

**JOSÉ ADEILDO DE AMORIM**

**APLICAÇÃO DE MODELOS COESIVOS  
INTRÍNSECOS NA SIMULAÇÃO DA  
PROPAGAÇÃO DINÂMICA DE FRATURAS**

Maceió-AL, setembro de 2007.

**JOSÉ ADEILDO DE AMORIM**

**APLICAÇÃO DE MODELOS COESIVOS  
INTRÍNSECOS NA SIMULAÇÃO DA  
PROPAGAÇÃO DINÂMICA DE FRATURAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil na Área  
de Concentração Estruturas.

Orientador:

**Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior**

Co-orientador:

**Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**

Maceió-AL, setembro de 2007.

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A524a Amorim, José Adeildo de.  
Aplicação de modelos coesivos intrínsecos na simulação da propagação  
dinâmica de fraturas / José Adeildo de Amorim. – Maceió, 2007.  
140 f. : tabs., graf.

Orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior.

Co-Orientador: Eduardo Nobre Lages.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade  
Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2007.

Bibliografia: f. 134-140.

1. Mecânica da fratura. 2. Método dos elementos finitos. 3. Propagação  
dinâmica de fraturas. 4. Programação orientada a objetos (Computação).  
5. Modelos de zona coesiva. I. Título.

CDU: 620.172.24/.254



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGEC  
Campus A. C. Simões  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
Tel/Fax: (82) 3214-1276  
E-mail: ppgec@ctec.ufal.br  
Homepage: <http://www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec>



Membros da Banca de Exame da Dissertação de Mestrado do Engenheiro Civil **JOSÉ ADEILDO DE AMORIM**, intitulada **APLICAÇÃO DE MODELOS COESIVOS INTRÍNSECOS NA SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DINÂMICA DE FRATURAS**, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Alagoas, no dia 06 do mês de setembro do ano de 2007, às 9 horas, na Sala de Aula do PPGEC/CTEC/UFAL.

**MEMBROS DA BANCA:**

**Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior**  
Orientador – CTEC/UFAL  
CPF: 332.107.724-87

**Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages**  
Co-orientador – CTEC/UFAL  
CPF: 575.783.974-00

**Prof. Dr. Guillermo Juan Creus**  
UFRGS  
CPF: 237.963.750-49

**Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato**  
CTEC/UFAL  
CPF: 383.107.164-00

A minha mulher, Bruna, e aos  
meus pais, Adelino e Nilce.

## AGRADECIMENTOS

A Deus por sempre ter estado comigo, pelas oportunidades que me oferece e por sempre lembrar de mim, até mesmo quando não sou merecedor.

À Bruna, não somente por estar sempre ao meu lado, mas, principalmente, por ser companheira, amiga, conselheira, crítica, amorosa e por ter tido a paciência de ler e reler este trabalho – um verdadeiro fardo para uma Arquiteta e Urbanista em pleno mestrado.

A minha mãe, por sempre me mostrar os caminhos certos, pela fé que deposita em mim e nos meus trabalhos, e pelo seu exemplo de vida que me orgulha muito.

Aos orientadores deste trabalho, Prof. Adeildo Soares Ramos Júnior e Prof. Eduardo Nobre Lages, pelas orientações, pelos conhecimentos transmitidos e pela dedicação a esta pesquisa.

Aos professores que ministraram disciplinas durante o mestrado, as quais foram importantes nesta etapa de minha formação acadêmica, Adeildo Soares Ramos Júnior, Eduardo Nobre Lages, Eduardo Setton Sampaio da Silveira, João Carlos Cordeiro Barbirato, Severino Pereira Cavalcanti Marques e William Wagner Matos Lira.

Ao Prof. William Wagner Matos Lira, por ter me orientado na pesquisa de desenvolvimento do DemView, a qual aumentou bastante meus conhecimentos, tanto sob o aspecto das técnicas computacionais de visualização quanto sobre o aprendizado da linguagem de programação C++.

Ao Prof. Guillermo Juan Creus (UFRGS), por ter ministrado o curso de Mecânica da Fratura que formou a base inicial deste trabalho.

Ao Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques, pelas diversas orientações e conselhos ao longo deste mestrado.

À Prof<sup>ª</sup>. Viviane Carrilho Leão Ramos, pelos conselhos e orientações desde os tempos do PEC/Engenharia Civil/UFAL.

Ao Prof. Eduardo Setton Sampaio da Silveira, pelas oportunidades a mim concedidas no LCCV/UFAL

Ao colega de profissão, Eng. Civil Jerônimo Peixoto Athayde Pereira (Illinois), pela amizade e pelos diversos artigos sobre Mecânica da Fratura que me forneceu.

Aos colegas do mestrado e do LCCV/UFAL, com os quais aprendi bastante e convivi nesses últimos anos.

Ao CNPq, pelos apoios financeiros nas pesquisas anteriores de iniciação científica, e à Capes e ao LCCV/UFAL, pelos apoios financeiros a esta pesquisa e pela infra-estrutura disponibilizada para realização da mesma.

Se não obtiveste a resposta para o teu problema, é porque ainda não pediste com fé a orientação de Deus.



## RESUMO

Os fenômenos estudados pela Mecânica da Fratura podem ser observados na própria Natureza, em sistemas de altíssimo padrão tecnológico, bem como em estruturas mais tradicionais. Dessa forma, os engenheiros devem estar alerta para investigar a variedade de mecanismos complexos, relacionados aos processos de fratura, que podem surgir nesses sistemas. Nesse sentido, a possibilidade de falha precisa ser encarada como uma premissa real a ser observada não somente nas etapas de projeto, mas durante toda vida útil das estruturas. Sem dúvida, para auxiliar nessa tarefa, a Mecânica da Fratura pode ser utilizada através da realização de prognósticos dos potenciais padrões de propagação de trincas, verificando a existência ou não de risco de manter determinada estrutura em serviço. Uma formulação alternativa que vem sendo amplamente empregada para a simulação do comportamento a fratura é a de Modelos de Zona Coesiva. Estes formam um ramo da Mecânica da Fratura originalmente proposto por Barenblatt (1959, 1962) e Dugdale (1960), e que depois dos trabalhos de Xu e Needleman (1993, 1994) tem recebido uma grande aceitação no meio científico. Assim sendo, o presente trabalho emprega o modelo coesivo de Xu e Needleman para simulação da propagação dinâmica de fraturas em matérias frágeis, dando início a construção do DyCOH (*Software for Simulation of Dynamic Cohesive Fracture*). Este é concebido com base nos conceitos de programação orientada a objetos, visando facilitar o reuso e a extensibilidade do código base. Através do DyCOH, duas aplicações numéricas são realizadas. Na primeira, o problema clássico de Xu e Needleman é simulado e os resultados obtidos pelo DyCOH são comparados com os disponíveis na literatura técnica, de forma a realizar a verificação numérica do código. No segundo, um problema mais simples é estudado com objetivo de entender a influência da velocidade de aplicação do carregamento no padrão de fraturamento de um tirante, permitindo observar a capacidade do DyCOH em reproduzir um exemplo mais didático.

**Palavras-chave:** Mecânica da Fratura, Propagação Dinâmica de Fraturas, Modelos de Zona Coesiva, Método dos Elementos Finitos, Programação Orientada a Objetos.

## ABSTRACT

The phenomena studied in Fracture Mechanics can be observed either in Nature, the most sophisticated systems or ordinary structures. As a consequence, Engineers need to be alert for investigating the variety of complex mechanisms, related with fracture processes, which are capable of appearing in these systems. The possibility of failure is a real premise has to be considered not only in the design of structures, but also throughout their life. Undoubtedly, in this context Fracture Mechanics should be used to carry out prognostics of potential crack propagation patterns, verifying if there exists or not risk of keeping a structure in service usage. An alternative formulation widely applied to simulate fracture behavior is the Cohesive Zone Modeling (CZM) approach. It is a scientific branch of Fracture Mechanics originally proposed by Barenblatt (1959, 1962) and Dugdale (1960), and which after Xu and Needleman's works (1993, 1994) has acquired a great acceptance in scientific community. For this reason, the present work employs Xu and Needleman's model to simulate dynamic crack propagation in brittle materials, introducing the Software for Simulation of Dynamic Cohesive Fracture (DyCOH), which is based on Object-Oriented Programming (OOP) paradigm for facilitating future reuse and extension of implemented code. Using DyCOH software two numerical applications are shown. First, for verification purpose, the classical Xu and Needleman's problem is simulated and the response of DyCOH is compared with literature results. Second, for didactic aspiration, a simpler problem is studied in order to understand the influence of loading speed on fracture patterns of a tie-bar.

**Keywords:** Fracture Mechanics, Dynamic Crack Propagation, Cohesive Zone Modeling, Finite Element Method, Object-Oriented Programming.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – <i>The Great Crack</i> : ao sudoeste do vulcão Kilauea, esta fratura possui aproximadamente 13 km de comprimento, 15 m de largura e 20 m de profundidade. ....	1
Figura 1.2 – (a) Pequena trinca de 0,2 polegadas encontrada no sistema de propulsão do ônibus espacial <i>Discovery</i> , (b) detalhe da trinca amplificada em 30 vezes e (c) detalhe da trinca amplificada em 100 vezes. ....	2
Figura 2.1 – Modelo de Dugdale: (a) Descrição geométrica da região de fraturamento efetivo, (b) Sistema de forças atuantes durante o processamento da fratura. ....	10
Figura 2.2 – Reprodução da validação dos resultados de Dugdale. ....	11
Figura 2.3 – Modelo do contorno da superfície fraturada na Teoria de Barenblatt. ....	13
Figura 2.4 – Detalhe da forma da ponta da trinca segundo a Teoria de Barenblatt. ....	14
Figura 2.5 – Forças coesivas geradas quando ocorre o afastamento entre planos atômicos em um cristal perfeito. ....	15
Figura 2.6 – Esquema para estudo do equilíbrio de uma fratura axissimétrica. ....	17
Figura 2.7 – Trajetória de equilíbrio de uma fratura axissimétrica sob tensão constante. ....	19
Figura 2.8 – (a) Contínuo discretizado com elementos finitos e elementos coesivos e (b) elemento coesivo 3D entre dois elementos finitos de volume. ....	23
Figura 2.9 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ). ....	27
Figura 2.10 – Relação normalizada da energia coesiva versus separação atômica para diferentes tipos de metais. ....	30
Figura 2.11 – Comparativo entre as trações normais para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ) utilizando um potencial polinomial (Needleman, 1987) e um potencial exponencial/polinomial (Needleman, 1990a). ....	33
Figura 2.12 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ). ....	36
Figura 2.13 – Diferentes tipos de arranjos periódicos de átomos formando estruturas cristalinas. ....	37
Figura 2.14 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ). ....	37

Figura 2.15 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).....	41
Figura 2.16 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).....	42
Figura 2.17 – Lei de separação puramente normal.....	45
Figura 2.18 – Lei de separação da interface para deslocamentos efetivos.....	47
Figura 2.19 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).....	51
Figura 2.20 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).....	52
Figura 2.21 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).....	55
Figura 2.22 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).....	56
Figura 2.23 – (a) Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ), (b) Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ). .....	59
Figura 3.1 – Representação de um sólido arbitrário não fraturado.....	65
Figura 3.2 – Representação de um sólido arbitrário com fratura coesiva.....	68
Figura 3.3 – Mapeamento das deslocabilidades de um sólido arbitrário não fraturado no regime de grandes deformações. ....	70
Figura 3.4 – Mapeamento das deslocabilidades de um sólido arbitrário fraturado no regime de grandes deformações. ....	74
Figura 4.1 – Esquema para mapeamento de um elemento coesivo linear de quatro nós. ....	92
Figura 4.2 – Mapeamento paramétrico de um elemento coesivo linear de quatro nós... 93	
Figura 4.3 – Diagrama de associação entre as classes do SOO.....	96
Figura 4.4 – Diagrama de classe de <i>DyCOH</i> .....	97
Figura 4.5 – Diagrama de classe de <i>Model</i> . ....	98
Figura 4.6 – Generalização ou herança da classe <i>TimeIntegration</i> . ....	99
Figura 4.7 – Diagrama de classe de <i>TimeIntegration</i> . ....	99
Figura 4.8 – Generalização ou herança da classe <i>Bulk</i> . ....	100

Figura 4.9 – Diagrama de classe de <i>Bulk</i> .	100
Figura 4.10 – Generalização ou herança da classe <i>Cohesive</i> .	101
Figura 4.11 – Diagrama de classe de <i>Cohesive</i> .	101
Figura 4.12 – Generalização ou herança da classe <i>CZM</i> .	101
Figura 4.13 – Diagrama de classe de <i>CZM</i> .	102
Figura 5.1 – Chapa trincada e tracionada de Xu e Needleman.	104
Figura 5.2 – Condições de contorno do problema considerando a simetria em relação ao eixo vertical $y$ .	106
Figura 5.3 – Malha empregada nas análises: 6.400 elementos finitos T3, 9.520 elementos coesivos, 19.200 nós, totalizando 38.400 graus de liberdade.	107
Figura 5.4 – Tensões obtidas por uma análise convencional do MEF para $t = 3,5\mu s$ .	109
Figura 5.5 – Tensões obtidas por uma análise do MEF com elementos coesivos para $t = 3,5\mu s$ .	109
Figura 5.6 – Estudo comparativo das tensões $\sigma_{22}$ ao longo da altura da chapa em $x = 2\text{mm}$ para uma análise convencional de elementos finitos: (a) resultados obtidos pelo presente trabalho (DyCOH), (b) resultados apresentados no trabalho de Xu e Needleman (1994).	110
Figura 5.7 – Estudo comparativo das tensões $\sigma_{22}$ ao longo da altura da chapa em $x = 2\text{mm}$ para uma análise com elementos finitos e coesivos: (a) resultados obtidos pelo presente trabalho (DyCOH), (b) resultados apresentados no trabalho de Xu e Needleman (1994).	111
Figura 5.8 – Estágios de fraturamento para $V_2 = -V_1 = 1\text{m/s}$ .	115
Figura 5.9 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para uma intensidade máxima de impacto $V_2 = -V_1 = 1\text{m/s}$ : (a) resultados do presente trabalho (DyCOH), (b) resultados de Zhang (2003) e (c) resultados de Xu e Needleman (1994).	116
Figura 5.10 – Estágios de fraturamento para $V_2 = -V_1 = 5\text{m/s}$ .	118
Figura 5.11 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto $V_2 = -V_1 = 5\text{m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Zhang (2003).	119

Figura 5.12 – Detalhes amplificados em 3 vezes para o estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Zhang (2003). .....	120
Figura 5.13 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Zhang (2003). .....	121
Figura 5.14 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Xu e Needleman (1994). .....	122
Figura 5.15 – Condições de contorno do tirante. ....	125
Figura 5.16 – Tirante discretizado em 8 elementos finitos do tipo T3, 9 elementos coesivos e 24 nós, totalizando 48 graus de liberdade. ....	125
Figura 5.18 – Aceleração na extremidade direita do tirante para aplicação quase-estática da carga. ....	127
Figura 5.19 – Histórico de carga para as situações quase-estática e de impacto. ....	128
Figura 5.20 – Estágios de fraturamento sob impacto. ....	128
Figura 5.21 – Aceleração na extremidade direita do tirante para aplicação da carga de impacto. ....	129

## **LISTA DE QUADROS E TABELAS**

Quadro 4.1 – Algoritmo para o Método da Diferença Central.....	88
Tabela 4.1 – Regra de integração gaussiana para elementos coesivos lineares. ....	95
Tabela 5.1 – Resumo dos dados da morfologia da propagação da trinca. ....	123
Tabela 5.2 – Resumo dos dados de fraturamento do tirante para carga quase-estática e sob forma de impacto.....	129

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Comprimento da trinca
$a_{ef}$	Comprimento efetivo da trinca
$a_0$	Metade do comprimento inicial de uma trinca
$\underline{a}$	Separação interatômica
$\underline{a}^*$	Valor normalizado da separação interatômica
$\bar{\alpha}$	Coefficiente de cisalhamento relativo à rigidez normal da interface
$b$	Distância intermolecular
$\underline{\mathbf{B}}$	Matriz de que transforma $\mathbf{u}_g$ em $\Delta u_T$ e $\Delta u_N$
$\mathbf{B}_{NL}$	Matriz que transforma os deslocamentos em deformações para o regime de grandes deformações
$\beta$	Distância do plano de fratura ao contorno da superfície fraturada
$\bar{\beta}$	Parâmetro de cisalhamento do modelo
$\underline{\beta}$	Parâmetro de calibração da energia de ligação interatômica
$\beta_T$	Fator de tensão cisalhante
$c_i^\alpha$	Coordenada do nó $\alpha$
$C_d$	Velocidade de propagação de onda
$d$	Comprimento da ponta da trinca na Teoria de Barenblatt
$d_i^\alpha$	Deslocamento do nó $\alpha$
$\delta$	Comprimento característico do modelo de zona coesiva
$\delta_N$	Comprimento característico do modelo de zona coesiva na direção normal
$\delta_T$	Comprimento característico do modelo de zona coesiva na direção tangencial
$\delta_N^{cr}$	Comprimento característico crítico do modelo de zona coesiva na direção normal
$\delta_T^{cr}$	Comprimento característico crítico do modelo de zona coesiva na direção tangencial



$\delta_N^1$	Comprimento característico do modelo de zona coesiva na direção normal para o primeiro trecho
$\delta_N^2$	Comprimento característico do modelo de zona coesiva na direção normal para o segundo trecho
$\Delta u_N$	Abertura normal à interface coesiva (deslocamento relativo na direção local N de um ponto qualquer na interface)
$\Delta u_N^{\max}$	Máxima abertura normal à interface coesiva registrada em toda a análise
$\Delta u_T$	Abertura tangencial à interface coesiva (deslocamento relativo na direção local T de um ponto qualquer na interface)
$\Delta \mathbf{u}_{AB}$	Vetor dos deslocamentos relativos entre pontos A e B de lados opostos da interface
$\Delta \dot{u}_N$	Incremento da abertura normal à interface coesiva
$\Delta \dot{u}_T$	Incremento da abertura tangencial à interface coesiva
$\Delta u_N^*$	Valor de $\Delta u_N$ obtido depois de promover um cisalhamento de $\Delta u_T = \delta_T/2$ sob cisalhamento puro para tração tangencial periódica ou valor de $\Delta u_N$ obtido depois de promover uma separação cisalhante completa sob cisalhamento puro para tração tangencial exponencial
$\Delta t$	Incremento de tempo
$\Delta t_{cr}$	Incremento de tempo crítico
$\Delta t^{(\text{adotado})}$	Incremento de tempo utilizado
$\Delta t_{cr}^{(\max)}$	Máximo incremento de tempo permitido pela condição de estabilidade
$\Delta u_X^{(1,4)}$	Deslocamento relativo na direção global X para os nós 1 e 4
$\Delta u_X^{(2,3)}$	Deslocamento relativo na direção global X para os nós 2 e 3
$\Delta u_Y^{(1,4)}$	Deslocamento relativo na direção global Y para os nós 1 e 4
$\Delta u_Y^{(2,3)}$	Deslocamento relativo na direção global Y para os nós 2 e 3
$\Delta u_X$	Deslocamento relativo na direção global X de um ponto qualquer na interface
$\Delta u_Y$	Deslocamento relativo na direção global Y de um ponto qualquer na interface

$\delta u_i$	Componentes dos deslocamentos virtuais
$\delta \varepsilon_{ij}$	Variação das componentes do tensor de deformações virtuais
$\delta_{ij}$	Delta de kronecker
$D_{ij}$	Componentes do tensor gradiente de deslocamentos
$\delta D_{ij}$	Variação das componentes do tensor gradiente de deslocamentos
$\delta E_{ij}$	Variação das componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange
$\delta \mathbf{E}$	Forma vetorial da variação do tensor de deformações de Green-Lagrange
$e$	Constante matemática neperiana ou número de Euler
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
$E_c$	Energia coesiva ou de ligação interatômica
$\frac{E_c}{E}$	Valor normalizado da energia coesiva ou de ligação interatômica
$E_{ij}$	Componentes do tensor Lagrangeano de deformações ou tensor de Green-Lagrange
$\xi$	Coordenada paramétrica horizontal
$\bar{\xi}$	Variável normalizada que representa a razão entre $r$ e $R$
$\eta$	Coordenada paramétrica vertical
$f$	Força de coesão na Teoria de Barenblatt
$f_{max}$	Intensidade máxima da força de coesão na Teoria de Barenblatt
$F$	Função para definição das trações na interface a partir do comprimento efetivo que representa sua abertura
$F_{ij}$	Componentes do tensor gradiente de deformações
$\mathbf{F}^{ext}$	Vetor de forças externas
$\mathbf{F}^{int}$	Vetor de forças internas
$\mathbf{F}^{coe}$	Vetor de forças coesivas
$\Phi$	Potencial para definição do vetor de tração na interface coesiva
$\Phi_{sep}$	Trabalho de separação da interface coesiva
$\Phi_N$	Trabalho de separação normal da interface coesiva

$\Phi_T$	Trabalho de separação tangencial da interface coesiva
$\Phi_T^I$	Energia de empilhamento instável
$G$	Distribuição de forças de coesão na Teoria de Barenblatt
$\mathcal{G}_{Ic}$	Tenacidade ou taxa crítica de energia liberada
$g$	Tensão normal à superfície da trinca para Teoria de Barenblatt
$J$	Determinante do tensor gradiente de deformações
$\bar{J}$	Determinante do jacobiano da transformação
$K$	Fator de intensidade de tensão
$K^q$	Fator de intensidade de tensão para as ações aplicadas
$K^{coe}$	Fator de intensidade de tensão para as forças de coesão
$K_{Ic}$	Tenacidade à fratura do material
$L_{co}$	Comprimento crítico no qual a onda deve propagar
$L_e$	Comprimento efetivo dos elementos finitos
$\mathbf{L}$	Matriz que transforma $\mathbf{u}_g$ nos deslocamentos relativos globais das extremidades do elemento coesivo
$\bar{\lambda}$	Comprimento efetivo que representa a abertura da interface
$\bar{\lambda}_1$	Comprimento efetivo característico que representa a abertura da interface no primeiro trecho
$\bar{\lambda}_2$	Comprimento efetivo característico que representa a abertura da interface no segundo trecho
$\dot{\bar{\lambda}}$	Incremento do comprimento efetivo que representa a abertura da interface
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$\mu$	Coefficiente de atrito
$n_p$	Número de passos de tempo
$\tilde{\mathbf{n}}$	Vetor unitário normal à superfície de contorno (generalização da trinca) na configuração deformada
$N$	Ordenada do sistema de coordenadas local do elemento coesivo
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de forma
$N_1$	Função de forma da extremidade 1-4 do elemento de interface

$N_2$	Função de forma da extremidade 2-3 do elemento de interface
$N_{\text{CFL}}$	Número de Courant-Friedrichs-Lewy
$\tilde{\mathbf{N}}$	Vetor unitário normal à superfície de contorno (generalização da trinca) na configuração indeformada
$N^\alpha$	Função de forma do nó $\alpha$
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\omega$	Frequência de vibração
$\omega_{\text{max}}^{(e)}$	Maior frequência de vibração dentre todos os elementos finitos
$\Omega$	Domínio do problema na configuração deformada
${}^0\Omega$	Domínio do problema na configuração indeformada
$p$	Tensão de compressão na superfície da trinca para Teoria de Barenblatt
$p_0$	Valor constante da tensão $p$
$P_{ij}$	Componentes do primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
$\pi$	Número que representa a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro
$q$	Razão entre a energia de empilhamento instável e o trabalho de separação normal para tração tangencial periódica ou razão entre os trabalhos de separação tangencial e normal para tração tangencial exponencial
QF	Quantidade finita qualquer da Teoria de Barenblatt
$r$	Coordenada medida do centro a extremidade da trinca
$r_0$	Comprimento da trinca onde atua a tensão $p$ na Teoria de Barenblatt
$\bar{\Gamma}$	Valor de $\Delta u_N^*/\delta_N$
$R$	Distância do centro a ponta da trinca na Teoria de Barenblatt
$R$	Tamanho máximo da zona coesiva
$\mathbf{R}$	Vetor de resíduos ou de forças desequilibradas
$\rho$	Densidade do material
$s$	Comprimento da zona plástica da Teoria de Dugdale
$\mathbf{S}$	Forma vetorial do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
$S_{ij}$	Componentes do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff

$\sigma_{ye}$	Tensão de escoamento do material
$\sigma_{max}$	Tensão de tração máxima suportada pela interface coesiva quando submetida à separação puramente normal
$\sigma_{med}$	Tensão média para o material PMMA
$\bar{\sigma}$	Tensão aplicada
$\sigma_{ef}$	Tensão efetiva
$\sigma_c$	Tensão crítica
$\sigma_N$	Tensão normal de tração em uma superfície fraturada
$\sigma_{ij}$	Componentes do tensor de tensões de Cauchy
$t$	Tempo
$\tilde{\mathbf{t}}$	Vetor unitário tangencial à superfície de contorno (generalização da trinca) na configuração deformada
$\mathbf{t}$	Vetor de tração na interface coesiva para a configuração deformada
$t_o$	Tempo de propagação de onda
$t_i^{ext}$	Componentes do tensor de trações na superfície externa da configuração deformada
$t_i^{coe}$	Componentes do tensor de trações coesivas da configuração deformada
$t_N$	Trações normais à interface coesiva
$t_T$	Trações tangenciais à interface coesiva
$t_N^n$	Tração nodal na direção normal
$t_T^n$	Tração nodal na direção tangencial
$T$	Abcissa do sistema de coordenadas local do elemento coesivo
$T_i$	Componentes do tensor de trações na configuração indeformada
$\tilde{\mathbf{T}}$	Vetor unitário tangencial à superfície de contorno (generalização da trinca) na configuração indeformada
$T_T$	Período de variação das trações cisalhantes em relação aos deslocamentos tangenciais da interface
$\mathbf{T}^{ext}$	Vetor de trações na superfície externa
$\mathbf{T}^{coe}$	Vetor de trações coesivas (na superfície fraturada)

$\bar{T}_{\min}^{(m)}$	Menor período de vibração da malha de elementos finitos
$\bar{T}$	Período de vibração
$\theta$	Ângulo formado entre o eixo médio do elemento coesivo e a origem do sistema global de referência
$\Theta$	Matriz de rotação que transforma $\Delta u_x$ em $\Delta u_T$ e $\Delta u_y$ em $\Delta u_N$
$\tau_{\max}$	Tensão cisalhante máxima suportada pela interface coesiva quando submetida à separação puramente tangencial
$\Gamma$	Superfície de contorno na configuração deformada
${}^0\Gamma$	Superfície de contorno na configuração indeformada
$\Gamma_{\text{ext}}$	Superfície de contorno presentes na superfície externa
$\Gamma_{\text{int}}$	Superfície de contorno presentes na superfície interna
$\Gamma_T^{\text{ext}}$	Condições de contorno em tração presentes na superfície externa
$\Gamma_u^{\text{ext}}$	Condições de contorno em deslocamento presentes na superfície externa
$\Gamma^{\text{coe}}$	Condições de contorno devido às forças coesivas
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor de acelerações
$\mathbf{u}_g$	Vetor de deslocamentos globais
$w$	Distribuição de deslocamentos normais à superfície fraturada
$w_i^\xi$	Peso de Gauss atribuído ao ponto de Gauss de coordenada $\xi_i$
$x_i$	Componentes das coordenadas cartesianas na configuração deformada
$X$	Abscissa do sistema de coordenadas global
$X_i$	Componentes das coordenadas cartesianas na configuração indeformada
$y$	Distância entre dois planos atômicos em um cristal perfeito
$Y$	Ordenada do sistema de coordenadas global
$\tilde{z}$	Valor de $16e/9$
$\cup$	União entre conjuntos
$\emptyset$	Conjunto vazio

# SUMÁRIO

Capítulo I.....	1
INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos.....	6
1.2 Metodologia.....	6
1.2.1 Revisão Bibliográfica.....	7
1.2.2 Implementação Computacional.....	7
1.2.3 Verificação de Resultados.....	7
1.3 Estrutura da Dissertação.....	8
Capítulo II.....	9
MODELOS DE ZONA COESIVA.....	9
2.1 Considerações Iniciais.....	9
2.2 O Surgimento das Primeiras Teorias de Fratura Coesiva.....	9
2.2.1 Teoria de Dugdale para Materiais Dúcteis.....	9
2.2.2 Teoria de Barenblatt para Materiais Frágeis.....	12
2.3 Evolução da Mecânica da Fratura Coesiva.....	20
2.3.1 Modelo Polinomial de Needleman.....	23
2.3.2 Modelo Exponencial/Polinomial de Needleman.....	29
2.3.3 Modelo Exponencial/Periódico de Needleman.....	34
2.3.4 Modelo Polinomial de Tvergaard.....	39
2.3.5 Modelo Multilinear de Tvergaard e Hutchinson.....	44
2.3.6 Modelo Multilinear com Potencial de Tvergaard e Hutchinson.....	46
2.3.7 Modelo Exponencial/Periódico de Xu e Needleman.....	49
2.3.8 Modelo Exponencial/Exponencial de Xu e Needleman.....	53
2.3.9 Modelo Rígido e Linear de Camacho e Ortiz.....	57
2.4 Modelo Coesivo Implementado.....	62
Capítulo III.....	63
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	63
3.1 Considerações Iniciais.....	63
3.2 Formulação do Problema.....	63
3.2.1 Regime de Pequenas Deformações.....	64
3.2.2 Regime de Grandes Deformações.....	69
Capítulo IV.....	77
ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	77
4.1 Considerações Iniciais.....	77
4.2 Implementação Computacional.....	77
4.2.1 Discretização Espacial do Domínio.....	79
4.2.2 Discretização do Tempo.....	83
4.2.3 Vetor de Forças Coesivas.....	91
4.2.4 Arquitetura do Sistema Orientado a Objetos.....	96
Capítulo V.....	103
APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	103
5.1 Considerações Iniciais.....	103
5.2 Chapa Tractionada de Xu e Needleman.....	103
5.2.1 Estudo de Tensões.....	106
5.2.2 Fraturamento e Ramificações de Trincas.....	112
5.3 Tirante Sujeito a Cargas Quase-Estática e de Impacto.....	124
5.3.1 Aplicação Quase-Estática da Carga.....	126

5.3.2 Aplicação da Carga sob Impacto .....	127
Capítulo VI .....	131
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	131
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	134



# Capítulo I

## INTRODUÇÃO

---

A Mecânica da Fratura configura-se como uma área do conhecimento que ao longo dos séculos tem despertado o interesse de inúmeros pesquisadores, visto que os fenômenos abordados podem ser observados na própria natureza (Figura 1.1), bem como em sistemas de altíssimo padrão tecnológico (Figura 1.2). Dentre as aplicações passíveis de serem implementadas, essa área de investigação científica apresenta como atrativo principal a possibilidade de promover o entendimento dos mecanismos de falha de estruturas ou materiais, o qual fornece subsídios que podem capacitar o engenheiro para a realização de prognósticos mais confiáveis do comportamento mecânico dos sistemas estruturais.



Figura 1.1 – *The Great Crack*: ao sudoeste do vulcão Kilauea, esta fratura possui aproximadamente 13 km de comprimento, 15 m de largura e 20 m de profundidade.

Fonte: NASA.

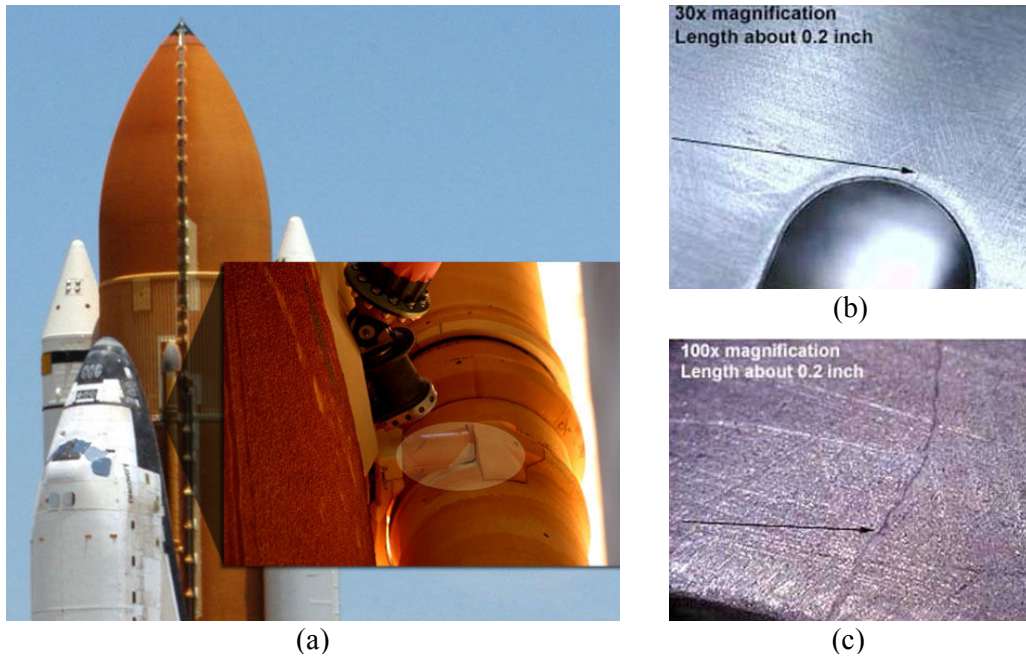


Figura 1.2 – (a) Pequena trinca de 0,2 polegadas encontrada no sistema de propulsão do ônibus espacial *Discovery*, (b) detalhe da trinca amplificada em 30 vezes e (c) detalhe da trinca amplificada em 100 vezes.

Fonte: NASA.

Prognósticos de falha podem ter um nível de importância equiparado (senão maior) às demais etapas de projeto de sistemas mecânicos e/ou estruturais, principalmente, quando adotada a premissa de proporcionar o máximo aproveitamento da capacidade de carga de uma estrutura ou material, o que se torna desejável face aos aspectos econômicos, à necessidade de minimização dos insumos empregados, dentre outros.

Antever os processos de falha com um grau de precisão que seja representativo da realidade trata-se de uma tarefa muitas vezes desafiadora. São vários os problemas da Mecânica da Fratura cujo curso investigativo, necessariamente, tende a se afastar do campo das soluções simples e se direcionar para as proximidades da gama de problemas com alto grau de complexidade, elevado custo computacional, ou até mesmo de resolução desconhecida no atual estágio do conhecimento.

Esse pensamento de busca por representações realistas que permitam prever, numericamente, a evolução da danificação mecânica ou estrutural desde a inicialização

do fenômeno apenas se torna possível devido às pesquisas precursoras que constituem a base conceitual desse ramo científico.

No campo da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), diversas pesquisas clássicas podem ser destacadas. Kirsch (1898) apud Timoshenko e Goodier (1970), ao analisar as tensões nas bordas de um furo circular, propôs uma teoria que definia o fator de concentração de tensão nessas regiões. Inglis (1913) apud Miranda (2003), Silveira (2003) e Mello (2005) generalizou a descoberta de Kirsch (1898) e apresentou o fator de concentração de tensão para um furo elíptico. Griffith (1921, 1924) apud Broek (1984), estudando o processo de fraturamento do vidro, formalizou o conceito de taxa de energia liberada por ponta de trinca, chegando a um dos primeiros critérios que caracterizam o início da propagação da fratura. Irwin (1948) e Orowan (1948) apud Miranda (2003), de maneira independente, estenderam a teoria de Griffith (1921, 1924) a partir da consideração dos efeitos do trabalho plástico no balanço energético do sistema. Westergaard (1939) apud Broek (1984) foi o primeiro a representar o campo de tensões em uma placa com um furo elíptico no centro. Irwin (1957) apud Miranda (2003) aperfeiçoou os estudos de Westergaard (1939) com a introdução do conceito de fator de intensidade de tensão, através do qual o campo de tensões para diversos problemas práticos de engenharia pôde ser obtido, bem como outro critério de definição do início da propagação da fratura foi viabilizado. Williams (1957) apud Saouma (2000), independentemente, chegou aos mesmos resultados de Irwin (1957) através do emprego do método de separação de variáveis. Dentre tais trabalhos, a comunidade científica costuma apontar os de Griffith (1921, 1924), Irwin (1957) e Williams (1957) como os que detiveram o maior grau de contribuição para o desenvolvimento da MFLE.

No entorno da ponta da trinca ocorre o aparecimento de deformações plásticas. Para tratar esse problema, estudos que se enquadram na Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP) foram realizados. Irwin (1958) apud Broek (1984) determinou de forma aproximada o comprimento da zona plástica à frente da ponta da trinca. Wells (1961, 1963) apud Broek (1984) propôs uma teoria que se baseava na determinação de um parâmetro de fratura denominado pela sigla CTOD (*Crack Tip Opening Displacement*), através do qual outro critério de verificação da condição de início da propagação da fratura foi apresentado. Rice (1968a) apud Broek (1984), baseou-se em integrais de linha formuladas por Eshelby (1974) para formular a

Integral J, teoria da MFEP que permite a determinação de mais uma condição inicial de avanço da trinca, com a vantagem de ser baseada em uma integral de linha que independe do caminho de avaliação. Hutchinson (1968), e Rice e Rosengren (1968) apud Broek (1984), individualmente, realizaram a descrição das conhecidas “Singularidades HRR” ou “Campos HRR”, que permitiram a determinação das singularidades dos campos de tensão e de deformação nas proximidades da ponta da trinca e a especificação da existência de uma zona de domínio dos resultados da Integral J. Dentre esses, os trabalhos de Rice (1968a) apud Broek (1984) e Hutchinson (1968), e Rice e Rosengren (1968) apud Broek (1984) são os que possuem maior notoriedade no meio científico.

Para suprir aspectos problemáticos da MFLE e da MFEP, tais como a existência de singularidades nos campos de tensão e deformação, Dugdale (1960) e Barenblatt (1959, 1962), de forma individual e pioneira, apresentaram os fundamentos básicos da Mecânica da Fratura Coesiva. Needleman (1987) utilizou-se dos trabalhos de Dugdale (1960) e de Barenblatt (1959, 1962) para formular um modelo polinomial puramente contínuo que empregava forças coesivas de interface, juntamente com elementos finitos, através de uma estrutura unificada que descrevia a existência de uma parcela de trabalho coesivo na expressão do princípio dos trabalhos virtuais. A relevância do trabalho de Needleman (1987) é tamanha que a grande maioria dos modelos de fratura coesiva que o sucedeu utiliza a mesma estrutura unificada proposta por esse pesquisador. O modelo de Needleman (1987) desconsiderava a possibilidade de grandes deslocamentos relativos na direção tangencial. Needleman (1990a) apresenta um modelo exponencial/polinomial que continua a possuir da mesma limitação quanto à referida deslocabilidade interfacial, porém se trata de um avanço no sentido de que a resposta normal do modelo se baseia em análises atômicas de Rose et al. (1981, 1983). Needleman (1990b) traz um modelo exponencial/periódico onde a consideração de deslocamentos tangenciais de ordem elevada é realizada de forma periódica, cuja motivação baseou-se na periodicidade dos arranjos dos átomos durante a formação de estruturas cristalinas. Tvergaard (1990) propôs um modelo polinomial que na direção normal assemelhava-se às propostas de Needleman (1987, 1990a, 1990b), porém com a vantagem de permitir não somente o estudo de problemas com grandes deslocamentos tangenciais, mas também viabilizar a ocorrência de fraturamento puramente tangencial. Tvergaard e Hutchinson (1992) descrevem um modelo de fratura coesiva multilinear

para aplicação em problemas elastoplásticos sujeitos a falhas puramente normais. Tvergaard e Hutchinson (1993) generalizaram o modelo anterior, passando a utilizar um modelo multilinear que considerava os efeitos do modo I e modo II e era dotado de um potencial para determinação do vetor de trações interfaciais. Baseando-se nos estudos de Beltz e Rice (1991) sobre cisalhamento em planos atômicos, Xu e Needleman (1993) propuseram um novo modelo exponencial/periódico, onde as características exponenciais continuam sendo determinadas pelas pesquisas de Rose et al. (1981, 1983) e as periódicas pelas de Beltz e Rice (1991). Xu e Needleman (1993) formulam também um modelo coesivo do tipo exponencial/exponencial, cujo objetivo era poder simular problemas onde a completa separação interfacial pudesse ocorrer também na direção tangencial. Com tal modelo, Xu e Needleman (1994) simularam a ramificação de trincas como um resultado natural da solução de um problema de valor de contorno inicial, dispensando a necessidade de assumir hipóteses ad hoc para descrição desse fenômeno da Mecânica da Fratura repleto de instabilidades. Camacho e Ortiz (1996) propuseram um modelo de fratura coesiva que difere de todos os seus antecessores, posto que utilizaram um critério extra para definição da situação de início de fraturamento. Nesse modelo extrínseco, fenômenos como propagação de fraturas, ramificação, fragmentação, fechamento de trincas e considerações de contato e atrito são incorporadas. A literatura científica considera que os trabalhos que trouxeram contribuições mais relevantes para este ramo da Mecânica da Fratura foram os de Dugdale (1960), Barenblatt (1959, 1962), Needleman (1987), Xu e Needleman (1993, 1994) e Camacho e Ortiz (1996).

No presente trabalho, a propagação dinâmica de fraturas é abordada segundo os conceitos da Mecânica da Fratura Coesiva, uma vez que, diante do exposto, trata-se da forma mais adequada para simular mecanismos de falha que ocorrem na realidade, tais como nucleação e ramificação de trincas e fragmentação. Além disso, tal abordagem apresenta como atrativo o fato desses fenômenos serem tratados como um resultado natural da resolução do problema de valor de contorno inicial.

Dentre os tipos de Modelos de Zona Coesiva existentes, os intrínsecos são adotados neste trabalho não somente por possuírem um critério de início da propagação de trincas internamente incorporado (KUBAIR; GEUBELLE, 2003), mas também por não necessitarem de alteração contínua da estrutura topológica do problema (CELES et

al., 2005a, 2005b), o que acarretaria em uma abrangência cujo escopo do presente estudo não pretende abordar.

São diversos os campos de pesquisa onde a simulação numérica da propagação dinâmica de fraturas coesivas pode ser aplicada, sendo uma linha de pesquisa em plena atividade e promissora para análises que envolvam fenômenos oriundos de situações de colisão, impacto e fragmentação. Estas, em particular, são de interesse de vários setores da iniciativa pública ou privada, tais como das indústrias militar, naval e de petróleo.

Neste trabalho, é desenvolvida apenas uma base que viabilize futuras aplicações em setores como os supracitados. Dessa forma, a principal contribuição do presente trabalho trata-se da elaboração completa de um programa computacional para análise dinâmica da propagação de fraturas, sendo tal desenvolvimento realizado através de uma implementação que aborda de forma unificada o Método dos Elementos Finitos e os Modelos de Zona Coesiva.

## **1.1 Objetivos**

Esta dissertação tem como objetivo geral o estudo da propagação dinâmica de fraturas através de Modelos de Zona Coesiva.

Quanto aos objetivos específicos, podem ser destacados:

- i. Estudar modelos coesivos intrínsecos, entendendo suas características, vantagens e desvantagens;
- ii. Desenvolver, desde o início, um programa bidimensional que permita realizar análises dinâmicas com elementos finitos e coesivos;
- iii. Implementar um modelo coesivo do tipo intrínseco e realizar aplicações numéricas que ilustrem a capacidade de simular problemas de propagação dinâmica de fraturas.

## **1.2 Metodologia**

Para alcançar os objetivos traçados, a metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho baseia-se em três macro-etapas distintas, porém complementares, as quais são sucintamente descritas a seguir.

### **1.2.1 Revisão Bibliográfica**

Nesta etapa inicial, são estudados os conceitos básicos necessários à formulação e implementação dos modelos coesivos intrínsecos. Para tanto, são revisados os principais trabalhos que constituem a base da Mecânica da Fratura Coesiva, sendo suas contribuições diretamente responsáveis pelo atual estágio de desenvolvimento dessa área de pesquisa científica.

### **1.2.2 Implementação Computacional**

Nesta segunda etapa, são gerados os códigos computacionais do programa de análise numérica desenvolvido para o estudo da propagação dinâmica de fraturas através de Modelos de Zona Coesiva. Esse software recebe a denominação DyCOH (*Software for Simulation of Dynamic Cohesive Fracture*), sendo utilizada a linguagem de programação C++ na sua concepção. Esta é escolhida por permitir que os conceitos de programação orientada a objetos (ELLIS; STROUSTRUP, 1993) sejam facilmente aplicados, além de proporcionar um nível de desempenho computacional compatível com o grau de complexidade dos problemas a serem abordados. O DyCOH caracteriza-se como um sistema computacional completamente desenvolvido neste trabalho e que permite o tratamento unificado entre o Método dos Elementos Finitos (para pequenas ou grandes deformações) e os Modelos de Zona Coesiva, podendo ser aplicado em análises dinâmicas que envolvam ou não fraturamento. Nesta pesquisa, a versão inicial do DyCOH é concebida para análises bidimensionais, porém o desenvolvimento da mesma é idealizado de forma a viabilizar sua expansão tridimensional através de alterações pontuais e bem orientadas. O desenvolvimento computacional realizado concentra-se na fase de análise numérica, não sendo implementados códigos direcionados a pré ou pós-processamento de dados. Tais partes da simulação numérica são viabilizadas através do programa MTOOL (LIRA et al., 2006).

### **1.2.3 Verificação de Resultados**

Nesta terceira etapa, realiza-se a simulação numérica de exemplos para verificação dos resultados fornecidos pelo sistema computacional desenvolvido, instante em que

são realizadas análises comparativas das respostas do DyCOH com aplicações numéricas disponíveis na literatura técnica.

### **1.3 Estrutura da Dissertação**

No presente Capítulo, desenvolvem-se a definição e contextualização do tema, a demarcação dos objetivos e da metodologia, e a descrição da estruturação do corpo de texto da dissertação.

No Capítulo II, apresenta-se uma revisão bibliográfica da Mecânica da Fratura Coesiva, a qual visa fomentar a base conceitual deste trabalho.

Na seqüência, o Capítulo III descreve a formulação matemática do problema, a qual é responsável por apresentar os fundamentos físicos que regem o problema.

Mais adiante, no Capítulo IV, exibem-se alguns aspectos computacionais que servem de base para implementação numérica do problema, os quais viabilizam a associação entre os elementos finitos e coesivos e permitem o estudo da propagação dinâmica de fraturas através de procedimentos puramente contínuos.

Apresentam-se, no Capítulo V, aplicações que tem por objetivo a verificação das respostas numéricas fornecidas pelo código computacional desenvolvido, tanto sob o enfoque dos elementos finitos quanto dos coesivos.

Em seguida, no Capítulo VI, realizam-se as considerações finais, as quais consistem em uma análise quanto ao cumprimento dos objetivos especificados.

Por fim, relacionam-se as referências bibliográficas que constituem o alicerce conceitual do presente trabalho.



# Capítulo II

## **MODELOS DE ZONA COESIVA**

---

### **2.1 Considerações Iniciais**

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica básica, na qual duas óticas distintas são destacadas. Na inicial, uma breve descrição a respeito dos primeiros trabalhos que consideram os efeitos de fratura com características de ordem coesiva é realizada. Na outra, são apresentados os modelos coesivos que representam a evolução dessa área de pesquisa. Neste momento, são destacados os diversos trabalhos cujas contribuições influenciaram o atual estágio da Mecânica da Fratura Coesiva. No final deste capítulo, são apresentadas as justificativas para o modelo coesivo implementado neste trabalho.

### **2.2 O Surgimento das Primeiras Teorias de Fratura Coesiva**

Nesta seção, realiza-se uma descrição dos trabalhos iniciais que consideraram efeitos de natureza coesiva no estudo de fraturas: os clássicos trabalhos de Dugdale (1960) e de Barenblatt (1959, 1962). Os principais detalhes desses trabalhos são apresentados, destacando-se o importante papel pioneiro que os mesmos possuem na Mecânica da Fratura Coesiva.

#### **2.2.1 Teoria de Dugdale para Materiais Dúcteis**

O modelo de Dugdale (1960) caracteriza-se como uma das primeiras propostas de avaliação do comprimento da zona plástica que se forma durante o processo de fraturamento em materiais dúcteis. Para tanto, Dugdale (1960) propôs uma teoria que se

baseia em um critério uniaxial de tensões. Dessa forma, tal autor considerou o problema de uma chapa de aço infinita, com corte interno de comprimento  $2a$ , sujeita a uma tensão uniforme de tração  $\bar{\sigma}$ , aplicada nas bordas da chapa de aço e com direção perpendicular ao corte interno (Figura 2.1).

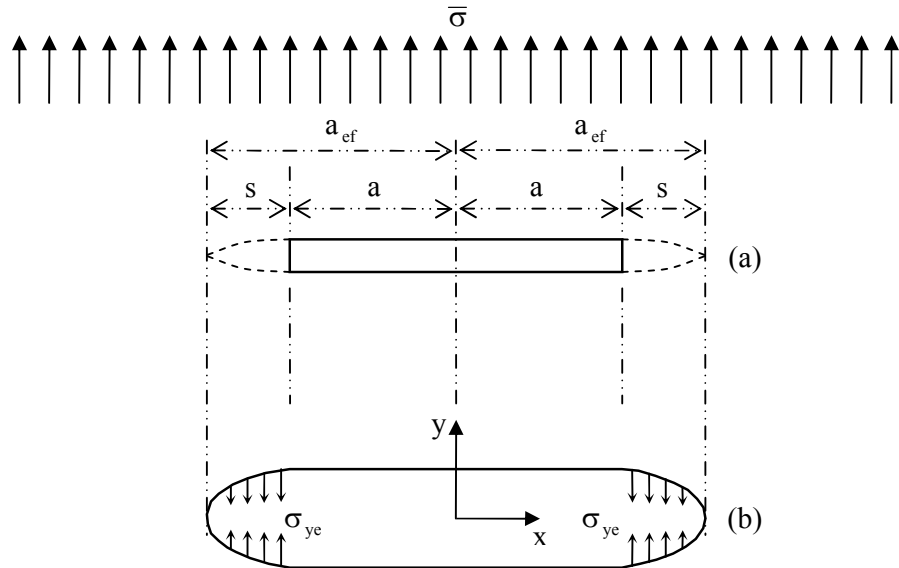


Figura 2.1 – Modelo de Dugdale: (a) Descrição geométrica da região de fraturamento efetivo, (b) Sistema de forças atuantes durante o processamento da fratura.

Fonte: Dugdale (1960).

Conforme a descrição gráfica da Figura 2.1, o modelo de fratura de Dugdale (1960) considera que, para efeito de análise, o comprimento físico da região onde a fratura se processa pode ser substituído por um comprimento efetivo de fratura. Este comprimento efetivo é expresso por:

$$2a_{ef} = 2a + 2s \quad (2.1)$$

onde  $a_{ef}$ ,  $a$  e  $s$  representam, respectivamente, metade do comprimento efetivo da região de fraturamento, metade do comprimento da região em que o processamento da fratura encontra-se concretizado (comprimento físico - região livre de tensões) e metade

do comprimento da zona plástica que se forma na ponta da trinca (região na qual se observa a presença de tensões de escoamento  $\sigma_{ye}$  que tendem a agir de forma opostora à abertura da trinca).

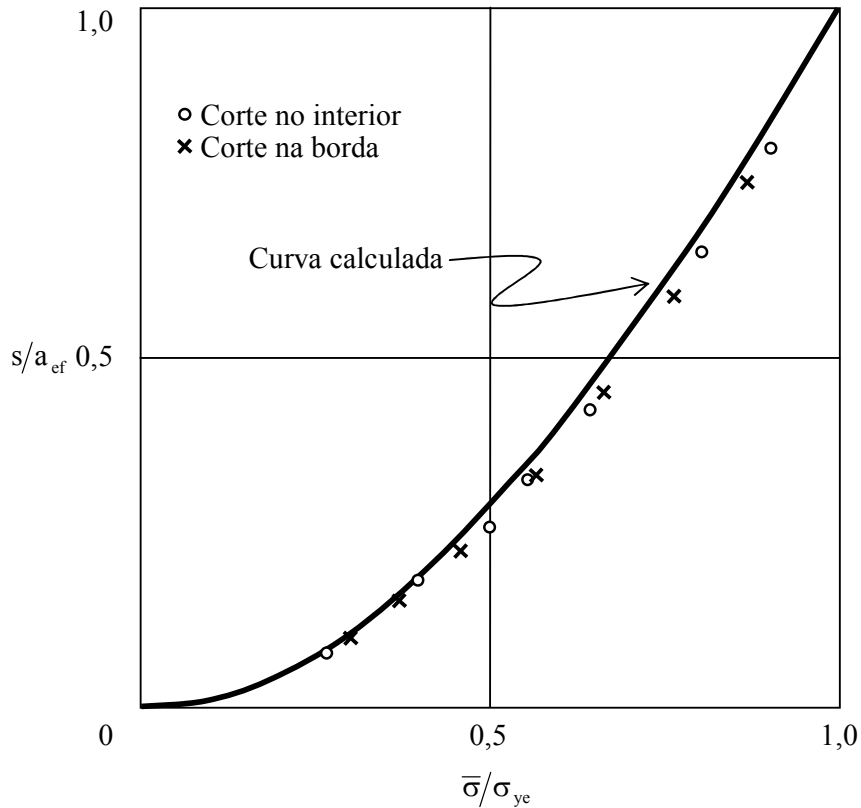


Figura 2.2 – Reprodução da validação dos resultados de Dugdale.

Fonte: Dugdale (1960).

Considerando que ocorria uma compensação entre as contribuições das tensões de tração aplicada  $\bar{\sigma}$  e a tensão de escoamento do material  $\sigma_{ye}$ , Dugdale (1960) pôde admitir que as tensões na ponta da trinca tinham ordem de grandeza finita. Ao contornar essa questão de singularidade, o mesmo assumiu que o comportamento mecânico do material constituinte da chapa de aço poderia ser representado por uma relação constitutiva elasto-plástica perfeita. Dessa forma, foi possível propor uma lei física para representar a quantificação do comprimento da zona plástica na ponta da trinca:

$$\frac{s}{a_{ef}} = \text{sen}^2 \left( \frac{\pi \bar{\sigma}}{4 \sigma_{ye}} \right) \quad (2.2)$$

Para validar sua teoria, Dugdale (1960) realizou uma série de experimentos em estado plano de tensões, para chapas com cortes em seu interior e na borda, e os confrontou com os resultados numéricos fornecidos pela mesma. Os dois tipos de resposta obtiveram uma boa concordância para a determinação do comprimento da zona plástica que se forma na ponta da trinca, conforme ilustra a Figura 2.2.

Embora seja considerada uma teoria bastante prática de avaliação do comprimento da zona de plastificação, a mesma é adequada apenas para estudos de materiais elasto-plásticos perfeitos sob estado plano de tensões.

### 2.2.2 Teoria de Barenblatt para Materiais Frágeis

Barenblatt (1959, 1962) foi o primeiro pesquisador a propor, explicitamente, a consideração do efeito de forças de coesão no estudo de fraturas em materiais frágeis. A base de suas análises fundamentava-se na investigação do equilíbrio de superfícies fraturadas sob a ação de um dado carregamento.

Considerando que a superfície fraturada poderia assumir uma forma qualquer, e utilizando apenas conceitos da Teoria da Elasticidade, Barenblatt (1959, 1962) expressou a solução geral para a tensão normal de tração atuante em uma superfície fraturada,

$$\sigma_N = \frac{K}{\sqrt{\beta}} + QF \quad (2.3)$$

onde  $K$ ,  $\beta$  e  $QF$  são, respectivamente, o fator de intensidade de tensão, a distância do plano de fratura ao contorno da superfície fraturada e uma quantidade finita qualquer.

A abrangência descrita na definição da Equação 2.3 conduz ao aparecimento de tensões nas bordas das superfícies fraturadas que são, de maneira geral, infinitas. Para

garantir que essas tensões sejam finitas, é necessário restringir as formas geométricas adotadas para as superfícies fraturadas. Essa restrição deve ser tal que a intensidade do fator de tensão seja nula ( $K = 0$ ) para um dado carregamento. Dentre as diversas formas geométricas que satisfaçam esse critério, a cuspidal (Figuras 2.3 e 2.4) trata-se da única em que ao mesmo tempo as faces apresentam um fechamento suave na ponta da trinca e a energia liberada por uma pequena mudança no contorno da superfície fraturada é nula. Dessa forma, esse é o único tipo de contorno que não viola nenhuma das leis da Teoria da Elasticidade e suas informações geométricas são condizentes com o nível de escala em que o estudo se realiza.

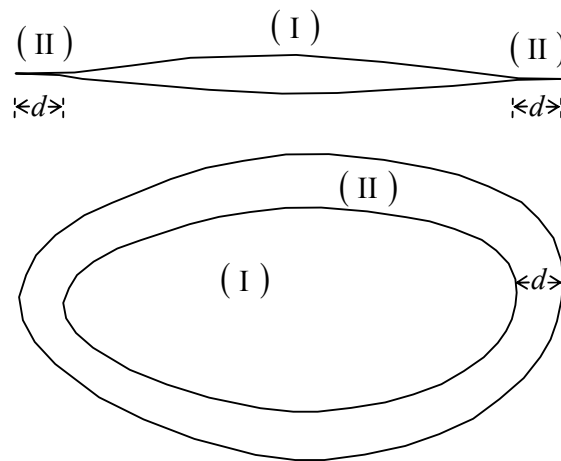


Figura 2.3 – Modelo do contorno da superfície fraturada na Teoria de Barenblatt.

Fonte: Barenblatt (1959, 1962).

Barenblatt (1959, 1962) também alerta que, embora o emprego dos conceitos da Teoria da Elasticidade sirva de base para a definição da forma geométrica da ponta da trinca em materiais frágeis, resultados oriundos apenas desses conceitos não representam os fenômenos que ocorrem na realidade. Tal afirmação, segundo o mesmo pesquisador, deve-se a não consideração da totalidade das forças atuantes no corpo fraturado. Para desenvolver uma teoria de fratura adequada, é necessário admitir a presença de forças moleculares de coesão agindo na ponta da trinca. Nesta região, a distância entre as faces opostas da superfície fraturada é pequena e a atração mútua das mesmas é de ordem elevada.

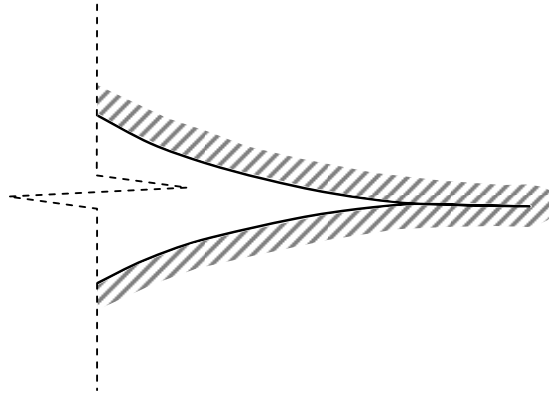


Figura 2.4 – Detalhe da forma da ponta da trinca segundo a Teoria de Barenblatt.

Fonte: Barenblatt (1959, 1962).

Para simplificar a consideração das forças coesivas, Barenblatt (1959, 1962) fundamentou-se em três hipóteses básicas:

- i. O comprimento  $d$  da região da ponta da trinca é pequeno quando comparado a todo o tamanho da superfície fraturada (Figura 2.3);
- ii. A forma da seção normal à superfície fraturada na região da ponta da trinca (e, conseqüentemente, o local de distribuição das forças de coesão sobre a superfície fraturada) não depende das forças atuantes no sistema e sempre se apresenta da mesma maneira para um dado material sob dadas condições específicas (temperatura, composição e pressão da atmosfera que envolve o corpo etc.) (Figura 2.4);
- iii. As faces opostas de superfícies fraturadas se unem suavemente na ponta da trinca (Figura 2.4), o que equivale a afirmar que as tensões na ponta da trinca são de ordem finita.

A forma geométrica que representa o contorno da superfície fraturada na Teoria de Barenblatt (1959, 1962), conforme ilustrado na Figura 2.3, é tal que a superfície fraturada pode ser entendida como a composição de duas regiões: na interna, região I, as faces opostas mantêm-se com um nível de afastamento que permite a desconsideração da presença de forças coesivas e, conseqüentemente, de tensões na mesma; na mais próxima da ponta da trinca, região II, existe um elevado grau de interação entre as faces opostas, sendo necessária a definição de uma relação constitutiva que represente as tensões geradas por forças coesivas na mesma.

Para formular um equacionamento que representasse, adequadamente, as tensões geradas pelas forças coesivas, Barenblatt (1959, 1962) baseou-se no conhecimento da relação existente entre a intensidade da força de coesão e a distância entre dois planos atômicos de um cristal perfeito. Essa relação é tal que quando essa distância  $y$  é menor ou igual à distância intermolecular  $b$ , a intensidade da força coesiva é nula. À medida que  $y$  aumenta, a mesma cresce até atingir um máximo de aproximadamente  $E/10$  (onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young) e começa a reduzir gradativamente até tender a zero no infinito (Figura 2.5).

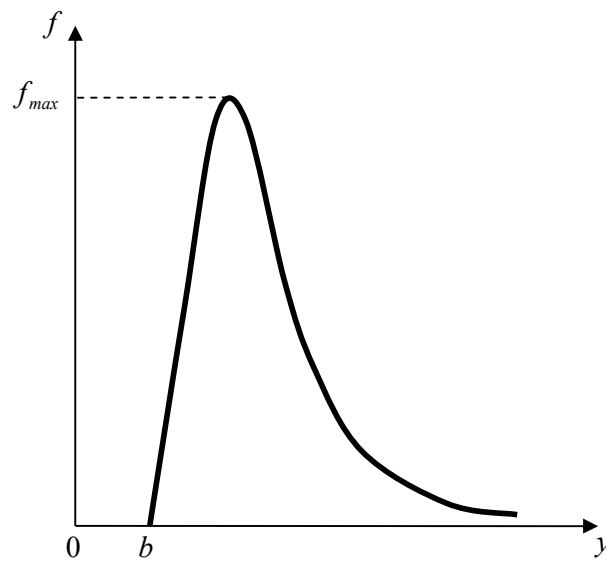


Figura 2.5 – Forças coesivas geradas quando ocorre o afastamento entre planos atômicos em um cristal perfeito.

Fonte: Barenblatt (1959, 1962).

Considerando todas as forças atuantes sobre um corpo carregado com uma fratura, é possível chegar-se ao fator de intensidade de tensão devido ao sistema de forças. Para tanto, realiza-se a composição do mesmo por meio da contribuição de uma parcela devida às cargas aplicadas e a outra oriunda das forças de coesão, ou seja,

$$K = K^q + K^{coc} \quad (2.4)$$

onde  $K^q$  e  $K^{coe}$  são, respectivamente, os fatores de intensidade de tensão para as ações aplicadas e para as forças coesivas, ambos considerando um corpo com uma fratura cuja forma geométrica encontra-se descrita nas Figuras 2.3 e 2.4.

Uma vez que a geométrica da superfície fraturada (Figuras 2.3 e 2.4) conduz a um fator de intensidade de tensão nulo, a seguinte igualdade pode ser observada:

$$K^q = -K^{coe} \quad (2.5)$$

Apoiado na base matemática construída por outros pesquisadores, Barenblatt (1959, 1962) pôde chegar à determinação da taxa de energia liberada para um campo de tensão não uniforme e para uma região fraturada com a forma geométrica cuspidal. Nesse instante, foi possível obter a distribuição dos deslocamentos normais à superfície fraturada de um corpo sólido elástico e de dimensões infinitas. A partir de então, a seguinte relação matemática pode ser expressa:

$$K^{coe} = -\frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{G(t)}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{\pi_0} \int_0^d \frac{G(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (2.6)$$

onde  $G(t)$  representa a distribuição de forças de coesão, a qual é diferente de zero apenas na região da ponta da trinca restrita ao intervalo  $0 \leq t \leq d$ .

A segunda hipótese de Barenblatt (1959, 1962) admite que a forma da seção normal à superfície fraturada na região da ponta da trinca não depende das forças atuantes no sistema (ações externas e forças coesivas) e sempre se apresenta da mesma maneira para um dado material sob dadas condições específicas. Para garantir o atendimento dessa segunda hipótese, verifica-se que a integral presente na Equação 2.6 deve apresentar um resultado constante, ou seja,



$$K = \int_0^d \frac{G(t)}{\sqrt{t}} dt \quad (2.7)$$

na qual  $K$  representa uma quantidade característica da resistência do material à propagação da fratura. Por estar relacionada, exclusivamente, às forças de natureza coesiva, Barenblatt nomeou essa propriedade do material de módulo de coesão.

De posse da definição do módulo de coesão, Barenblatt (1959, 1962) analisou diversos tipos de problemas, tais como: fraturas axissimétricas planas, fraturas achatadas isoladas, fraturas em rochas, dentre outros. No caso particular do estudo de fraturas axissimétricas planas, admitiu que um dos lados da superfície fraturada encontrava-se sujeito a um estado de tensão composto por três partes: na mais central atuava uma tensão de compressão  $p(r)$ , na intermediária não existiam tensões e nas extremidades havia tensões de tração  $G(r)$  que seriam controladas pelas forças coesivas. Na Figura 2.6 apresenta-se uma reprodução do esquema proposto por Barenblatt (1959, 1962).

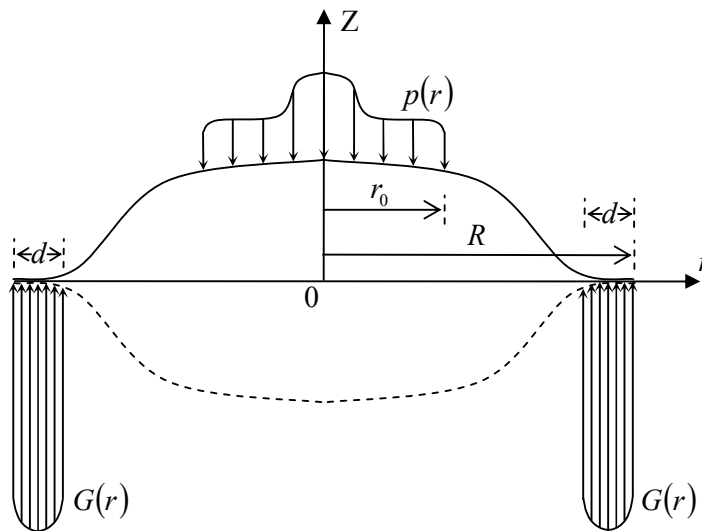


Figura 2.6 – Esquema para estudo do equilíbrio de uma fratura axissimétrica.

Fonte: Barenblatt (1959, 1962).

Para um corpo elástico de dimensões infinitas, com uma superfície fraturada conforme descrita na Figura 2.6, com uma tensão normal  $-g(r)$  atuando nessa superfície, e desconsiderando a presença de tensões cisalhantes, Sneddon (1951) apud Barenblatt (1959, 1962) mostrou que a distribuição dos deslocamentos normais à superfície fraturada é dada por:

$$w = \frac{4(1-\nu^2)R}{\pi E} \int_{\bar{\xi}}^1 \frac{\bar{\mu} d\bar{\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}^2 - \bar{\xi}^2}} \int_0^1 \frac{g(x\bar{\mu}R)xdx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left( \bar{\xi} = \frac{r}{R} \right) \quad (2.8)$$

onde  $E$ ,  $\nu$  e  $\bar{\mu}$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young, o coeficiente de Poisson e uma variável de integração.

Para adequar a Equação 2.8 ao caso específico da Figura 2.6, Barenblatt (1959, 1962) considerou que a tensão normal  $-g(r)$  era tal que:

$$g(r) = \begin{cases} p(r) & \text{se } 0 \leq r \leq r_0 \\ 0 & \text{se } 0 < r \leq R - d \\ -G(r) & \text{se } R - d < r \leq R \end{cases} \quad (2.9)$$

Em seguida, foi imposta a condição de fechamento suave dos lados opostos da superfície fraturada na região da ponta da trinca, ou seja,

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \right) \Big|_{\bar{\xi}=1} = 0 \quad (2.10)$$

A partir da definição do módulo de coesão e do emprego das Equações 2.8 a 2.10, Barenblatt (1959, 1962) pôde realizar diversas análises de fraturas axissimétricas planas. No caso particular da tensão de compressão ser considerada constante,

$p(r) = p_0$ , a seguinte relação entre a tensão aplicada e o comprimento da fratura pode ser obtida:

$$\frac{p_0 \sqrt{r_0}}{K} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{r_0}{R} \right)^{-3/2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r_0}{R} \right)^2} \right] \quad (2.11)$$

Ao analisar graficamente essa relação, Barenblatt (1959, 1962) constatou que existe uma tensão mínima para qual a fratura pode se propagar. Para valores de  $p_0 < K/\sqrt{2r_0}$ , a resistência fornecida pelas forças coesivas impede a propagação da trinca. À medida que essa tensão supera tal quantidade mínima, o comprimento da fratura tende a aumentar continuamente. A Figura 2.7 apresenta a trajetória de equilíbrio desse problema, na qual é possível identificar tais conclusões.

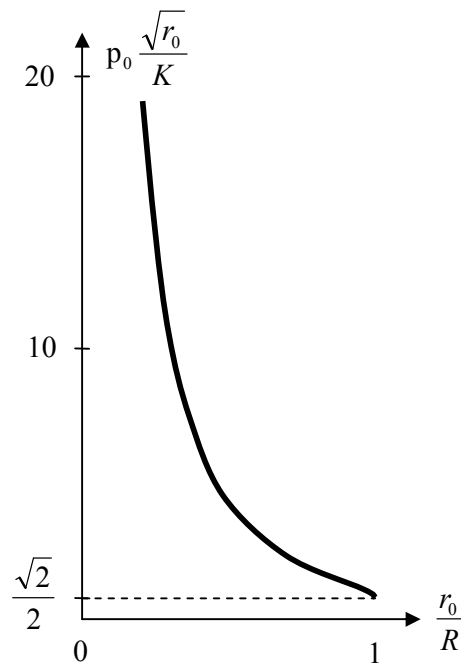


Figura 2.7 – Trajetória de equilíbrio de uma fratura axissimétrica sob tensão constante.

Fonte: Barenblatt (1959).

Conforme supracitado, através de sua teoria, Barenblatt (1959, 1962) pôde realizar uma série de outros estudos. Por questões de brevidade, esse texto se detém apenas à apresentação dos resultados referentes ao estudo de fraturas axissimétricas. Maiores informações podem ser consultadas em Barenblatt (1959, 1962).

### **2.3 Evolução da Mecânica da Fratura Coesiva**

Nesta seção, realiza-se uma descrição de alguns dos principais modelos de fratura coesiva que sucederam os clássicos trabalhos de Dugdale (1960) e de Barenblatt (1959, 1962). Neste momento, são relatados alguns aspectos que os diferenciam dessas propostas originais e que facilitam a associação dos mesmos a uma técnica computacional, a exemplo do Método dos Elementos Finitos.

Análises fundamentadas puramente em conceitos da MFLE e da MFEP não possuem uma base física consistente e que seja capaz de representar como os mecanismos de falha ocorrem na realidade (KLEIN et al., 2000, 2001). Dentre as principais desvantagens desses tipos de abordagens clássicas, podem-se destacar:

- i. As soluções conduzem a campos singulares, o que dificulta o cálculo de tensões e deformações;
- ii. A direção e a velocidade de propagação da fratura são parâmetros que obrigatoriamente devem ser especificados, o que influencia diretamente no resultado final;
- iii. Necessidade da imposição de falhas (trincas) pré-existentes, o que interfere não apenas na direção, mas em toda a trajetória de propagação da trinca;
- iv. Impossibilidade de simular fenômenos como ramificação da trinca ou fragmentação da peça, o que impede a obtenção de resultados adequados quando do estudo de problemas com cargas de impacto;
- v. Não permite representar fenômenos como nucleação de trincas (surgimento de trincas);
- vi. Exigência de critérios adicionais para representar os mecanismos de propagação das trincas.

A idéia de consideração da presença de forças coesivas nas regiões circunvizinhas da ponta da trinca tem se mostrado bastante promissora, pois, além de intuitiva, está em concordância com o comportamento físico que diversos materiais apresentam em tais regiões. Ao incorporar essas forças coesivas no problema, lacunas físicas como as singularidades que os campos de tensões e de deformações apresentam quando da utilização das teorias da MFLE ou da MFEP desaparecem.

O diferencial dos Modelos de Zona Coesiva atuais está relacionado à formulação dos mesmos com base em trabalhos de separação (energia gasta para geração de uma nova superfície, podendo ser considerada apenas em uma ou nas duas direções - normal e tangencial), além da adoção das forças coesivas. A difusão dessa área de pesquisa e o ainda crescente interesse da comunidade científica para com tais modelos estão diretamente ligados à forma com que estes prontamente se associam a métodos computacionais.

Para classificar os Modelos de Zona Coesiva, dois aspectos são considerados. O primeiro refere-se à natureza do critério de inicialização da fratura, o que permite classificá-los em intrínsecos ou extrínsecos. O segundo relaciona-se ao grau de representação do acoplamento de efeitos causados pelos modos de deformação I e II, através do qual os modelos são enquadrados na categoria de desacoplados e acoplados.

Nos modelos intrínsecos, a condição de inicialização do fraturamento encontra-se incorporada ao próprio modelo, não havendo necessidade de definição de critérios adicionais. Tal incorporação deve-se ao comportamento descrito pelas relações constitutivas das trações interfaciais que, geralmente, apresentam uma fase inicial de crescimento das trações até atingirem a resistência do material, quando passam para uma fase de decrescimento que culmina na completa ruptura do material, tendo como consequência a formação de novas superfícies livres. Nos modelos extrínsecos, o comportamento das trações é tal que a resposta da interface apresenta-se apenas a partir da fase posterior ao alcance da resistência do material, não existindo uma fase de crescimento das trações. Dessa forma, os modelos extrínsecos necessitam da definição de um critério extra que expresse o início do processo de falha (KUBAIR; GEUBELLE, 2003). Como resultado, diferentemente dos modelos intrínsecos onde os elementos coesivos são definidos juntamente com a malha de elementos finitos antes do início da análise, nos modelos extrínsecos os elementos coesivos são inseridos em tempo de execução, quando um critério extra de falha é satisfeito. Segundo esta última

observação, para Modelos de Zona Coesiva do tipo extrínseco, a estrutura de dados topológica se altera durante toda a análise. Devido a essa modificação contínua, em tempo de execução, os modelos extrínsecos apresentam um custo computacional extra e necessitam que as relações de adjacência topológica sejam realizadas de forma extremamente eficiente (CELES et al., 2005a, 2005b). Em contrapartida, esse tipo de inserção faz com que os elementos coesivos apenas influenciem a resposta do sistema quando o processamento da fratura realmente está ocorrendo, diferentemente dos modelos intrínsecos que de início já alteram o comportamento do sistema. Kubair e Geubelle (2003) mostram que tal aspecto é responsável pela menor estabilidade numérica apresentada pelos modelos intrínsecos, tendo em vista que uma rigidez artificial é incorporada no problema em um estágio onde ainda não existe possibilidade de fratura. Todavia, sobre os modelos extrínsecos recai a necessidade de imposição de um critério extra de início da fratura, o que representa mais uma dificuldade ao emprego do modelo.

Em uma abordagem desacoplada, a tração na direção normal independe do deslocamento relativo da interface na direção tangencial e a tração na direção tangencial independe do deslocamento relativo da interface na direção normal. Na forma acoplada, ambas as componentes do vetor de tração dependem de ambos os deslocamentos relativos das faces que constituem a interface. O emprego de modelos coesivos desacoplados justifica-se nos casos onde o fraturamento ou ocorre sob apenas um modo de deformação (modo I para direção normal ou modo II para direção tangencial) ou existe a predominância de um desses modos na resposta do sistema. A maioria dos Modelos de Zona Coesiva apresenta uma espécie de acoplamento parcial, o qual é obtido através da utilização de parâmetros específicos de acoplamento (NEEDLEMAN, 1987, 1990a, 1990b; XU; NEEDLEMAN, 1993, 1994) ou segundo o emprego de deslocamentos efetivos (TVERGAARD, 1990; TVERGAARD; HUTCHINSON, 1992), sendo esta última alternativa realizada por meio de uma composição entre os deslocamentos relativos nas direções normais e tangenciais, e parâmetros próprios dos modelos (VAN DEN BOSCH et al., 2006).

Na seqüência, são apresentados diversos modelos de fratura coesiva, nos quais os aspectos relativos à natureza da inicialização do processo de falha e ao acoplamento dos mesmos podem ficar mais evidentes.

### 2.3.1 Modelo Polinomial de Needleman

O trabalho de Needleman (1987) trata-se de um marco histórico da Mecânica da Fratura Coesiva, visto que os atuais modelos de fratura coesiva se utilizam da estrutura unificada proposta no mesmo para suas definições. Esse trabalho teve como objetivo descrever um modelo contínuo que permitisse o tratamento da nucleação de vazios que ocorrem entre interfaces. A idéia de Needleman (1987) foi a de realizar uma associação entre os conceitos de fratura coesiva, originalmente apresentados por Dugdale (1960) e Barenblatt (1959, 1962), e métodos computacionais, de tal forma que todo o processo de fraturamento fosse incorporado à resolução do problema de valor de contorno inicial. A Figura 2.8 ilustra como a estrutura unificada de Needleman (1987) possibilita a abordagem do problema através da associação entre elementos finitos e coesivos.

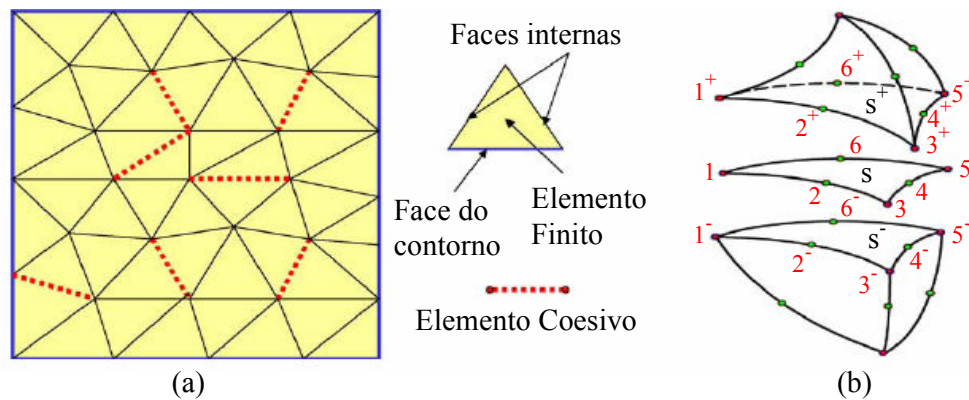


Figura 2.8 – (a) Contínuo discretizado com elementos finitos e elementos coesivos e (b) elemento coesivo 3D entre dois elementos finitos de volume.

Fonte: Zhou et al. (2005).

A estrutura unificada de Needleman (1987) era tal que permitia representar o processo de ruptura da ligação interfacial desde seu início, passando pela separação completa entre as faces opostas e resultando no contínuo crescimento da formação dos vazios. O diferencial desse modelo em relação aos de Dugdale (1960) e Barenblatt (1959, 1962) encontra-se no fato do mesmo considerar a possibilidade de alteração dinâmica na geometria do problema. Tal fato está diretamente ligado à idéia de adoção dos elementos coesivos na região de interface entre dois elementos finitos, os quais favorecem o movimento relativo entre as faces de elementos finitos que compartilham o mesmo lugar geométrico.

Para formular tal estrutura unificada, Needleman (1987) considerou que a superfície do corpo (ou o volume no caso 3D) e a interface deveriam possuir relações constitutivas específicas, de tal forma que, quando combinadas, o problema resultante poderia ser solucionado com procedimentos meramente contínuos<sup>1</sup>.

Para definição da relação constitutiva da interface, Needleman (1987) admitiu que para dois pontos materiais A e B, em lados opostos da interface, o vetor de trações interfaciais (forças coesivas) dependia apenas do vetor que representa o deslocamento relativo entre esses dois pontos. Assim feito, as seguintes expressões foram propostas:

$$\Delta u_N = \check{\mathbf{N}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{AB} \quad (2.12)$$

$$\Delta u_T = \check{\mathbf{T}} \cdot \Delta \mathbf{u}_{AB} \quad (2.13)$$

$$t_N = \check{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{t} \quad (2.14)$$

$$t_T = \check{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{t} \quad (2.15)$$

onde  $\Delta u_N$ ,  $\Delta u_T$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{AB}$ ,  $t_N$ ,  $t_T$ ,  $\check{\mathbf{N}}$  e  $\check{\mathbf{T}}$  são, respectivamente, o deslocamento relativo que representa a abertura normal da interface, o deslocamento que é numericamente igual ao deslizamento relativo das faces que constituem a interface, o vetor de deslocamentos relativos aos pontos A e B, a componente do vetor de trações na direção normal, a componente do vetor de trações na direção transversal, o vetor unitário normal à interface, e o vetor unitário tangente à interface.

---

<sup>1</sup> O foco desta seção, e das demais deste capítulo, encontra-se centrado apenas nas relações constitutivas correspondentes à região da interface do modelo. No Capítulo III, apresenta-se a formulação matemática que permite o tratamento integrado de tais relações constitutivas e das do material que define o domínio do problema. Essa formulação difere um pouco da originalmente proposta por Needleman (1987), visto que se assemelha a forma mais recente apresentada no trabalho de Xu e Needleman (1993).



Realizadas tais definições iniciais, Needleman (1987) partiu da hipótese que, sendo resultante do movimento relativo entre as faces que compõem uma interface, o vetor de trações (força por unidade de área na configuração indeformada) pode ser obtido em função dos deslocamentos relativos  $\Delta u_N$  e  $\Delta u_T$ . Assim, considerando a existência de um potencial  $\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T)$  tal que

$$\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = - \int_0^{\Delta u} (t_N d\Delta u_N + t_T d\Delta u_T) \quad (2.16)$$

as componentes do vetor de tração nas direções normal e tangencial são dadas por:

$$t_N = - \frac{\partial \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T)}{\partial \Delta u_N} \quad (2.17)$$

$$t_T = - \frac{\partial \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T)}{\partial \Delta u_T} \quad (2.18)$$

Por questões descritas a seguir, Needleman (1987) adotou para esse modelo coesivo um potencial com o seguinte formato polinomial:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = & \frac{27}{4} \sigma_{\max} \delta \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{\alpha} \left( \frac{\Delta u_T}{\delta} \right)^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.19) \end{aligned}$$

no qual  $\sigma_{\max}$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\delta$  são, respectivamente, a máxima tensão de tração suportada pela interface quando a mesma é submetida a um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ), o coeficiente de cisalhamento relativo à rigidez normal da interface e uma espécie de comprimento característico<sup>2</sup>, e com  $\Delta u_N \leq \delta$ .

Sendo assim, aplicando-se as definições dadas pelas Equações 2.17 e 2.18, para  $\Delta u_N \leq \delta$ , chega-se a:

$$t_N = -\frac{27}{4} \sigma_{\max} \left\{ \frac{\Delta u_N}{\delta} \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] + \bar{\alpha} \left( \frac{\Delta u_T}{\delta} \right)^2 \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} - 1 \right) \right\} \quad (2.20)$$

$$t_T = -\frac{27}{4} \sigma_{\max} \left\{ \bar{\alpha} \left( \frac{\Delta u_T}{\delta} \right) \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.21)$$

Logo, esse modelo coesivo é do tipo acoplado, posto que as componentes de tração  $t_N$  e  $t_T$  dependem, simultaneamente, dos deslocamentos relativos  $\Delta u_N$  e  $\Delta u_T$ , além da presença do parâmetro de acoplamento  $\bar{\alpha}$ .

A escolha de Needleman (1987) pelo potencial apresentado na Equação 2.19 foi estimulada, principalmente, pelo comportamento que a componente normal do vetor de trações deve representar. Na proposta de Needleman (1987), a parte da relação constitutiva relativa à separação puramente normal deve ser tal que com o aumento da separação interfacial, a tração normal à interface atinge um valor máximo, reduz, e pode chegar até ao estado de completa separação entre as faces (situação última onde não se verifica mais a presença de forças coesivas na direção normal). Além disso, um valor positivo de  $\Delta u_N$  deve indicar um crescimento da separação interfacial, enquanto que um  $\Delta u_N$  negativo deve conduzir à redução da separação interfacial. Para  $\Delta u_N$  negativo, a magnitude das trações deve aumentar monotonicamente, o que pode simular uma

---

<sup>2</sup> Needleman (1987) afirma que embora  $\delta$  possua dimensão de comprimento, ele não necessariamente corresponde a alguma distância física.

restrição de contato que dificulta a interpenetração entre faces que compartilham a mesma interface. A Figura 2.9 descreve a representação gráfica da Equação 2.20, sendo condizente com o comportamento especificado.

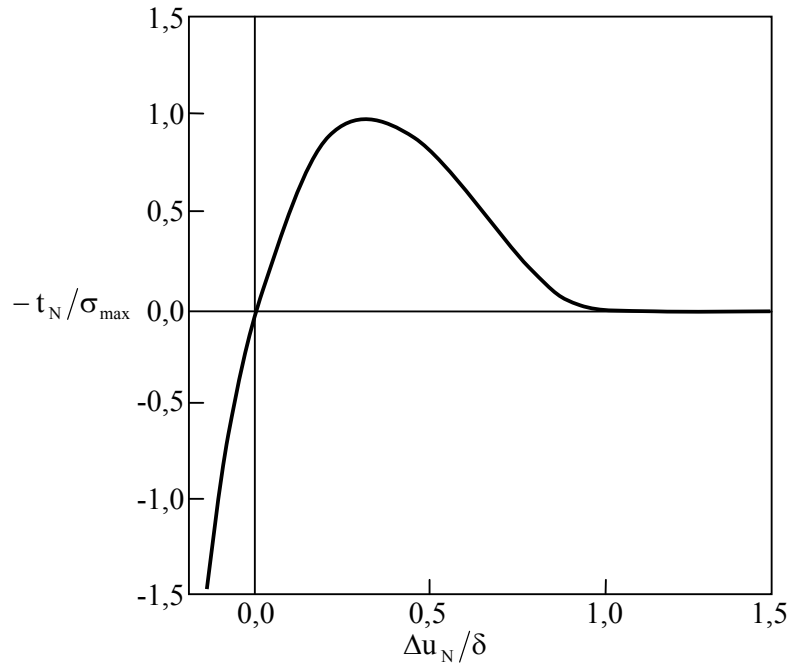


Figura 2.9 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).

Fonte: Needleman (1987).

Em relação à forma polinomial, verifica-se que a mesma foi adotada por conveniências analíticas, dentre as quais a facilidade para obtenção de uma função contínua e diferenciável, e a capacidade de representar o trabalho realizado durante todo o fraturamento de tal forma que as trações desaparecem quando certo limite de separação finito é atingido.

Conforme as últimas observações, para  $\Delta u_N > \delta$  tem-se que:

$$\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = \Phi_{\text{sep}} \quad (2.22)$$

$$t_N = t_T = 0 \quad (2.23)$$

sendo  $\Phi_{sep}$  o trabalho realizado durante toda a separação da interface.

Sabendo-se que tal trabalho é numericamente igual à área sob a curva descrita na Figura 2.9, a seguinte expressão é obtida:

$$\Phi_{sep} = \frac{9\sigma_{max} \delta}{16} \quad (2.24)$$

Dessa forma, observa-se que a adoção de forças coesivas aliada à quantificação do trabalho realizado durante o processo de separação (uma propriedade específica do material e que pode ser obtida experimentalmente) conduz a determinação do comprimento característico, chegando-se a:

$$\delta = \frac{16\Phi_{sep}}{9\sigma_{max}} \quad (2.25)$$

Estudando a Figura 2.9, verifica-se a presença das fases de crescimento e decréscimo das trações separadas por um ponto de máxima tensão (resistência do material). Essa fase de crescimento, que representa um processo de resistência da interface ao aumento da separação entre as faces constituintes, configura-se como o critério de falha internamente incorporado ao modelo. Assim sendo, o modelo de Needleman (1987) pode ser classificado como um modelo de fratura coesiva do tipo intrínseco.

Diante do exposto, algumas considerações podem ser realizadas. A primeira trata-se de uma observação de que tal modelo não permite o rompimento das ligações interfaciais exclusivamente por cisalhamento, visto que a relação linear proposta não possibilita a promoção de forças tangenciais nulas na interface (excetuando-se a

situação em que o rompimento ocorre por fratura normal e o próprio modelo impõe a anulação de tais forças – Equação 2.23). A evidência dessa característica é tamanha que Needleman (1987) adota, arbitrariamente,  $\bar{\alpha} = 10$  e afirma que os resultados obtidos não são muito sensíveis a escolha de tal parâmetro, tornando esse modelo adequado apenas para problemas cuja interface apresenta uma resposta mais rígida ao cisalhamento do que a abertura normal. A segunda encontra-se ligada ao fato desse modelo de Needleman (1987) configurar-se como fenomenológico e cujo emprego fica condicionado à especificação de apenas três parâmetros do modelo ( $\sigma_{\max}$ ,  $\bar{\alpha}$  e  $\delta$ ), o que facilita sua aplicação. A terceira refere-se à capacidade do modelo coesivo de Needleman (1987) representar o comportamento mecânico da interface através da utilização de uma característica inovadora deste modelo: adoção de forças coesivas na interface juntamente com a consideração do trabalho de separação realizado por unidade de área. A última está relacionada ao fato de que devido à existência de um potencial, o trabalho de separação resultante da Equação 2.24 independe da trajetória. Os três últimos aspectos fizeram com que diversos modelos coesivos desenvolvidos nos anos seguintes fossem baseados nas propostas de Needleman (1987).

### **2.3.2 Modelo Exponencial/Polinomial de Needleman**

Dando continuidade aos seus estudos sobre modelos de fratura coesiva para interfaces, Needleman (1990a) propôs um novo potencial para definição das relações constitutivas que representam a resposta mecânica das interfaces coesivas. Esse modelo foi diretamente influenciado pelos resultados de análises atômicas da energia de ligação universal apresentadas por Rose et al. (1981, 1983). Embora diferente, esse modelo também opera sobre a mesma estrutura unificada proposta em Needleman (1987).

Nos supracitados trabalhos de Rose et al. (1981, 1983), realizaram-se estudos para investigação de como a energia de ligação existente entre átomos de um material varia à medida que a distância interatômica aumenta. Ao analisar tal relação de forma individual para diversos materiais metálicos, Rose et al. (1981, 1983) observaram que os resultados obtidos poderiam ser ajustados por curvas exponenciais que dependiam de apenas dois parâmetros, conforme a seguinte expressão:

$$\underline{E}_c = -(1 + \underline{\beta a}) \exp(-\underline{\beta a}) \quad (2.26)$$

onde  $\underline{E}_c$ ,  $\underline{a}$  e  $\underline{\beta}$  são, respectivamente, a energia coesiva ou de ligação interatômica, a separação atômica (parâmetro do modelo) e um parâmetro do modelo.

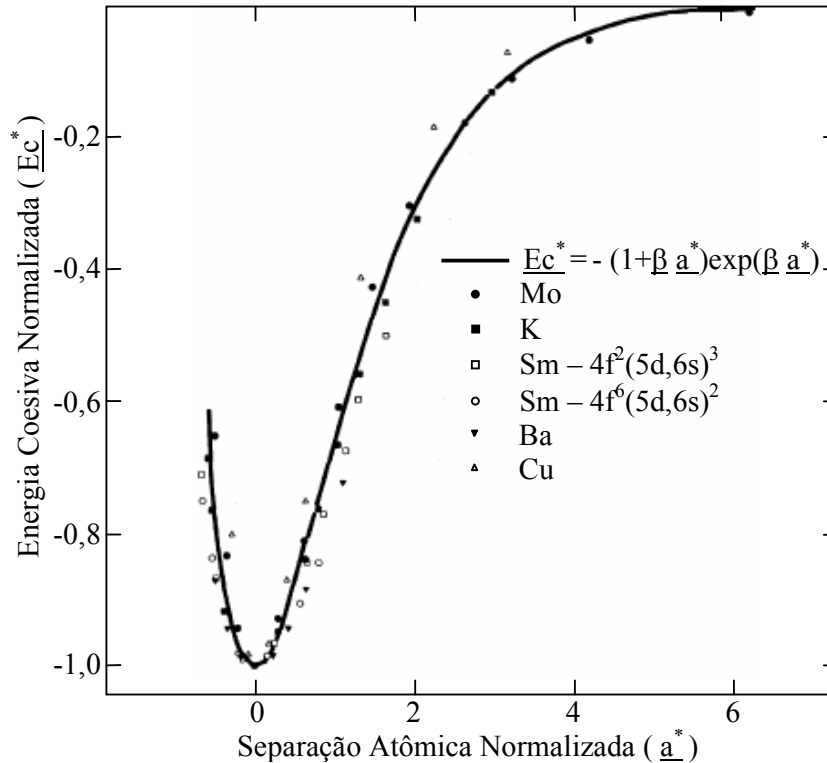


Figura 2.10 – Relação normalizada da energia coesiva versus separação atômica para diferentes tipos de metais.

Fonte: Rose et al. (1981, 1983).

Neste instante, Rose et al. (1981, 1983) perceberam que as respostas encontradas para diferentes materiais variavam apenas em relação à escala da representação gráfica. Ao normalizar tais relações e representá-las em um único gráfico (Figura 2.10), Rose et al. (1981, 1983) verificaram a concordância destas com a Equação 2.26. O asterisco presente nos termos  $\underline{E}_c^*$  e  $\underline{a}^*$ , na Figura 2.10, é utilizado para indicar que tais informações encontram-se representadas de forma normalizada.

Tendo em vista que materiais diferentes podiam ter tal relação representada por uma única expressão, conforme sugere a Figura 2.10, Rose et al. (1981, 1983) propuseram a existência de uma relação universal para variação da energia de ligação interatômica.

Diante disso, Needleman (1990a) constatou ser coerente alterar o potencial polinomial proposto em Needleman (1987) e adotar uma forma exponencial para a variação das trações normais. Uma vez que nas investigações realizadas por Rose et al. (1981, 1983) apenas a separação na direção normal era considerada, e na ausência de uma base física que indicasse outra alternativa, Needleman (1990a) manteve a mesma variação linear para as trações tangencias adotada em Needleman (1987). Assim feito, o potencial considerado por Needleman (1990a) passou a apresentar o seguinte formato exponencial/polinomial:

$$\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = \frac{9\sigma_{\max}\delta}{16} \left\{ 1 - \left[ 1 + \tilde{z} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) - \frac{\bar{\alpha}\tilde{z}^2}{2} \left( \frac{\Delta u_T}{\delta} \right)^2 \right] \exp \left[ -\tilde{z} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) \right] \right\} \quad (2.27)$$

sendo  $\tilde{z} = \frac{16e}{9}$ ,  $e = \exp(1)$  e admitindo que  $\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) \rightarrow \Phi_{\text{sep}}$  quando  $\Delta u_N \rightarrow \infty$ .

A simbologia  $(\bullet) \rightarrow (\bullet)$  indica que a informação à esquerda da seta, no limite, tende a igualar-se, matematicamente, ao dado à direita da seta.

Sendo assim, aplicando-se as definições das Equações 2.17, 2.18 e 2.27, tem-se:

$$t_N = -\sigma_{\max} e \left[ \tilde{z} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \bar{\alpha} \tilde{z}^2 \left( \frac{\Delta u_T}{\delta} \right)^2 \right] \exp \left[ -\tilde{z} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) \right] \quad (2.28)$$

$$t_T = -\sigma_{\max} e \left[ \bar{\alpha} \tilde{z} \left( \frac{\Delta u_T}{\delta} \right) \right] \exp \left[ -\tilde{z} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta} \right) \right] \quad (2.29)$$

Logo, esse modelo coesivo é do tipo acoplado, visto que as componentes de tração  $t_N$  e  $t_T$  dependem, simultaneamente, dos deslocamentos relativos  $\Delta u_N$  e  $\Delta u_T$ , além da presença do parâmetro de acoplamento  $\bar{\alpha}$ .

Para definição do potencial exponencial/polinomial, Needleman (1990a) relata que tal expressão foi formulada de maneira que o máximo valor absoluto de  $t_N$  para uma separação puramente normal fosse igual a  $\sigma_{\max}$  e o trabalho realizado durante toda a separação fosse:

$$\Phi_{\text{sep}} = \frac{9\sigma_{\max}\delta}{16} \quad (2.30)$$

o mesmo obtido através do potencial polinomial de Needleman (1987).

Analisando as Equações 2.20 e 2.28, representadas graficamente na Figura 2.11, constata-se que para o potencial polinomial  $t_N = \sigma_{\max}$  quando  $\Delta u_N = \delta/3$ , enquanto que para o potencial exponencial/polinomial isso ocorre quando  $\Delta u_N = 9\delta/(16e) \approx 0,207\delta$ . Além disso, o primeiro garante a separação total da interface,  $t_N = 0$ , quando  $\Delta u_N = \delta$ , enquanto que o segundo conduz a um processo de redução contínua da tração normal, a qual apenas pode ser considerada nula, no limite, quando  $\Delta u_N \rightarrow \infty$ . Porém, para este último caso, Needleman (1990a) afirma que o trabalho realizado entre  $\Delta u_N = 0$  e  $\Delta u_N = \delta$  representa em torno de 95% do  $\Phi_{\text{sep}}$ .

Novamente, observando a Figura 2.11, verifica-se a presença das fases de aumento e de redução das trações separadas por um ponto de máxima tensão (resistência do material). Essa fase de crescimento das trações, que representa um processo de resistência da interface ao aumento da separação entre as faces constituintes, configura-se como o critério de falha internamente incorporado ao modelo. Assim sendo, o modelo de Needleman (1990a) pode ser classificado como um modelo de fratura coesiva do tipo intrínseco.



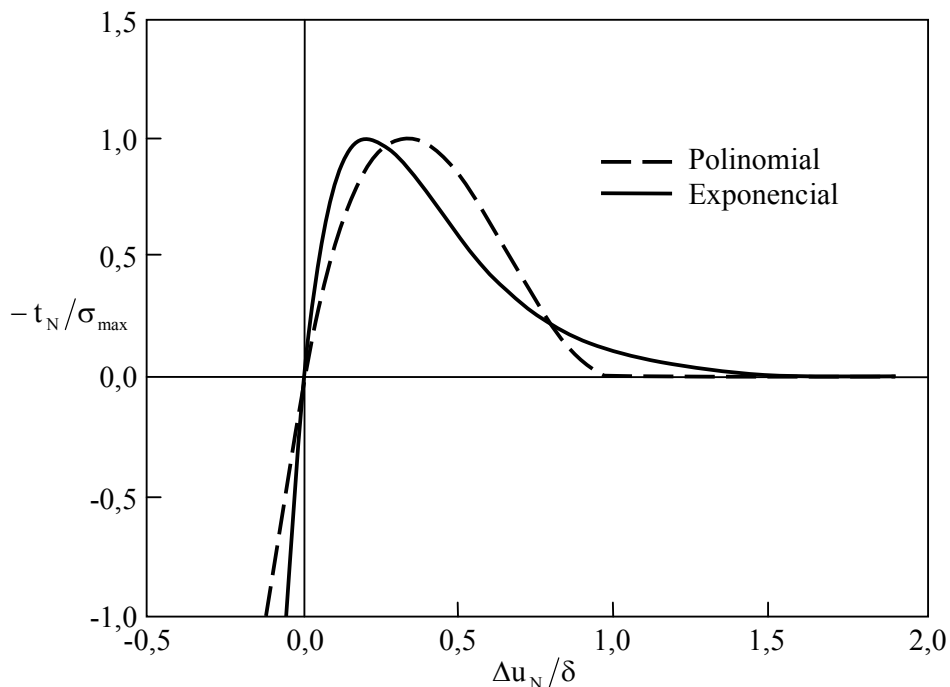


Figura 2.11 – Comparativo ente as trações normais para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ) utilizando um potencial polinomial (Needleman, 1987) e um potencial exponencial/polinomial (Needleman, 1990a).

Fonte: Needleman (1990a).

Diante do exposto, Needleman (1990a) destaca que uma das diferenças entre esse novo potencial e o originalmente proposto em Needleman (1987) configura-se na não existência de um ponto definido para a ocorrência da separação puramente normal (Figura 2.11). Embora tal característica apresentada no potencial polinomial de Needleman (1987) seja conveniente tanto sob o aspecto matemático quanto computacional, o potencial exponencial/polinomial abdica da mesma visando uma representação fisicamente mais consistente.

Em relação ao modelo exponencial/polinomial, algumas considerações adicionais podem ser observadas: trata-se de um modelo com uma base física mais sólida em relação ao comportamento das trações para uma separação normal; continua a não representar processos de separação puramente tangenciais, tal como Needleman (1987), o que faz com que o mesmo não seja adequado para aplicações em que a influência da resposta tangencial da interface seja importante; e, não apresenta um

ponto definido de indicação de ocorrência da separação puramente normal, o que computacionalmente pode ser uma desvantagem.

Por fim, observa-se também que a alteração na maneira de consideração das trações normais não modificou muito a essência qualitativa da proposta original de Needleman (1987): a parte da relação constitutiva relativa à separação puramente normal continua sendo tal que com o aumento da separação interfacial, a tração normal à interface atinge um valor máximo, reduz, e pode chegar até ao estado de completa separação entre as faces (porém, no presente modelo é necessário que ocorra um deslocamento infinito); um valor positivo de  $\Delta u_N$  ainda indica um crescimento da separação interfacial, enquanto que um  $\Delta u_N$  negativo conduz à redução da separação interfacial; e, neste caso, para  $\Delta u_N$  negativo a magnitude das trações crescem exponencialmente, o que pode simular uma restrição de contato que dificulta a interpenetração entre faces que compartilham a mesma interface de forma mais rigorosa do que a realizada no potencial polinomial de Needleman (1987).

### **2.3.3 Modelo Exponencial/Periódico de Needleman**

Para permitir o estudo de problemas em interfaces cujos deslocamentos medidos através do deslizamento relativo de suas faces podem apresentar uma ordem elevada, Needleman (1990b) passou a considerar que tais deslocamentos tangenciais contribuíam de forma não linear para quantificação do vetor de trações. Dessa forma, o potencial resultante difere dos propostos em Needleman (1987), polinomial, e Needleman (1990a) exponencial/polinomial.

Na escolha da representação das trações puramente normais, Needleman (1990b) continua a se utilizar dos resultados das análises atômicas de Rose et al. (1981, 1983), de tal forma que o comportamento mecânico exponencial apresentado sob um processo de abertura puramente normal permanece o mesmo descrito em Needleman (1990a), conforme Figura 2.12. Como na época não havia respaldo de modelagens atômicas para auxiliar na definição de uma variação não linear exponencial para representação das trações puramente tangenciais, Needleman (1990b) baseou-se na periodicidade do

arranjo dos átomos das chamadas redes cristalinas<sup>3</sup> (Figura 2.13) para propor que as trações cisalhantes apresentassem uma variação periódica em relação aos deslocamentos tangenciais da interface (Figura 2.14). Assim, Needleman (1990b) pôde propor um potencial de formato exponencial/periódico para seu modelo de fratura coesiva, o qual considerando  $\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) \rightarrow \Phi_{\text{sep}}$  quando  $\Delta u_N \rightarrow \infty$  é dado por:

$$\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = \frac{\sigma_{\max} e \delta}{\tilde{z}} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{\tilde{z} \Delta u_N}{\delta} - \bar{\beta} \tilde{z}^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi \Delta u_T}{T_T}\right) \right] \right] \right\} \times \exp\left(-\frac{\tilde{z} \Delta u_N}{\delta}\right) \quad (2.31)$$

sendo  $T_T$  o período da variação das trações cisalhantes em relação aos deslocamentos tangenciais da interface e  $\bar{\beta}$  um parâmetro de cisalhamento do modelo.

Sendo assim, aplicando-se as definições dadas pelas Equações 2.17, 2.18 e 2.31, chega-se a:

$$t_N = -\sigma_{\max} e \left\{ \tilde{z} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta}\right) - \bar{\beta} \tilde{z}^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi \Delta u_T}{T_T}\right) \right] \right\} \exp\left[-\tilde{z} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta}\right)\right] \quad (2.32)$$

$$t_T = -\sigma_{\max} e \left[ 2\pi \bar{\beta} \tilde{z} \left(\frac{\delta}{T_T}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi \Delta u_T}{T_T}\right) \right] \exp\left[-\tilde{z} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta}\right)\right] \quad (2.33)$$

---

<sup>3</sup> Evidências concretas da formação de arranjos atômicos periódicos no estado sólido foram conseguidas por Davisson e Germer (1927) através de uma técnica de microscopia que utilizava a transmissão de elétrons em vez de luz através do cristal (KOILLER, 2005).

Logo, esse modelo coesivo é do tipo acoplado, visto que as componentes de tração  $t_N$  e  $t_T$  dependem, simultaneamente, dos deslocamentos relativos  $\Delta u_N$  e  $\Delta u_T$ , além da presença do parâmetro de acoplamento  $\bar{\beta}$ .

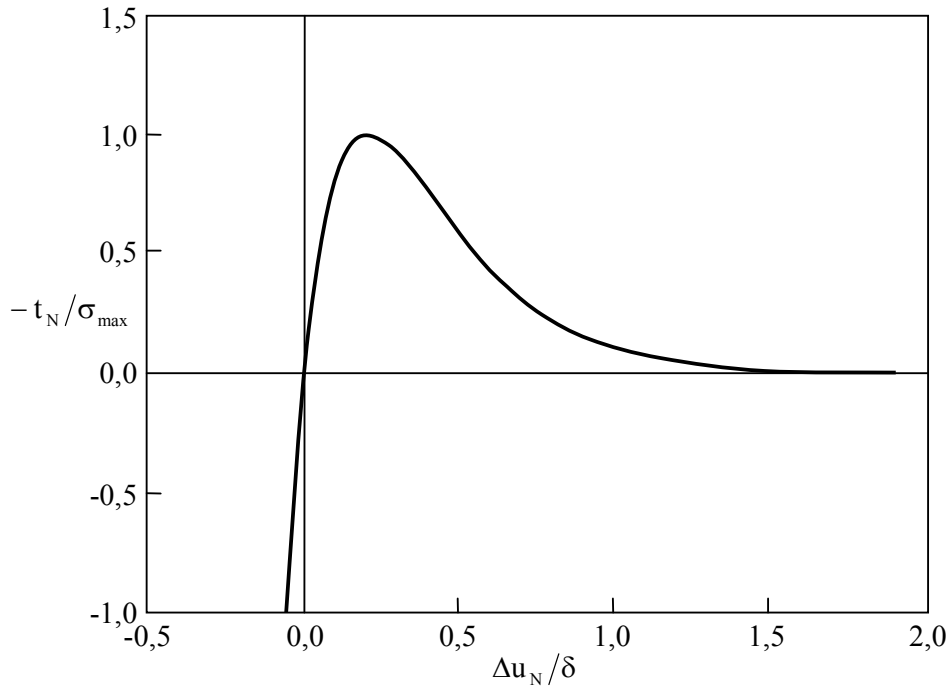


Figura 2.12 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).

Fonte: Needleman (1990b).

Mais uma vez, a expressão desse potencial exponencial/periódico foi escolhida por Needleman (1990b) de tal forma que o trabalho realizado durante a separação fosse o mesmo obtido pelos modelos de Needleman (1987) e Needleman (1990a), ou seja,

$$\Phi_{\text{sep}} = \frac{9\sigma_{\text{max}}\delta}{16} \quad (2.34)$$

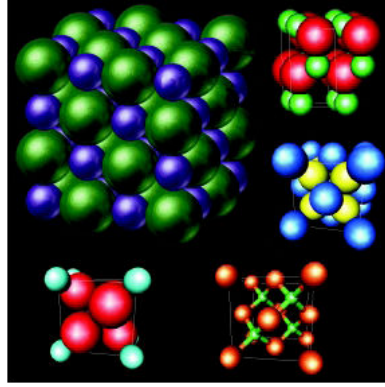


Figura 2.13 – Diferentes tipos de arranjos periódicos de átomos formando estruturas cristalinas.

Fonte: Koiller (2005).

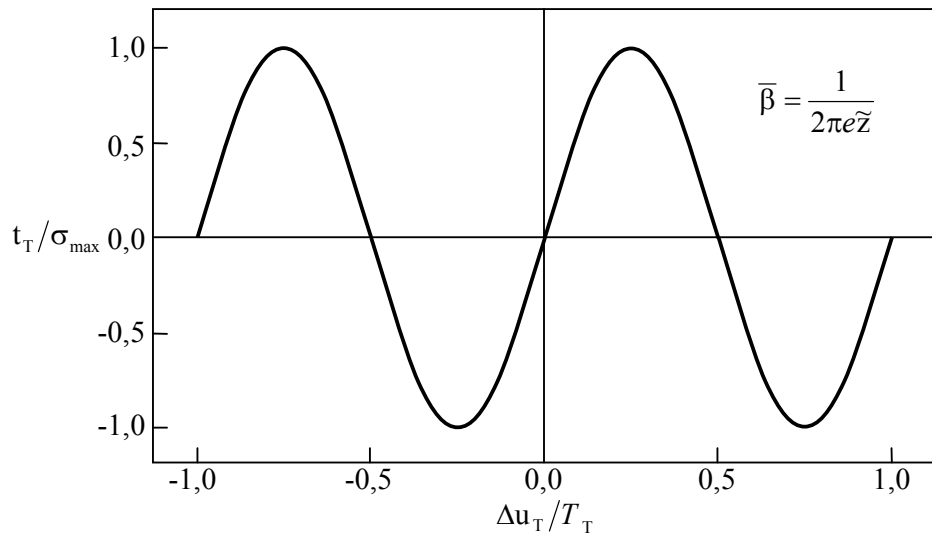


Figura 2.14 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).

Fonte: Needleman (1990b).

Ao analisar as Equações 2.32 e 2.33, Needleman (1990b) observou que para  $\Delta u_N = 0$ , as trações  $t_N$  e  $t_T$  tornam-se apenas funções periódicas de  $\Delta u_T$ , tendo como período  $T_T$ . Dessa forma, o trabalho interfacial total relativo ao deslizamento entre as faces de  $\Delta u_T = 0$  a  $\Delta u_T = T_T$  é nulo, pois tal periodicidade faz com que o trabalho realizado de  $\Delta u_T = 0$  a  $\Delta u_T = T_T/2$  seja recuperado de  $\Delta u_T = T_T/2$  a  $\Delta u_T = T_T$ . Essa incoerência reforçava mais uma vez a necessidade de estudos, semelhantemente aos de

Rose et al. (1981, 1983), que fornecessem uma base física para a definição da variação não linear das trações cisalhantes.

Para utilização desse modelo fenomenológico, quatro parâmetros necessitam ser especificados:  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta$ ,  $T_T$  e  $\bar{\beta}$ . O que difere dos modelos anteriores (Needleman, 1987, 1990a) são apenas os parâmetros  $\delta_T$  e  $\bar{\beta}$ , responsáveis pela definição da resposta não linear do cisalhamento. Para obtê-los, Needleman (1990b) admitiu que  $T_T = \delta$  e considerou que  $\bar{\beta}$  era um parâmetro de cisalhamento definido ao impor que o valor máximo de  $t_T$  com  $\Delta u_N = 0$  era  $\sigma_{\max}$ . Assim feito, tem-se que:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2\pi e \tilde{z}} \approx 0,0121 \quad (2.35)$$

Tendo em vista que nesse modelo considera-se uma contribuição não linear do cisalhamento puro, existem valores máximos e mínimos para as trações cisalhantes. Analisando a Equação 2.33 com  $\Delta u_N = 0$ , constata-se que o primeiro máximo ocorre para  $|\Delta u_T| = T_T/4$ , seguido de um mínimo em  $|\Delta u_T| = 3T_T/4$ .

A existência de uma fase de crescimento das trações (que tem origem no estado nulo de tração e prossegue até a resistência máxima do material) nas Figuras 2.13 e 2.14, a qual representa um processo de resistência da interface ao aumento da separação entre as faces constituintes, configura-se como o critério de falha intrinsecamente incorporado ao modelo. Desse modo, o modelo de Needleman (1990b) também pode ser classificado como um modelo de fratura coesiva do tipo intrínseco.

Dentre os comentários passíveis de serem realizados, destaca-se o fato do potencial exponencial/periódico de Needleman (1990b) permitir a simulação da propagação de fraturas em problemas cujas interfaces estejam sujeitas a grandes deslocamentos cisalhantes entre suas faces.

### 2.3.4 Modelo Polinomial de Tvergaard

Depois das propostas pioneiras de Needleman (1987, 1990a, 1990b), Tvergaard (1990) apresentou um modelo de fratura coesiva, de formato polinomial, que utilizava a mesma estrutura unificada descrita em Needleman (1987), porém com algumas particularidades, como a não existência de um potencial para definição do vetor de trações.

Em adição à ausência de um potencial, o trabalho de Tvergaard (1990) foi diferenciado no sentido de se utilizar de um deslocamento efetivo (medida adimensional) para realização de um acoplamento parcial, o qual é definido como:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u_T}{\delta_T}\right)^2} \quad (2.36)$$

onde  $\delta_N$  e  $\delta_T$  são comprimentos característicos nas direções normal e tangencial, respectivamente.

Realizada essa definição inicial, Tvergaard (1990) formulou seu modelo de fratura coesiva com base na seguinte função:

$$F(\bar{\lambda}) = \frac{27}{4} \sigma_{\max} (1 - 2\bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2) \quad \text{com} \quad 0 \leq \bar{\lambda} \leq 1 \quad (2.37)$$

Assim, e admitindo que  $\bar{\lambda}$  cresce monotonicamente, as expressões das trações através da interface foram escolhidas de tal forma que:

$$t_N = \frac{\Delta u_N}{\delta_N} F(\bar{\lambda}) \quad (2.38)$$

$$t_T = \bar{\alpha} \frac{\Delta u_T}{\delta_T} F(\bar{\lambda}) \quad (2.39)$$

Logo, esse modelo coesivo é do tipo parcialmente acoplado, visto que as componentes de tração  $t_N$  e  $t_T$  dependem apenas dos respectivos deslocamentos relativos e do deslocamento efetivo, além da presença do parâmetro de acoplamento  $\bar{\alpha}$ .

Outra observação trata-se do fato de que para utilização desse modelo fenomenológico quatro parâmetros necessitam ser especificados:  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta_N$ ,  $\delta_T$  e  $\bar{\alpha}$ .

Não o bastante, é possível confirmar que a escolha de Tvergaard (1990) na formulação do vetor de trações foi tal que para separação puramente normal seu modelo reproduzisse a mesma resposta do modelo de Needleman (1987) e que a possibilidade de ocorrência de fraturamento em cisalhamento puro fosse viabilizada. Para realizar tais constatações basta verificar que: sob separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ) (Figura 2.15), a tração normal à interface atinge um valor máximo ( $\sigma_{\max}$ ), reduz, e pode chegar até ao estado de completa separação entre as faces no instante que  $\Delta u_N = \delta_N$  (um comportamento idêntico ao de Needleman (1987) ocorre quando da consideração de forças de contato); sob separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ) (Figura 2.16) a tração tangencial à interface atinge um valor máximo ( $\bar{\alpha}\sigma_{\max}$ ), reduz, e pode chegar até ao estado de completa separação entre as faces no instante que  $|\Delta u_T| = \delta_T$ .

Diante disso, os trabalhos de separação, por unidade de área, respectivos às direções normal e tangencial são dados por:

$$\Phi_N = \frac{9\sigma_{\max}\delta_N}{16} \quad (2.40)$$

que é equivalente ao obtido nos trabalhos de Needleman (1987, 1990a, 1990b), e



$$\Phi_T = \frac{9\sigma_{\max}\bar{\alpha}\delta_T}{16} \quad (2.41)$$

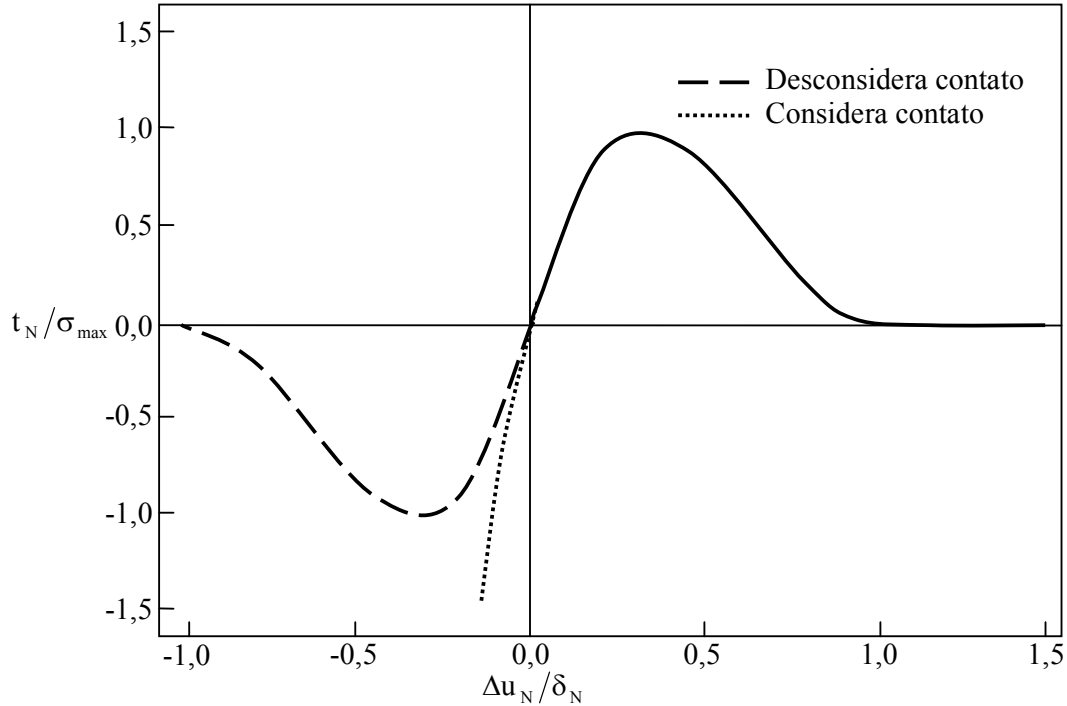


Figura 2.15 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).

Fonte: Tvergaard (1990).

A motivação de Tvergaard (1990) para a proposição desse modelo de fratura coesiva, onde o rompimento da interface pode ocorrer através de separação puramente tangencial, surgiu da necessidade de modelar fraturas em interfaces de cerâmicas, nas quais se verificou que a taxa de energia crítica liberada era maior nas condições de modo II do que nas de modo I. Tal comportamento, no modelo de Tvergaard, é representado pelo fator  $\bar{\alpha}$ , para o aumento da força durante a separação puramente tangencial, e pelo fator  $\bar{\alpha}\delta_T/\delta_N$ , para o aumento do trabalho de separação.

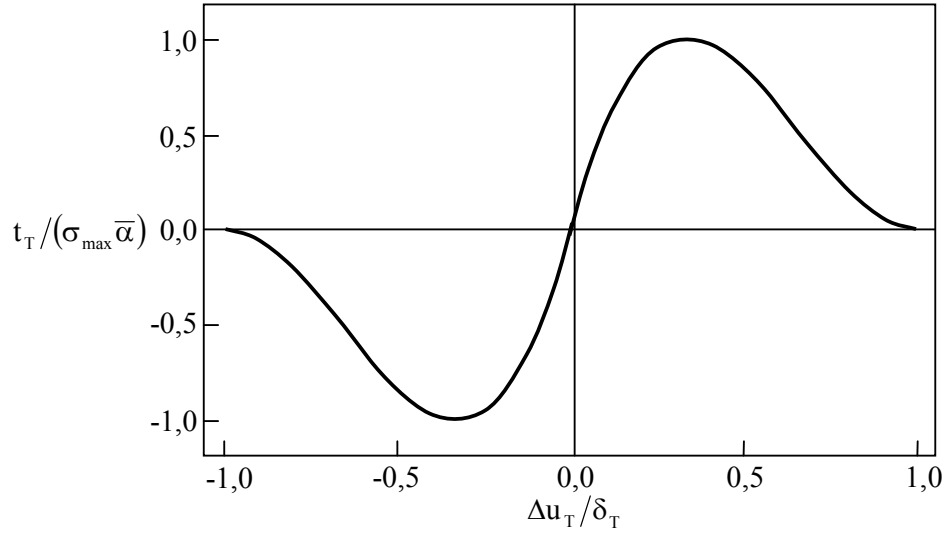


Figura 2.16 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).

Fonte: Tvergaard (1990).

O processo incremental proposto por Tvergaard (1990) para obtenção das trações é tal que, para  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{\max}$  e  $\dot{\bar{\lambda}} \geq 0$ :

$$\dot{t}_N = \frac{\Delta \dot{u}_N}{\delta_N} F(\bar{\lambda}) + \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \frac{\partial F}{\partial \bar{\lambda}} \dot{\bar{\lambda}} \quad (2.42)$$

$$\dot{t}_T = \bar{\alpha} \frac{\Delta \dot{u}_T}{\delta_T} F(\bar{\lambda}) + \frac{\Delta u_T}{\delta_T} \frac{\partial F}{\partial \bar{\lambda}} \dot{\bar{\lambda}} \quad (2.43)$$

onde,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{27}{2} \sigma_{\max} (-1 + \bar{\lambda}) \quad (2.44)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \frac{\Delta \dot{u}_N}{\delta_N} + \frac{\Delta u_T}{\delta_T} \frac{\Delta \dot{u}_T}{\delta_T} \right) \quad (2.45)$$

Uma nova característica desse modelo trata-se da consideração de danificação permanente (plastificação) da interface. Este comportamento é tal que para decrementos no deslocamento efetivo,  $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}_{\max}$  ou  $\dot{\bar{\lambda}} < 0$ , o seguinte descarregamento elástico ocorre:

$$t_N = \frac{\Delta u_N}{\delta_N} F(\bar{\lambda}_{\max}) \quad (2.46)$$

$$t_T = \bar{\alpha} \frac{\Delta u_T}{\delta_T} F(\bar{\lambda}_{\max}) \quad (2.47)$$

Um último detalhe que difere esse modelo dos demais se deve à proposição de uma relação específica para o estado de compressão normal, no qual molas elásticas com uma alta rigidez são utilizadas na tentativa de representar o contato, de forma que para  $\Delta u_N < 0$ :

$$t_N = \frac{27}{4} \sigma_{\max} \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \quad (2.48)$$

e,

$$\bar{\lambda} = \left| \frac{\Delta u_T}{\delta_T} \right| \quad (2.49)$$

Conforme a fase de elevação da intensidade das trações (que tem origem no estado nulo de tração e prossegue até a resistência máxima do material) apresentada nas Figuras 2.15 e 2.16, verifica-se que o modelo de Tvergaard (1990) também pode ser classificado como um modelo de fratura coesiva do tipo intrínseco.

### 2.3.5 Modelo Multilinear de Tvergaard e Hutchinson

Dando continuidade ao desenvolvimento de modelos de fratura coesiva, Tvergaard e Hutchinson (1992) propuseram um modelo multilinear para investigação de fraturas puramente normais em meios elastoplásticos.

Para definição da relação constitutiva apresentada na Figura 2.17, Tvergaard e Hutchinson (1992) admitiram que o formato multilinear da mesma fosse tal que o trabalho realizado durante todo o processo de separação pudesse ser expresso por:

$$\Phi_{\text{sep}} = \int_0^{\delta_N^{\text{cr}}} t_N d\Delta u_N = \frac{1}{2} \sigma_{\text{max}} (\delta_N^{\text{cr}} + \delta_N^2 - \delta_N^1) \quad (2.50)$$

onde  $\delta_N^1/\delta_N^{\text{cr}}$  e  $\delta_N^2/\delta_N^{\text{cr}}$  são parâmetros que definem a forma do modelo.

Dessa maneira, conforme representado na Figura 2.17, a descrição multilinear das trações (puramente normais) é dada por:

$$t_N(\Delta u_N) = \sigma_{\text{max}} \frac{\Delta u_N}{\delta_N^1} \quad \text{para} \quad \Delta u_N < \delta_N^1 \quad (2.51)$$

$$t_N(\Delta u_N) = \sigma_{\text{max}} \quad \text{para} \quad \delta_N^1 \leq \Delta u_N \leq \delta_N^2 \quad (2.52)$$

$$t_N(\Delta u_N) = \sigma_{\max} \frac{\delta_N^{\text{cr}} - \Delta u_N}{\delta_N^{\text{cr}} - \delta_N^2} \quad \text{para} \quad \delta_N^2 < \Delta u_N \leq \delta_N^{\text{cr}} \quad (2.53)$$

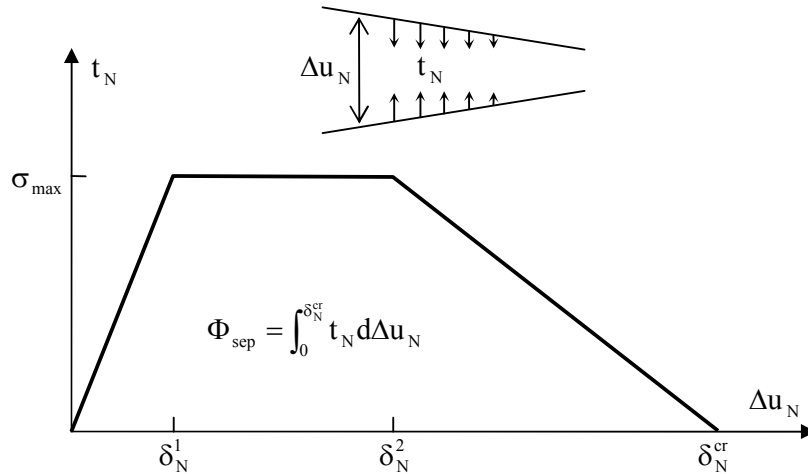


Figura 2.17 – Lei de separação puramente normal.

Fonte: Tvergaard e Hutchinson (1992).

Tvergaard e Hutchinson (1992) mostraram que esse modelo apresenta como característica o fato de, respeitada a definição do trabalho de separação dada pela Equação 2.50, a escolha dos parâmetros de forma  $\delta_N^1/\delta_N^{\text{cr}}$  e  $\delta_N^2/\delta_N^{\text{cr}}$  não tem importância considerável na resposta do modelo. Para que esse modelo de fratura coesiva seja utilizado, os quatro parâmetros a serem especificados são:  $\Phi_{\text{sep}}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta_N^1/\delta_N^{\text{cr}}$  e  $\delta_N^2/\delta_N^{\text{cr}}$ .

Diante do exposto, observa-se que o modelo multilinear de Tvergaard e Hutchinson (1992) apenas representa o fraturamento gerado por abertura puramente normal da interface e tem sua definição baseada no trabalho de separação normal, não existindo um potencial a partir do qual o mesmo possa ser obtido. Além disso, trata-se de um modelo que, por considerar apenas os efeitos do modo I de deformação, é do tipo desacoplado, e por possuir um trecho inicial de ascendência das trações enquadra-se na categoria dos modelos ditos intrínsecos.

### 2.3.6 Modelo Multilinear com Potencial de Tvergaard e Hutchinson

No trabalho de Tvergaard e Hutchinson (1993), apresenta-se uma generalização do modelo multilinear proposto anteriormente (Tvergaard; Hutchinson, 1992). Tal generalização é obtida através da consideração de contribuições normais e tangenciais no vetor de trações da interface, diferindo do modelo proposto em Tvergaard e Hutchinson (1992) onde apenas contribuições normais eram admitidas.

Para formulação desse novo modelo, Tvergaard e Hutchinson (1993) resgataram a idéia inicial de Tvergaard (1990) e adotaram um deslocamento efetivo para representar um acoplamento parcial da resposta da interface, o qual é dado por:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \mathbf{u}_N}{\delta_N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \mathbf{u}_T}{\delta_T}\right)^2} \quad (2.54)$$

Sendo  $\bar{\lambda}$  a medida global das deslocabilidades nas direções normal e tangencial da interface, Tvergaard e Hutchinson (1993) definiram uma lei de separação generalizada para as trações na interface, conforme ilustrado na Figura 2.18. Com base nesse esquema, Tvergaard e Hutchinson (1993) admitiram a existência de um potencial, o qual é descrito pela seguinte expressão:

$$\Phi(\Delta \mathbf{u}_N, \Delta \mathbf{u}_T) = \delta_N \int_0^{\bar{\lambda}} F(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda} \quad (2.55)$$

onde  $F(\tilde{\lambda})$ , graficamente descrita na Figura 2.18, trata-se de uma função que generaliza o comportamento das trações, sendo composta pelas seguintes expressões:

$$F(\tilde{\lambda}) = \sigma_{\max} \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_1} \quad \text{para} \quad \tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}_1 \quad (2.56)$$

$$F(\bar{\lambda}) = \sigma_{\max} \quad \text{para} \quad \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_2 \quad (2.57)$$

$$F(\bar{\lambda}) = \sigma_{\max} \frac{1 - \bar{\lambda}}{1 - \bar{\lambda}_1} \quad \text{para} \quad \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda} \leq 1 \quad (2.58)$$

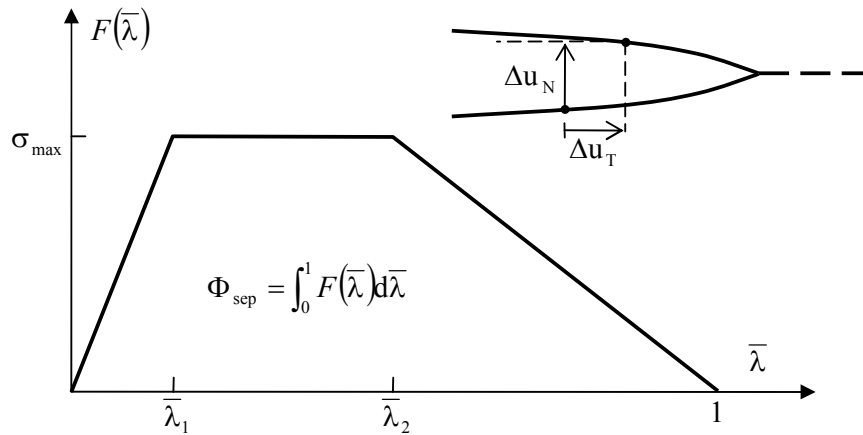


Figura 2.18 – Lei de separação da interface para deslocamentos efetivos.

Fonte: Tvergaard e Hutchinson (1993).

A partir desse potencial, as componentes do vetor de trações na zona de processamento da fratura são calculadas como:

$$t_N = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_N} = \frac{F(\bar{\lambda})}{\bar{\lambda}} \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \quad (2.59)$$

$$t_T = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_T} = \frac{F(\bar{\lambda})}{\bar{\lambda}} \frac{\delta_N}{\delta_T} \frac{\Delta u_T}{\delta_T} \quad (2.60)$$

A relação constitutiva desse modelo é tal que, sob o estado de separação puramente normal (\$\Delta u\_T = 0\$), as trações normais são dadas por:

$$t_N = F(\bar{\lambda}) \quad (2.61)$$

tendo  $\bar{\lambda} = \Delta u_N / \delta_N$ , o que resulta em uma máxima tração puramente normal de  $\sigma_{\max}$ . De maneira análoga, sob o estado de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ), as trações tangenciais são dadas por:

$$t_T = \frac{\delta_N}{\delta_T} F(\bar{\lambda}) \quad (2.62)$$

tendo  $\bar{\lambda} = \Delta u_T / \delta_T$ , o que resulta em uma máxima tração puramente tangencial de  $(\delta_N / \delta_T) \sigma_{\max}$ .

Em adição, observa-se que o trabalho de separação por unidade de área da interface pode ser encontrado através do potencial expresso na Equação 2.55, bastando admitir que  $\bar{\lambda} = 1$ , ou seja,

$$\Phi_{\text{sep}} = \int_0^1 F(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda} = \frac{1}{2} \sigma_{\max} \delta_N (1 - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2) \quad (2.63)$$

Segundo Tvergaard e Hutchinson (1993), essa lei de separação pode ser determinada a partir da especificação dos parâmetros  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta_N$  e  $\delta_T$  ou até mesmo dos  $\Phi_{\text{sep}}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta_N / \delta_T$ ,  $\bar{\lambda}_1$  e  $\bar{\lambda}_2$ .

Dentre as características desse modelo, as mais evidentes são: trata-se de um modelo parcialmente acoplado, tendo em vista que se utiliza de deslocamentos efetivos; tem suas trações definidas a partir da imposição da existência de um potencial; e, por possuir trechos de ascendência inicial das trações (Equações 2.61 e 2.62 e Figura 2.18), enquadra-se na categoria dos modelos ditos intrínsecos.



### 2.3.7 Modelo Exponencial/Periódico de Xu e Needleman

No trabalho de Xu e Needleman (1993), as representações das relações constitutivas correspondentes às trações nas interfaces são descritas a partir de um potencial exponencial/periódico ou de um potencial exponencial/exponencial. O modelo resultante do potencial de formato exponencial/periódico é discutido neste tópico, enquanto que o do potencial exponencial/exponencial é tratado no tópico seguinte.

O modelo exponencial/periódico de Xu e Needleman (1993) tem a definição das relações constitutivas referentes às trações normais e tangenciais influenciadas pelos trabalhos de Rose et al. (1981, 1983) e Beltz e Rice (1991), respectivamente. Rose et al. (1981, 1983) demonstraram que a relação entre as trações normais e os deslocamentos na direção correspondente, na escala atômica, pode ser ajustada através de uma lei de variação exponencial. Resultados análogos de Beltz e Rice (1991) indicam que o cisalhamento entre planos atômicos respeita uma lei de variação periódica. Fundamentado nessas pesquisas, Xu e Needleman (1993) adotaram o seguinte potencial exponencial/periódico:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = & \Phi_N + \Phi_N \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \\ & \times \left[ \left( q + \frac{\bar{r} - q}{\bar{r} - 1} \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right) \text{sen}^2\left(\frac{\pi \Delta u_T}{\delta_T}\right) - \left( 1 + \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

com,

$$q = \frac{\Phi_T^I}{\Phi_N} \quad (2.65)$$

e,

$$\bar{r} = \frac{\Delta u_N^*}{\delta_N} \quad (2.66)$$

sendo  $\Phi_N$  o trabalho de separação normal,  $\Phi_I^T$  a energia de empilhamento instável (RICE, 1992) e  $\Delta u_N^*$  o valor de  $\Delta u_N$  obtido depois de promover um cisalhamento de  $\Delta u_T = \frac{1}{2}\delta_T$  sob tensão normal nula ( $t_N = 0$ ), além de  $q$  e  $\bar{r}$  que são parâmetros de acoplamento do modelo.

Definido esse potencial, as componentes do vetor de tração são obtidas como:

$$t_N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_N} = -\frac{\Phi_N}{\delta_N} \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \times \left[ \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \cos^2\left(\frac{\pi \Delta u_T}{\delta_T}\right) + \frac{1-q}{\bar{r}-1} \text{sen}^2\left(\frac{\pi \Delta u_T}{\delta_T}\right) \left(\bar{r} - \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \right] \quad (2.67)$$

$$t_T = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_T} = -\frac{\Phi_N}{\delta_N} \frac{\pi \delta_N}{\delta_T} \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \times \left[ q + \frac{\bar{r}-q}{\bar{r}-1} \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right] \text{sen}\left(\frac{2\pi \Delta u_T}{\delta_T}\right) \quad (2.68)$$

Essas trações são tais que o trabalho de separação normal e a energia de empilhamento instável são dados, respectivamente, por:

$$\Phi_N = \sigma_{\max} e \delta_N \quad (2.69)$$

$$\Phi_{\Gamma}^I = \frac{1}{\pi} \tau_{\max} \delta_{\Gamma} \quad (2.70)$$

com  $e = \exp(1)$ .

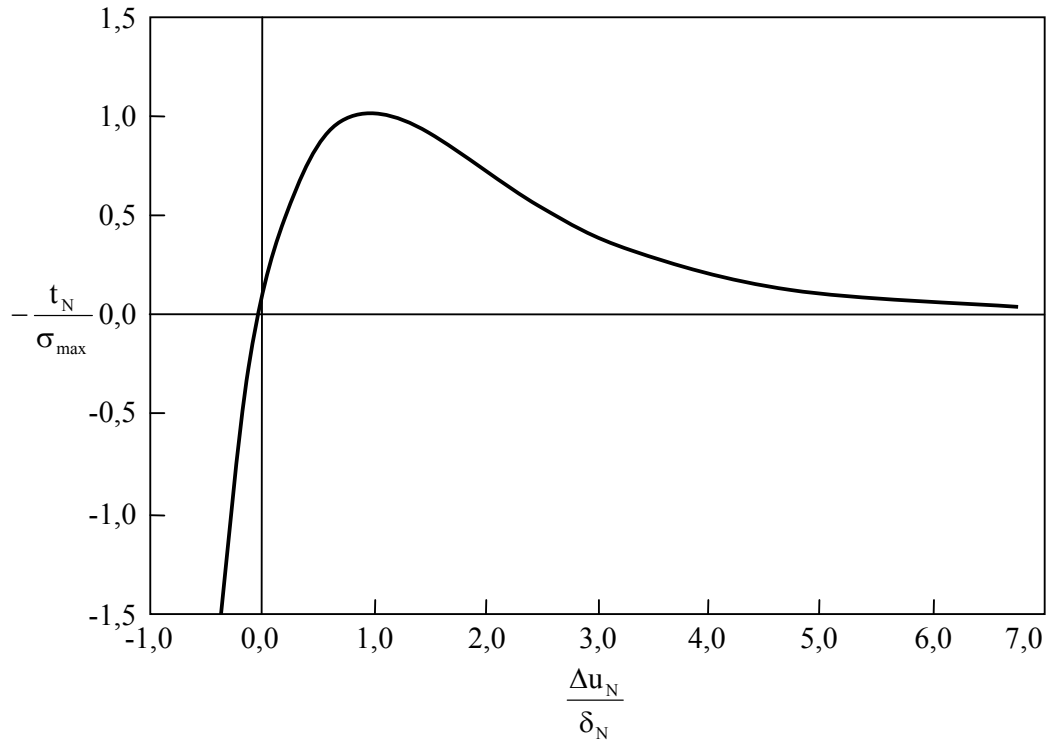


Figura 2.19 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_{\Gamma} = 0$ ).

Fonte: Xu e Needleman (1993).

A reprodução da resposta gráfica das trações normal e tangencial sob os estados de separação puramente normal e tangencial é dada nas Figuras 2.19 e 2.20, respectivamente. Observando a Figura 2.19, verifica-se que a máxima tração normal negativa  $-t_N = \sigma_{\max}$  ocorre para  $\Delta u_N = \delta_N$ . No caso da máxima tração tangencial em módulo, os valores correspondentes são  $|t_{\Gamma}| = \tau_{\max}$  para  $|\Delta u_{\Gamma}| = \delta_{\Gamma}/4$  e  $|\Delta u_{\Gamma}| = 3\delta_{\Gamma}/4$  (Figura 2.20).

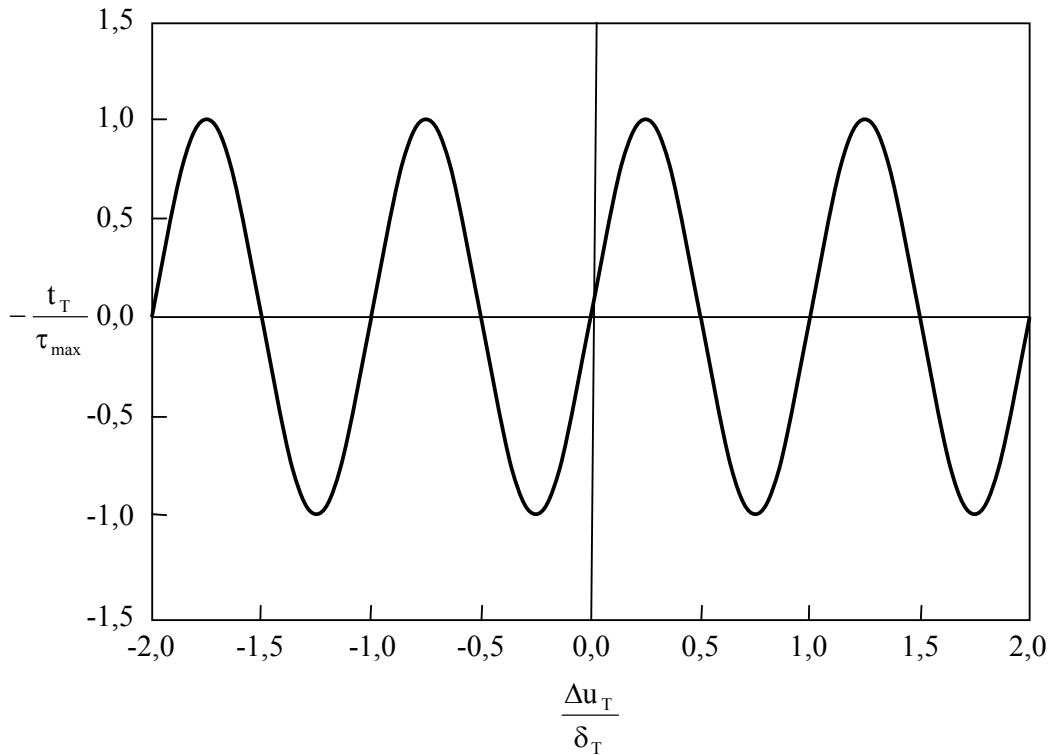


Figura 2.20 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).

Fonte: Xu e Needleman (1993).

Os parâmetros necessários para utilização desse modelo de fratura coesiva são: a máxima tensão normal suportada pelo material  $\sigma_{\max}$ ; a máxima tensão cisalhante resistida pelo material  $\tau_{\max}$ ; e, os parâmetros de acoplamento  $q$  e  $\bar{r}$ .

Analisando o modelo de exponencial/periódico de Xu e Needleman (1993), verifica-se que a existência de uma fase inicial de crescimento das trações nas Figuras 2.19 e 2.20 indica que esse modelo coesivo possui um critério de falha intrinsecamente incorporado. O mesmo é do tipo acoplado, visto que as trações normal e tangencial dependem dos deslocamentos relativos nas direções normal e tangencial, além de se utilizar de parâmetros de acoplamento. Embora seja capaz de simular problemas onde o deslocamento relativo na direção tangencial seja elevado, não possibilita a representação de falhas puramente tangenciais, visto que a periodicidade do modelo faz com que o trabalho total realizado pelos deslocamentos tangenciais seja nulo no período  $\delta_T$ , o que inviabiliza a simulação falhas puramente tangenciais.

### 2.3.8 Modelo Exponencial/Exponencial de Xu e Needleman

O segundo modelo de fratura coesiva apresentada no trabalho de Xu e Needleman (1993) é do tipo exponencial/exponencial. A adoção da forma exponencial na descrição da lei de variação das trações tangenciais teve por motivação a possibilidade de formular um modelo que permitisse a ocorrência de falhas puramente tangenciais.

Dessa forma, Xu e Needleman (1993) admitiram que as trações através da interface pudessem ser obtidas a partir do seguinte potencial exponencial/exponencial:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = & \Phi_N + \Phi_N \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \\ & \times \left[ \left(1 - \bar{r} + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \frac{1-q}{\bar{r}-1} - \left(q + \frac{\bar{r}-q}{\bar{r}-1} \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

com,

$$q = \frac{\Phi_T}{\Phi_N} \quad (2.72)$$

e,

$$\bar{r} = \frac{\Delta u_N^*}{\delta_N} \quad (2.73)$$

sendo  $\Phi_N$  o trabalho de separação normal,  $\Phi_T$  o trabalho de separação tangencial e  $\Delta u_N^*$  o valor de  $\Delta u_N$  obtido depois de promover uma separação cisalhante completa

sob tensão normal nula ( $t_N = 0$ ), além de  $q$  e  $\bar{r}$  que são parâmetros de acoplamento do modelo.

Definido esse potencial, as componentes do vetor de tração são obtidas como:

$$t_N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_N} = -\frac{\Phi_N}{\delta_N} \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \times \left\{ \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) + \frac{1-q}{\bar{r}-1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) \right] \left( \bar{r} - \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right) \right\} \quad (2.74)$$

$$t_T = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_T} = -\frac{\Phi_N}{\delta_N} \frac{2\delta_N}{\delta_T} \frac{\Delta u_T}{\delta_T} \left( q + \frac{\bar{r}-q}{\bar{r}-1} \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right) \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) \quad (2.75)$$

Essas trações são tais que o trabalho de separação nas direções normal e tangencial são dados, respectivamente, por:

$$\Phi_N = \sigma_{\max} e \delta_N \quad (2.76)$$

$$\Phi_T = \tau_{\max} \delta_T \sqrt{\frac{e}{2}} \quad (2.77)$$

com  $e = \exp(1)$ .

A representação gráfica das trações normal e tangencial sob os estados de separação puramente normal e tangencial é dada nas Figuras 2.21 e 2.22, respectivamente. Observando a Figura 2.21, verifica-se que a máxima tração normal

negativa  $-t_N = \sigma_{\max}$  ocorre para  $\Delta u_N = \delta_N$ . No caso da máxima tração tangencial em módulo, o valor correspondente para  $|t_T| = \tau_{\max}$  é  $|\Delta u_T| = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_T$  (Figura 2.22).

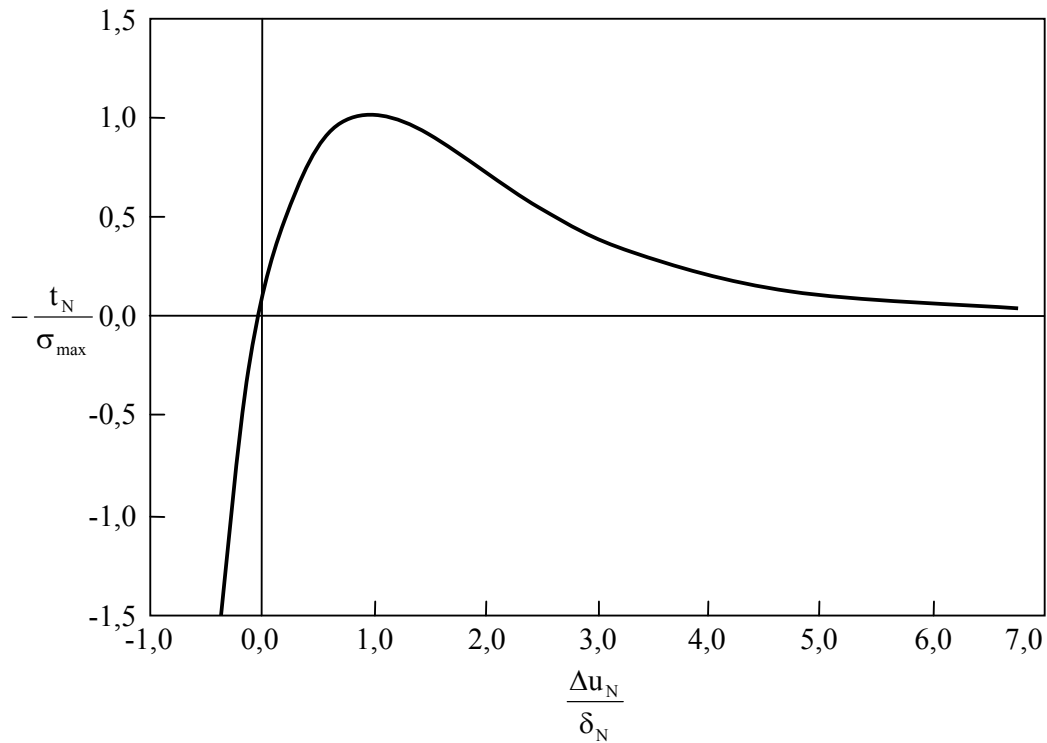


Figura 2.21 – Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ).

Fonte: Xu e Needleman (1993).

Os parâmetros necessários para utilização desse modelo de fratura coesiva são a máxima tensão normal suportada pelo material  $\sigma_{\max}$ , a máxima tensão cisalhante resistida pelo material  $\tau_{\max}$  e os parâmetros de acoplamento  $q$  e  $\bar{r}$ .

Esse modelo exponencial/exponencial de Xu e Needleman (1993) permite que as seguintes considerações sejam realizadas. A existência de uma fase inicial de crescimento das trações nas Figuras 2.21 e 2.22 indica que esse modelo coesivo possui um critério de falha intrinsecamente incorporado. O mesmo é do tipo acoplado, tendo em vista que as trações normal e tangencial dependem dos deslocamentos relativos nas direções normal e tangencial, além de se utilizar de parâmetros de acoplamento. E não

apenas possibilita a simulação de problemas onde o deslocamento relativo na direção tangencial seja elevado, mas também permite a representação de falhas puramente tangenciais. A associação de tais características fez com que o modelo exponencial/exponencial de Xu e Needleman (1993) se tornasse um dos modelos de fratura coesiva mais divulgados na literatura científica. Tal notoriedade foi impulsionada, principalmente, após Xu e Needleman (1994) se utilizarem desse modelo para simulação de fraturas ramificadas que ocorrem em uma placa, sob deformação plana, com uma trinca inicial, quando a mesma é submetida a uma tração de impacto. Com esta aplicação, Xu e Needleman (1994) demonstraram que o modelo exponencial/exponencial era capaz de simular a ramificação de trincas como um resultado natural da solução de um problema de valor de contorno inicial, dispensando a necessidade de assumir hipóteses ad hoc para descrição desse fenômeno da Mecânica da Fratura repleto de instabilidades.

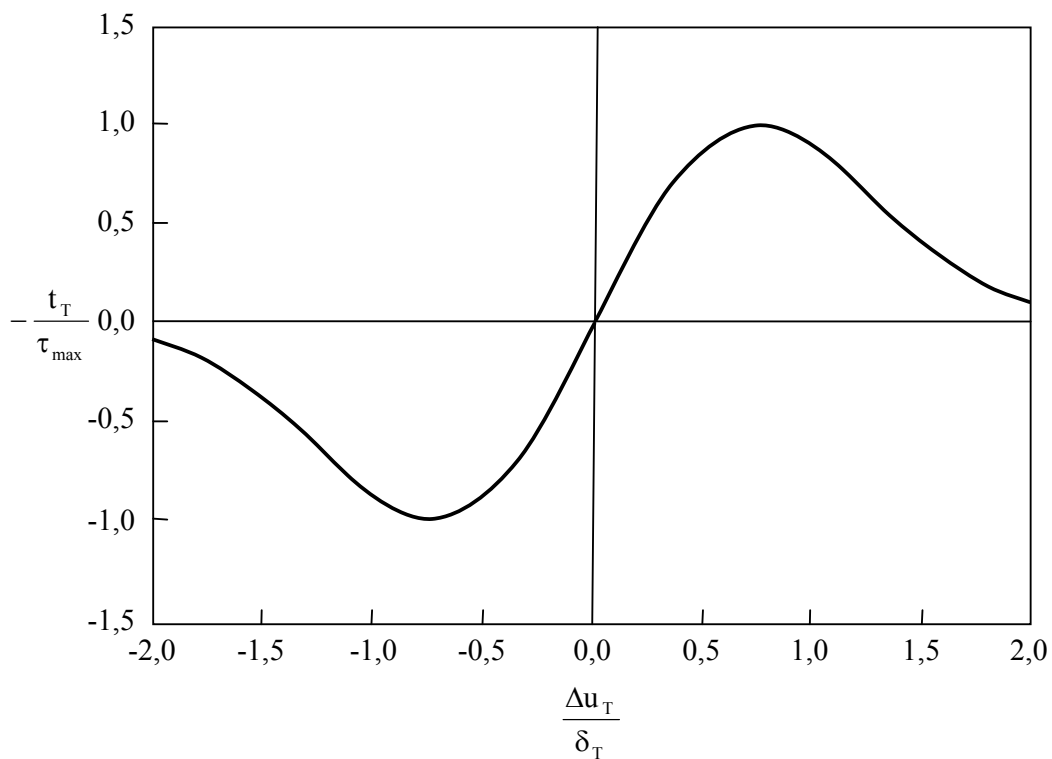


Figura 2.22 – Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).

Fonte: Xu e Needleman (1993).



### 2.3.9 Modelo Rígido e Linear de Camacho e Ortiz

Neste modelo de fratura coesiva, Camacho e Ortiz (1996) apresentam uma nova estratégia para propiciar a simulação de diversos mecanismos de fraturamento. Divergindo das técnicas utilizadas até o momento, Camacho e Ortiz (1996) optaram por definir um critério extra para indicar a inicialização do processamento da fratura.

Conforme mencionado no princípio desta seção, os modelos coesivos que se utilizam de critérios extras para medir a indicação da condição de início de fratura são classificados como extrínsecos. Uma vez que os elementos coesivos não são responsáveis por tal tarefa, não há razão para que os mesmos sejam incorporados à malha de elementos finitos no início da análise. Na verdade, isso deve ocorrer apenas quando a condição de início de fratura seja verificada, instante em que os mesmos podem ser inseridos e, a partir desse ponto, cumprirem seus papéis de simular a propagação da fratura.

Dessa forma, as análises realizadas com o modelo de Camacho e Ortiz (1996) têm início sem a presença de nenhum elemento coesivo na malha, o que torna o procedimento numérico empregado por Camacho e Ortiz (1996), significativamente, diferente dos já abordados neste trabalho, tendo em vista que os elementos coesivos são incluídos na análise em tempo de execução.

O critério de inicialização de falha adotado por Camacho e Ortiz (1996) se baseia na quantificação de tensões efetivas ao longo de todos os nós que constituem a malha de elementos finitos que discretiza a geometria do problema. Para medir tais tensões efetivas, as seguintes expressões foram consideradas:

$$\sigma_{ef} = \sqrt{(t_N^n)^2 + \beta_T (t_T^n)^2} \quad \text{para } t_N^n \geq 0 \quad (2.78)$$

quando o corpo que determina o problema está sendo tracionado, e

$$\sigma_{ef} = \left( |t_N^n| + \mu |t_T^n| \right) \sqrt{\beta_T} \quad \text{para } t_N^n < 0 \quad (2.79)$$

quando o corpo que determina o problema está sendo comprimido. Nessas expressões,  $t_N^n$  e  $t_T^n$  são, respectivamente, trações nodais<sup>4</sup> nas direções normal e tangencial, enquanto que  $\beta_T$  e  $\mu$  são o fator de tensão cisalhante e o coeficiente de atrito, respectivamente.

No modelo de Camacho e Ortiz (1996), essas tensões efetivas são calculadas em cada passo de tempo e comparadas com a tensão crítica que o material pode suportar. Dessa forma, o critério extra de fratura proposto por Camacho e Ortiz (1996) é especificado como:

$$\sigma_{ef} \geq \sigma_c \quad (2.80)$$

sendo  $\sigma_c$  a tensão crítica ou de fratura do material, a qual é determinada através da seguinte relação:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a_0}} \quad (2.81)$$

sendo  $K_{Ic}$  a tenacidade à fratura do material e  $a_0$  metade do comprimento inicial de uma trinca presente no problema.

Para definição das relações constitutivas das forças coesivas, representadas na Figura 2.23, Camacho e Ortiz (1996) consideram duas situações distintas:

i. Material sob tração:

Quando o material está sob estado de tração, os valores das componentes normal e tangencial do vetor de trações coesivas decrescem linearmente segundo as relações:

---

<sup>4</sup> Estas trações nodais diferem das trações nos elementos de interface, posto que as mesmas são calculadas a partir das tensões nos elementos finitos, uma vez que no início da análise a malha utilizada por esse modelo apenas possui elementos finitos. As trações nos elementos coesivos, quando os mesmos são inseridos no problema, são obtidas a partir de relações constitutivas específicas e contribuem para quantificação dessas trações nodais, pois os mesmos acrescem uma parcela no vetor de forças do problema, conforme Capítulo III.

$$t_N = \sigma_{\max} \left( 1 - \frac{\Delta u_N}{\delta_N^{\text{cr}}} \right) \quad \text{para } \Delta u_N \geq \Delta u_N^{\max} \quad (2.82)$$

$$t_T = \tau_{\max} \left( \frac{\Delta u_N}{\delta_N^{\text{cr}}} \right) \frac{\Delta u_T}{|\Delta u_T|} \quad \text{para } \Delta u_N \geq \Delta u_N^{\max} \quad (2.83)$$

para a situação onde o deslocamento relativo na direção normal é maior ou igual ao valor máximo de tal medida durante a história de carregamento, podendo chegar até a condição de separação total quando  $\Delta u_N = \delta_N^{\text{cr}}$ . Nas Equações 2.82 e 2.83,  $\Delta u_N^{\max}$  representa o maior deslocamento relativo na história da análise e  $\delta_N^{\text{cr}}$  o valor crítico do deslocamento relativo, ambos medidos na direção normal.

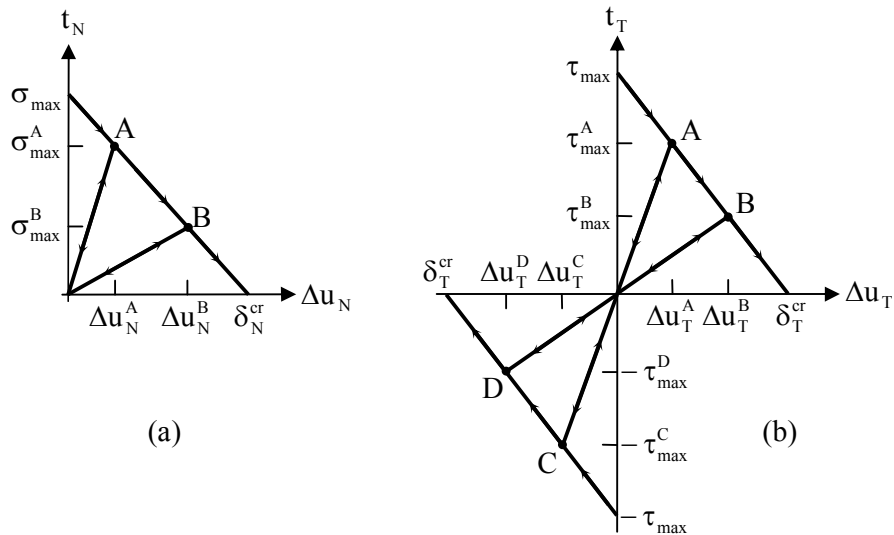


Figura 2.23 – (a) Trações normais através da interface para um processo de separação puramente normal ( $\Delta u_T = 0$ ), (b) Trações tangenciais através da interface para um processo de separação puramente tangencial ( $\Delta u_N = 0$ ).

Fonte: Camacho e Ortiz (1996).

Caso o deslocamento relativo medido na direção normal seja menor que o valor máximo dessa informação ao longo de toda história da análise, um descarregamento elástico, que representa o fechamento da trinca, é realizado da seguinte forma:

$$t_N = \sigma_{\max} \left( 1 - \frac{\Delta u_N^{\max}}{\delta_N^{\text{cr}}} \right) \frac{\Delta u_N}{\Delta u_N^{\max}} \quad \text{para } \Delta u_N < \Delta u_N^{\max} \quad (2.84)$$

$$t_T = \tau_{\max} \left( 1 - \frac{\Delta u_N^{\max}}{\delta_N^{\text{cr}}} \right) \frac{\Delta u_N}{\Delta u_N^{\max}} \frac{\Delta u_T}{|\Delta u_T|} \quad \text{para } \Delta u_N < \Delta u_N^{\max} \quad (2.85)$$

Conforme Figura 2.23a, esse descarregamento é tal que a trinca pode fechar completamente. Em qualquer instante, se a trinca começar a reabrir, a trajetória de carregamento utilizada é a mesma do descarregamento. Atingido o ponto de  $\Delta u_N^{\max}$ , as trações coesivas novamente decrescem linearmente segundo as Equações 2.82 e 2.83.

ii. Material sob compressão:

Estando o material sob um estado de compressão, a relação constitutiva que representa o decréscimo linear das trações tangenciais para aumento monotônico do deslocamento relativo na direção tangencial, segundo a Figura 2.23b, é dada por:

$$t_T = \tau_{\max} \left( 1 - \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T^{\text{cr}}} \right) \frac{\Delta u_T}{|\Delta u_T|} \quad \text{para } |\Delta u_T| \geq |\Delta u_T^{\max}| \quad (2.86)$$

podendo chegar até zero para  $|\Delta u_T| = \delta_T^{\text{cr}}$ . Na Equação 2.177,  $\Delta u_T^{\max}$  representa o maior deslocamento relativo na história da análise e  $\delta_T^{\text{cr}}$  o valor crítico do deslocamento relativo, ambos medidos na direção tangencial.

Caso  $|\Delta u_T| < |\Delta u_T^{\max}|$ , um descarregamento elástico, que representa o fechamento da trinca, é realizado da seguinte forma:

$$t_T = \tau_{\max} \left( 1 - \frac{|\Delta u_T^{\max}|}{\delta_T^{\text{cr}}} \right) \frac{\Delta u_T}{|\Delta u_T^{\max}|} \quad \text{para } |\Delta u_T| < |\Delta u_T^{\max}| \quad (2.87)$$

Conforme Figura 2.23b, esse descarregamento é tal que a trinca pode fechar completamente. Em qualquer instante, se a trinca começar a reabrir a trajetória de carregamento utilizada é a mesma do descarregamento. Atingido o ponto de  $|\Delta u_T^{\max}|$ , as trações coesivas na direção tangencial novamente decrescem linearmente segundo a Equação 2.86.

Para casos onde ocorre fechamento de trinca sob compressão, Camacho e Ortiz (1996) também propõem a utilização de forças de contato nas direções normal e tangencial, além das trações tangenciais fornecidas pelas Equações 2.86 e 2.87.

Dentre os mecanismos de fraturamento que esse modelo coesivo é capaz de simular, Camacho e Ortiz (1996) destacam: inicialização de fraturas nas superfícies dos bordos e no interior do meio; propagação de fraturas; ramificação de fraturas; fechamento de trincas devido ao contato e/ou atrito entre interfaces; e fragmentação. As condições de contato e atrito são implementadas através de um algoritmo de contato descrito em Camacho e Ortiz (1996).

As principais desvantagens relatadas na literatura técnica a respeito desse modelo são relacionadas a dois fatores: pela necessidade de um critério extra para definição da condição de inicialização da propagação da trinca; e, pelo uso de tensões efetivas em oposição a informações fisicamente mais consistentes.

Cabe ressaltar que embora se tratando de um modelo extrínseco e não apresentando os mesmo níveis de instabilidade numérica dos modelos intrínsecos, nem mesmo incluindo rigidez artificial no sistema sem necessidade, a eficiência computacional desse modelo está condicionada a implementação otimizada de relações de adjacência topológica (CELES et al., 2005a, 2005b).

## 2.4 Modelo Coesivo Implementado

Neste trabalho, opta-se por realizar a implementação computacional do modelo coesivo exponencial/exponencial de Xu e Needleman (1993, 1994). A escolha por tal modelo coesivo deve-se a alguns fatores, dentre os quais se podem destacar:

- i. Trata-se de um modelo coesivo que é capaz de simular a separação total das interfaces coesivas em ambas as direções normal e tangencial;
- ii. Possui incorporado na sua relação constitutiva um critério de resistência à interpenetração entre as faces que constituem a interface coesiva;
- iii. Tem a capacidade de simular fenômenos importantes da Mecânica da Fratura, tais como a nucleação de trincas e as ramificações das mesmas;
- iv. Sua implementação computacional não requer a alteração em tempo de execução da estrutura topológica do problema;
- v. Os mecanismos de falha são simulados como um resultado natural da solução do problema de valor de contorno inicial, dispensando a necessidade de qualquer critério adicional.

# Capítulo III

## FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

---

### 3.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, apresenta-se uma breve descrição da formulação matemática que governa o problema dinâmico de propagação de fraturas por meio de modelos coesivos. Inicialmente, a ênfase deste capítulo encontra-se focada na formulação do problema por meio da consideração do regime de pequenas deformações. Na seqüência, todo equacionamento é estendido para o regime de grandes deformações.

### 3.2 Formulação do Problema

A investigação dos mecanismos de propagação de fratura por meio de modelos de fratura coesiva configura-se como uma tarefa que, em geral, despõe um elevado custo computacional. Esta dificuldade cresce, consideravelmente, com o aumento do número de superfícies coesivas existentes. Para casos em que esse custo computacional é excessivamente elevado, uma análise mais simplificada, a exemplo da consideração do regime de pequenas deformações pode ser adotada. Em contrapartida, são bastante comuns os casos onde os elementos finitos, os quais descrevem a discretização espacial da geometria que define o domínio do problema, estão sujeitos a condições intensas de deformabilidade e de rotação. Para tratar de forma adequada tais casos, a adoção de um regime de grandes deformações é necessária.

### 3.2.1 Regime de Pequenas Deformações

Quando ausente de fraturas, um corpo sólido arbitrário sob a ação de condições de contorno naturais (de tração) e essenciais (de deslocamento) pode ser representado graficamente pelo esquema da Figura 3.1.

Esta descrição do problema em meio contínuo, sem formação de zonas de processamento de fraturas, permite admitir que as condições de contorno sejam constituídas a partir da superposição das condições de contorno relativas a trações e deslocamentos, ou seja,

$$\Gamma = \Gamma^{\text{ext}} \cup \Gamma^{\text{int}} \quad (3.1)$$

$$\Gamma^{\text{ext}} = \Gamma_{\text{T}}^{\text{ext}} \cup \Gamma_{\text{u}}^{\text{ext}} \quad (3.2)$$

$$\Gamma^{\text{int}} = \emptyset \quad (3.3)$$

onde  $\Gamma$  é a superfície de contorno, a qual pode ser formada a partir da contribuição de superfícies externas ( $\Gamma^{\text{ext}}$ ) e internas ( $\Gamma^{\text{int}}$ ). Nesse caso, as condições de contorno oriundas da superfície externa do meio são compostas por  $\Gamma_{\text{T}}^{\text{ext}}$  e  $\Gamma_{\text{u}}^{\text{ext}}$ , as quais são, respectivamente, as condições de contorno do problema em tração e em deslocamento. Em contraste, a falta de forças ou deslocamentos prescritos em uma região de fronteira interior conduz a inexistência de condições de contorno no bordo interior.

De forma a facilitar o entendimento e a posterior implementação computacional desse problema através do Método dos Elementos Finitos, o mesmo pode ser formulado segundo o Método dos Resíduos Ponderados (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).



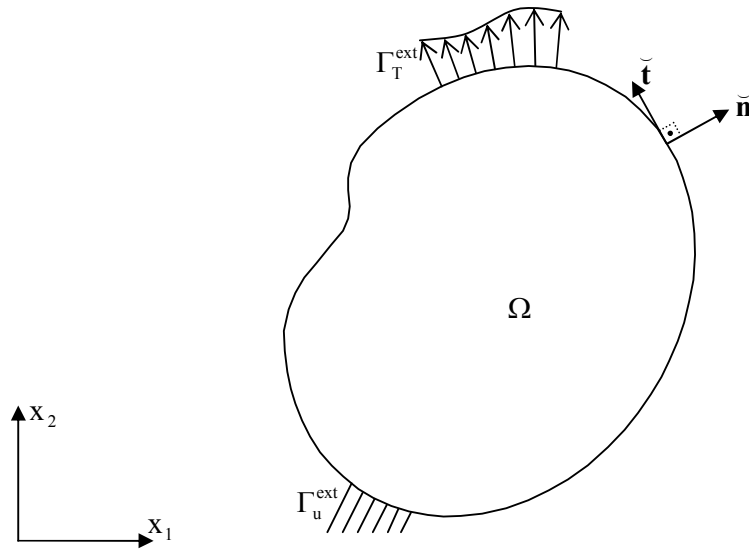


Figura 3.1 – Representação de um sólido arbitrário não fraturado.

O estabelecimento do equilíbrio dinâmico, sem a presença de forças de volume, pode ser representado matematicamente pelas equações diferenciais do equilíbrio, as quais em notação indicial assumem a seguinte forma:

$$\sigma_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

onde  $\sigma_{ij}$ ,  $\rho$  e  $u_i$  são, respectivamente, as componentes do tensor de tensões de Cauchy (força por unidade de área na geometria deformada), a densidade do material e as componentes do vetor de deslocamentos, todos representados no domínio,  $(\cdot)_{,i}$  representa a diferenciação parcial em relação a coordenada  $x_i$  e  $(\dot{\cdot})$  a diferenciação parcial em relação ao tempo. Os subscritos  $i$  e  $j$  são elementos da notação indicial que referenciam informações associadas às coordenadas  $x_i$  e  $x_j$ , respectivamente.

As condições de contorno de tração e de deslocamento são descritas, respectivamente, como:

$$\sigma_{ji}\tilde{n}_j - t_i = 0 \quad (3.5)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (3.6)$$

onde  $\tilde{n}_j$ ,  $t_i$  e  $\bar{u}_i$  são, respectivamente, as componentes do vetor unitário normal à superfície de contorno do corpo na configuração deformada, as componentes do tensor de trações e dos deslocamentos prescritos nessa superfície de contorno.

Para obter uma aproximação numérica da solução desse problema, admite-se que as Equações 3.4 e 3.5 possam ser ponderadas de tal forma que a seguinte identidade seja respeitada:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} - \rho\ddot{u}_i) \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}\tilde{n}_j - t_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

na qual  $\Omega$  caracteriza o domínio do problema e  $\delta u_i$  representa as componentes de um vetor de deslocamentos virtuais utilizado nessa ponderação. A Equação 3.7 trata-se de uma lei geral que governa o problema de meios contínuos, sejam estes ausentes ou não de superfícies fraturadas.

Considerando-se a identidade matemática,

$$(\sigma_{ji}\delta u_i)_{,j} = \sigma_{ji,j}\delta u_i + \sigma_{ji}\delta u_{i,j} \quad (3.8)$$

a Equação 3.7 assume o seguinte formato:

$$\int_{\Omega} [(\sigma_{ji}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{ji}\delta u_{i,j} - \rho\ddot{u}_i\delta u_i] d\Omega - \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}\tilde{n}_j - t_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.9)$$

o qual, quando da aplicação do Teorema da Divergência, se apresenta como:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji} \delta u_{i,j} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) d\Omega - \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

Devido à simetria do tensor de tensões,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.11)$$

e da realização de algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$\sigma_{ji} \delta u_{i,j} = \sigma_{ji} \left[ \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \right] = \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} \quad (3.12)$$

onde  $\delta \varepsilon_{ij}$  representa a variação das componentes do tensor de deformações virtuais, tensor energeticamente conjugado ao tensor de tensões de Cauchy (CRISFIELD, 1991).

Realizadas tais considerações matemáticas, e observando-se a ausência de superfícies fraturadas, chega-se a forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados, também chamada de Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) d\Omega - \int_{\Gamma^{\text{ext}}} t_i^{\text{ext}} \delta u_i d\Gamma^{\text{ext}} = 0 \quad (3.13)$$

onde  $t_i^{\text{ext}}$  refere-se às componentes do tensor de trações na superfície externa, a qual representa a configuração deformada do corpo.

Ao se considerar a presença de forças de natureza coesiva agindo sob uma superfície fraturada, conforme ilustrado na Figura 3.2, percebe-se que a Equação 3.3

deve ser reformulada, passando a admitir a contribuição de mais uma parcela de condições de contorno, chegando-se a:

$$\Gamma^{\text{int}} = \Gamma^{\text{coe}} \quad (3.14)$$

onde  $\Gamma^{\text{coe}}$  refere-se as condições de contorno devido a forças coesivas.

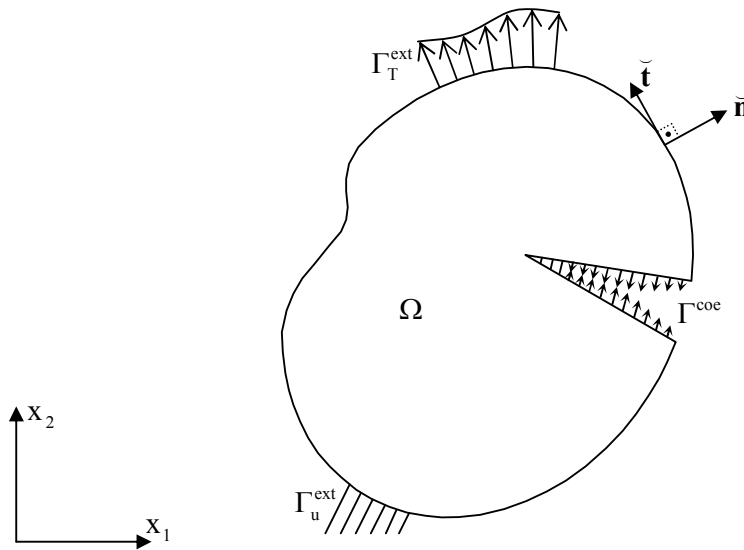


Figura 3.2 – Representação de um sólido arbitrário com fratura coesiva.

Considerando essa nova concepção física, verifica-se que partindo da Equação 3.7 e realizando as considerações físicas e matemáticas descritas anteriormente, chega-se a equação que governa o problema dinâmico de fraturas coesivas (Princípio dos Trabalhos Virtuais – forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) d\Omega - \int_{\Gamma^{\text{ext}}} t_i^{\text{ext}} \delta u_i d\Gamma^{\text{ext}} - \int_{\Gamma^{\text{coe}}} t_i^{\text{coe}} \delta \Delta u_i d\Gamma^{\text{coe}} = 0 \quad (3.15)$$

onde  $t_1^{\text{coc}}$  representa as componentes do vetor de trações coesivas e  $\Delta u_i$  as componentes do vetor dos deslocamentos que caracterizam a abertura da fissura coesiva, ambos atuantes na superfície coesiva  $\Gamma^{\text{coc}}$ .

O Princípio dos Trabalhos Virtuais da forma descrita na Equação 3.15, considerando a contribuição de uma parcela resultante do trabalho realizado a partir da separação de superfícies coesivas, foi primeiramente apresentado no clássico trabalho de Needleman (1987).

### 3.2.2 Regime de Grandes Deformações

Para análise de sólidos e de estruturas, a descrição Lagrangeana, que considera a formulação do equilíbrio dinâmico na configuração indeformada, representa de forma mais natural e efetiva a origem do problema (BATHE, 1996). No regime de pequenas deformações, as formulações Lagrangeana e Euleriana apresentam resultados bastante semelhantes e a configuração deformada do sistema pode ser aproximada pela configuração indeformada, quando da adoção da descrição Euleriana (CRISFIELD, 1991). Em contrapartida, ao se admitir um regime de grandes deformações, a compatibilidade entre a configuração de referência (indeformada ou deformada) e a formulação adotada (Lagrangeana ou Euleriana) possui um nível de influência considerável na precisão e consistência dos resultados. Assim sendo, visando-se realizar uma melhor adequação entre a formulação apresentada e a natureza do problema a ser analisado, a descrição Lagrangeana é adotada no decorrer do texto.

Tendo em vista essa discussão introdutória, surge a necessidade de reformular as Equações 3.4 a 3.15 de tal forma que as mesmas satisfaçam, dentro do regime de grandes deformações, a formulação Lagrangeana. Nesse caso, as coordenadas deformadas são mapeadas em função das coordenadas indeformadas e do tempo, ou seja,

$$x_i = x_i(X_i, t) \quad (3.16)$$

onde  $X_i$  representa as componentes do vetor de posições na configuração indeformada e  $t$  o tempo, ambos variáveis independentes do problema.

A Figura 3.3 ilustra as deslocabilidades de um corpo arbitrário não fraturado através do mapeamento de suas posições nas configurações indeformadas e deformadas. Com base nesse esquema, pode-se expressar a seguinte relação:

$$u_i = x_i - X_i \quad (3.17)$$

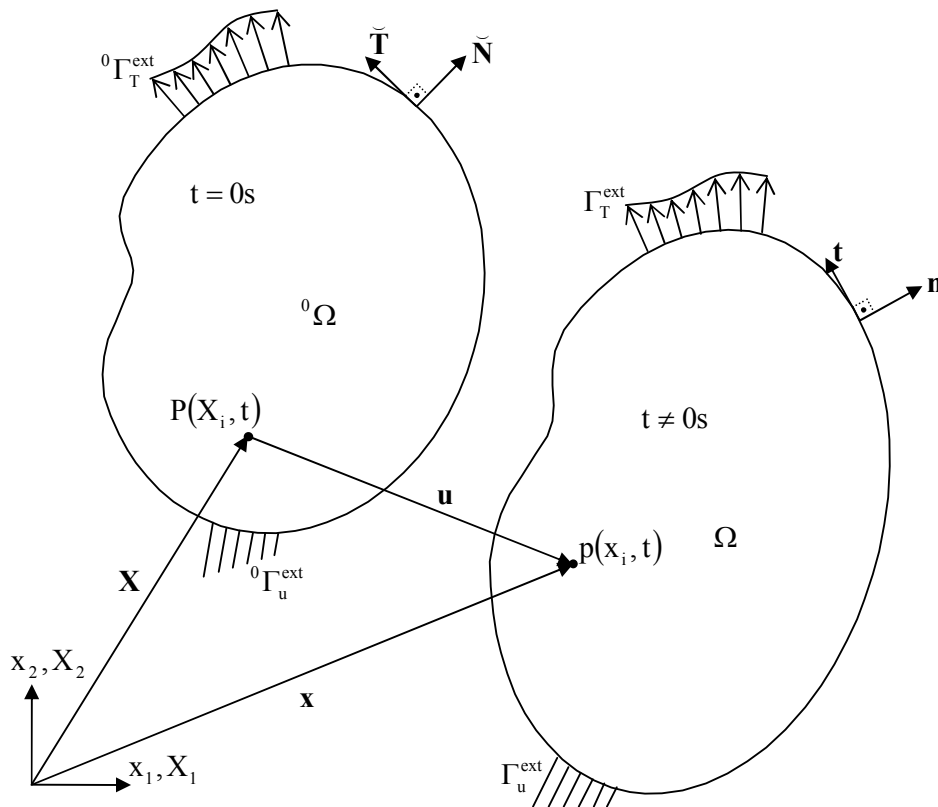


Figura 3.3 – Mapeamento das deslocabilidades de um sólido arbitrário não fraturado no regime de grandes deformações.

Seguindo essa representação Lagrangeana, podem ser definidos os tensores gradientes de deslocamentos e de deformações como:

$$D_{ij} = u_{i,j} \quad (3.18)$$

$$F_{ij} = x_{i,j} \quad (3.19)$$

onde  $( )_{,i}$  representa a diferenciação parcial em relação a coordenada indeformada  $X_i$ . Esta notação torna-se válida no decorrer de todo o texto, excetuando-se menções em contrário.

Com base nas Equações 3.17 e 3.19, o tensor gradiente de deformações pode ser reescrito como:

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j} \quad (3.20)$$

onde  $\delta_{ij}$ , conhecido como delta de Kronecker, representa a diferenciação parcial das coordenadas indeformadas em relação as mesmas ( $X_{i,j}$ ). Portanto, trata-se de um tensor de segunda ordem do tipo identidade.

Definido o tensor gradiente de deformações, a representação matemática do tensor Lagrangeano de deformações, ou tensor de Green-Lagrange, pode ser descrita como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) \quad (3.21)$$

que em termos de deslocamentos pode ser expressa por:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (3.22)$$

Para o cálculo de tensões representativas de informações na configuração indeformada, uma das alternativas comumente recomendadas na literatura técnica trata-se da utilização do primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff,  $P_{ij}$  (força por unidade de área da configuração indeformada). Com base nesse tensor, as Equações 3.4 e 3.5 podem ser redefinidas, chegando-se a:

$$P_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad \text{em } {}^0\Omega \quad (3.23)$$

$$P_{ji} \tilde{N}_j - T_i = 0, \quad \text{em } {}^0\Gamma \quad (3.24)$$

onde  $\tilde{N}_j$  e  $T_i$  são, respectivamente, as componentes do vetor unitário normal à superfície do contorno e do vetor de tração na superfície do contorno, ambos referentes a superfície de contorno definida pela configuração indeformada. O sobrescrito esquerdo, de valor zero, presente nos símbolos representantes do domínio ( ${}^0\Omega$ ) e do contorno ( ${}^0\Gamma$ ) referem-se a determinação dos mesmos na configuração indeformada. Para não sobrecarregar a notação, esse sobrescrito é utilizado apenas nos símbolos do domínio e de contorno. Quando essas informações são representativas da configuração deformada, esse sobrescrito é omitido por questões de simplicidade (Figura 3.3). Obviamente, as condições de contorno, independente de estarem referenciadas à configuração indeformada ou deformada, continuam obedecendo as Equações 3.1, 3.2 e 3.3 (ou 3.14).

O primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff relaciona-se com o tensor de tensões de Cauchy da seguinte forma:



$$P_{ij} = JF_{ik}\sigma_{kj} \quad (3.25)$$

na qual J equivale ao cálculo do determinante do gradiente de deformações, ou seja,

$$J = \det(F_{ij}) \quad (3.26)$$

Essa reformulação nas equações diferenciais de equilíbrio e nas condições de contorno faz com que a equação de ponderação do resíduo seja reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (P_{ji,j} - \rho\ddot{u}_i) \delta u_i d^0\Omega - \int_{\Gamma} (P_{ji}\tilde{N}_j - T_i) \delta u_i d^0\Gamma = 0 \quad (3.27)$$

De forma semelhante ao exposto anteriormente, desconsiderando a presença de superfícies fraturadas (Figura 3.3) e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se a forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados, também chamada de Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\int_{\Omega} (P_{ji}\delta D_{ij} + \rho\ddot{u}_i\delta u_i) d^0\Omega - \int_{\Gamma^{ext}} T_i^{ext}\delta u_i d^0\Gamma^{ext} = 0 \quad (3.28)$$

onde  $\delta D_{ij}$  representa a variação do tensor gradiente de deslocamentos, o qual é energeticamente conjugado ao primeiro tensor de Piola-Kirchhoff (CRISFIELD, 1991).

Quando considerada a presença de condições de contorno oriundas de forças de natureza coesiva, conforme ilustrado na Figura 3.4, verifica-se que o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} (P_{ji} \delta D_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) d^0 \Omega - \int_{\Gamma^{ext}} T_i^{ext} \delta u_i d^0 \Gamma^{ext} - \int_{\Gamma^{coe}} T_i^{coe} \delta \Delta u_i d^0 \Gamma^{coe} = 0 \quad (3.29)$$

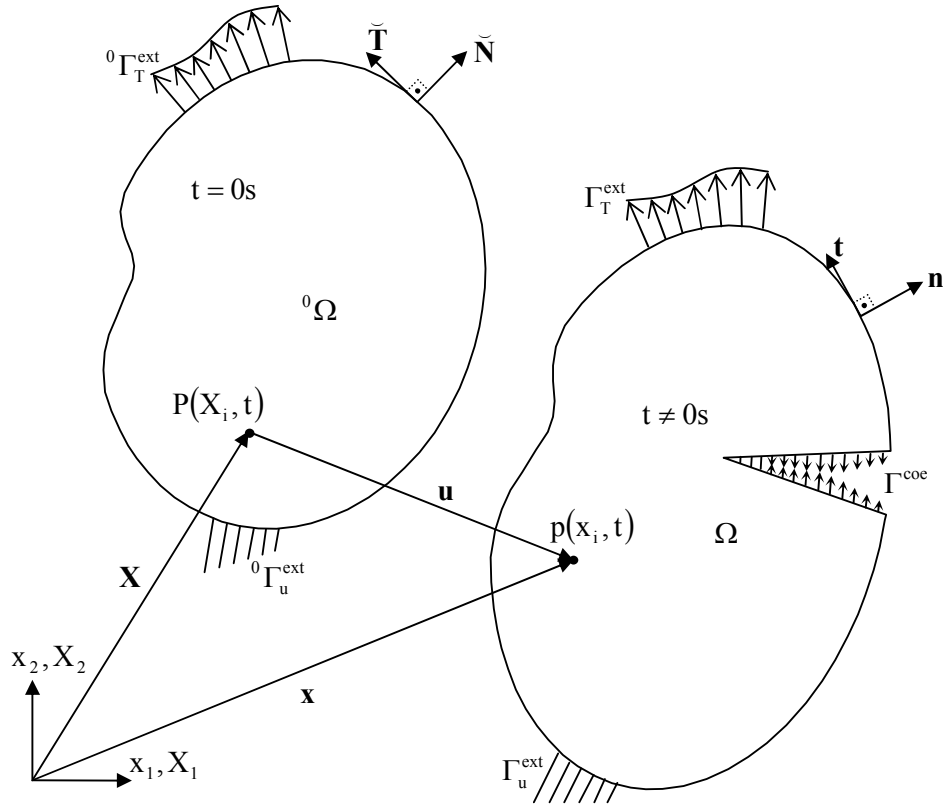


Figura 3.4 – Mapeamento das deslocabilidades de um sólido arbitrário fraturado no regime de grandes deformações.

Uma outra alternativa de representação das tensões referentes à configuração indeformada pode ser obtida através do cálculo do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff,  $S_{ij}$  (força por unidade de área da configuração indeformada). Essa descrição alternativa possui o atrativo de resultar em um tensor de tensões simétrico, o que implica em vantagens computacionais, a exemplo da facilidade de armazenamento (devido à conservação do perfil e/ou banda desse tensor de segunda ordem). Com base nesse tensor, as Equações 3.4 e 3.5 podem ser novamente redefinidas, chegando-se a:

$$S_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad \text{em } {}^0 \Omega \quad (3.30)$$

$$S_{ji}\tilde{N}_j - T_i = 0, \quad \text{em } {}^0\Gamma \quad (3.31)$$

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff relaciona-se com o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e com o tensor de tensões de Cauchy das seguintes formas:

$$S_{ij} = F_{ik}P_{kj} \quad (3.32)$$

$$S_{ij} = JF_{ik}F_{jl}\sigma_{kl} \quad (3.33)$$

Essa nova reformulação nas equações diferenciais de equilíbrio e nas condições de contorno faz com que a equação de ponderação do resíduo seja novamente reescrita, de tal forma que:

$$\int_{\Omega} (S_{ji,j} - \rho\ddot{u}_i)\delta u_i d^0\Omega - \int_{{}^0\Gamma} (S_{ji}\tilde{N}_j - T_i)\delta u_i d^0\Gamma = 0 \quad (3.34)$$

Desconsiderando mais uma vez a presença de superfícies fraturadas (Figura 3.3) e realizando algumas manipulações algébricas, chega-se novamente a forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados:

$$\int_{\Omega} (S_{ji}\delta E_{ij} + \rho\ddot{u}_i\delta u_i) d^0\Omega - \int_{{}^0\Gamma^{ext}} T_i^{ext}\delta u_i d^0\Gamma^{ext} = 0 \quad (3.35)$$

onde  $\delta E_{ij}$  representa a variação do tensor de deformações de Green-Lagrange, o qual é o tensor de deformações energeticamente conjugado ao segundo tensor de Piola-Kirchhoff (CRISFIELD, 1991).

Quando considerada também a presença de condições de contorno oriundas de forças de natureza coesiva, conforme ilustrado na Figura 3.4, verifica-se que o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} (S_{ji} \delta E_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) d\Omega - \int_{\Gamma^{\text{ext}}} T_i^{\text{ext}} \delta u_i d\Gamma^{\text{ext}} - \int_{\Gamma^{\text{coe}}} T_i^{\text{coe}} \delta \Delta u_i d\Gamma^{\text{coe}} = 0 \quad (3.36)$$

Essa equação pode ser considerada como a forma mais consistente de abordar o problema de investigação da dinâmica das fraturas coesivas em sólidos e estruturas, posto que a mesma utiliza um sistema de referência adequado e um tensor de tensões simétrico. Logo, toda a implementação computacional é realizada com base nesse equacionamento.

# Capítulo IV

## ASPECTOS COMPUTACIONAIS

---

### 4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, são descritos os procedimentos numéricos utilizados na implementação computacional da solução aproximada do problema, os quais são representados pela discretização do domínio no espaço, através do Método dos Elementos Finitos, pela integração do domínio no tempo, com base no Método da Diferença Central (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), pela formulação numérica do vetor de forças coesivas e pela organização de classes do DyCOH.

### 4.2 Implementação Computacional

Para a implementação computacional do problema descrito pela Equação 3.36, é conveniente calcular o produto tensorial presente no seu primeiro termo de uma forma alternativa que permita aproveitar melhor as definições realizadas na seção 3.2.2. Seguindo essa linha de raciocínio, a variação das componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange, baseando-se na Equação 3.21, é dada por:

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta F_{ki} F_{kj} + F_{ki} \delta F_{kj}) \quad (4.1)$$

Semelhantemente, considerando-se a Equação 3.20, a variação das componentes do tensor gradiente de deformações é dada por:

$$\delta F_{ij} = \delta u_{i,j} \quad (4.2)$$

Assim, desenvolvendo-se as Equações 4.1 e 4.2, as componentes da variação do tensor de deformações de Green-Lagrange são individualmente expressas como:

$$\delta E_{11} = \frac{1}{2} (\delta F_{k1} F_{k1} + F_{k1} \delta F_{k1}) = \frac{1}{2} (\delta u_{k,1} F_{k1} + F_{k1} \delta u_{k,1}) = F_{k1} \delta u_{k,1} \quad (4.3)$$

$$\delta E_{12} = \frac{1}{2} (\delta F_{k1} F_{k2} + F_{k1} \delta F_{k2}) = \frac{1}{2} (\delta u_{k,1} F_{k2} + F_{k1} \delta u_{k,2}) \quad (4.4)$$

$$\delta E_{21} = \frac{1}{2} (\delta F_{k2} F_{k1} + F_{k2} \delta F_{k1}) = \frac{1}{2} (\delta u_{k,2} F_{k1} + F_{k2} \delta u_{k,1}) \quad (4.5)$$

$$\delta E_{22} = \frac{1}{2} (\delta F_{k2} F_{k2} + F_{k2} \delta F_{k2}) = \frac{1}{2} (\delta u_{k,2} F_{k2} + F_{k2} \delta u_{k,2}) = F_{k2} \delta u_{k,2} \quad (4.6)$$

Logo, agrupando-se termos cruzados, a variação do tensor de deformações de Green-Lagrange pode ser vetorialmente expressa da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta E_{12} + \delta E_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{k1} \delta u_{k,1} \\ F_{k2} \delta u_{k,2} \\ F_{k1} \delta u_{k,2} + F_{k2} \delta u_{k,1} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Analogamente, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, em sua forma vetorial, é dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Nesse caso, a simetria do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff torna desnecessário o agrupamento dos termos cruzados, sendo a terceira componente de sua forma matricial formada apenas por um desses termos cruzados.

#### 4.2.1 Discretização Espacial do Domínio

Conforme discussão anterior, a equação que governa o problema de fraturas coesivas em sólidos e estruturas, Equação 3.36, trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais. Para solução deste problema, primeiramente, admite-se que seu domínio pode ser discretizado no espaço. Para tanto, considera-se que essa discretização seja realizada por meio de pequenos elementos conectados por nós, os quais se conectam aos elementos vizinhos através de nós compartilhados, formando uma estrutura representativa do meio que recebe o nome de malha. Para formular essa idéia do Método dos Elementos Finitos, assume-se que as coordenadas que mapeiam as posições de um corpo podem ser determinadas a partir da interpolação das coordenadas dos nós de cada elemento, ou seja,

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^{nn} N^\alpha(\xi, \eta) c_i^\alpha \quad (4.9)$$

onde  $\alpha$ ,  $nn$ ,  $N^\alpha(\xi, \eta)$  e  $c_i^\alpha$  representam, respectivamente, o sobrescrito contador do número de funções de interpolação, o número de funções de interpolação, as funções de interpolação – também conhecidas como funções de forma – em função das variáveis paramétricas  $\xi$  e  $\eta$ , e as coordenadas dos nós dos elementos.

Seguindo essa mesma metodologia, os deslocamentos dos elementos também podem ser expressos a partir de seus deslocamentos correspondentes, calculados nos nós dos elementos:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{\alpha=1}^{nn} \mathbf{N}^\alpha(\xi, \eta) \mathbf{d}_i^\alpha \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{d}_i^\alpha$  representa os deslocamentos dos nós dos elementos.

Extrapolando-se esse raciocínio, o cálculo das derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas indeformadas pode ser obtido através da interpolação dos deslocamentos nos nós dos elementos. Neste caso, as funções de interpolação utilizadas são as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas indeformadas:

$$\mathbf{u}_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{nn} \mathbf{N}_{,j}^\alpha(\xi, \eta) \mathbf{d}_i^\alpha \quad (4.11)$$

A idéia apresentada para definição das Equações 4.9 a 4.11 é a base da formulação do Método dos Elementos Finitos, que da forma descrita é chamada de formulação isoparamétrica, posto que são adotadas as mesmas funções de interpolação para os cálculos das posições e dos deslocamentos dos corpos.

Aplicando-se a Equação 4.11 na Equação 4.7, tem-se que, utilizando a aproximação por elementos finitos, a variação do tensor de deformações de Green-Lagrange pode ser reescrita como:

$$\delta \mathbf{E} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{k1} \delta \mathbf{u}_{k,1} \\ \mathbf{F}_{k2} \delta \mathbf{u}_{k,2} \\ \mathbf{F}_{k1} \delta \mathbf{u}_{k,2} + \mathbf{F}_{k2} \delta \mathbf{u}_{k,1} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{F}_{11} \mathbf{N}_{,1}^\alpha & \mathbf{F}_{21} \mathbf{N}_{,1}^\alpha \\ \mathbf{F}_{12} \mathbf{N}_{,2}^\alpha & \mathbf{F}_{22} \mathbf{N}_{,2}^\alpha \\ \mathbf{F}_{11} \mathbf{N}_{,2}^\alpha + \mathbf{F}_{12} \mathbf{N}_{,1}^\alpha & \mathbf{F}_{21} \mathbf{N}_{,2}^\alpha + \mathbf{F}_{22} \mathbf{N}_{,1}^\alpha \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta \mathbf{d}_1^\alpha \\ \delta \mathbf{d}_2^\alpha \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

que simbolicamente pode ser representada por:

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{B}_{NL}^\alpha \delta \mathbf{d}^\alpha \quad (4.13)$$



onde,

$$\mathbf{B}_{NL}^{\alpha} = \begin{bmatrix} F_{11}N_{,1}^{\alpha} & F_{21}N_{,1}^{\alpha} \\ F_{12}N_{,2}^{\alpha} & F_{22}N_{,2}^{\alpha} \\ F_{11}N_{,2}^{\alpha} + F_{12}N_{,1}^{\alpha} & F_{21}N_{,2}^{\alpha} + F_{22}N_{,1}^{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

representa uma matriz de transformação que mapeia o tensor de deformações de Green-Lagrange por meio dos deslocamentos nodais fornecidos pela malha de elementos finitos.

Embasando-se nas Equações 4.10 e 4.13, e considerando que o vetor de aceleração e o vetor dos deslocamentos que caracteriza a abertura da fissura coesiva podem ser aproximados seguindo o mesmo esquema da Equação 4.10, tem-se que a Equação 3.36 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\delta \mathbf{d}^{\alpha})^T (\mathbf{B}_{NL}^{\alpha})^T \mathbf{S} \mathbf{d}^0 \Omega + \int_{\Omega} (\delta \mathbf{d}^{\alpha})^T (\mathbf{N}^{\alpha})^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{N}^{\alpha} \mathbf{d}^0 \Omega \\ & - \int_{\Gamma^{\text{ext}}} (\delta \mathbf{d}^{\alpha})^T (\mathbf{N}^{\alpha})^T \mathbf{T}^{\text{ext}} \mathbf{d}^0 \Gamma^{\text{ext}} - \int_{\Gamma^{\text{coe}}} (\delta \mathbf{d}^{\alpha})^T (\mathbf{N}^{\alpha})^T \mathbf{T}^{\text{coe}} \mathbf{d}^0 \Gamma^{\text{coe}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para que a Equação 4.15 seja válida para qualquer variação dos deslocamentos nodais, necessariamente, a seguinte condição deve ser imposta:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{NL}^{\alpha})^T \mathbf{S} \mathbf{d}^0 \Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{N}^{\alpha})^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{N}^{\alpha} \mathbf{d}^0 \Omega \\ & - \int_{\Gamma^{\text{ext}}} (\mathbf{N}^{\alpha})^T \mathbf{T}^{\text{ext}} \mathbf{d}^0 \Gamma^{\text{ext}} - \int_{\Gamma^{\text{coe}}} (\mathbf{N}^{\alpha})^T \mathbf{T}^{\text{coe}} \mathbf{d}^0 \Gamma^{\text{coe}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Analisando uma a uma as parcelas da Equação 4.16, verifica-se que a mesma representa um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser matricialmente expresso por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

onde,

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{N}^\alpha)^T \mathbf{N}^\alpha d\Omega \quad (4.18)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{coe}} \quad (4.19)$$

e,

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_{\text{NL}}^\alpha)^T \mathbf{S} d\Omega \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{\Gamma^{\text{ext}}} (\mathbf{N}^\alpha)^T \mathbf{T}^{\text{ext}} d\Gamma^{\text{ext}} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{F}_{\text{coe}} = \int_{\Gamma^{\text{coe}}} (\mathbf{N}^\alpha)^T \mathbf{T}^{\text{coe}} d\Gamma^{\text{coe}} \quad (4.22)$$

são, respectivamente, a matriz de massa, o vetor de forças desequilibradas ou vetor de resíduos, o vetor de forças internas, o vetor de forças externas e o vetor de forças coesivas.

A montagem das expressões matriciais das Equações 4.18 a 4.22, as quais são todas informações de referência global, é realizada com base no cálculo dessas informações no sistema local, ou seja, considera-se que cada uma dessas informações

globais é construída a partir da contribuição de cada elemento finito. Seguindo essa linha de pensamento, as Equações 4.18 a 4.22 são calculadas como<sup>5</sup>:

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^{(e)} = \sum_e \int_{\Omega^{(e)}} \rho^{(e)} \left( \mathbf{N}^{\alpha^{(e)}} \right)^T \mathbf{N}^{\alpha^{(e)}} d\Omega^{(e)} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \sum_e \mathbf{F}_{\text{int}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \left( \mathbf{B}_{\text{NL}}^{\alpha^{(e)}} \right)^T \mathbf{S}^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_e \mathbf{F}_{\text{ext}}^{(e)} = \int_{\Gamma^{\text{ext}(e)}} \left( \mathbf{N}^{\alpha^{(e)}} \right)^T \mathbf{T}^{\text{ext}(e)} d\Gamma^{\text{ext}(e)} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{F}_{\text{coe}} = \sum_e \mathbf{F}_{\text{coe}}^{(e)} = \sum_e \int_{\Gamma^{\text{coe}(e)}} \left( \mathbf{N}^{\alpha^{(e)}} \right)^T \mathbf{T}^{\text{coe}(e)} d\Gamma^{\text{coe}(e)} \quad (4.26)$$

onde o sobrescrito (e) indica que determinada informação está associada a um determinado elemento (finito ou coesivo), porém segundo o sistema de referência global. Para realizar a mencionada contribuição de cada elemento nos cálculos das Equações 4.23 a 4.26, é necessário que as informações inicialmente definidas no sistema local de coordenadas (sistema de referência do elemento) sejam transformadas para o sistema global de referência. As mesmas são avaliadas numericamente através da utilização da técnica de integração de Gauss.

## 4.2.2 Discretização do Tempo

O problema inicial gerado pela Equação 3.36, conforme mencionado, trata-se da resolução de um sistema de equações diferenciais parciais. Aplicada a discretização

---

<sup>5</sup> Da forma expressa na Equação 4.23, a matriz de massa obtida é dita consistente, pois é calculada a partir das funções de forma. Para tornar a implementação computacional adequada com a técnica de integração temporal adotada (seção 4.2.2), neste trabalho utilizam-se matrizes de massa concentrada (BATHE, 1996).

espacial descrita no t3pico anterior, verifica-se que esse sistema original transforma-se em um sistema de equa33es diferenciais ordin33rias de segunda ordem. A escolha correta da t3cnica de integra33o temporal, utilizada para a resolu33o desse problema matem33tico, trata-se de uma etapa essencial 33 obten33o de respostas que reproduzam fielmente a din33mica do problema f3sico. Em din33mica os problemas f3sicos s3o genericamente divididos em duas grandes classes: os de din33mica estrutural e os de propaga33o de onda. A primeira refere-se aos sistemas din33micos onde apenas as mais baixas freq33ncias de vibra33o s3o ativadas. Enquanto que na segunda classe a resposta din33mica 33 afetada por uma quantidade maior de freq33ncias de vibra33o (BATHE, 1996).

O estudo de propaga33o de fraturas coesivas, muitas vezes, busca investigar problemas especiais, tais como impacto e fragmenta33o. Nestes, as respostas din33micas s3o ricas em n3mero de freq33ncias de vibra33o que s3o ativadas, e a considera33o de apenas baixas freq33ncias de vibra33o compromete a precis33o e a qualidade da solu33o din33mica. Dessa forma, verifica-se que os mesmos est3o enquadrados na categoria de problemas de propaga33o de ondas.

O n3mero de freq33ncias de vibra33o presentes na resposta din33mica de um problema analisado atrav33s do M3todo dos Elementos Finitos est3 diretamente relacionado 33 malha de elementos finitos gerada na etapa de discretiza33o espacial. No lugar de buscar a gera33o de uma malha que, com precis33o, seja representativa de todas as freq33ncias de vibra33o relevantes 33 obten33o da solu33o din33mica, Bathe (1996) sugere que as malhas para problemas de propaga33o de ondas sejam definidas com base em conceitos utilizados em solu33es de diferen33as finitas.

Considerando a exist33ncia de um comprimento de onda cr3tico que a malha deve ser capaz de representar, o tempo total para que uma onda passe por um ponto 33 dado por:

$$t_o = \frac{L_{co}}{C_d} \quad (4.27)$$

onde  $t_o$ ,  $L_{co}$  e  $C_d$  são, respectivamente, o tempo de propagação da onda, o comprimento crítico no qual a onda deve propagar e a velocidade de propagação da onda, também chamada velocidade de dilatação da onda.

Para representar a propagação dessa onda, admite-se que o tempo total de propagação da onda pode ser discretizado em incrementos finitos de tempo, tal que:

$$\Delta t = \frac{t_o}{n_p} \quad (4.28)$$

onde  $\Delta t$  e  $n_p$  são, respectivamente, o incremento do tempo de propagação de onda e o número de passos necessários para que a onda se propague com tal discretização temporal.

Com base nessa discretização, o comprimento efetivo dos elementos finitos que constituem a malha pode ser definido como:

$$L_e = C_d \Delta t \quad (4.29)$$

onde  $L_e$  representa o comprimento efetivo dos elementos finitos, cuja interpretação é apresentada a seguir.

Para analisar com precisão os problemas dinâmicos de onda, é necessário que  $L_e$  e  $\Delta t$ , presentes na Equação 4.29, sejam capazes de representar de forma correta todo o processo de propagação da onda. Em virtude dessa parte da discretização ser realizada no tempo, é comum que a Equação 4.29 seja reescrita de maneira que o  $\Delta t$  possa ser calculado a partir da definição de  $C_d$  e  $L_e$ , ou seja,

$$\Delta t = \frac{L_e}{C_d} \quad (4.30)$$

A velocidade de propagação de onda trata-se de um parâmetro que varia de acordo com as propriedades mecânicas do material e o tipo de análise. Para análises em duas dimensões, tem-se que

$$C_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (4.31)$$

para estado plano de deformação, e

$$C_d = \sqrt{\frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)\rho}} \quad (4.32)$$

para estado plano de tensão, ambos considerando-se o material como sendo elástico e linear. Nas Equações 4.31 e 4.32 as propriedades mecânicas  $E$ ,  $\nu$  e  $\rho$  representam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o coeficiente de Poisson e a densidade do material.

Sendo a velocidade de propagação de onda uma característica específica do material e da análise empregada (estado plano de deformação ou de tensão), a determinação do incremento de tempo  $\Delta t$  fica condicionada à definição do comprimento efetivo  $L_e$ . Tal definição está diretamente relacionada ao algoritmo de integração temporal adotado. Bathe (1996) recomenda que quando da utilização do Método da Diferença Central, a matriz de massa deve ser concentrada, a malha empregada deve ser a mais uniforme possível e  $L_e$  deve ser aproximado como a menor distância entre dois nós para todos os elementos finitos que constituem a malha. Tais recomendações visam a obtenção de resultados numéricos mais precisos. No presente trabalho, todas estas orientações são seguidas.

O Método da Diferença Central, em particular, configura-se como um procedimento numérico de integração temporal que utiliza conceitos de diferenças finitas para aproximar deslocamentos, velocidades e acelerações a partir de uma

condição inicial. Esta característica de definição de informações em um passo de tempo com base nessas mesmas informações em um estágio de tempo anterior, permite enquadrar o Método da Diferença Central na categoria de algoritmos de integração temporal explícitos.

Quando imposta tal condição inicial, representada por meio da prescrição dos vetores de deslocamentos e velocidades iniciais ( $\mathbf{u}_{(0)}$  e  $\dot{\mathbf{u}}_{(0)}$ ), os vetores de acelerações correspondentes a esse estágio inicial podem ser obtidos através da aplicação da Equação (4.17), chegando-se a:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{(0)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_{(0)} \quad (4.33)$$

Nesse caso, o emprego da matriz de massa concentrada (diagonal) otimiza o tempo de análise computacional, visto que a inversão dessa matriz é efetivada de forma desacoplada, o que dispensa a utilização de qualquer técnica de fatoração.

De posse dos vetores de deslocamento, velocidade e aceleração correspondentes à condição inicial, esses mesmos vetores podem ser calculados para um dado incremento de tempo através das seguintes equações:

$$\mathbf{u}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{u}_{(t)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{(t)} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{(t)} \quad (4.34)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{(t)} = \dot{\mathbf{u}}_{(t-\Delta t)} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_{(t)} + \ddot{\mathbf{u}}_{(t-\Delta t)}) \quad (4.35)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_{(t+\Delta t)} \quad (4.36)$$

Krysl e Belytschko (1998) apresentam diversas variações à implementação computacional do Método da Diferença Central, das quais algumas são observadas também em referências clássicas como Cook et al. (1989), Bathe (1996) e Zienkiewicz e Taylor (2000). Neste trabalho, a forma adotada, representada por meio das Equações 4.34 a 4.36, trata-se da variação 1 descrita por Krysl e Belytschko (1998). Com base nessa alternativa, o algoritmo empregado para implementação computacional do Método da Diferença Central é descrito no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Algoritmo para o Método da Diferença Central.

**i. Etapa inicial**

1. Definição do incremento de tempo:  $\Delta t$
2. Prescrição da condição inicial:  $\mathbf{u}_{(0)}$  e  $\dot{\mathbf{u}}_{(0)}$
3. Cálculo da matriz de massa concentrada:  $\mathbf{M}$
4. Inicialização do vetor de resíduos (forças desequilibradas):

$$\mathbf{R}_{(0)} = \mathbf{F}_{\text{ext}(0)} - \mathbf{F}_{\text{int}(0)} + \mathbf{F}_{\text{coe}(0)}$$

5. Cálculo do vetor de acelerações iniciais:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{(0)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_{(0)}$$

**ii. Processo incremental**

1. Atualiza o incremento de tempo:  $t + \Delta t$
2. Calcula o vetor de deslocamentos:

$$\mathbf{u}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{u}_{(t)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{(t)} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{(t)}$$

3. Atualiza o vetor de resíduos:

$$\mathbf{R}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{F}_{\text{ext}(t+\Delta t)} - \mathbf{F}_{\text{int}(t+\Delta t)} + \mathbf{F}_{\text{coe}(t+\Delta t)}$$

4. Calcula o vetor de acelerações:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_{(t+\Delta t)}$$

5. Calcula o vetor de velocidades:

$$\dot{\mathbf{u}}_{(t+\Delta t)} = \dot{\mathbf{u}}_{(t)} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_{(t+\Delta t)} + \ddot{\mathbf{u}}_{(t)})$$

Refaz as etapas de ii.1 a ii.5 até alcançar o número de passos de tempo.



Uma desvantagem do Método da Diferença Central deve-se ao fato do mesmo ser considerado como condicionalmente estável, ou seja, a solução dinâmica através desse algoritmo de integração pode ser fortemente afetada por erros numéricos gerados durante o próprio processo de integração. O termo condicionalmente estável encontra-se relacionado à necessidade de impor ao incremento de tempo um limite superior, de tal forma que a qualidade e a precisão da solução dinâmica do problema sejam preservadas.

A literatura técnica recomenda que para respeitar a condição de estabilidade, o incremento de tempo adotado deve obedecer à seguinte restrição:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\bar{T}_{min}^{(m)}}{\pi} \quad (4.37)$$

onde  $\Delta t_{cr}$  e  $\bar{T}_{min}^{(m)}$  são, respectivamente, o incremento de tempo crítico fornecido pela condição de estabilidade e o menor período de vibração da malha utilizada na discretização espacial do problema.

Os períodos de vibração de um sistema dinâmico qualquer podem ser calculados através da seguinte relação:

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.39)$$

onde  $\bar{T}$  e  $\omega$  representam, respectivamente, um período de vibração qualquer apresentado por um sistema dinâmico e a correspondente frequência de vibração.

Logo, a Equação 4.38 pode ser reformulada de tal forma que:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}^{(c)}} \quad (4.40)$$

na qual  $\omega_{\max}^{(e)}$  representa a máxima frequência de vibração dentre todos os elementos finitos que constituem a malha.

Para elementos finitos de barra linear de dois nós, definidos com base em uma matriz de massa concentrada, diversas referências clássicas mostram que a máxima frequência de vibração apresentada por um dado elemento pode ser encontrada utilizando-se a seguinte relação:

$$\omega_{\max} = \frac{2C_d}{L} \quad (4.41)$$

onde  $L$  representa a distância entre os dois nós do elemento de barra (comprimento). Nesse caso, o incremento de tempo crítico correspondente à condição de estabilidade fica expresso como:

$$\Delta t_{\text{cr}} = \frac{L}{C_d} \quad (4.42)$$

Determinado o incremento de tempo crítico, chega-se à relação

$$\Delta t \leq \frac{L}{C_d} \quad (4.43)$$

a qual é a denominada condição de Courant-Friedrichs-Lewy (COURANT et al., 1928).

Para elementos de maior grau de complexidade, a representação analítica da máxima frequência de vibração apresentada por um dado elemento, geralmente, é de difícil obtenção. Para contornar este problema, é mais comum que a definição desse limite superior, ao qual estão sujeitos os incrementos de tempo de algoritmos condicionalmente estáveis, seja expressa em termos do comprimento efetivo dos

elementos finitos ( $L_e$ ). Assim, o incremento de tempo adotado nas análises numéricas que utilizam o Método da Diferença Central deve satisfazer à condição de Courant-Friedrichs-Lewy, a qual para elementos quaisquer pode ser redefinida como:

$$\Delta t \leq \frac{L_e}{C_d} \quad (4.44)$$

Uma medida utilizada para verificar a qualidade do atendimento à condição de Courant-Friedrichs-Lewy trata-se da quantificação numérica do chamado número de Courant-Friedrichs-Lewy, o qual é expresso como:

$$N_{CFL} = \frac{\Delta t^{(adotado)}}{\Delta t_{cr}^{(max)}} \quad (4.45)$$

onde  $\Delta t^{(adotado)}$  e  $\Delta t_{cr}^{(max)}$  são, respectivamente, o incremento de tempo realmente utilizado na integração temporal e o máximo incremento de tempo permitido pela condição de estabilidade (Equação 4.37 ou suas formas aproximadas).

Cook et al. (1989) recomenda que nessas integrações temporais o valor máximo do número de Courant-Friedrichs-Lewy não ultrapasse 0,98. Caso contrário, a resposta dinâmica torna-se instável. Esse cuidado deve ser observado com atenção, principalmente, em problemas não lineares, nos quais a instabilidade presente em uma solução dinâmica não se mostra com a mesma evidência dos problemas lineares.

### 4.2.3 Vetor de Forças Coesivas

Dentre os aspectos computacionais discutidos neste capítulo, o vetor de forças de um elemento coesivo, representado na Equação 4.26, trata-se do ponto menos convencional de toda a implementação numérica. Neste tópico, os detalhes que permitem a obtenção desse vetor são apresentados. Essa formulação é baseada nos trabalhos de Song et al. (2006) e de Zhang (2003).

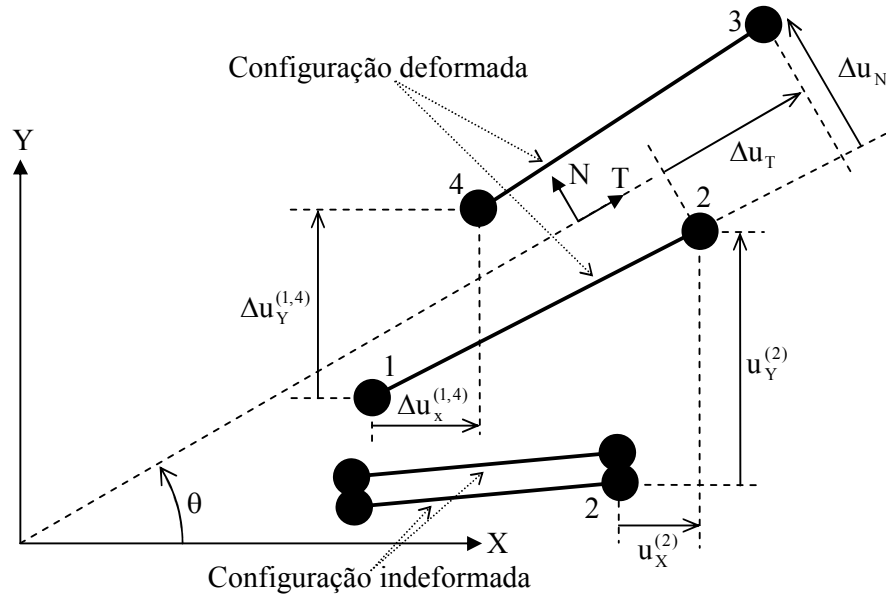


Figura 4.1 – Esquema para mapeamento de um elemento coesivo linear de quatro nós.

Fonte: Adaptado de Song et al. (2006).

Dado um sistema de referência global e as configurações indeformada e deformada de um elemento coesivo linear de quatro nós, admite-se um sistema de referência local para o elemento coesivo tal que a origem deste sistema coincida com o centro do elemento coesivo e forme um ângulo  $\theta$  com esse sistema global. Para tais considerações, X e Y representam o sistema de referência global, enquanto que T e N o sistema de referência local. Dentro desse contexto, o mapeamento do elemento coesivo é realizado com base no eixo médio formado pelas faces do elemento coesivo, conforme ilustrado na Figura 4.1.

Com base no mapeamento descrito na Figura 4.1, pode-se obter os deslocamentos relativos globais das extremidades da interface através da seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_x^{(1,4)} \\ \Delta u_y^{(1,4)} \\ \Delta u_x^{(2,3)} \\ \Delta u_y^{(2,3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}_g \quad (4.46)$$

sendo,

$$\mathbf{u}_g = \{u_x^{(1)} \quad u_y^{(1)} \quad u_x^{(2)} \quad u_y^{(2)} \quad u_x^{(3)} \quad u_y^{(3)} \quad u_x^{(4)} \quad u_y^{(4)}\}^T \quad (4.47)$$

o vetor de deslocamentos globais do elemento coesivo, e

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

uma matriz de transformação linear que mapeia tais deslocamentos relativos a partir do vetor de deslocabilidades globais do elemento coesivo. Nas Equações 4.46 e 4.47,  $u_k^{(i)}$  representa deslocabilidade do  $i$ -ésimo nó do elemento coesivo segundo a  $k$ -ésima direção global, enquanto que  $\Delta u_k^{(1,4)}$  e  $\Delta u_k^{(2,3)}$  são os deslocamentos relativos dos nós 1-4 e 2-3 em relação a  $k$ -ésima direção global, respectivamente.

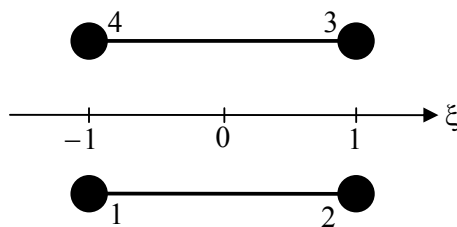


Figura 4.2 – Mapeamento paramétrico de um elemento coesivo linear de quatro nós.

Definidos os deslocamentos relativos globais das extremidades da interface, e admitindo o mapeamento paramétrico das funções de forma do elemento coesivo de quadro nós (Figura 4.2), pode-se chegar aos correspondentes deslocamentos globais em um ponto qualquer na interface:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_X \\ \Delta u_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_X^{(1,4)} \\ \Delta u_Y^{(1,4)} \\ \Delta u_X^{(2,3)} \\ \Delta u_Y^{(2,3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} \Delta u_X^{(1,4)} \\ \Delta u_Y^{(1,4)} \\ \Delta u_X^{(2,3)} \\ \Delta u_Y^{(2,3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{u}_g \quad (4.49)$$

sendo  $\Delta u_X$  e  $\Delta u_Y$ , respectivamente, os deslocamentos relativos nas direções globais X e Y para um ponto qualquer na interface,  $N_1$  e  $N_2$  as funções de forma dos nós das duas extremidades do elemento coesivo linear de quatro nós,

$$N_1 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) \quad (4.50)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad (4.51)$$

e  $\mathbf{N}$  a matriz das funções de forma. Nas Equações 4.50 e 4.51,  $\xi$  é a coordenada de parametrização das funções de forma.

De posse dos deslocamentos relativos globais de um ponto na interface, chega-se aos deslocamentos relativos nas coordenadas locais do elemento coesivo. Para tanto, basta-se aplicar uma transformação linear que defina os deslocamentos relativos locais através de uma rotação das respectivas informações no sistema de referência global, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_T \\ \Delta u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_X \\ \Delta u_Y \end{Bmatrix} = \mathbf{\Theta} \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{u}_g = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}_g \quad (4.52)$$

onde  $\Delta u_T$  e  $\Delta u_N$  são, respectivamente, os deslocamentos relativos da interface segundo o sistema de referência local do elemento coesivo, enquanto que  $\mathbf{\Theta}$  e  $\bar{\mathbf{B}}$  são,

respectivamente, a supracitada transformação linear e uma outra matriz de transformação linear que mapeia os deslocamentos relativos locais diretamente dos deslocamentos globais do elemento coesivo. Nesse equacionamento, a direção  $\theta$  é obtida através da média aritmética das coordenadas globais dos nós do elemento coesivo, permitindo definir o eixo médio do mesmo.

Dessa forma, através do princípio da contragradência, o vetor de forças coesivas pode ser obtido como

$$\mathbf{F}_{\text{coe}}^{(e)} = \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}^{\text{coe}} \bar{\mathbf{J}} d\xi \quad (4.53)$$

onde  $\mathbf{T}^{\text{coe}}$  e  $\bar{\mathbf{J}}$  são o vetor de trações locais da interface e o determinante do jacobiano da transformação.

Numericamente, a Equação 4.53 pode ser integrada utilizando a regra de integração de Gauss. Assim feito, a mesma deve ser reescrita a partir do seguinte somatório:

$$\mathbf{F}_{\text{coe}}^{(e)} = \sum_{i=1}^{\text{npg}} [\bar{\mathbf{B}}_i(\xi_i)]^T \mathbf{T}_i^{\text{coe}}(\xi_i) \bar{\mathbf{J}}_i(\xi_i) w_i^\xi \quad (4.54)$$

no qual  $\text{npg}$  é o número de pontos de Gauss utilizado na integração e  $w_i^\xi$  é o peso de Gauss atribuído ao ponto de Gauss de coordenada  $\xi_i$ .

A regra de Gauss utilizada na integração numérica da Equação 4.54 é realizada com três pontos de integração, tendo suas informações descritas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Regra de integração gaussiana para elementos coesivos lineares.

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$w_1^\xi$	$w_2^\xi$	$w_3^\xi$
$-\sqrt{0,6}$	$\sqrt{0,6}$	0	5/9	5/9	8/9

Fonte: Zhang (2003).

#### 4.2.4 Arquitetura do Sistema Orientado a Objetos

Neste tópic, apresenta-se de forma sucinta o sistema orientado a objetos (SOO) concebido para a implementação computacional da versão inicial do software DyCOH. Alguns detalhes das associações e generalizações de classes, bem como aspectos relacionados à extensibilidade das mesmas são discutidos a seguir. Toda representação gráfica apresentada se utiliza do padrão UML (RUMBAUGH et al., 2000), o qual define a especificação, visualização e construção de artefatos de sistemas de software.

A arquitetura do SOO proposto neste trabalho segue os conceitos da filosofia de programação orientada a objetos (ELLIS; STROUSTRUP, 1993), os quais auxiliam na concepção e implementação do mesmo. A Figura 4.3 mostra uma representação esquemática do diagrama das associações existentes entre as classes bases do SOO. A associação segundo o padrão UML é representada por uma seta, igual às setas apresentadas na Figura 4.3, que indica que a classe da qual a seta se origina é responsável pela classe para qual a seta se direciona. Seguindo essa linha de raciocínio, tem-se que a classe base *DyCOH* é responsável pelas classes bases *Model* e *TimeIntegration*, enquanto que a classe base *Model* é responsável pelas classes bases *Bulk*, *Cohesive* e *Load*, assim como pela classe concreta *Node*. Ressalta-se, também, que as classes cujos nomes estão em formato itálico na Figura 4.3 são abstratas, ou seja, são obrigatoriamente redefinidas no SOO.

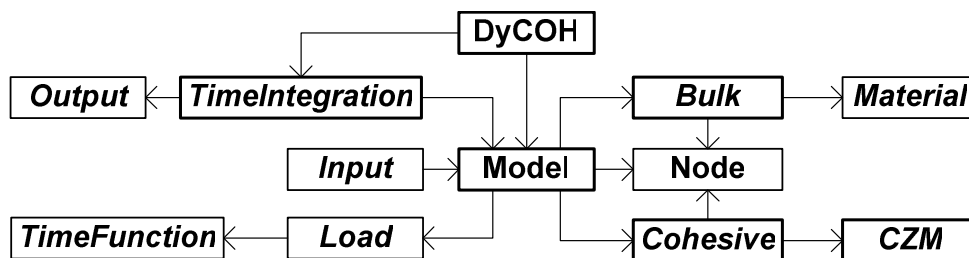


Figura 4.3 – Diagrama de associação entre as classes do SOO.

O sistema computacional concebido para o DyCOH é implementado de forma que possa ser facilmente extensível, necessitando apenas de alterações pontuais e bem orientadas. Na seqüência, são apresentados alguns detalhes das principais classes que constituem o SOO do software DyCOH.



### Classe *DyCOH*

Esta classe representa uma abstração do módulo principal do programa *DyCOH*. Dentre suas tarefas básicas, destaca-se a instanciação de todos os objetos necessários para a execução da análise numérica. Dessa forma, a classe *DyCOH* funciona como uma espécie de gerenciadora dos processos a serem executados na análise numérica, estipulando passo a passo as diversas etapas do seu processamento. Tal função de gerenciamento torna-se mais evidente ao estudar o diagrama de classe<sup>6</sup> de *DyCOH* (Figura 4.4).

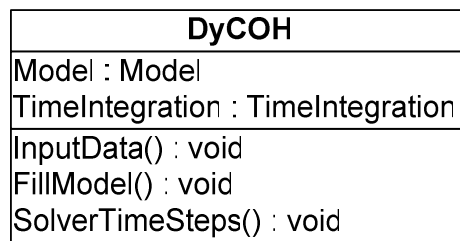


Figura 4.4 – Diagrama de classe de *DyCOH*.

Nesse diagrama, observa-se que a classe *DyCOH* tem acesso a todas as informações do SOO, uma vez que tem como atributos instâncias das classes *Model* e *TimeIntegration*, além de possuir métodos responsáveis por atividades de consulta das informações da análise (*InputData*), de solicitação do preenchimento dos dados do modelo computacional (*FillModel*) e de requerimento da resolução de todos os passos de tempo (*SolverTimeSteps*).

### Classe *Model*

A classe que representa o modelo computacional a ser numericamente analisado é a classe concreta *Model*. Esta classe, conforme descrito na Figura 4.3, trata-se da classe que possui uma maior interação com as demais classes bases do SOO. Dessa

---

<sup>6</sup>A representação dos diagramas de classe segundo o padrão UML é simbolizada na forma de uma pilha, na qual o trecho superior define o nome da classe, o intermediário seus atributos e o inferior seus métodos. Ressalta-se que os nomes das classes quando em formato itálico indicam classes abstratas e os métodos que aparecem nessa representação têm seus atributos de entrada omitidos. Essas simbologias são adotadas nos demais diagramas de classe que são apresentados para as outras classes bases do SOO.

forma, a classe *Model* possui acesso a diversas classes do SOO, sendo as classes *Node*, *Bulk*, *Cohesive* e *Load* seus atributos principais, conforme ilustrado na Figura 4.5.

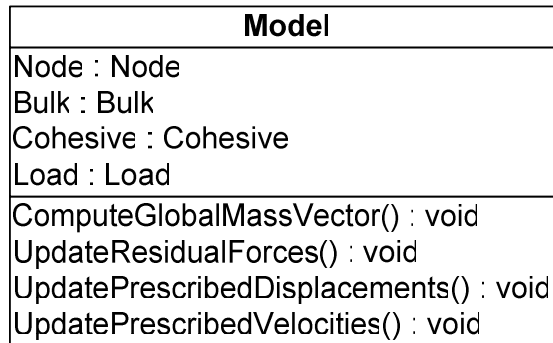


Figura 4.5 – Diagrama de classe de *Model*.

Das principais tarefas da classe *Model*, destacam-se o cálculo do vetor de massa concentrada do problema (*ComputeGlobalMassVector*), o qual é realizado uma única vez, bem como as atualizações dos vetores de forças residuais (*UpdateResidualForces*), de deslocamentos prescritos (*UpdatePrescribedDisplacements*) e de velocidades prescritas (*UpdatePrescribedVelocities*) em cada passo de tempo.

### **Classe *TimeIntegration***

A integração temporal dos deslocamentos, velocidades e acelerações dos graus de liberdade livres do modelo computacional é realizada através da classe abstrata *TimeIntegration*. A organização da classe base *TimeIntegration*, nesta versão inicial do software DyCOH, possui apenas a classe *CenterDifference* como classe derivada, segundo a generalização<sup>7</sup> descrita na Figura 4.6. Porém, a concepção orientada a objetos permite que outras subclasses sejam incorporadas ao SOO de forma simples. Para efetivar tal extensão, basta realizar a implementação computacional de outra classe que com base no modelo computacional (*Model*), no vetor de massa (*Mass*), no vetor de resíduos (*Residuo*) e em uma condição inicial (vetores de deslocamentos e velocidades iniciais) calcule os deslocamentos, velocidades e acelerações em cada passo de tempo.

---

<sup>7</sup> A representação da generalização ou herança segundo o padrão UML (RUMBAUGH et al., 2000) é dada através de uma seta vazada. Essa representação encontra-se descrita na Figura 4.6 entre as classes *TimeIntegration* e *CenterDifference*. Tal simbologia é adotada nos demais esquemas de generalização ou herança de classe que são apresentadas para as outras classes bases do SOO.

Essa implementação trata-se apenas da redefinição do método *IntegrateThisStep*. Tal afirmação pode ser constatada por meio do diagrama apresentado na Figura 4.7.

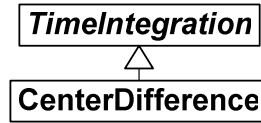


Figura 4.6 – Generalização ou herança da classe *TimeIntegration*.

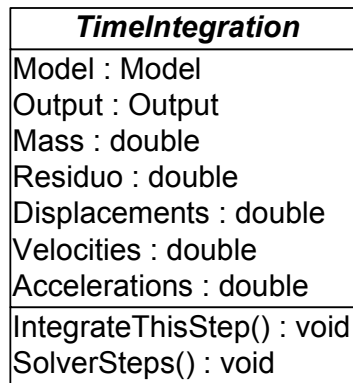


Figura 4.7 – Diagrama de classe de *TimeIntegration*.

### **Classe *Bulk***

Os elementos finitos são entidades computacionais sujeitas à ação de forças inerciais, diferentemente dos elementos coesivos. Dessa forma, realiza-se uma distinção entre as classes que são responsáveis pelos elementos finitos e coesivos. Nesse momento, apresentam-se detalhes a respeito da classe base que responde pelos elementos finitos, a classe abstrata *Bulk*. A implementação numérica da classe *Bulk* é realizada de forma a explorar as estratégias possíveis para obter o maior desempenho computacional possível. Um exemplo dessa tentativa pode ser observado no diagrama de generalização da classe *Bulk*, Figura 4.8, onde se verifica a presença de duas classes derivadas: as subclasses *T3* e *NonT3*. A classe *T3* responde pelos elementos finitos do tipo T3 para o regime de pequenas deformações, enquanto que a classe *NonT3* é responsável pelos elementos finitos do tipo T3 para o regime de grandes deformações. A vantagem dessa distinção, em relação à utilização de uma classe única que fosse representativa de ambas as situações, trata-se da possibilidade de, através do conceito de polimorfismo, operar sobre uma instância da classe *Bulk*, independente de tal instância

referir-se a uma subclasse *T3* ou *NonT3*. Dessa forma, elimina-se a necessidade de checagem, em todos os passos de tempo, do regime de deformação a ser aplicado.

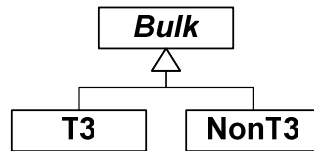


Figura 4.8 – Generalização ou herança da classe *Bulk*.

A Figura 4.9 descreve o diagrama da classe *Bulk*, onde se observa a existência dos atributos referentes à relação constitutiva do elemento finito (*Material*) e aos seus nós (*Nodes*). Além disso, constata-se que cada instância de *Bulk* deve, obrigatoriamente, redefinir os métodos de cálculo do vetor de massa concentrada do elemento finito (*ComputeMassVector*), de contribuição de possíveis cargas distribuídas que estejam vinculadas a uma face do elemento finito (*AddEquivalentNodalLoad*) e de atualização das forças internas do elemento finito (*UpdateInternalForces*).

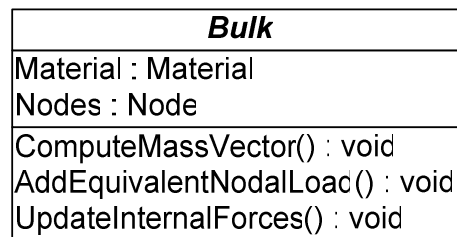


Figura 4.9 – Diagrama de classe de *Bulk*.

### **Classe *Cohesive***

A representação dos elementos coesivos no SOO é realizada através da classe abstrata *Cohesive*. A implementação numérica da classe *Cohesive*, na versão atual do DyCOH, possui apenas a classe *COH4* como classe derivada, conforme o esquema de generalização apresentado na Figura 4.10. A classe *COH4* responde pelos elementos coesivos de quatro nós, os quais podem ser incluídos entre elementos finitos do tipo T3. Neste caso, seguindo a mesma lógica descrita para a classe base *Bulk*, através do conceito de polimorfismo, qualquer subclasse de *Cohesive* é implementada de forma a ser operada diretamente como uma instância arbitrária da classe *Cohesive*, independente de tal instância referir-se a uma subclasse *COH4* ou outra. Dessa forma, elimina-se a

necessidade de checagem, em todos os passos de tempo, do tipo de comportamento a ser adotado pelo elemento coesivo.

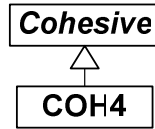


Figura 4.10 – Generalização ou herança da classe *Cohesive*.

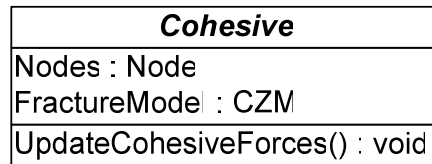


Figura 4.11 – Diagrama de classe de *Cohesive*.

A Figura 4.11 ilustra o diagrama da classe *Cohesive*, onde se verifica a existência dos atributos correspondentes à relação constitutiva do elemento coesivo (*FractureModel*) e aos seus nós (*Nodes*). Além disso, observa-se que cada instância de *Cohesive* deve, obrigatoriamente, redefinir o método de atualização das forças coesivas do elemento de interface (*UpdateCohesiveForces*).

### **Classe *CZM***

A parte do SOO que responde pelos Modelos de Zona Coesiva é a classe abstrata *CZM*. Na atual organização do SOO do software DyCOH, a classe base *CZM* possui como única classe derivada a classe *XuNeedleman*, a qual é responsável pela implementação computacional do modelo coesivo exponencial/exponencial de Xu e Needleman (1993). A Figura 4.12 ilustra o esquema de generalização da classe *CZM*.

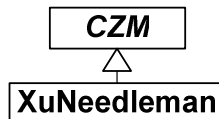


Figura 4.12 – Generalização ou herança da classe *CZM*.

A concepção do SOO proposto neste trabalho é tal que para expansão da classe base *CZM*, é apenas necessária à implementação computacional de um modelo de zona coesiva que calcule as trações na interface a partir dos deslocamentos relativos das faces constituintes. Essa simplicidade encontra-se traduzida no diagrama de classe de *CZM*, Figura 4.13, onde se observa a existência de um único método para atender essa função (*EvaluateTraction*s). Dessa forma, a extensibilidade de mais uma das principais classes bases do SOO está viabilizada.

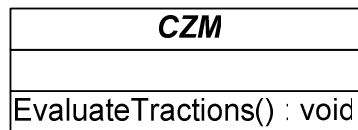


Figura 4.13 – Diagrama de classe de *CZM*.

# Capítulo V

## APLICAÇÕES NUMÉRICAS

---

### 5.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos pelo DyCOH em quatro análises. As duas primeiras em uma chapa trincada e as duas últimas em um tirante. Na primeira, observa-se a influência dos elementos coesivos na resposta dinâmica do problema de valor de contorno inicial, utilizando como parâmetro de comparação as isoformas de tensão obtidas por uma análise convencional do método dos elementos finitos e outra com o emprego dos elementos coesivos. Na segunda, estuda-se a resposta ao fraturamento no tempo, partindo desde o início da propagação da trinca e passando pelas suas diversas ramificações. Nesse momento, os resultados obtidos pelo presente trabalho são confrontados com os fornecidos pela literatura técnica. Na terceira e quarta análises, investigam-se os diferentes padrões de fraturamento apresentados por um tirante quando sujeito a cargas quase-estática e de impacto, respectivamente.

### 5.2 Chapa Tracionada de Xu e Needleman

O problema proposto por Xu e Needleman (1994) trata-se de uma análise em estado plano de deformação de uma chapa, de largura  $2W$  e altura  $2L$ , tracionada por campos de velocidade prescrita  $V_s(t)$  e  $V_i(t)$  nas faces superior e inferior, respectivamente. As definições das condições iniciais e de contorno são referenciadas com base no sistema de eixos cartesianos  $x$  e  $y$  de origem no centro da chapa. Essa chapa possui uma trinca inicial de comprimento  $2a_i$ , a qual se encontra centrada em

$x = 0$ . As condições iniciais são representativas do estado de repouso, ou seja, para o tempo  $t=0$  a chapa é livre de tensões e possui deslocamento e velocidade nulos,  $u(x, y, t=0)=0$  e  $\dot{u}(x, y, t=0)=0$ .

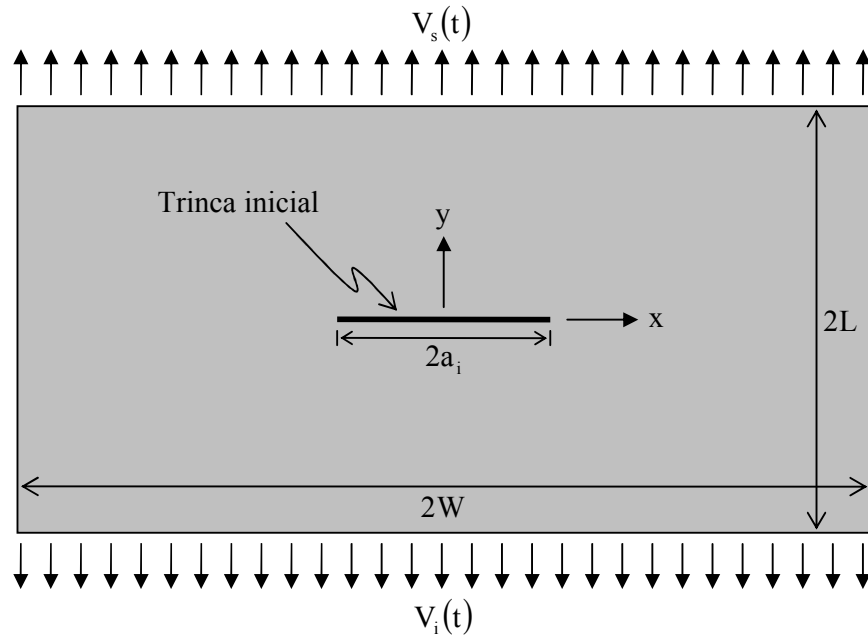


Figura 5.1 – Chapa trincada e tracionada de Xu e Needleman.

Fonte: Xu e Needleman (1994).

A Figura 5.1 descreve graficamente o problema. Nesta, pode-se observar a simetria da geometria e todas as condições de contorno em relação à linha  $x = 0$ . Com base em tal constatação, torna-se possível simular apenas o trecho do problema para o qual  $y \geq 0$ . Para tanto, as seguintes condições de contorno são necessárias:

- i. Nas bordas  $y = \pm L$ , têm-se:

$$u_y = \int V_s(t)dt, \quad t_x = 0 \text{ para } y = L \quad (5.1)$$

$$u_y = \int V_i(t)dt, \quad t_x = 0 \text{ para } y = -L \quad (5.2)$$



sendo,

$$V_s(t) = \begin{cases} V_1 t / t_r, & \text{para } t \leq t_r \\ V_1, & \text{para } t > t_r \end{cases} \quad (5.3)$$

$$V_i(t) = \begin{cases} V_2 t / t_r, & \text{para } t \leq t_r \\ V_2, & \text{para } t > t_r \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $V_2 = -V_1$  ou  $V_2 = 0$  e o tempo de crescimento da função rampa é  $t_r = 0,1\mu\text{s}$ .

ii. Na borda  $x = 0$ , tem-se:

$$u_x = 0, \quad t_y = 0 \quad (5.5)$$

iii. Na borda  $x = W$ , tem-se:

$$t_x = 0, \quad t_y = 0 \quad (5.6)$$

O esquema estrutural que permite simular a ocorrência de tais condições de contorno é ilustrado na Figura 5.2, onde se pode observar que em termos de modelagem numérica a condição de contorno extra, devido à simetrização, é obtida através da adoção de apoios do primeiro gênero ao longo da borda  $x = 0$ .

A chapa analisada por Xu e Needleman (1994) é constituída de um material frágil, chamado de PMMA (*Polimetilmetacrilato*), o qual possui as seguintes propriedades físicas: módulo de elasticidade longitudinal  $E = 3,24\text{GPa}$ , coeficiente de

Poisson  $\nu = 0,35$ , densidade específica  $\rho = 1.190 \text{ kg/m}^3$  e tenacidade ou taxa crítica de energia liberada  $\mathcal{G}_{ic} = 352,3 \text{ N/m}$ .

Para especificação do modelo de fratura coesiva de Xu e Needleman, os seguintes parâmetros são utilizados: tensão normal máxima  $\sigma_{\max} = E/10 = 324 \text{ MPa}$ , tensão tangencial máxima  $\tau_{\max} = 755,4 \text{ MPa}$  e os trabalhos de separação normal e tangencial  $\Phi_N = \Phi_T = \mathcal{G}_{ic} = 352,3 \text{ N/m}$ . Com base em tais dados, e na adoção do parâmetro  $r = 0$ , os demais são automaticamente definidos como:  $\delta_N = \delta_T = 4 \times 10^{-7} \text{ m}$ , os comprimentos característicos nas direções normal e tangencial dados pelas Equações (2.76) e (2.77) e  $q = 1$ , parâmetro de acoplamento que determina a razão entre os trabalhos de separação normal e tangencial.

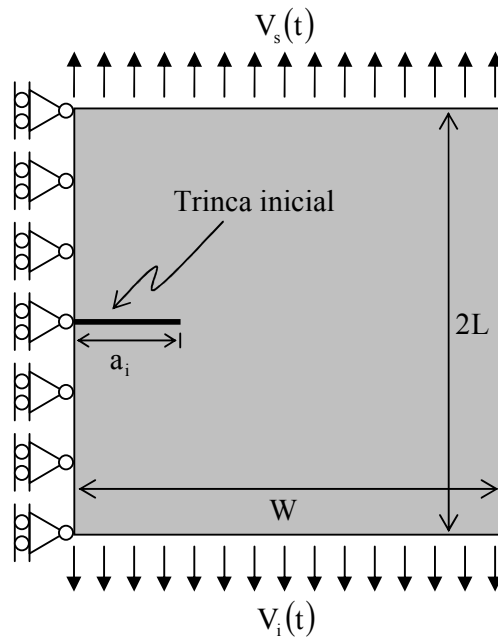


Figura 5.2 – Condições de contorno do problema considerando a simetria em relação ao eixo vertical y.

Fonte: Xu e Needleman (1994).

### 5.2.1 Estudo de Tensões

Nesta análise, busca-se verificar a influência do emprego de elementos coesivos na resposta dinâmica do problema descrito anteriormente. Nesse sentido, comparam-se as tensões obtidas pela simulação numérica do problema em duas situações: quando da

utilização de elementos coesivos e quando da aplicação convencional do método dos elementos finitos sem a presença de elementos coesivos. Para tanto, considera-se a não existência da trinca, ou seja,  $a_i = 0$ , as dimensões  $W = 2L = 10\text{mm}$  e os campos de velocidade prescrita para  $V_1 = 10\text{m/s}$  e  $V_2 = 0$ . A discretização do problema é a mesma utilizada por Xu e Needleman (1994), na qual as subdivisões em  $x$  e  $y$  geram uma discretização  $40 \times 40$ , sendo  $32 \times 40$  uniforme na parte central e  $8 \times 40$  variando gradativamente para os bordos da chapa. Tal discretização forma um padrão quadrilateral, o qual é subdividido ao longo de suas diagonais em 4 elementos finitos do tipo T3. Os elementos coesivos são inseridos dentro de todo o domínio do problema. A Figura 5.3 reproduz o padrão da malha utilizada nesta e nas análises posteriores. O que diferencia essa malha das empregadas nas aplicações seguintes é apenas sua dimensão.

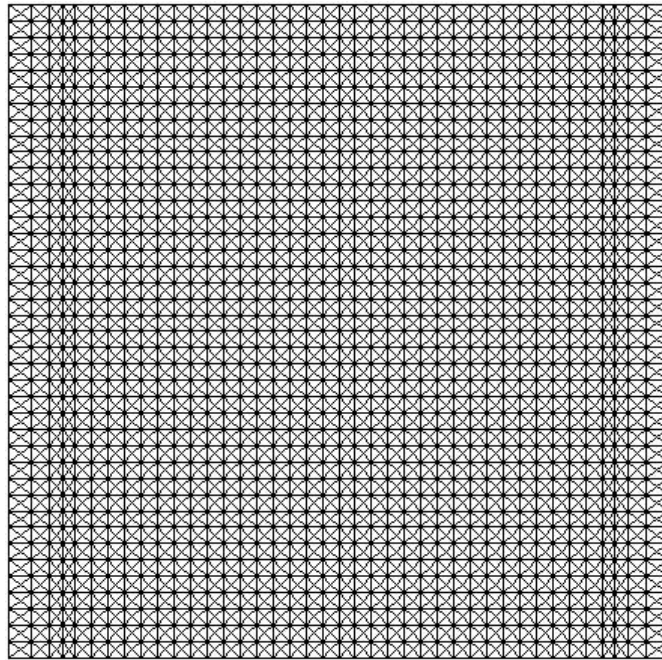


Figura 5.3 – Malha empregada nas análises: 6.400 elementos finitos T3, 9.520 elementos coesivos, 19.200 nós, totalizando 38.400 graus de liberdade.

Fonte: Xu e Needleman (1994).

Os incrementos de tempo utilizados nesse problema são uniformes e iguais a  $\Delta t = 0,01L_e/C_d$ , onde  $L_e$  é a menor distância entre nós da malha (comprimento efetivo) e  $C_d$  a velocidade de propagação da onda, dada pela Equação 4.31. Conforme

Xu e Needleman (1994) e Zhang (2003), mesmo para um incremento de tempo suficientemente reduzido como o especificado, o nível de discretização da malha descrita na Figura 5.3 não é suficiente para representar de forma precisa os campos de tensão na chapa. Para tanto, seria necessário satisfazer o critério de tamanho máximo da zona coesiva, o qual, segundo Rice (1968b) apud Zhang (2003), é expresso por:

$$R = \frac{\pi}{8} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{G_{Ic}}{\sigma_{med}^2} \quad (5.7)$$

onde, para o modelo coesivo de Xu e Needleman, a tensão média para o material PMMA é  $\sigma_{med} = 0,453\sigma_{max}$ . Assim, o comprimento da zona coesiva é de aproximadamente  $23,6\mu\text{m}$ . Para as dimensões  $W = 2L = 10\text{mm}$ , verifica-se a presença de elementos coesivos de  $250\mu\text{m}$ , que claramente não satisfazem tal critério. Todavia, qualitativamente, os resultados obtidos são satisfatórios para o nível de sollicitação que é imposta à chapa.

As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam as isoformas de tensão obtidas por uma análise convencional do método dos elementos finitos e outra com o emprego dos elementos coesivos para o tempo  $t = 3,5\mu\text{s}$ , respectivamente. Com base em tais resultados, é possível afirmar que para um nível de sollicitação externa em que os elementos coesivos não experimentam uma situação próxima a de fraturamento, as respostas das duas formulações para o problema em questão possuem uma boa congruência. Observando as Figuras 5.4 a 5.7, verifica-se que as condições de contorno impostas fazem com que apenas uma onda de tensão se propague ao longo da altura da chapa com uma velocidade  $C_d = 2.090\text{ m/s}$ . Nessas condições, a tensão propagada pela onda, conforme descrito nas Figuras 5.6 e 5.7, é de aproximadamente  $25\text{MPa}$ . Por esta tensão representar apenas  $7,7\%$  da tensão necessária para que ocorra o fraturamento ( $\sigma_{max}$ ), justifica-se o comentário anterior de que a chapa está distante de uma situação de fratura.

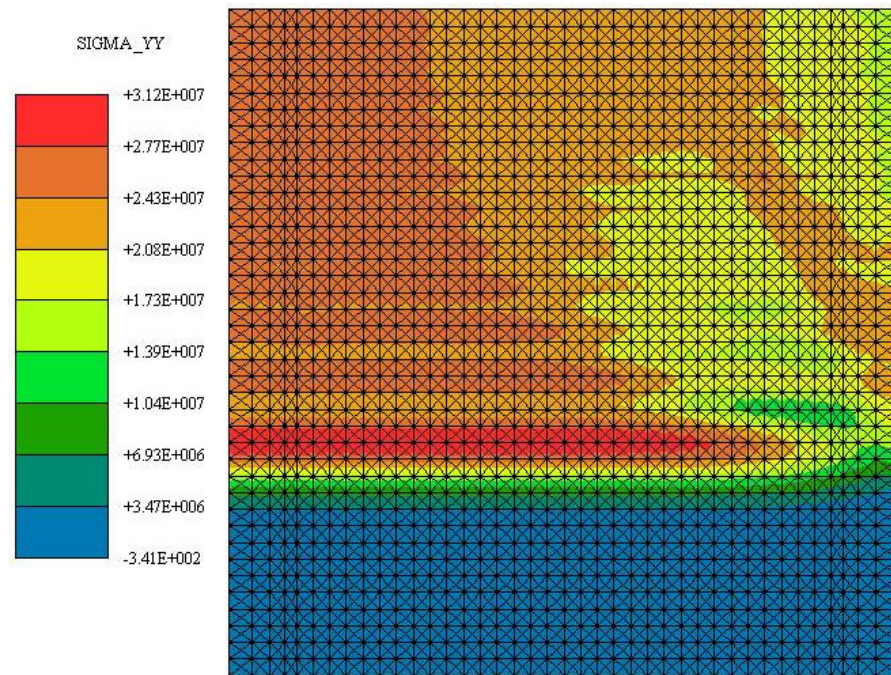


Figura 5.4 – Tensões obtidas por uma análise convencional do MEF para  $t = 3,5\mu\text{s}$ .

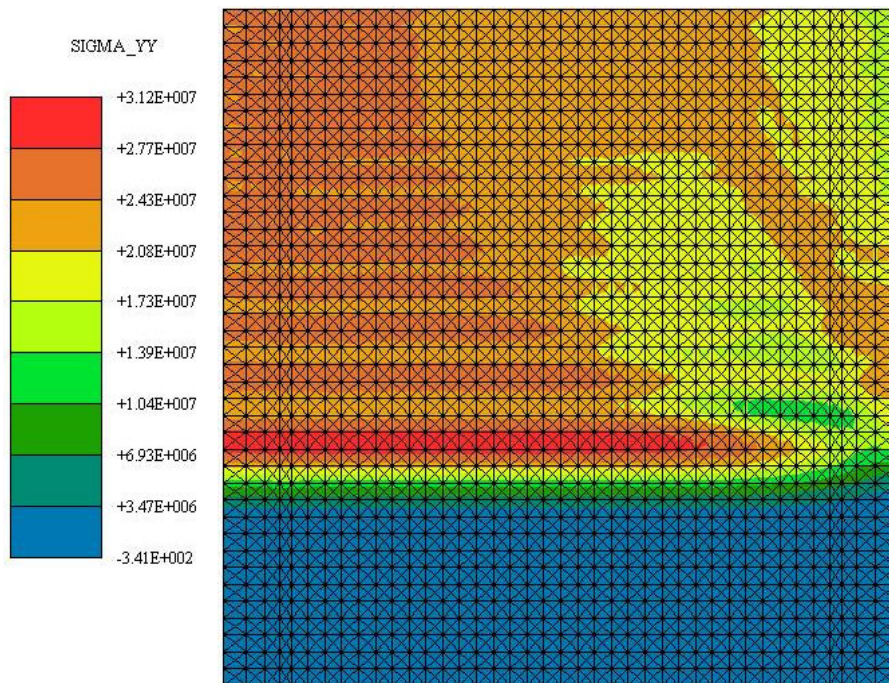


Figura 5.5 – Tensões obtidas por uma análise do MEF com elementos coesivos para  $t = 3,5\mu\text{s}$ .

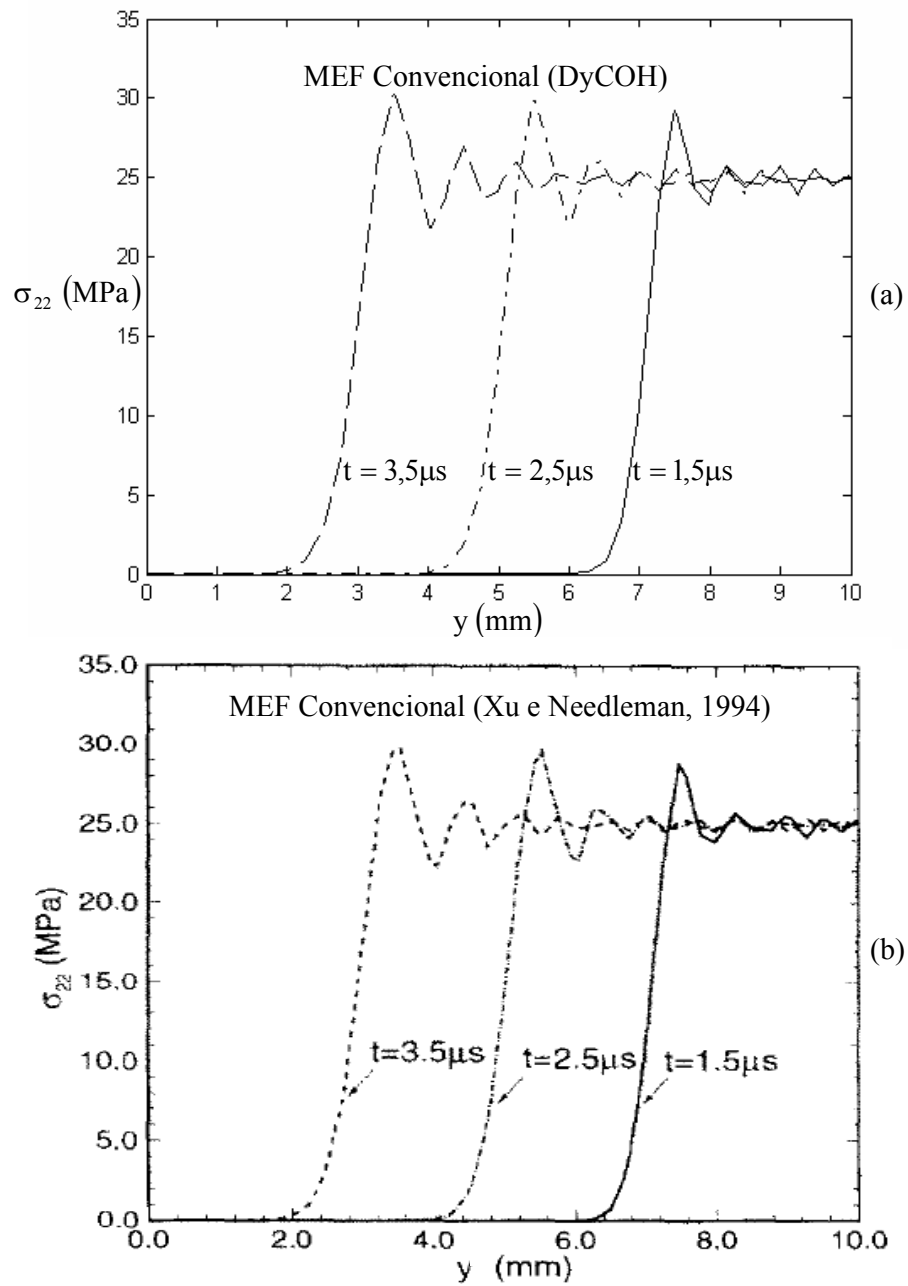


Figura 5.6 – Estudo comparativo das tensões  $\sigma_{22}$  ao longo da altura da chapa em  $x = 2\text{mm}$  para uma análise convencional de elementos finitos: (a) resultados obtidos pelo presente trabalho (DyCOH), (b) resultados apresentados no trabalho de Xu e Needleman (1994).

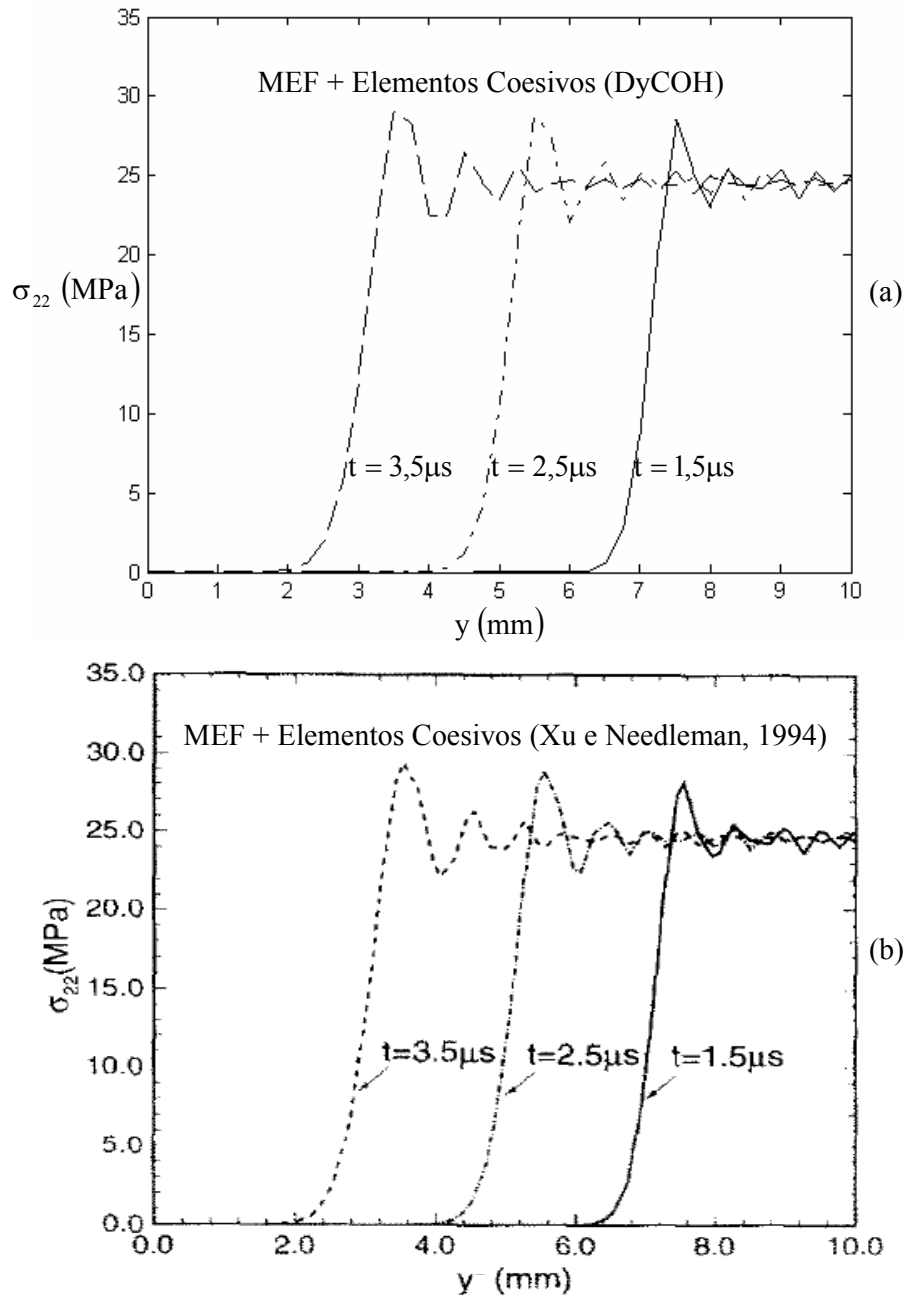


Figura 5.7 – Estudo comparativo das tensões  $\sigma_{22}$  ao longo da altura da chapa em  $x = 2\text{mm}$  para uma análise com elementos finitos e coesivos: (a) resultados obtidos pelo presente trabalho (DyCOH), (b) resultados apresentados no trabalho de Xu e Needleman (1994).

Os resultados obtidos nesta investigação são compatíveis com os descritos no trabalho de Xu e Needleman (1994). Para reforçar tal afirmação remete-se às Figuras 5.6 e 5.7, nas quais são reproduzidas e comparadas as análises desses autores para a variação da tensão ao longo da altura da chapa na linha  $x = 2\text{mm}$ , para os instantes de tempo  $t = 1,5\mu\text{s}$ ,  $t = 2,5\mu\text{s}$  e  $t = 3,5\mu\text{s}$ <sup>8</sup>. Tais estudos novamente visam confrontar as respostas de uma análise convencional de elementos finitos e outra incluindo elementos coesivos. De posse de tais resultados, duas constatações podem ser verificadas. A primeira de que realmente, para o nível de sollicitação em que a chapa é submetida, as respostas das duas formulações são equivalentes. A segunda de que a implementação computacional realizada fornece resultados semelhantes aos de Xu e Needleman (1994), o que credencia o presente trabalho para avançar no estudo do fraturamento propriamente dito.

As análises de tensões apresentadas no presente tópico foram realizadas em um computador com processador Pentium 4 de 3,2GHz e 512Mb de memória RAM. Com essa máquina, o tempo computacional para execução da análise convencional de elementos finitos foi de 3 minutos e 26 segundos, enquanto que para o caso com elementos finitos e coesivos o tempo passou para 6 minutos e 26 segundos. Em ambos os casos, utilizaram-se 7.000 passos de tempo para atingir o instante  $t = 3,5\mu\text{s}$ . Esse acréscimo de quase 100% no tempo de execução da análise numérica ilustra o custo computacional extra dos elementos coesivos, sendo a maior parte gasta no cálculo do vetor de forças coesivas.

## 5.2.2 Fraturamento e Ramificações de Trincas

Nesta análise, busca-se estudar a morfologia de propagação de trincas e suas ramificações (bifurcações da trinca) para chapa tracionada de Xu e Needleman. Nesse sentido, os resultados obtidos pelo presente estudo são comparados com os da literatura técnica. Para realização dessa análise, considera-se  $a_1 = 0,3\text{mm}$ ,  $W = 2L = 3\text{mm}$  e dois casos de campos de velocidade prescrita: o primeiro para  $V_2 = -V_1 = 1\text{m/s}$  e outro para  $V_2 = -V_1 = 5\text{m/s}$ . Ambos os casos tratam da aplicação de velocidades de impacto simétricas. A discretização do problema é a mesma apresentada na Figura 5.3. Porém,

---

<sup>8</sup> As tensões ao longo da altura da chapa fornecidas pelo presente estudo foram obtidas através de uma interpolação fornecida pelo programa MTOOL (LIRA et al., 2006).



uma vez que a dimensão da chapa está reduzida, o comprimento efetivo  $L_e$  também sofre uma diminuição. Para não elevar o custo computacional do problema, Xu e Needleman (1994) redimensionam o incremento de tempo utilizado na análise para  $\Delta t = 0,1L_e/C_d$ , sendo a mesma modificação empregada nas aplicações deste tópico para facilitar as comparações realizadas a seguir.

Ainda em relação à geração da malha, ao utilizar elementos finitos triangulares dividindo em quatro (pelas diagonais) as regiões quadradas formadas pela discretização, as possíveis direções de propagação da trinca se restringem a  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  e  $90^\circ$ . Dessa forma, as ramificações de trinca, para o exemplo em questão, ficam induzidas a ocorrerem a  $\pm 45^\circ$ . Em contrapartida, ao ser refinado, tal padrão tende a não fornecer uma direção preferencial para a propagação da trinca, visto que a uniformidade da malha proporciona uma probabilidade igualitária para a descrição do traçado da trinca. Xu e Needleman (1994) também utilizaram outros padrões de malha. Segundo os resultados obtidos por esses autores, é possível reafirmar que outras inclinações tendem a impor uma direção de propagação da trinca, o que torna a solução do problema ainda mais dependente da malha empregada.

Quando da aparição de ramificações de trincas, os elementos nas proximidades da ponta da trinca estão sujeitos a um processo de grandes rotações, sendo o regime de grandes deformações importante para captar com mais precisão esse fenômeno repleto de instabilidades.

A Figura 5.8 ilustra a evolução da propagação da trinca para as velocidades de impacto  $V_2 = -V_1 = 1\text{m/s}$ . Neste caso, o valor reduzido da intensidade máxima da velocidade de impacto faz com que a propagação da trinca ocorra para  $t = 29,5\mu\text{s}$  após o início da análise. Este é o intervalo de tempo necessário para que, dentro dessa intensidade de impacto, a tenacidade do material (taxa de energia liberada por ponta de trinca) seja consumida e permita a evolução da trinca. Superada essa resistência inicial, a trinca evolui horizontalmente até o tempo de  $t = 31\mu\text{s}$ , onde ocorre a bifurcação da trinca em  $a = 1,425\text{mm}$ . Na seqüência, a trinca se propaga através dos dois ramos criados ao longo de um ângulo de aproximadamente  $31,4^\circ$  com a direção horizontal. No trabalho de Zhang (2003), o tempo de início da propagação é  $t = 27,2175\mu\text{s}$  e o de ramificação  $t = 30,0125\mu\text{s}$ , sendo  $a = 1,8\text{mm}$  e a inclinação dos ramos da trinca em

relação à direção horizontal igual a  $29,7^\circ$ <sup>9</sup>. No trabalho de Xu e Needleman (1994) não são feitas referências ao instante de início da propagação da trinca, bem como ao tempo em que ocorre sua bifurcação. Já o valor do comprimento da trinca, para o qual ocorre a ramificação, e o ângulo da ramificação são dados como  $a = 1,5\text{mm}$  e  $31,0^\circ$ , respectivamente.

Observando o padrão de fraturamento apresentado na Figura 5.8, percebe-se que, após o início da propagação, a trinca assume uma abertura praticamente constante até atingir o ponto de ramificação. A partir deste ponto, os dois ramos de trinca resultante possuem aberturas com geometrias compatíveis, porém com abertura menor do que antes da bifurcação. Tal comportamento está relacionado ao fato da mesma intensidade de impacto, após a bifurcação, ser responsável agora por manter a propagação de duas trincas, o que faz com que as aberturas destas sejam menores do que a da trinca original.

A título de comparação, na Figura 5.9 são colocados lado a lado os resultados obtidos pelo presente estudo para o tempo  $t = 33,5\mu\text{s}$ , por Zhang (2003) para o tempo  $t = 32\mu\text{s}$  e o fornecido no trabalho de Xu e Needleman (1994), no qual não está especificado a que tempo de análise se refere o estágio de fraturamento ilustrado. Em relação a tais comparações, pode-se afirmar que, qualitativamente, tais resultados são equivalentes, principalmente, considerando que Xu e Needleman (1994) admitem o material como sendo hiperelástico e que Zhang (2003) adota uma malha totalmente uniforme e com elementos coesivos apenas na região a frente da ponta da trinca inicial. Mesmo se desconsideradas tais diferenças de formulação e de geração de malha, é compreensível que as três respostas, embora qualitativamente apresentem o mesmo padrão de fraturamento, não sejam iguais. Esta afirmação encontra-se diretamente relacionada a dois prováveis fatores: ao grau de instabilidade do problema analisado e ao acúmulo de erros numéricos, o qual pode ser diferente nas implementações dos três trabalhos. De fato, apenas é possível afirmar que os três trabalhos apresentam respostas qualitativamente equivalentes. Para obter uma resposta precisa e realista, são necessárias análises experimentais que permitam calibrar o modelo coesivo empregado através de um processo contínuo de verificação e validação.

---

<sup>9</sup> O ângulo formado pelas ramificações da trinca com a direção horizontal para a velocidade de  $1\text{ m/s}$  não é explicitamente fornecido no trabalho de Zhang (2003). Esse valor é uma aproximação extraída diretamente da figura em questão no trabalho da referida autora.

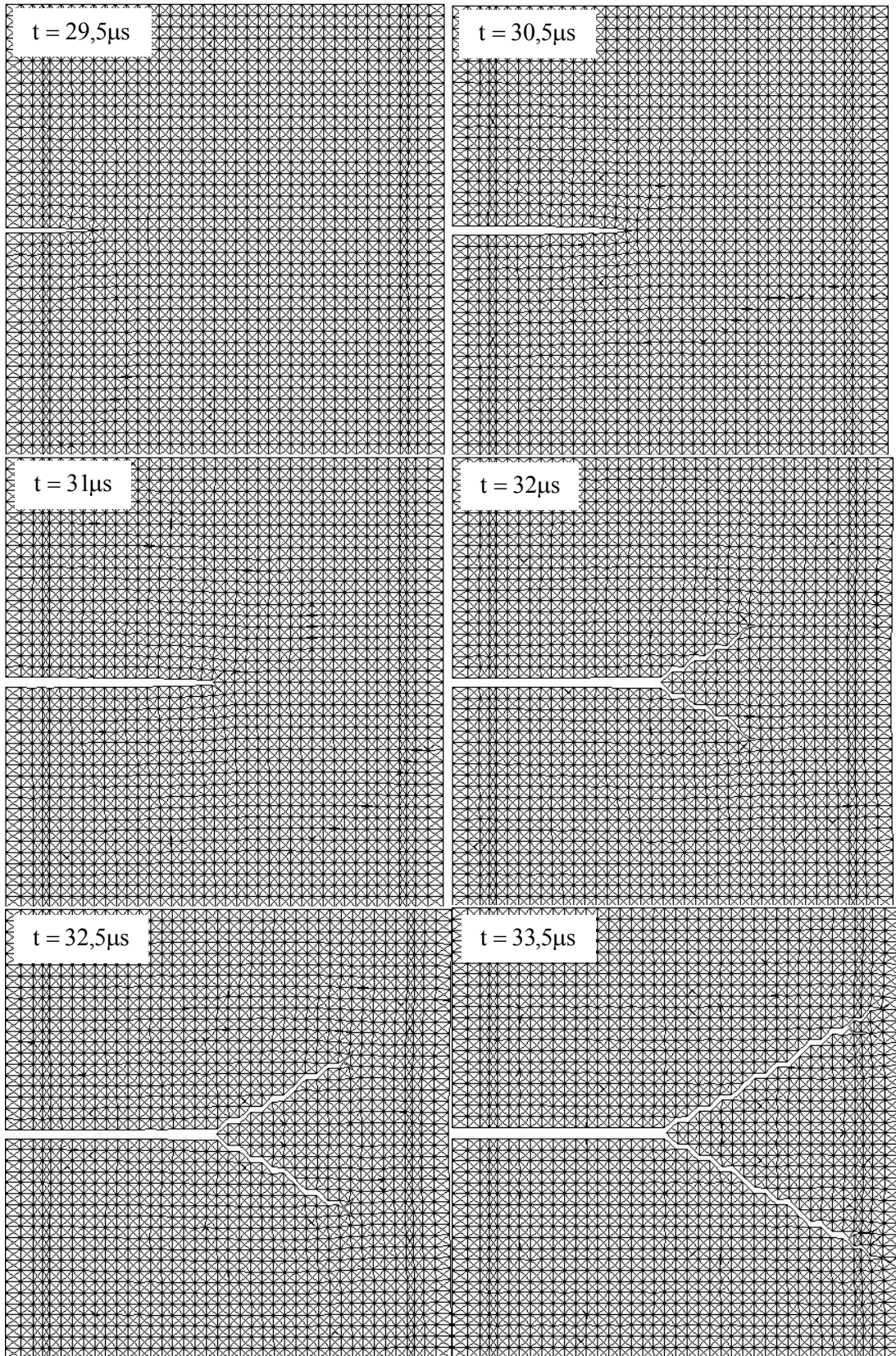


Figura 5.8 – Estágios de fraturamento para  $V_2 = -V_1 = 1\text{m/s}$ .

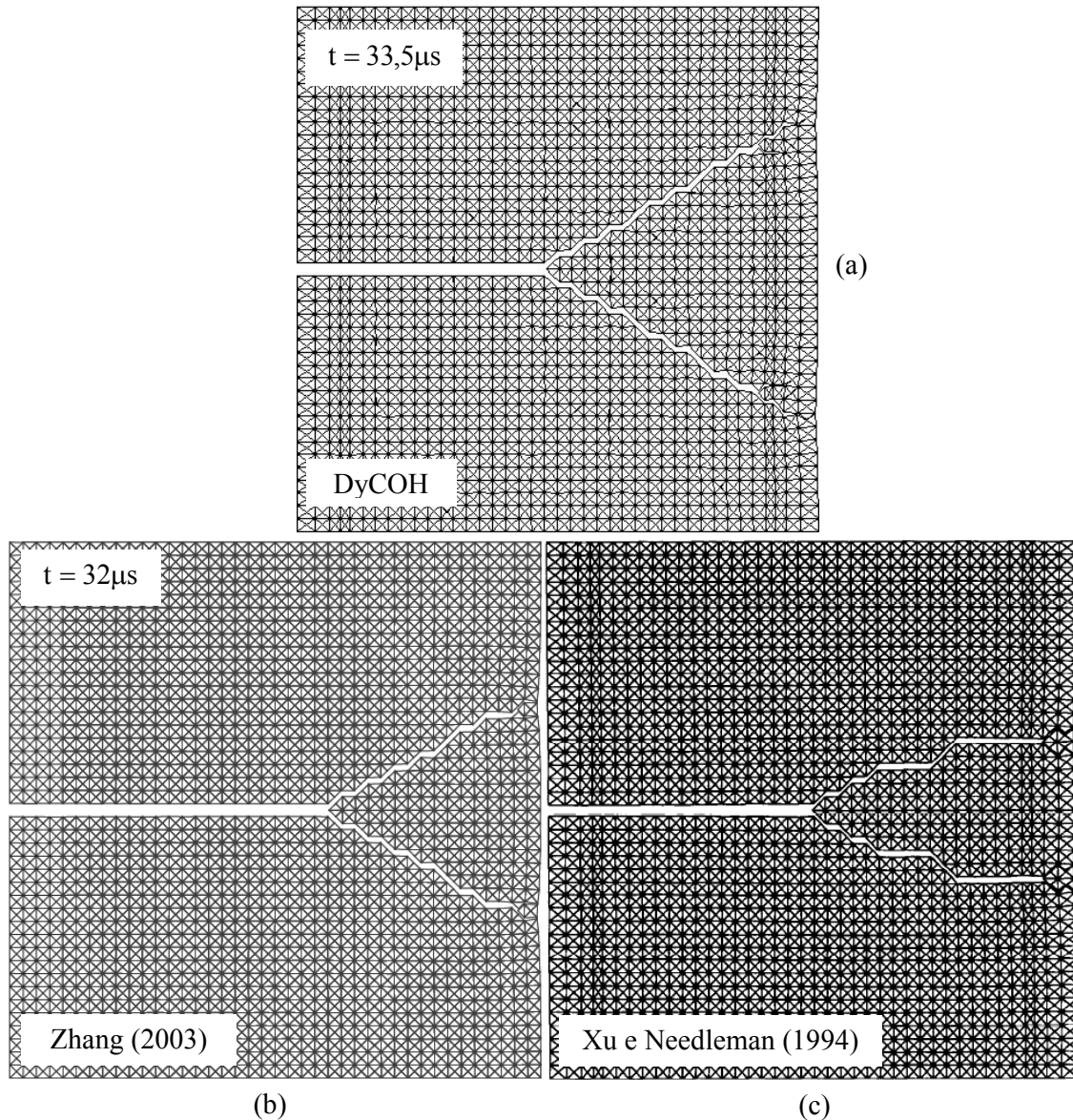


Figura 5.9 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para uma intensidade máxima de impacto  $V_2 = -V_1 = 1\text{m/s}$ : (a) resultados do presente trabalho (DyCOH), (b) resultados de Zhang (2003) e (c) resultados de Xu e Needleman (1994).

Embora a geração de erro numérico seja apontada como um dos fatores responsáveis pela diferença dos resultados, verifica-se que os mesmos não chegam a afetar a simetria da resposta, sendo a mesma obtida sem nenhuma imposição. Xu e Needleman (1994) atribuem essa característica como mais uma vantagem do modelo coesivo, visto que a simetria é algo difícil de se obter naturalmente através de uma análise numérica.

Na Figura 5.10, são apresentados os diversos quadros que ilustram os sucessivos formatos da trinca ao longo de sua propagação para intensidades máximas de impacto dadas pelas velocidades  $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ . Neste caso, a elevação da intensidade do impacto faz com que a propagação da trinca ocorra no tempo  $t = 6,0 \mu\text{s}$  após o início da análise, bem menor que o caso anterior. Esse é o novo intervalo de tempo necessário para que, dentro dessa intensidade de impacto, a tenacidade do material seja consumida e permita a evolução da trinca. Superada essa resistência inicial, a trinca evolui horizontalmente até o tempo de  $t = 7,2 \mu\text{s}$ , onde ocorre a bifurcação da trinca em  $a = 1,050 \text{ mm}$ . Na seqüência, a trinca se propaga através dos dois ramos criados ao longo de um ângulo de aproximadamente  $34^\circ$  com a direção horizontal. No trabalho de Zhang (2003), o tempo de início da propagação é  $t = 6,1055 \mu\text{s}$  e o de ramificação  $t = 7,5280 \mu\text{s}$ , sendo  $a = 1,050 \text{ mm}$  e a inclinação dos ramos da trinca em relação à direção horizontal igual a  $29^\circ$ . No trabalho de Xu e Needleman (1994) não são feitas referências ao instante de início da propagação da trinca, bem como ao tempo em que ocorre sua bifurcação. Já o valor do comprimento da trinca, para o qual ocorre a ramificação, e o ângulo da ramificação são dados como  $a = 1,275 \text{ mm}$  e  $34,0^\circ$ , respectivamente.

Com base nos dados apresentados pelos três trabalhos, pode-se perceber que, como esperado, quanto maior a intensidade da velocidade de impacto, maior o nível de fraturamento da peça. Esta consideração é retratada pela maior quantidade de ramificações de trincas para a intensidade maior de impacto, bem como pelo menor tempo para que a ramificação ocorra.

A Figura 5.11 visa confrontar diretamente os resultados obtidos no presente estudo com os fornecidos por Zhang (2003) para o tempo de simulação  $t = 9 \mu\text{s}$ . Nesse caso, percebe-se uma excelente congruência entre os resultados, chegando os mesmos a destacarem (através de círculos vermelhos) a presença de pequenas ramificações (em detalhe na Figura 5.12) que se fecham no decorrer da análise devido à preponderância de outros ramos da trinca. Para o tempo  $t = 10,6 \mu\text{s}$ , novamente, são comparados os resultados dos dois trabalhos conforme descrito na Figura 5.12. Mais uma vez, percebe-se que os resultados possuem uma boa equivalência. O nível de igualdade dos mesmos apenas é afetado na região onde a discretização das malhas é diferente. Todavia, todos os dois indicam para uma morfologia final de trinca com a abertura de mais dois ramos.

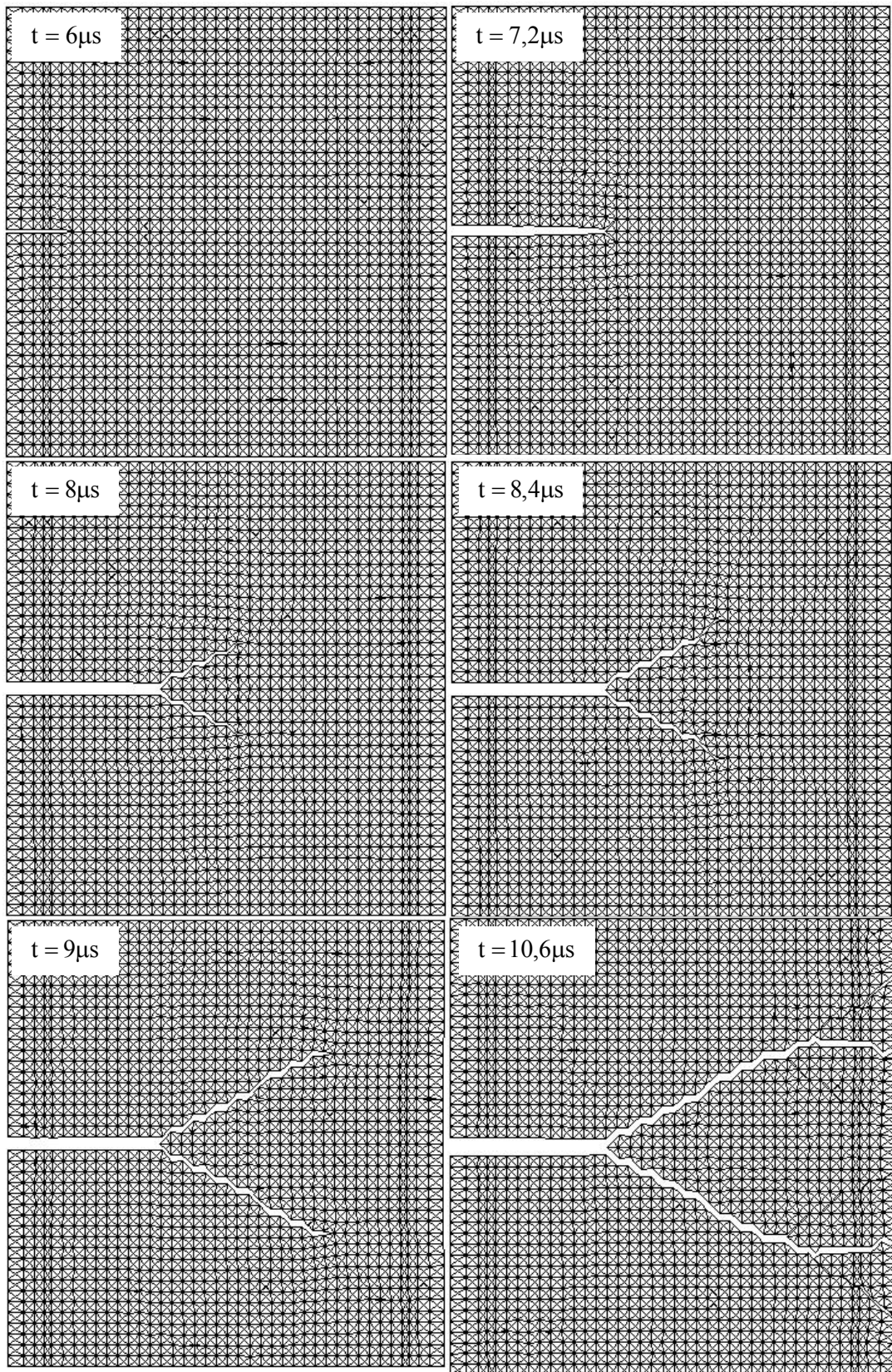


Figura 5.10 – Estágios de fraturamento para  $V_2 = -V_1 = 5\text{ m/s}$ .

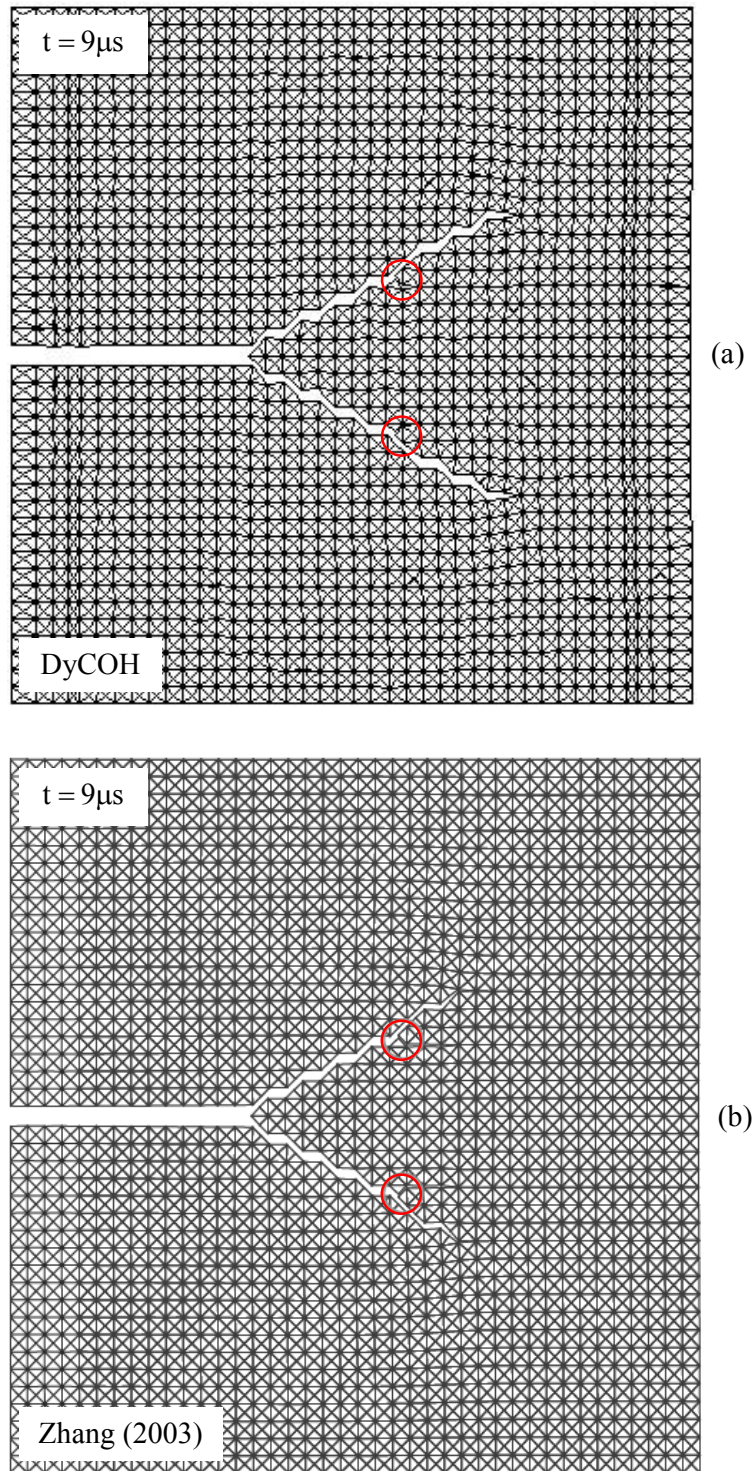


Figura 5.11 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto  $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Zhang (2003).

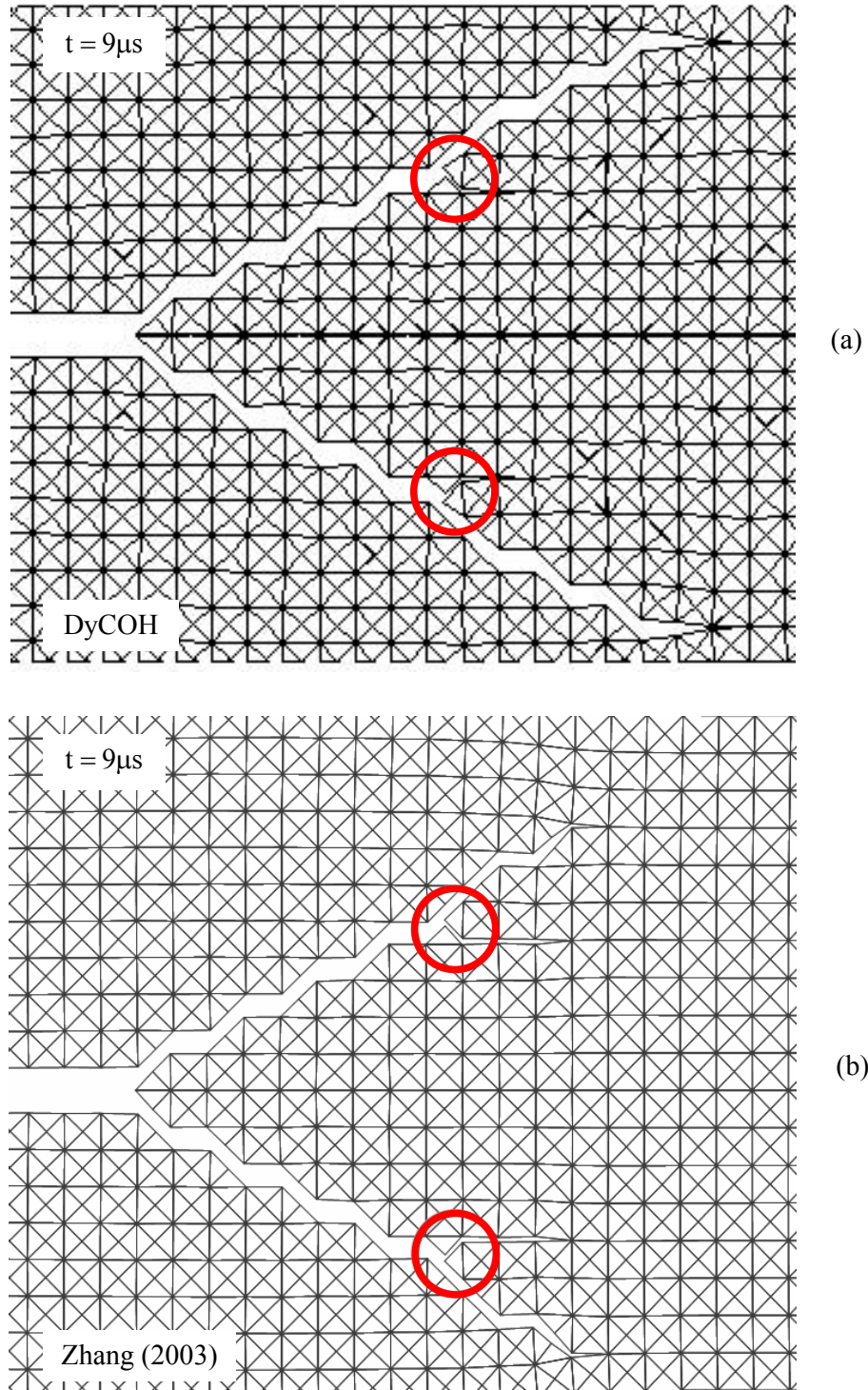


Figura 5.12 – Detalhes amplificados em 3 vezes para o estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto  $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Zhang (2003).



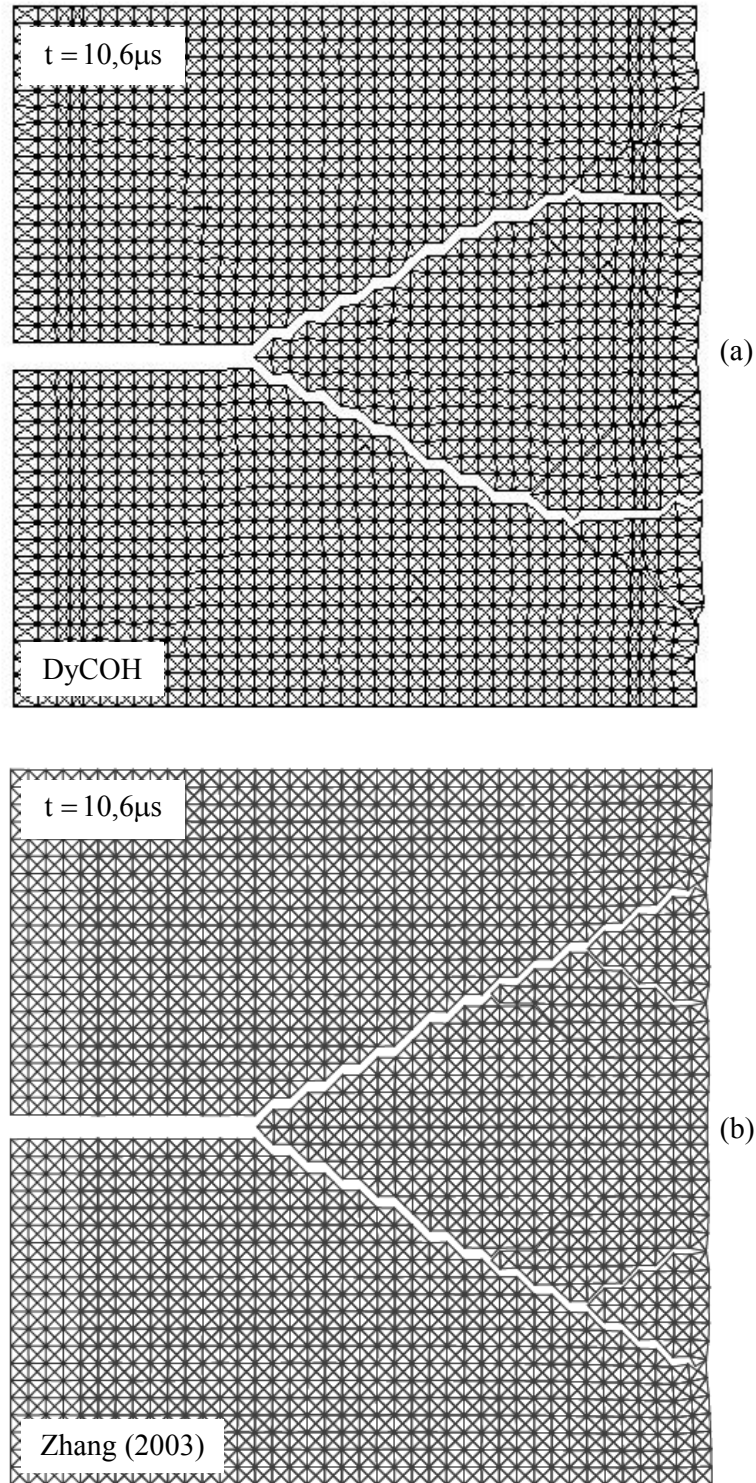


Figura 5.13 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto  $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Zhang (2003).

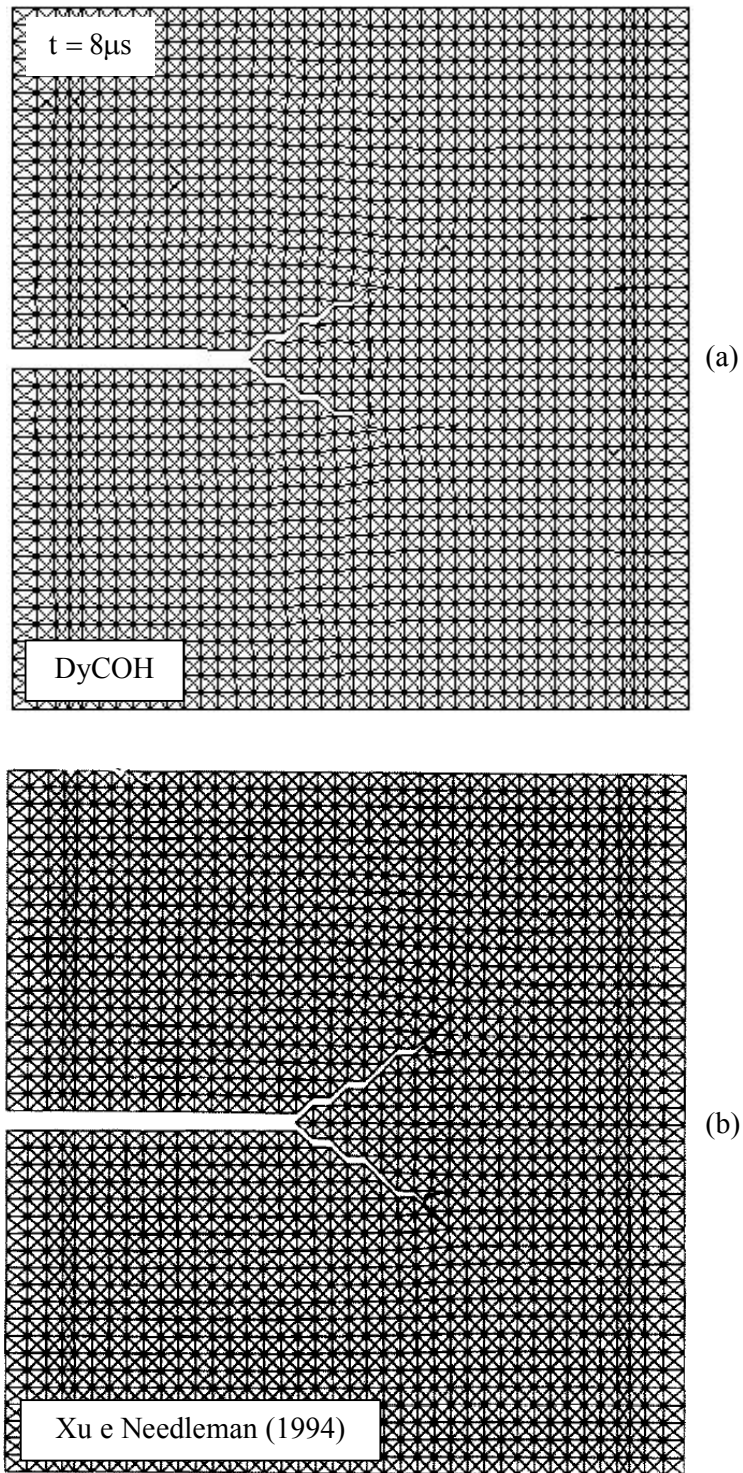


Figura 5.14 – Estudo comparativo do padrão de fraturamento para velocidade máxima de impacto  $V_2 = -V_1 = 5 \text{ m/s}$ : (a) resultados do presente estudo (DyCOH) e (b) resultados de Xu e Needleman (1994).

Na Figura 5.14, para o instante de tempo  $t = 8\mu\text{s}$ , os resultados do presente trabalho também são comparados com os de Xu e Needleman (1994). Embora tais autores não explicitem para que instante de tempo o padrão de fraturamento apresentado na Figura 5.14 se refere, observa-se que o mesmo apresenta uma boa concordância com os resultados do presente trabalho.

Novamente, ressalta-se que as diferenças apresentadas pelas respostas dos três trabalhos são esperadas e estão diretamente relacionadas ao grau de instabilidade do problema analisado e ao diferente acúmulo de erros numéricos nas implementações dos três trabalhos. De fato, mais uma vez, apenas é possível afirmar que os três trabalhos apresentam respostas qualitativamente equivalentes. Resultados para esse problema podem ser considerados precisos e realistas somente quando da devida realização de análises experimentais que permitam calibrar o modelo coesivo empregado através de um processo contínuo de verificação e validação.

Na Tabela 5.1, são resumidos os dados que representam a morfologia de propagação da trinca para as velocidades de impacto estudadas, contendo tanto os resultados deste trabalho como os das pesquisas utilizadas como referência. Com base nos estudos realizados, verifica-se que, de forma geral, os três trabalhos comparados apresentam resultados com boa equivalência, principalmente quando ressaltado que os mesmos investigam um problema da Mecânica da Fratura rico em instabilidades e cujo nível atual de conhecimento sobre ele ainda pode ser considerado incipiente.

Tabela 5.1 – Resumo dos dados da morfologia da propagação da trinca.

Fontes	$V_2 = -V_1$	$t_{\text{init}} (\mu\text{s})$	$t_{\text{ram}} (\mu\text{s})$	$a_{\text{ram}} (\text{mm})$	$\theta_{\text{ram}} (^\circ)$
Presente estudo (DyCOH)	1 m/s	29,5	31,0	1,425	31,4
Zhang (2003)	1 m/s	27,2175	30,0125	1,800	29,7 <sup>10</sup>
Xu e Needleman (1994)	1 m/s	-	-	1,500	31,0
Presente estudo (DyCOH)	5 m/s	6,0	7,2	1,050	34,0
Zhang (2003)	5 m/s	6,1055	7,5280	1,050	29,0
Xu e Needleman (1994)	5 m/s	-	-	1,275	34,0

<sup>10</sup> O ângulo formado pelas ramificações da trinca com a direção horizontal para a velocidade de 1 m/s não é explicitamente fornecido no trabalho de Zhang (2003). O valor presente na Tabela 5.1 é uma aproximação extraída diretamente da figura em questão no trabalho de tal autora.

As análises de fraturamento dinâmico apresentadas no presente tópico foram realizadas em um computador com processador Pentium 4 de 3,2GHz e 512Mb de memória RAM. Com essa máquina, o tempo computacional para execução dos 32 mil passos de tempo necessário para reproduzir o padrão de fraturamento da chapa para  $V_2 = -V_1 = 1\text{ m/s}$  foi de 32 minutos e 30 segundos. Para o caso com  $V_2 = -V_1 = 5\text{ m/s}$ , esses valores passaram para 11 mil passos de tempo, 16 minutos e 30 segundos.

Retomando as ponderações iniciais em relação ao padrão da malha empregada, através dos resultados apresentados nos três trabalhos, observa-se que o mesmo não impôs às ramificações das trincas direções de  $\pm 45^\circ$ . Pelo contrário, nos casos estudados tais informações encontram-se entre  $29^\circ$  e  $34^\circ$ , que são valores relativamente distantes dos supracitados. Isso reforça as afirmações iniciais de que esse padrão de malha, por apresentar direções de ramificações igualmente espaçadas a frente da ponta da trinca, configura-se como o ideal para promover uma probabilidade igualitária para que a trinca se propague em uma dessas direções.

Diante dos resultados obtidos, ressalta-se que, para os casos analisados, o sistema computacional desenvolvido mostra-se apto a simular, mesmo que qualitativamente, fenômenos complexos da Mecânica da Fratura, tais como nucleação e ramificação dinâmica de trincas.

### **5.3 Tirante Sujeito a Cargas Quase-Estática e de Impacto**

Este problema trata-se de uma análise em estado plano de tensão de um tirante, de largura  $L$  e altura  $H$ , sujeito a um campo de força prescrita  $P(t)$  na extremidade direita e com condições de contorno que impedem o movimento da extremidade esquerda na direção horizontal. As condições iniciais são representativas do estado de repouso, ou seja, para o tempo  $t = 0$  o tirante é livre de tensões e possui deslocamentos e velocidades nulos,  $u(x, y, t = 0) = 0$  e  $\dot{u}(x, y, t = 0) = 0$ .

A Figura 5.15 apresenta uma representação gráfica da descrição do problema, sendo o campo de forças prescritas expresso por:

$$P(t) = \begin{cases} P_0 t/t_r, & \text{para } t \leq t_r \\ P_0, & \text{para } t > t_r \end{cases} \quad (5.8)$$

onde  $P_0 = 1 \times 10^8$  kN/m e  $t_r$  é o tempo de crescimento da função rampa descrito a seguir.

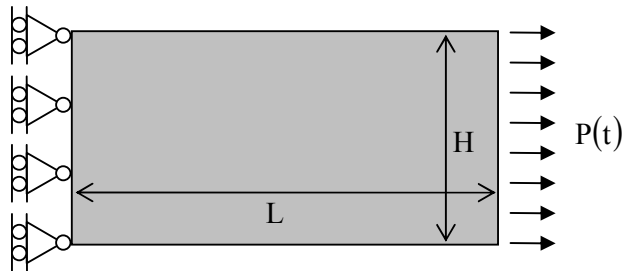


Figura 5.15 – Condições de contorno do tirante.

As propriedades do material constituinte do tirante e do modelo de fratura coesiva são admitidas idênticas às utilizadas no problema da seção 5.2, enquanto que as dimensões adotadas são  $L = 0,4$ mm e  $H = 0,2$ mm. Nessas condições, o tirante é discretizado em 8 elementos finitos do tipo T3, 9 elementos coesivos e 24 nós, totalizando 48 graus de liberdade. Essa discretização é representada na Figura 5.16.

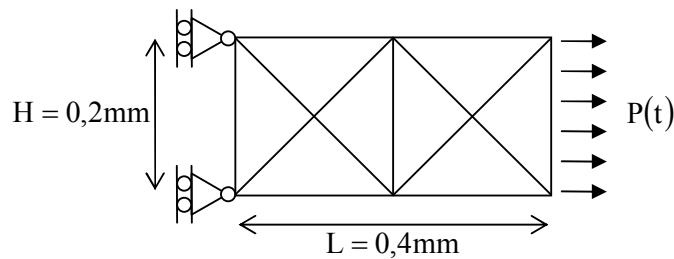


Figura 5.16 – Tirante discretizado em 8 elementos finitos do tipo T3, 9 elementos coesivos e 24 nós, totalizando 48 graus de liberdade.

Para o problema em questão, com elementos coesivos em todas as interfaces do interior do domínio, estuda-se a influência da velocidade de aplicação da carga na

resposta ao fraturamento do tirante. Nenhuma falha inicial é imposta, sendo o fraturamento dado através da nucleação de trincas. O incremento de tempo adotado nas análises desta seção é de  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3} \mu s$ .

### 5.3.1 Aplicação Quase-Estática da Carga

Nesta análise, busca-se verificar o padrão de resposta do tirante quando submetido a uma situação de fraturamento através da aplicação quase-estática da carga. Para tanto, admite-se que a inclinação da função rampa que descreve o aumento da força no tempo é suficientemente pequena para que a aceleração no local de aplicação da carga seja aproximadamente nula. Nesse caso, o tempo para o qual a força atinge seu valor máximo é considerado como  $t_r = 10^5 \mu s$ .

Conforme ilustrado na Figura 5.17, o padrão de fraturamento quase-estático do tirante é representado pelo rompimento do elemento coesivo vertical que está no centro da peça. A fratura ocorre no tempo de aproximadamente  $325 \mu s$ , que corresponde à aplicação de uma força de  $325 \text{ kN/m}$ .

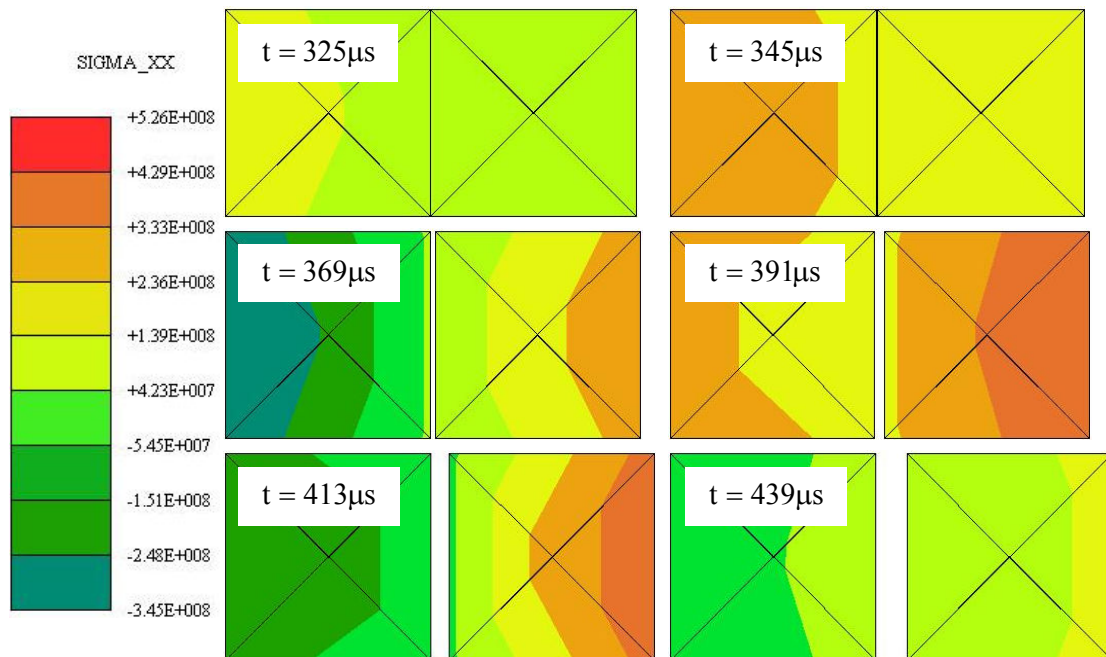


Figura 5.17 – Estágios de fraturamento quase-estático.

Na Figura 5.18, apresenta-se a variação da aceleração no tempo de aplicação da carga. Com base nesse gráfico, verifica-se que até o instante de rompimento do tirante a aceleração permanece aproximadamente nula, condizente com o comportamento quase-estático proposto para análise.

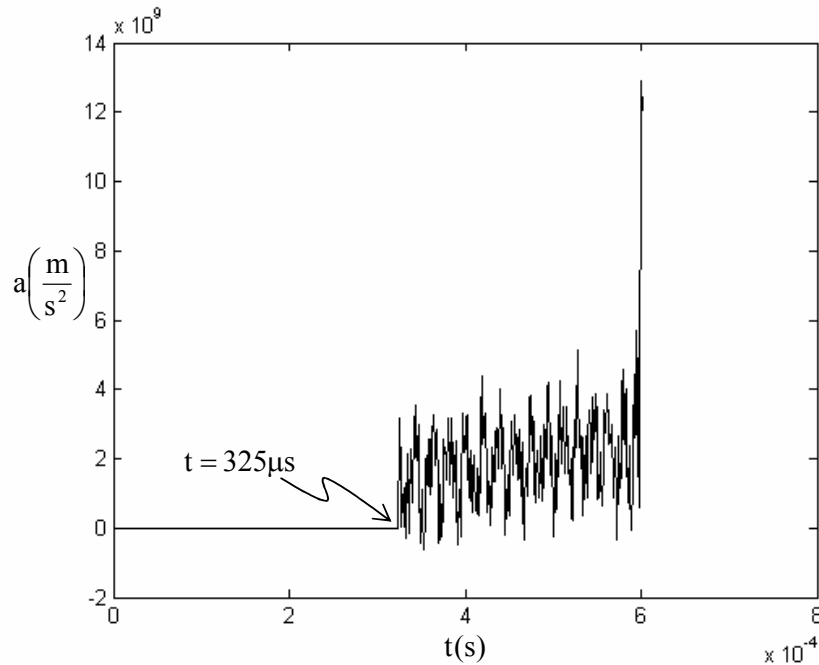


Figura 5.18 – Aceleração na extremidade direita do tirante para aplicação quase-estática da carga.

### 5.3.2 Aplicação da Carga sob Impacto

Nesta análise, busca-se verificar o padrão de resposta do tirante quando submetido a uma situação de fraturamento através da aplicação de carga de impacto. Para tanto, admite-se que a inclinação da função rampa que descreve o aumento da força no tempo é suficientemente alta para representar a aplicação do impacto na estrutura. Nesse caso, o tempo para o qual a força atinge seu valor máximo é considerado como  $t_r = 10\mu\text{s}$ . A Figura 5.19 ilustra a diferença entre esse histórico de carga e o anterior.

Conforme descrito na Figura 5.20, o padrão de fraturamento sob impacto do tirante é representado pelo arrancamento do elemento finito da extremidade direita da

peça. A fratura ocorre no tempo de aproximadamente  $0,09\mu\text{s}$ , que corresponde à aplicação de uma força de  $900,0\text{ kN/m}$ .

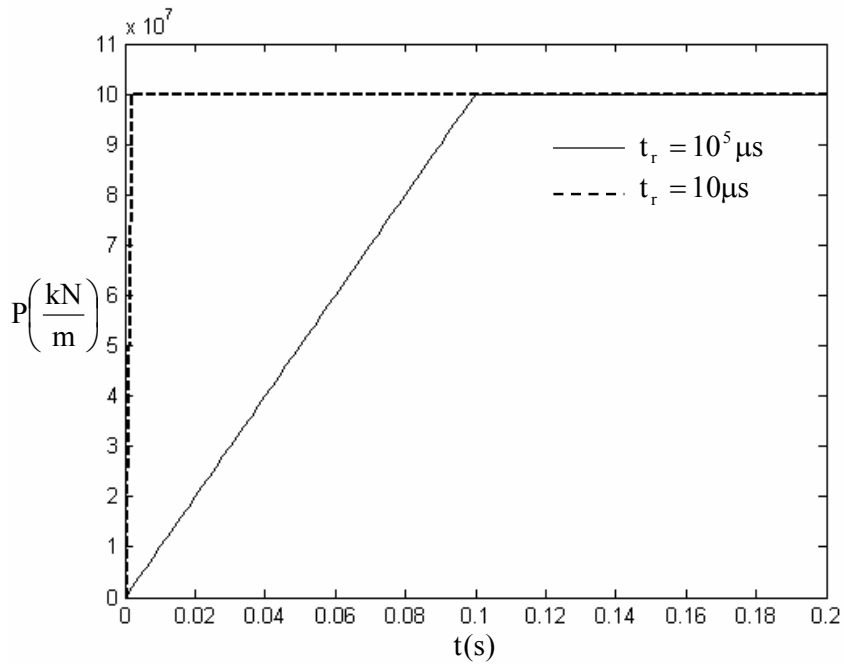


Figura 5.19 – Histórico de carga para as situações quase-estática e de impacto.

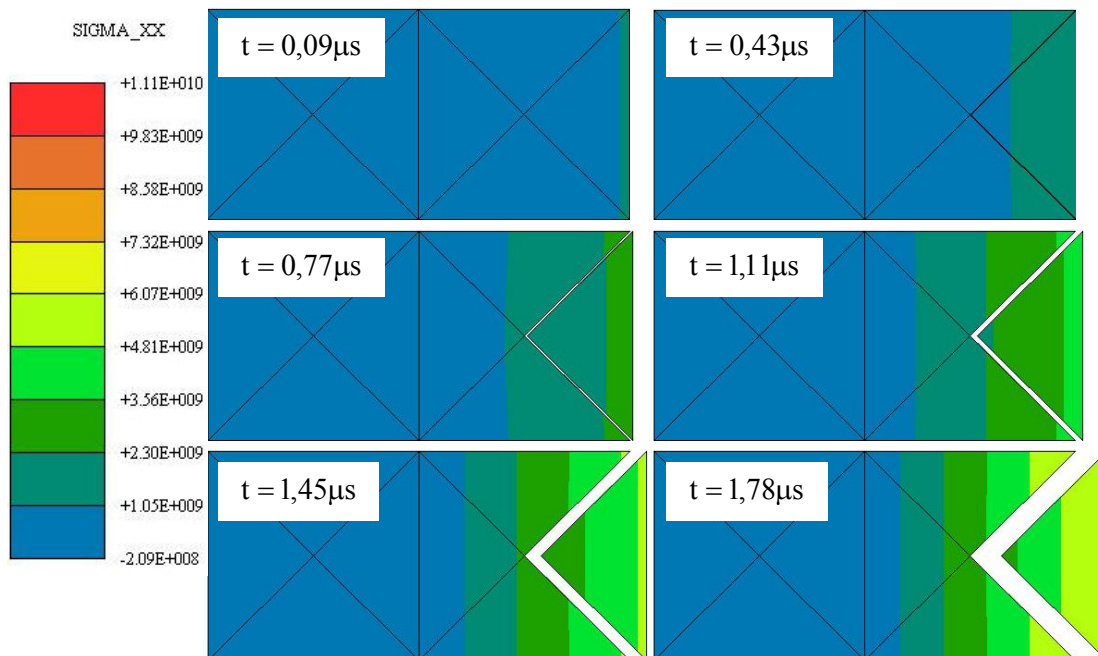


Figura 5.20 – Estágios de fraturamento sob impacto.



Na Figura 5.21, apresenta-se a variação da aceleração no tempo de aplicação da carga. Com base nesse gráfico, verifica-se que até o instante de rompimento do tirante a aceleração permanece crescendo de forma aproximadamente linear, condizente com o comportamento de impacto proposto para análise.

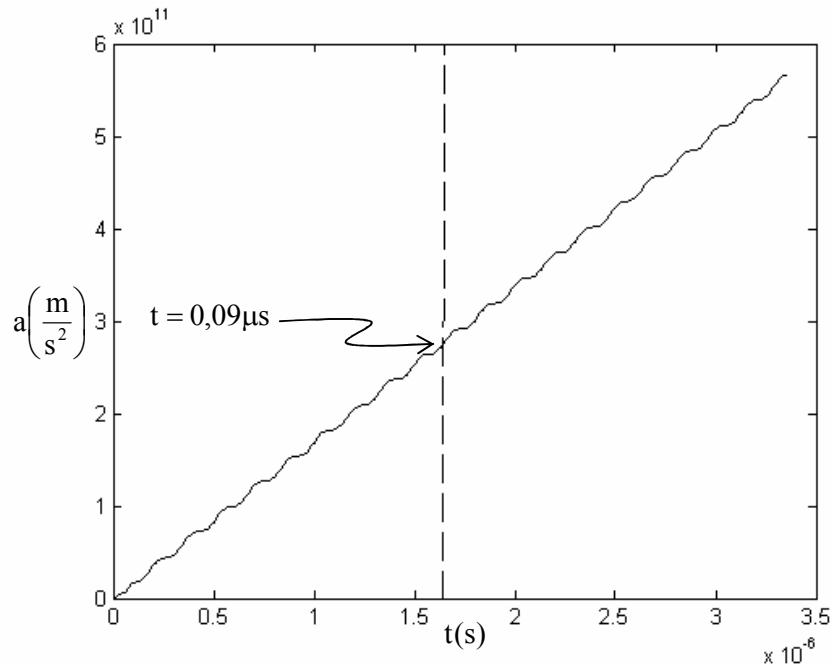


Figura 5.21 – Aceleração na extremidade direita do tirante para aplicação da carga de impacto.

Na Tabela 5.2, apresenta-se um resumo dos dados que representam o padrão de fraturamento obtido no tirante quando da aplicação da carga de forma quase-estática e sob impacto. Nessa tabela,  $t_F$  e  $P_F$  representam o par tempo-força em que se observa a ocorrência da falha.

Tabela 5.2 – Resumo dos dados de fraturamento do tirante para carga quase-estática e sob forma de impacto.

Tipo de Análise	$t_i$ ( $\mu s$ )	$t_F$ ( $\mu s$ )	$P_F$ (kN/m)
Quase-Estática	$10^5$	325	325
Impacto	10	0,09	900

Diante dos estudos realizados nesta seção, verifica-se que aplicação quase-estática da carga permite que todos os elementos coesivos respondam ao nível de solicitação imposta. Dessa forma, a tensão na peça eleva-se gradativamente (Figura 5.17) até ser atingida a resistência máxima do material, tendo como resultado a ruptura da estrutura. Nesse caso, conforme esperado (para a discretização imposta), o local onde ocorre a ruptura é o centro da peça. Quando da aplicação do carregamento sob a forma de impacto, a situação torna-se diferente, visto que não há tempo para que os primeiros elementos coesivos que recebem tensão propagada ofereçam resistência ao fraturamento e transmitam tal tensão para os outros elementos coesivos e finitos (Figura 5.20). Como consequência, ocorre o arrancamento abrupto do extremo de aplicação da carga, enquanto que na região central do tirante a tensão mantém-se praticamente nula.

# Capítulo VI

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Neste trabalho, realiza-se um estudo do ramo da Mecânica da Fratura que se baseia na existência de zonas de processamento coesivo nas proximidades da ponta da trinca. Este estudo inicia-se por meio de uma revisão bibliográfica que segue desde as primeiras pesquisas sobre fratura coesiva até as propostas mais atuais.

A opção pela implementação de modelos coesivos intrínsecos deve-se a intenção de explorar a capacidade de simular fenômenos de interesse da Mecânica da Fratura, a exemplo da nucleação de trincas, ramificações e fragmentação, sem recair em um custo computacional extra (tal como a necessidade de atualização contínua da estrutura topológica para os modelos coesivos extrínsecos). Assim sendo, a escolha pelo modelo exponencial/exponencial de Xu e Needleman (1993, 1994) é realizada, uma vez que o mesmo atende às condições supracitadas.

Dentre os métodos computacionais disponíveis, o Método dos Elementos Finitos é utilizado, visto que possui uma forte relação com a idéia de utilização de elementos coesivos nas interfaces, o que facilita até mesmo a concepção da organização de classes utilizada na implementação computacional.

A implementação computacional é desenvolvida utilizando-se a linguagem de programação C++. Dentre os motivos pela escolha da mesma, destacam-se: a facilidade de desenvolvimento de um sistema numérico que se utilize dos preceitos da programação orientada a objetos, permitindo a viabilização da futura expansão do código computacional, e a utilização de uma linguagem de programação que seja compatível com o nível de esforço computacional exigido para simulação numérica do

fraturamento coesivo dinâmico, posto que a inserção de elementos coesivos aumenta, consideravelmente, a frequência de vibração e o número de graus de liberdade do sistema, elevando-se bastante o custo computacional.

Exemplos tradicionalmente apresentados na literatura técnica são utilizados para verificação da resposta dinâmica do sistema numérico desenvolvido. Em um primeiro instante, observa-se a capacidade de um problema com elementos finitos e coesivos reproduzir, para um estado de tensão que não induza ao fraturamento, a resposta do mesmo problema com uma análise convencional de elementos finitos. Nesse momento, verifica-se que, qualitativamente, os resultados apresentam uma boa equivalência de valores. Realizada essa verificação sem ocorrência de fraturas, a resposta do sistema frente a condições de fraturamento sob impacto é investigada. Nesse ponto, é possível observar questões como o início da propagação da trinca e sua ramificação, evidenciando as informações que caracterizam a morfologia da fratura. Novamente, constata-se, qualitativamente, uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo sistema numérico desenvolvido e os resultados disponíveis na literatura técnica.

Realizada a verificação computacional do DyCOH, através de exemplos existentes na literatura técnica, investiga-se a influência da velocidade de aplicação de carga em um tirante sem existência de falhas iniciais. Para tanto, simula-se um situação com aplicação quase-estática da carga e outra sob a forma de impacto. Os resultados obtidos ilustram os padrões de fraturamento nos dois casos, tendo o de impacto promovido uma ruptura semelhante a de um arrancamento abrupto de uma das partes do tirante. Nessas análises, o fraturamento ocorre através da nucleação de trincas, reafirmando mais essa qualidade dos modelos de fratura coesiva (não necessidade de falhas iniciais para a propagação de trincas).

Através deste trabalho, promove-se o início de uma nova linha de pesquisa neste Programa de Pós-Graduação. Dessa forma, a principal contribuição do presente trabalho trata-se da elaboração completa de um programa computacional para análise dinâmica da propagação de fraturas (DyCOH), sendo o desenvolvimento realizado através de uma implementação que aborda de forma unificada o Método dos Elementos Finitos e os Modelos de Zona Coesiva. Para tornar mais efetiva a supracitada contribuição, o código computacional do DyCOH é elaborado seguindo os conceitos de POO, o que permitirá que as futuras pesquisas nessa nova linha sejam desenvolvidas a partir da extensão desse programa base, sendo necessárias apenas modificações pontuais e bem orientadas.

Dentre os possíveis trabalhos futuros, prevê-se:

- i. O aperfeiçoamento do código computacional em relação ao desempenho, podendo utilizar estratégias de paralelização;
- ii. A melhora das relações constitutivas dos elementos coesivos, incluindo, por exemplo, a consideração de descarregamento elástico;
- iii. A incorporação de outros tipos de modelos coesivos, permitindo a observação da influência dos mesmos na resposta ao fraturamento;
- iv. A implementação de técnicas de relaxação dinâmica, para abordagem mais adequada de fraturas quase-estáticas;
- v. A realização de análises para estudo da sensibilidade do padrão de fraturamento em relação às condições iniciais;
- vi. O emprego de estratégias de adaptação espacial e temporal;
- vii. A associação com elementos discretos e checagem de contatos;
- viii. A implementação de modelos coesivos do tipo extrínseco;
- ix. A generalização do referido código para o tratamento de problemas espaciais, onde os mecanismos da Mecânica da Fratura possam ser explorados de forma mais ampla.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARENBLATT, G. I. **The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture: General Ideas and Hypotheses, Axially Symmetric Cracks.** Applied Mathematics and Mechanics (PMM), v. 23, 1959, pp. 622-636.

\_\_\_\_\_. **Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture.** Advances in Applied Mechanics, v. 7, 1962, pp. 55-129.

BATHE, K-J. **Finite Element Procedures.** Prentice-Hall, New Jersey, The United States of America, 1996.

BELTZ, G. E.; RICE, J. R. **Dislocation Nucleation Versus Cleavage Decohesion at Crack Tips.** In Modeling the Deformation of Crystalline Solids, The Minerals, Metals and Materials Society (TMS), Warrendale, Penna., 1991, pp. 457-480.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics.** 3<sup>th</sup> Edition. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, The Netherlands, 1984.

CAMACHO, G. T.; ORTIZ, M. **Computational Modelling of Impact Damage in Brittle Materials.** International Journal of Solids and Structures, v. 33, 1996, pp. 2899-2938.

CELES, W.; PAULINO, G. H.; ESPINHA, R. A. **Compact Adjacency-Based Topological Data Structure for Finite Element Mesh Representation**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 64, 2005a, pp. 1529-1556.

\_\_\_\_\_. **Efficient Handling of Implicit Entities in Reduced Mesh Representations**. Journal of Computing and Information Science in Engineering, v. 5, 2005b, pp. 348-359.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. John Wiley & Sons, 1989.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. **On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics**. IBM Journal, v. 11, 1967, pp. 215-234, English translation of the German original: COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. **Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik**. Mathematische Annalen, v. 100, 1928, pp. 32-74.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 1. John Wiley & Sons, Chichester, England, 1991.

DAVISSON, C.; GERMER, L. H. **Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel**. Physical Review, v. 30, 1927, pp. 705-740.

DUGDALE, D. S. **Yielding of Sheets Containing Slits**. Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 8, 1960, pp. 100-104.

ELLIS, M. A.; STROUSTRUP, B. **C++ Manual de Referência Comentado**. Editora Campus, 1993.

ESHELBY, J. D. The Calculation of Energy Release Rates. In: Conference on Prospects of Advanced Fracture Mechanics. **Proceedings...** Nordhoff, 1974, pp. 69-84.

GRIFFITH, A. A. **The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids**. Philosophical Transactions Royal Society of London, Series A, v. 221, 1921, pp 163-197.

\_\_\_\_\_. **The Theory of Rupture**. In: 1<sup>st</sup> International Congress for Applied Mechanics. **Proceedings...** Delft, 1924, pp. 55-63.

HUTCHINSON, J. W. **Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material**. Journal of Mechanics and Physics of Solids, v.16, 1968, pp. 13-31.

INGLIS, C. E. **Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners**. Transactions of the Institute of Naval Architecture, v. 55, 1913, 219-230.

IRWIN, G. R. **Fracture Dynamics**. Fracturing of Metals, American Society for Metals, 1948, pp. 147-166.

\_\_\_\_\_. **Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate**. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, v. 24, 1957, pp. 361-364.

\_\_\_\_\_. **Fracture**. Handbuch der Physik, v. 6, 1958 (Edited by S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 551-590.

KIRSCH, G. **Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre**. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, v. 42, 1898, pp. 797-807.

KLEIN, P. A.; FOULK, J. W.; CHEN, E. P.; WIMMER, S. A.; GAO, H. **Physics-based Modeling of Brittle Fracture: Cohesive Formulations and the Application of Meshfree Methods**. Technical Report SAND2001-8099, Sandia National Laboratories, Livermore, The United State of America, 2000.



\_\_\_\_\_. **Physics-based Modeling of Brittle Fracture: Cohesive Formulations and the Application to Meshfree Methods.** Theoretical and Applied Fracture Mechanics, v. 37, 2001, pp. 99-166.

KOILLER, B. A Arquitetura da Matéria. Física na Escola, Sociedade Brasileira de Física, v. 6, n. 1, 2005, pp. 54-57.

KUBAIR, D. V.; GEUBELLE, P. H. **Comparative Analysis of Extrinsic and Intrinsic Cohesive Models of Dynamic Fracture.** International Journal of Solids and Structures, v. 40, 2003, pp. 3853-3868.

KRYSL, P.; BELYTSCHKO, T. **Object-oriented Parallelization of Explicit Structural Dynamics with PVM.** Computers and Structures, v. 66, 1998, pp.259-273.

LIRA, W. W. M.; ARRUDA, M.; MIRANDA, A. C. O.; MARTHA, L. F. C. R. **Mtool –Two-Dimensional Mesh Tool.** Software sem registro ou patente. 2006.

MELLO, A. L. N. **Análise Experimental da Vida em Fadiga de Trincas Propagadas em Placas de Alumínio Reparadas com Material Compósito.** Rio de Janeiro, 2005. 139 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MIRANDA, A. C. O. **Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis.** Rio de Janeiro, 2003. 125 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

NEEDLEMAN, A. **A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding.** Journal of Applied Mechanics, v. 54, 1987, pp. 525-531.

\_\_\_\_\_. **An Analysis of Decohesion Along an Imperfect Interface.** International Journal of Fracture, v. 40, 1990a, pp. 21-40.

\_\_\_\_\_. **An Analysis of Tensile Decohesion Along an Interface.** Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 38, 1990b, pp. 289-324.

OROWAN, E. **Fracture and Strength of Solids.** Reports on Progress in Physics, v. 12, 1948, pp. 185-232.

RICE, J. R. **A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks.** Journal of Applied Mechanics, v. 35, 1968a, pp. 379-386.

\_\_\_\_\_. **Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture.** Fracture, An Advanced Treatise. Ed Liebowitz, Academic Press, New York, v. 2, 1968b, pp. 191-311.

\_\_\_\_\_. **Dislocation Nucleation from a Crack Tip: an Analysis Based on the Peierls Concept.** Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 40, 1992, pp. 239-271.

RICE, J. R.; ROSENGREN, G.F. **Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material.** Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 16, 1968, pp. 1-12.

ROSE, J. H.; FERRANTE, J.; SMITH, J. R. **Universal Binding Energy Curves for Metals and Bimetallic Interfaces.** Physical Review Letters, v. 47, 1981, pp. 675-678.

\_\_\_\_\_. **Universal Features of Bonding in Metals.** Physical Review B, v. 28, 1983, pp. 1835-1845.

RUMBAUGH, J.; JACOBSON, I.; BOOCH, G. **UML: Guia do Usuário.** Editora Campus, 2000.

SAOUMA, V. E. **Lecture Notes in: Fracture Mechanics**. Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, United States of America, 2000.

SILVEIRA, N. P. P. **Simulação de Propagação de Trincas com o Uso do Método dos Elementos de Contorno**. Rio de Janeiro, 2003. 87 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SNEDDON, J. D. **Fourier Transforms**. McGraw-Hill, New York, The United States of America, 1951.

SONG, S. H.; PAULINO, G. H.; WILLIAM, G. B. **A Bilinear Cohesive Zone Model Tailored for Fracture of Asphalt Concrete Considering Viscoelastic Bulk Material**. Engineering Fracture Mechanics, v. 73, 2006, pp. 2829-2848.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. McGraw Hill, 1970.

TVERGAARD, V. **Effect of Fibre Debonding in a Wisker Reinforced Metal**. Materials Science and Engineering, v. A125, 1990, pp. 203-213.

TVERGAARD, V.; HUTCHINSON, J. W. **The Relation Between Crack Growth Resistance and Fracture Process Parameters in Elastic-Plastic Solids**. Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 40, 1992, pp. 1377-1397.

\_\_\_\_\_. **The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness**. Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 41, 1993, pp. 1119-1135.

VAN DEN BOSH, M. J.; SCHREURS, P. J. G.; GEERS, M. G. D. **An Improvement description of the Exponential Xu and Needleman Cohesive Zone Law for Mixed-Mode Decohesion**. Engineering Fracture Mechanics, v. 73, 2006, pp. 1220-1234.

WELLS, A. A. **Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture.** Proceedings of the Crack Propagation Symposium, Cranfield, England, v. 1, 1961, pp. 210-230.

\_\_\_\_\_. **Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding.** British Welding Journal, v. 10, 1963, pp. 563-570.

WESTERGAARD, H. M. **Bearing Pressures and Cracks.** Journal Applied Mechanics, v. 61, 1939, pp. A49-A53.

WILLIAMS, M. L. **On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack.** ASME Journal of Applied Mechanics, v. 24, 1957, pp. 109-114.

XU, X.-P.; NEEDLEMAN, A. **Void Nucleation by Inclusion Debonding in a Crystal Matrix.** Modelling Simulation Material Science Engineering, v. 1, 1993, pp. 111-132.

\_\_\_\_\_. **Numerical Simulation of Fast Crack Growth in Brittle Solids.** Journal of Mechanics and Physics of Solids, v. 42, 1994, pp. 1397-1434.

ZHANG, Z. **Cohesive Zone Modeling of Dynamic Failure in Homogeneous and Functionally Graded Materials.** Urbana, 2003. 156 p. Tese (Masters Degree) – Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.

ZHOU, F.; MOLINARI, J-F.; SHIOYA, T. **A Rate-dependent Cohesive Model for Simulating Dynamic Crack Propagation in Brittle Materials.** Engineering Fracture Mechanics, v. 72, 2005, pp. 1383-1410.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: The Basis.** Volume 1. 5<sup>th</sup> Edition. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2000.