|_{f=3}\} \\ \{\{\Delta \varepsilon^V\}|_{f=4}\} \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^n \left\{ [\mathbf{S}^p(t)]\{\mathbf{1}\} + [\mathbf{R}^p] \begin{Bmatrix} \{\{\sigma(t)\}|_{f=1}\} \\ \{\{\sigma(t)\}|_{f=2}\} \\ \{\{\sigma(t)\}|_{f=3}\} \\ \{\{\sigma(t)\}|_{f=4}\} \end{Bmatrix} \right\} - \begin{Bmatrix} \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=1}\} \\ \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=2}\} \\ \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=3}\} \\ \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=4}\} \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

onde, neste caso, o vetor  $\{\mathbf{1}\}$  é um vetor coluna com 12 componentes unitárias e as matrizes  $[\mathbf{S}^p(t)]$  e  $[\mathbf{R}^p]$  encontram-se no Apêndice D.

De forma similar, podem-se deduzir as expressões para as tensões médias nas faces como segue:

$$\begin{Bmatrix} \{\{\sigma(t)\}|_{f=1}\} \\ \{\{\sigma(t)\}|_{f=2}\} \\ \{\{\sigma(t)\}|_{f=3}\} \\ \{\{\sigma(t)\}|_{f=4}\} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \left( [\mathbf{F}]\{\langle \mathbf{r}(t) \rangle\} - \begin{Bmatrix} \{\{\varepsilon^T(t)\}|_{f=1}\} \\ \{\{\varepsilon^T(t)\}|_{f=2}\} \\ \{\{\varepsilon^T(t)\}|_{f=3}\} \\ \{\{\varepsilon^T(t)\}|_{f=4}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=1}\} \\ \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=2}\} \\ \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=3}\} \\ \{\{\varepsilon^V(t)\}|_{f=4}\} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.80)$$

onde as matrizes  $[\mathbf{F}]$  e  $[\langle \mathbf{r}(t) \rangle]$  encontram-se no Apêndice D.

Introduzindo-se a Equação (3.80) em (3.79) tem-se o cálculo da deformação incremental viscoelástica média, a qual corresponde a uma parte do vetor de forças viscoelásticas. A determinação da outra parte relativa do vetor de forças viscoelásticas, referentes às derivadas do vetor de deformações viscoelásticas, é apresentada a seguir.

A relação entre as derivadas das deformações viscoelásticas em termos das coordenadas cartesianas e paramétricas pode ser expressa na forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \Delta \varepsilon_{11}^V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Delta \varepsilon_{22}^V}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Delta \gamma_{12}^V}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

onde

$$[Q] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_{11} & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{11} & 0 & 0 & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & 0 & 0 & \bar{J}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & \bar{J}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Utilizando-se as Equações (3.77) e (3.78), pode-se chegar às derivadas das deformações em função das coordenadas paramétricas, mostradas a seguir:

$$\left\{ \frac{\partial \Delta \varepsilon^V}{\partial \eta} \right\} = \sum_{p=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial S^p(t)}{\partial \eta} \right] \{1\} + [R^p] \left\{ \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \eta} \right\} \right\} - \left\{ \frac{\partial \varepsilon^V(t)}{\partial \eta} \right\} \quad (3.83)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Delta \varepsilon^V}{\partial \xi} \right\} = \sum_{p=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial S^p(t)}{\partial \xi} \right] \{1\} + [R^p] \left\{ \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \xi} \right\} \right\} - \left\{ \frac{\partial \varepsilon^V(t)}{\partial \xi} \right\} \quad (3.84)$$

onde

$$\frac{\partial S_{ij}^p(t)}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_{ij}^p(t)}{\partial \eta} e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \quad (3.85)$$

e

$$\frac{\partial S_{ij}^p(t)}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_{ij}^p(t)}{\partial \xi} e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \quad (3.86)$$

Com isso, considerando-se as Equações (3.83) e (3.84), faz-se necessário determinar as derivadas do vetor de tensão para o tempo  $t$ . Utilizando-se a Equação (3.71), as referidas derivadas são dadas por:

$$\left\{ \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \eta} \right\} = [C] \left( [F] \left\{ \frac{\partial r(t)}{\partial \eta} \right\} - \left\{ \frac{\partial \varepsilon^T(t)}{\partial \eta} \right\} - \left\{ \frac{\partial \varepsilon^V(t)}{\partial \eta} \right\} \right) \quad (3.87)$$

e

$$\left\{ \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \xi} \right\} = [C] \left( [F] \left\{ \frac{\partial r(t)}{\partial \xi} \right\} - \left\{ \frac{\partial \varepsilon^T(t)}{\partial \xi} \right\} - \left\{ \frac{\partial \varepsilon^V(t)}{\partial \xi} \right\} \right) \quad (3.88)$$

onde

$$\left\{ \frac{\partial r(t)}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} 3U_{1(20)}(t) \\ 0 \\ 3U_{2(20)}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

$$\left\{ \frac{\partial r(t)}{\partial \xi} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3U_{1(02)}(t) \\ 0 \\ 3U_{2(02)}(t) \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon^T(t)}{\partial \eta} \right\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 T_{1(10)} \\ \alpha_2 T_{1(10)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

e

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon^T(t)}{\partial \xi} \right\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 T_{1(01)} \\ \alpha_2 T_{1(01)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.92)$$

Vale ressaltar que as derivadas das deformações viscoelásticas que figuram nas Equações (3.87) e (3.88) são calculadas com base no campo de tensões do passo anterior ao passo  $t$ , o qual já é previamente conhecido. Feito isso, têm-se todas as equações necessárias para o cálculo do vetor de cargas viscoelásticas.

## 4 Exemplos e Discussões

### 4.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo, são apresentados os resultados das análises de alguns exemplos envolvendo materiais com comportamento viscoelástico linear. Os dois primeiros exemplos tratam de materiais com propriedades homogêneas viscoelásticas, os quais têm como objetivo verificar a formulação implementada. Na sequência, são apresentados exemplos de estruturas heterogêneas, envolvendo constituintes elásticos e viscoelásticos.

### 4.2. Determinação da curva de fluência para um espécime sob tração

Como primeiro exemplo, apresenta-se o estudo do comportamento viscoelástico de um espécime submetido a EPT, caracterizado por uma tração uniaxial e apresentado em Masuero e Creus (1993). A relação constitutiva é representada por modelos de sólido padrão relacionados aos respectivos efeitos volumétricos e desviadores. Para tornar o coeficiente de Poisson constante ao longo do tempo, foram considerados iguais os tempos de retardação para os dois modelos. Os valores das propriedades do material são mostrados na Figura 15.

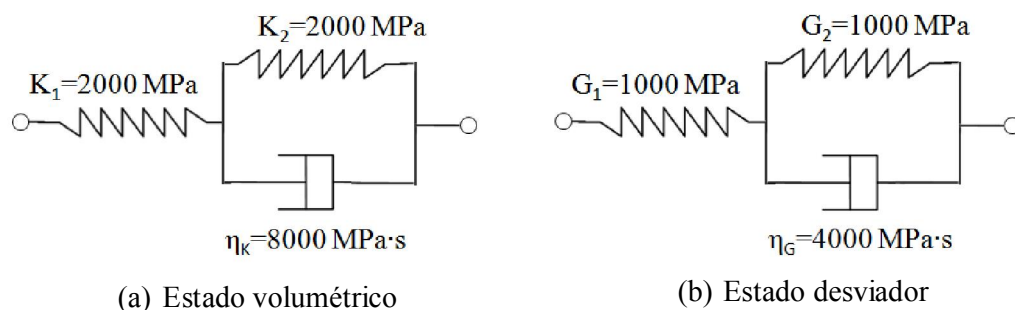


Figura 15 – Propriedades físicas dos modelos viscoelásticos volumétrico e desviador.

O tempo de retardação pode ser calculado da seguinte maneira:



$$\theta = \frac{\eta_K}{K_2} = \frac{\eta_G}{G_2} = 4s \quad (4.1)$$

Da mesma forma que em Masuero e Creus (1993), uma tensão  $\sigma_1 = 20$  MPa é aplicada no tempo  $t = 0s$  e mantida constante até o tempo  $t = 3\theta$ , quando a mesma é reduzida pela metade para  $\sigma_2 = 10$  MPa.

A solução analítica para a deformação em função do tempo é dada pelas seguintes equações:

a) Para  $0 < t \leq 3\theta$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{m1}}{3K_1} + \frac{\sigma_{m1}}{3K_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) + \frac{S_1}{2G_1} + \frac{S_1}{2G_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) \quad (4.2)$$

b) Para  $t > 3\theta$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma_{m1}}{3K_1} + \frac{\sigma_{m1}}{3K_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) + \frac{S_1}{2G_1} + \frac{S_1}{2G_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right) - \frac{\sigma_{m2}}{3K_1} \\ & - \frac{\sigma_{m2}}{3K_2} \left(1 - e^{-\frac{t-3\theta}{\theta}}\right) - \frac{S_2}{2G_1} - \frac{S_2}{2G_2} \left(1 - e^{-\frac{t-3\theta}{\theta}}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $\sigma_{mi} = \frac{\sigma_i}{3}$  é a média da tensão volumétrica,  $S_i = \sigma_i - \sigma_{mi}$  indica a tensão desviadora associada à direção de aplicação da carga e  $i$  representa o estágio de carga aplicada (1 ou 2).

A Figura 16 apresenta as curvas de deformação total, em função do tempo, obtidas pelas Equações (4.2) e (4.3), juntamente com aquelas encontradas através do código computacional implementado e baseado na teoria de volumes finitos.

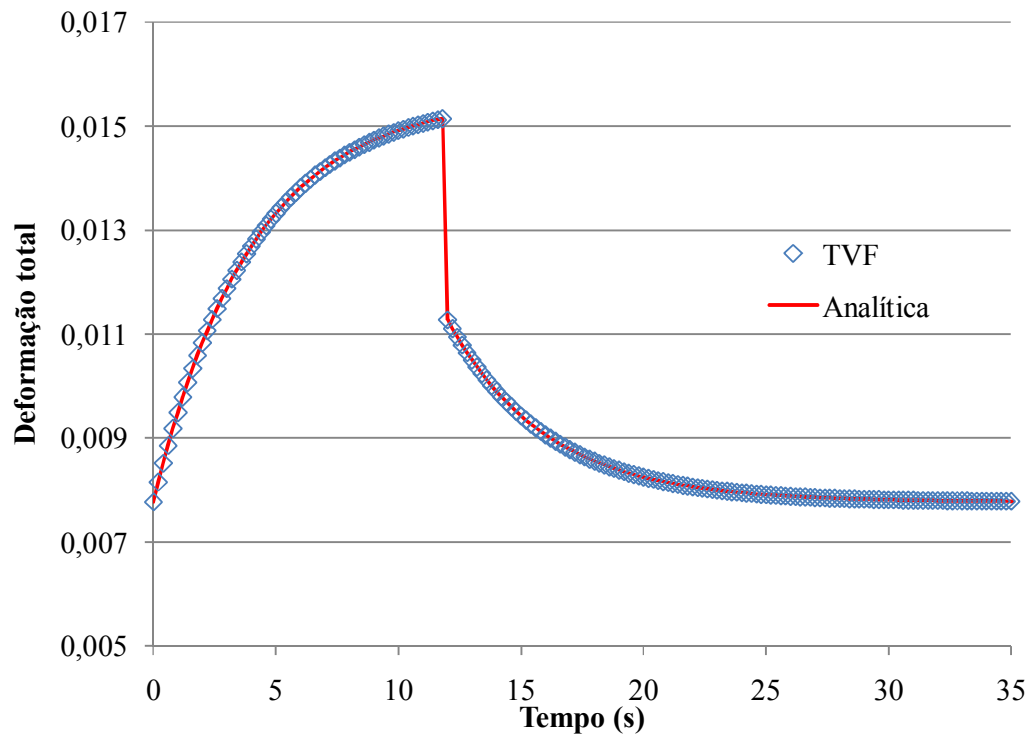


Figura 16 – Histórico de deformação para o espécime sob tensão axial.

Como observado na Figura 16, os resultados numéricos apresentaram excelente concordância em relação aos obtidos pelas expressões analíticas, com erro máximo de 0,00634% para um incremento de tempo  $\Delta t = 0,1s$ . Ressalta-se que Masuero e Creus (1993), utilizando o método das variáveis de estado e elementos finitos, conseguiram resultados com erro máximo de 0,0064%.

### 4.3. Tensão transversal em bloco viscoelástico confinado

Para a verificação da presente formulação no caso de EPD, trata-se neste tópico o problema de um bloco viscoelástico inserido em um container rígido e submetido a uma compressão vertical  $p_0 = 10\text{MPa}$ , como pode ser observado na Figura 17. Neste exemplo objetiva-se a determinação da tensão normal na direção  $y$ . A malha utilizada é constituída de subvolumes quadrados e também podem ser visualizada na Figura 17. O atrito entre o bloco e o container foi desconsiderado e as tensões em qualquer ponto do bloco são as mesmas (Flügge, 1975).

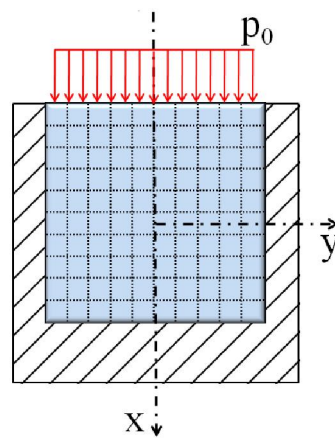


Figura 17 – Bloco confinado.

O material do bloco é considerado elástico em dilatação, com módulo de elasticidade volumétrico  $K = 8333,333\text{MPa}$ , e viscoelástico em cisalhamento, sendo modelado por um elemento de Maxwell com  $G_1 = 3846,154\text{MPa}$ ,  $G_2 = 0,00001\text{MPa}$  e  $\eta_G = 400\text{MPa} \cdot \text{s}$ . Observa-se que, como a implementação do método das variáveis de estado se deu para cadeias de elementos Kelvin, é necessária a utilização de uma estratégia de adaptação dos modelos reológicos. No presente estudo, o modelo de Maxwell foi gerado com a diminuição do valor  $G_2$ , tornando-o desprezível em relação às outras propriedades.

A solução analítica para esse problema pode ser encontrada em Mase e Mase (1999) ou em Flügge (1975) e tem a seguinte forma:

$$\sigma_y(t) = -p_0 \left( 1 - \frac{6G_1}{3K + 4G_1} e^{-\left[ \frac{3K}{(3K+4G_1)\theta} \right] t} \right) \quad (4.4)$$

onde  $\theta = \frac{\eta G}{G_1}$ . Com as propriedades definidas, a tensão para  $t = 0$ s é  $\sigma_y(0) = 4.286$ MPa e a medida que o tempo avança, com incrementos no tempo de 0,02s e não existindo descarregamento, a tensão horizontal tende para a tensão vertical aplicada  $p_0 = -10$ MPa. Esse comportamento pode ser observado no gráfico da Figura 18, onde foi comparado o valor absoluto da solução analítica com o obtido pela TVF.

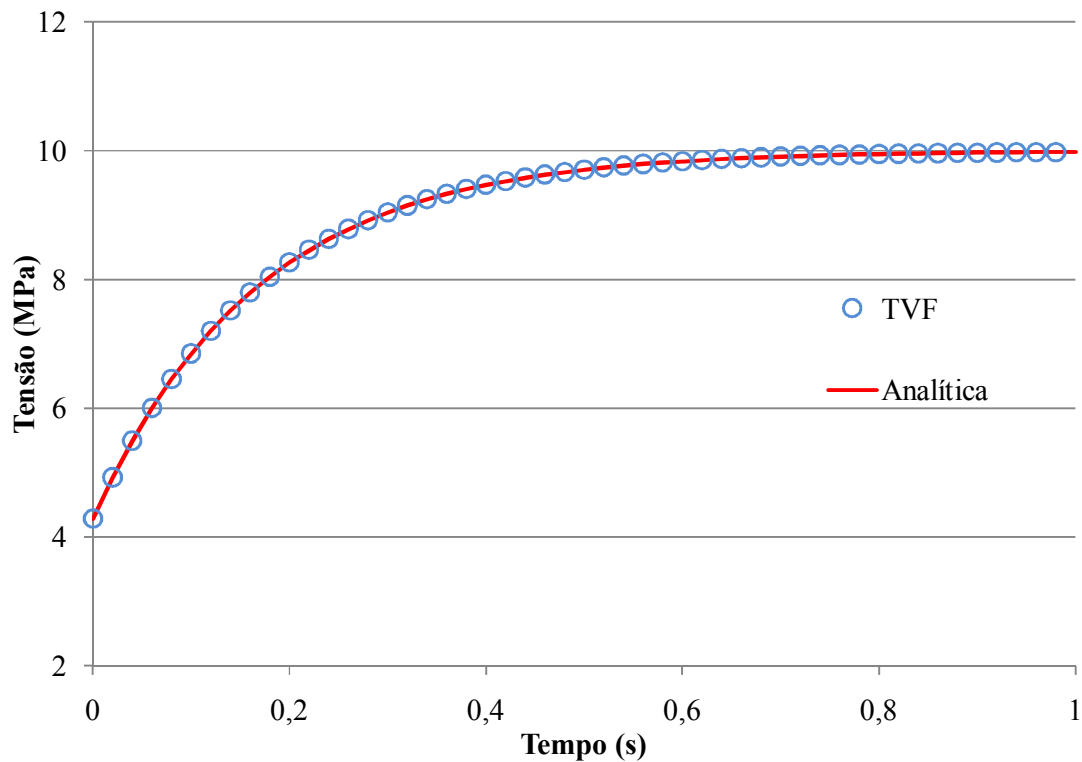


Figura 18 – Tensão horizontal no cilindro confinado.

Observa-se a excelente concordância entre as respostas analítica e da TVF.

#### 4.4. Estudo da variação do coeficiente de Poisson em função do tempo

Como explicado em Shames e Cozzarelli (1997), o efeito do coeficiente de Poisson em materiais viscoelástico é em geral determinado por funções complexas do tempo, que dependem do modelo viscoelástico escolhido e do histórico de carregamento, e indicam que a deformação longitudinal e a deformação transversal nem sempre têm a mesma proporção para todo o tempo. Da mesma forma que em Shames e Cozzarelli (1997) aqui é estudado um problema de tração simples, utilizando um único subvolume quadrado de lado unitário. O coeficiente de Poisson pode ser definido como:

$$v(t) = \frac{J_y(t)}{J_x(t)} \quad (4.5)$$

onde  $J_x(t)$  e  $J_y(t)$  são as funções de fluência axial e lateral, respectivamente.

O material do subvolume é considerado com comportamento elástico em efeitos volumétricos, com  $K = 170\text{MPa}$ , e viscoelástico em estado desviador, sendo caracterizado por um modelo de sólido padrão com as seguintes propriedades:  $G_1 = 100000\text{MPa}$ ,  $G_2 = 29\text{MPa}$  e  $\eta_G = 280\text{MPa} \cdot \text{s}$ . Considerando-se as funções de fluência do modelo, a Equação (4.5) pode ser escrita na forma:

$$v(t) = \frac{3K \left( 1 - e^{-\frac{G_2 t}{\eta_G}} \right) - 2G_2}{6K \left( 1 - e^{-\frac{G_2 t}{\eta_G}} \right) + 2G_2} \quad (4.6)$$

A Equação (4.6) leva aos seguintes valores extremos:  $v(0) = -1,0$  e  $v(\infty) = 0,42$ , significando que o material experimenta expansão lateral no intervalo  $0 \leq t < t_1$ , seguida pela contração lateral em  $t > t_1$ , onde  $t_1$  representa o tempo em que o coeficiente de Poisson é nulo. Embora esse comportamento possa se mostrar fisicamente estranho, ele é matematicamente possível (Shames e Cozzarelli, 1997).

A comparação entre as curvas de variação do coeficiente de Poisson ao longo do tempo, obtidas pela Equação (4.6) e pelo código computacional implementado, pode ser observada na Figura 19. Neste exemplo foi utilizado  $\Delta t = 0,001\text{s}$ .

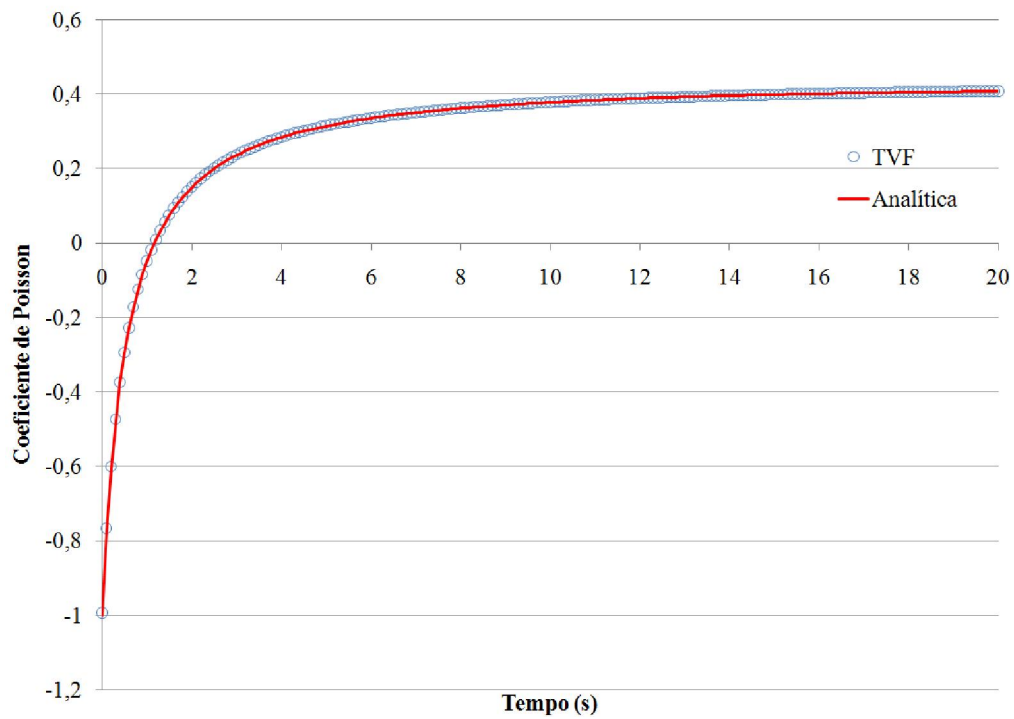


Figura 19 – Variação do coeficiente de Poisson ao longo do tempo.

Percebe-se a boa concordância entre os resultados numéricos e analíticos apresentados no gráfico da Figura 19.

#### 4.5. Fluência de um painel heterogêneo

Neste exemplo é estudado um painel constituído por camadas sucessivas, dispostas em forma alternada e confeccionada por dois materiais com diferentes propriedades mecânicas (Figura 20).

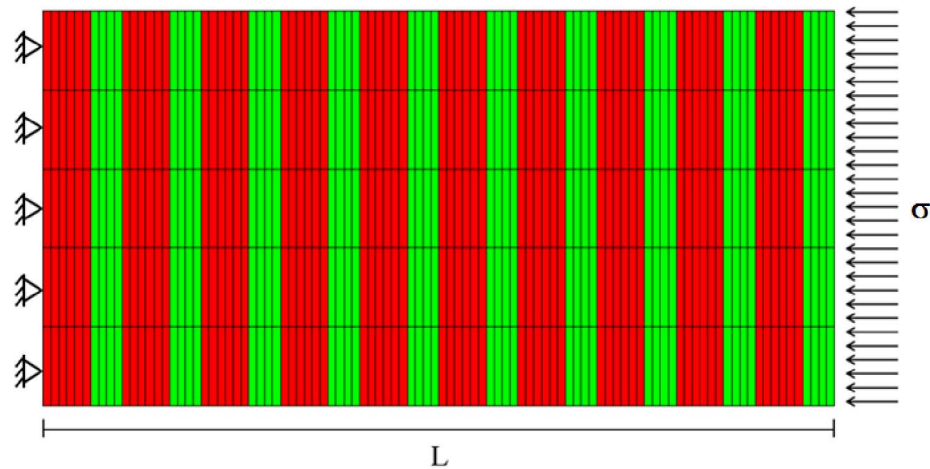


Figura 20 – Painel heterogêneo laminado e malha de subvolumes.

As camadas em vermelho na Figura 20 apresentam largura individual  $a = 6\text{cm}$  e são constituídas por um material elástico linear, enquanto que as camadas em verde são constituídas por material viscoelástico e têm largura individual  $h = 4\text{cm}$ . O painel tem um comprimento  $L = 100\text{cm}$ , altura  $B = 50\text{cm}$  e espessura  $e = 1\text{cm}$  e está submetido a um carregamento de compressão de  $10\text{MPa}$ . Os resultados para o ensaio de fluência foram obtidos para um incremento de tempo de  $0,1\text{s}$ . O material elástico tem Módulo de Young  $E = 1500\text{MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,0$ . O material viscoelástico tem comportamento definido pelo modelo do sólido padrão mostrado na Figura 21.

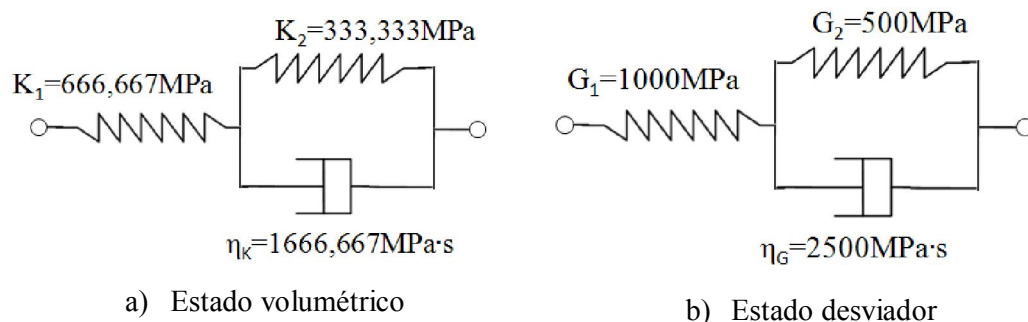


Figura 21 – Propriedades viscoelásticas do painel heterogêneo.

A solução analítica, encontrada pelo Princípio da Correspondência, para o deslocamento axial da extremidade direita do painel é dada por:

$$u(t) = N_e \frac{\sigma_0 h}{E} + N_v a \left\{ \left[ \frac{1}{3K_1} + \frac{1}{3K_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\theta_k}} \right) \right] \sigma_m + \left[ \frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\theta_G}} \right) \right] S \right\} \quad (4.7)$$

onde  $N_e$  e  $N_v$  são respectivamente o número de camadas elásticas e viscoelásticas.  $\sigma_0$  é a tensão aplicada,  $\sigma_m$  indica a tensão hidrostática e  $S$  designa a componente da tensão desviadora na direção da carga aplicada.

A Figura 22 mostra os resultados obtidos para o deslocamento horizontal do extremo direito do painel em função do tempo

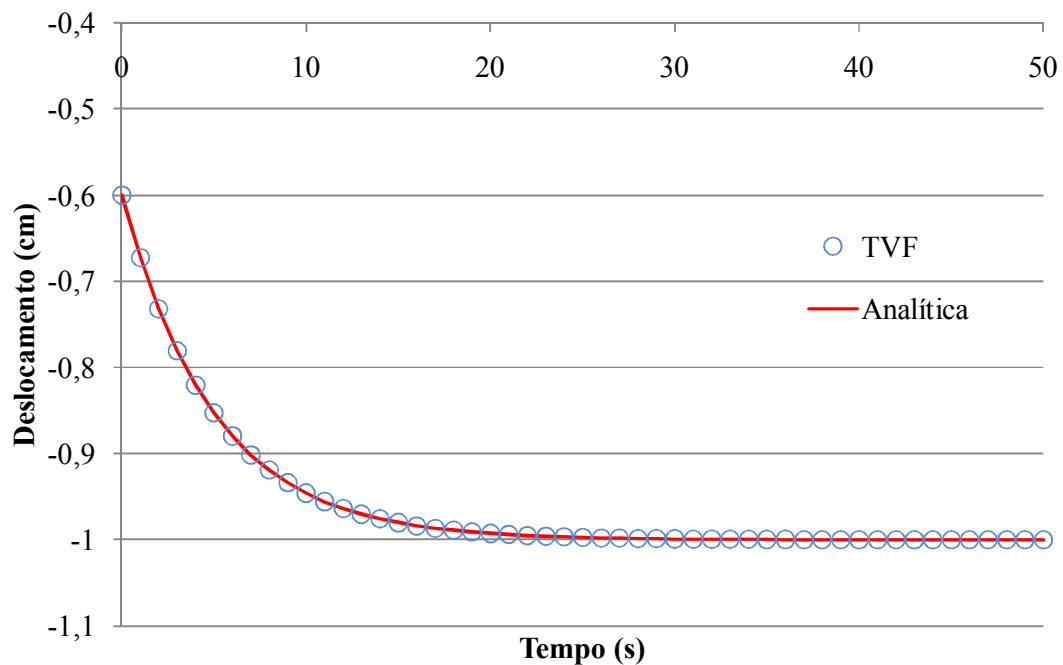


Figura 22 – Variação do deslocamento horizontal da extremidade direita do painel.

Percebe-se que a resposta numérica obtida para o deslocamento axial apresenta excelente concordância com aquela correspondente à solução analítica.



#### 4.6. Determinação da curva de relaxação para uma barra viscoelástica com reforço elástico

O exemplo estudado neste tópico está ilustrado na Figura 23 e trata-se de uma barra viscoelástica (região verde) reforçada por uma fibra elástica linear (região vermelha). A barra é engastada em sua extremidade esquerda e submetida a um deslocamento prescrito de 0,5cm no seu extremo direito. A peça tem comprimento  $L = 100\text{cm}$ , altura total de 21,5cm e espessura de 1cm. A fibra tem o mesmo comprimento e espessura da barra e altura  $h_e = 1,5\text{cm}$ . Assume-se aderência perfeita na interface entre os materiais viscoelástico e elástico.

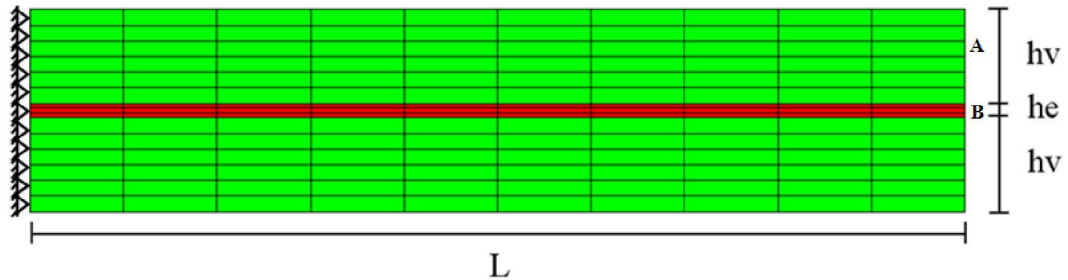


Figura 23 – Barra viscoelástica com reforço elástico interno (malha 10x15 subvolumes).

O material elástico tem Módulo de Young  $E = 1,5\text{e}4\text{MPa}$  e coeficiente de Poisson nulo e o material viscoelástico é representado por um modelo do sólido padrão com  $E_1 = 2,0\text{e}4\text{MPa}$ ,  $E_2 = 1,0\text{e}4\text{MPa}$  e  $\eta = 1,0\text{e}6\text{MPa} \cdot \text{s}$ .

Neste exemplo estuda-se a relaxação das tensões axiais introduzidas pelo deslocamento axial imposto na barra. Os resultados numéricos deste estudo foram obtidos para um incremento de tempo de 0,1s e são comparados com os resultados analíticos unidimensionais correspondentes, que são:

- a) Tensão no material viscoelástico

$$\sigma_v(t) = E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \varepsilon_0 \quad (4.8)$$

b) Tensão no material elástico

$$\sigma_e(t) = E\varepsilon_0 = \text{cte} \quad (4.9)$$

c) Tensão média na seção

$$\sigma_m(t) = \frac{\sigma_e(t)A_e + \sigma_v(t)(A_T - A_e)}{A_T} \quad (4.10)$$

Os resultados numéricos pela TVF foram obtidos para os pontos A, B, em destaque na Figura 23, e para a média na seção, representado pela letra C. Na Figura 24 pode-se observar a comparação entre as respostas analíticas e a numérica pela TVF.

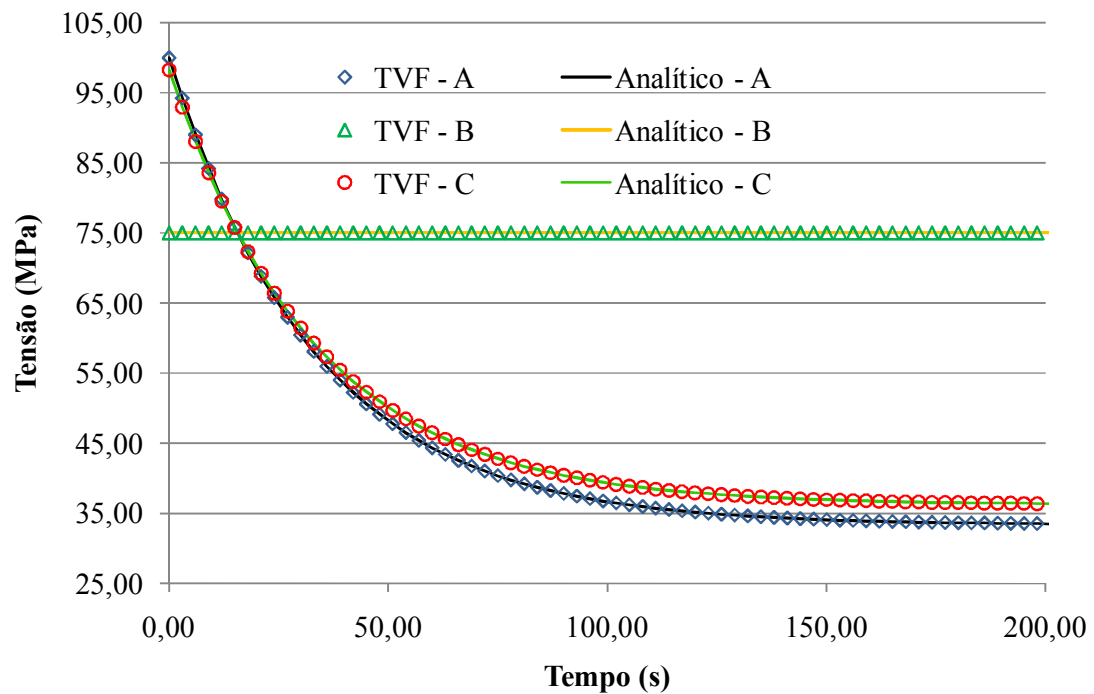


Figura 24 – Relaxação das tensões axiais para a barra heterogênea.

Pode-se observar, pela Figura 24, que os resultados numéricos para a relaxação das tensões axiais estão em excelente concordância com aqueles correspondentes à solução analítica, o que pode ser justificado pela discrepância máxima de 0,046%.

#### 4.7. Avaliação da fluência de uma de viga do tipo sanduíche

A análise a seguir trata do comportamento à flexão de uma viga sanduíche constituída por um núcleo de material viscoelástico disposto entre duas camadas de material elástico linear, conforme ilustrado na Figura 25. A viga encontra-se engastada em sua extremidade esquerda e submetida a um carregamento vertical constante  $\tau = 0,1\text{MPa}$  aplicado em sua extremidade direita. O estudo foi realizado para um incremento de tempo  $\Delta t = 0,1\text{s}$ .

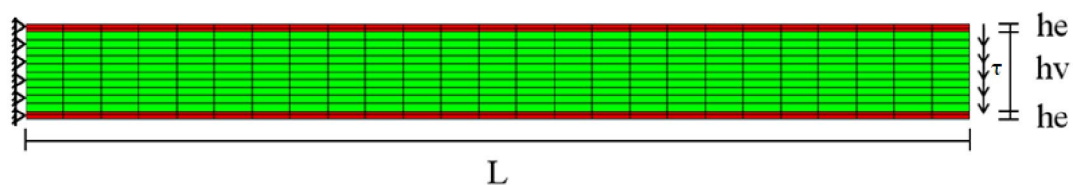


Figura 25 – Viga sanduíche e discretização com 25x14 subvolumes.

A viga tem comprimento  $L = 100\text{cm}$ , largura  $b = 1\text{cm}$  e altura total  $h = 10\text{cm}$ . As espessuras do núcleo e das camadas elásticas são, respectivamente,  $h_v = 8,4\text{cm}$  e  $h_e = 0,8\text{cm}$ . O material elástico (regiões em vermelho) tem propriedades  $K = 58333,333\text{MPa}$  e  $G = 26923,077\text{MPa}$ , enquanto que o comportamento do material viscoelástico (região em verde) é definida por um modelo de sólido padrão caracterizado pelos seguintes parâmetros relativos aos estado volumétrico e desviador, respectivamente:  $G_1 = 1200\text{MPa}$ ,  $G_2 = 1250\text{MPa}$  e  $\theta_G = \frac{\eta_G}{G_2} = 100\text{s}$  e em volumétrico, com  $K_1 = 800\text{MPa}$ ,  $K_2 = 833,333\text{MPa}$  e  $\theta_K = \frac{\eta_K}{K_2} = 100\text{s}$ .

Como, para esse exemplo de viga mista não foi obtida a solução analítica e visando-se avaliar a influência das camadas elásticas, resolveu-se por analisar três distintas situações: a) viga totalmente constituída pelo material viscoelástico do núcleo; b) viga totalmente constituída pelo material elástico das camadas externas; e c) viga com núcleo viscoelástico e as camadas elásticas. Os resultados correspondentes ao deslocamento vertical no extremo direito da viga são apresentados na Figura 26 e na Figura 27.

De acordo com a Figura 26, os resultados numéricos obtidos para a viga totalmente constituída pelo material do núcleo apresentam uma muito boa aproximação

em relação à solução analítica, exibindo erro máximo de 0,816%. A Figura 27 mostra as curvas representativas do deslocamento vertical no extremo direito para os casos da viga feita com o material das camadas externas e da viga sanduíche considerada. Os resultados exibem as já esperadas diferenças de rigidez dos dois casos e a forte influência das camadas elásticas na redução dos efeitos viscoelásticos globais da viga sanduíche.

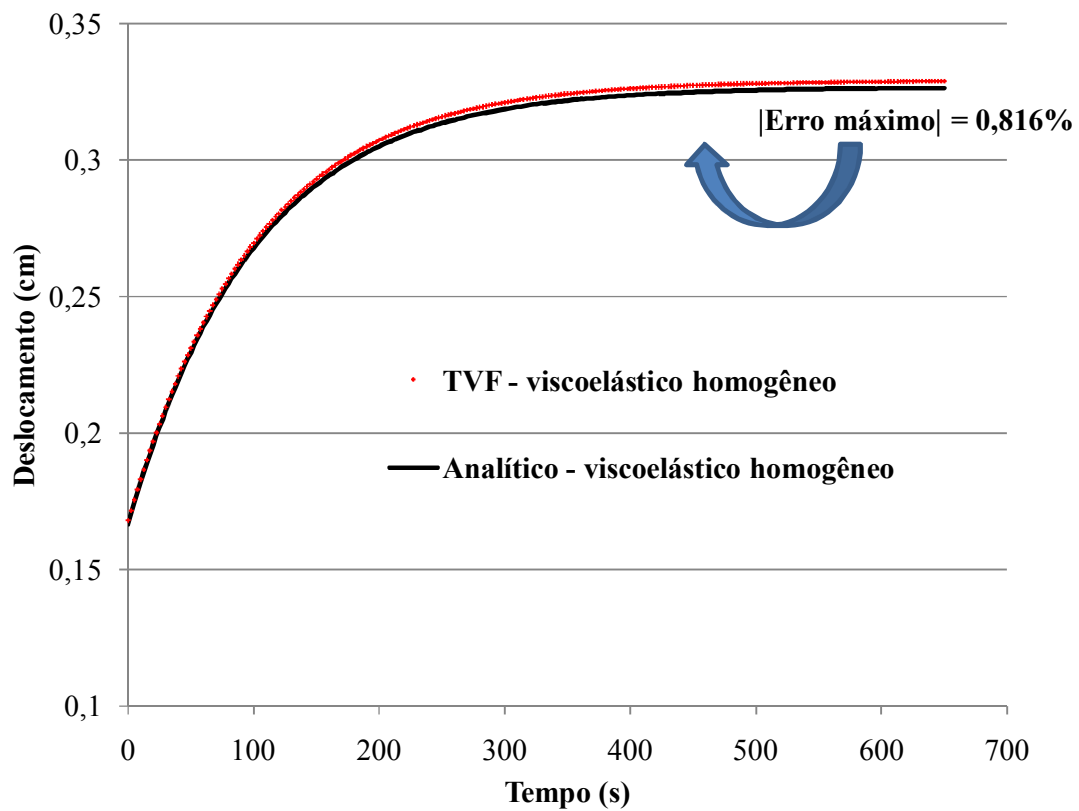


Figura 26 – Variação do deslocamento vertical no extremo da viga viscoelástica.

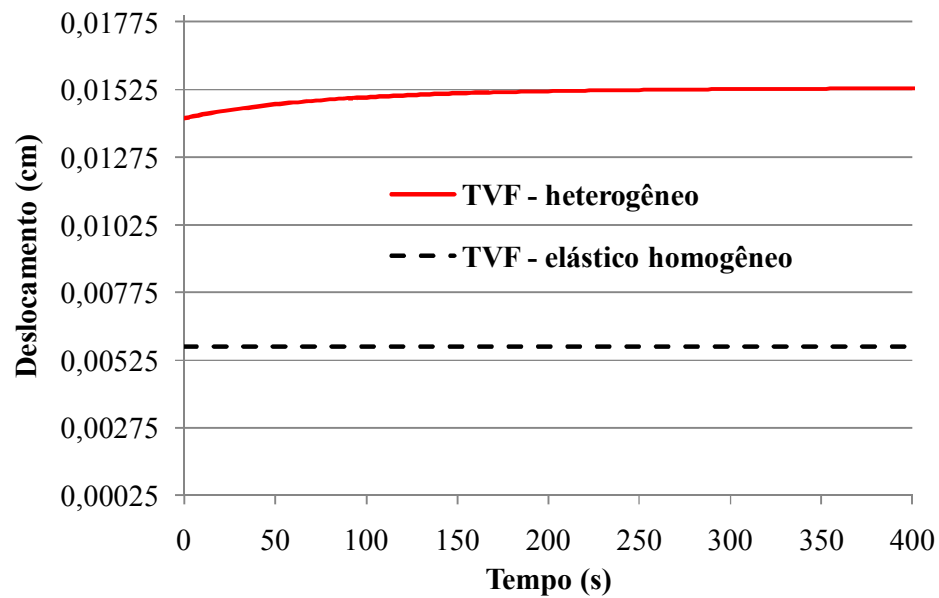


Figura 27 – Variação do deslocamento vertical nas vigas elásticas e sanduíche.

#### 4.8. Estudo de uma barra viscoelástica reforçada por fibra elástica submetida a um carregamento térmico

Neste último exemplo, uma barra engastada em sua extremidade esquerda com as mesmas dimensões e propriedades da barra estudada na Seção 4.6 é submetida a um resfriamento brusco de  $\Delta T = -153^{\circ}\text{C}$ . O coeficiente de expansão térmica do material elástico vale  $\alpha_e = 10^{-5}\text{C}^{-1}$  e, para o material viscoelástico,  $\alpha_v = 2,0 \cdot 10^{-5}\text{C}^{-1}$ .

Estuda-se neste exemplo o comportamento viscoelástico da barra considerando a influência da interação entre os dois materiais, visto que os mesmos têm propriedades térmicas e mecânicas distintas.

Na Figura 28 apresentam-se os deslocamentos horizontais em função do tempo para as duas situações: barra com reforço elástico e barra sem reforço elástico.

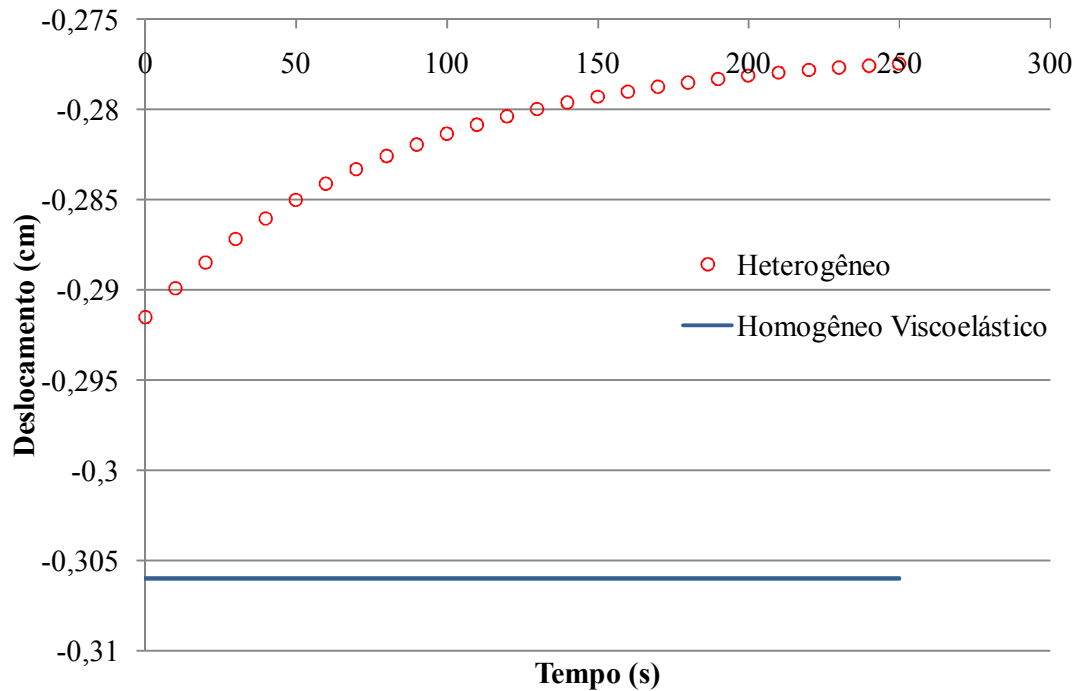


Figura 28 – Deslocamentos horizontais para a extremidade direita da barra.

Uma importante observação é que, para a barra homogênea viscoelástica, os deslocamentos horizontal do extremo livre não varia ao longo do tempo, isso se justifica pela ausência de tensões internas.

Também foram estudadas as variações das tensões normais horizontais médias ao longo de duas seções transversais  $S_1$  e  $S_2$ , com coordenadas  $x = L/2$  e  $x = 0,7L$ , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 29.

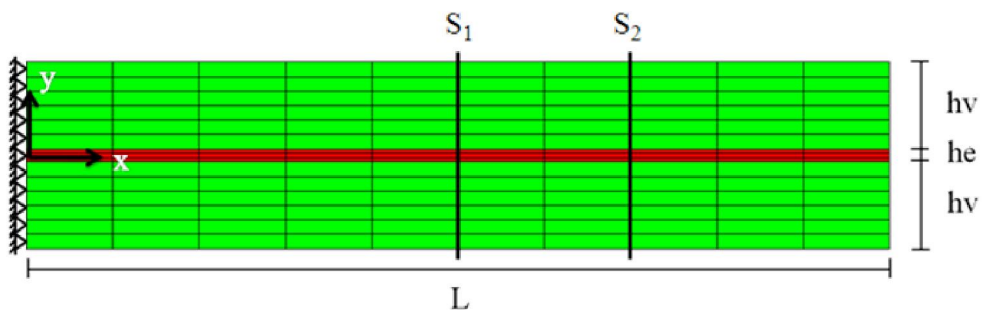


Figura 29 – Seções transversais onde foram estudadas as tensões horizontais.

A variação das tensões horizontais médias citadas acima pode ser vista na Figura 30 para o tempo de 250s, onde percebe-se que a fibra encontra-se comprimida com

tensões da ordem de 19MPa e que a matriz está submetidas a tensões de compressão com valores de aproximadamente 2MPa. Pode-se observar que a força normal resultante de tais tensões é praticamente nula, ou seja, que tais tensões são autoequilibradas.

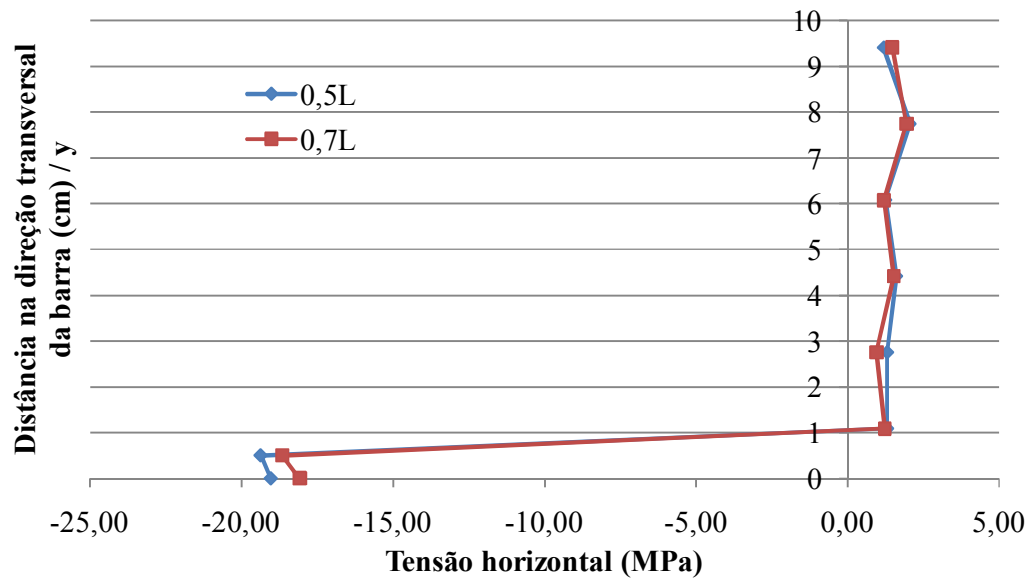


Figura 30 – Tensões horizontais médias ao longo das seções transversais.

## 5 Considerações Finais

### 5.1. Conclusões

Este trabalho apresentou uma extensão da Formulação Paramétrica da Teoria de Volumes Finitos para análise termoviscoelástica linear de estruturas constituídas de materiais heterogêneos. Expressões básicas da teoria da viscoelasticidade e de modelos reológicos viscoelásticos foram apresentadas. O modelo exposto emprega o princípio da equivalência tempo-temperatura e o método de Variáveis de Estados para avaliação das deformações viscoelásticas. A formulação foi implementada em um código computacional em linguagem C++.

Resultados de diversos exemplos numéricos criteriosamente selecionados foram apresentados e discutidos. Tais exemplos envolvem casos de estruturas constituídas por materiais homogêneos e heterogêneos em estado plano de tensão e de deformação, submetidas a cargas mecânicas e variação de temperatura. Para efeito de verificação do desempenho da formulação desenvolvida, foram efetuadas comparações dos resultados numéricos com aqueles correspondentes a soluções analíticas disponibilizadas na literatura ou deduzidas através da utilização do princípio da correspondência.

Em todos os exemplos apresentados observou-se que a formulação demonstrou um excelente desempenho, tanto no aspecto de convergência como no tempo de processamento. Os erros encontrados em relação às soluções analíticas foram consideravelmente pequenos e, como esperado, exibindo reduções com a diminuição do intervalo de tempo.

Uma dificuldade encontrada na etapa de verificação do desempenho do modelo foi motivada pela pouca disponibilidade de resultados na literatura para casos de estruturas constituídas por materiais heterogêneos viscoelásticos. No entanto, a excelente concordância dos resultados encontrados nos diferentes casos analisados leva a se concluir que a formulação deduzida é bastante promissora e merece receber continuidade de investigação para eventuais aprimoramentos e extensão para incorporação de outros efeitos e ampliação para análise tridimensional.



## **5.2. Sugestões para Trabalhos Futuros**

Para dar continuidade deste trabalho algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Implementação de uma formulação que leve em consideração grandes deformações;
- Extensão do modelo para incorporar efeitos de dano e envelhecimento;
- Generalizar a implementação para modelos tridimensionais.

## 6 Referências Bibliográficas

Bansal, Y. and Pindera, M.-J. 2003. Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-Order Theory for FGMs. *J. Therm. Stresses*, 26(11/12), pp. 1055-1092.

Barbero, E. J. (2007). *Finite Element Analysis of Composite Materials*. CRC, Boca Raton, FL, 2007.

Brinson, L. C. and Lin, W. S. (1998). Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Compos. Struct.* 41, 353-367.

Cavalcante, M. A. A., 2006. *Modelagem do Comportamento Termo-Mecânico Transiente de Estruturas de Materiais Compósitos pela Teoria de Volumes Finitos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFAL. (<http://www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec/download/Dissertacoes/Marcio%20Andre%20Araujo%20Cavalcante.pdf>).

Cavalcante, M A. A., Marques, S. P. C and Pindera, M. J, 2007a. Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials---Part I: Analysis. *J. Appl. Mech.* 74, 935 (2007), DOI:10.1115/1.2722312.

Cavalcante, M A. A., Marques, S. P. C and Pindera, M. J, 2007b. Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials---Part II: Numerical Results. *J. Appl. Mech.* 74, 946 (2007), DOI:10.1115/1.2722313.

Chandra, R., Singh, S. P. and Gupta, K. (2002). Micromechanical damping models for fiber-reinforced composites: a comparative study. *Composites – Part A* 33, 787-796.

Christensen, R. M. (1969). Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 17, 23-41.

Creus, G. J. (1986). *Lecture notes in engineering: viscoelasticity – basic theory and applications to concrete structures*. Berlin: Springer-Verlag.

Crossman, F. W., Mauri, R. E. and Warren, W. J. (1978). "Moisture-Altered Viscoelastic Response of Graphite/Epoxy Composites", *Advanced Composite Materials - Environmental Effects*, ASTM, STP 658, J. R. Vinson, Ed., pp. 205-220, 1978.

DeBotton, G. and Tevet-Deree, L. (2004). The response of a fiber-reinforced composite with a viscoelastic matrix phase. *J. Compos. Mater.* 38, 1255-1277.

Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an elliptical inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. Lond.* A241, 376-396.

Findley, W. N.; Lai, J.S. and Onaran, K. (1976). "Creep and Relaxation of Nonlinear, Viscoelastic Materials". North-Holland Publ. Cop., 367 p.

Flügge, W. (1975). *Viscoelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1975.

Gibiansky, L., Milton, G. and Berryman, J. (1999). On the effective viscoelastic moduli of two-phase media: III. Rigorous bounds on the complex shear modulus in two dimensions. *Proc. Roy. Soc. Lond.* A455, 2117-2149.

Halpin, J. C. (1968). "Introduction to Viscoelasticity". *Composite Materials Workshop*, Technomic Publishing Co., Inc., pp 87-152, 1968.

Hashin, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics* 29, 143-150.

Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*, 33, 3125-3131.

Hashin, Z. (1965). Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME* 32E, 630-663.

Hashin, Z. (1970). Complex moduli of viscoelastic composites – I. General theory and application to particulate composites. *Int. J. Solids Struct.* 6, 539-552.

Lahellec, N. and Suquet, P. (2007). Effective behavior of linear viscoelastic composites: A time integration approach. *Int. J. Sol. Struct.* 44, 507-529.

Laws, N. and Mc Laughlin, R. (1978). Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliance of composite materials. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 359, 251-273.

Lin, K. Y. and Hwang, I. H. (1989). "Thermo-Viscoelastic Analysis of Composite Materials, Vol. 23 - June, pp 554-569, 1989.

Marques, S. P. C. (1994) "Um Modelo Numérico para Análise de Estruturas de Materiais Compostos Considerando Efeitos Viscoelásticos e Falhas Progressivas". Tese de Doutorado, UFRGS, Porto Alegre/RS/Brasil.

Marques, S. P. C. and Creus, G. J. (1994). Geometrically Nonlinear Finite Elements Analysis of Viscoelastic Composite Materials under Mechanical and Hygrothermal Loads. *Computers and Structures*, v. 53, n. 2, p. 449-456.

Mase, G.T. and Mase, G.N. (1999). *Continuum Mechanics for Engineers*, 2nd. Edition, CRC Press, 1999, ISBN 0-8493-1855-6.

Masuro, J. R. and Creus, G. J. (1993). Finite Elements Analysis of Viscoelastic Fracture. *International Journal of Fracture*, London, v. 60, p. 267-282, 1993.

Morland, L. W. and Lee, E. H. (1960). "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation", *Trans. Soc. Rheology*, Vol. 4, pp. 223, 1960.

Muki, R. and Sternberg, E. (1961). "On Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Materials with Temperature-Dependent Properties", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 193-207, June, 1961.

Oden, J. T., Vemaganti, K. and Moës, N. (1999). Hierarchical modeling in heterogeneous solids. *Computer Methods Appl. Mech. Engrg.*, 172, 3-25.

Romkes, A., Oden, J. T. and Vemaganti, K. (2006). Multi-scale goal-oriented adaptive modeling of random heterogeneous materials. *J. Mech. Mater*, 38, 859-872.

Rougier, Y., Stolz, C. and Zaoui, A. (1993). Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. *CR Acad. Sci. Paris IIb* 316, 1517-1522.

Schapery, R. A. (1967). Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials. *Journal of Composite Materials*, 1, 228-267.

Schapery, R. A. (1968). "Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials", *Composite Materials Workshop*, Technomic Publishing Co., Inc., pp. 87-152, 1968.

Shames, I. H. and Cozzarelli, F. A. (1997). "Elastic and Inelastic Stress Analysis", Prentice-Hall, 1997.

Zhong, Y., Bansal, Y. and Pindera, J.-M. (2004). Efficient Reformulation of the Thermal Higher-Order Theory for FGMs with Variable Thermal Conductivity, *Int. J. Comput. Eng. Sci.*, 5(4), pp. 795-831.

## 7 Apêndices

### 7.1. Apêncide A: Derivada das Variáveis de Estado

Partindo-se das Equações (2.53) e (2.51), pode-se encontrar o incremento das variáveis de estado, como:

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) - \varphi_{ij}^p(t) = \int_0^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau - \int_0^t F_{ij}^p(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau$$

ou

(A.1)

$$\Delta\varphi_{ij}^p = \int_0^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau - \int_0^t F_{ij}^p(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau$$

Dividindo-se em duas partes a integral  $\int_0^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau$ , uma de  $[0, t]$  e outra de  $[t, t + \Delta t]$ , chega-se a:

$$\Delta\varphi_{ij}^p = \int_0^t F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau - \int_0^t F_{ij}^p(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau$$
(A.2)

Com isso, a integral  $\int_t^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau$  pode ser aproximada por

$$\int_t^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \cong F_{ij}^p(t, \tau) \sigma(t) \Delta t$$
(A.3)

Reescrevendo-se, tem-se:

$$\Delta\varphi_{ij}^p = F_{ij}^p(t, \tau) \sigma(t) \Delta t + \int_0^t \left[ F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma(\tau) - F_{ij}^p(t, \tau) \sigma(\tau) \right] d\tau$$
(A.4)

Como, no integrando, tem-se a variação de  $F_{ij}^p$ , pode-se reescrever como:

$$\Delta\varphi_{ij}^p = F_{ij}^p(t, \tau)\sigma(t)\Delta t + \int_0^t \left[ \frac{\partial F_{ij}^p(t, \tau)}{\partial t} \Delta t \sigma(\tau) \right] d\tau \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, tem-se:

$$\frac{\Delta\varphi_{ij}^p}{\Delta t} = F_{ij}^p(t, \tau)\sigma(t) + \int_0^t \left[ \frac{\partial F_{ij}^p(t, \tau)}{\partial t} \sigma(\tau) \right] d\tau \quad (\text{A.6})$$

Substituindo-se  $F_{ij}^p(t, t)$  e sua derivada, pode-se chegar à:

$$\frac{d\varphi_{ij}^p}{dt} = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \sigma(t) - \frac{1}{\theta_{ij}^p} \frac{d\zeta_{ij}}{dt} \int_0^t \left[ \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij}-\zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \sigma(\tau) \right] d\tau \quad (\text{A.7})$$

onde a Equação (A.7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d\varphi_{ij}^p}{dt} = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \sigma(t) - \frac{1}{\theta_{ij}^p} \frac{d\zeta_{ij}}{dt} \varphi_{ij}^p(t) \quad (\text{A.8})$$

Substituindo-se na Equação (A.8) a (2.47), chega-se a:

$$\frac{d\varphi_{ij}^p}{dt} + \frac{1}{\theta_{ij}^p \chi_{ij}(T, H)} \varphi_{ij}^p(t) = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \sigma(t) \quad (\text{A.9})$$

ou

$$\frac{\partial \varphi_{ij}^p}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{ij}^p \chi_{ij}(T, H)} \varphi_{ij}^p(t) = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \sigma(t)$$

## 7.2. Apêndice B: Variáveis de Estado correspondente ao tempo $t+\Delta t$

A partir da Equação (2.53), para um tempo  $t + \Delta t$ , tem-se:

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (\text{B.1})$$

Dessa maneira, pode-se dividir o integrando em duas partes, uma de  $[0, t]$  e outra de  $[t, t + \Delta t]$ , chegando-se a:

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \int_0^t F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma_j(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (\text{B.2})$$

Substituindo-se o valor de  $F_{ij}^p(t + \Delta t, \tau)$  na equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = & \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} + \Delta\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \sigma_j(\tau) d\tau \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} + \Delta\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} d\tau \sigma_j(t) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como o intervalo  $\Delta t$  é pequeno, a tensão é praticamente constante, logo a mesma pode ser retirada do integrando. Com isso e algumas manipulações matemáticas, pode-se encontrar a seguinte expressão:

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \varphi_{ij}^p(t) e^{-\left(\frac{\Delta\zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} + \int_t^{t+\Delta t} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} e^{-\left(\frac{\zeta_{ij} + \Delta\zeta_{ij} - \zeta'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \frac{d\xi}{d\tau} d\tau \sigma_j(t) \quad (\text{B.4})$$

O termo  $\frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p}$  pode ser retirado da integral, uma vez que o mesmo é constante, e utilizando-se a Equação (2.47), pode-se reescrever a Equação (B.4), chegando a



$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \varphi_{ij}^p(t) e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} + D_{ij}^p \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \right] \sigma_j(t) \quad (\text{B.5})$$

### 7.3. Apêndice C: Transformação de Coordenadas em Subvolume

De acordo com a Figura 14, a parametrização da geometria do subvolume é feita utilizando-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} x(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)x_1 + N_2(\eta, \xi)x_2 + N_3(\eta, \xi)x_3 + N_4(\eta, \xi)x_4 \\ y(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)y_1 + N_2(\eta, \xi)y_2 + N_3(\eta, \xi)y_3 + N_4(\eta, \xi)y_4 \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde os  $N_i$  são as funções de forma, dadas por:

$$\begin{aligned} N_1(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \xi) \\ N_2(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_3(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi) \\ N_4(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \xi) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Aplicando-se a regra da cadeia, podem-se obter as derivadas de um campo qualquer  $F$  em relação às coordenadas paramétricas, como seguem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Representando-se as equações acima na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

onde  $[J]$  é a matriz Jacobiana, dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2\xi & A_4 + A_5\xi \\ A_3 + A_2\eta & A_6 + A_5\eta \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

com

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \\ A_2 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ A_3 &= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ A_4 &= \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \\ A_5 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ A_6 &= \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) \end{aligned} \quad (C.6)$$

onde os  $x_i$  e  $y_i$  da Equação (C.6) representam as coordenadas dos nós do subvolume.

De acordo com Cavalcante (2006), admite-se um valor constante para a matriz Jacobiana, que pode ser avaliada de forma aproximada para qualquer ponto dentro do subvolume como segue:

$$[J] \approx [\langle J \rangle] = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [J] d\eta d\xi = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_6 \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Assim, a matriz inversa da Jacobiana pode ser estimada por:

$$[J]^{-1} \approx [\bar{J}] = [\langle J \rangle]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_6}{A_7} & -\frac{A_4}{A_7} \\ -\frac{A_3}{A_7} & \frac{A_1}{A_7} \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

onde

$$A_7 = A_1 A_6 - A_3 A_4 \quad (\text{C.9})$$

Dessa forma, pode-se encontrar a seguinte relação a partir da Equação (C.4).

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

#### 7.4. Apêndice D: Matrizes para a Formulação Viscoelástica da Teoria de Volumes Finitos

$$[D] = \begin{bmatrix} [D|_{f=1}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [D|_{f=2}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [D|_{f=3}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [D|_{f=4}] \end{bmatrix} \quad (D.1)$$

onde  $[D]$  é a matriz composta pelas normais em cada face do subvolume e tem a seguinte forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [C] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [C] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

onde cada  $[C]$  é a matriz constitutiva do material do subvolume, como se segue:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} [E] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [E] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [E] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [E] \end{bmatrix} \quad (D.5)$$

onde cada  $[E]$  é a seguinte matriz:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.6)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\bar{J}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{J}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{J}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\bar{J}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{J}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{J}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{J}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\bar{J}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

onde cada  $[\bar{J}]$  é a matriz inversa da matriz Jacobiana.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [A|_{f=1}] & [0] \\ [0] & [A|_{f=1}] \\ [A|_{f=2}] & [0] \\ [0] & [A|_{f=2}] \\ [A|_{f=3}] & [0] \\ [0] & [A|_{f=3}] \\ [A|_{f=4}] & [0] \\ [0] & [A|_{f=4}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

onde as matrizes  $[A]$  encontram-se nas Equações (3.28) e (3.29).

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{F}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{F}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\mathbf{F}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\mathbf{F}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$[\langle \mathbf{r}(t) \rangle] = \begin{bmatrix} [\langle \mathbf{r}(t) \rangle_{f=1}] \\ [\langle \mathbf{r}(t) \rangle_{f=2}] \\ [\langle \mathbf{r}(t) \rangle_{f=3}] \\ [\langle \mathbf{r}(t) \rangle_{f=4}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

$$[\mathbf{S}^p(t)] = \begin{bmatrix} [S^p(t)_{f=1}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [S^p(t)_{f=2}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [S^p(t)_{f=3}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [S^p(t)_{f=4}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$[\mathbf{R}^p] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}^p] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\mathbf{R}^p] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\mathbf{R}^p] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\mathbf{R}^p] \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

## 7.5. Apêndice E: Algoritmo Incremental da Teoria de Volumes Finitos para Viscoelasticidade Linear pelo Método das Variáveis de Estado

Tabela 7.1 – Algoritmo incremental.

<p><b>Inicialização</b></p> <p>Inicialização dos vetores dos coeficientes e das deformações viscoelásticas.</p> $\{\Delta U_{i(ab)}\}, \{\varepsilon^V(t)\}$ <p>1. Montagem das matrizes necessárias para a Formulação Paramétrica da Teoria de Volumes Finitos</p> $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}], [\mathbf{D}], [\mathbf{E}], [\mathbf{P}], [\mathbf{M}], [\mathbf{N}].$ <p>2. Montagem da matriz de rigidez local e global</p> $\begin{aligned} [\bar{\mathbf{A}}] &= [\mathbf{D}][\mathbf{C}][\mathbf{E}][\mathbf{B}][\mathbf{A}] \\ [\bar{\mathbf{B}}] &= [\mathbf{P}] - [\mathbf{N}][\Phi]^{-1}[\Theta][\mathbf{M}] \\ [\mathbf{K}] &= [\bar{\mathbf{A}}][\bar{\mathbf{B}}] \end{aligned}$ <p><b>Processo Incremental</b></p> <p>3. Montagem do vetor de “forças” iniciais e resolução do sistema para o passo <math>t</math> (Equações (3.70) e (3.68))</p> $\begin{aligned} \{\Delta t\}^{(0)} &= [\bar{\mathbf{A}}][\mathbf{N}][\Phi]^{-1}\{\Delta \psi\} + [\mathbf{D}][\mathbf{C}](\{\Delta \varepsilon^T\} + \{\Delta \varepsilon^V\}) \\ \{\Delta t\} &= [\mathbf{K}]\{\Delta u\} - \{\Delta t\}^{(0)} \end{aligned}$ <p>4. Cálculo e atualização das informações relativas a cada subvolume</p> <p>4.1. Cálculo dos coeficientes do campo de deslocamento incremental</p> $\{\Delta U_{i(ab)}\} = [\bar{\mathbf{B}}]\{\Delta u_{iFj}\} - [\mathbf{N}][\Phi]^{-1}\{\Delta \psi\}$ <p>4.2. Cálculo dos incrementos de deslocamentos</p> $\Delta u_i = \Delta U_{i(00)} + \eta \Delta U_{i(10)} + \xi \Delta U_{i(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\Delta U_{i(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)\Delta U_{i(02)}$ <p>4.3. Cálculo dos incrementos e dos valores totais das deformações</p> $\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \\ \{\varepsilon(t)\} &= \{\varepsilon(t - \Delta t)\} + \{\Delta \varepsilon\} \end{aligned}$ <p>4.4. Cálculo dos valores totais das tensões (Equação (3.9))</p> $\{\sigma(t)\} = [\mathbf{C}](\{\varepsilon(t)\} - \{\varepsilon^T(t)\}) - \{\varepsilon^V(t)\}$
---



5. Passo incremental ( $t + \Delta t$ )

5.1. Cálculo das deformações viscoelásticas

$$\varphi_{ij}^p(t + \Delta t) = \varphi_{ij}^p(t) e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} + D_{ij}^p \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)} \right] \sigma_j(t)$$

$$\{\varepsilon^V(t + \Delta t)\} = \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}^p(t + \Delta t)$$

6. Repetição dos procedimentos 3-5 até que o tempo de análise atinja o tempo total.