

MÁRCIO ANDRÉ ARAÚJO CAVALCANTE

**MODELAGEM DO COMPORTAMENTO TERMO-MECÂNICO
TRANSIENTE DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS
COMPÓSITOS PELA TEORIA DE VOLUMES FINITOS**

**MACEIÓ – AL
Fevereiro de 2006**

MÁRCIO ANDRÉ ARAÚJO CAVALCANTE

**MODELAGEM DO COMPORTAMENTO TERMO-MECÂNICO
TRANSIENTE DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS
COMPÓSITOS PELA TEORIA DE VOLUMES FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: *Estruturas*

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques

MACEIÓ – AL
Fevereiro de 2006

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

C376m Cavalcante, Márcio André Araújo.
Modelagem do comportamento termo-mecânico transiente de estruturas de materiais compósitos pela teoria de volumes finitos / Márcio André Araújo Cavalcante. Maceió, 2006.
xxxii, 130 f.: il., grafs.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2006.

Bibliografia: f. 120-122.
Apêndices: f. 123-130.

1. Ciência dos materiais. 2. Materiais compósitos – Engenharia. 3. Materiais compósitos – Propriedades efetivas. 4. Materiais compósitos – Análise termo-elástica. 5. Teoria de volumes finitos. 6. Micromecânica. I. Título.

CDU: 624.016



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGEC
 Campus A. C. Simões
 Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas
 Tel: (82) 32141276 – Fax: (82) 32141276
 E-mail: ppgec@ctec.ufal.br



ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL/ESTRUTURAS

Em sessão pública, às quinze horas e doze minutos do dia dez do mês de fevereiro do ano de dois mil e seis, na Sala de Aula do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, foi iniciada a defesa da dissertação de mestrado do aluno **MÁRCIO ANDRÉ ARAÚJO CAVALCANTE** tendo como título: “**MODELAGEM DO COMPORTAMENTO TERMO-MECÂNICO TRANSIENTE DE ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS**”, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL**, na área de concentração de **ESTRUTURAS**. A Banca Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques (Orientador – CTEC/UFAL), Prof^a Dr^a Deane de Mesquita Roehl (PUC/RJ) e Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior (CTEC/UFAL). O candidato fez a apresentação da dissertação em cinquenta minutos. A defesa foi encerrada às dezessete horas e vinte e cinco minutos. Após o encerramento da defesa, em reunião confidencial, a Banca Examinadora, com base no Regimento Interno, decidiu por **APROVAR** a dissertação de mestrado, sem restrição.

Em 10 de fevereiro de 2006,

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques (Orientador)

Prof^a Dr^a Deane de Mesquita Roehl

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques
 Coordenador do PPGEC/UFAL

*À memória de meu pai, Totonho,
à minha mãe, Genilda,
e aos meus irmãos, Maria Madalena,
Marcos Antônio, Marcelino José e João Marlos.*

Agradecimentos

Ao Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques, por mais um trabalho concluído sobre sua orientação.

Aos professores Adeildo Soares Ramos Júnior, Eduardo Nobre Lages, João Carlos Cordeiro Barbirato, Severino Pereira Cavalcanti Marques e William Wagner Matos Lira, pelas aulas ministradas durante o curso de mestrado, indispensáveis à minha formação como Mestre em Engenharia Civil.

Aos professores Viviane Carrilho Leão Ramos e Eduardo Setton Sampaio da Silveira um agradecimento especial pelos conselhos e favores prestados durante minha permanência na UFAL.

Aos meus colegas mestrandos, pelas conversas, brincadeiras e troca de experiências que tornaram esta conquista ainda mais prazerosa.

À Universidade Federal de Alagoas, pela minha formação, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro.

À minha família, pelo apoio incondicional, e à Deus, que nos permite viver para alcançar conquistas como esta.

Resumo

O avanço da ciência de materiais tem proporcionado o advento de materiais compósitos com características peculiares que asseguram elevado desempenho termo-mecânico, tais como os compósitos avançados reforçados por fibras e aqueles dotados de microestrutura com variação gradual. Atualmente, muitos modelos computacionais, assim como métodos analíticos, vêm sendo empregados para avaliação do comportamento de tais materiais. Uma técnica alternativa, voltada à análise termo-mecânica em regime estacionário, na qual o comportamento do material é analisado considerando-se o acoplamento entre microestrutura e macroestrutura, é aquela originalmente denominada de *Higher-Order Theory*. Neste trabalho, utiliza-se a mesma base teórica da *Higher-Order Theory*, com uma simplificação em termos de discretização e montagem do sistema de equações. Neste sentido, esta teoria apresenta algumas semelhanças em relação à técnica de volumes finitos usada em problemas de dinâmica dos fluidos, razão pela qual é bastante razoável adotar a denominação *teoria de volumes finitos* para o método. Além disso, como uma contribuição deste estudo, apresenta-se uma formulação paramétrica que permite uma maior flexibilidade na geração da malha e uma diminuição do problema em relação ao número de incógnitas, particularmente apropriada para análise de estruturas com contorno curvo. A formulação também foi ampliada para possibilitar a execução de análises termo-mecânicas transientes. No presente estudo, também é utilizada uma formulação tridimensional do método para a determinação das propriedades efetivas de materiais compósitos reforçados por fibras e particulados, onde foram realizadas comparações com modelos simplificados da micromecânica e com aqueles baseados na teoria de campos médios (Auto-consistente, Mori-Tanaka e Esquema Diferencial). Além disso, há uma série de aplicações numéricas em problemas termo-elásticos e elásticos bidimensionais, onde são realizadas verificações a partir de soluções analíticas e comparações com o método dos elementos finitos.

Palavras-chave: *Ciência dos materiais, Materiais compósitos – Engenharia, Materiais compósitos – Propriedades efetivas, Materiais compósitos – Análise termo-elástica, Teoria de volumes finitos, Micromecânica.*

Abstract

The advance of the materials science has motivated the advent of composite materials with different characteristics that assure high performance thermo-mechanical, such as the advanced fiber reinforced composites and those that present a gradual variation in its microstructure. Nowadays, many computational models and analytical methods are being employed for evaluation of the behavior of such materials. An alternative technique, applied to the steady-state thermo-mechanical analysis, which considers the coupling between microstructure and macrostructure behaviors, is that originally denominated of Higher-Order Theory. In this work is used the same theoretical base of the Higher-Order Theory, with a simplification in the discretization and assembly of the system of equations. In this way, this theory presents some similarities in relation to the finite-volume technique used in fluid dynamics problems, reason for which is enough reasonable to adopt the denomination *finite-volume theory* for this method. Besides, as a contribution of this study, it is presented a parametric formulation that allows a larger flexibility in the mesh generation and a reduction of the problem in relation to the number of variables, particularly appropriate for analysis of structures with curved contour. The formulation was also extended for the accomplishment of transient thermo-mechanical analysis. In the present study, a three-dimensional formulation of the method is also used for the determination of the effective properties of fiber reinforced composites and particulate materials, where comparisons were accomplished with micromechanics simplified models and with those based on the mean field theory (self-consistent, Mori-Tanaka and differential scheme). Besides, there is a series of numerical applications in bi-dimensional thermo-elastic and elastic problems, where are accomplished verifications using analytical solutions and comparisons with the finite element method.

Key-words: *Materials science, Composite materials – Engineering, Composite materials – Effective properties, Composite materials – Thermo-elastic analysis, Finite-volume theory, Micromechanics.*

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Materiais com constituição heterogênea.	1
Figura 1.2 – Placas de laminado e <i>FGM</i>	2
Figura 2.1 – Sólido submetido a um fluxo de calor q	5
Figura 2.2 – Corpo elástico de volume V submetido às forças de superfície f_s e de corpo b	6
Figura 2.3 – Sistema de coordenadas globais do modelo estrutural.	10
Figura 2.4 – Sistema de coordenadas locais de uma célula genérica.	11
Figura 2.5 – Sistema de coordenadas globais e locais da estrutura discretizada.	23
Figura 2.6 – Parametrização da célula.	33
Figura 2.7 – Versores normais às faces da célula.	36
Figura 2.8 – Vetores de tração média atuantes nas faces da célula.	53
Figura 3.1 – Compósito reforçado por fibras unidirecionais.	63
Figura 3.2 – Volume representativo típico usado pela TVF.	67
Figura 3.3 – Carregamento considerado nas simulações.	67
Figura 3.4 – Configurações microestruturais utilizadas pela TVF ($f_I = 25\%$).	68
Figura 3.5 – Malhas utilizadas nas análises com o MEF ($f_I = 25\%$).	69
Figura 3.6 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C1.	70
Figura 3.7 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C2.	70
Figura 3.8 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C3.	71
Figura 3.9 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C4.	71
Figura 3.10 – Volume representativo típico usado pela TVF para o compósito particulado.	72
Figura 3.11 – Unidade básica do volume representativo.	72
Figura 3.12 – Configuração microestrutural analisada pela TVF ($f_I = 14,29\%$).	73
Figura 3.13 – Módulo de elasticidade efetivo de um compósito particulado.	74
Figura 3.14 – Material com gradação funcional do tipo metal-cerâmico.	74
Figura 3.15 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Boro como inclusão.	75
Figura 3.16 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Alumínio como inclusão.	76
Figura 3.17 – Configurações microestruturais geradas randomicamente para três frações volumétricas.	77
Figura 3.18 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Alumínio como matriz.	78
Figura 3.19 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Boro como matriz.	78
Figura 4.1 – Cubo de material isotrópico e homogêneo.	80
Figura 4.2 – Análise térmica do cubo de material homogêneo (1 x 10 células).	81
Figura 4.3 – Análise térmica do cubo de material homogêneo (1 x 50 células).	81
Figura 4.4 – Análise elástica do cubo de material homogêneo (1 x 10 células).	82
Figura 4.5 – Análise elástica do cubo de material homogêneo (1 x 50 células).	82

Figura 4.6 – Placa longa de material com gradação funcional.	83
Figura 4.7 – Propriedades térmicas do material da placa.	85
Figura 4.8 – Módulo de elasticidade do material da placa.	86
Figura 4.9 – Coeficiente de expansão térmica do material da placa.	86
Figura 4.10 – Análise térmica da placa de material com gradação funcional (3 x 15 células).	87
Figura 4.11 – Análise térmica da placa de material com gradação funcional (5 x 50 células).	87
Figura 4.12 – Análise elástica da placa de material com gradação funcional (3 x 15 células).	88
Figura 4.13 – Análise elástica da placa de material com gradação funcional (5 x 50 células).	88
Figura 4.14 – Tubo de parede grossa de material homogêneo.	89
Figura 4.15 – Malhas utilizadas nas análises: (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.	92
Figura 4.16 – Campo de temperatura: (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.	93
Figura 4.17 – Campo de tensão longitudinal σ_x : (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.	93
Figura 4.18 – Campo de tensão radial σ_r : (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.	93
Figura 4.19 – Campo de tensão circunferencial σ_θ : (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.	94
Figura 4.20 – Temperatura em função da posição radial para o tubo de parede grossa.	94
Figura 4.21 – Tensão longitudinal em função da posição radial para o tubo de parede grossa.	95
Figura 4.22 – Tensão radial em função da posição radial para o tubo de parede grossa.	95
Figura 4.23 – Tensão circunferencial em função da posição radial para o tubo de parede grossa.	96
Figura 4.24 – Temperatura em função da posição radial para o tubo de material com gradação funcional.	100
Figura 4.25 – Tensão radial em função da posição radial para o tubo de material com gradação funcional.	100
Figura 4.26 – Tensão circunferencial em função da posição radial para o tubo de material com gradação funcional.	101
Figura 4.27 – Um quarto do tubo de parede grossa de material homogêneo.	101
Figura 4.28 – Malha utilizada nas análises transientes para o tubo de parede grossa de material homogêneo.	103
Figura 4.29 – Campo de temperatura para o tubo de parede grossa de material homogêneo.	104
Figura 4.30 – Campo de tensão radial do tubo de parede grossa de material homogêneo.	104
Figura 4.31 – Campo de tensão circunferencial do tubo de parede grossa de material homogêneo.	105
Figura 4.32 – Ações atuantes nas extremidades de uma viga engastada.	105
Figura 4.33 – Condições de vinculação impostas à viga engastada.	106
Figura 4.34 – Número de graus de liberdade em média por célula (elemento).	107
Figura 4.35 – Malha utilizada na teoria de volumes finitos para a viga engastada.	108
Figura 4.36 – Deformada obtida com o elemento finito Q4 para a viga engastada.	109
Figura 4.37 – Deformada obtida com o elemento finito Q8 para a viga engastada.	110
Figura 4.38 – Deformada obtida com a teoria de volumes finitos para a viga engastada.	110
Figura 4.39 – Diagrama de tensão normal horizontal numa seção média da viga engastada.	111
Figura 4.40 – Diagrama de tensão cisalhante numa seção média da viga engastada.	111
Figura 4.41 – Viga engastada curva.	112
Figura 4.42 – Condições de vinculação impostas à viga engastada curva.	113
Figura 4.43 – Malha utilizada pela teoria de volumes finitos para a viga engastada curva.	114
Figura 4.44 – Deformada obtida com o elemento finito Q4 para a viga engastada curva.	115
Figura 4.45 – Deformada obtida com o elemento finito Q8 para a viga engastada curva.	115

Figura 4.46 – Deformada obtida com a teoria de volumes finitos para a viga engastada curva.	116
Figura 4.47 – Diagrama de tensão radial numa seção média da viga engastada curva.	116
Figura 4.48 – Diagrama de tensão circunferencial numa seção média da viga engastada curva.	117
Figura 4.49 – Diagrama de tensão cisalhante numa seção média da viga engastada curva.	117
Figura C.1 – Placa longa de material com gradação funcional (FGM).	127
Figura C.2 – Problema real como a soma de duas situações virtuais.	128
Figura C.3 – Carregamento anulando as deformações na direção do eixo-X.	128
Figura C.4 – Campo de deformações para pontos afastados da região de aplicação da carga.	129

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Frações volumétricas dos constituintes.	77
Tabela 4.1 – Propriedades adimensionais do material do cubo.	80
Tabela 4.2 – Propriedades de referência do material da placa.	85
Tabela 4.3 – Propriedades do material do tubo.	91
Tabela 4.4 – Parâmetros adotados nas análises.	92
Tabela 4.5 – Propriedades de referência do material do tubo.	99
Tabela 4.6 – Parâmetros que definem a geometria e as condições de contorno do problema.	99
Tabela 4.7 – Propriedades adimensionais do material do tubo.	103
Tabela 4.8 – Parâmetros adimensionais adotados nas análises.	103
Tabela 4.9 – Dados do problema da viga engastada.	109
Tabela 4.10 – Propriedades do material da viga engastada.	109
Tabela 4.11 – Dados do problema da viga engastada curva.	114

Lista de Abreviaturas

AC	Auto-Consistente
BA	Bordo Anterior
BD	Bordo Direito
BE	Bordo Esquerdo
BI	Bordo Inferior
BP	Bordo Posterior
BS	Bordo Superior
ED	Esquema Diferencial
<i>FGM</i>	<i>Functionally Graded Material</i>
<i>gl</i>	graus de liberdade
HS	Hashin-Shtrikman
MEF	Método dos Elementos Finitos
MT	Mori-Tanaka
RE	Regime Estacionário
RM	Regra de Mistura
RMM	Regra de Mistura Modificada
RT	Regime Transiente
TVF	Teoria de Volumes Finitos

Lista de Símbolos (Capítulo 2)

V	Volume de um sólido
q	Fluxo de calor
x_i	Coordenadas globais da estrutura
q_i	Fluxo de calor na direção i
ρ	Densidade
C	Calor específico
T	Campo de temperatura
t	Tempo
k_i	Condutividade térmica na direção i
f_s	Força de superfície
b	Força de corpo
σ_{ij}	Tensor de tensão
b_j	Componentes da força de corpo
C_{ijkl}	Tensor constitutivo do material
ε_{kl}	Tensor de pequenas deformações
Γ_{ij}	Tensor térmico
ΔT	Variação de temperatura
u_i	Componente do campo de deslocamentos na direção i
γ_{ij}	Deformação angular no plano i - j
Γ_i	Vetor térmico
α_j	Coefficiente de expansão térmica na direção j
T_{ref}	Temperatura de referência

C_{ij}	Componentes da matriz constitutiva
E	Módulo de elasticidade do material
ν	Coefficiente de Poisson do material
α	Coefficiente de expansão térmica do material
G	Módulo de elasticidade transversal do material
Γ	Componente do vetor térmico para materiais isotrópicos
N_p	Número de células na direção 1
N_q	Número de células na direção 2
N_r	Número de células na direção 3
D	Dimensão do modelo estrutural na direção 1
H	Dimensão do modelo estrutural na direção 2
L	Dimensão do modelo estrutural na direção 3
d	Dimensão de uma célula genérica segundo a direção 1
h	Dimensão de uma célula genérica segundo a direção 2
l	Dimensão de uma célula genérica segundo a direção 3
\bar{x}_i	Coordenadas locais
$T_{(\dots)}$	Coefficientes do campo de temperatura
$\langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1 = \pm d/2}$	Fluxo de calor médio na direção 1 atuante nas faces definidas por $\bar{x}_1 = \pm \frac{d}{2}$
$\langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2 = \pm h/2}$	Fluxo de calor médio na direção 2 atuante nas faces definidas por $\bar{x}_2 = \pm \frac{h}{2}$
$\langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3 = \pm l/2}$	Fluxo de calor médio na direção 3 atuante nas faces definidas por $\bar{x}_3 = \pm \frac{l}{2}$
$\langle T \rangle_{\bar{x}_1 = \pm d/2}$	Temperatura média nas faces definidas por $\bar{x}_1 = \pm \frac{d}{2}$
$\langle T \rangle_{\bar{x}_2 = \pm h/2}$	Temperatura média nas faces definidas por $\bar{x}_2 = \pm \frac{h}{2}$
$\langle T \rangle_{\bar{x}_3 = \pm l/2}$	Temperatura média nas faces definidas por $\bar{x}_3 = \pm \frac{l}{2}$
q_B	Fluxo de calor do bordo
T_B	Temperatura do bordo

h_B	Coeficiente de convecção térmica do meio envolvente ao bordo
T_∞^B	Temperatura do meio envolvente ao bordo
$\mathbf{\kappa}$	Pseudo-matriz de condutividade térmica global da estrutura
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor com as informações das condições de contorno do problema
\mathbf{T}	Vetor formado pelos coeficientes dos campos de temperatura das células que compõem o modelo estrutural
$\mathbf{T}^{(\dots)}$	Vetor formado pelos coeficientes do campo de temperatura de uma célula genérica (...)
$\langle q_i \rangle$	Fluxo de calor médio na direção i
$\langle T \rangle$	Temperatura média
Δt	Incremento de tempo
$\langle \Delta T \rangle$	Variação de temperatura média
$U_{i(\dots)}$	Coeficientes do campo de deslocamento na direção i
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_i} \right\rangle$	Gradiente térmico médio na direção i
$\langle u_i _{\bar{x}_1 = \pm d/2}$	Valor médio da componente do campo de deslocamentos na direção i para as faces definidas por $\bar{x}_1 = \pm \frac{d}{2}$
$\langle u_i _{\bar{x}_2 = \pm h/2}$	Valor médio da componente do campo de deslocamentos na direção i para as faces definidas por $\bar{x}_2 = \pm \frac{h}{2}$
$\langle u_i _{\bar{x}_3 = \pm l/2}$	Valor médio da componente do campo de deslocamentos na direção i para as faces definidas por $\bar{x}_3 = \pm \frac{l}{2}$
$\langle \sigma_{1i} _{\bar{x}_1 = \pm d/2}$	Valor médio da componente do campo de tensões na direção i para as faces definidas por $\bar{x}_1 = \pm \frac{d}{2}$
$\langle \sigma_{2i} _{\bar{x}_2 = \pm h/2}$	Valor médio da componente do campo de tensões na direção i para as faces definidas por $\bar{x}_2 = \pm \frac{h}{2}$
$\langle \sigma_{3i} _{\bar{x}_3 = \pm l/2}$	Valor médio da componente do campo de tensões na direção i para as faces definidas por $\bar{x}_3 = \pm \frac{l}{2}$
$\langle \Delta T _{\bar{x}_1 = \pm d/2}$	Valor médio da variação do campo de temperatura nas faces definidas por $\bar{x}_1 = \pm \frac{d}{2}$

$\langle \Delta T \rangle_{\bar{x}_2 = \pm h/2}$	Valor médio da variação do campo de temperatura nas faces definidas por $\bar{x}_2 = \pm \frac{h}{2}$
$\langle \Delta T \rangle_{\bar{x}_3 = \pm l/2}$	Valor médio da variação do campo de temperatura nas faces definidas por $\bar{x}_3 = \pm \frac{l}{2}$
u_i^B	Componente do campo de deslocamentos do bordo na direção i
σ_{ji}^B	Componente na direção i do campo de tensões do bordo (normal à direção j)
K	Pseudo-matriz de rigidez global da estrutura
f	Vetor com as informações das condições de contorno do problema e dos efeitos da variação de temperatura
U	Vetor formado pelos coeficientes do campo de deslocamentos das células que compõem o modelo estrutural
U^(...)	Vetor formado pelos coeficientes do campo de deslocamentos de uma célula genérica (...)
$\langle u_i \rangle$	Valor médio da componente do campo de deslocamentos na direção i
$\langle \varepsilon_{ii} \rangle$	Valor médio da componente normal do campo de deformações na direção i
$\langle \gamma_{ij} \rangle$	Valor médio da deformação angular no plano i - j
$\langle \sigma_{ii} \rangle$	Valor médio da componente normal do campo de tensões na direção i
$\langle \sigma_{ij} \rangle$	Valor médio da tensão cisalhante atuante no plano i - j
η	Coordenada paramétrica
ξ	Coordenada paramétrica
x	Coordenada global do modelo estrutural na direção horizontal
y	Coordenada global do modelo estrutural na direção vertical
x_i	Coordenada horizontal do vértice i
y_i	Coordenada vertical do vértice i
N_i	Função de forma i
F	Campo escalar qualquer
J	Matriz Jacobiana
A_i	Parâmetro auxiliar i utilizado no cálculo da matriz Jacobiana
$\langle \mathbf{J} \rangle$	Matriz Jacobiana em termos médios

$\bar{\mathbf{J}}$	Inversa da matriz Jacobiana em termos médios
$\mathbf{n}^{(i)}$	Versor normal à face i
$n_x^{(i)}$	Componente horizontal do versor normal à face i
$n_y^{(i)}$	Componente vertical do versor normal à face i
θ_i	Ângulo utilizado no cálculo das componentes do versor normal à face i
\mathbf{i}	Versor na direção horizontal
\mathbf{j}	Versor na direção vertical
L_i	Dimensão da face i
q_x	Fluxo de calor na direção x
q_y	Fluxo de calor na direção y
k_x	Condutividade térmica na direção x
k_y	Condutividade térmica na direção y
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada paramétrica η para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada paramétrica ξ para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada paramétrica η para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada paramétrica ξ para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada global x para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada global y para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada global x para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada global y para as faces definidas por $\xi = \pm 1$

$\langle q_x _{\eta=\pm 1}$	Fluxo de calor médio na direção x para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle q_y _{\eta=\pm 1}$	Fluxo de calor médio na direção y para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle q_x _{\xi=\pm 1}$	Fluxo de calor médio na direção x para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\langle q_y _{\xi=\pm 1}$	Fluxo de calor médio na direção y para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\bar{\mathbf{k}}$	Matriz formada pelos coeficientes de condutividade térmica
q_i	Fluxo de calor médio normal à face i
$\bar{\mathbf{A}}$	Matriz que relacione os fluxos de calor médio normais às faces da célula com os coeficientes do campo de temperatura
\mathbf{A}	Matriz que relaciona os valores médios nas faces dos gradientes térmicos em relação às coordenadas paramétricas com os coeficientes do campo de temperatura
\mathbf{B}	Matriz que relaciona os gradientes térmicos em relação às coordenadas globais com os gradientes térmicos em relação às coordenadas paramétricas (médios nas faces)
\mathbf{C}	Matriz que relaciona os fluxos de calor nas direções das coordenadas globais com os gradientes térmicos em relação às coordenadas globais (médios nas faces)
\mathbf{D}	Matriz que relaciona os fluxos de calor nas direções normais às faces da célula com os fluxos de calor nas direções das coordenadas globais (médios nas faces)
T_F	Temperatura média na face F da célula
$\langle T _{\eta=\pm 1}$	Temperatura média nas faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle T _{\xi=\pm 1}$	Temperatura média nas faces definidas por $\xi = \pm 1$
λ	Parâmetro que relaciona o termo independente do campo de temperatura com as temperaturas médias nas faces 2 e 4 (em análises estacionárias)
ω	Parâmetro que relaciona o termo independente do campo de temperatura com as temperaturas médias nas faces 1 e 3 (em análises estacionárias)
$\bar{\mathbf{B}}^{(RE)}$	Matriz que relaciona os coeficientes do campo de temperatura com as temperaturas médias nas faces (em análises estacionárias)
β	Parâmetro que relaciona o termo independente do campo de temperatura com as temperaturas médias nas faces 2 e 4 (em análises transientes)
δ	Parâmetro que relaciona o termo independente do campo de temperatura com as temperaturas médias nas faces 1 e 3 (em análises transientes)
γ	Parâmetro utilizado no cálculo do termo independente do campo de temperatura em análises transientes
ψ	Parâmetro auxiliar utilizado no cálculo dos parâmetros presentes na expressão que determina o termo independente do campo de temperatura em análises transientes

$\bar{\mathbf{B}}^{(RT)}$	Matriz que relaciona os coeficientes do campo de temperatura com as temperaturas médias nas faces (em análises transientes)
$\bar{\mathbf{k}}$	Matriz de condutividade térmica local
$\mathbf{q}^{(0)}$	Vetor de fluxo de calor inicial
$\mathbf{\kappa}$	Matriz de condutividade térmica global
\mathbf{Q}	Vetor que representa o balanço de fluxo de calor interfacial
$\mathbf{Q}^{(0)}$	Vetor de balanço de fluxo de calor inicial
\mathbf{T}	Vetor formado pelas temperaturas médias nas faces das células que compõem o modelo estrutural
\mathbf{H}	Matriz diagonal formada pelos coeficientes de convecção térmica dos vários bordos com a temperatura do meio envolvente prescrita
$\langle q_x \rangle$	Fluxo de calor médio na direção x
$\langle q_y \rangle$	Fluxo de calor médio na direção y
σ_{xx}	Tensão normal na direção x
σ_{yy}	Tensão normal na direção y
σ_{xy}	Tensão cisalhante no plano $x - y$
b_x	Força de corpo na direção x
b_y	Força de corpo na direção y
ε_{xx}	Deformação normal na direção x
ε_{yy}	Deformação normal na direção y
γ_{xy}	Deformação angular no plano $x - y$
ε_{xy}	Deformação angular no plano $x - y$
u	Deslocamento na direção x
v	Deslocamento na direção y
C_{xx}	Componente da matriz constitutiva que relaciona tensão normal com deformação normal, ambos na direção x
C_{yy}	Componente da matriz constitutiva que relaciona tensão normal com deformação normal, ambos na direção y
C_{xy}	Componente da matriz constitutiva que relaciona tensão normal na direção x com deformação normal na direção y

C_{yx}	Componente da matriz constitutiva que relaciona tensão normal na direção y com deformação normal na direção x
σ_{zz}	Tensão normal na direção z
ε_{zz}	Deformação normal na direção z
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada paramétrica η para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada paramétrica ξ para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada paramétrica η para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada paramétrica ξ para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada paramétrica η para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada paramétrica ξ para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada paramétrica η para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada paramétrica ξ para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada global x para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada global y para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada global x para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento u em relação à coordenada global y para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada global x para as faces definidas por $\eta = \pm 1$

$\left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada global y para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada global x para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da derivada do campo de deslocamento v em relação à coordenada global y para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\mathbf{0}$	Matriz composta por zeros
$\langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da deformação normal na direção x para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \varepsilon_{yy} \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da deformação normal na direção y para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \gamma_{xy} \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da deformação angular no plano $x - y$ para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da deformação normal na direção x para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\langle \varepsilon_{yy} \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da deformação normal na direção y para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\langle \gamma_{xy} \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da deformação angular no plano $x - y$ para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\bar{\mathbf{E}}$	Matriz que relaciona as componentes do campo de deformações com as derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas globais
$\langle \sigma_{xx} \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da tensão normal na direção x para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \sigma_{yy} \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da tensão normal na direção y para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \sigma_{xy} \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da tensão cisalhante no plano $x - y$ para as faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \sigma_{xx} \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da tensão normal na direção x para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\langle \sigma_{yy} \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da tensão normal na direção y para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\langle \sigma_{xy} \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da tensão cisalhante no plano $x - y$ para as faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\langle \Delta T \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valor médio da variação do campo de temperatura nas faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle \Delta T \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valor médio da variação do campo de temperatura nas faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\bar{\mathbf{C}}$	Matriz constitutiva
$t_x^{(i)}$	Componente na direção x do vetor de tração média atuante na face i

$t_y^{(i)}$	Componente na direção y do vetor de tração média atuante na face i
$\bar{\mathbf{A}}$	Matriz que relaciona as componentes dos vetores de tração média atuantes nas faces da célula com os coeficientes do campo de deslocamentos
\mathbf{A}	Matriz que relaciona os valores médios nas faces das derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas paramétricas com os coeficientes do campo de deslocamentos
\mathbf{B}	Matriz que relaciona as derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas globais com as derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas paramétricas (valores médios nas faces)
\mathbf{C}	Matriz que relaciona as componentes do campo de tensões com as componentes do campo de deformações (valores médios nas faces)
\mathbf{D}	Matriz que relaciona as componentes dos vetores de tração atuantes nas faces da célula com as componentes do campo de tensões (valores médios nas faces)
\mathbf{E}	Matriz que relaciona as componentes do campo de deformações com as derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas globais (valores médios nas faces)
$\Delta \mathbf{T}$	Vetor formado pelas variações médias do campo de temperatura nas faces
ΔT_F	Variação de temperatura média na face F da célula
u_F	Deslocamento u médio na face F da célula
$\langle u \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valores médios do campo de deslocamento u nas faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle u \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valores médios do campo de deslocamento u nas faces definidas por $\xi = \pm 1$
v_F	Deslocamento v médio na face F da célula
$\langle v \rangle_{\eta=\pm 1}$	Valores médios do campo de deslocamento v nas faces definidas por $\eta = \pm 1$
$\langle v \rangle_{\xi=\pm 1}$	Valores médios do campo de deslocamento v nas faces definidas por $\xi = \pm 1$
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada global x
$\left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle$	Gradiente térmico médio em relação à coordenada global y
Φ	Matriz utilizada na expressão que fornece os termos independentes do campo de deslocamentos em função dos deslocamentos médios nas faces da célula
Θ	Matriz utilizada na expressão que fornece os termos independentes do campo de deslocamentos em função dos deslocamentos médios nas faces da célula
Ω	Vetor utilizado no cálculo dos termos independentes do campo de deslocamentos
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz que relaciona os coeficientes do campo de deslocamentos com as componentes dos deslocamentos médios nas faces da célula

P	Matriz auxiliar utilizada no cálculo da matriz $\bar{\mathbf{B}}$
M	Matriz auxiliar utilizada no cálculo da matriz $\bar{\mathbf{B}}$
N	Matriz auxiliar utilizada no cálculo da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ e na relação entre os coeficientes do campo de deslocamentos com as forças de corpo e os efeitos gerados pelos gradientes térmicos
$\bar{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez local
$\mathbf{t}^{(0)}$	Vetor de trações médias iniciais atuantes nas faces da célula
K	Matriz de rigidez global do modelo estrutural
f	Vetor que representa o equilíbrio das trações médias atuantes nas faces das células que compõem o modelo estrutural
$\mathbf{f}^{(0)}$	Vetor de equilíbrio das trações médias iniciais atuantes nas faces das células que compõem o modelo estrutural
t_x^B	Componente do vetor de tração média atuante no bordo na direção x
t_y^B	Componente do vetor de tração média atuante no bordo na direção y
u_B	Valor médio da componente do campo de deslocamentos do bordo na direção x
v_B	Valor médio da componente do campo de deslocamentos do bordo na direção y
U	Vetor formado pelas componentes dos deslocamentos médios nas faces das células que compõem o modelo estrutural
$\langle u \rangle$	Deslocamento médio na direção x
$\langle v \rangle$	Deslocamento médio na direção y
$\langle \varepsilon_{xx} \rangle$	Valor médio da deformação normal na direção x
$\langle \varepsilon_{yy} \rangle$	Valor médio da deformação normal na direção y
$\langle \gamma_{xy} \rangle$	Valor médio da deformação angular no plano $x - y$
$\langle \sigma_{xx} \rangle$	Valor médio da tensão normal na direção x
$\langle \sigma_{yy} \rangle$	Valor médio da tensão normal na direção y
$\langle \sigma_{xy} \rangle$	Valor médio da tensão cisalhante no plano $x - y$
$\langle \sigma_{zz} \rangle$	Valor médio da tensão normal na direção z
$\langle \varepsilon_{zz} \rangle$	Valor médio da deformação normal na direção z

Lista de Símbolos (Capítulo 3)

E_i	Módulo de elasticidade longitudinal na direção i
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson no plano $i-j$
G_{ij}	Módulo de elasticidade transversal no plano $i-j$
E_f	Módulo de elasticidade longitudinal do material da fibra
G_f	Módulo de elasticidade transversal do material da fibra
ν_f	Coefficiente de Poisson do material da fibra
f_f	Fração volumétrica de fibra
E_M	Módulo de elasticidade longitudinal do material da matriz
G_M	Módulo de elasticidade transversal do material da matriz
ν_M	Coefficiente de Poisson do material da matriz
f_M	Fração volumétrica da matriz
E'_M	Módulo de elasticidade longitudinal do material da matriz modificado para levar em conta a maior rigidez do material da fibra em relação ao material da matriz
$\bar{\mathbf{C}}$	Matriz de rigidez efetiva do compósito
\mathbf{C}_0	Matriz de rigidez da inclusão
\mathbf{C}	Matriz de rigidez da matriz
f_0	Fração volumétrica da fase inclusão
\mathbf{S}	Matriz correspondente ao tensor de Eshelby
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{A}_0^{dil}	Matriz de concentração de deformação da fase inclusão do problema <i>Dilute Suspension</i>
$\tilde{\mathbf{A}}$	Matriz de concentração de deformação da fase matriz para o modelo de Mori-Tanaka
Δf_0	Incremento da fração volumétrica da fase inclusão

\bar{K}	Módulo de elasticidade volumétrico do material efetivo
\bar{G}	Módulo de elasticidade transversal do material efetivo
K_i	Módulo de elasticidade volumétrico do material da fase i
G_i	Módulo de elasticidade transversal do material da fase i
f_i	Fração volumétrica da fase i
\bar{E}	Módulo de elasticidade longitudinal do material efetivo
$\bar{\nu}$	Coefficiente de Poisson do material efetivo
x_i	Coordenadas do modelo estrutural
D	Dimensão da seção transversal do volume representativo típico de um material compósito
D_I	Dimensão transversal da inclusão
D_M	Espaçamento entre inclusões
N	Número de inclusões em cada direção
L	Comprimento longitudinal do volume representativo
p	Carregamento uniforme considerado nas simulações
f_I	Fração volumétrica da fase inclusão
E_I	Módulo de elasticidade longitudinal da fase inclusão
ν_I	Coefficiente de Poisson da fase inclusão
K	Módulo de elasticidade volumétrico
G	Módulo de elasticidade transversal

Lista de Símbolos (Capítulo 4)

x	Coordenada na direção horizontal
y	Coordenada na direção vertical
T	Campo de temperatura
σ_x	Campo de tensão normal na direção x
t	Tempo
κ	Parâmetro utilizado no campo de temperatura do cubo de material homogêneo
L	Comprimento da aresta do cubo de material homogêneo
k	Condutividade térmica
ρ	Densidade
C	Calor específico
E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
α	Coefficiente de expansão térmica
T_0	Temperatura de referência da face superior da placa longa de material com gradação funcional
B	Espessura da placa longa de material com gradação funcional
L	Largura da placa longa de material com gradação funcional
k_0	Valor de referência da condutividade térmica para a placa longa de material com gradação funcional
C_0	Valor de referência do calor específico para a placa longa de material com gradação funcional
ρ_0	Valor de referência da densidade para a placa longa de material com gradação funcional
β	Parâmetro que define a heterogeneidade na direção y relativa às propriedades térmicas para a placa longa de material com gradação funcional
ϕ_n	Parâmetro em função do índice n utilizado no campo de temperatura da placa longa de material com gradação funcional
φ	Parâmetro utilizado no campo de temperatura da placa longa de material com gradação funcional

E_0	Valor de referência do módulo de elasticidade para a placa longa de material com gradação funcional
ν_0	Valor de referência do coeficiente de Poisson para a placa longa de material com gradação funcional
α_0	Valor de referência do coeficiente de expansão térmica para a placa longa de material com gradação funcional
a	Constante que define a heterogeneidade na direção y relativa ao módulo de elasticidade para a placa longa de material com gradação funcional
b	Constante que define a heterogeneidade na direção y relativa ao coeficiente de expansão térmica para a placa longa de material com gradação funcional
σ_{xx}	Campo de tensão normal na direção x
q	Carregamento que anula as deformações na direção do eixo- x da placa longa de material com gradação funcional
ΔT	Variação do campo de temperatura
ε_0	Termo independente do campo de deformações na direção do eixo- x numa seção média da placa longa de material com gradação funcional
m	Coefficiente do termo linear do campo de deformações na direção do eixo- x numa seção média da placa longa de material com gradação funcional
R	Esforço normal resultante do carregamento q
M	Momento fletor resultante do carregamento q
A_{ij}	Elemento i - j da matriz que relaciona os coeficientes do campo de deformações com as ações resultantes do carregamento q
P_E	Pressão uniforme atuante no bordo externo do tubo de parede grossa de material homogêneo
T_E	Temperatura do meio em contato com o bordo externo do tubo de parede grossa de material homogêneo
h_E	Coefficiente de convecção térmica do meio em contato com o bordo externo do tubo de parede grossa de material homogêneo
P_I	Pressão uniforme atuante no bordo interno do tubo de parede grossa de material homogêneo
T_I	Temperatura do meio em contato com o bordo interno do tubo de parede grossa de material homogêneo
h_I	Coefficiente de convecção térmica do meio em contato com o bordo interno do tubo de parede grossa de material homogêneo
T_0	Temperatura de referência do tubo de parede grossa de material homogêneo
r_I	Raio interno do tubo de parede grossa de material homogêneo
r_E	Raio externo do tubo de parede grossa de material homogêneo
θ	Ângulo formado com a horizontal

r	Posição radial
c_1	Coefficiente do termo logarítmico do campo de temperatura do tubo de parede grossa de material homogêneo
c_2	Termo independente do campo de temperatura do tubo de parede grossa de material homogêneo
σ_r	Campo de tensão radial
σ_θ	Campo de tensão circunferencial
ε_r	Campo de deformação radial
ε_θ	Campo de deformação circunferencial
Q_1	Parâmetro das relações constitutivas que relaciona tensão radial com deformação radial e tensão circunferencial com deformação circunferencial
Q_2	Parâmetro das relações constitutivas que relaciona tensão radial com deformação circunferencial e tensão circunferencial com deformação radial
Γ	Parâmetro das relações constitutivas que relaciona tensão com variação de temperatura
u_r	Campo de deslocamento radial
c_3	Coefficiente do termo linear do campo de deslocamento radial do tubo de parede grossa de material homogêneo
c_4	Coefficiente do termo hiperbólico do campo de deslocamento radial do tubo de parede grossa de material homogêneo
q_i	Fluxo de calor na direção i
h_i	Coefficiente de convecção térmica na direção i
σ_{ij}	Tensão na direção j atuante no plano normal à direção i
q_r	Fluxo de calor na direção radial
σ_r	Tensão normal na direção radial
t_x	Componente horizontal do vetor de tração
t_y	Componente vertical do vetor de tração
σ_z	Campo de tensão longitudinal
m_3	Parâmetro que define a heterogeneidade na direção radial relativa à condutividade térmica para o tubo de parede grossa de material com gradação funcional
A_1	Coefficiente do termo dependente de r para o campo de temperatura do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
A_2	Termo independente do campo de temperatura do tubo de parede grossa de material com gradação funcional

C_{ij}	Termos que definem as condições de contorno da análise térmica do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
f_i	Termos que definem as condições de contorno da análise térmica do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
k_I	Coefficiente de condutividade térmica do bordo interno do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
k_E	Coefficiente de condutividade térmica do bordo externo do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
m_1	Parâmetro que define a heterogeneidade na direção radial relativa ao módulo de elasticidade para o tubo de parede grossa de material com gradação funcional
m_2	Parâmetro que define a heterogeneidade na direção radial relativa ao coeficiente de expansão térmica para o tubo de parede grossa de material com gradação funcional
$\eta_{1,2}$	Raízes da equação característica relativa à solução da equação diferencial homogênea que governa o problema elástico do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
$D_{1,2}$	Coefficientes da solução particular da equação diferencial não homogênea que governa o problema elástico do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
$B_{1,2}$	Coefficientes da solução da equação diferencial homogênea em função das condições de contorno do problema elástico do tubo de parede grossa de material com gradação funcional
d_i	Termos do sistema de equações lineares de ordem 2 utilizado no cálculo de $B_{1,2}$
T_I	Temperatura do bordo interno do tubo de parede grossa de material homogêneo
T_E	Temperatura do bordo externo do tubo de parede grossa de material homogêneo
r_I	Raio interno do tubo de parede grossa de material homogêneo
r_E	Raio externo do tubo de parede grossa de material homogêneo
J_0	Função de Bessel do primeiro tipo
Y_0	Função de Bessel do segundo tipo
κ	Parâmetro utilizado na expressão do campo de temperatura do tubo de parede grossa de material homogêneo
α_n	Raiz n da equação característica que relaciona as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo utilizadas na expressão do campo de temperatura do tubo de parede grossa de material homogêneo
$C_{1,2}$	Constantes presentes nas expressões do campo de tensões do tubo de parede grossa de material homogêneo (calculadas em função das condições de contorno do problema)
u	Campo de deslocamento na direção x
v	Campo de deslocamento na direção y
c	Metade da altura da viga engastada
e	Espessura da viga engastada

L	Comprimento da viga engastada
P	Carga vertical atuante nas extremidades da viga engastada
M	Momento fletor atuante em uma das extremidades da viga engastada
σ_{yy}	Campo de tensão normal na direção y
σ_{xy}	Campo de tensão cisalhante no plano $x - y$
G	Módulo de elasticidade transversal
I	Momento de inércia da seção transversal
C_i	Constantes presentes nas expressões do campo de deslocamentos da viga engastada (calculadas a partir da imposição das condições de vinculação)
a	Raio interno da viga engastada curva
b	Raio externo da viga engastada curva
u_θ	Campo de deslocamento circunferencial
P	Carga horizontal atuante em uma das extremidades da viga engastada curva
σ_{rr}	Campo de tensão radial
$\sigma_{\theta\theta}$	Campo de tensão circunferencial
$\sigma_{r\theta}$	Campo de tensão cisalhante
A	Parâmetro presente nas expressões do campo de tensões da viga engastada curva
B	Parâmetro presente nas expressões do campo de tensões da viga engastada curva
D	Parâmetro presente nas expressões do campo de tensões da viga engastada curva
N	Parâmetro auxiliar utilizado no cálculo dos parâmetros A , B e D
K	Parâmetro presente nas expressões do campo de deslocamentos da viga engastada curva (calculado a partir da imposição das condições de vinculação)
F	Parâmetro presente nas expressões do campo de deslocamentos da viga engastada curva (calculado a partir da imposição das condições de vinculação)
H	Parâmetro presente na expressão do campo de deslocamento circunferencial da viga engastada curva (calculado a partir da imposição das condições de vinculação)

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	x
Lista de Abreviaturas	xi
Lista de Símbolos (Capítulo 2)	xii
Lista de Símbolos (Capítulo 3)	xxiii
Lista de Símbolos (Capítulo 4)	xxv
Capítulo 1	1
1. Introdução	1
Capítulo 2	5
2. Análise Termo-Elástica de Compósitos	5
2.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA TERMO-ELASTICIDADE	5
2.1.1. <i>Análise Térmica</i>	5
2.1.2. <i>Análise Mecânica Elástica</i>	6
2.2. FORMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS	9
2.2.1. <i>Análise Térmica Transiente Tridimensional</i>	11
2.2.2. <i>Análise Mecânica Elástica Tridimensional</i>	15
2.3. FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS	23
2.3.1. <i>Análise Térmica Transiente Bidimensional</i>	24
2.3.2. <i>Análise Mecânica Elástica Bidimensional</i>	28

2.4. FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA BIDIMENSIONAL DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS	32
2.4.1. <i>Análise Térmica Transiente</i>	37
2.4.2. <i>Análise Mecânica Elástica</i>	47
Capítulo 3	63
3. Avaliação de Propriedades Efetivas de Materiais Compósitos	63
3.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	63
3.2. MODELOS MICROMECAÑICOS	63
3.2.1. <i>Modelos Simplificados para Estimativa das Propriedades Mecânicas de Materiais Compósitos Reforçados por Fibras</i>	63
3.2.2. <i>Modelos Baseados na Teoria Micromecânica de Campos Médios</i>	64
3.2.3. <i>Limites de Hashin-Shtrikman</i>	66
3.3. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	66
3.3.1. <i>Determinação de Módulos de Elasticidade Efetivos de um Compósito Reforçado por Fibras</i>	66
3.3.2. <i>Determinação do Módulo de Elasticidade Efetivo de um Compósito Particulado</i>	72
3.3.3. <i>Determinação do Módulo de Elasticidade Efetivo de um Material com Gradação Funcional</i>	74
Capítulo 4	79
4. Aplicações Numéricas: Análises Termo-Elásticas Bidimensionais	79
4.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	79
4.2. EXEMPLOS NUMÉRICOS	79
4.2.1. <i>Análise Transiente de um Cubo de Material Homogêneo</i>	79
4.2.2. <i>Análise Transiente de uma Placa Longa de Material com Gradação Funcional</i>	82
4.2.3. <i>Análise Estacionária de um Tubo de Parede Grossa de Material Homogêneo</i> ..	88
4.2.4. <i>Análise Estacionária de um Tubo de Parede Grossa de Material com Gradação Funcional</i>	96

4.2.5. <i>Análise Transiente de um Tubo de Parede Grossa de Material Homogêneo</i> ...	101
4.2.6. <i>Análise Mecânica de uma Viga Engastada</i>	105
4.2.7. <i>Análise Mecânica de uma Viga Engastada Curva</i>	112
Conclusões	118
Referências Bibliográficas	120
Apêndice A	123
A Matrizes utilizadas no cálculo da matriz de condutividade térmica local	123
Apêndice B	124
B Matrizes utilizadas no cálculo da matriz de rigidez local	124
Apêndice C	127
C Solução analítica para o campo de tensões em uma seção média de uma placa longa de FGM	127
C.1. CAMPO DE DEFORMAÇÕES	127
C.1. CAMPO DE TENSÕES	128

Capítulo 1

Introdução

Os avanços da tecnologia têm motivado o aparecimento de uma nova geração de materiais estruturais avançados, manufaturados para atendimento às necessidades dos modernos setores industriais. Tais materiais, em geral, exibem comportamentos bastante diferentes em relação aos materiais convencionais. Nesta nova geração de materiais avançados, destacam-se aqueles com constituição heterogênea, ilustrados na Figura 1.1. A heterogeneidade se caracteriza por transições graduais na microestrutura e composição, como ocorre nos chamados materiais com gradação funcional (*Functionally Graded Material – FGM*), ou por variações bruscas nas propriedades termo-mecânicas, como acontece nos materiais constituídos por diferentes fases discretas (laminados, compósitos reforçados por fibras, etc.). Como exemplos de modernos materiais com gradação funcional podem ser citados os compostos cerâmica/cerâmica e metal/cerâmica, adequados para uma série de novas aplicações sob severas condições ambientais de solitação (Suresh e Mortensen, 1997; Miyamoto et al., 1999; Kim e Paulino, 2003; Jin et al., 2002).

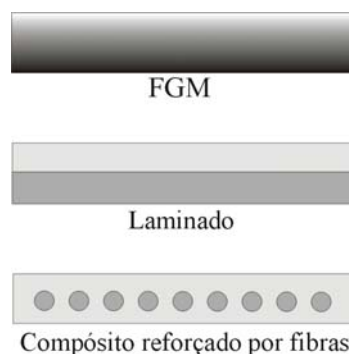


Figura 1.1 – Materiais com constituição heterogênea.

Uma grande vantagem dos compósitos é que, se bem projetados, eles podem exibir as melhores qualidades de seus constituintes, assim como características desejáveis não apresentadas por estes últimos.

Em 1989, a corporação japonesa *NKK (Nippon Kokan)* iniciou os seus estudos sobre *FGM*, visando sua aplicação em parte da estrutura de ônibus espaciais. No entanto, recentemente, várias pesquisas realizadas em diferentes países apontam um vasto ramo de aplicações de tais materiais com gradação funcional (Cho e Oden, 2000).

Os *FGMs* são ideais para estruturas submetidas a altos gradientes térmicos, onde uma região rica em cerâmica é exposta a uma alta temperatura, enquanto que a região rica em metal é exposta a uma baixa temperatura, com uma gradual transição entre estes materiais (Figura 1.2).

Na indústria aeroespacial já se aplica uma combinação entre a cerâmica e o metal, colando-se placas de cerâmica à estrutura metálica, constituindo um laminado, como mostra a Figura 1.2. No entanto, a diferença em termos de expansão térmica destes materiais gera consideráveis tensões de cisalhamento na interface, podendo provocar fissuração na cerâmica ou *delaminação*.

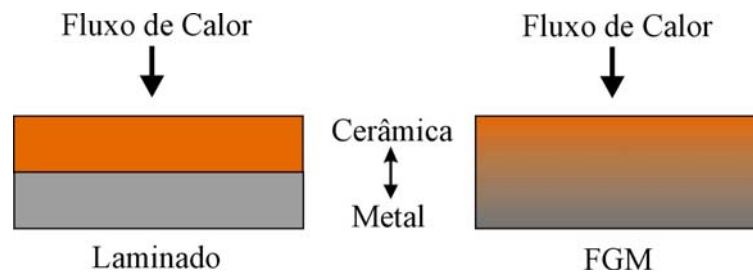


Figura 1.2 – Placas de laminado e *FGM*.

Outras aplicações de materiais com gradação funcional incluem mais recentemente mecanismos de conversão de energia solar, implantes dentários, etc. Além disso, existem algumas pesquisas que visam investigar o comportamento de materiais com gradação funcional que ocorrem na natureza (ossos, bambu, etc.).

Considerando o desempenho dos citados materiais heterogêneos e o conseqüente interesse do setor industrial nas suas aplicações, tem havido nos últimos anos um grande esforço voltado para o entendimento e a descrição do comportamento dos mesmos e, também, baseando-se nos resultados de pesquisas já realizadas, criar novos materiais que apresentem as características especiais exigidas para as novas aplicações industriais. Desta forma, o comportamento termo-mecânico de tais materiais é tema de estudo em muitos centros de pesquisa. Atualmente, muitos modelos computacionais, assim como métodos analíticos, vêm sendo empregados para avaliação do comportamento dos materiais avançados, especialmente dos compósitos. Dentre os modelos utilizados nos estudos de modelagem computacional do comportamento de tais materiais destacam-se aqueles baseados nos métodos dos elementos finitos e de elementos de contorno (Fuchiyama e Noda, 1995; Sutradhar et al., 2002). Como base

teórica da maioria destes modelos, destaca-se a hipótese do meio contínuo, permitindo que se represente um campo no meio material por funções contínuas, e viabilizando, desta forma, um tratamento matemático deste campo com base no cálculo diferencial (Malvern, 1969). Uma técnica alternativa, também baseada na hipótese do meio contínuo, na qual o comportamento do material é analisado considerando-se o acoplamento entre microestrutura e macroestrutura, é aquela apresentada em Aboudi et al. (1999) e originalmente denominada de *Higher-Order Theory*.

Esta técnica utiliza a média volumétrica dos vários campos que definem o comportamento do material, e impõe condições de contorno e de continuidade em termos médios, relativas a fluxo de calor e temperatura ou tensões e deslocamentos, a depender do tipo de análise, entre os sub-volumes (células e sub-células) usados para caracterizar a microestrutura. As equações de balanço de fluxo e de equilíbrio são satisfeitas utilizando valores médios no volume. Os campos de temperatura e deslocamentos em cada sub-célula são aproximados por polinômios do segundo grau expressos em coordenadas locais. Esta aproximação com termos quadráticos é necessária para capturar os efeitos locais gerados pelos altos gradientes térmicos (Aboudi et al., 1999).

Neste trabalho, utiliza-se a mesma base teórica da *Higher-Order Theory*, com uma simplificação em termos de discretização e montagem do sistema de equações. Esta simplificação, que já vem sendo adotada em trabalhos mais recentes, como em Bansal e Pindera (2003), consiste em utilizar as mesmas expressões para os campos de temperatura e deslocamentos para um elemento de volume denominado de célula, não mais subdividido em sub-células. Neste sentido, esta teoria apresenta algumas semelhanças em relação à técnica de volumes finitos usada em problemas de dinâmica dos fluidos (Versteeg e Malalasekera, 1995), razão pela qual é bastante razoável adotar a denominação *teoria de volumes finitos* para o método, como proposto em Bansal (2005). A formulação também foi ampliada para possibilitar a execução de análises térmicas transientes.

Além disso, como uma nova contribuição deste trabalho, apresenta-se uma formulação paramétrica bidimensional, particularmente apropriada para a análise termo-mecânica transiente de estruturas com contorno curvo. Tal formulação permite uma maior flexibilidade na geração da malha, eliminando indesejáveis perturbações observadas ao longo de bordas curvas quando se utiliza a tradicional célula com geometria necessariamente retangular. Esta formulação possibilita também uma diminuição do problema em relação ao número de incógnitas, tal como feito em Bansal e Pindera (2003).

No capítulo 2, inicialmente se apresenta a formulação convencional da teoria de volumes finitos com células retangulares, em sua versão *Higher-Order Theory* (Aboudi et al., 1999), para a solução de problemas termo-elásticos bi e tridimensionais em regime estacionário e transiente. Ainda neste capítulo é apresentada a formulação paramétrica bidimensional da teoria de volumes finitos, acima referida.

No capítulo 3, utiliza-se a formulação tridimensional da teoria de volumes finitos para a determinação das propriedades efetivas de materiais compósitos reforçados por fibras e particulados, incluindo o *FGM*. Neste capítulo são realizadas comparações com modelos simplificados da micromecânica e com aqueles baseados na teoria de campos médios (Auto-consistente, Mori-Tanaka e Esquema Diferencial). Na determinação das propriedades efetivas destes materiais são realizadas simulações numéricas de experimentos de vários volumes representativos. Em algumas destas simulações é utilizado o método dos elementos finitos, além da formulação tridimensional da teoria de volumes finitos.

No capítulo 4, há uma série de aplicações numéricas em problemas termo-elásticos bidimensionais, cujos resultados são comparados com outros obtidos através de soluções analíticas. No final, apresentam-se análises de dois problemas clássicos da elasticidade, utilizando-se a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos e o método dos elementos finitos, com o intuito de realizar comparações entre os mesmos.

Foi utilizada a plataforma *MatLab* na implementação dos programas desenvolvidos neste estudo e na geração dos gráficos.

Capítulo 2

Análise Termo-Elastica de Compósitos

2.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo é apresentada a formulação empregada neste estudo, a qual se baseia na *Higuer-Order Theory* (Aboudi et al., 1999; Bansal e Pindera, 2003). Esta técnica utiliza a média volumétrica dos vários campos que definem o comportamento do material, e impõe condições de contorno e de continuidade em termos médios, relativas a fluxo de calor e temperatura ou tensões e deslocamentos, a depender do tipo de análise, entre os sub-volumes (células) usados para caracterizar a microestrutura. Além disso, as equações diferenciais que regem os problemas térmicos e mecânicos são satisfeitas em termos médios no volume para cada célula. Os campos de temperatura e deslocamentos em cada célula são aproximados por polinômios do segundo grau expressos em coordenadas locais.

2.2. Equações Básicas da Termo-Elasticidade

2.2.1. Análise Térmica

A Figura 2.1 apresenta um sólido de volume V submetido a um fluxo de calor q , além do sistema de coordenadas adotado.

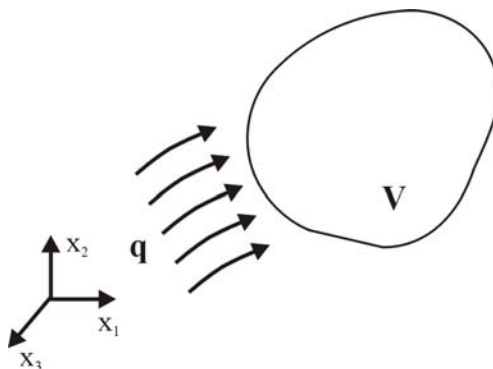


Figura 2.1 – Sólido submetido a um fluxo de calor q .

Para análise térmica em meios contínuos tem-se a equação apresentada abaixo de balanço de fluxo de calor para o regime transiente (Carslaw e Jaeger, 1959), bastando anular o segundo membro da equação para a realização de uma análise em regime estacionário:

$$\frac{\partial q_1}{x_1} + \frac{\partial q_2}{x_2} + \frac{\partial q_3}{x_3} = -\rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

onde q_i é o fluxo de calor na direção i ($i = 1, 2$ ou 3), ρ a densidade, C o calor específico, T a temperatura e t o tempo.

Apresenta-se abaixo a Lei de Fourier (Carslaw e Jaeger, 1959) para materiais que apresentam ortotropia nas direções principais 1, 2 e 3:

$$q_i = -k_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

sendo k_i a condutividade térmica na direção i . A repetição dos índices no segundo membro da equação (2.2) não representa somatória.

Para uma análise térmica bi-dimensional no plano 1-2, tem-se a seguinte equação de balanço de fluxo de calor para o regime transiente (Carslaw e Jaeger, 1959):

$$\frac{\partial q_1}{x_1} + \frac{\partial q_2}{x_2} = -\rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

2.2.2. Análise Mecânica Elástica

A Figura 2.2 apresenta um sólido de volume V , submetido às forças de superfície f_s e de corpo b , além do sistema de coordenadas adotado.

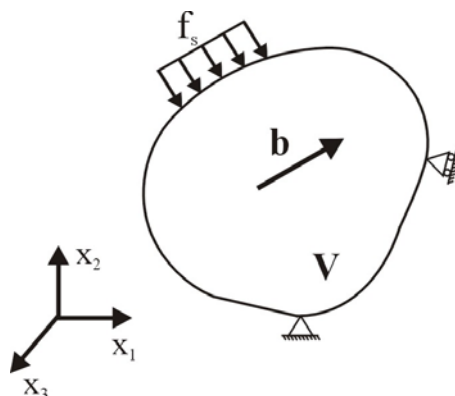


Figura 2.2 – Corpo elástico de volume V submetido às forças de superfície f_s e de corpo b .

No caso de uma análise mecânica de meios contínuos têm-se as seguintes equações diferenciais de equilíbrio (Malvern, 1969):

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3} + b_j = 0 \quad (2.4)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensão e b_j ($i, j=1, 2$ ou 3) são as componentes da força de corpo.

A relação constitutiva pode ser expressa pela Lei de Hooke Generalizada (Malvern, 1969), conforme mostrado a seguir:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \Gamma_{ij} \Delta T \quad (2.5)$$

sendo C_{ijkl} o tensor constitutivo do material, ε_{kl} o tensor de pequenas deformações, Γ_{ij} o tensor térmico e ΔT a variação de temperatura.

A definição do tensor de pequenas deformações encontra-se na equação abaixo, onde u_i é a componente do campo de deslocamentos na direção i :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

Em forma matricial e para materiais ortótopos, em que 1-2, 2-3 e 1-3 são planos de ortotropia, a relação constitutiva (2.5) pode ser expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \Delta T \\ \Gamma_2 \Delta T \\ \Gamma_3 \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

onde $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ é a deformação angular e $\Gamma_i = C_{ij}\alpha_j$, com α_j indicando o coeficiente de expansão térmica na direção j . A variação de temperatura é definida por $\Delta T = T - T_{ref}$, sendo T_{ref} uma temperatura de referência.

Para o caso particular de materiais isótopos, as componentes da matriz constitutiva podem ser obtidas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
 C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
 C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e ν o coeficiente de Poisson.

Além disso, no caso de materiais isótopos, têm-se as seguintes expressões para o vetor térmico:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = (C_{11} + C_{12} + C_{13})\alpha = (C_{21} + C_{22} + C_{23})\alpha = (C_{31} + C_{32} + C_{33})\alpha \tag{2.9}$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica do material.

Numa análise mecânica bi-dimensional no plano 1-2, utiliza-se as equações diferenciais de equilíbrio expressas como segue (Malvern, 1969):

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2} + b_j = 0 \tag{2.10}$$

Neste caso, pode-se admitir que o modelo estrutural encontra-se em estado plano de deformação ou de tensão, onde o índice j pode assumir os valores 1 e 2. A relação constitutiva para materiais isótopos é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Gamma \Delta T \\ \Gamma \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de elasticidade transversal do material.

Para o caso de estado plano de deformação, têm-se as seguintes expressões para as componentes da matriz constitutiva e para Γ :

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Gamma = (C_{11} + C_{12})(1+\nu)\alpha = (C_{21} + C_{22})(1+\nu)\alpha$$

Para o caso de estado plano de tensão, as componentes da matriz constitutiva e Γ podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\Gamma = (C_{11} + C_{12})\alpha = (C_{21} + C_{22})\alpha$$

Também pode ser calculada a tensão ou a deformação na direção 3, para o caso de estado plano de deformação ou de tensão, respectivamente, como mostrado nas equações a seguir:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - E\alpha\Delta T \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha\Delta T \quad (2.15)$$

2.3. Formulação Tridimensional da Teoria de Volumes Finitos

A formulação apresentada a seguir tem como base um modelo numérico para análise termo-elástica tridimensional de materiais compósitos, em regime estacionário, apresentado por Aboudi et al. (1999). Na versão aqui apresentada, o referido modelo é estendido para permitir a análise em regime transiente e simplificado por não utilizar o conceito de sub-células usado na formulação original (Aboudi et al. 1999).

Para a realização da análise, a estrutura é discretizada em volumes paralelepípedicos denominados células, como mostra a Figura 2.3. A discretização é constituída por $N_p N_q N_r$ células, onde N_p , N_q e N_r representam o número de células correspondentes aos intervalos

$0 \leq x_1 \leq D$, $0 \leq x_2 \leq H$ e $0 \leq x_3 \leq L$, respectivamente. Assim, através da Figura 2.3, pode-se observar que:

$$D = \sum_{p=1}^{N_p} d^{(p)} \quad (2.16)$$

$$H = \sum_{q=1}^{N_q} h^{(q)} \quad (2.17)$$

$$L = \sum_{r=1}^{N_r} l^{(r)} \quad (2.18)$$

sendo $d^{(p)}$, $h^{(q)}$ e $l^{(r)}$ as dimensões de uma célula genérica (p,q,r) segundo as direções x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente.

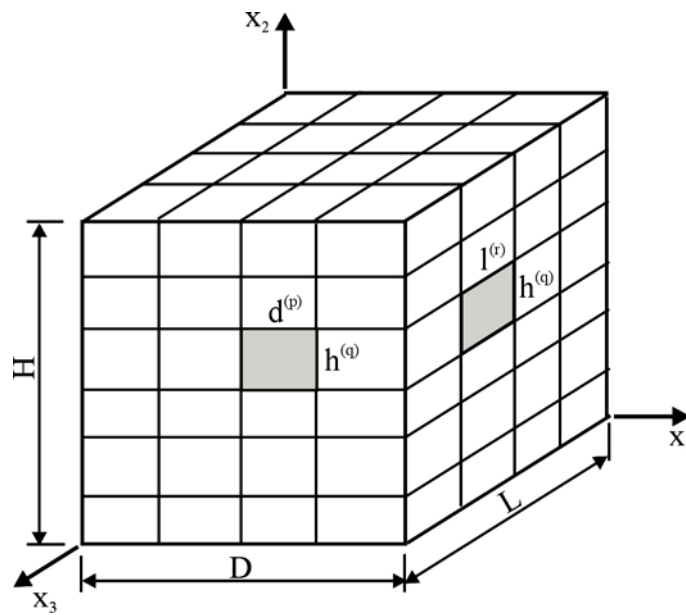


Figura 2.3 – Sistema de coordenadas globais do modelo estrutural.

Os campos de temperatura e de deslocamentos são aproximados por polinômios quadráticos expressos em termos das coordenadas locais \bar{x}_1 , \bar{x}_2 e \bar{x}_3 , com origem localizada no centro geométrico de cada célula (Figura 2.4).

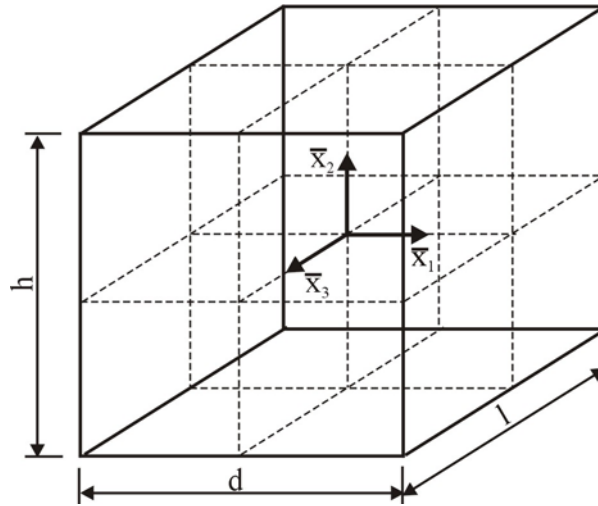


Figura 2.4 – Sistema de coordenadas locais de uma célula genérica.

2.3.1. Análise Térmica Transiente Tridimensional

Conforme mencionado acima, para realização da análise térmica, a formulação admite como aproximação, que o campo espacial de temperatura em cada célula é definido por um polinômio quadrático expresso em coordenadas locais, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
 T = & T_{(000)} + \bar{x}_1 T_{(100)} + \bar{x}_2 T_{(010)} + \bar{x}_3 T_{(001)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) T_{(200)} \\
 & + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) T_{(020)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_3^2 - \frac{l^2}{4} \right) T_{(002)}
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde valores $T_{(...)}$ representam os coeficientes do campo de temperatura a serem determinados.

Utilizando as equações (2.2) e (2.19), resultam as seguintes equações para os fluxos de calor em função dos coeficientes do campo de temperatura:

$$\begin{aligned}
 q_1 = & -k_1 \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_1} = -k_1 \left(T_{(100)} + 3\bar{x}_1 T_{(200)} \right) \\
 q_2 = & -k_2 \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_2} = -k_2 \left(T_{(010)} + 3\bar{x}_2 T_{(020)} \right) \\
 q_3 = & -k_3 \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_3} = -k_3 \left(T_{(001)} + 3\bar{x}_3 T_{(002)} \right)
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Logo, usando as equações (2.20), a equação de balanço de fluxo de calor (2.1) para o regime estacionário pode ser expressa em termos dos coeficientes do campo de temperatura da seguinte forma:

$$-3k_1T_{(200)} - 3k_2T_{(020)} - 3k_3T_{(002)} = 0 \quad (2.21)$$

A temperatura e o fluxo de calor podem ser avaliados em termos médios nas faces da célula, como mostram as equações abaixo:

$$\langle q_1 |_{\bar{x}_1=\pm d/2} = \frac{1}{hl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} q_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = -k_1 \left(T_{(100)} \pm \frac{3}{2} dT_{(200)} \right) \quad (2.22)$$

$$\langle q_2 |_{\bar{x}_2=\pm h/2} = \frac{1}{dl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 = -k_2 \left(T_{(010)} \pm \frac{3}{2} hT_{(020)} \right) \quad (2.23)$$

$$\langle q_3 |_{\bar{x}_3=\pm l/2} = \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_3 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = -k_3 \left(T_{(001)} \pm \frac{3}{2} lT_{(002)} \right) \quad (2.24)$$

$$\langle T |_{\bar{x}_1=\pm d/2} = \frac{1}{hl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} T d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = T_{(000)} \pm \frac{d}{2} T_{(100)} + \frac{d^2}{4} T_{(200)} \quad (2.25)$$

$$\langle T |_{\bar{x}_2=\pm h/2} = \frac{1}{dl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-d/2}^{d/2} T d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 = T_{(000)} \pm \frac{h}{2} T_{(010)} + \frac{h^2}{4} T_{(020)} \quad (2.26)$$

$$\langle T |_{\bar{x}_3=\pm l/2} = \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} T d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = T_{(000)} \pm \frac{l}{2} T_{(001)} + \frac{l^2}{4} T_{(002)} \quad (2.27)$$

Além da equação de balanço de fluxo (2.21), são necessárias outras seis equações para a determinação dos coeficientes do campo de temperatura em cada célula. Tais equações podem ser obtidas através da compatibilização dos valores médios da temperatura e do fluxo de calor nas faces comuns de células vizinhas. Assim, usando as expressões (2.22) a (2.27), as seguintes equações de compatibilidade podem ser escritas:

$$\begin{aligned} \langle q_1 |_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} &= \langle q_1 |_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q,r)} \\ \therefore \left[-k_1 \left(T_{(100)} - \frac{3}{2} dT_{(200)} \right) \right]^{(p,q,r)} &= \left[-k_1 \left(T_{(100)} + \frac{3}{2} dT_{(200)} \right) \right]^{(p-1,q,r)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \langle q_2 |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} &= \langle q_2 |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1,r)} \\ \therefore \left[-k_2 \left(T_{(010)} - \frac{3}{2} hT_{(020)} \right) \right]^{(p,q,r)} &= \left[-k_2 \left(T_{(010)} + \frac{3}{2} hT_{(020)} \right) \right]^{(p,q-1,r)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} &= \langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r-1)} \\ \therefore \left[-k_3 \left(T_{(001)} - \frac{3}{2} l T_{(002)} \right) \right]^{(p,q,r)} &= \left[-k_3 \left(T_{(001)} + \frac{3}{2} l T_{(002)} \right) \right]^{(p,q,r-1)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p+1,q,r)} &= \langle T \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} \\ \therefore \left[T_{(000)} - \frac{d}{2} T_{(100)} + \frac{d^2}{4} T_{(200)} \right]^{(p+1,q,r)} &= \left[T_{(000)} + \frac{d}{2} T_{(100)} + \frac{d^2}{4} T_{(200)} \right]^{(p,q,r)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q+1,r)} &= \langle T \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} \\ \therefore \left[T_{(000)} - \frac{h}{2} T_{(010)} + \frac{h^2}{4} T_{(020)} \right]^{(p,q+1,r)} &= \left[T_{(000)} + \frac{h}{2} T_{(010)} + \frac{h^2}{4} T_{(020)} \right]^{(p,q,r)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r+1)} &= \langle T \rangle_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} \\ \therefore \left[T_{(000)} - \frac{l}{2} T_{(001)} + \frac{l^2}{4} T_{(002)} \right]^{(p,q,r+1)} &= \left[T_{(000)} + \frac{l}{2} T_{(001)} + \frac{l^2}{4} T_{(002)} \right]^{(p,q,r)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para as células pertencentes ao contorno da estrutura, têm-se as seguintes equações a depender das condições de contorno do problema:

Bordo Esquerdo (BE):

$$\begin{aligned} \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} &= q_{BE} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} &= T_{BE} \\ \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} &= h_{BE} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} - T_{\infty}^{BE} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Bordo Direito (BD):

$$\begin{aligned} \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} &= q_{BD} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} &= T_{BD} \\ \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} &= h_{BD} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} - T_{\infty}^{BD} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Bordo Inferior (BI):

$$\begin{aligned} \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} &= q_{BI} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} &= T_{BI} \\ \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} &= h_{BI} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} - T_{\infty}^{BI} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Bordo Superior (BS):

$$\begin{aligned}
\langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} &= q_{BS} \\
\langle T \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} &= T_{BS} \\
\langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} &= h_{BS} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} - T_{\infty}^{BS} \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Bordo Posterior (BP):

$$\begin{aligned}
\langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} &= q_{BP} \\
\langle T \rangle_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} &= T_{BP} \\
\langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} &= h_{BP} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} - T_{\infty}^{BP} \right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Bordo Anterior (BA):

$$\begin{aligned}
\langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} &= q_{BA} \\
\langle T \rangle_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} &= T_{BA} \\
\langle q_3 \rangle_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} &= h_{BA} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} - T_{\infty}^{BA} \right)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde q_B e T_B são o fluxo de calor e a temperatura do bordo, respectivamente, e h_B e T_{∞}^B são o coeficiente de convecção térmica e a temperatura do meio envolvente ao bordo, nesta ordem.

Assim, têm-se sete coeficientes do campo de temperatura a se determinar por célula e sete equações (2.21) e (2.28) a (2.39), as quais podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\kappa \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} \tag{2.40}$$

onde κ é uma pseudo-matriz de condutividade térmica global da estrutura, contendo informações da geometria e das condutividades térmicas das células que compõem o modelo estrutural, $\boldsymbol{\tau}$ um vetor com as informações das condições de contorno do problema e \mathbf{T} um vetor formado pelos coeficientes dos campos de temperatura das células, dado por:

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{T}^{(1,1,1)}, \dots, \mathbf{T}^{(N_p, N_q, N_r)} \right] \tag{2.41}$$

sendo:

$$\mathbf{T}^{(p,q,r)} = \left[T_{(000)}, T_{(100)}, T_{(010)}, T_{(001)}, T_{(200)}, T_{(020)}, T_{(002)} \right]^{(p,q,r)} \tag{2.42}$$

Os resultados da análise podem ser avaliados em termos médios em cada célula, localizando esta informação no centro geométrico da célula. Neste sentido, a temperatura e o fluxo de calor podem ser calculados para cada célula através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \langle q_1 \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_1 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = -k_1 T_{(100)} \\
 \langle q_2 \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = -k_2 T_{(010)} \\
 \langle q_3 \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_3 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = -k_3 T_{(001)} \\
 \langle T \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} T d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = T_{(000)}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Para a realização de uma análise em regime transiente, pode-se utilizar uma estratégia incremental no tempo, onde a equação de balanço de fluxo de calor (2.1) pode ser expressa em termos dos coeficientes do campo de temperatura por:

$$-3k_1^{k-1} T_{(200)}^k - 3k_2^{k-1} T_{(020)}^k - 3k_3^{k-1} T_{(002)}^k + \rho^{k-1} C^{k-1} \frac{T_{(000)}^k - T_{(000)}^{k-1}}{\Delta t^k} = 0 \tag{2.44}$$

onde Δt é o incremento de tempo e k representa o passo atual da análise. Nesta equação, adota-se a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{\langle \Delta T \rangle}{\Delta t} = \frac{T_{(000)}^k - T_{(000)}^{k-1}}{\Delta t} \tag{2.45}$$

Na equação (2.44), o sobrescrito $k-1$ dos parâmetros do material indica que, na execução do passo k da análise incremental, estes parâmetros podem ser avaliados com base no campo de temperatura do passo incremental anterior $k-1$. Da mesma forma, pode ser realizada uma análise em regime estacionário considerando a dependência das propriedades do material em relação à temperatura. Neste caso, pode-se adotar uma estratégia iterativa que consiste na execução de uma seqüência de análises, onde em cada uma delas são utilizados os parâmetros do material calculados com base no campo de temperatura resultante da análise anterior, até que se atinja a condição de convergência dos mesmos.

2.3.2. Análise Mecânica Elástica Tridimensional

Como mencionado anteriormente, na formulação para análise mecânica, o campo de deslocamentos em cada célula é aproximado por polinômios quadráticos nas coordenadas locais, dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
u_1 &= U_{1(000)} + \bar{x}_1 U_{1(100)} + \bar{x}_2 U_{1(010)} + \bar{x}_3 U_{1(001)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) U_{1(200)} \\
&+ \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) U_{1(020)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_3^2 - \frac{l^2}{4} \right) U_{1(002)} \\
u_2 &= U_{2(000)} + \bar{x}_1 U_{2(100)} + \bar{x}_2 U_{2(010)} + \bar{x}_3 U_{2(001)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) U_{2(200)} \\
&+ \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) U_{2(020)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_3^2 - \frac{l^2}{4} \right) U_{2(002)} \\
u_3 &= U_{3(000)} + \bar{x}_1 U_{3(100)} + \bar{x}_2 U_{3(010)} + \bar{x}_3 U_{3(001)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) U_{3(200)} \\
&+ \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) U_{3(020)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_3^2 - \frac{l^2}{4} \right) U_{3(002)}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde valores $U_{i(\dots)}$ representam os coeficientes do campo de deslocamentos a serem determinados.

Substituindo-se a equação (2.46) em (2.6), obtêm-se as seguintes expressões para as componentes do campo de deformações em termos dos coeficientes do campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_1} = U_{1(100)} + 3\bar{x}_1 U_{1(200)} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_2} = U_{2(010)} + 3\bar{x}_2 U_{2(020)} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial \bar{x}_3} = U_{3(001)} + 3\bar{x}_3 U_{3(002)} \\
\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{x}_2} = U_{2(001)} + 3\bar{x}_3 U_{2(002)} + U_{3(010)} + 3\bar{x}_2 U_{3(020)} \\
\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{x}_1} = U_{1(001)} + 3\bar{x}_3 U_{1(002)} + U_{3(100)} + 3\bar{x}_1 U_{3(200)} \\
\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_1} = U_{1(010)} + 3\bar{x}_2 U_{1(020)} + U_{2(100)} + 3\bar{x}_1 U_{2(200)}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Assim, utilizando-se a relação constitutiva (2.7) e as expressões (2.47), as equações de equilíbrio (2.4) podem ser escritas, em função dos coeficientes do campo de deslocamentos, na forma:

$$\begin{aligned}
3C_{11}U_{1(200)} - \Gamma_1 T_{(100)} + 3C_{66}U_{1(020)} + 3C_{55}U_{1(002)} + b_1 &= 0 \\
3C_{66}U_{2(200)} + 3C_{22}U_{2(020)} - \Gamma_2 T_{(010)} + 3C_{44}U_{2(002)} + b_2 &= 0 \\
3C_{55}U_{3(200)} + 3C_{44}U_{3(020)} + 3C_{33}U_{3(002)} - \Gamma_3 T_{(001)} + b_3 &= 0
\end{aligned} \tag{ 2.48 }$$

Nas equações de equilíbrio (2.48) foram utilizadas as seguintes aproximações para os gradientes térmicos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \bar{x}_1} &\approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_1} \right\rangle = T_{(100)} \\
\frac{\partial T}{\partial \bar{x}_2} &\approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_2} \right\rangle = T_{(010)} \\
\frac{\partial T}{\partial \bar{x}_3} &\approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_3} \right\rangle = T_{(001)}
\end{aligned} \tag{ 2.49 }$$

As componentes do campo de deslocamentos, dadas pelas equações (2.46), podem ser avaliadas em termos médios nas faces da célula, resultando nas expressões abaixo:

$$\begin{aligned}
\langle u_i |_{\bar{x}_i = \pm d/2} &= \frac{1}{hl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} u_i d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{i(000)} \pm \frac{d}{2} U_{i(100)} + \frac{d^2}{4} U_{i(200)} \\
\langle u_i |_{\bar{x}_2 = \pm h/2} &= \frac{1}{dl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-d/2}^{d/2} u_i d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 = U_{i(000)} \pm \frac{h}{2} U_{i(010)} + \frac{h^2}{4} U_{i(020)} \\
\langle u_i |_{\bar{x}_3 = \pm l/2} &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} u_i d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = U_{i(000)} \pm \frac{l}{2} U_{i(001)} + \frac{l^2}{4} U_{i(002)}
\end{aligned} \tag{ 2.50 } \quad (i = 1,2,3)$$

Da mesma forma, usando-se as equações (2.7) e (2.47), as componentes do tensor de tensões podem ser avaliadas em termos médios nas faces da célula pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{11} |_{\bar{x}_1 = \pm d/2} &= \frac{1}{hl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \\
&= C_{11}U_{1(100)} \pm \frac{3}{2} C_{11}dU_{1(200)} + C_{12}U_{2(010)} + C_{13}U_{3(001)} - \Gamma_1 \langle \Delta T |_{\bar{x}_1 = \pm d/2}
\end{aligned} \tag{ 2.51 }$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{12} |_{\bar{x}_1 = \pm d/2} &= \frac{1}{hl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \\
&= C_{66}U_{1(010)} + C_{66}U_{2(100)} \pm \frac{3}{2} C_{66}dU_{2(200)}
\end{aligned} \tag{ 2.52 }$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{13} |_{\bar{x}_1=\pm d/2} &= \frac{1}{hl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \\ &= C_{55} U_{1(001)} + C_{55} U_{3(100)} \pm \frac{3}{2} C_{55} d U_{3(200)} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{21} |_{\bar{x}_2=\pm h/2} &= \frac{1}{dl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{21} d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 \\ &= C_{66} U_{1(010)} \pm \frac{3}{2} C_{66} h U_{1(020)} + C_{66} U_{2(100)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{22} |_{\bar{x}_2=\pm h/2} &= \frac{1}{dl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{22} d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 \\ &= C_{12} U_{1(100)} + C_{22} U_{2(010)} \pm \frac{3}{2} C_{22} h U_{2(020)} + C_{23} U_{3(001)} - \Gamma_2 \langle \Delta T |_{\bar{x}_2=\pm h/2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{23} |_{\bar{x}_2=\pm h/2} &= \frac{1}{dl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{23} d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 \\ &= C_{44} U_{2(001)} + C_{44} U_{3(010)} \pm \frac{3}{2} C_{44} h U_{3(020)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{31} |_{\bar{x}_3=\pm l/2} &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{31} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \\ &= C_{55} U_{1(001)} \pm \frac{3}{2} C_{55} l U_{1(002)} + C_{55} U_{3(100)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{32} |_{\bar{x}_3=\pm l/2} &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{32} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \\ &= C_{44} U_{2(001)} \pm \frac{3}{2} C_{44} l U_{2(002)} + C_{44} U_{3(010)} \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33} |_{\bar{x}_3=\pm l/2} &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{33} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \\ &= C_{13} U_{1(100)} + C_{23} U_{2(010)} + C_{33} U_{3(001)} \pm \frac{3}{2} C_{33} l U_{3(002)} - \Gamma_3 \langle \Delta T |_{\bar{x}_3=\pm l/2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Além das equações de equilíbrio (2.48), são necessárias outras dezoito equações para a determinação dos vinte e um coeficientes do campo de deslocamentos em cada célula. Estas equações adicionais são obtidas compatibilizando-se, em termos médios, as componentes dos campos de deslocamentos e de tensões nas faces comuns de células vizinhas. Portanto, usando as equações (2.50) a (2.59), as referidas condições de compatibilidade são as seguintes:

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_i=-d/2}^{(p+1,q,r)} &= \langle u_i |_{\bar{x}_i=d/2}^{(p,q,r)} \\ \therefore \left[U_{i(000)} - \frac{d}{2} U_{i(100)} + \frac{d^2}{4} U_{i(200)} \right]^{(p+1,q,r)} &= \left[U_{i(000)} + \frac{d}{2} U_{i(100)} + \frac{d^2}{4} U_{i(200)} \right]^{(p,q,r)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
\langle u_i |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q+1,r)} &= \langle u_i |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[U_{i(000)} - \frac{h}{2} U_{i(010)} + \frac{h^2}{4} U_{i(020)} \right]^{(p,q+1,r)} &= \left[U_{i(000)} + \frac{h}{2} U_{i(010)} + \frac{h^2}{4} U_{i(020)} \right]^{(p,q,r)}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_i |_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r+1)} &= \langle u_i |_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[U_{i(000)} - \frac{l}{2} U_{i(001)} + \frac{l^2}{4} U_{i(002)} \right]^{(p,q,r+1)} &= \left[U_{i(000)} + \frac{l}{2} U_{i(001)} + \frac{l^2}{4} U_{i(002)} \right]^{(p,q,r)}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{11} |_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q,r)} &= \langle \sigma_{11} |_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{11} U_{1(100)} + \frac{3}{2} C_{11} d U_{1(200)} + C_{12} U_{2(010)} + C_{13} U_{3(001)} - \Gamma_1 \langle \Delta T |_{\bar{x}_1=d/2} \right]^{(p-1,q,r)} & \\
= \left[C_{11} U_{1(100)} - \frac{3}{2} C_{11} d U_{1(200)} + C_{12} U_{2(010)} + C_{13} U_{3(001)} - \Gamma_1 \langle \Delta T |_{\bar{x}_1=-d/2} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{12} |_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q,r)} &= \langle \sigma_{12} |_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{66} U_{1(010)} + C_{66} U_{2(100)} + \frac{3}{2} C_{66} d U_{2(200)} \right]^{(p-1,q,r)} & \\
= \left[C_{66} U_{1(010)} + C_{66} U_{2(100)} - \frac{3}{2} C_{66} d U_{2(200)} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{13} |_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q,r)} &= \langle \sigma_{13} |_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{55} U_{1(001)} + C_{55} U_{3(100)} + \frac{3}{2} C_{55} d U_{3(200)} \right]^{(p-1,q,r)} & \\
= \left[C_{55} U_{1(001)} + C_{55} U_{3(100)} - \frac{3}{2} C_{55} d U_{3(200)} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{21} |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1,r)} &= \langle \sigma_{21} |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{66} U_{1(010)} + \frac{3}{2} C_{66} h U_{1(020)} + C_{66} U_{2(100)} \right]^{(p,q-1,r)} & \\
= \left[C_{66} U_{1(010)} - \frac{3}{2} C_{66} h U_{1(020)} + C_{66} U_{2(100)} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{22} |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1,r)} &= \langle \sigma_{22} |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{12} U_{1(100)} + C_{22} U_{2(010)} + \frac{3}{2} C_{22} h U_{2(020)} + C_{23} U_{3(001)} - \Gamma_2 \langle \Delta T |_{\bar{x}_2=h/2} \right]^{(p,q-1,r)} & \\
= \left[C_{12} U_{1(100)} + C_{22} U_{2(010)} - \frac{3}{2} C_{22} h U_{2(020)} + C_{23} U_{3(001)} - \Gamma_2 \langle \Delta T |_{\bar{x}_2=-h/2} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{23} \Big|_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1,r)} &= \langle \sigma_{23} \Big|_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{44}U_{2(001)} + C_{44}U_{3(010)} + \frac{3}{2}C_{44}hU_{3(020)} \right]^{(p,q-1,r)} & \\
= \left[C_{44}U_{2(001)} + C_{44}U_{3(010)} - \frac{3}{2}C_{44}hU_{3(020)} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{31} \Big|_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r-1)} &= \langle \sigma_{31} \Big|_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{55}U_{1(001)} + \frac{3}{2}C_{55}lU_{1(002)} + C_{55}U_{3(100)} \right]^{(p,q,r-1)} & \\
= \left[C_{55}U_{1(001)} - \frac{3}{2}C_{55}lU_{1(002)} + C_{55}U_{3(100)} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{32} \Big|_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r-1)} &= \langle \sigma_{32} \Big|_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{44}U_{2(001)} + \frac{3}{2}C_{44}lU_{2(002)} + C_{44}U_{3(010)} \right]^{(p,q,r-1)} & \\
= \left[C_{44}U_{2(001)} - \frac{3}{2}C_{44}lU_{2(002)} + C_{44}U_{3(010)} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{33} \Big|_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r-1)} &= \langle \sigma_{33} \Big|_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} \\
\therefore \left[C_{13}U_{1(100)} + C_{23}U_{2(010)} + C_{33}U_{3(001)} + \frac{3}{2}C_{33}lU_{3(002)} - \Gamma_3 \langle \Delta T \Big|_{\bar{x}_3=l/2} \right]^{(p,q,r-1)} & \\
= \left[C_{13}U_{1(100)} + C_{23}U_{2(010)} + C_{33}U_{3(001)} - \frac{3}{2}C_{33}lU_{3(002)} - \Gamma_3 \langle \Delta T \Big|_{\bar{x}_3=-l/2} \right]^{(p,q,r)} &
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Para as células pertencentes ao contorno da estrutura, têm-se as seguintes equações a depender das condições de contorno do problema:

Bordo Esquerdo (BE):

$$\langle u_i \Big|_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} = u_i^{BE} \tag{2.72}$$

$$\langle \sigma_{1i} \Big|_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q,r)} = \sigma_{1i}^{BE}$$

Bordo Direito (BD):

$$\langle u_i \Big|_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} = u_i^{BD} \tag{2.73}$$

$$\langle \sigma_{1i} \Big|_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q,r)} = \sigma_{1i}^{BD}$$

Bordo Inferior (BI):

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} &= u_i^{BI} \\ \langle \sigma_{2i} |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q,r)} &= \sigma_{2i}^{BI} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bordo Superior (BS):

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} &= u_i^{BS} \\ \langle \sigma_{2i} |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q,r)} &= \sigma_{2i}^{BS} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Bordo Posterior (BP):

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} &= u_i^{BP} \\ \langle \sigma_{3i} |_{\bar{x}_3=-l/2}^{(p,q,r)} &= \sigma_{3i}^{BP} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Bordo Anterior (BA):

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} &= u_i^{BA} \\ \langle \sigma_{3i} |_{\bar{x}_3=l/2}^{(p,q,r)} &= \sigma_{3i}^{BA} \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde u_i^B e σ_{ji}^B ($j=1, 2$ ou 3) são as componentes do campo de deslocamentos e de tensões, respectivamente, atuantes no bordo.

Assim, têm-se vinte e um coeficientes do campo de deslocamentos a se determinar por célula e vinte e uma equações (2.48) e (2.60) a (2.77), podendo-se organizar matricialmente o problema da seguinte forma:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{f} \quad (2.78)$$

onde \mathbf{K} é uma pseudo-matriz de rigidez global da estrutura, contendo informações da geometria e das propriedades mecânicas das células que compõem o modelo estrutural, \mathbf{f} um vetor com as informações das condições de contorno do problema e dos efeitos da variação de temperatura e \mathbf{U} um vetor formado pelos coeficientes do campo de deslocamentos das células, dado por:

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{U}^{(1,1,1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N_p, N_q, N_r)} \right] \quad (2.79)$$

onde:

$$\mathbf{U}^{(p,q,r)} = \left[U_{i(000)}, U_{i(100)}, U_{i(010)}, U_{i(001)}, U_{i(200)}, U_{i(020)}, U_{i(002)} \right]^{(p,q,r)} \quad (i=1,2,3) \quad (2.80)$$

Os resultados da análise mecânica também podem ser avaliados em termos médios em cada célula, localizando estas informações no centro geométrico da célula. Neste sentido, os deslocamentos, as deformações e as tensões podem ser calculados da seguinte forma:

Deslocamentos:

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} u_i d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{i(000)} \quad (2.81)$$

Deformações:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon_{11} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{1(100)} \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon_{22} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{2(010)} \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon_{33} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{3(001)} \\ \langle \gamma_{23} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \gamma_{23} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{2(001)} + U_{3(010)} \\ \langle \gamma_{13} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \gamma_{13} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{1(001)} + U_{3(100)} \\ \langle \gamma_{12} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \gamma_{12} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = U_{1(010)} + U_{2(100)} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Tensões:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{11} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = C_{11} U_{1(100)} + C_{12} U_{2(010)} + C_{13} U_{3(001)} - \Gamma_1 \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{22} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = C_{21} U_{1(100)} + C_{22} U_{2(010)} + C_{23} U_{3(001)} - \Gamma_2 \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{33} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = C_{31} U_{1(100)} + C_{32} U_{2(010)} + C_{33} U_{3(001)} - \Gamma_3 \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{23} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = C_{44} (U_{2(001)} + U_{3(010)}) \\ \langle \sigma_{13} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{13} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = C_{55} (U_{1(001)} + U_{3(100)}) \\ \langle \sigma_{12} \rangle &= \frac{1}{dhl} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{12} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = C_{66} (U_{1(010)} + U_{2(100)}) \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.4. Formulação Bidimensional da Teoria de Volumes Finitos

A formulação apresentada a seguir tem como base um modelo numérico para análise termo-elástica bidimensional de materiais compósitos, em regime estacionário, apresentado por Aboudi et al. (1995). Na versão aqui apresentada, o referido modelo é estendido para permitir a análise em regime transiente e simplificado por não utilizar o conceito de sub-células usado na formulação original (Aboudi et al. 1995).

Para realização da análise, a estrutura é discretizada em células retangulares, como ilustra a Figura 2.5. A discretização é constituída por $N_p N_q$ células, onde N_p e N_q representam os números de células correspondentes aos intervalos $0 \leq x_1 \leq D$ e $0 \leq x_2 \leq H$, respectivamente, com dimensões definidas pelas equações (2.16) e (2.17).

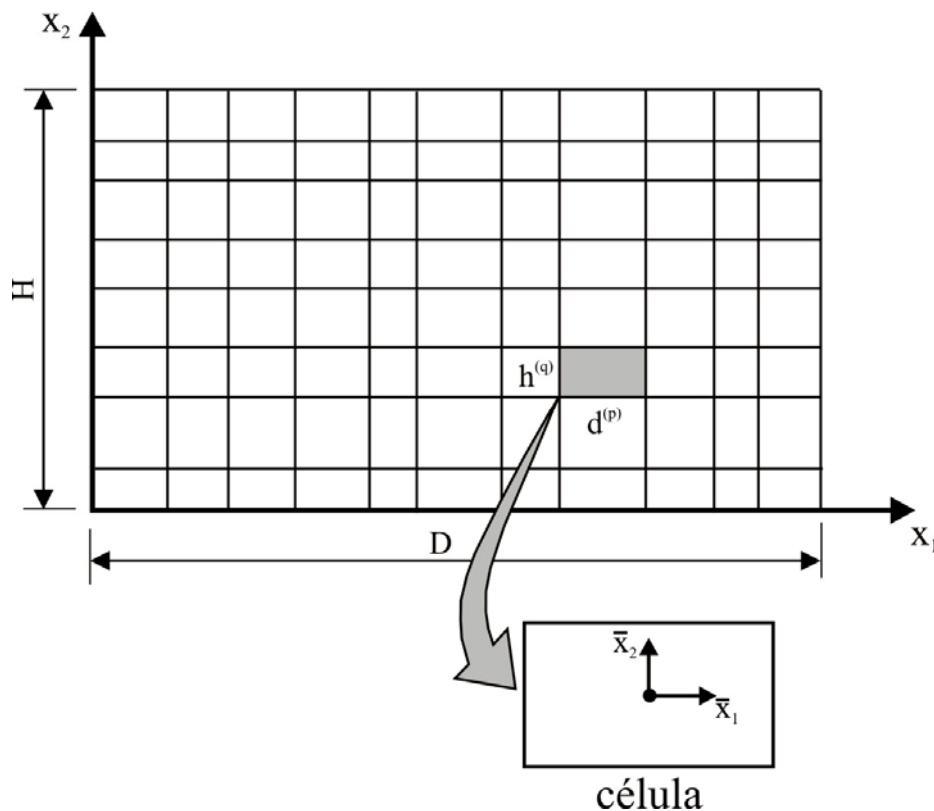


Figura 2.5 – Sistema de coordenadas globais e locais da estrutura discretizada.

Os campos de temperatura e de deslocamentos são aproximados por polinômios quadráticos expressos em termos das coordenadas locais \bar{x}_1 e \bar{x}_2 , com origem localizada no centro geométrico da célula (Figura 2.5).

2.4.1. Análise Térmica Transiente Bidimensional

Conforme mencionado acima, para realização da análise térmica, a formulação admite como aproximação, um campo espacial de temperatura em cada célula definido por um polinômio quadrático expresso nas coordenadas locais, dado por:

$$T = T_{(00)} + \bar{x}_1 T_{(10)} + \bar{x}_2 T_{(01)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) T_{(20)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) T_{(02)} \quad (2.84)$$

onde valores $T_{(\dots)}$ representam os coeficientes do campo de temperatura a serem determinados.

Utilizando as equações (2.2) e (2.84), resultam as seguintes expressões para os fluxos de calor em função dos coeficientes do campo de temperatura:

$$q_1 = -k_1 \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_1} = -k_1 (T_{(10)} + 3\bar{x}_1 T_{(20)}) \quad (2.85)$$

$$q_2 = -k_2 \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_2} = -k_2 (T_{(01)} + 3\bar{x}_2 T_{(02)})$$

Logo, usando as equações (2.85), a equação de balanço de fluxo de calor (2.3) para o caso de uma análise em regime estacionário pode ser expressa em termos dos coeficientes do campo de temperatura da seguinte forma:

$$-3k_1 T_{(20)} - 3k_2 T_{(02)} = 0 \quad (2.86)$$

A temperatura e o fluxo de calor podem ser avaliados em termos médios nas faces da célula, resultando nas relações abaixo:

$$\langle q_1 \big|_{\bar{x}_1 = \pm d/2} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} q_1 d\bar{x}_2 = -k_1 \left(T_{(10)} \pm \frac{3}{2} d T_{(20)} \right)$$

$$\langle q_2 \big|_{\bar{x}_2 = \pm h/2} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} q_2 d\bar{x}_1 = -k_2 \left(T_{(01)} \pm \frac{3}{2} h T_{(02)} \right) \quad (2.87)$$

$$\langle T \big|_{\bar{x}_1 = \pm d/2} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T d\bar{x}_2 = T_{(00)} \pm \frac{d}{2} T_{(10)} + \frac{d^2}{4} T_{(20)}$$

$$\langle T \big|_{\bar{x}_2 = \pm h/2} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} T d\bar{x}_1 = T_{(00)} \pm \frac{h}{2} T_{(01)} + \frac{h^2}{4} T_{(02)}$$

Além da equação de balanço de fluxo (2.86), são necessárias outras quatro equações para a determinação dos cinco coeficientes do campo de temperatura em cada célula. Tais equações podem ser obtidas através da compatibilização, em termos médios, da temperatura e do fluxo de calor nas faces comuns de células vizinhas. Assim, usando as expressões (2.87), as seguintes equações de compatibilidade podem ser escritas:

$$\begin{aligned} \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} &= \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q)} \\ \therefore \left[-k_1 \left(T_{(10)} - \frac{3}{2} d T_{(20)} \right) \right]^{(p,q)} &= \left[-k_1 \left(T_{(10)} + \frac{3}{2} d T_{(20)} \right) \right]^{(p-1,q)} \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} &= \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1)} \\ \therefore \left[-k_2 \left(T_{(01)} - \frac{3}{2} h T_{(02)} \right) \right]^{(p,q)} &= \left[-k_2 \left(T_{(01)} + \frac{3}{2} h T_{(02)} \right) \right]^{(p,q-1)} \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p+1,q)} &= \langle T \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} \\ \therefore \left[T_{(00)} - \frac{d}{2} T_{(10)} + \frac{d^2}{4} T_{(20)} \right]^{(p+1,q)} &= \left[T_{(00)} + \frac{d}{2} T_{(10)} + \frac{d^2}{4} T_{(20)} \right]^{(p,q)} \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q+1)} &= \langle T \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} \\ \therefore \left[T_{(00)} - \frac{h}{2} T_{(01)} + \frac{h^2}{4} T_{(02)} \right]^{(p,q+1)} &= \left[T_{(00)} + \frac{h}{2} T_{(01)} + \frac{h^2}{4} T_{(02)} \right]^{(p,q)} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Para as células pertencentes ao contorno da estrutura, têm-se as seguintes equações a depender das condições de contorno do problema:

Bordo Esquerdo (BE):

$$\begin{aligned} \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} &= q_{BE} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} &= T_{BE} \\ \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} &= h_{BE} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} - T_{\infty}^{BE} \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Bordo Direito (BD):

$$\begin{aligned} \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} &= q_{BD} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} &= T_{BD} \\ \langle q_1 \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} &= h_{BD} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} - T_{\infty}^{BD} \right) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Bordo Inferior (BI):

$$\begin{aligned} \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} &= q_{BI} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} &= T_{BI} \\ \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} &= h_{BI} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} - T_{\infty}^{BI} \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Bordo Superior (BS):

$$\begin{aligned} \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} &= q_{BS} \\ \langle T \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} &= T_{BS} \\ \langle q_2 \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} &= h_{BS} \left(\langle T \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} - T_{\infty}^{BS} \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde q_B e T_B são o fluxo de calor e a temperatura do bordo, respectivamente, e h_B e T_{∞}^B são o coeficiente de convecção térmica e a temperatura do meio envolvente, nesta ordem.

Assim, têm-se cinco coeficientes do campo de temperatura a se determinar por célula e cinco equações (2.86) e (2.88) a (2.95), as quais podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\kappa \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.96)$$

onde κ é uma pseudo-matriz de condutividade térmica global da estrutura, contendo informações da geometria e da condutividade térmica das células que compõem o modelo estrutural, $\boldsymbol{\tau}$ um vetor com as informações das condições de contorno do problema e \mathbf{T} um vetor formado pelos coeficientes do campo de temperatura das células, dado por:

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{T}^{(1,1)}, \dots, \mathbf{T}^{(N_p, N_q)} \right] \quad (2.97)$$

sendo:

$$\mathbf{T}^{(p,q)} = \left[T_{(00)}, T_{(10)}, T_{(01)}, T_{(20)}, T_{(02)} \right]^{(p,q)} \quad (2.98)$$

Os resultados da análise podem ser avaliados em termos médios em cada célula, localizando estas informações no centro geométrico da célula. Neste sentido, a temperatura e o fluxo de calor podem ser calculados através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\langle q_1 \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_1 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = -k_1 T_{(10)} \\ \langle q_2 \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} q_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = -k_2 T_{(01)} \\ \langle T \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} T d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = T_{(00)}\end{aligned}\quad (2.99)$$

Para a realização de uma análise em regime transiente, pode-se utilizar uma estratégia incremental no tempo, onde a equação de balanço de fluxo de calor (2.3) pode ser expressa em termos dos coeficientes do campo de temperatura por:

$$-3k_1^{k-1} T_{(20)}^k - 3k_2^{k-1} T_{(02)}^k + \rho^{k-1} C^{k-1} \frac{T_{(00)}^k - T_{(00)}^{k-1}}{\Delta t^k} = 0 \quad (2.100)$$

onde Δt é o incremento de tempo e k representa o passo atual da análise. Nesta equação, adota-se a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{\langle \Delta T \rangle}{\Delta t} = \frac{T_{(00)}^k - T_{(00)}^{k-1}}{\Delta t} \quad (2.101)$$

Na equação (2.100), assim como acontece na análise tridimensional, o sobrescrito $k-1$ dos parâmetros do material indica que, na execução do passo k da análise incremental, estes parâmetros podem ser avaliados com base no campo de temperatura do passo incremental anterior $k-1$. Da mesma forma, pode ser realizada uma análise em regime estacionário considerando a dependência das propriedades do material em relação à temperatura. Neste caso, pode-se adotar uma estratégia iterativa que consiste na execução de uma seqüência de análises, onde em cada uma delas são utilizados os parâmetros do material calculados com base no campo de temperatura resultante da análise anterior, até que se atinja a condição de convergência dos mesmos.

2.4.2. Análise Mecânica Elástica Bidimensional

Como mencionado anteriormente, na formulação para análise mecânica, o campo de deslocamentos em cada célula é aproximado por polinômios quadráticos nas coordenadas locais, dados pelas seguintes expressões:

$$u_1 = U_{1(00)} + \bar{x}_1 U_{1(10)} + \bar{x}_2 U_{1(01)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) U_{1(20)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) U_{1(02)} \quad (2.102)$$

$$u_2 = U_{2(00)} + \bar{x}_1 U_{2(10)} + \bar{x}_2 U_{2(01)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_1^2 - \frac{d^2}{4} \right) U_{2(20)} + \frac{1}{2} \left(3\bar{x}_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) U_{2(02)}$$

onde valores $U_{i(\dots)}$ representam os coeficientes do campo de deslocamentos a serem determinados.

Substituindo-se as equações (2.102) em (2.6), obtêm-se as seguintes expressões para as componentes do campo de deformações em termos dos coeficientes do campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_1} = U_{1(10)} + 3\bar{x}_1 U_{1(20)} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_2} = U_{2(01)} + 3\bar{x}_2 U_{2(02)} \\ \gamma_{12} &= 2 \cdot \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}_1} = U_{1(01)} + 3\bar{x}_2 U_{1(02)} + U_{2(10)} + 3\bar{x}_1 U_{2(20)} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Assim, utilizando-se a relação constitutiva (2.11) e as expressões (2.103), as equações de equilíbrio (2.10) podem ser escritas, em função dos coeficientes do campo de deslocamentos, na forma:

$$\begin{aligned} 3C_{11}U_{1(20)} - \Gamma_1 T_{(10)} + 3GU_{1(02)} + b_1 &= 0 \\ 3GU_{2(20)} + 3C_{22}U_{2(02)} - \Gamma_2 T_{(01)} + b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Nas equações de equilíbrio (2.104) foram utilizadas as seguintes aproximações para os gradientes térmicos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_1} &\approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_1} \right\rangle = T_{(10)} \\ \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_2} &\approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial \bar{x}_2} \right\rangle = T_{(01)} \end{aligned} \quad (2.105)$$

As componentes do campo de deslocamentos, dadas pelas equações (2.102), podem ser avaliadas em termos médios nas faces da célula, resultando nas relações abaixo:

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_1=\pm d/2} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_i d\bar{x}_2 = U_{i(00)} \pm \frac{d}{2} U_{i(10)} + \frac{d^2}{4} U_{i(20)} \\ & \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\langle u_i |_{\bar{x}_2=\pm h/2} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} u_i d\bar{x}_1 = U_{i(00)} \pm \frac{h}{2} U_{i(01)} + \frac{h^2}{4} U_{i(02)}$$

Da mesma forma, usando-se as equações (2.11) e (2.103), as componentes do campo de tensões podem ser avaliadas em termos médios nas faces da célula, resultando em:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} |_{\bar{x}_1=\pm d/2} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} d\bar{x}_2 = C_{11} U_{1(10)} \pm \frac{3}{2} C_{11} d U_{1(20)} + C_{12} U_{2(01)} - \Gamma_1 \langle \Delta T |_{\bar{x}_1=\pm d/2} \\ \langle \sigma_{12} |_{\bar{x}_1=\pm d/2} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} d\bar{x}_2 = G U_{1(01)} + G U_{2(10)} \pm \frac{3}{2} G d U_{2(20)} \\ \langle \sigma_{21} |_{\bar{x}_2=\pm h/2} &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{21} d\bar{x}_1 = G U_{1(01)} \pm \frac{3}{2} G h U_{1(02)} + G U_{2(10)} \\ \langle \sigma_{22} |_{\bar{x}_2=\pm h/2} &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{22} d\bar{x}_1 = C_{21} U_{1(10)} + C_{22} U_{2(01)} \pm \frac{3}{2} C_{22} h U_{2(02)} - \Gamma_2 \langle \Delta T |_{\bar{x}_2=\pm h/2} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Além das equações de equilíbrio (2.104), são necessárias outras oito equações para a determinação dos dez coeficientes do campo de deslocamentos em cada célula. Estas equações adicionais são obtidas compatibilizando-se, em termos médios, as componentes dos campos de deslocamentos e de tensões nas faces comuns de células vizinhas. Portanto, usando as equações (2.106) e (2.107), as referidas condições de compatibilidade são as seguintes:

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p+1,q)} &= \langle u_i |_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} \\ \therefore \left[U_{i(00)} - \frac{d}{2} U_{i(10)} + \frac{d^2}{4} U_{i(20)} \right]^{(p+1,q)} &= \left[U_{i(00)} + \frac{d}{2} U_{i(10)} + \frac{d^2}{4} U_{i(20)} \right]^{(p,q)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \langle u_i |_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q+1)} &= \langle u_i |_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} \\ \therefore \left[U_{i(00)} - \frac{h}{2} U_{i(01)} + \frac{h^2}{4} U_{i(02)} \right]^{(p,q+1)} &= \left[U_{i(00)} + \frac{h}{2} U_{i(01)} + \frac{h^2}{4} U_{i(02)} \right]^{(p,q,r)} \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{11} \Big|_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q)} &= \langle \sigma_{11} \Big|_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} \\
\therefore \left[C_{11}U_{1(10)} + \frac{3}{2}C_{11}dU_{1(20)} + C_{12}U_{2(01)} - \Gamma_1 \langle \Delta T \Big|_{\bar{x}_1=d/2} \right]^{(p-1,q)} & \\
= \left[C_{11}U_{1(10)} - \frac{3}{2}C_{11}dU_{1(20)} + C_{12}U_{2(01)} - \Gamma_1 \langle \Delta T \Big|_{\bar{x}_1=-d/2} \right]^{(p,q)} &
\end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{12} \Big|_{\bar{x}_1=d/2}^{(p-1,q)} &= \langle \sigma_{12} \Big|_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} \\
\therefore \left[GU_{1(01)} + GU_{2(10)} + \frac{3}{2}GdU_{2(20)} \right]^{(p-1,q)} & \\
= \left[GU_{1(01)} + GU_{2(10)} - \frac{3}{2}GdU_{2(20)} \right]^{(p,q)} &
\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{21} \Big|_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1)} &= \langle \sigma_{21} \Big|_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} \\
\therefore \left[GU_{1(01)} + \frac{3}{2}GhU_{1(02)} + GU_{2(10)} \right]^{(p,q-1)} & \\
= \left[GU_{1(01)} - \frac{3}{2}GhU_{1(02)} + GU_{2(10)} \right]^{(p,q)} &
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{22} \Big|_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q-1)} &= \langle \sigma_{22} \Big|_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} \\
\therefore \left[C_{12}U_{1(10)} + C_{22}U_{2(01)} + \frac{3}{2}C_{22}hU_{2(02)} - \Gamma_2 \langle \Delta T \Big|_{\bar{x}_2=h/2} \right]^{(p,q-1)} & \\
= \left[C_{12}U_{1(10)} + C_{22}U_{2(01)} - \frac{3}{2}C_{22}hU_{2(02)} - \Gamma_2 \langle \Delta T \Big|_{\bar{x}_2=-h/2} \right]^{(p,q)} &
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Para as células pertencentes ao contorno da estrutura, têm-se as seguintes equações a depender das condições de contorno do problema:

Bordo Esquerdo (BE):

$$\begin{aligned}
\langle u_i \Big|_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} &= u_i^{BE} \\
\langle \sigma_{1i} \Big|_{\bar{x}_1=-d/2}^{(p,q)} &= \sigma_{1i}^{BE}
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Bordo Direito (BD):

$$\begin{aligned}
\langle u_i \Big|_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} &= u_i^{BD} \\
\langle \sigma_{1i} \Big|_{\bar{x}_1=d/2}^{(p,q)} &= \sigma_{1i}^{BD}
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Bordo Inferior (BI):

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} &= u_i^{BI} \\ \langle \sigma_{2i} \rangle_{\bar{x}_2=-h/2}^{(p,q)} &= \sigma_{2i}^{BI} \end{aligned} \quad (2.116)$$

Bordo Superior (BS):

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} &= u_i^{BS} \\ \langle \sigma_{2i} \rangle_{\bar{x}_2=h/2}^{(p,q)} &= \sigma_{2i}^{BS} \end{aligned} \quad (2.117)$$

onde u_i^B e σ_{ji}^B ($j=1$ ou 2) são as componentes do campo de deslocamentos e de tensões, respectivamente, atuantes no bordo.

Assim, tem-se dez coeficientes do campo de deslocamentos a se determinar por célula e dez equações (2.104) e (2.109) a (2.117), podendo-se organizar matricialmente o problema da seguinte forma:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{f} \quad (2.118)$$

onde \mathbf{K} é uma pseudo-matriz de rigidez global da estrutura, contendo informações da geometria e das propriedades mecânicas das células que compõem o modelo estrutural, \mathbf{f} um vetor com as informações das condições de contorno e dos efeitos da variação de temperatura e \mathbf{U} um vetor formado pelos coeficientes do campo de deslocamentos das células, dado por:

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{U}^{(1,1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N_p, N_q)} \right] \quad (2.119)$$

onde:

$$\mathbf{U}^{(p,q)} = \left[U_{i(00)}, U_{i(10)}, U_{i(01)}, U_{i(20)}, U_{i(02)} \right]^{(p,q)} \quad (i = 1,2) \quad (2.120)$$

Os resultados da análise mecânica também podem ser avaliados em termos médios em cada célula, localizando estas informações no centro geométrico da célula. Neste sentido, os deslocamentos, as deformações e as tensões podem ser calculados como segue:

Deslocamentos:

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} u_i d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = U_{i(00)} \quad (2.121)$$

Deformações:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{11} \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon_{11} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = U_{1(10)} \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon_{22} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = U_{2(01)} \\ \langle \gamma_{12} \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \gamma_{12} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = U_{1(01)} + U_{2(10)}\end{aligned}\quad (2.122)$$

Tensões:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{11} \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{11} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = C_{11}U_{1(10)} + C_{12}U_{2(01)} - \Gamma_1 \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{22} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = C_{21}U_{1(10)} + C_{22}U_{2(01)} - \Gamma_2 \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle &= \frac{1}{dh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{12} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = G(U_{1(01)} + U_{2(10)})\end{aligned}\quad (2.123)$$

Também pode ser calculado o valor médio da tensão ou da deformação na direção 3, para o caso de estado plano de deformação ou de tensão, respectivamente, como mostrado nas equações (2.14) e (2.15):

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \nu (\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle) - E\alpha \langle \Delta T \rangle \quad (2.124)$$

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle = -\frac{\nu}{E} (\langle \sigma_{11} \rangle + \langle \sigma_{22} \rangle) + \alpha \langle \Delta T \rangle \quad (2.125)$$

2.5. Formulação Paramétrica Bidimensional da Teoria de Volumes Finitos

A formulação apresentada a seguir se trata de uma contribuição deste trabalho, elaborada para permitir uma maior flexibilidade na geração da malha em relação ao modelo convencional, que usa células com forma necessariamente retangular. Esta nova proposta é bastante adequada para análise de estruturas com contornos irregulares ou curvos. Além disso, a nova formulação proporciona uma considerável redução do tamanho do problema em relação ao número de incógnitas, as quais passam a ser os valores médios dos campos de temperatura ou de deslocamentos nas faces das células e não mais os coeficientes dos polinômios de aproximação dos referidos campos, como feito na formulação convencional. Vale ressaltar que o procedimento utilizado para obter tal redução de incógnitas também foi adotado em Bansal e Pindera (2003).

Como no método dos elementos finitos, a presente formulação exige a geração de uma malha constituída por células quadrilaterais, onde a geometria e a localização de cada célula são definidas pelos quatro nós dos vértices e pelas quatro faces, como mostra a Figura 2.6.

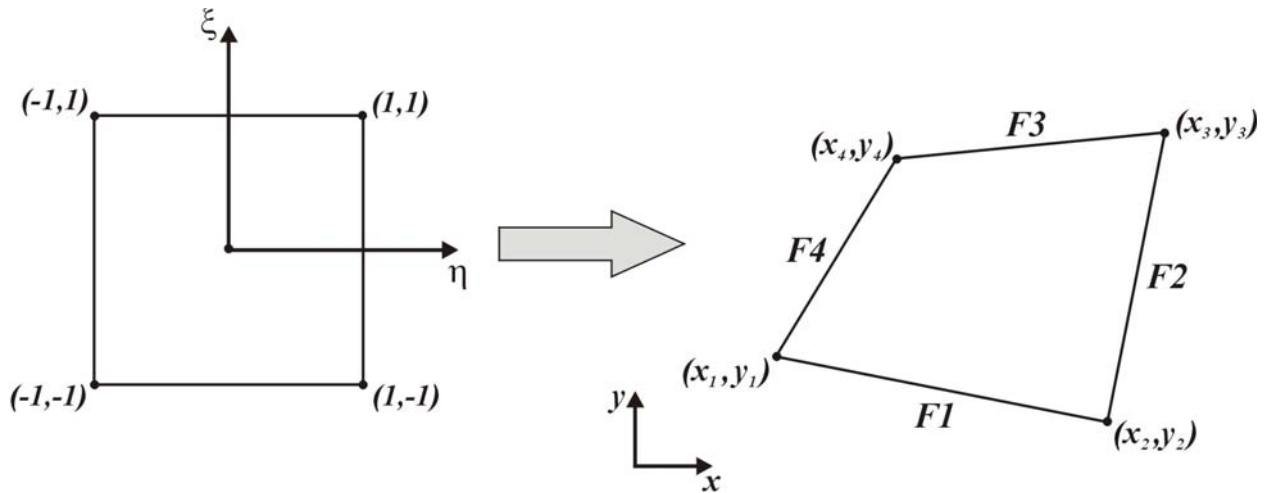


Figura 2.6 – Parametrização da célula.

Na parametrização da geometria da célula são utilizadas as seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned}
 N_1(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi) \\
 N_2(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi) \\
 N_3(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi) \\
 N_4(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1-\eta)(1+\xi)
 \end{aligned}
 \tag{2.126}$$

Deste modo, é possível escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 x(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)x_1 + N_2(\eta, \xi)x_2 + N_3(\eta, \xi)x_3 + N_4(\eta, \xi)x_4 \\
 y(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)y_1 + N_2(\eta, \xi)y_2 + N_3(\eta, \xi)y_3 + N_4(\eta, \xi)y_4
 \end{aligned}
 \tag{2.127}$$

Aplicando-se a regra da cadeia, obtém-se a expressão abaixo para as derivadas de um campo qualquer F em relação às coordenadas paramétricas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \eta} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}\end{aligned}\tag{2.128}$$

As equações (2.128) podem ser representadas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}\tag{2.129}$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana, dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2\xi & A_4 + A_5\xi \\ A_3 + A_2\eta & A_6 + A_5\eta \end{bmatrix}\tag{2.130}$$

sendo:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \\ A_2 &= \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ A_3 &= \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \\ A_4 &= \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \\ A_5 &= \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ A_6 &= \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)\end{aligned}\tag{2.131}$$

Na formulação apresentada a seguir, admite-se um valor constante para a matriz Jacobiana, que pode ser avaliada de forma aproximada para qualquer ponto dentro da célula como segue:

$$\mathbf{J} \approx \langle \mathbf{J} \rangle = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{J} d\eta d\xi = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_6 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Assim, a inversa da matriz Jacobiana pode ser estimada por:

$$\mathbf{J}^{-1} \approx \bar{\mathbf{J}} = \langle \mathbf{J} \rangle^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_6}{A_7} & -\frac{A_4}{A_7} \\ -\frac{A_3}{A_7} & \frac{A_1}{A_7} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

onde:

$$A_7 = A_1 A_6 - A_3 A_4 \quad (2.134)$$

Através da equação (2.129), pode-se escrever a seguinte relação entre as derivadas do campo F :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (2.135)$$

No caso de derivada segunda, têm-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= (\bar{J}_{11})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2\bar{J}_{11}\bar{J}_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + (\bar{J}_{12})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \bar{J}_{11}\bar{J}_{21} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + (\bar{J}_{11}\bar{J}_{22} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{21}) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= (\bar{J}_{21})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2\bar{J}_{21}\bar{J}_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} + (\bar{J}_{22})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (2.136)$$

Nesta formulação, faz-se necessário definir versores normais às faces da célula, como mostra a Figura 2.7.

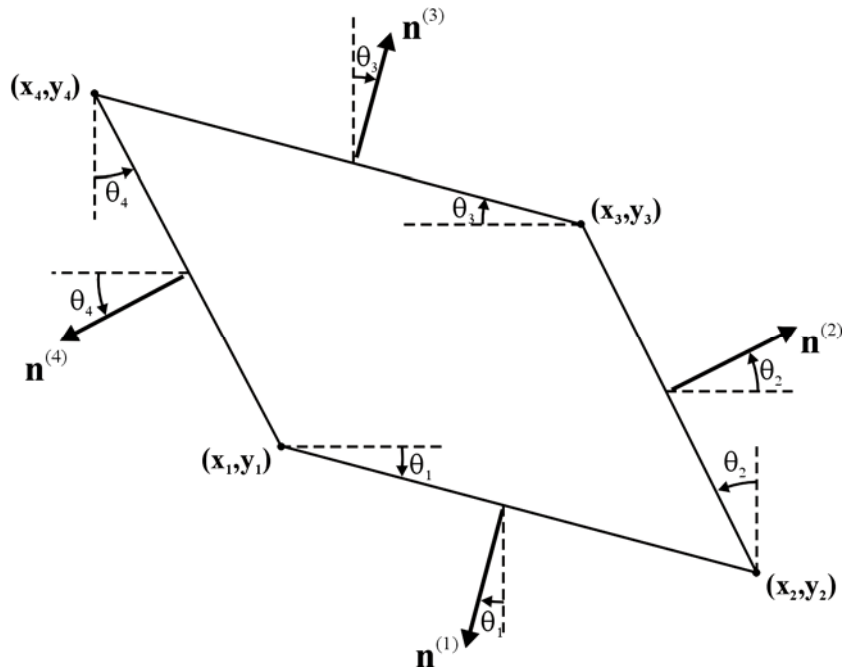


Figura 2.7 – Versores normais às faces da célula.

As componentes destes versores podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}^{(1)} &= n_x^{(1)} \mathbf{i} + n_y^{(1)} \mathbf{j} = -\text{sen}(\theta_1) \mathbf{i} - \text{cos}(\theta_1) \mathbf{j} \\
 \mathbf{n}^{(2)} &= n_x^{(2)} \mathbf{i} + n_y^{(2)} \mathbf{j} = \text{cos}(\theta_2) \mathbf{i} + \text{sen}(\theta_2) \mathbf{j} \\
 \mathbf{n}^{(3)} &= n_x^{(3)} \mathbf{i} + n_y^{(3)} \mathbf{j} = \text{sen}(\theta_3) \mathbf{i} + \text{cos}(\theta_3) \mathbf{j} \\
 \mathbf{n}^{(4)} &= n_x^{(4)} \mathbf{i} + n_y^{(4)} \mathbf{j} = -\text{cos}(\theta_4) \mathbf{i} - \text{sen}(\theta_4) \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

O que resulta nas seguintes relações utilizando as coordenadas dos vértices da célula:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}^{(1)} &= \frac{y_2 - y_1}{L_1} \mathbf{i} + \frac{x_1 - x_2}{L_1} \mathbf{j} \\
 \mathbf{n}^{(2)} &= \frac{y_3 - y_2}{L_2} \mathbf{i} + \frac{x_2 - x_3}{L_2} \mathbf{j} \\
 \mathbf{n}^{(3)} &= \frac{y_4 - y_3}{L_3} \mathbf{i} + \frac{x_3 - x_4}{L_3} \mathbf{j} \\
 \mathbf{n}^{(4)} &= \frac{y_1 - y_4}{L_4} \mathbf{i} + \frac{x_4 - x_1}{L_4} \mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 L_2 &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\
 L_3 &= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \\
 L_4 &= \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.139}$$

2.5.1. Análise Térmica Transiente

As equações básicas para a realização de uma análise térmica bidimensional nas coordenadas globais x e y são:

Equação de balanço de fluxo de calor:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\rho C \frac{\partial T}{\partial t}
 \tag{2.140}$$

sendo q_x e q_y os fluxos de calor nas direções x e y , respectivamente, ρ a densidade do material, C o calor específico e t o tempo.

Lei de Fourier:

$$\begin{aligned}
 q_x &= -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \\
 q_y &= -k_y \frac{\partial T}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.141}$$

onde k_x e k_y são as condutividades térmicas nas direções x e y , respectivamente.

O campo de temperatura nas coordenadas paramétricas η e ξ é admitido como sendo:

$$T = T_{(00)} + \eta T_{(10)} + \xi T_{(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)T_{(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)T_{(02)}
 \tag{2.142}$$

onde valores $T_{(\dots)}$ representam os coeficientes do campo de temperatura a serem determinados.

Os gradientes térmicos em relação às coordenadas paramétricas são expressos por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \eta} &= T_{(10)} + 3\eta T_{(20)} \\
 \frac{\partial T}{\partial \xi} &= T_{(01)} + 3\xi T_{(02)}
 \end{aligned}
 \tag{2.143}$$

Os valores médios destes gradientes nas faces podem ser avaliados da seguinte forma:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial T}{\partial \eta} d\xi = T_{(10)} \pm 3T_{(20)} \quad (2.144)$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial T}{\partial \xi} d\xi = T_{(01)}$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial T}{\partial \eta} d\eta = T_{(10)} \quad (2.145)$$

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial T}{\partial \xi} d\eta = T_{(01)} \pm 3T_{(02)}$$

As equações (2.145) podem ser expressas matricialmente como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{array} \right\} \quad (2.146)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{array} \right\} \quad (2.147)$$

Para o cálculo dos valores médios nas faces dos gradientes térmicos em relação às coordenadas globais x e y , pode-se utilizar a equação (2.135), como mostrado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} = \bar{\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} \quad (2.148)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{array} \right\} = \bar{\mathbf{J}} \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{array} \right\} \quad (2.149)$$

De posse dos gradientes térmicos nas coordenadas globais, podem ser calculados os valores médios nas faces dos fluxos de calor q_x e q_y , utilizando-se as equações (2.141), como mostrado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \langle q_x |_{\eta=\pm 1} \\ \langle q_y |_{\eta=\pm 1} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{Bmatrix} \quad (2.150)$$

$$\begin{Bmatrix} \langle q_x |_{\xi=\pm 1} \\ \langle q_y |_{\xi=\pm 1} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{Bmatrix} \quad (2.151)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} -k_x & 0 \\ 0 & -k_y \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Nas equações abaixo, encontram-se as definições de fluxos de calor médio normais às faces da célula, onde são utilizadas as componentes dos versores expressos nas equações (2.137):

$$\begin{aligned} q_1 &= \begin{Bmatrix} n_x^{(1)} & n_y^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle q_x |_{\xi=-1} \\ \langle q_y |_{\xi=-1} \end{Bmatrix} \\ q_2 &= \begin{Bmatrix} n_x^{(2)} & n_y^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle q_x |_{\eta=+1} \\ \langle q_y |_{\eta=+1} \end{Bmatrix} \\ q_3 &= \begin{Bmatrix} n_x^{(3)} & n_y^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle q_x |_{\xi=+1} \\ \langle q_y |_{\xi=+1} \end{Bmatrix} \\ q_4 &= \begin{Bmatrix} n_x^{(4)} & n_y^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle q_x |_{\eta=-1} \\ \langle q_y |_{\eta=-1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.153)$$

Com base nas equações (2.146) a (2.153), é possível encontrar uma matriz que relacione um vetor com os fluxos de calor médio normais às faces da célula, equações (2.153), com um vetor formado pelos coeficientes do campo de temperatura, equação (2.142), como segue:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{Bmatrix} \quad (2.154)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{DCBA} \quad (2.155)$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} encontram-se no Apêndice A.

As temperaturas médias nas faces da célula podem ser avaliadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{F1} &= \langle T \rangle_{\xi=-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T d\eta = T_{(00)} - T_{(01)} + T_{(02)} \\ T_{F2} &= \langle T \rangle_{\eta=+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T d\xi = T_{(00)} + T_{(10)} + T_{(20)} \\ T_{F3} &= \langle T \rangle_{\xi=+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T d\eta = T_{(00)} + T_{(01)} + T_{(02)} \\ T_{F4} &= \langle T \rangle_{\eta=-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T d\xi = T_{(00)} - T_{(10)} + T_{(20)} \end{aligned} \quad (2.156)$$

As equações (2.156) podem ser expressas matricialmente como mostrado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \\ T_{F3} \\ T_{F4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{(00)} \\ T_{(00)} \\ T_{(00)} \\ T_{(00)} \end{Bmatrix} \quad (2.157)$$

Para a equação (2.157), tem-se a seguinte relação inversa:

$$\begin{Bmatrix} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{F1} - T_{(00)} \\ T_{F2} - T_{(00)} \\ T_{F3} - T_{(00)} \\ T_{F4} - T_{(00)} \end{Bmatrix} \quad (2.158)$$

Com base na equação (2.158), chega-se nas seguintes expressões:

$$T_{(10)} = \frac{1}{2}(T_{F2} - T_{F4}) \quad (2.159)$$

$$T_{(01)} = \frac{1}{2}(T_{F3} - T_{F1}) \quad (2.160)$$

$$T_{(20)} = \frac{1}{2}(T_{F2} + T_{F4}) - T_{(00)} \quad (2.161)$$

$$T_{(02)} = \frac{1}{2}(T_{F1} + T_{F3}) - T_{(00)} \quad (2.162)$$

No que se segue, serão necessárias as equações abaixo, que expressam derivadas segundas do campo de temperatura em relação às coordenadas paramétricas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 3T_{(20)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \quad (2.163)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 3T_{(02)}$$

Nas equações abaixo, tem-se os termos da equação de balanço de fluxo de calor (2.140) em termos dos coeficientes do campo de temperatura, onde foram utilizadas as equações (2.136) e (2.163):

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -k_x \left[3(\bar{J}_{11})^2 T_{(20)} + 3(\bar{J}_{12})^2 T_{(02)} \right] \quad (2.164)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = -k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -k_y \left[3(\bar{J}_{21})^2 T_{(20)} + 3(\bar{J}_{22})^2 T_{(02)} \right]$$

Desta forma, para o caso de uma análise em regime estacionário, tem-se a seguinte equação de balanço de fluxo de calor em termos dos coeficientes do campo de temperatura:

$$-3\left[k_x(\bar{J}_{11})^2 + k_y(\bar{J}_{21})^2\right]T_{(20)} - 3\left[k_x(\bar{J}_{12})^2 + k_y(\bar{J}_{22})^2\right]T_{(02)} = 0 \quad (2.165)$$

Utilizando-se as equações (2.161), (2.162) e (2.165), pode-se chegar na expressão abaixo:

$$T_{(00)} = \lambda(T_{F2} + T_{F4}) + \omega(T_{F1} + T_{F3}) \quad (2.166)$$

onde:

$$\lambda = \frac{k_x(\bar{J}_{11})^2 + k_y(\bar{J}_{21})^2}{2\left\{k_x\left[(\bar{J}_{11})^2 + (\bar{J}_{12})^2\right] + k_y\left[(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{22})^2\right]\right\}} \quad (2.167)$$

$$\omega = \frac{k_x(\bar{J}_{12})^2 + k_y(\bar{J}_{22})^2}{2\left\{k_x\left[(\bar{J}_{11})^2 + (\bar{J}_{12})^2\right] + k_y\left[(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{22})^2\right]\right\}}$$

Assim, com base na equação (2.166), chega-se na seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_{F1} - T_{(00)} \\ T_{F2} - T_{(00)} \\ T_{F3} - T_{(00)} \\ T_{F4} - T_{(00)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & -\lambda & -\omega & -\lambda \\ -\omega & 1 - \lambda & -\omega & -\lambda \\ -\omega & -\lambda & 1 - \omega & -\lambda \\ -\omega & -\lambda & -\omega & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \\ T_{F3} \\ T_{F4} \end{Bmatrix} \quad (2.168)$$

A partir das equações (2.158) e (2.168), chega-se numa matriz que relaciona o vetor formado pelos coeficientes do campo de temperatura, equação (2.142), com o vetor das temperaturas médias nas faces, equações (2.156), como segue:

$$\begin{Bmatrix} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{Bmatrix} = \mathbf{\bar{B}}^{(RE)} \begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \\ T_{F3} \\ T_{F4} \end{Bmatrix} \quad (2.169)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{B}}^{(RE)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -\omega & 1/2 - \lambda & -\omega & 1/2 - \lambda \\ 1/2 - \omega & -\lambda & 1/2 - \omega & -\lambda \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

Para a realização de uma análise em regime transiente, pode-se utilizar uma estratégia incremental no tempo, onde a equação de balanço de fluxo de calor (2.140) passa a ser expressa em termos dos coeficientes do campo de temperatura da seguinte forma:

$$-3[k_x^{k-1}(\bar{J}_{11})^2 + k_y^{k-1}(\bar{J}_{21})^2]T_{(20)}^k - 3[k_x^{k-1}(\bar{J}_{12})^2 + k_y^{k-1}(\bar{J}_{22})^2]T_{(02)}^k = -\frac{\rho^{k-1}C^{k-1}}{\Delta t}(T_{(00)}^k - T_{(00)}^{k-1}) \quad (2.171)$$

onde foi utilizada a mesma aproximação apresentada na equação (2.101).

Utilizando-se as equações (2.161), (2.162) e (2.171), pode-se chegar na relação abaixo:

$$T_{(00)}^k = \beta(T_{F2}^k + T_{F4}^k) + \delta(T_{F1}^k + T_{F3}^k) + \gamma \quad (2.172)$$

onde:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\rho^{k-1}C^{k-1}}{\Delta t} + 3\left\{k_x^{k-1}\left[(\bar{J}_{11})^2 + (\bar{J}_{12})^2\right] + k_y^{k-1}\left[(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{22})^2\right]\right\} \\ \beta &= \frac{3}{2\psi}\left[k_x^{k-1}(\bar{J}_{11})^2 + k_y^{k-1}(\bar{J}_{21})^2\right] \\ \delta &= \frac{3}{2\psi}\left[k_x^{k-1}(\bar{J}_{12})^2 + k_y^{k-1}(\bar{J}_{22})^2\right] \\ \gamma &= \frac{1}{\psi}\frac{\rho^{k-1}C^{k-1}}{\Delta t}T_{(00)}^{k-1} \end{aligned} \quad (2.173)$$

Assim, com base na equação (2.172), chega-se na seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} T_{F1} - T_{(00)} \\ T_{F2} - T_{(00)} \\ T_{F3} - T_{(00)} \\ T_{F4} - T_{(00)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \delta & -\beta & -\delta & -\beta \\ -\delta & 1 - \beta & -\delta & -\beta \\ -\delta & -\beta & 1 - \delta & -\beta \\ -\delta & -\beta & -\delta & 1 - \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \\ T_{F3} \\ T_{F4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.174)$$

A partir das equações (2.158) e (2.174), chega-se na expressão abaixo, que relaciona o vetor formado pelos coeficientes do campo de temperatura, equação (2.142), com o vetor das temperaturas médias nas faces, equações (2.156):

$$\begin{Bmatrix} T_{(10)} \\ T_{(01)} \\ T_{(20)} \\ T_{(02)} \end{Bmatrix} = \overline{\mathbf{B}}^{(RT)} \begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \\ T_{F3} \\ T_{F4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.175)$$

onde:

$$\overline{\mathbf{B}}^{(RT)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -\delta & 1/2 - \beta & -\delta & 1/2 - \beta \\ 1/2 - \delta & -\beta & 1/2 - \delta & -\beta \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

De forma geral, a relação entre o vetor dos fluxos de calor médio normais às faces, equações (2.153), e o vetor das temperaturas médias nas faces, equações (2.156), é dada por:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \overline{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} T_{F1} \\ T_{F2} \\ T_{F3} \\ T_{F4} \end{Bmatrix} - \mathbf{q}^{(0)} \quad (2.177)$$

onde $\overline{\mathbf{k}}$ pode ser interpretada como a matriz de condutividade térmica local e $\mathbf{q}^{(0)}$ como o vetor de fluxo de calor inicial.

A depender do tipo de análise a ser realizada, em regime estacionário ou transiente, a matriz $\overline{\mathbf{k}}$ e o vetor $\mathbf{q}^{(0)}$ são calculados da seguinte forma:

Regime Estacionário:

$$\overline{\mathbf{k}} = \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{B}}^{(RE)}$$

$$\mathbf{q}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.178)$$

Regime Transiente:

$$\bar{\kappa} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}^{(RT)}$$

$$\mathbf{q}^{(0)} = \overline{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.179)$$

A montagem da matriz de condutividade térmica global κ , do vetor que representa o balanço de fluxo de calor interfacial \mathbf{Q} e do vetor de balanço de fluxo de calor inicial $\mathbf{Q}^{(0)}$, é feita com base nas conectividades definidas pelas faces da célula (F1, F2, F3 e F4), como mostrado abaixo:

Matriz de condutividade térmica global:

$$\begin{aligned} \kappa_{F1,F1} &= \kappa_{F1,F1} + \bar{\kappa}_{1,1} \\ \kappa_{F1,F2} &= \kappa_{F1,F2} + \bar{\kappa}_{1,2} \\ &\dots \\ \kappa_{F4,F4} &= \kappa_{F4,F4} + \bar{\kappa}_{4,4} \end{aligned} \quad (2.180)$$

Vetor de balanço de fluxo de calor interfacial:

$$\begin{aligned} Q_{F1} &= Q_{F1} + q_1 \\ Q_{F2} &= Q_{F2} + q_2 \\ Q_{F3} &= Q_{F3} + q_3 \\ Q_{F4} &= Q_{F4} + q_4 \end{aligned} \quad (2.181)$$

Vetor de balanço de fluxo de calor inicial:

$$\begin{aligned} Q_{F1}^{(0)} &= Q_{F1}^{(0)} + q_1^{(0)} \\ Q_{F2}^{(0)} &= Q_{F2}^{(0)} + q_2^{(0)} \\ Q_{F3}^{(0)} &= Q_{F3}^{(0)} + q_3^{(0)} \\ Q_{F4}^{(0)} &= Q_{F4}^{(0)} + q_4^{(0)} \end{aligned} \quad (2.182)$$

Para as faces que não pertencem ao contorno da estrutura, devido à compatibilidade interfacial do fluxo de calor, segue que:

$$Q_F = 0 \quad (2.183)$$

No caso das faces que pertencem ao contorno, têm-se as seguintes equações, a depender das condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned} Q_F &= q_B \\ T_F &= T_B \\ Q_F &= h_B \cdot (T_F - T_\infty^B) \end{aligned} \quad (2.184)$$

onde q_B e T_B são o fluxo de calor e a temperatura do bordo, respectivamente, e h_B e T_∞^B são o coeficiente de convecção térmica e a temperatura do meio envolvente, nesta ordem.

No final, obtêm-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{T} - \mathbf{Q}^{(0)} \quad (2.185)$$

onde \mathbf{T} é um vetor formado pelas temperaturas médias nas faces das células que compõem o modelo estrutural.

Este sistema pode ser resolvido de duas formas, a depender de como são definidas as condições de contorno do problema: em termos de temperatura na face (caso 1), ou em termos de temperatura do meio envolvente (caso 2).

Para os dois casos, o sistema pode ser organizado como segue:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_* \\ \mathbf{Q}_\bullet \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_{**} & \boldsymbol{\kappa}_{*\bullet} \\ \boldsymbol{\kappa}_{*\bullet} & \boldsymbol{\kappa}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_* \\ \mathbf{T}_\bullet \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_*^{(0)} \\ \mathbf{Q}_\bullet^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.186)$$

(*) fluxo de calor prescrito; (•) temperatura prescrita.

Caso 1:

$$\mathbf{T}_* = \boldsymbol{\kappa}_{**}^{-1} (\mathbf{Q}_* - \boldsymbol{\kappa}_{*\bullet} \mathbf{T}_\bullet + \mathbf{Q}_*^{(0)}) \quad (2.187)$$

Caso 2:

$$\mathbf{T}_* = \frac{\mathbf{Q}_* - \boldsymbol{\kappa}_{*\bullet} (\mathbf{H} - \boldsymbol{\kappa}_{\bullet\bullet})^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{T}_\bullet^\infty - \mathbf{Q}_\bullet^{(0)}) + \mathbf{Q}_*^{(0)}}{\boldsymbol{\kappa}_{**} + \boldsymbol{\kappa}_{*\bullet} (\mathbf{H} - \boldsymbol{\kappa}_{\bullet\bullet})^{-1} \boldsymbol{\kappa}_{*\bullet}} \quad (2.188)$$

$$\mathbf{T}_\bullet = (\mathbf{H} - \boldsymbol{\kappa}_{\bullet\bullet})^{-1} (\boldsymbol{\kappa}_{*\bullet} \mathbf{T}_* + \mathbf{H} \mathbf{T}_\bullet^\infty - \mathbf{Q}_\bullet^{(0)})$$

onde \mathbf{H} é uma matriz diagonal formada pelos coeficientes de convecção térmica dos vários bordos com a temperatura do meio envolvente prescrita ($h_{B1}, h_{B2}, \dots, h_{BN}$), como mostrado a seguir:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{B1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{B2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{BN} \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

Calculadas as temperaturas médias nas faces, pode-se obter os coeficientes do campo de temperatura utilizando-se as equações (2.159) a (2.162) e (2.166) ou (2.172).

Como nas formulações apresentadas anteriormente, pode-se avaliar a temperatura e os fluxos de calor em termos médios em cada célula, localizando estas informações no centro geométrico da célula. O cálculo dos valores médios de tais grandezas, em termos dos coeficientes do campo de temperatura, encontra-se logo abaixo:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T d\eta d\xi = T_{(00)} \\ \langle q_x \rangle &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q_x d\eta d\xi = -k_x (\bar{J}_{11} T_{(10)} + \bar{J}_{12} T_{(01)}) \\ \langle q_y \rangle &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q_y d\eta d\xi = -k_y (\bar{J}_{21} T_{(10)} + \bar{J}_{22} T_{(01)}) \end{aligned} \quad (2.190)$$

2.5.2. Análise Mecânica Elástica

As equações básicas para a realização de uma análise mecânica bidimensional nas coordenadas globais x e y são as seguintes:

Equações Diferenciais de Equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.191)$$

onde b_x e b_y são as forças de corpo nas direções x e y , respectivamente.

Relações Deformações-Deslocamentos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.192}$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções x e y , respectivamente.

Relação constitutiva para materiais isotropos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Gamma \Delta T \\ \Gamma \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{2.193}$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material. A variação de temperatura é definida por $\Delta T = T - T_{ref}$, sendo T_{ref} uma temperatura de referência.

Para o caso de estado plano de deformação, têm-se as seguintes expressões para as componentes da matriz constitutiva e para Γ :

$$\begin{aligned}C_{xx} = C_{yy} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{xy} = C_{yx} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \Gamma &= (C_{xx} + C_{xy})(1+\nu)\alpha = (C_{yx} + C_{yy})(1+\nu)\alpha\end{aligned}\tag{2.194}$$

Para o caso de estado plano de tensão, as componentes da matriz constitutiva e Γ podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}C_{xx} = C_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ C_{xy} = C_{yx} &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \\ \Gamma &= (C_{xx} + C_{xy})\alpha = (C_{yx} + C_{yy})\alpha\end{aligned}\tag{2.195}$$

Também pode ser calculada a tensão ou a deformação na direção z , para o caso de estado plano de deformação ou de tensão, respectivamente, como mostrado nas expressões abaixo:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E\alpha\Delta T \quad (2.196)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha\Delta T \quad (2.197)$$

O campo de deslocamentos nas coordenadas paramétricas η e ξ é admitido como sendo:

$$\begin{aligned} u &= U_{1(00)} + \eta U_{1(10)} + \xi U_{1(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)U_{1(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)U_{1(02)} \\ v &= U_{2(00)} + \eta U_{2(10)} + \xi U_{2(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)U_{2(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)U_{2(02)} \end{aligned} \quad (2.198)$$

onde valores $U_{i(\dots)}$ representam os coeficientes do campo de deslocamentos a serem determinados.

As derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas paramétricas resultam nas seguintes expressões:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = U_{1(10)} + 3\eta U_{1(20)} \quad (2.199)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = U_{1(01)} + 3\xi U_{1(02)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = U_{2(10)} + 3\eta U_{2(20)} \quad (2.200)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = U_{2(01)} + 3\xi U_{2(02)}$$

Os valores médios destas derivadas nas faces podem ser avaliados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi = U_{1(10)} \pm 3U_{1(20)} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = U_{1(01)} \end{aligned} \quad (2.201)$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = U_{1(10)} \quad (2.202)$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta = U_{1(01)} \pm 3U_{1(02)}$$

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial v}{\partial \eta} d\xi = U_{2(10)} \pm 3U_{2(20)} \quad (2.203)$$

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi = U_{2(01)}$$

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta = U_{2(10)} \quad (2.204)$$

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial v}{\partial \xi} d\eta = U_{2(01)} \pm 3U_{2(02)}$$

As equações (2.201) a (2.204) podem ser expressas matricialmente como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (2.205)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (2.206)$$

Para o cálculo dos valores médios nas faces das derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas globais x e y , pode-se utilizar a equação (2.135), como mostrado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} \quad (2.207)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle_{\xi=\pm 1} \end{array} \right\} \quad (2.208)$$

onde $\mathbf{0}$ representa uma matriz composta por zeros.

Com as derivadas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas globais, pode-se calcular as deformações médias nas faces, com base nas equações (2.192), como mostrado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \varepsilon_{xx} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \varepsilon_{yy} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \gamma_{xy} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} = \bar{\mathbf{E}} \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \\ \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_{\eta=\pm 1} \end{array} \right\} \quad (2.209)$$

$$\begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \gamma_{xy} \rangle_{\xi=\pm 1} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{E}} \begin{Bmatrix} \langle \frac{\partial u}{\partial x} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \frac{\partial u}{\partial y} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \frac{\partial v}{\partial x} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \frac{\partial v}{\partial y} \rangle_{\xi=\pm 1} \end{Bmatrix} \quad (2.210)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

De posse das deformações, pode-se calcular os valores das tensões médias nas faces, utilizando-se a relação constitutiva (2.193), como segue:

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_{xx} \rangle_{\eta=\pm 1} \\ \langle \sigma_{yy} \rangle_{\eta=\pm 1} \\ \langle \sigma_{xy} \rangle_{\eta=\pm 1} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\eta=\pm 1} \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle_{\eta=\pm 1} \\ \langle \gamma_{xy} \rangle_{\eta=\pm 1} \end{Bmatrix} - \Gamma \begin{Bmatrix} \langle \Delta T \rangle_{\eta=\pm 1} \\ \langle \Delta T \rangle_{\eta=\pm 1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.212)$$

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_{xx} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \sigma_{yy} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \sigma_{xy} \rangle_{\xi=\pm 1} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_{xx} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \gamma_{xy} \rangle_{\xi=\pm 1} \end{Bmatrix} - \Gamma \begin{Bmatrix} \langle \Delta T \rangle_{\xi=\pm 1} \\ \langle \Delta T \rangle_{\xi=\pm 1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.213)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

A Figura 2.8 mostra os vetores de tração média atuantes nas faces da célula, que serão calculados com base na conhecida fórmula de *Cauchy*, dada abaixo:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (2.215)$$

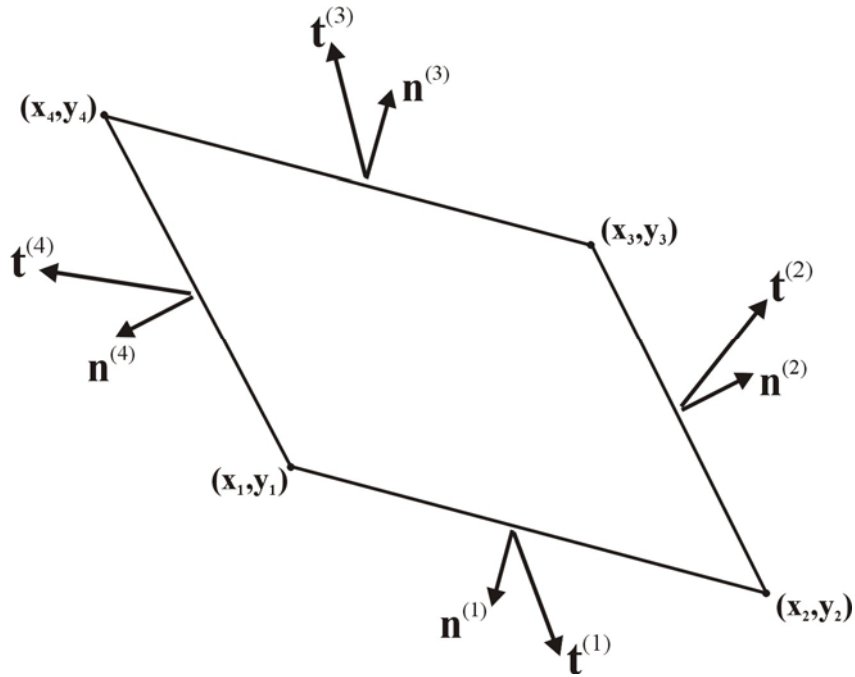


Figura 2.8 – Vetores de tração média atuantes nas faces da célula.

Assim, têm-se as seguintes expressões para as componentes dos vetores de tração média atuantes nas faces da célula, onde são utilizados os versores normais as faces, equações (2.137):

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(1)} \\ t_y^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} & 0 & n_y^{(1)} \\ 0 & n_y^{(1)} & n_x^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{xx} |_{\xi=-1} \rangle \\ \langle \sigma_{yy} |_{\xi=-1} \rangle \\ \langle \sigma_{xy} |_{\xi=-1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (2.216)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(2)} \\ t_y^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^{(2)} & 0 & n_y^{(2)} \\ 0 & n_y^{(2)} & n_x^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{xx} |_{\eta=+1} \rangle \\ \langle \sigma_{yy} |_{\eta=+1} \rangle \\ \langle \sigma_{xy} |_{\eta=+1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (2.217)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(3)} \\ t_y^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^{(3)} & 0 & n_y^{(3)} \\ 0 & n_y^{(3)} & n_x^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{xx} |_{\xi=+1} \rangle \\ \langle \sigma_{yy} |_{\xi=+1} \rangle \\ \langle \sigma_{xy} |_{\xi=+1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (2.218)$$

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(4)} \\ t_y^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^{(4)} & 0 & n_y^{(4)} \\ 0 & n_y^{(4)} & n_x^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{xx} |_{\eta=-1} \rangle \\ \langle \sigma_{yy} |_{\eta=-1} \rangle \\ \langle \sigma_{xy} |_{\eta=-1} \rangle \end{Bmatrix} \quad (2.219)$$

Com base nas equações (2.205) a (2.219), é possível encontrar uma equação que relacione um vetor com as componentes dos vetores de tração média atuantes nas faces da célula, equações (2.216) a (2.219), com o vetor formado pelos coeficientes do campo de deslocamentos, equações (2.198), como segue:

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(1)} \\ t_y^{(1)} \\ t_x^{(2)} \\ t_y^{(2)} \\ t_x^{(3)} \\ t_y^{(3)} \\ t_x^{(4)} \\ t_y^{(4)} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{Bmatrix} - \Gamma \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{T} \quad (2.220)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{DCEBA} \quad (2.221)$$

As matrizes **A**, **B**, **C**, **D** e **E** encontram-se no Apêndice B.

O vetor de variação média de temperatura nas faces é definido da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{T} = \{ \Delta T_{F1} \quad \Delta T_{F1} \quad 0 \quad \Delta T_{F2} \quad \Delta T_{F2} \quad 0 \quad \Delta T_{F3} \quad \Delta T_{F3} \quad 0 \quad \Delta T_{F4} \quad \Delta T_{F4} \quad 0 \}^T \quad (2.222)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta T_{F1} &= \langle \Delta T \rangle_{\xi=-1} \\ \Delta T_{F2} &= \langle \Delta T \rangle_{\eta=+1} \\ \Delta T_{F3} &= \langle \Delta T \rangle_{\xi=+1} \\ \Delta T_{F4} &= \langle \Delta T \rangle_{\eta=-1} \end{aligned} \quad (2.223)$$

Os deslocamentos podem ser avaliados em termos médios nas faces da célula como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} u_{F1} &= \langle u \rangle_{\xi=-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u d\eta = U_{1(00)} - U_{1(01)} + U_{1(02)} \\ u_{F2} &= \langle u \rangle_{\eta=+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u d\xi = U_{1(00)} + U_{1(10)} + U_{1(20)} \end{aligned} \quad (2.224)$$

$$u_{F3} = \langle u \rangle_{\xi=+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u d\eta = U_{1(00)} + U_{1(01)} + U_{1(02)}$$

$$u_{F4} = \langle u \rangle_{\eta=-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u d\xi = U_{1(00)} - U_{1(10)} + U_{1(20)}$$

$$v_{F1} = \langle v \rangle_{\xi=-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v d\eta = U_{2(00)} - U_{2(01)} + U_{2(02)}$$

$$v_{F2} = \langle v \rangle_{\eta=+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v d\xi = U_{2(00)} + U_{2(10)} + U_{2(20)}$$

(2.225)

$$v_{F3} = \langle v \rangle_{\xi=+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v d\eta = U_{2(00)} + U_{2(01)} + U_{2(02)}$$

$$v_{F4} = \langle v \rangle_{\eta=-1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v d\xi = U_{2(00)} - U_{2(10)} + U_{2(20)}$$

As equações (2.224) e (2.225) podem ser expressas matricialmente como mostrado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u_{F1} \\ u_{F2} \\ u_{F3} \\ u_{F4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{1(00)} \\ U_{1(00)} \\ U_{1(00)} \\ U_{1(00)} \end{Bmatrix} \quad (2.226)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{F1} \\ v_{F2} \\ v_{F3} \\ v_{F4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{2(00)} \\ U_{2(00)} \\ U_{2(00)} \\ U_{2(00)} \end{Bmatrix} \quad (2.227)$$

Para as equações (2.226) e (2.227) tem-se as seguintes relações inversas:

$$\begin{Bmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{F1} - U_{1(00)} \\ u_{F2} - U_{1(00)} \\ u_{F3} - U_{1(00)} \\ u_{F4} - U_{1(00)} \end{Bmatrix} \quad (2.228)$$

$$\begin{Bmatrix} U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{F1} - U_{2(00)} \\ v_{F2} - U_{2(00)} \\ v_{F3} - U_{2(00)} \\ v_{F4} - U_{2(00)} \end{Bmatrix} \quad (2.229)$$

Com base nas equações (2.228) e (2.229), chega-se nas expressões abaixo:

$$U_{1(10)} = \frac{1}{2}(u_{F2} - u_{F4}) \quad (2.230)$$

$$U_{1(01)} = \frac{1}{2}(u_{F3} - u_{F1}) \quad (2.231)$$

$$U_{1(20)} = \frac{1}{2}(u_{F2} + u_{F4}) - U_{1(00)} \quad (2.232)$$

$$U_{1(02)} = \frac{1}{2}(u_{F1} + u_{F3}) - U_{1(00)} \quad (2.233)$$

$$U_{2(10)} = \frac{1}{2}(v_{F2} - v_{F4}) \quad (2.234)$$

$$U_{2(01)} = \frac{1}{2}(v_{F3} - v_{F1}) \quad (2.235)$$

$$U_{2(20)} = \frac{1}{2}(v_{F2} + v_{F4}) - U_{2(00)} \quad (2.236)$$

$$U_{2(02)} = \frac{1}{2}(v_{F1} + v_{F3}) - U_{2(00)} \quad (2.237)$$

No que se segue, serão necessárias as relações abaixo, que expressam derivadas segundas do campo de deslocamentos em relação às coordenadas paramétricas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 3U_{1(20)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \quad (2.238)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 3U_{1(02)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 3U_{2(20)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \quad (2.239)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 3U_{2(02)}$$

Nas equações abaixo, tem-se os termos das equações diferenciais de equilíbrio (2.191) em função dos coeficientes do campo de deslocamentos, onde foram utilizadas as equações (2.136), (2.192), (2.193), (2.238) e (2.239):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= C_{xx} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + C_{xy} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= 3C_{xx} \left[(\bar{J}_{11})^2 U_{1(20)} + (\bar{J}_{12})^2 U_{1(02)} \right] + 3C_{xy} (\bar{J}_{11} \bar{J}_{21} U_{2(20)} + \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} U_{2(02)}) - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \\ &= 3G \left[(\bar{J}_{21})^2 U_{1(20)} + (\bar{J}_{22})^2 U_{1(02)} + \bar{J}_{11} \bar{J}_{21} U_{2(20)} + \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} U_{2(02)} \right] \end{aligned} \quad (2.240)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} &= G \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \\ &= 3G \left[\bar{J}_{11} \bar{J}_{21} U_{1(20)} + \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} U_{1(02)} + (\bar{J}_{11})^2 U_{2(20)} + (\bar{J}_{12})^2 U_{2(02)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= C_{yx} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + C_{yy} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= 3C_{yx} (\bar{J}_{11} \bar{J}_{21} U_{1(20)} + \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} U_{1(02)}) + 3C_{yy} \left[(\bar{J}_{21})^2 U_{2(20)} + (\bar{J}_{22})^2 U_{2(02)} \right] - \Gamma \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

Desta forma, chega-se nas seguintes equações de equilíbrio em termos dos coeficientes do campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} & \left[C_{xx} (\bar{J}_{11})^2 + G (\bar{J}_{21})^2 \right] U_{1(20)} + \left[C_{xx} (\bar{J}_{12})^2 + G (\bar{J}_{22})^2 \right] U_{1(02)} + (C_{xy} + G) \bar{J}_{11} \bar{J}_{21} U_{2(20)} \\ & + (C_{xy} + G) \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} U_{2(02)} = \frac{\Gamma (\bar{J}_{11} T_{(10)} + \bar{J}_{12} T_{(01)}) - b_x}{3} \\ & (C_{yx} + G) \bar{J}_{11} \bar{J}_{21} U_{1(20)} + (C_{yx} + G) \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} U_{1(02)} + \left[C_{yy} (\bar{J}_{21})^2 + G (\bar{J}_{11})^2 \right] U_{2(20)} \\ & + \left[C_{yy} (\bar{J}_{22})^2 + G (\bar{J}_{12})^2 \right] U_{2(02)} = \frac{\Gamma (\bar{J}_{21} T_{(10)} + \bar{J}_{22} T_{(01)}) - b_y}{3} \end{aligned} \quad (2.241)$$

Nas equações de equilíbrio (2.241) foram utilizadas as seguintes aproximações:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle = \bar{J}_{11} T_{(10)} + \bar{J}_{12} T_{(01)} \quad (2.242)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \left\langle \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle = \bar{J}_{21} T_{(10)} + \bar{J}_{22} T_{(01)}$$

Utilizando as equações (2.232), (2.233), (2.236), (2.237) e (2.241) pode-se chegar na relação abaixo:

$$\begin{Bmatrix} U_{1(00)} \\ U_{2(00)} \end{Bmatrix} = \Phi^{-1} \Theta \begin{Bmatrix} u_{F2} + u_{F4} \\ u_{F1} + u_{F3} \\ v_{F2} + v_{F4} \\ v_{F1} + v_{F3} \end{Bmatrix} + \Phi^{-1} \Omega \quad (2.243)$$

sendo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} C_{xx} [(\bar{J}_{11})^2 + (\bar{J}_{12})^2] + G [(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{22})^2] & (C_{xy} + G) [\bar{J}_{11} \bar{J}_{21} + \bar{J}_{12} \bar{J}_{22}] \\ (C_{yx} + G) [\bar{J}_{11} \bar{J}_{21} + \bar{J}_{12} \bar{J}_{22}] & C_{yy} [(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{22})^2] + G [(\bar{J}_{11})^2 + (\bar{J}_{12})^2] \end{bmatrix}$$

$$\Theta^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_{xx} (\bar{J}_{11})^2 + G (\bar{J}_{21})^2 & (C_{yx} + G) \bar{J}_{11} \bar{J}_{21} \\ C_{xx} (\bar{J}_{12})^2 + G (\bar{J}_{22})^2 & (C_{yx} + G) \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} \\ (C_{xy} + G) \bar{J}_{11} \bar{J}_{21} & C_{yy} (\bar{J}_{21})^2 + G (\bar{J}_{11})^2 \\ (C_{xy} + G) \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} & C_{yy} (\bar{J}_{22})^2 + G (\bar{J}_{12})^2 \end{bmatrix} \quad (2.244)$$

$$\Omega = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} b_x - \Gamma (\bar{J}_{11} T_{(10)} + \bar{J}_{12} T_{(01)}) \\ b_y - \Gamma (\bar{J}_{21} T_{(10)} + \bar{J}_{22} T_{(01)}) \end{Bmatrix}$$

A partir das equações (2.228), (2.229) e (2.243), pode-se chegar na seguinte relação entre o vetor formado pelos coeficientes do campo de deslocamentos, equações (2.198), com o vetor das componentes dos deslocamentos médios nas faces, equações (2.224) e (2.225):

$$\begin{Bmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} u_{F1} \\ v_{F1} \\ u_{F2} \\ v_{F2} \\ u_{F3} \\ v_{F3} \\ u_{F4} \\ v_{F4} \end{Bmatrix} - \mathbf{N} \Phi^{-1} \Omega \quad (2.245)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P} - \mathbf{N}\Phi^{-1}\Theta\mathbf{M} \quad (2.246)$$

As matrizes \mathbf{P} , \mathbf{M} e \mathbf{N} encontram-se no Apêndice B.

Assim, a relação entre o vetor com as componentes dos vetores de tração média atuantes nas faces da célula, equações (2.216) a (2.219), com o vetor das componentes dos deslocamentos médios nas faces, equações (2.224) e (2.225), é dada por:

$$\begin{Bmatrix} t_x^{(1)} \\ t_y^{(1)} \\ t_x^{(2)} \\ t_y^{(2)} \\ t_x^{(3)} \\ t_y^{(3)} \\ t_x^{(4)} \\ t_y^{(4)} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_{F1} \\ v_{F1} \\ u_{F2} \\ v_{F2} \\ u_{F3} \\ v_{F3} \\ u_{F4} \\ v_{F4} \end{Bmatrix} - \mathbf{t}^{(0)} \quad (2.247)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}$ pode ser interpretada como a matriz de rigidez local e $\mathbf{t}^{(0)}$ como o vetor de trações médias iniciais atuantes nas faces, sendo calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{t}^{(0)} &= \Gamma\mathbf{D} \cdot \Delta\mathbf{T} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{N}\Phi^{-1}\Omega \end{aligned} \quad (2.248)$$

A montagem da matriz de rigidez global \mathbf{K} , do vetor que representa o equilíbrio das trações médias atuantes nas faces \mathbf{f} e do vetor de equilíbrio das trações médias iniciais $\mathbf{f}^{(0)}$, é feita com base nos oito graus de liberdade relacionados às faces da célula (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 e G8), como mostrado abaixo:

Matriz de rigidez global:

$$\begin{aligned} K_{G1,G1} &= K_{G1,G1} + \bar{K}_{1,1} \\ K_{G1,G2} &= K_{G1,G2} + \bar{K}_{1,2} \\ &\dots \\ K_{G8,G8} &= K_{G8,G8} + \bar{K}_{8,8} \end{aligned} \quad (2.249)$$

Vetor de equilíbrio das trações médias atuantes nas faces:

$$\begin{aligned}
 f_{G1} &= f_{G1} + t_x^{(1)} \\
 f_{G2} &= f_{G2} + t_y^{(1)} \\
 f_{G3} &= f_{G3} + t_x^{(2)} \\
 f_{G4} &= f_{G4} + t_y^{(2)} \\
 &\dots \\
 f_{G8} &= f_{G8} + t_y^{(4)}
 \end{aligned}
 \tag{ 2.250 }$$

Vetor de equilíbrio das trações médias iniciais:

$$\begin{aligned}
 f_{G1}^{(0)} &= f_{G1}^{(0)} + t_1^{(0)} \\
 f_{G2}^{(0)} &= f_{G2}^{(0)} + t_2^{(0)} \\
 &\dots \\
 f_{G8}^{(0)} &= f_{G8}^{(0)} + t_8^{(0)}
 \end{aligned}
 \tag{ 2.251 }$$

Para as faces que não pertencem ao contorno da estrutura, devido à compatibilidade estática interfacial, segue que:

$$f_G = 0 \tag{ 2.252 }$$

No caso das faces que pertencem ao contorno, têm-se as seguintes equações, a depender das condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned}
 f_G &= t_x^B \text{ ou } U_G = u_B \\
 f_G &= t_y^B \text{ ou } U_G = v_B
 \end{aligned}
 \tag{ 2.253 }$$

onde t_x^B e t_y^B são as componentes do vetor de tração média atuante no bordo, u_B e v_B representam as componentes prescritas do deslocamento médio do bordo.

No final, obtêm-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{f} = \mathbf{KU} - \mathbf{f}^{(0)} \tag{ 2.254 }$$

onde \mathbf{U} é um vetor formado pelas componentes dos deslocamentos médios nas faces das células que compõem o modelo estrutural.

O sistema (2.254) pode ser organizado e resolvido como segue:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_* \\ \mathbf{f}_\bullet \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{**} & \mathbf{K}_{*\bullet} \\ \mathbf{K}_{\bullet*} & \mathbf{K}_{\bullet\bullet} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_* \\ \mathbf{U}_\bullet \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_*^{(0)} \\ \mathbf{f}_\bullet^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.255)$$

(*) tração prescrita; (•) deslocamento prescrita.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_* &= \mathbf{K}_{**}^{-1} (\mathbf{f}_* - \mathbf{K}_{*\bullet} \mathbf{U}_\bullet + \mathbf{f}_*^{(0)}) \\ \mathbf{f}_\bullet &= \mathbf{K}_{\bullet*} \mathbf{U}_* + \mathbf{K}_{\bullet\bullet} \mathbf{U}_\bullet - \mathbf{f}_\bullet^{(0)} \end{aligned} \quad (2.256)$$

Calculados os deslocamentos médios nas faces, pode-se obter os coeficientes do campo de deslocamentos utilizando-se as equações (2.230) a (2.237) e (2.243).

Como nas formulações apresentadas anteriormente, pode-se avaliar os deslocamentos, as deformações e as tensões em termos médios na célula, localizando estas informações no centro geométrico da mesma. O cálculo dos valores médios de tais grandezas encontra-se logo abaixo:

Deslocamentos:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u d\eta d\xi = U_{1(00)} \\ \langle v \rangle &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 v d\eta d\xi = U_{2(00)} \end{aligned} \quad (2.257)$$

Deformações:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{xx} \rangle &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle = \bar{J}_{11} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle + \bar{J}_{12} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle = \bar{J}_{11} U_{1(10)} + \bar{J}_{12} U_{1(01)} \\ \langle \varepsilon_{yy} \rangle &= \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle = \bar{J}_{21} \left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle + \bar{J}_{22} \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle = \bar{J}_{21} U_{2(10)} + \bar{J}_{22} U_{2(01)} \\ \langle \gamma_{xy} \rangle &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle = \bar{J}_{21} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle + \bar{J}_{22} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\rangle + \bar{J}_{11} \left\langle \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\rangle + \bar{J}_{12} \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle \\ &= \bar{J}_{21} U_{1(10)} + \bar{J}_{22} U_{1(01)} + \bar{J}_{11} U_{2(10)} + \bar{J}_{12} U_{2(01)} \end{aligned} \quad (2.258)$$

Tensões:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{xx} \rangle &= C_{xx} \langle \varepsilon_{xx} \rangle + C_{xy} \langle \varepsilon_{yy} \rangle - \Gamma \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{yy} \rangle &= C_{yx} \langle \varepsilon_{xx} \rangle + C_{yy} \langle \varepsilon_{yy} \rangle - \Gamma \langle \Delta T \rangle \\ \langle \sigma_{xy} \rangle &= G \langle \gamma_{xy} \rangle \end{aligned} \quad (2.259)$$

Também pode ser calculada a tensão ou a deformação na direção z , para o caso de estado plano de deformação ou de tensão, respectivamente, como mostrado nas equações (2.196) e (2.197):

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = \nu (\langle \sigma_{xx} \rangle + \langle \sigma_{yy} \rangle) - E\alpha \langle \Delta T \rangle \quad (2.260)$$

$$\langle \varepsilon_{zz} \rangle = -\frac{\nu}{E} (\langle \sigma_{xx} \rangle + \langle \sigma_{yy} \rangle) + \alpha \langle \Delta T \rangle \quad (2.261)$$

Capítulo 3

Avaliação de Propriedades Efetivas de Materiais Compósitos

3.1. Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta um estudo comparativo de resultados de avaliações das propriedades efetivas de materiais compósitos avançados com diferentes características físicas e geométricas das fases constituintes, obtidos através de diversos modelos da Micromecânica e de simulações numéricas de experimentos. Nas simulações numéricas de experimentos foram utilizados o método dos elementos finitos e a formulação tridimensional da teoria de volumes finitos.

3.2. Modelos Micromecânicos

3.2.1. Modelos Simplificados para Estimativa das Propriedades Mecânicas de Materiais Compósitos Reforçados por Fibras

Dentro desta classe de modelos simplificados, o presente estudo utiliza a tradicional Regra de Mistura e a Regra de Mistura Modificada (Jones, 1999), as quais são aplicadas para determinação de propriedades elásticas efetivas de materiais compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais (Figura 3.1).

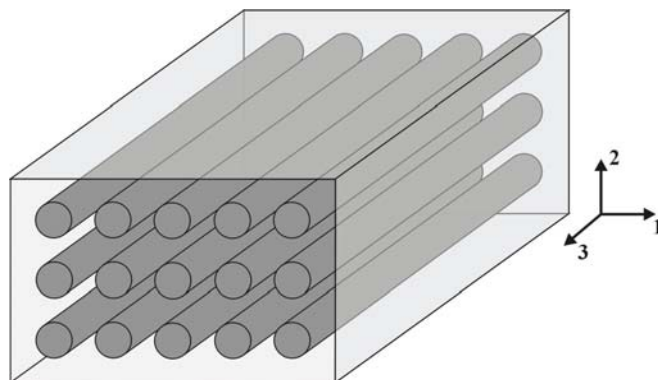


Figura 3.1 – Compósito reforçado por fibras unidirecionais.

Regra de Mistura (RM). Através deste modelo, as expressões das propriedades elásticas efetivas de um compósito reforçado por fibras unidirecionais são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 E_1 = E_2 &= \frac{E_f E_M}{f_M E_f + f_f E_M} \\
 E_3 &= f_f E_f + f_M E_M \\
 \nu_{31} = \nu_{32} &= f_M \nu_M + f_f \nu_f \\
 G_{13} = G_{23} &= \frac{G_f G_M}{f_M G_f + f_f G_M}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo E_f , G_f , ν_f e f_f os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, o coeficiente de Poisson e a fração volumétrica das fibras, respectivamente. As grandezas E_M , G_M , ν_M e f_M correspondem a tais propriedades referentes ao material da matriz.

Regra de Mistura Modificada (RMM). Este modelo leva em conta a maior rigidez do material da fibra em relação ao material da matriz na avaliação dos módulos de elasticidade longitudinal efetivos nas direções 1 e 2, os quais são expressos por:

$$E_1 = E_2 = \frac{E_f E'_M}{f_M E_f + f_f E'_M} \tag{3.2}$$

onde $E'_M = \frac{E_M}{1 - \nu_M^2}$.

3.2.2. Modelos Baseados na Teoria Micromecânica de Campos Médios

Nas últimas décadas, vários modelos para estimativa das propriedades mecânicas de materiais compósitos, fundamentados na teoria micromecânica de campos médios, vêm sendo propostos (Nemat-Nasser e Hori, 1999). A maioria deles baseia-se no problema de Eshelby (1957) que trata de uma inclusão elipsoidal imersa em um meio infinito. A diferença básica destes modelos consiste na forma de considerar as interações entre as inclusões, que passa a afetar o problema real quando a fração volumétrica de inclusões ultrapassa o valor de 10 %, aproximadamente.

Método Auto-Consistente (AC). Proposto por Hill (1965), este método permite a obtenção da matriz de rigidez efetiva de um compósito $\bar{\mathbf{C}}$ através da seguinte expressão implícita:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + f_0(\mathbf{C}_0 - \mathbf{C})[\mathbf{I} + \mathbf{S}\bar{\mathbf{C}}^{-1}(\mathbf{C}_0 - \bar{\mathbf{C}})]^{-1} \quad (3.3)$$

sendo \mathbf{C}_0 , \mathbf{C} , f_0 e \mathbf{S} as matrizes constitutivas da inclusão e da matriz, a fração volumétrica da fase inclusão e a matriz correspondente ao tensor de Eshelby, respectivamente. Na equação (3.3), \mathbf{I} representa a matriz identidade. Tensores de Eshelby para inclusões esféricas e cilíndricas podem ser encontrados em Suvorov e Dvorak (2002).

Modelo de Mori-Tanaka (MT). Este modelo é baseado no Lema de Mori e Tanaka (1973) e a formulação utilizada neste estudo encontra-se em Benveniste (1987), a qual propõe a seguinte expressão para a matriz de rigidez efetiva do compósito:

$$\bar{\mathbf{C}} = [f_0\mathbf{C}_0\mathbf{A}_0^{dil} + (1-f_0)\mathbf{C}]\tilde{\mathbf{A}} \quad (3.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^{dil} &= [\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)]^{-1} \\ \tilde{\mathbf{A}} &= [f_0\mathbf{A}_0^{dil} + (1-f_0)\mathbf{I}]^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Esquema Diferencial (ED). Apresentado em Hashin (1988), este método emprega uma formulação incremental para determinação da matriz de rigidez efetiva de um compósito, sendo expressa por:

$$\bar{\mathbf{C}}^{k+1} = \bar{\mathbf{C}}^k + \frac{\Delta f_0}{1-f_0^k}(\mathbf{C}_0 - \bar{\mathbf{C}}^k)\mathbf{A}_0^{dil} \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{A}_0^{dil} = [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{S}}^k(\bar{\mathbf{C}}^k)^{-1}(\bar{\mathbf{C}}^k - \mathbf{C}_0)]^{-1}$. Na equação (3.6), o índice k identifica o número do passo incremental e Δf_0 representa o incremento da fração volumétrica da fase inclusão.

3.2.3. Limites de Hashin-Shtrikman (HS)

Proposto por Hashin e Shtrikman (1963), a determinação destes limites baseia-se em princípios variacionais onde o corpo é assumido infinito e nenhuma informação geométrica dos constituintes é considerada. Os limites para as propriedades efetivas macroscópicas do material isotrópico resultante são:

$$K_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1-f_2)}{3K_1 + 4G_1}} \leq \bar{K} \leq K_2 + \frac{1-f_2}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3f_2}{3K_2 + 4G_2}} \quad (3.7)$$

$$G_1 + \frac{f_2}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(1-f_2)(K_1 + 2G_1)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \leq \bar{G} \leq G_2 + \frac{1-f_2}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6f_2(K_2 + 2G_2)}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}}$$

onde K_1 , G_1 e K_2 , G_2 são os módulos de elasticidade volumétrico e transversal das fases 1 e 2, respectivamente, e f_2 é a fração volumétrica da fase 2. Na equação (3.7), $K_2 \geq K_1$ e $G_2 \geq G_1$. Para o cálculo do módulo de elasticidade longitudinal (\bar{E}) e do coeficiente de Poisson ($\bar{\nu}$) do material efetivo podem ser utilizadas as seguintes expressões:

$$\bar{E} = \frac{9\bar{K}\bar{G}}{3\bar{K} + \bar{G}} \quad (3.8)$$

$$\bar{\nu} = \frac{3\bar{K} - 2\bar{G}}{2(3\bar{K} + \bar{G})}$$

3.3. Aplicações Numéricas

3.3.1. Determinação de Módulos de Elasticidade Efetivos de um Compósito

Reforçado por Fibras

A Figura 3.2 mostra um volume representativo típico de um material compósito reforçado por fibras unidirecionais utilizado nas simulações numéricas do experimento com a teoria de volumes finitos (TVF), assim como sua unidade básica. As dimensões da seção transversal do referido volume são dadas por:

$$D = ND_f + (N+1)D_m \quad (3.9)$$

sendo D_f as dimensões transversais das fibras, D_M o espaçamento entre fibras e N o número de fibras na direção x_1 ou x_2 . Na Figura 3.2, L representa o comprimento longitudinal do volume representativo.

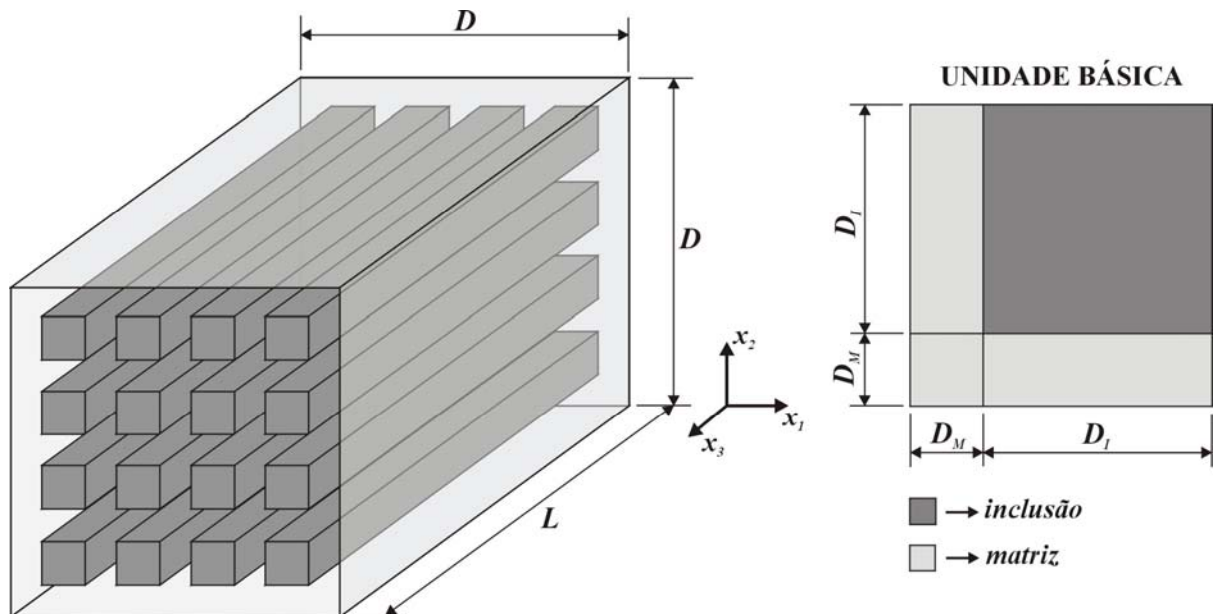


Figura 3.2 – Volume representativo típico usado pela TVF.

Nas simulações realizadas com o intuito de calcular o módulo de elasticidade efetivo na direção 2, são utilizadas condições de contorno em tensão, na forma de carregamentos distribuídos aplicados nas faces inferior e superior, como ilustrado na Figura 3.3.

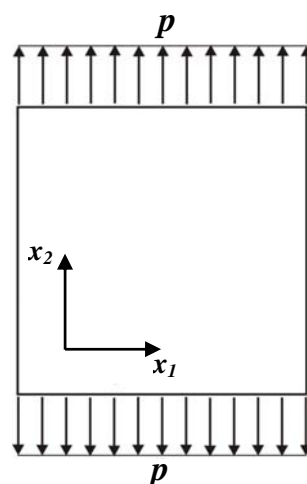


Figura 3.3 – Carregamento considerado nas simulações.

Na definição da geometria da microestrutura do volume representativo são utilizados os seguintes parâmetros: D , L e N , além da fração volumétrica de fibras f_f . Para as simulações

numéricas com a teoria de volumes finitos são investigadas quatro configurações microestruturais para o volume representativo (Figura 3.4):

- Configuração 1 (C1): Uma fibra e $L = D/10$ (3 x 3 x 3 células)
- Configuração 2 (C2): 3 x 3 fibras e $L = D/10$ (7 x 7 x 3 células)
- Configuração 3 (C3): Uma fibra e $L = 10D$ (3 x 3 x 5 células)
- Configuração 4 (C4): 3 x 3 fibras e $L = 10D$ (7 x 7 x 5 células)

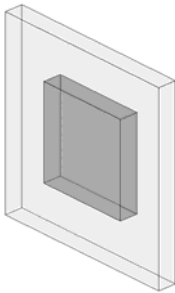
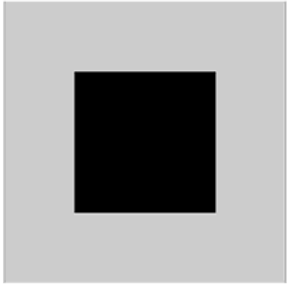
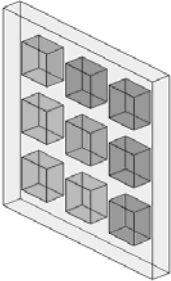
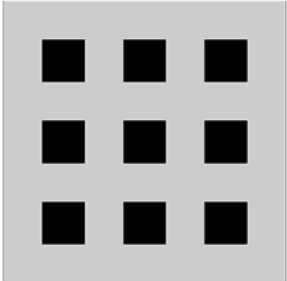
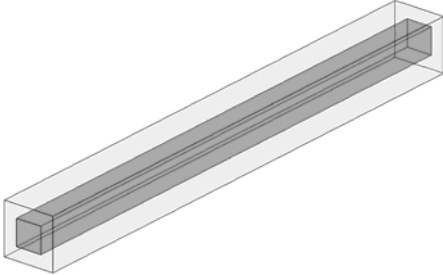
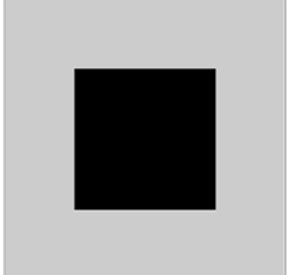
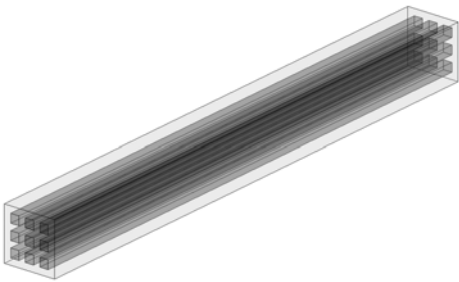
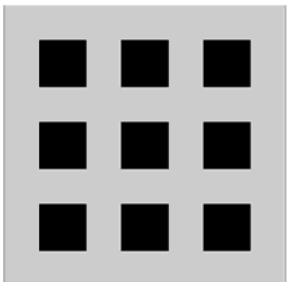
	Perspectiva	Seção transversal
C1		
C2		
C3		
C4		

Figura 3.4 – Configurações microestruturais utilizadas pela TVF ($f_f = 25\%$).

Para as configurações 1 e 2 foram realizadas análises em estado plano de tensões utilizando a formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos (MEF) e a versão tridimensional da TVF. Para o primeiro, foram geradas malhas com elementos quadrilaterais (180 elementos para a C1 e 1620 elementos para a C2, como ilustrado na Figura 3.5) e realizadas análises com o elemento finito Q8 da família Serendipity. Assim como é feito na TVF, são calculadas as tensões e as deformações médias para cada elemento finito, utilizando-se a média aritmética dos valores destas grandezas nos pontos de Gauss. A avaliação das propriedades efetivas é feita utilizando-se uma média ponderada das referidas grandezas, no volume representativo, adotando-se como pesos os correspondentes volumes das células, ou as áreas dos elementos finitos, no caso do MEF. Calculados os valores médios das tensões e deformações no volume representativo, são obtidas as propriedades efetivas do compósito utilizando-se o mesmo procedimento adotado na teoria de campos médios (Nemat-Nasser e Hori, 1999).

Foram admitidas nas análises as propriedades mecânicas de uma fibra de vidro ($E_f = 73GPa; \nu_f = 0,22$) e de uma matriz de epóxi ($E_M = 3,5GPa; \nu_M = 0,35$).

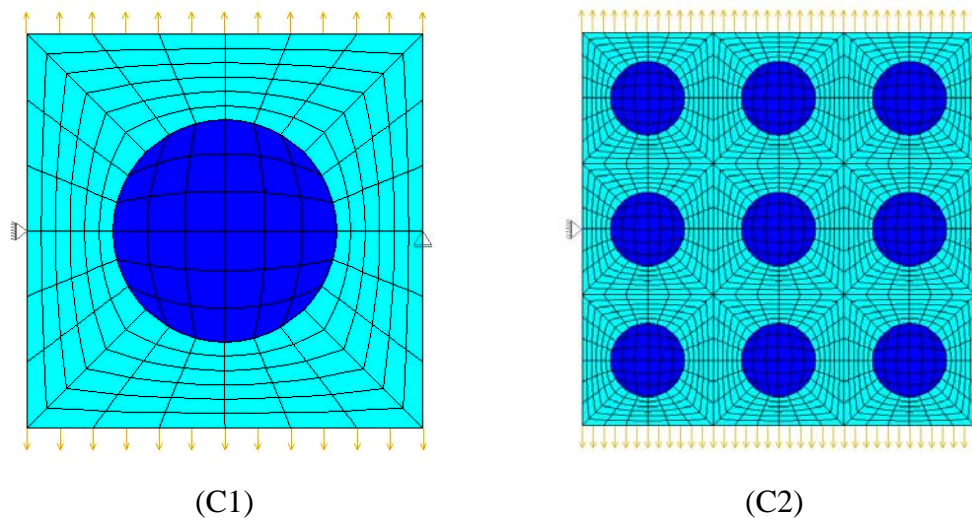


Figura 3.5 – Malhas utilizadas nas análises com o MEF ($f_i = 25\%$).

Os resultados das análises para as configurações 1 e 2 encontram-se nas Figuras 3.6 e 3.7, respectivamente. Como se observa, existe uma boa concordância entre os resultados obtidos com o MEF e a TVF, especialmente para a segunda configuração, onde o número de inclusões é maior. Vale considerar que a geometria da inclusão e o nível de discretização adotados nas análises com os dois métodos são diferentes. Os resultados correspondentes à C1 deram bastante próximos daqueles obtidos através da RM, que por sua vez não considera a interação entre as fibras e a maior rigidez destas em relação à matriz, fato que passa a ser relevante quando $L \gg D$. A diferença entre os resultados obtidos utilizando-se as C1 e C2, especialmente para as

maiores frações volumétricas de fibras, mostra a influência da interação entre as inclusões no momento de se determinar as propriedades efetivas de um material composto.

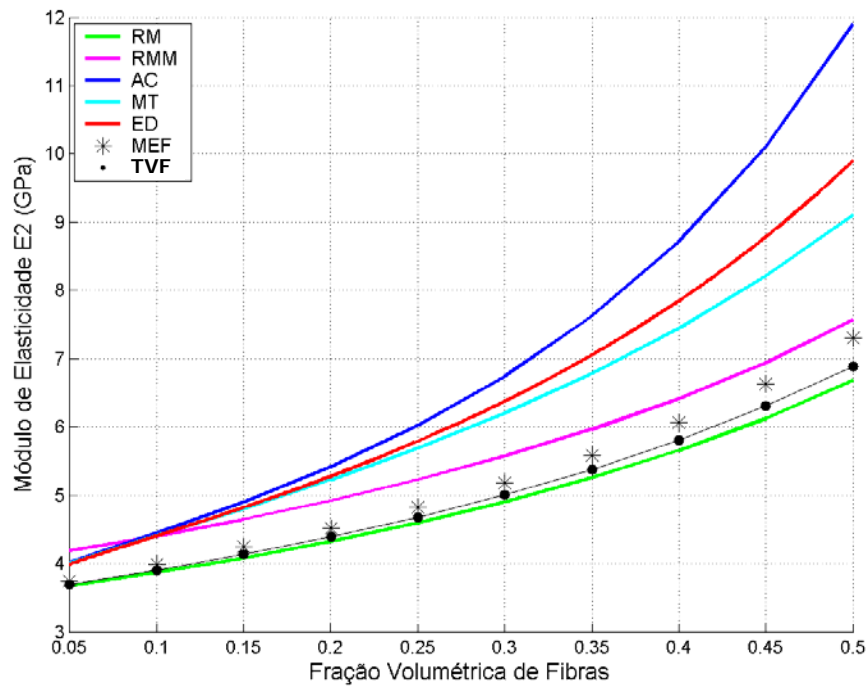


Figura 3.6 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C1.

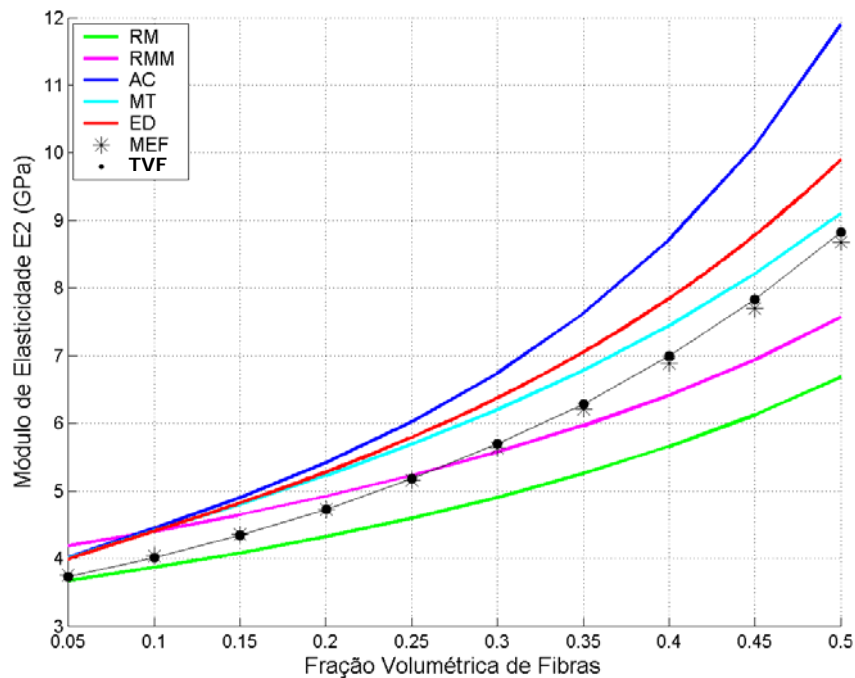


Figura 3.7 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C2.

Os resultados das análises para as configurações 3 e 4 encontram-se nas Figuras 3.8 e 3.9, respectivamente. Os resultados fornecidos pela TVF para a C3 deram próximos daqueles obtidos pela RMM, que por sua vez não considera a interação entre as fibras, mas leva em conta a maior

rigidez destas em relação à matriz ($L \gg D$), fato que justifica a diferença dos resultados obtidos através da TVF para as configurações 1 e 3. Como se pode observar na Figura 3.9, os resultados encontrados com a TVF para a C4 apresentaram uma boa concordância com aqueles oriundos dos modelos baseados na teoria micromecânica de campos médios, especialmente com os correspondentes ao ED. Isto pode ser justificado pelo fato da C4 se aproximar mais das condições consideradas na formulação destes modelos da micromecânica.

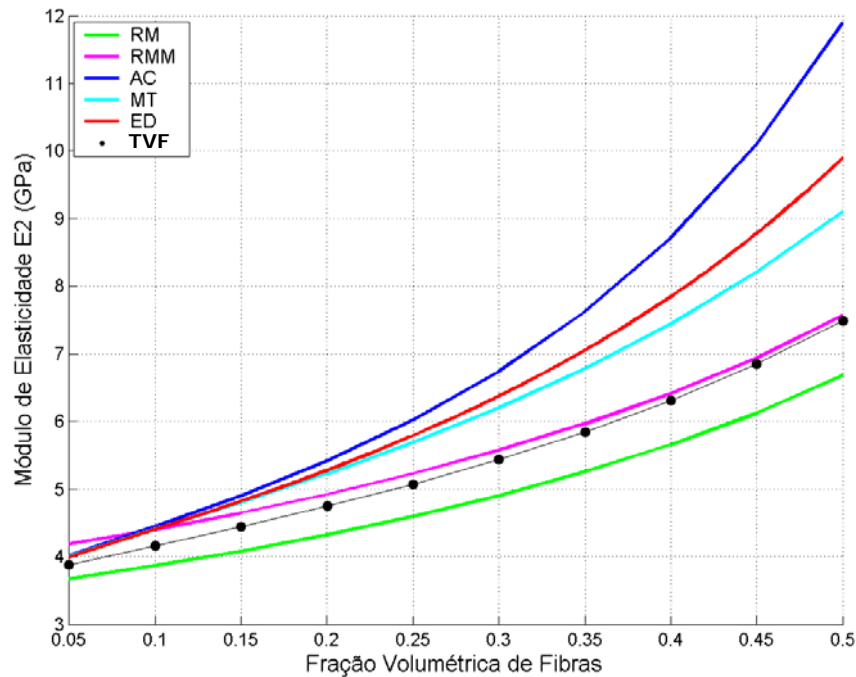


Figura 3.8 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C3.

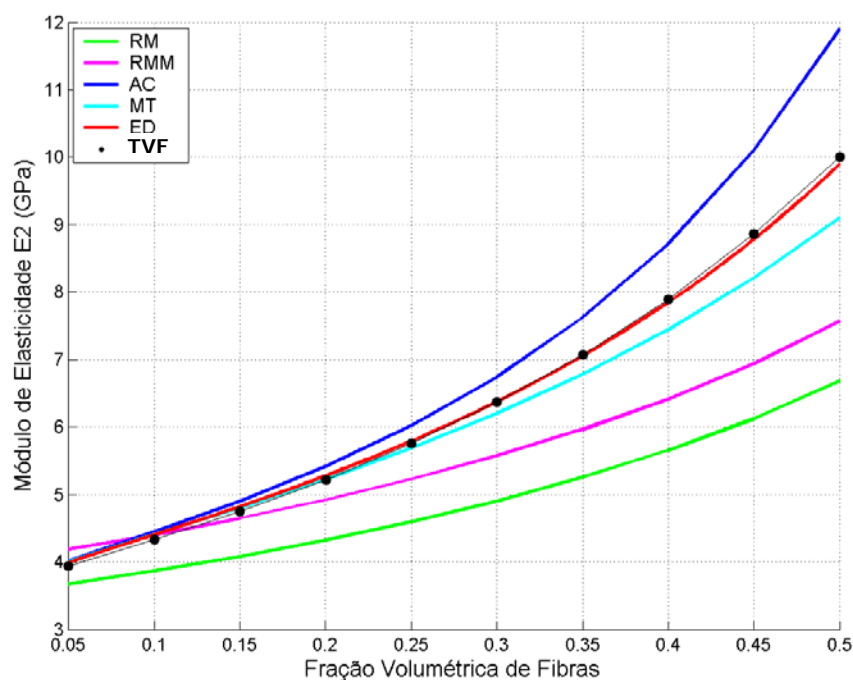


Figura 3.9 – Módulo de elasticidade na direção 2 do compósito reforçado com fibras utilizando a C4.

3.3.2. Determinação do Módulo de Elasticidade Efetivo de um Compósito Particulado

A configuração microestrutural do volume representativo típico utilizada nas simulações numéricas com a TVF para o compósito particulado, assim como sua unidade básica, encontram-se nas Figuras 3.10 e 3.11. As dimensões do volume representativo são calculadas pela equação (3.9), sendo D_I a dimensão da inclusão, D_M o espaçamento entre inclusões e N o número de inclusões em cada direção. Neste caso, para a definição da geometria da microestrutura do volume representativo são utilizados os parâmetros D , N e f_I , onde este último representa a fração volumétrica de inclusões.

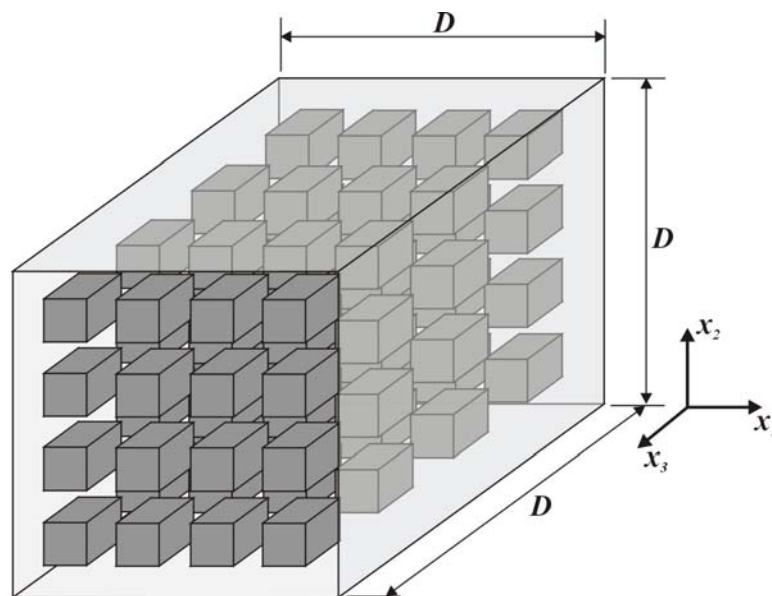


Figura 3.10 – Volume representativo típico usado pela TVF para o compósito particulado.

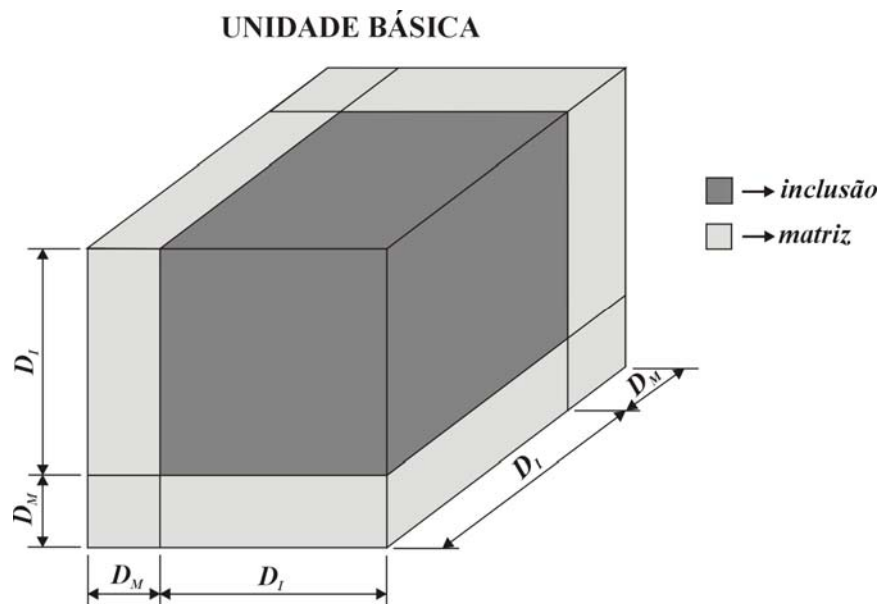


Figura 3.11 – Unidade básica do volume representativo.

Nas simulações numéricas para obtenção dos módulos de elasticidade efetivos são aplicadas condições de contorno em tensão, como ilustrado na Figura 3.3. Além disso, as propriedades efetivas são calculadas utilizando-se o mesmo procedimento adotado no exemplo anterior.

Como exemplo de aplicação, tem-se um material composto por micro-esferas de vidro, imersas numa matriz de poliéster e com diâmetros na ordem de 210 a 297 μm . Os resultados experimentais mostrados aqui podem ser encontrados em Richard (1975). Os parâmetros mecânicos dos materiais constituintes são: $E_I/E_M = 40,8$, $\nu_I = 0,21$ e $\nu_M = 0,45$.

Na Figura 3.12 tem-se a configuração microestrutural do volume representativo analisada pela TVF para uma fração volumétrica da fase inclusão de 14,29%. A malha utilizada nas análises consta de 7 x 7 x 7 células.

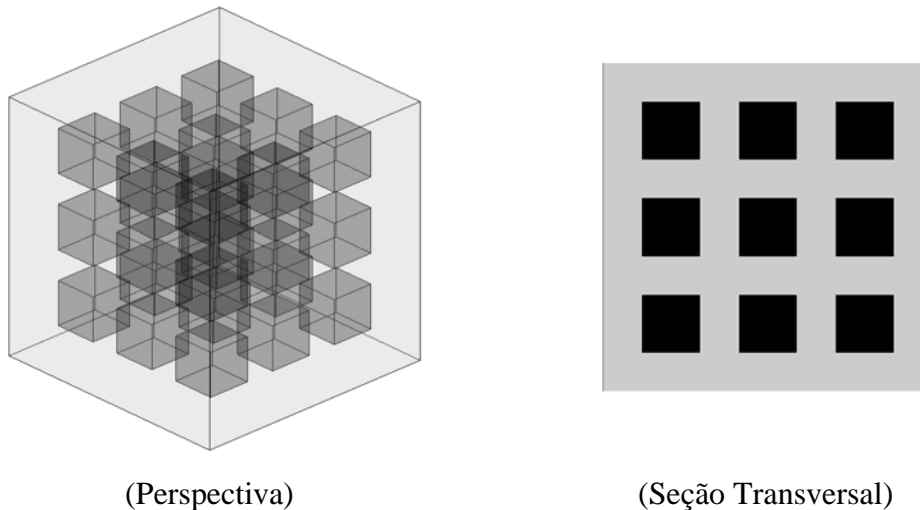


Figura 3.12 – Configuração microestrutural analisada pela TVF ($f_I = 14,29\%$).

Os resultados das análises obtidos pela TVF e modelos da micromecânica para inclusões esféricas estão representados na Figura 3.13. Como no exemplo anterior, há uma boa concordância dos resultados das análises com a TVF em relação aos modelos da micromecânica para pequenas frações volumétricas da fase inclusão. Para frações superiores a 25%, verificam-se diferenças consideráveis nos resultados obtidos com os modelos micromecânicos, e uma boa concordância dos resultados oriundos da TVF em relação ao ED. Observa-se também uma boa aproximação dos resultados experimentais com aqueles obtidos pela TVF.

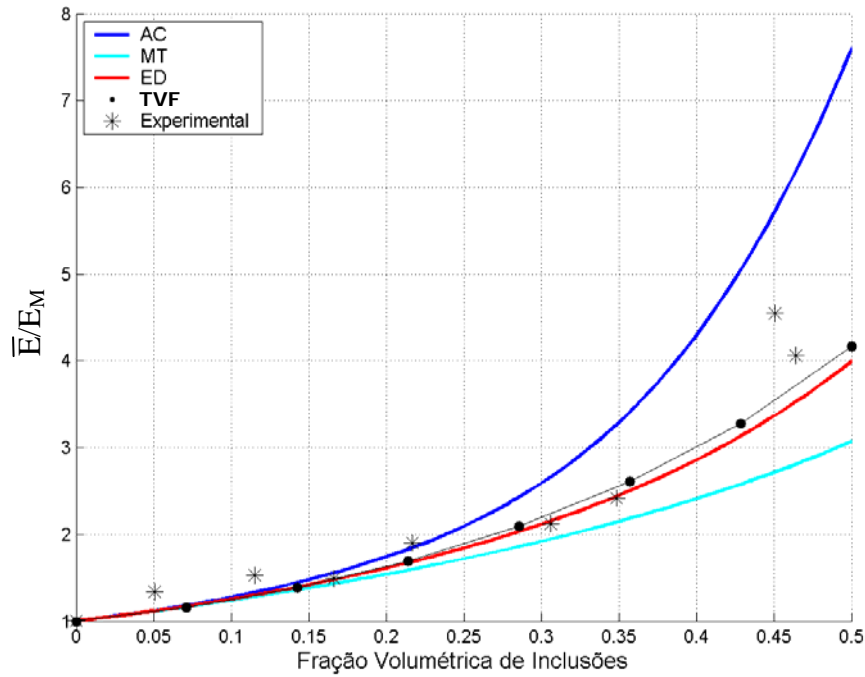


Figura 3.13 – Módulo de elasticidade efetivo de um compósito particulado.

3.3.3. Determinação do Módulo de Elasticidade Efetivo de um Material com Gradação Funcional

Como ilustrado na Figura 3.14, no material com gradação funcional do tipo metal-cerâmico podem ser destacadas três regiões: uma rica em cerâmica apresentando o metal como inclusão, uma outra rica em metal tendo a cerâmica como inclusão e uma região de transição entre essas duas.

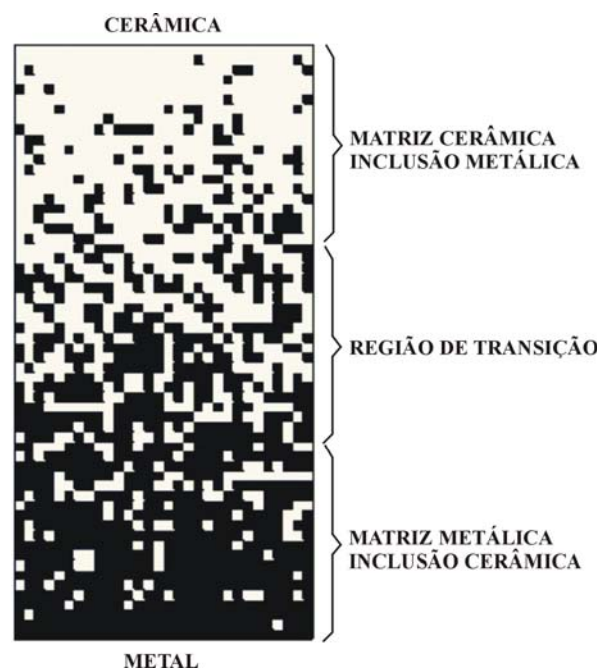


Figura 3.14 – Material com graduação funcional do tipo metal-cerâmico.

O estudo do comportamento de um sólido constituído de material com gradação funcional, efetuado mediante análises micro/macromecânica desacopladas, consiste em se determinar as propriedades efetivas do material em função das frações volumétricas de seus constituintes, utilizando-se modelos micromecânicos, e adotando-as, em seguida, em uma análise macromecânica. No entanto, a maioria dos métodos para a determinação destas propriedades efetivas é sensível à escolha do material que será inclusão ou matriz, como é o caso do modelo de Mori-Tanaka (MT), do esquema diferencial (ED) e da teoria de volumes finitos, quando se utiliza uma microestrutura periódica, como a que foi definida no exemplo anterior para a determinação das propriedades efetivas de um material compósito particulado. Entre os modelos utilizados neste estudo, o método auto-consistente (AC) é o único que se mostra insensível à mudança entre o material que será inclusão ou matriz. Em geral, a matriz é admitida como o material mais flexível, fazendo os resultados obtidos com o modelo de Mori-Tanaka coincidirem com o limite inferior de Hashin-Shtrikman (Li e Wang, 2005).

Como exemplo de aplicação, tem-se a determinação do módulo de elasticidade efetivo de um material com gradação funcional composto pelos seguintes materiais: Alumínio ($K = 77,9GPa$ e $G = 24,9GPa$) e Boro ($K = 230GPa$ e $G = 172GPa$). Na Figura 3.15 apresenta-se o gráfico desta propriedade em função da fração volumétrica do Boro, admitido como inclusão. Como comentado anteriormente, os valores obtidos com o modelo de Mori-Tanaka coincidem com o limite inferior de Hashin-Shtrikman.

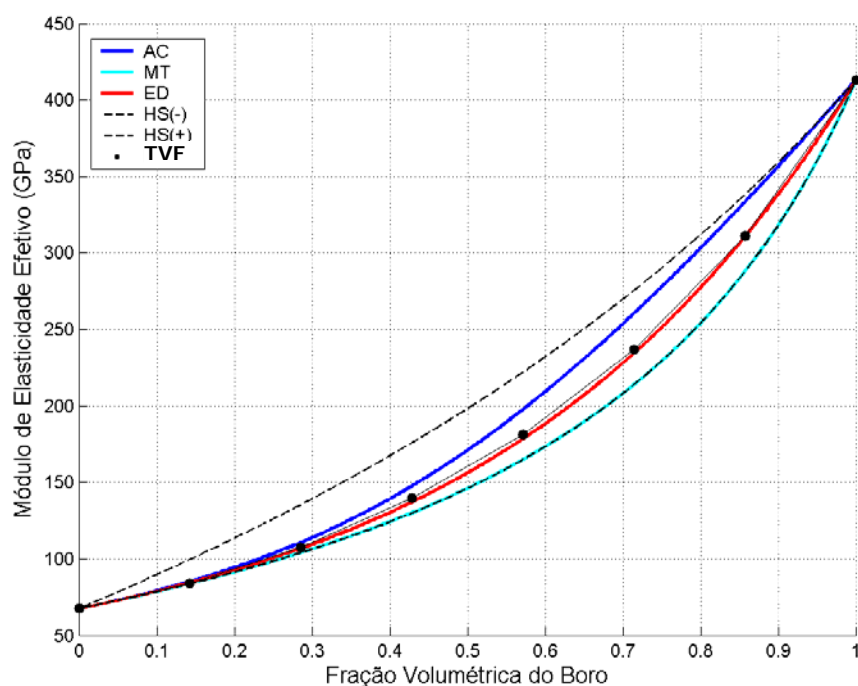


Figura 3.15 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Boro como inclusão.

Na análise utilizando a teoria de volumes finitos, a microestrutura foi definida como no exemplo anterior (Figura 3.12), apresentando uma malha de $7 \times 7 \times 7$ células e três inclusões em cada direção. Na Figura 3.16 tem-se o módulo de elasticidade efetivo em função da fração volumétrica do Boro, agora admitido como matriz. Como se pode observar, neste caso, os valores obtidos com o modelo de Mori-Tanaka coincidem com o limite superior de Hashin-Shtrikman. Também pode ser notado que os valores obtidos com a teoria de volumes finitos praticamente coincidem com o limite superior de Hashin-Shtrikman. Analisando-se estes resultados, pode-se notar a sensibilidade destes modelos, exceto o auto-consistente, quanto à escolha do material que será inclusão ou matriz.

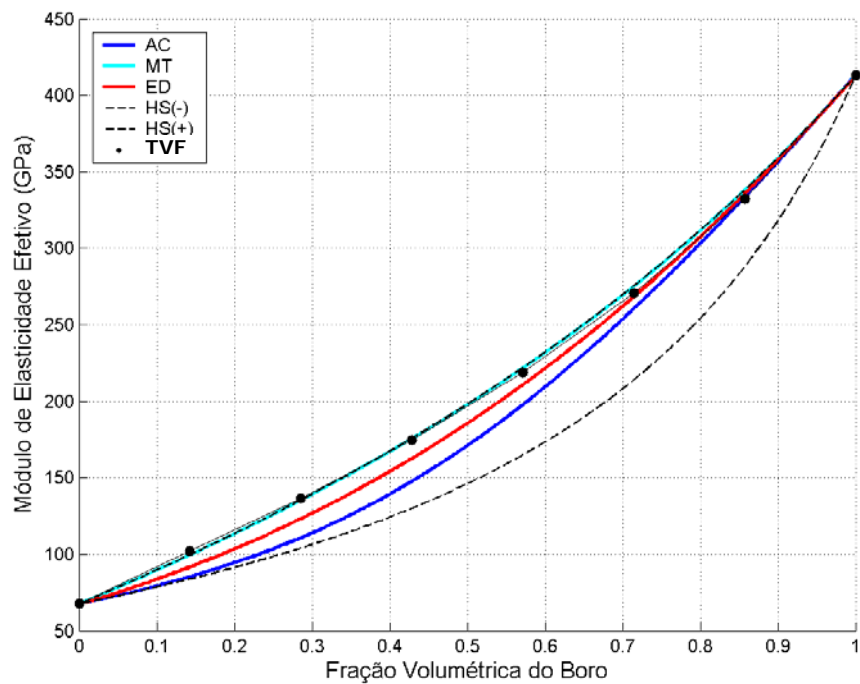


Figura 3.16 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Alumínio como inclusão.

Quanto à teoria de volumes finitos, este problema pode ser resolvido gerando microestruturas com distribuição aleatória (randômica) dos seus constituintes. Para isto, foram realizadas análises utilizando uma malha de $9 \times 9 \times 9$ células. Na Figura 3.17 tem-se as configurações microestruturais utilizadas nestas análises para três frações volumétricas distintas, cada uma pertencente a uma das regiões, comentadas anteriormente, presentes em um material com gradação funcional do tipo metal-cerâmico. Na Figura 3.17 o material com menor fração volumétrica está representado pela cor preta.

Na Tabela 3.1 têm-se as frações volumétricas dos constituintes para cada configuração microestrutural representada na Figura 3.17.

Tabela 3.1 – Frações volumétricas dos constituintes.

	Boro	Alumínio
Configuração 1 (C1)	11,66 %	88,34 %
Configuração 2 (C2)	48,01 %	51,99 %
Configuração 3 (C3)	89,99 %	10,01 %

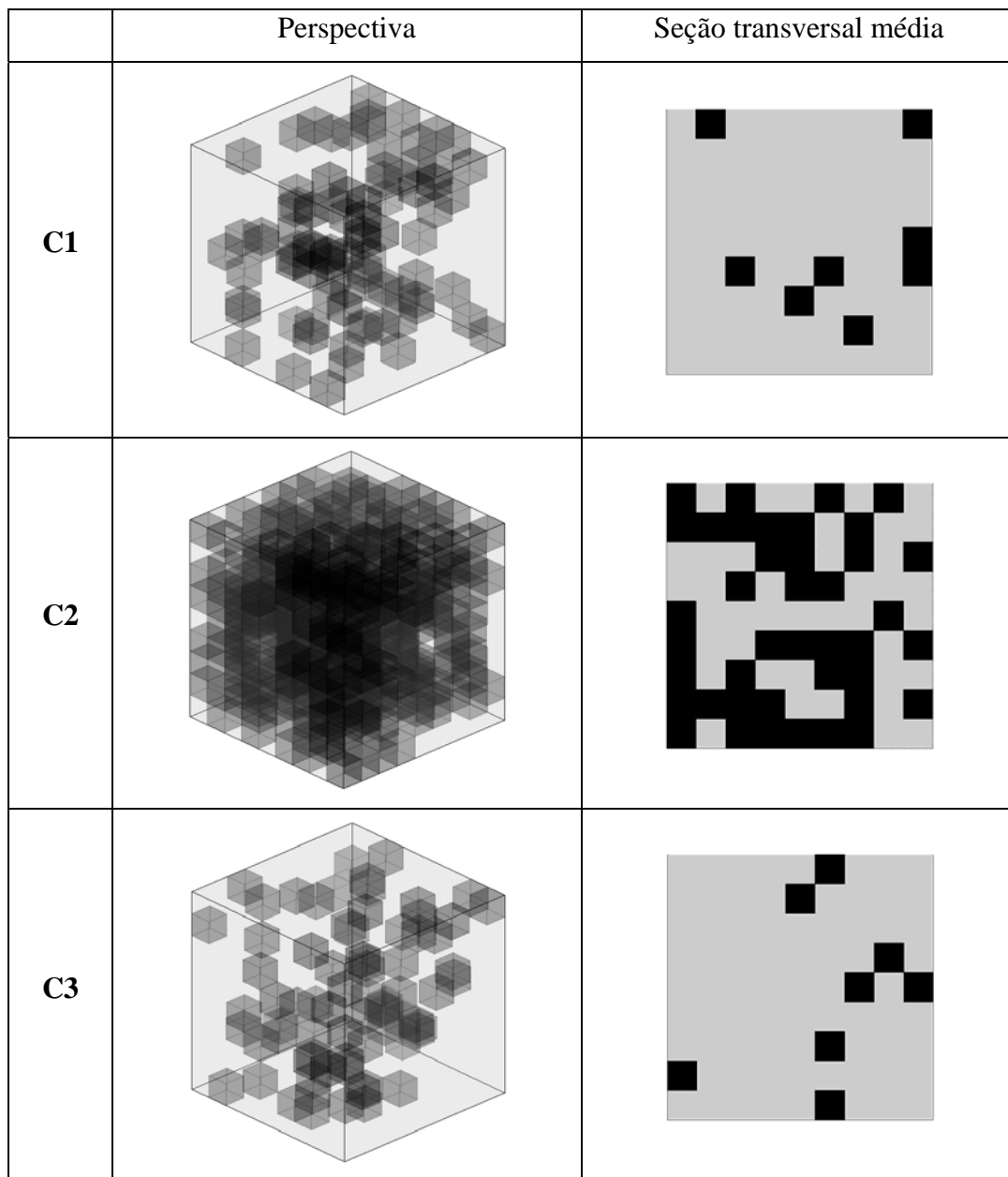


Figura 3.17 – Configurações microestruturais geradas aleatoriamente para três frações volumétricas.

Ambas as Figuras 3.18 e 3.19 mostram os resultados obtidos pela teoria de volumes finitos utilizando configurações microestruturais com uma distribuição aleatória dos constituintes. A Figura 3.18 apresenta a variação do módulo de elasticidade efetivo do material compósito em função da fração volumétrica do Boro, admitindo o Alumínio como matriz nas

análises realizadas com o modelo de Mori-Tanaka e o esquema diferencial. Na Figura 3.19 tem-se o módulo de elasticidade efetivo do material compósito em função da fração volumétrica do Boro, admitindo o Boro como matriz nas análises efetuadas com os citados modelos. Como pode ser observado, o modelo de Mori-Tanaka e o esquema diferencial estiveram mais próximos dos resultados obtidos pela teoria de volumes finitos no primeiro caso, onde é admitido o material mais flexível como matriz.

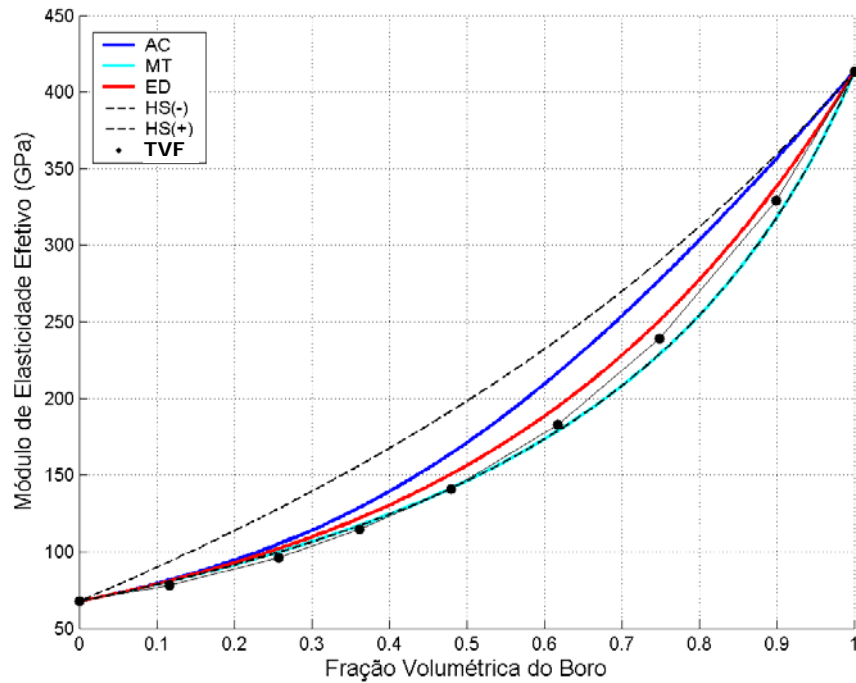


Figura 3.18 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Alumínio como matriz.

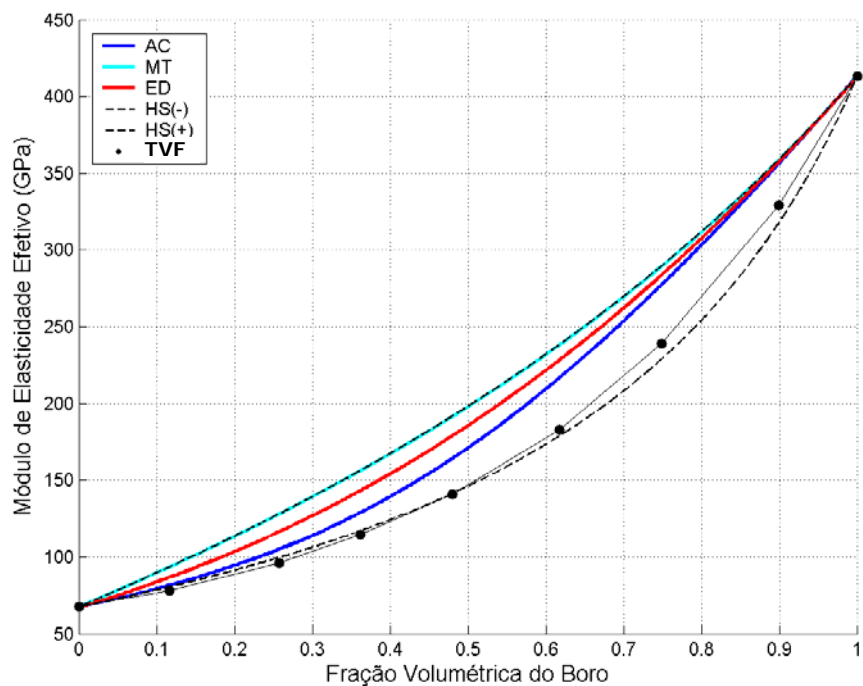


Figura 3.19 – Módulo de elasticidade efetivo admitindo o Boro como matriz.

Capítulo 4

Aplicações Numéricas: Análises Termo-Elásticas Bidimensionais

4.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo encontra-se uma série de aplicações numéricas das formulações apresentadas no capítulo 2 destinadas a análises bidimensionais, com o objetivo de realizar verificações com soluções analíticas, além de comparar a eficiência da formulação paramétrica proposta neste trabalho com o tradicional método dos elementos finitos.

4.2. Aplicações Numéricas

4.2.1. Análise Transiente de um Cubo de Material Homogêneo

A Figura 4.1 mostra um cubo de material isótropo e homogêneo que se encontra inicialmente com um campo de temperatura uniforme e igual a zero. A temperatura da face superior é subitamente elevada para um valor unitário enquanto as outras cinco faces estão termicamente isoladas e impedidas de se deslocarem na direção de suas normais.

As soluções analíticas para o campo de temperatura T e a tensão lateral σ_x podem ser encontradas nos livros clássicos de Carslaw e Jaeger (1959) e Timoshenko e Goodier (1951) e são dadas em função da coordenada vertical y e do tempo t por:

$$T(y,t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \kappa t}{4L^2}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2L}\right) \quad (4.1)$$

$$\sigma_x(y,t) = -\frac{\alpha E}{1-\nu} T(y,t) \quad (4.2)$$

sendo $\kappa = \frac{\rho C}{k}$ e L o comprimento da aresta do cubo.

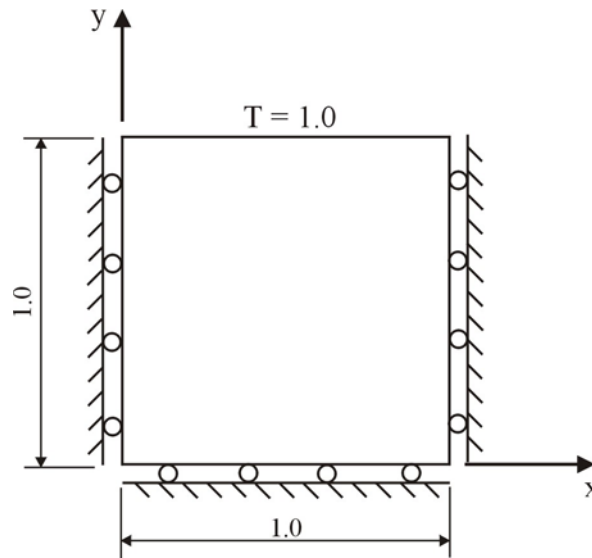


Figura 4.1 – Cubo de material isotrópico e homogêneo.

Os valores adimensionais adotados nas análises para as propriedades do material do cubo encontram-se na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades adimensionais do material do cubo.

Propriedade	Valor
k (condutividade térmica)	1,0
ρ (densidade)	1,0
C (calor específico)	1,0
E (módulo de elasticidade)	1,0
ν (coeficiente de Poisson)	0,3
α (coeficiente de expansão térmica)	0,02

Nas Figuras 4.2 a 4.5 estão os resultados das análises numéricas, em forma de pontos, juntamente com aqueles obtidos através das expressões analíticas, traço contínuo. Nas análises numéricas foram utilizadas duas malhas, uma constando de 1×10 células distribuídas nas direções x e y , respectivamente, e uma outra mais refinada apresentando 1×50 células. O incremento de tempo adotado no início da análise numérica foi de 10^{-4} , progredindo numa razão geométrica de 1,05 até se estabelecer a convergência com a solução em regime estacionário. Este procedimento acelera significativamente a solução numérica da análise em regime transiente,

sem afetar a precisão dos resultados. A formulação empregada foi a paramétrica bidimensional, admitindo-se um estado plano de deformações. Os resultados encontrados com a malha mais grossa apresentam razoável concordância com aqueles obtidos pela solução analítica, afastando-se um pouco destes últimos apenas nos primeiros passos da análise elástica.

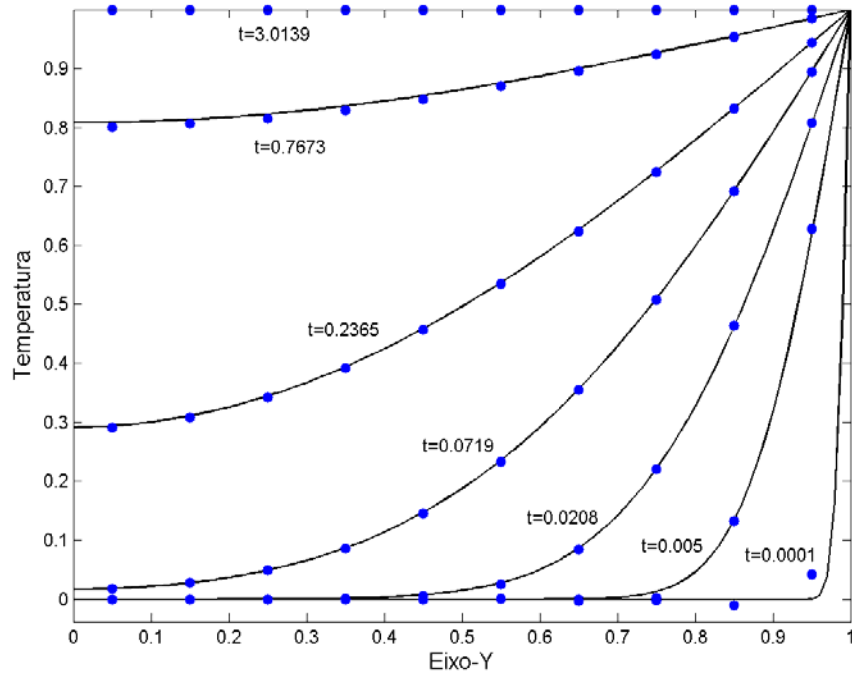


Figura 4.2 – Análise térmica do cubo de material homogêneo (1 x 10 células).

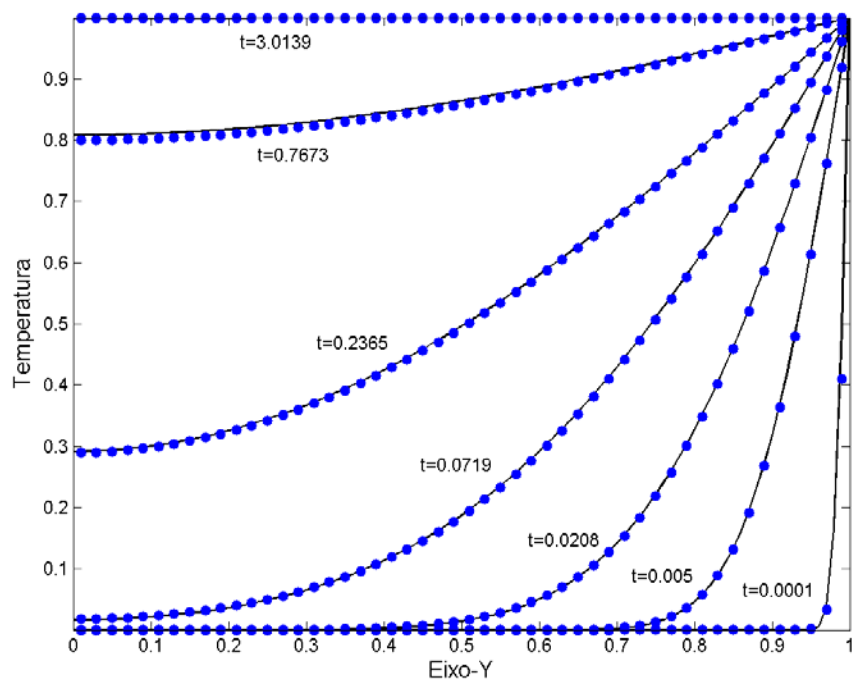


Figura 4.3 – Análise térmica do cubo de material homogêneo (1 x 50 células).

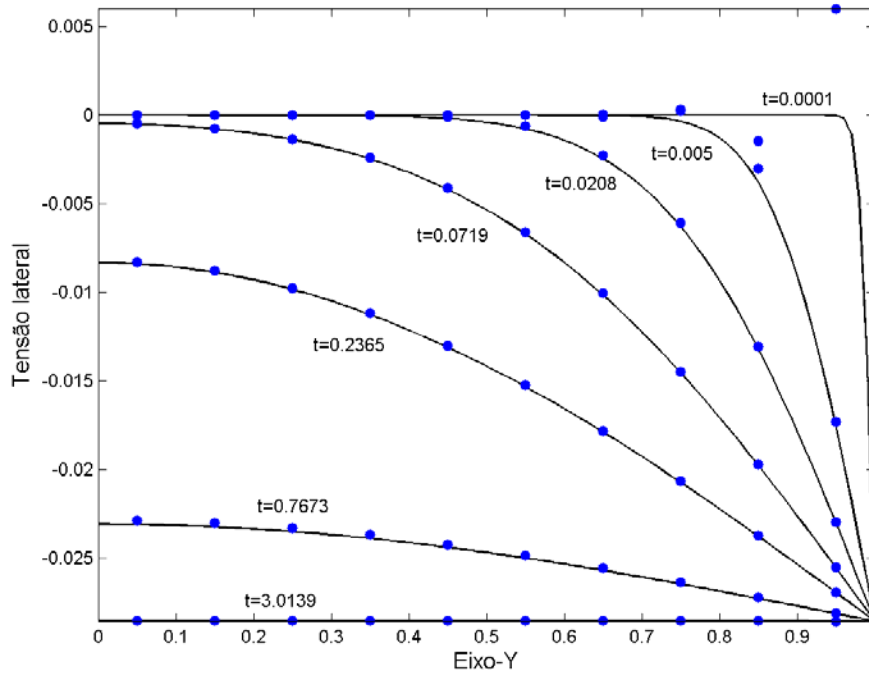


Figura 4.4 – Análise elástica do cubo de material homogêneo (1 x 10 células).

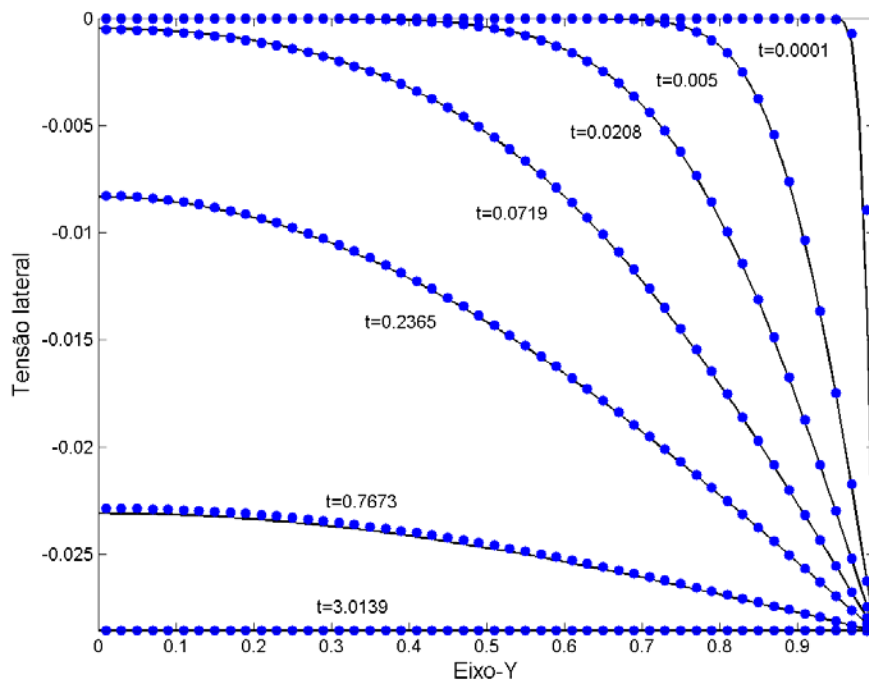


Figura 4.5 – Análise elástica do cubo de material homogêneo (1 x 50 células).

4.2.2. Análise Transiente de uma Placa Longa de Material com Gradação Funcional

A Figura 4.6 mostra uma placa longa de material com gradação funcional que se encontra inicialmente com um campo de temperatura uniforme e igual a zero. A temperatura da face superior é subitamente elevada para T_0 enquanto as quatro faces laterais estão termicamente

isoladas e a face inferior permanece com a temperatura nula. A placa só apresenta restrição aos deslocamentos de corpo rígido.

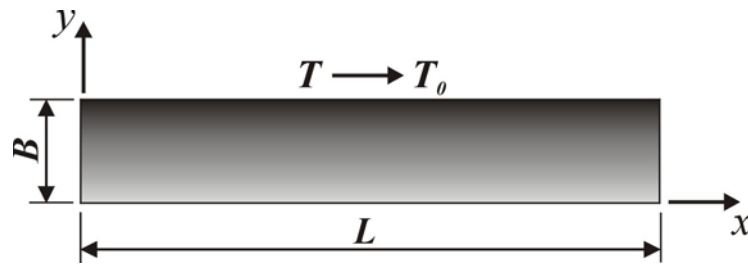


Figura 4.6 – Placa longa de material com graduação funcional.

Para efeito da análise térmica, a condutividade k , o calor específico C e a densidade ρ do material da placa são expressos em função da coordenada vertical y por:

$$\begin{aligned} k(y) &= k_0 e^{2\beta y} \\ C(y) &= C_0 e^{2\beta y} \\ \rho(y) &= \rho_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo k_0 , C_0 e ρ_0 valores de referência e β um parâmetro relacionado com a heterogeneidade do material.

A solução analítica da análise térmica pode ser encontrada em Sutradhar et al. (2002) e é expressa por:

$$T(y,t) = T_0 \frac{1 - e^{-2\beta y}}{1 - e^{-2\beta B}} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{B}\right) e^{-\beta y} e^{-(n^2\pi^2/B^2 + \beta^2)\varphi t} \quad (4.4)$$

onde T_0 representa a temperatura de referência da face superior da placa e:

$$\begin{aligned} \phi_n &= -\frac{2T_0 e^{\beta \cdot B}}{\beta^2 B^2 + n^2 \pi^2} \left[\beta B \operatorname{sen}(n\pi) \frac{1 + e^{-2\beta B}}{1 - e^{-2\beta B}} - n\pi \cos(n\pi) \right] \\ \varphi &= \frac{k_0}{\rho_0 C_0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para análise elástica, são adotadas as seguintes expressões para o módulo de elasticidade E , o coeficiente de Poisson ν e o coeficiente de dilatação térmica α do material:

$$\begin{aligned} E(y) &= E_0 e^{ay} \\ \nu(y) &= \nu_0 \\ \alpha(y) &= \alpha_0 e^{by} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde E_0 , ν_0 e α_0 são valores de referência e a e b são constantes que definem a heterogeneidade do material.

A dedução da solução analítica para a tensão horizontal σ_{xx} na seção média de uma placa longa de material com gradação funcional, admitindo-se um estado plano de deformações, encontra-se no Apêndice C, e é dada por:

$$\sigma_{xx}(y) = -q(y) + \frac{E(y)}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_0 + my) \quad (4.7)$$

onde:

$$\begin{aligned} q(y) &= \frac{1}{1-\nu_0} \alpha(y) \Delta T(y) E(y) \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ m \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} R \\ M \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Na equação (4.8), tem-se:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{1}{a} (e^{aB} - 1) \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{1}{a^2} (aB e^{aB} - e^{aB} + 1) \\ A_{22} &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{1}{a^3} [e^{aB} (a^2 B^2 - 2aB + 2) - 2] \\ R &= \int_0^B q(y) dy \\ M &= \int_0^B q(y) y dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na análise numérica, foram admitidos $B=1$, $L=8$ e $T_0=100$, além dos valores de referência adimensionais que se encontram na Tabela 4.2 relacionados com as propriedades do material da placa.

Tabela 4.2 – Propriedades de referência do material da placa.

Propriedade	Valor
k_0 (condutividade térmica)	5,0
ρ_0 (densidade)	1,0
C_0 (calor específico)	1,0
E_0 (módulo de elasticidade)	1,0
ν_0 (coeficiente de Poisson)	0,3
α_0 (coeficiente de expansão térmica)	0,02

No caso dos parâmetros que definem a heterogeneidade do material da placa, foram utilizados os seguintes valores: $\beta=1,5$, $a=2,5$ e $b=1,5$.

Nas Figuras 4.7 a 4.9 estão representadas graficamente as propriedades térmicas e elásticas do material da placa em função da coordenada vertical y .

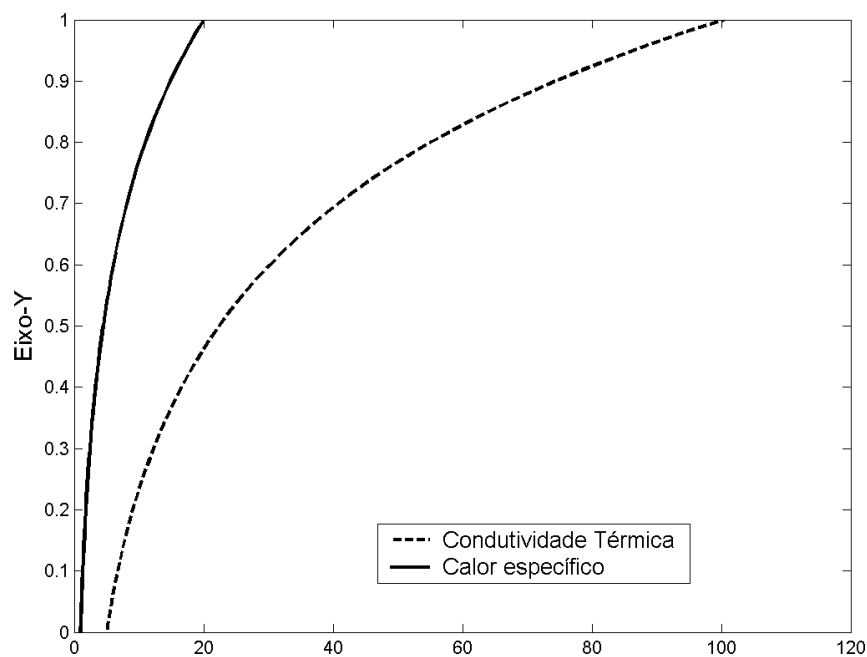


Figura 4.7 – Propriedades térmicas do material da placa.

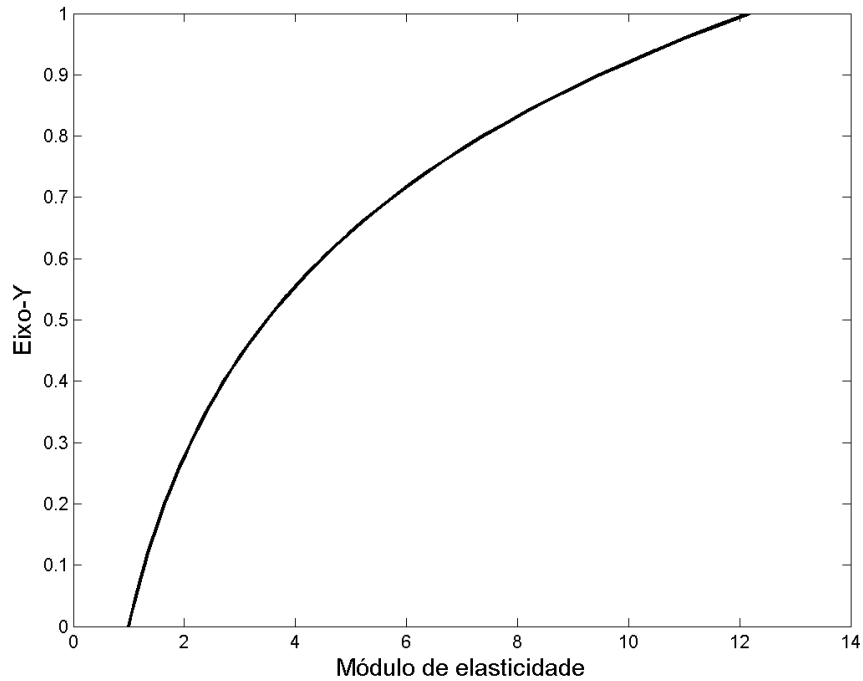


Figura 4.8 – Módulo de elasticidade do material da placa.

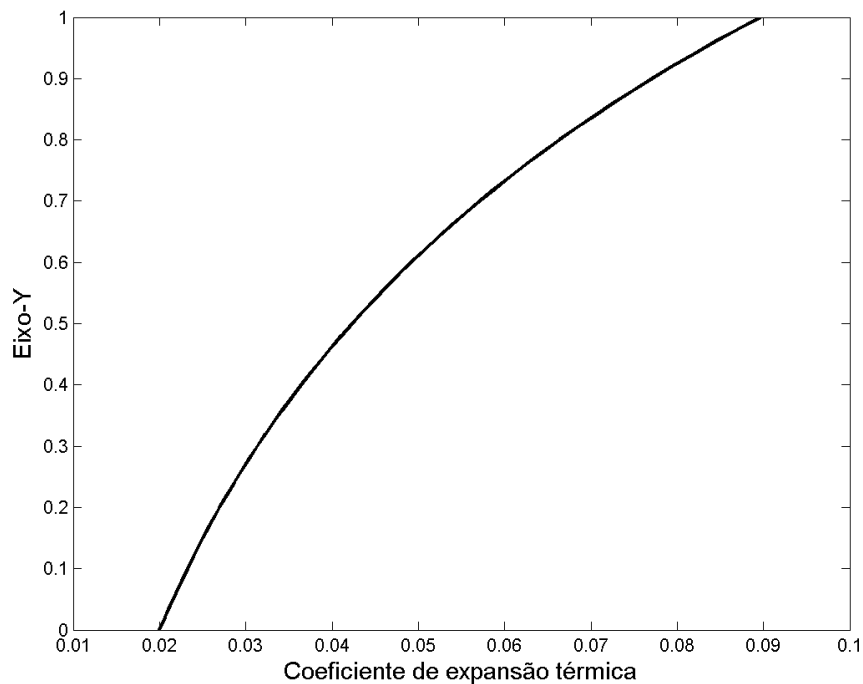


Figura 4.9 – Coeficiente de expansão térmica do material da placa.

Nas Figuras 4.10 a 4.13 estão os resultados das análises numéricas, em forma de pontos, junto com aqueles correspondentes às soluções analíticas, em traço contínuo. Nas análises numéricas foram utilizadas duas discretizações, uma constando de 3 x 15 células distribuídas nas direções x e y , respectivamente, e uma outra mais refinada apresentando 5 x 50 células. O incremento de tempo adotado no início das análises numéricas foi de $5 \cdot 10^{-5}$, progredindo numa

razão geométrica de 1,05 até se estabelecer a convergência com a solução em regime estacionário. Foi empregada a formulação bidimensional convencional, admitindo-se um estado plano de deformações. Como se pode observar, nos primeiros passos das análises, nas proximidades da face superior da placa, ocorreram as maiores divergências dos resultados obtidos com as análises numéricas em relação às soluções analíticas, o que poderia ser resolvido com uma maior discretização desta região.

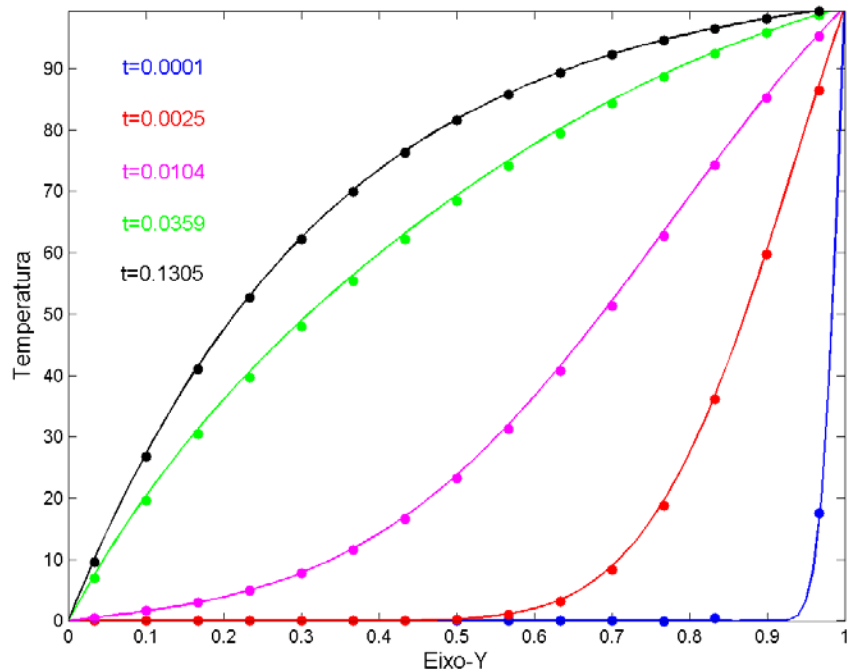


Figura 4.10 – Análise térmica da placa de material com graduação funcional (3 x 15 células).

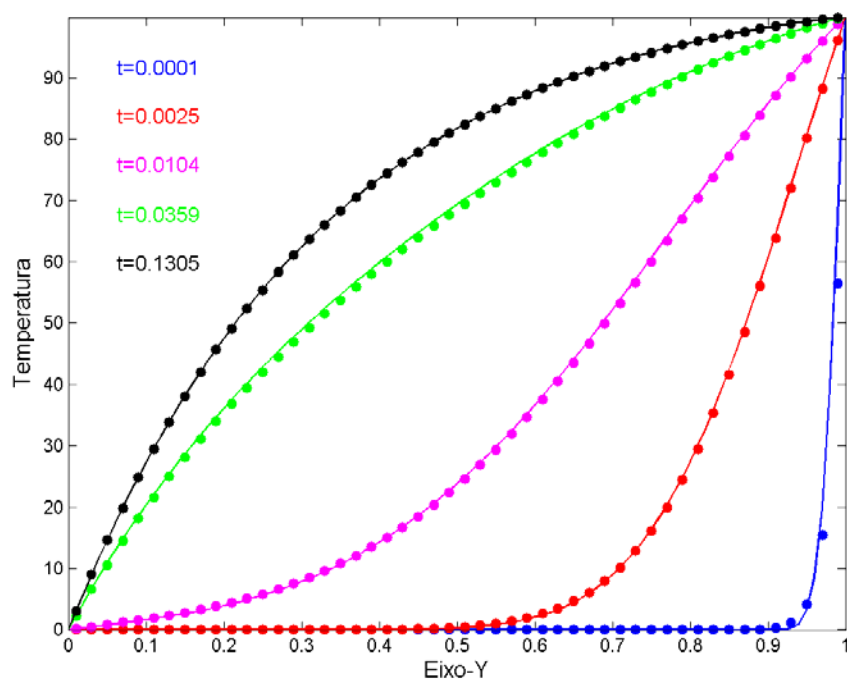


Figura 4.11 – Análise térmica da placa de material com graduação funcional (5 x 50 células).

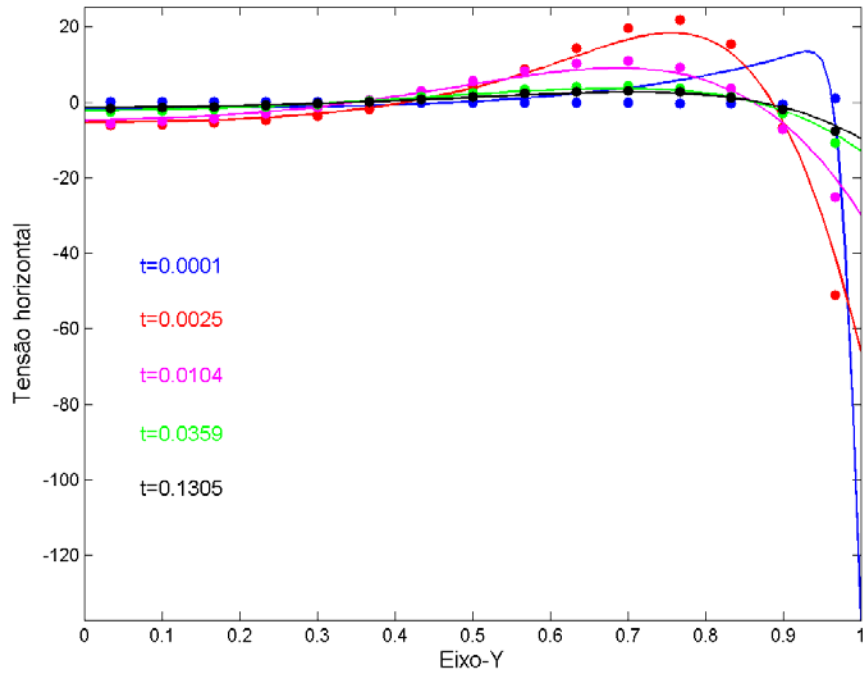


Figura 4.12 – Análise elástica da placa de material com graduação funcional (3 x 15 células).

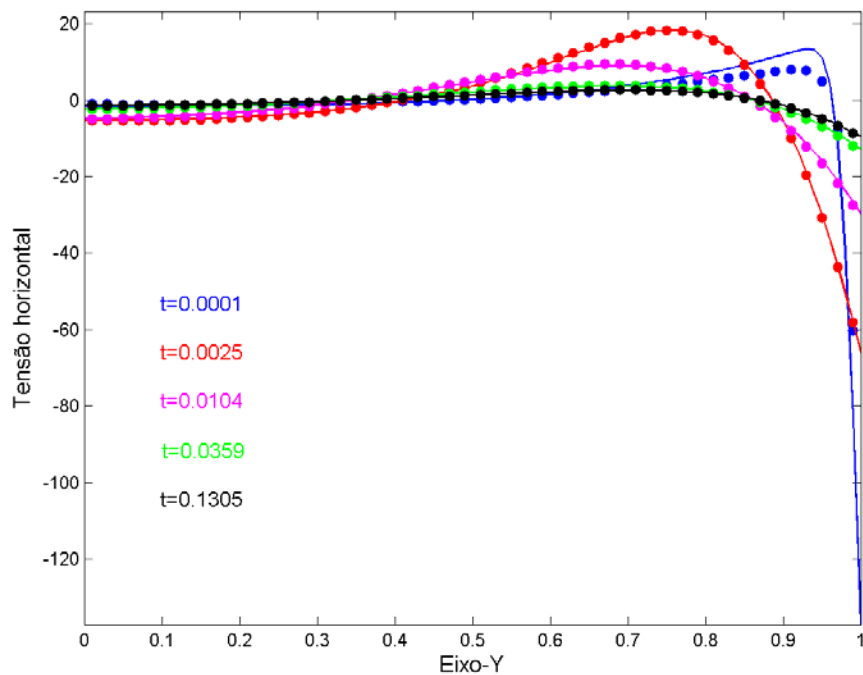


Figura 4.13 – Análise elástica da placa de material com graduação funcional (5 x 50 células).

4.2.3. Análise Estacionária de um Tubo de Parede Grossa de Material Homogêneo

A Figura 4.14 mostra um tubo de parede grossa de material homogêneo submetido a condições de contorno uniformes de temperatura e de pressão, definidas pelos valores P_E , T_E e h_E , no bordo externo, e P_I , T_I e h_I , no bordo interno, onde P , T e h representam a pressão, a temperatura ambiente e o coeficiente de convecção térmica, respectivamente. Devido à simetria do sistema estrutural, basta analisar um quarto do tubo, impondo condições de contorno que

levem em consideração essa simetria. O campo de temperatura do tubo é admitido inicialmente uniforme e igual a T_0 .

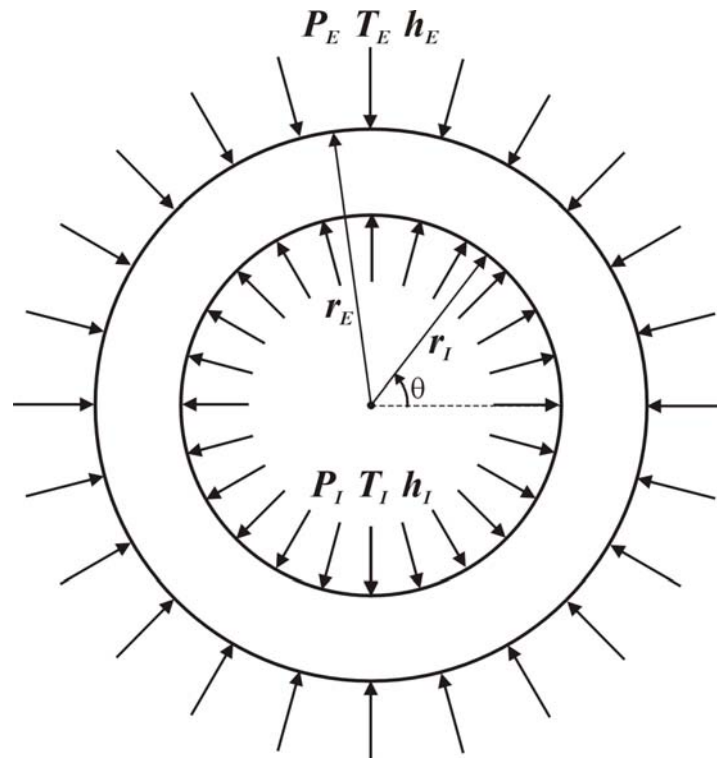


Figura 4.14 – Tubo de parede grossa de material homogêneo.

As soluções analíticas das análises térmica e mecânica, admitindo-se que o tubo está em estado plano de deformações, podem ser encontradas em Arnold et al. (2004), sendo expressas em função da posição radial r , como mostrado abaixo:

Campo de temperatura:

$$T(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \quad (4.10)$$

sendo as constantes c_1 e c_2 dadas por:

$$c_1 = \frac{T_i - T_E}{\ln(r_i/r_E) - k(1/r_i h_i + 1/r_E h_E)} \quad (4.11)$$

$$c_2 = \frac{T_i - T_E}{\ln(r_i/r_E) - k(1/r_i h_i + 1/r_E h_E)} \left(\frac{k}{r_i h_i} - \ln(r_i) \right) + T_i$$

Relações constitutivas:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= Q_1 \varepsilon_r + Q_2 \varepsilon_\theta - \Gamma \Delta T(r) \\ \sigma_\theta &= Q_2 \varepsilon_r + Q_1 \varepsilon_\theta - \Gamma \Delta T(r)\end{aligned}\quad (4.12)$$

onde:

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ Q_2 &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \Gamma &= \frac{E\alpha}{1-2\nu}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Relações deformação-deslocamento radial:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Campo de deslocamento radial:

$$u_r(r) = \frac{\Gamma}{Q_1} \frac{1}{r} \int_{r_I}^r \Delta T(r) r dr + c_3 r + \frac{c_4}{r}\quad (4.15)$$

sendo:

$$\begin{aligned}c_4 &= \frac{-\left(1 - \frac{Q_1}{Q_2}\right) \frac{\Gamma}{r_E^2} \int_{r_I}^{r_E} \Delta T(r) r dr + P_E - P_I}{(Q_1 - Q_2) \left(\frac{1}{r_E^2} - \frac{1}{r_I^2}\right)} \\ c_3 &= \frac{-P_I + \frac{c_4}{r_I^2} (Q_1 - Q_2)}{Q_1 + Q_2}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Nas análises numéricas deste problema foram utilizadas as formulações convencional e paramétrica da teoria de volumes finitos, com o intuito de evidenciar as vantagens da segunda na análise de estruturas que apresentam contorno curvo.

Para as análises utilizando a formulação convencional da teoria de volumes finitos, as condições de contorno para as superfícies interna e externa do tubo foram estabelecidas como mostrado a seguir.

Análise Térmica:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_r \text{ sen}(\theta) \Rightarrow h_1 = h_r \text{ sen}(\theta) \\ q_2 &= q_r \text{ cos}(\theta) \Rightarrow h_2 = h_r \text{ cos}(\theta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Análise Mecânica:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_r \text{ sen}^2(\theta) \\ \sigma_{22} &= \sigma_r \text{ cos}^2(\theta) \\ \sigma_{12} &= \sigma_r \text{ sen}(\theta)\text{cos}(\theta) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde θ é o ângulo formado com a horizontal e q_r e σ_r são o fluxo de calor e a tensão normal na direção radial, respectivamente.

Para a análise mecânica usando a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos, as condições de contorno para as superfícies interna e externa do tubo foram estabelecidas como segue:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_r \text{ sen}(\theta) \\ t_y &= \sigma_r \text{ cos}(\theta) \end{aligned} \quad (4.19)$$

sendo t_x e t_y as componentes do vetor de tração atuante em um ponto da superfície do tubo.

As propriedades do material do tubo e os parâmetros adotados nas análises estão nas Tabelas 4.3 e 4.4.

Tabela 4.3 – Propriedades do material do tubo.

Propriedade	Valor
k	$4,01 \cdot 10^{-4}$ BTU/in.s°F
E	$4,35 \cdot 10^7$ psi
ν	0,22
α	$1,83 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{F}$

Tabela 4.4 – Parâmetros adotados nas análises.

Parâmetro	Valor
r_E	1 in
r_I	0,8 in
T_E	3600 °F
T_I	70 °F
T_0	70 °F
h_E	0,0003 BTU/in ² s°F
h_I	0,0385 BTU/in ² s°F
P_E	1000 psi
P_I	10.000 psi

Enquanto na formulação convencional foram contabilizadas 2.830 células preenchidas com material, numa malha de 100 por 100 células, na formulação paramétrica utilizou-se uma malha de 15 por 15 células distribuídas nas direções radial e circunferencial, totalizando 225, como ilustra a Figura 4.15. Apesar do menor número de células utilizadas na formulação paramétrica, os gráficos apresentados nas Figuras 4.16 a 4.19 mostram uma maior uniformidade dos resultados obtidos com a formulação paramétrica e a presença de *perturbações* no campo de tensões oriundo da formulação convencional, como comentado em Arnold et al. (2004).

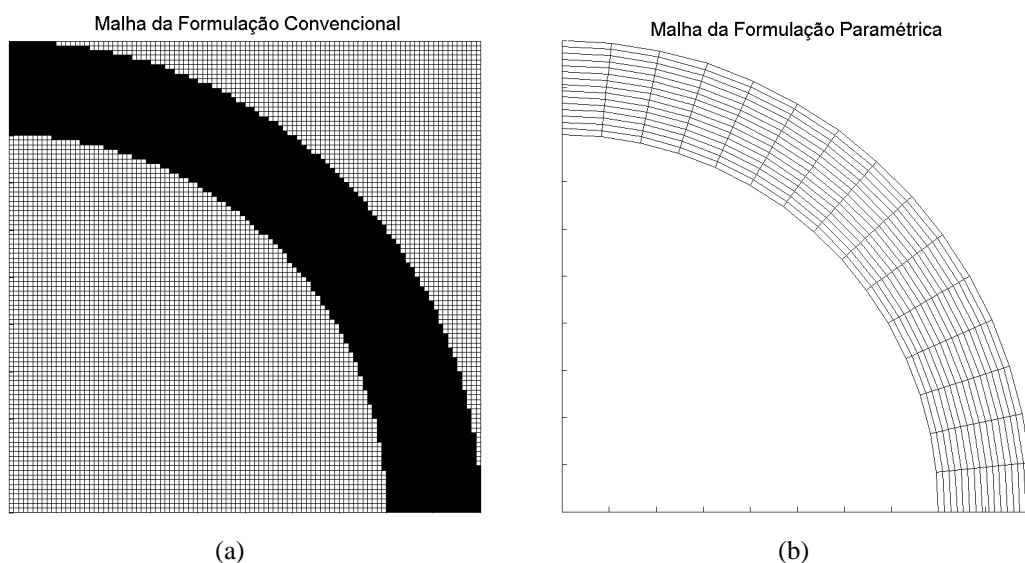


Figura 4.15 – Malhas utilizadas nas análises: (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.

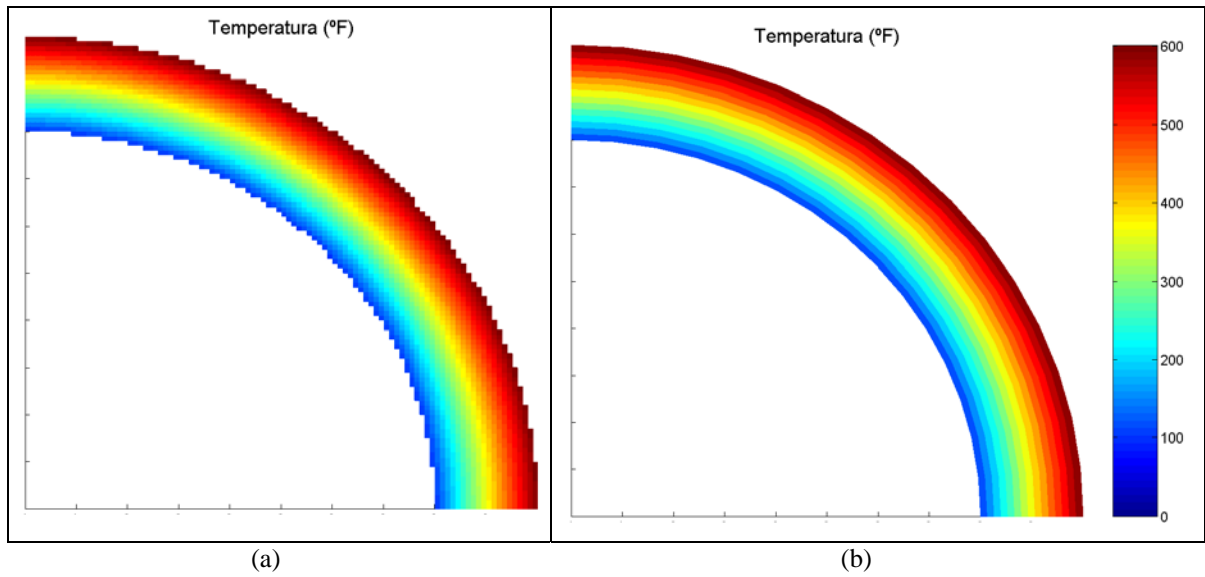


Figura 4.16 – Campo de temperatura: (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.

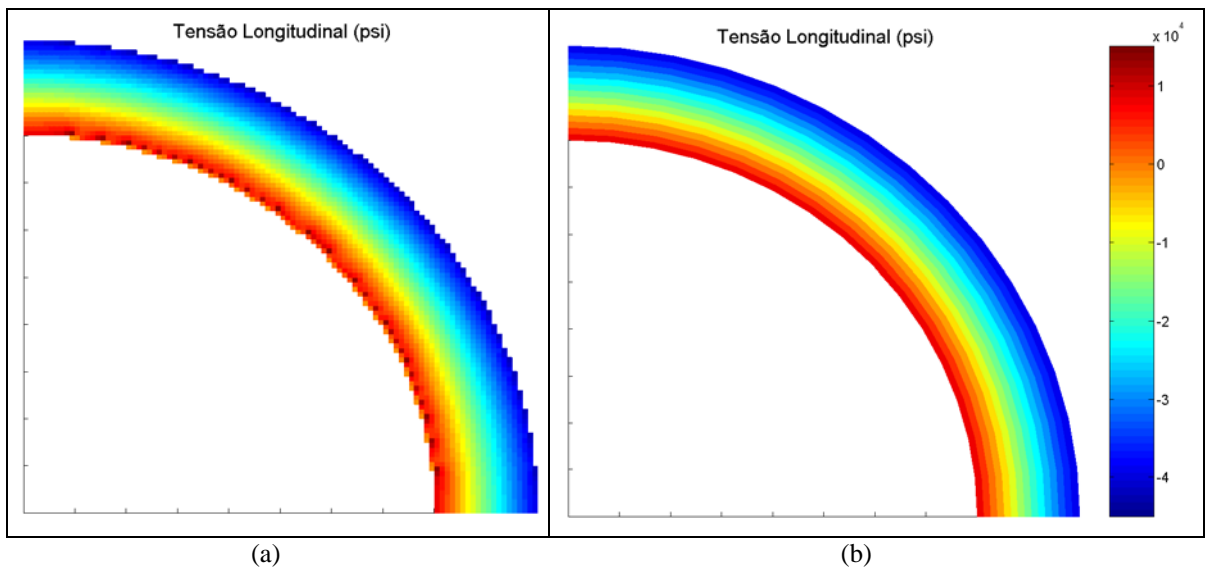


Figura 4.17 – Campo de tensão longitudinal σ_z : (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.

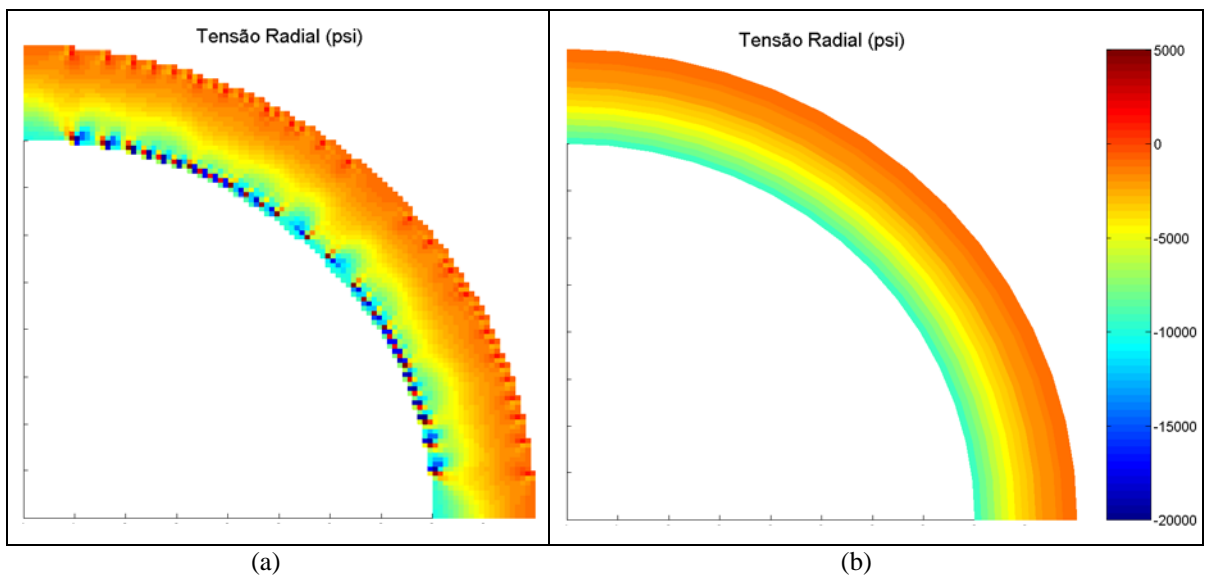


Figura 4.18 – Campo de tensão radial σ_r : (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.

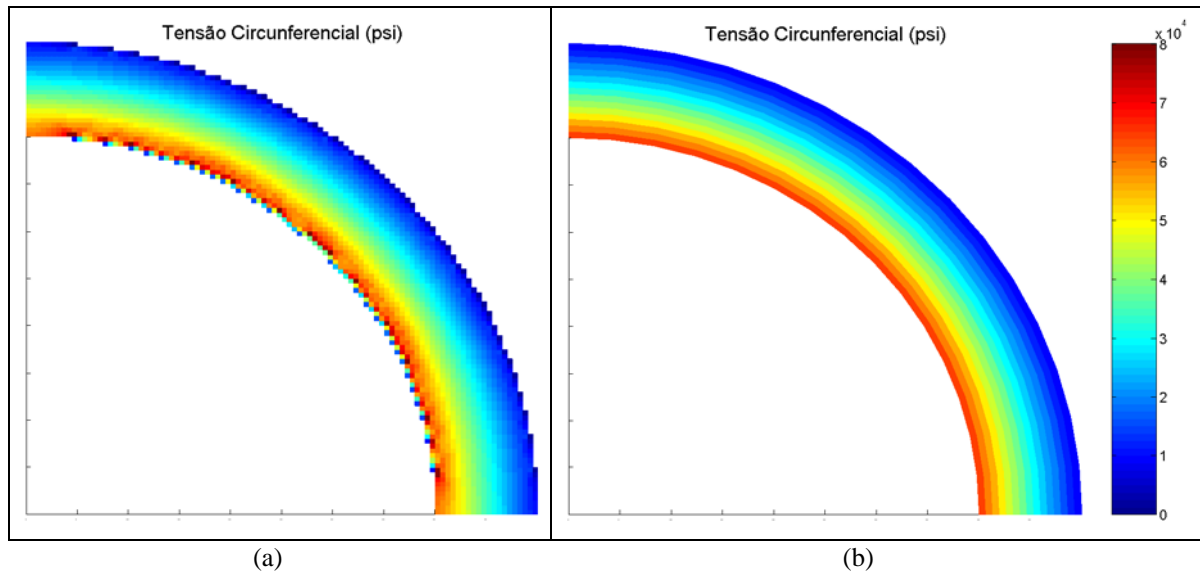


Figura 4.19 – Campo de tensão circunferencial σ_θ : (a) Formulação Convencional e (b) Formulação Paramétrica.

Nas Figuras 4.20 a 4.22 são mostrados os resultados da análise termoelástica numa seção média do tubo, $\theta = 45^\circ$, comparando os valores obtidos com as formulações convencional e paramétrica com as soluções analíticas apresentadas nas equações 4.10 e 4.12. Nota-se uma maior precisão da formulação paramétrica em relação à convencional, principalmente no que diz respeito ao campo de tensões.

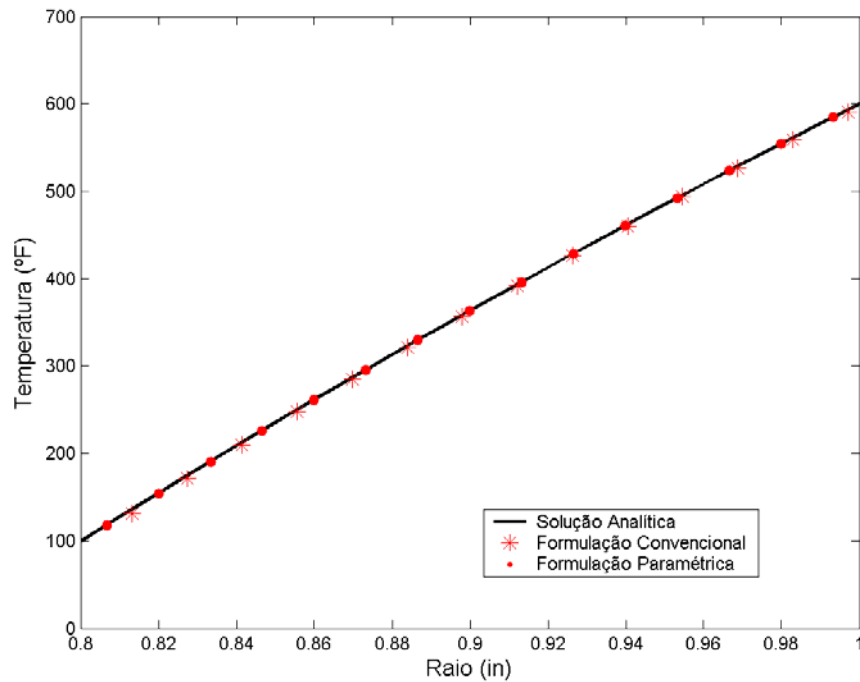


Figura 4.20 – Temperatura em função da posição radial para o tubo de parede grossa.

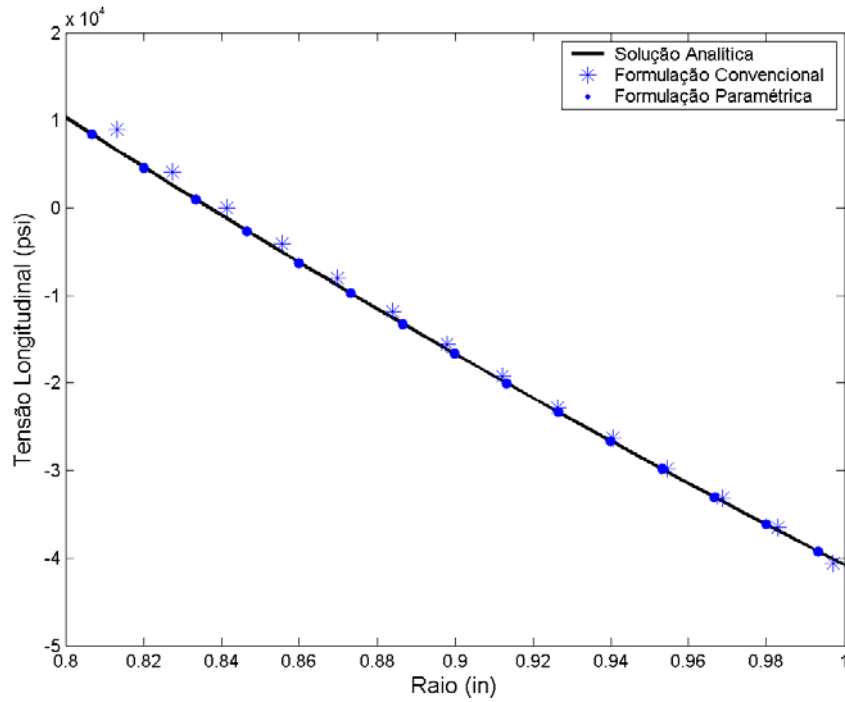


Figura 4.21 – Tensão longitudinal em função da posição radial para o tubo de parede grossa.

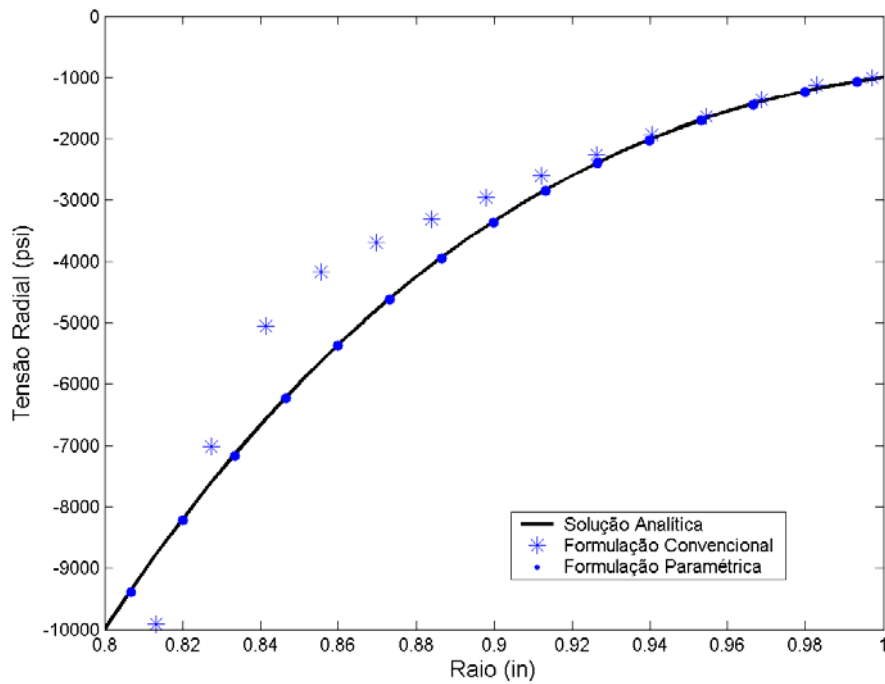


Figura 4.22 – Tensão radial em função da posição radial para o tubo de parede grossa.

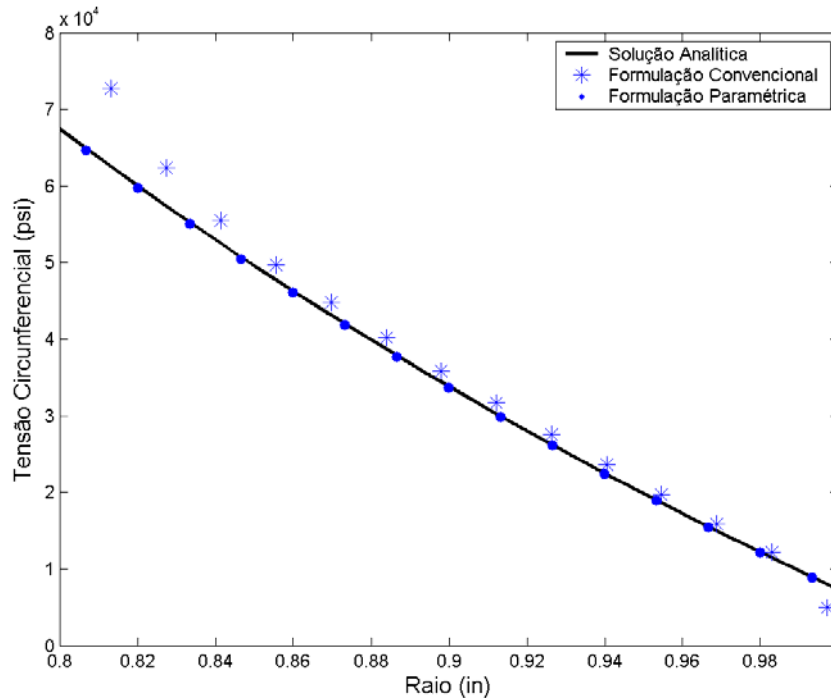


Figura 4.23 – Tensão circunferencial em função da posição radial para o tubo de parede grossa.

4.2.4. Análise Estacionária de um Tubo de Parede Grossa de Material com Gradação Funcional

Nesta seção é analisado um tubo de parede grossa de material com gradação funcional submetido às mesmas condições de contorno do tubo da seção 4.2.3. O campo de temperatura do tubo é admitido inicialmente uniforme e igual a zero.

As deduções das soluções analíticas para as análises térmica e mecânica, admitindo-se que o tubo encontra-se em um estado plano de deformações, podem ser encontradas em Jabbari et al. (2002), e são expressas em função da posição radial r tal como apresentado a seguir.

A condutividade térmica k deve ser definida em função da posição radial por:

$$k(r) = k_0 r^{m_3} \quad (4.20)$$

sendo k_0 um valor de referência e m_3 um parâmetro relacionado com a heterogeneidade do material.

Desta forma, o campo de temperatura é expresso em função da posição radial r por:

$$T(r) = -\frac{A_1}{m_3} r^{-m_3} + A_2 \quad (4.21)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{C_{21}f_1 - C_{11}f_2}{C_{21}\left(C_{12}r_I^{-m_3-1} - \frac{C_{11}r_I^{-m_3}}{m_3}\right) - C_{11}\left(C_{22}r_E^{-m_3-1} - \frac{C_{21}r_E^{-m_3}}{m_3}\right)} \\
 A_2 &= \frac{\left(C_{12}r_I^{-m_3-1} - \frac{C_{11}r_I^{-m_3}}{m_3}\right)f_2 - \left(C_{22}r_E^{-m_3-1} - \frac{C_{21}r_E^{-m_3}}{m_3}\right)f_1}{C_{21}\left(C_{12}r_I^{-m_3-1} - \frac{C_{11}r_I^{-m_3}}{m_3}\right) - C_{11}\left(C_{22}r_E^{-m_3-1} - \frac{C_{21}r_E^{-m_3}}{m_3}\right)}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Para as condições de contorno do problema, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -h_I \\
 C_{12} &= k_I \\
 C_{21} &= h_E \\
 C_{22} &= k_E \\
 f_1 &= -h_I T_I \\
 f_2 &= h_E T_E
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

sendo $k_I = k_0 r_I^{m_3}$ e $k_E = k_0 r_E^{m_3}$.

Para a análise mecânica, o módulo de elasticidade E , o coeficiente de Poisson ν e o coeficiente de expansão térmica α são definidos em função da posição radial r como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
 E(r) &= E_0 r^{m_1} \\
 \nu(r) &= \nu_0 \\
 \alpha(r) &= \alpha_0 r^{m_2}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde E_0 , ν_0 e α_0 são valores de referência e m_1 e m_2 são constantes que definem a heterogeneidade do material.

Assim, o campo de deslocamento radial é expresso em função de r por:

$$u_r(r) = B_1 r^{n_1} + B_2 r^{n_2} + D_1 r^{m_2+1} + D_2 r^{m_2-m_3+1} \tag{4.25}$$

sendo:

$$\eta_{1,2} = -\frac{m_1}{2} \mp \sqrt{\frac{m_1^2}{4} - \frac{\nu_0 m_1}{1-\nu_0} + 1}$$

$$D_1 = \frac{(1+\nu_0)\alpha_0(m_1+m_2)}{(m_2+1)m_2 + (m_2+1)(m_1+1) + \frac{\nu_0 m_1}{1-\nu_0} - 1} \frac{A_2}{1-\nu_0}$$

$$D_2 = \frac{(1+\nu_0)\alpha_0(m_3-m_1-m_2)}{(m_2-m_3+1)(m_2-m_3) + (m_2-m_3+1)(m_1+1) + \frac{\nu_0 m_1}{1-\nu_0} - 1} \frac{A_1}{(1-\nu_0)m_3}$$
(4.26)

Para as condições de contorno do problema, tem-se que:

$$B_1 = \frac{d_5 d_4 - d_6 d_2}{d_1 d_4 - d_2 d_3}$$

$$B_2 = \frac{d_1 d_6 - d_3 d_5}{d_1 d_4 - d_2 d_3}$$
(4.27)

onde:

$$d_1 = [(1-\nu_0)\eta_1 + \nu_0] r_I^{\eta_1+m_1-1}$$

$$d_2 = [(1-\nu_0)\eta_2 + \nu_0] r_I^{\eta_2+m_1-1}$$

$$d_3 = [(1-\nu_0)\eta_1 + \nu_0] r_E^{\eta_1+m_1-1}$$

$$d_4 = [(1-\nu_0)\eta_2 + \nu_0] r_E^{\eta_2+m_1-1}$$

$$d_5 = -\frac{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}{E_0} P_I - \left\{ [(1-\nu_0)m_2 + 1] D_1 - (1+\nu_0)\alpha_0 A_2 \right\} r_I^{m_1+m_2}$$

$$- \left\{ [(1-\nu_0)(m_2-m_3) + 1] D_2 + \frac{(1+\nu_0)\alpha_0}{m_3} A_1 \right\} r_I^{m_1+m_2-m_3}$$

$$d_6 = -\frac{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}{E_0} P_E - \left\{ [(1-\nu_0)m_2 + 1] D_1 - (1+\nu_0)\alpha_0 A_2 \right\} r_E^{m_1+m_2}$$

$$- \left\{ [(1-\nu_0)(m_2-m_3) + 1] D_2 + \frac{(1+\nu_0)\alpha_0}{m_3} A_1 \right\} r_E^{m_1+m_2-m_3}$$
(4.28)

Desta forma, tem-se como solução analítica para o campo de tensões as seguintes expressões em função da posição radial r :

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) = & \frac{E_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)} \left\{ [(1-\nu_0)\eta_1 + \nu_0] B_1 r^{\eta_1+m_1-1} + [(1-\nu_0)\eta_2 + \nu_0] B_2 r^{\eta_2+m_1-1} \right. \\ & + \left. \left\{ [(1-\nu_0)m_2 + 1] D_1 - (1+\nu_0)\alpha_0 A_2 \right\} r^{m_1+m_2} \right. \\ & + \left. \left\{ [(1-\nu_0)(m_2 - m_3) + 1] D_2 + \frac{(1+\nu_0)\alpha_0}{m_3} A_1 \right\} r^{m_1+m_2-m_3} \right\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r) = & \frac{E_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)} \left\{ [\nu_0\eta_1 + 1 - \nu_0] B_1 r^{\eta_1+m_1-1} + [\nu_0\eta_2 + 1 - \nu_0] B_2 r^{\eta_2+m_1-1} \right. \\ & + \left. \left\{ (\nu_0 m_2 + 1) D_1 - (1+\nu_0)\alpha_0 A_2 \right\} r^{m_1+m_2} \right. \\ & + \left. \left\{ [\nu_0(m_2 - m_3) + 1] D_2 + \frac{(1+\nu_0)\alpha_0}{m_3} A_1 \right\} r^{m_1+m_2-m_3} \right\} \end{aligned}$$

Nas Tabelas 4.5 e 4.6 estão, respectivamente, às propriedades de referência para o material do tubo e os parâmetros que definem a geometria e as condições de contorno do problema.

Tabela 4.5 – Propriedades de referência do material do tubo.

Propriedade	Valor
k_0	$4,01 \cdot 10^{-4}$ BTU/in.s°F
E_0	$4,35 \cdot 10^7$ psi
ν_0	0,22
α_0	$1,83 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{F}$

Tabela 4.6 – Parâmetros que definem a geometria e as condições de contorno do problema.

Parâmetro	Valor
r_E	2 in
r_I	1 in
T_E	0 °F
T_I	3500 °F
h_E	0,0003 BTU/in ² s°F
h_I	0,0385 BTU/in ² s°F
P_E	1000 psi
P_I	10.000 psi

No caso dos parâmetros que definem a heterogeneidade do material do tubo foram admitidos os seguintes valores: $m_1=1,5$, $m_2=1$ e $m_3=1$.

A malha utilizada nas análises térmica e mecânica com a formulação paramétrica foi a mesma do exemplo anterior, 15 por 15 células distribuídas nas direções radial e circunferencial, totalizando 225 células. Nas Figuras 4.24 a 4.26 estão os resultados obtidos com a formulação paramétrica, que por sua vez apresentaram uma excelente concordância com a solução analítica.

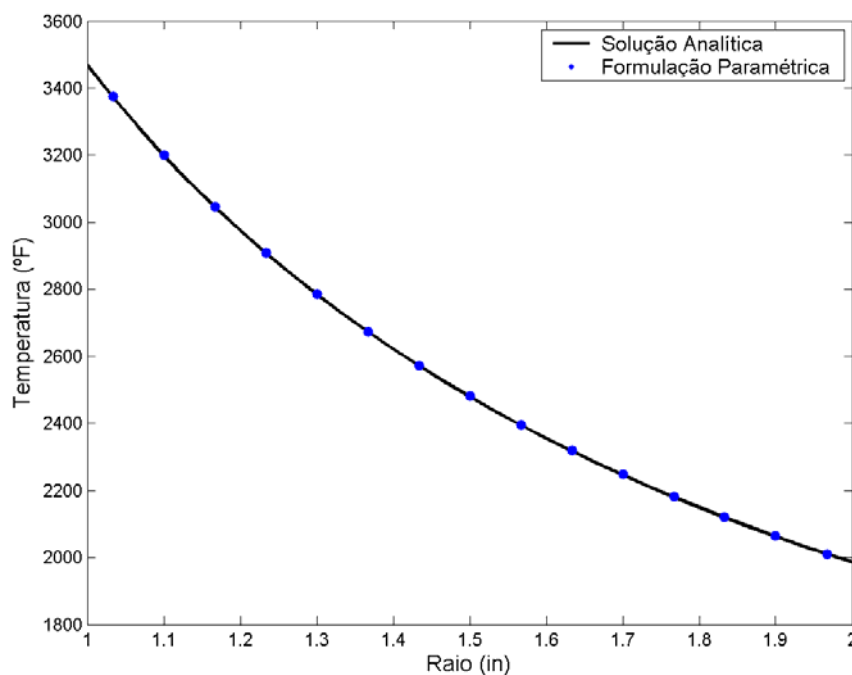


Figura 4.24 – Temperatura em função da posição radial para o tubo de material com gradação funcional.

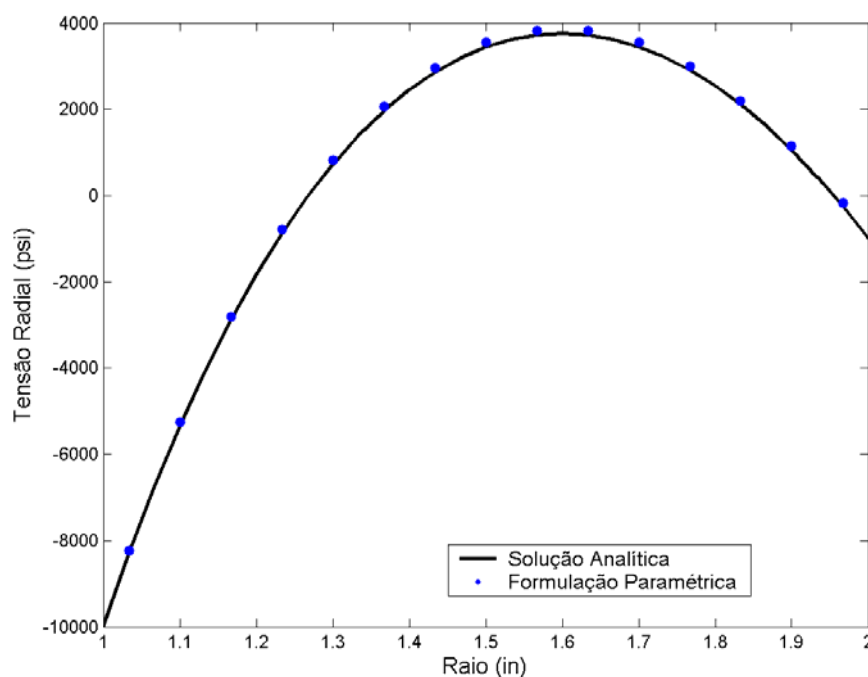


Figura 4.25 – Tensão radial em função da posição radial para o tubo de material com gradação funcional.

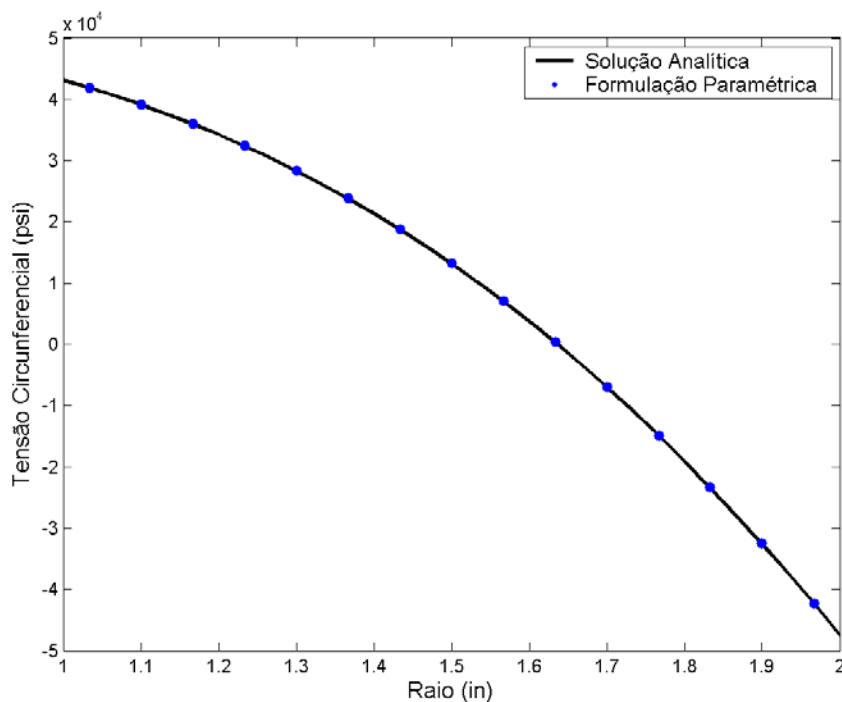


Figura 4.26 – Tensão circunferencial em função da posição radial para o tubo de material com graduação funcional.

4.2.5. Análise Transiente de um Tubo de Parede Grossa de Material Homogêneo

A Figura 4.27 mostra um quarto do tubo de parede grossa de material homogêneo que se encontra inicialmente com um campo de temperatura uniforme e igual a zero. A temperatura da superfície interna é subitamente elevada para um valor unitário enquanto a superfície externa permanece com a temperatura constante e igual a zero. O tubo só apresenta restrição aos deslocamentos de corpo rígido, e devido à simetria do problema, basta analisar um quarto do mesmo, impondo-se condições de contorno que levem isto em consideração.

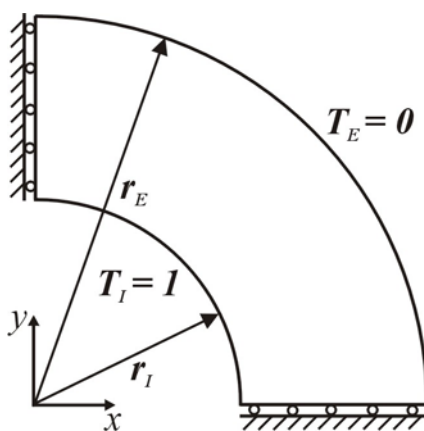


Figura 4.27 – Um quarto do tubo de parede grossa de material homogêneo.

As deduções das soluções analíticas para os campos de temperatura e de tensão podem ser encontradas nos livros clássicos de Carslaw e Jaeger (1959) e Timoshenko e Goodier (1951). Estas soluções são expressas em função da posição radial r e do tempo t como mostrado abaixo:

Campo de Temperatura:

$$T(r,t) = \frac{\ln\left(\frac{r_E}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_E}{r_I}\right)} T_I + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r_E \alpha_n) J_0(r_I \alpha_n)}{J_0^2(r_I \alpha_n) - J_0^2(r_E \alpha_n)} [J_0(r \alpha_n) Y_0(r_E \alpha_n) - J_0(r_E \alpha_n) Y_0(r \alpha_n)] \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\kappa}\right) \quad (4.30)$$

sendo J_0 e Y_0 as funções de Bessel do primeiro e do segundo tipo, respectivamente, $\kappa = \frac{\rho C}{k}$ e

α_n as raízes da seguinte equação característica:

$$J_0(r_I \alpha_n) Y_0(r_E \alpha_n) - J_0(r_E \alpha_n) Y_0(r_I \alpha_n) = 0 \quad (4.31)$$

Campo de Tensões:

$$\sigma_r(r,t) = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_I}^r T(r,t) r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (4.32)$$

$$\sigma_\theta(r,t) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_I}^r T(r,t) r dr - \frac{\alpha E T(r,t)}{1-\nu} + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right)$$

onde σ_r e σ_θ são as tensões nas direções radial e circunferencial, respectivamente, e as constantes C_1 e C_2 podem ser calculadas, para o caso de estado plano de deformações, como mostrado a seguir:

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r_E^2 - r_I^2} \int_{r_I}^{r_E} T(r,t) r dr \quad (4.33)$$

$$C_2 = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{r_I^2}{r_E^2 - r_I^2} \int_{r_I}^{r_E} T(r,t) r dr$$

As propriedades adimensionais para o material do tubo e o restante dos parâmetros adimensionais adotados nas análises estão nas Tabelas 4.7 e 4.8.

Tabela 4.7 – Propriedades adimensionais do material do tubo.

Propriedade	Valor
k	1,0
ρ	1,0
C	1,0
E	1,0
ν	0,3
α	0,02

Tabela 4.8 – Parâmetros adimensionais adotados nas análises.

Parâmetro	Valor
r_E	2,0
r_I	1,5
T_E	0,0
T_I	1,0

A malha utilizada nas análises térmica e mecânica encontra-se na Figura 4.28, apresentando 50 por 9 células, totalizando 450, distribuídas nas direções radial e circunferencial, respectivamente.

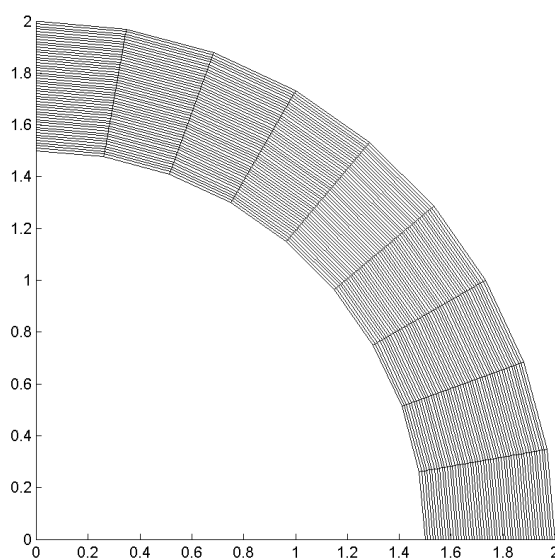


Figura 4.28 – Malha utilizada nas análises transientes para o tubo de parede grossa de material homogêneo.

Nas Figuras 4.29 a 4.31 estão os resultados das análises numéricas com a formulação paramétrica, em forma de pontos, comparando-os com a solução analítica, representada por traço contínuo. O incremento de tempo adotado no início da análise numérica foi de 10^{-4} , progredindo numa razão geométrica de 1,05 até se estabelecer a convergência com a solução em regime estacionário. Os resultados obtidos podem ser considerados bons, uma vez que as maiores divergências em relação à solução analítica ocorreram somente nos primeiros passos da análise para a tensão radial, que apresenta uma ordem de grandeza dez vezes menor em relação à tensão circunferencial.

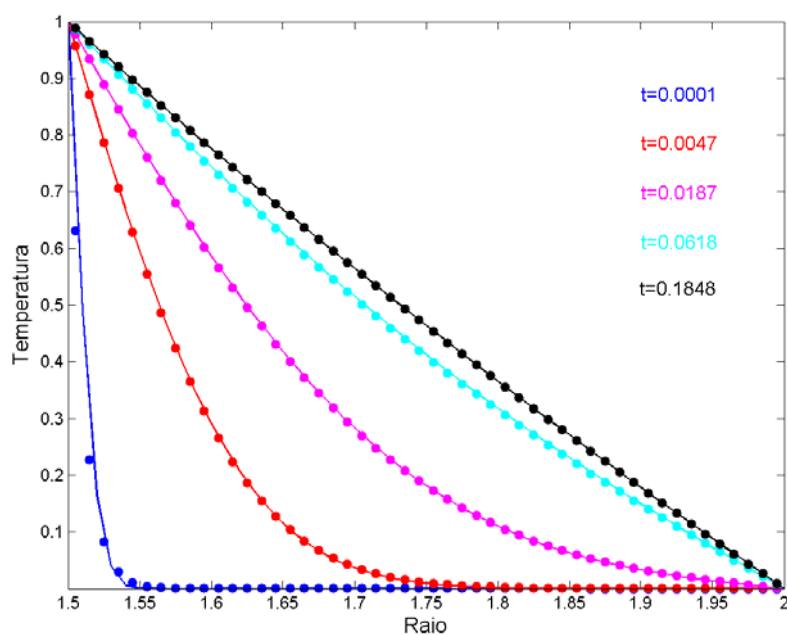


Figura 4.29 – Campo de temperatura para o tubo de parede grossa de material homogêneo.

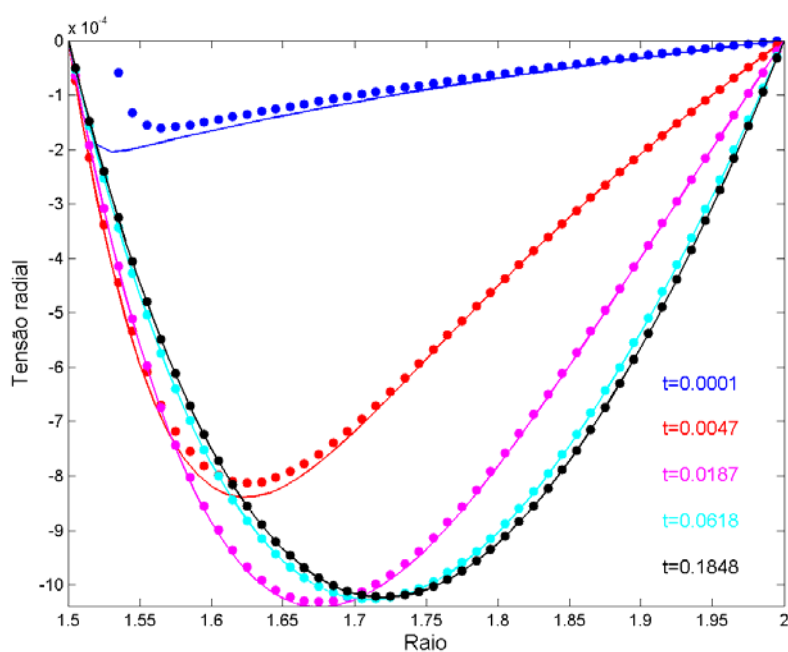


Figura 4.30 – Campo de tensão radial do tubo de parede grossa de material homogêneo.

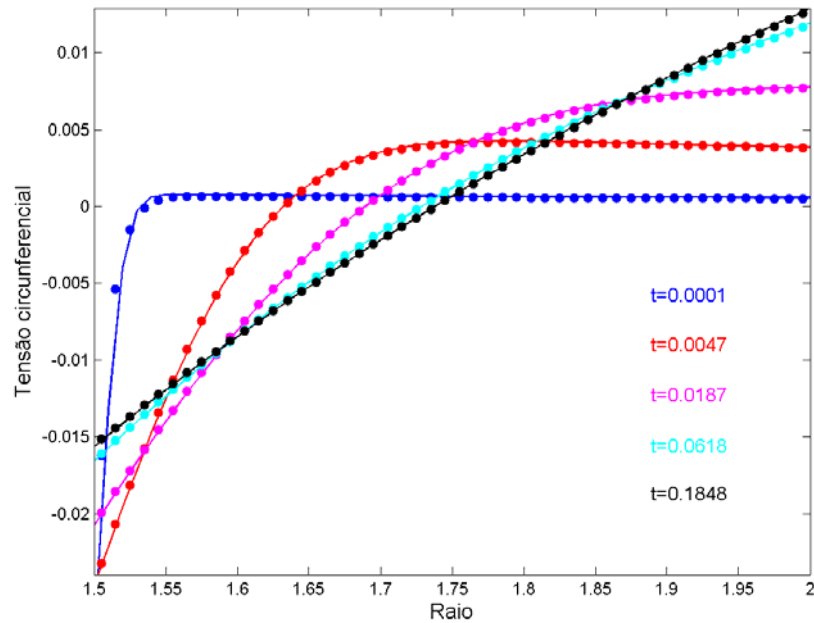


Figura 4.31 – Campo de tensão circunferencial do tubo de parede grossa de material homogêneo.

4.2.6. Análise Mecânica de uma Viga Engastada

Nesta seção é analisada uma viga engastada, cuja solução analítica é conhecida e pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1951). As ações atuantes nas extremidades da viga estão esboçadas na Figura 4.32, assim como suas dimensões e o sistema de coordenadas adotado.

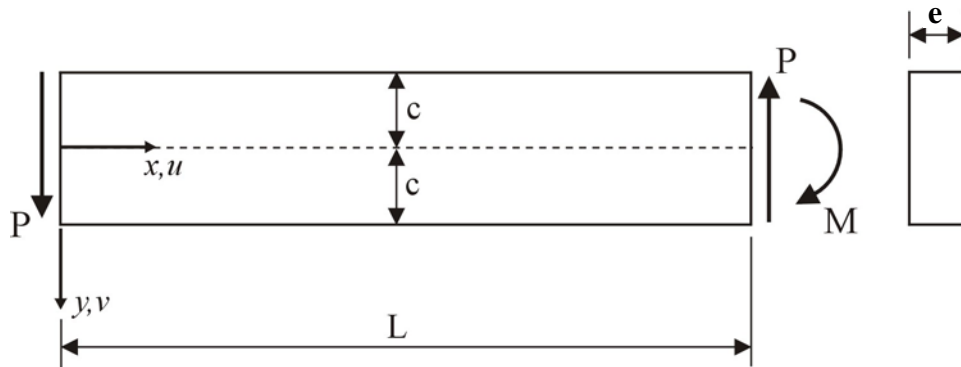


Figura 4.32 – Ações atuantes nas extremidades de uma viga engastada.

A solução analítica para o campo de tensões em função das coordenadas x e y é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{3P}{2c^3t}xy \\ \sigma_{yy}(x, y) &= 0 \\ \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{3P}{4ct}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)\end{aligned}\tag{4.34}$$

O campo de deslocamentos pode ser expresso em função das coordenadas x e y , para o campo de tensões (4.34), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{P}{2EI}x^2y + C_1y + \frac{P}{6GI}y^3 - \nu\frac{P}{6EI}y^3 + C_3 \\ v(x, y) &= \nu\frac{P}{2EI}xy^2 - \frac{Pc^2}{2GI}x - C_1x + \frac{P}{6EI}x^3 + C_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo E e G os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente, ν o coeficiente de Poisson e I o momento de inércia da seção transversal.

Para a determinação das constantes C_1 , C_2 e C_3 do campo de deslocamentos são impostas as condições de vinculação representadas na Figura 4.33, sendo estas constantes calculadas como segue:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{2EI}L^2 - \frac{P}{6GI}c^2 + \nu\frac{P}{6EI}c^2 \\ C_2 &= \frac{P}{3EI}L^3 + \frac{P}{3GI}c^2L + \nu\frac{P}{6EI}c^2L \\ C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

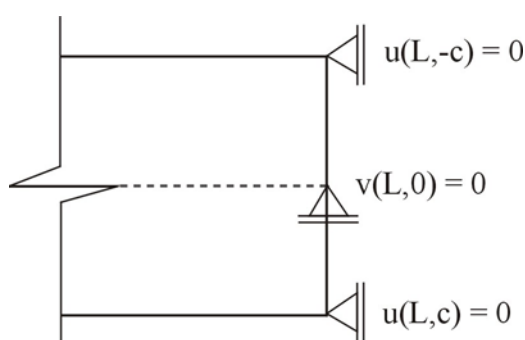


Figura 4.33 – Condições de vinculação impostas à viga engastada.

Para a análise numérica deste exemplo são utilizados o método dos elementos finitos (usando integração completa) e a teoria de volumes finitos, com o intuito de confrontar os resultados obtidos por estes dois métodos.

A formulação tradicional em deslocamentos do método dos elementos finitos pode ser tratada como uma forma fraca do método dos resíduos ponderados, com uma peculiar função de aproximação do campo de deslocamentos em todo domínio da estrutura. A formulação apresentada no capítulo 2 considera uma aproximação do campo de deslocamentos em

subdomínios, denominados células, onde as equações de equilíbrio são satisfeitas em termos médios no volume, e as condições de compatibilidade em deslocamento e em tensão são satisfeitas em termos médios nas faces.

Como mostra o esquema da Figura 4.34, em média, o número de graus de liberdade (*gl*) resultante de uma análise utilizando a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos é 100% superior ao do elemento finito Q4 e 50% inferior ao do elemento finito Q8, colocando-se em uma posição intermediária entre estes dois elementos.

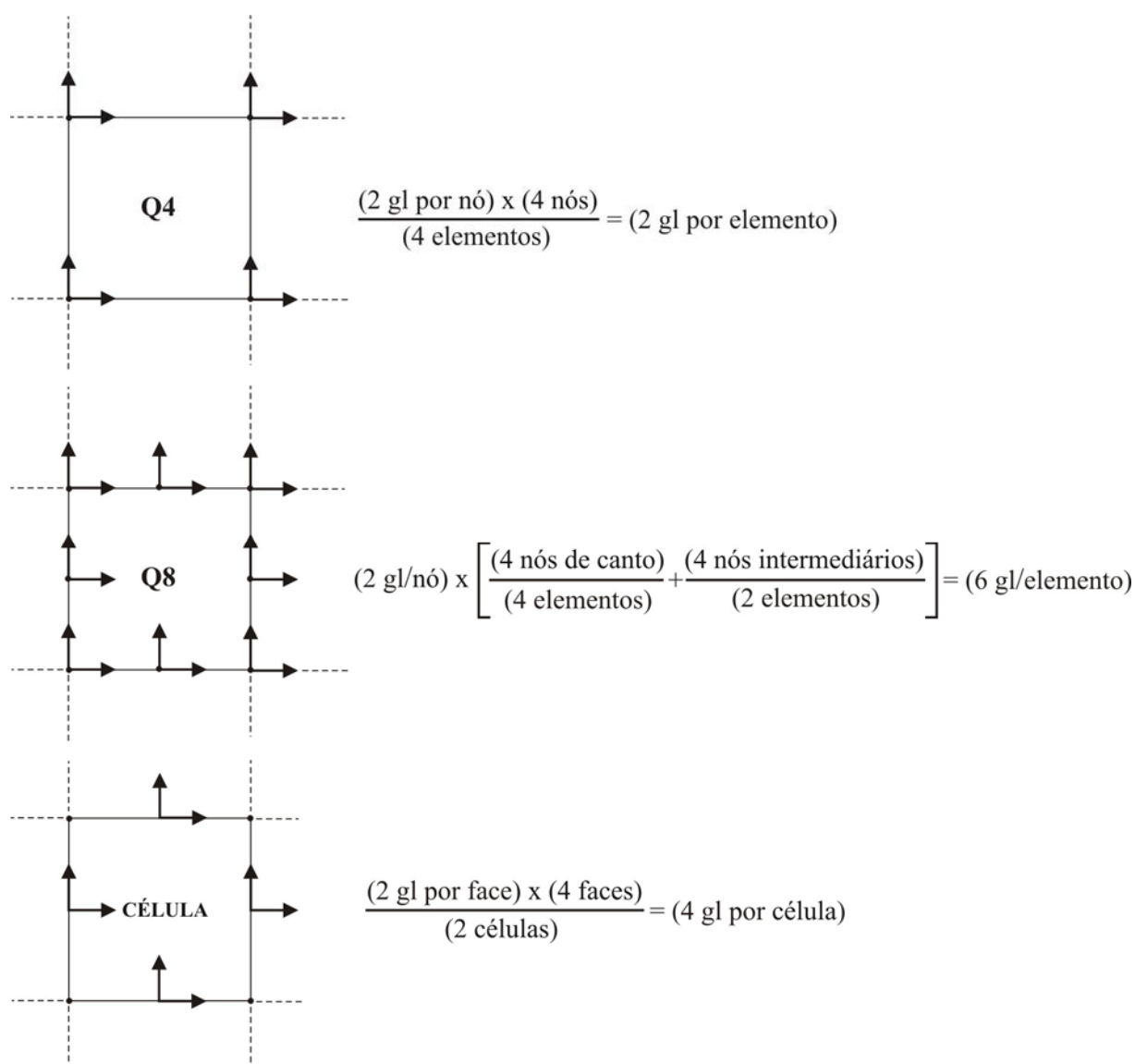


Figura 4.34 – Número de graus de liberdade em média por célula (elemento).

Nas análises apresentadas a seguir é utilizada uma malha de 15 por 12 células (elementos) distribuídas nas direções horizontal e vertical, respectivamente. No entanto, a malha para a teoria de volumes finitos diferencia-se daquela utilizada no método dos elementos finitos, apresentando células menores no contorno com o intuito de captar as informações próximas aos

bordos da viga, como mostra a Figura 4.35, uma vez que neste método obtêm-se informações do campo de deslocamentos e de tensões no centro geométrico de cada célula.

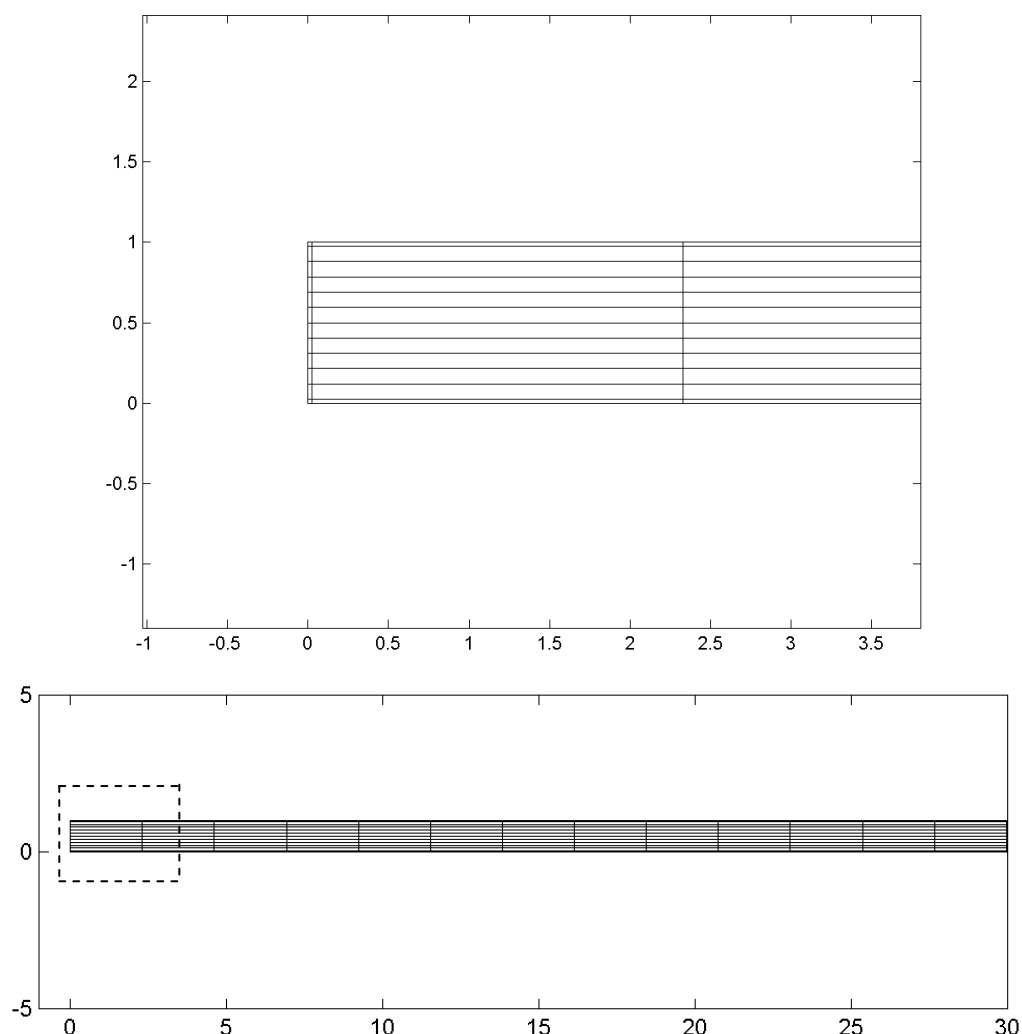


Figura 4.35 – Malha utilizada na teoria de volumes finitos para a viga engastada.

As condições de contorno impostas reproduzem de forma aproximada aquelas correspondentes à solução analítica. Os dados para a análise com o método dos elementos finitos foram gerados no programa MTOOL (1992), aproximando a tensão cisalhante atuante no contorno, que no caso é uma parábola, por seis segmentos de reta que compõem carregamentos com distribuição linear. No caso da teoria de volumes finitos, este carregamento é representado de forma também aproximada, adotando-se os valores da tensão cisalhante no meio da face como a tensão média atuante no bordo externo da célula.

Os dados do problema e as propriedades do material da viga engastada estão nas Tabelas 4.9 e 4.10.

Tabela 4.9 – Dados do problema da viga engastada.

Dado	Valor
L	30 m
c	0,5 m
e	1 m
P	1000 kN

Tabela 4.10 – Propriedades do material da viga engastada.

Propriedade	Valor
E	32000 MPa
ν	0,20

As Figuras 4.36 a 4.38 mostram os resultados obtidos para o campo de deslocamentos utilizando o método dos elementos finitos (em cinza), a teoria de volumes finitos (em azul claro) e a solução analítica (representada pelo traço preto contínuo). Para uma melhor visualização, multiplicou-se por dois os valores obtidos para os deslocamentos. Como se pode observar, o elemento finito Q4 enrijeceu consideravelmente a estrutura, por outro lado, as deformadas obtidas com o elemento finito Q8 e pela teoria de volumes finitos praticamente coincidiram com a solução analítica.

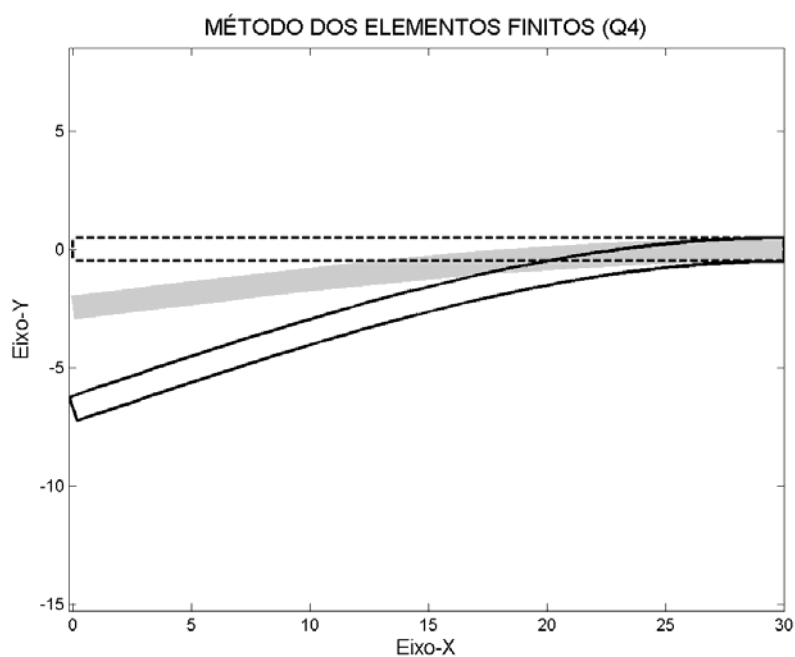


Figura 4.36 – Deformada obtida com o elemento finito Q4 para a viga engastada.

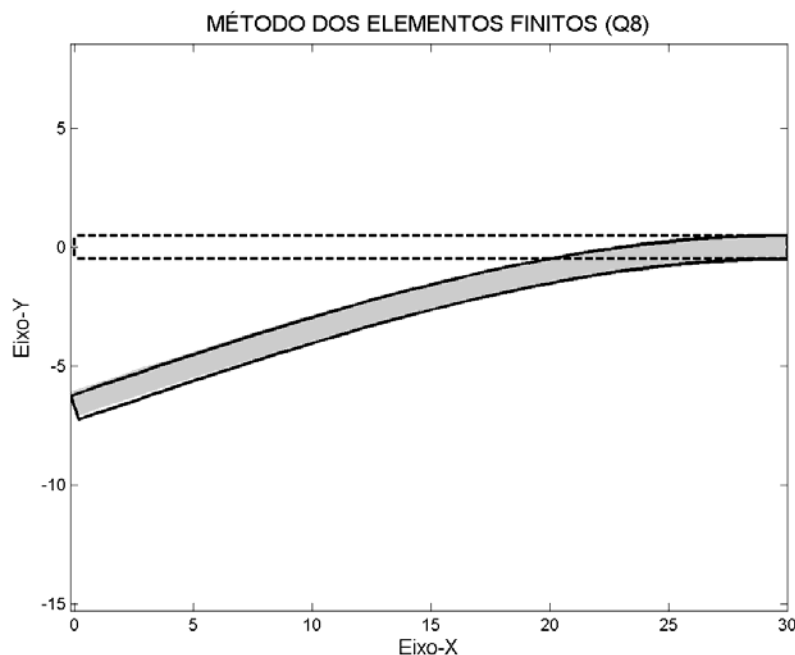


Figura 4.37 – Deformada obtida com o elemento finito Q8 para a viga engastada.

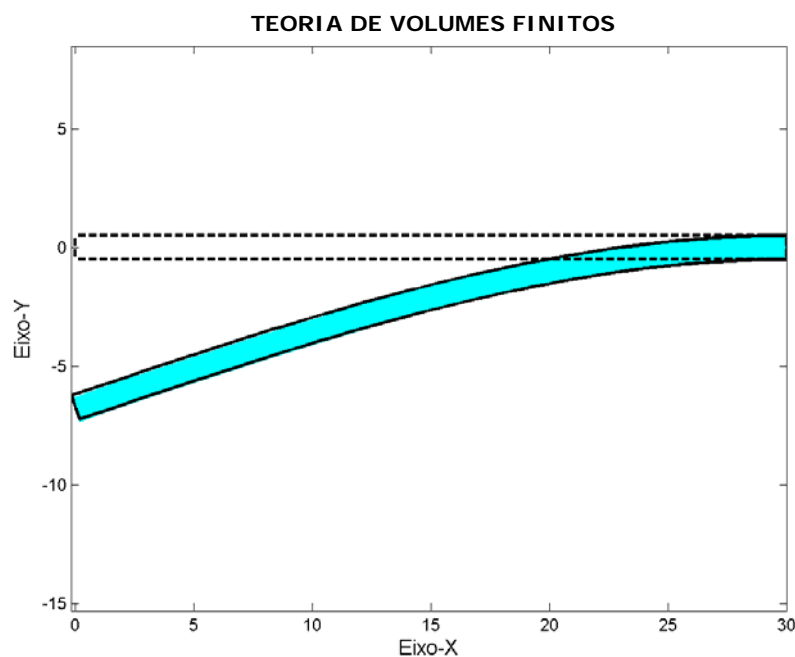


Figura 4.38 – Deformada obtida com a teoria de volumes finitos para a viga engastada.

Nas Figuras 4.39 e 4.40 estão os diagramas de tensão para uma seção média ($x = L/2$) da viga engastada. Para a obtenção das tensões com o método dos elementos finitos foram extrapolados os resultados obtidos nos pontos de integração de Gauss para os nós do elemento, utilizando um plano como superfície de suavização, via aproximação mínima quadrática (suavização local), como proposto em Burnett (1987). Para os nós da estrutura foi feita uma média aritmética destes valores conforme a incidência dos elementos na estrutura (suavização global). Feito isto, interpolou-se linearmente as tensões em qualquer ponto do lado do elemento

com base nos valores das tensões nos nós (suavizados localmente e globalmente). Os resultados obtidos com o elemento finito Q4 divergiram consideravelmente da solução analítica, mostrando a necessidade de uma malha mais refinada. Os resultados com o elemento finito Q8 exibiram uma boa convergência com a solução analítica, no entanto, a teoria de volumes finitos mostrou-se mais precisa.

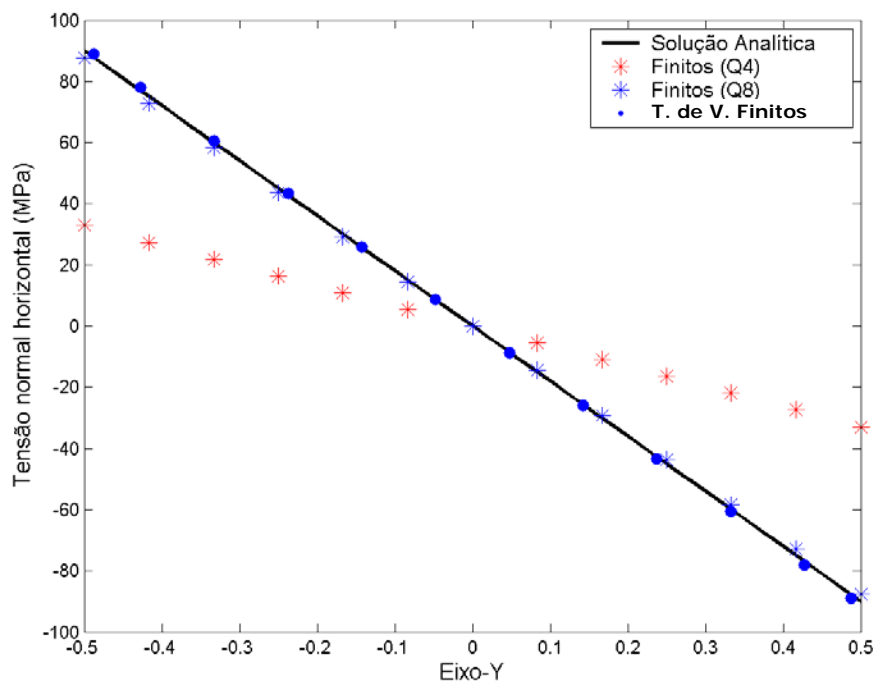


Figura 4.39 – Diagrama de tensão normal horizontal numa seção média da viga engastada.

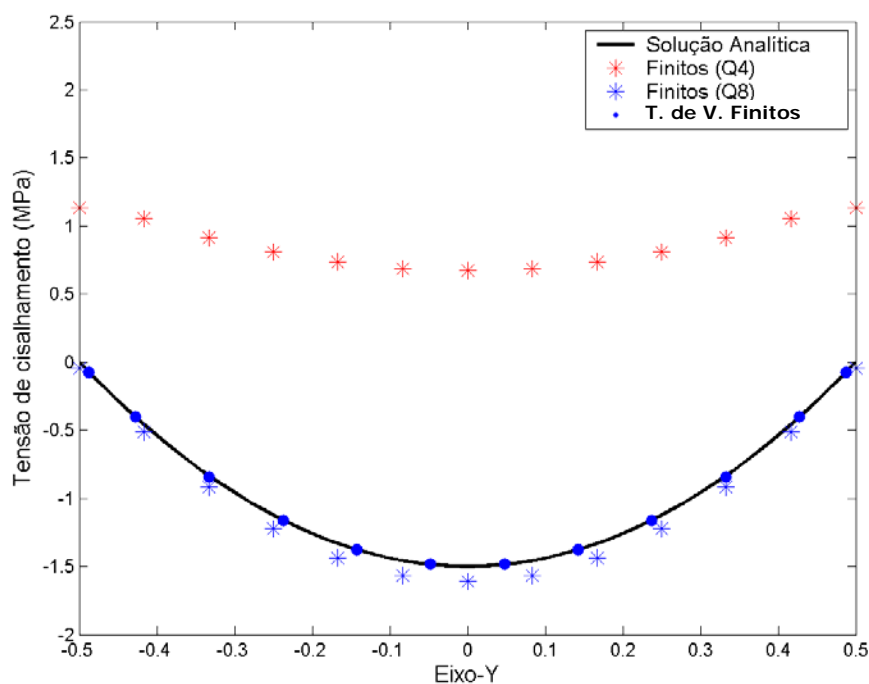


Figura 4.40 – Diagrama de tensão cisalhante numa seção média da viga engastada.

4.2.7. Análise Mecânica de uma Viga Engastada Curva

Nesta seção é analisada uma viga engastada curva, cuja solução analítica é conhecida e pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1951). As ações e vinculações presentes nas extremidades da viga estão esboçadas na Figura 4.41, assim como suas dimensões e o sistema de coordenadas adotado.

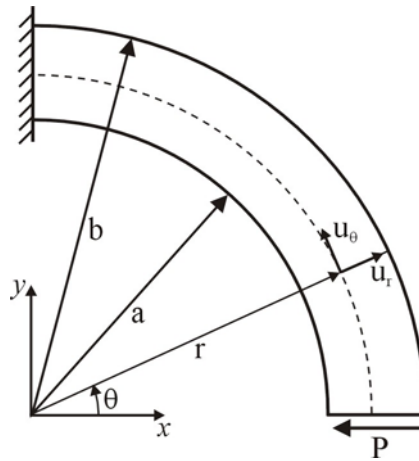


Figura 4.41 – Viga engastada curva.

A solução analítica para o campo de tensões em função das coordenadas r e θ é dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \text{sen}(\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \text{sen}(\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= - \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \text{cos}(\theta)\end{aligned}\tag{4.37}$$

sendo:

$$\begin{aligned}A &= \frac{P}{2N} \\ B &= -\frac{Pa^2b^2}{2N} \\ D &= -\frac{P}{N}(a^2 + b^2) \\ N &= a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}\tag{4.38}$$

O campo de deslocamentos pode ser expresso em função das coordenadas r e θ , para o campo de tensões (4.37), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \theta) &= -\frac{2D}{E} \theta \cos(\theta) + \frac{\text{sen}(\theta)}{E} \left[D(1-\nu) \ln(r) + A(1-3\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right] \\
 &+ K \text{sen}(\theta) + F \cos(\theta) \\
 u_\theta(r, \theta) &= \frac{2D}{E} \theta \cos(\theta) - \frac{\cos(\theta)}{E} \left[A(5+\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} - D(1-\nu) \ln(r) \right] + \frac{D(1+\nu)}{E} \cos(\theta) \\
 &+ K \cos(\theta) - F \text{sen}(\theta) + Hr
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

sendo E e ν o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Para a determinação das constantes K , F e H do campo de deslocamentos são impostas as condições de vinculação representadas na Figura 4.42, sendo estas constantes calculadas como segue:

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{1}{E} \left[D(1-\nu) \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) + A(1-3\nu) \frac{(a+b)^2}{4} + B(1+\nu) \frac{4}{(a+b)^2} \right] \\
 F &= D \frac{\pi}{E} \\
 H &= 0
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

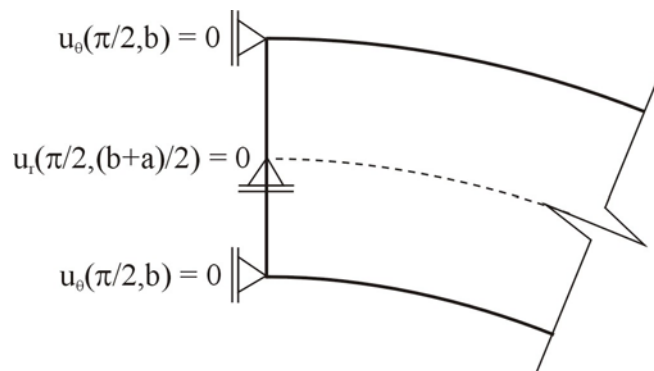


Figura 4.42 – Condições de vinculação impostas à viga engastada curva.

Como na seção anterior, para a análise numérica deste exemplo são utilizados o método dos elementos finitos (usando integração completa) e a teoria de volumes finitos, com o intuito de verificar a qualidade dos resultados obtidos por estes dois métodos.

Nestas análises é utilizada uma malha de 10 por 15 células (elementos) distribuídas nas direções radial e circunferencial, respectivamente. No entanto, a malha para a teoria de volumes

finitos diferencia-se daquela utilizada no método dos elementos finitos, apresentando células menores no contorno com o intuito de captar as informações próximas ao bordo, como mostra a Figura 4.43.

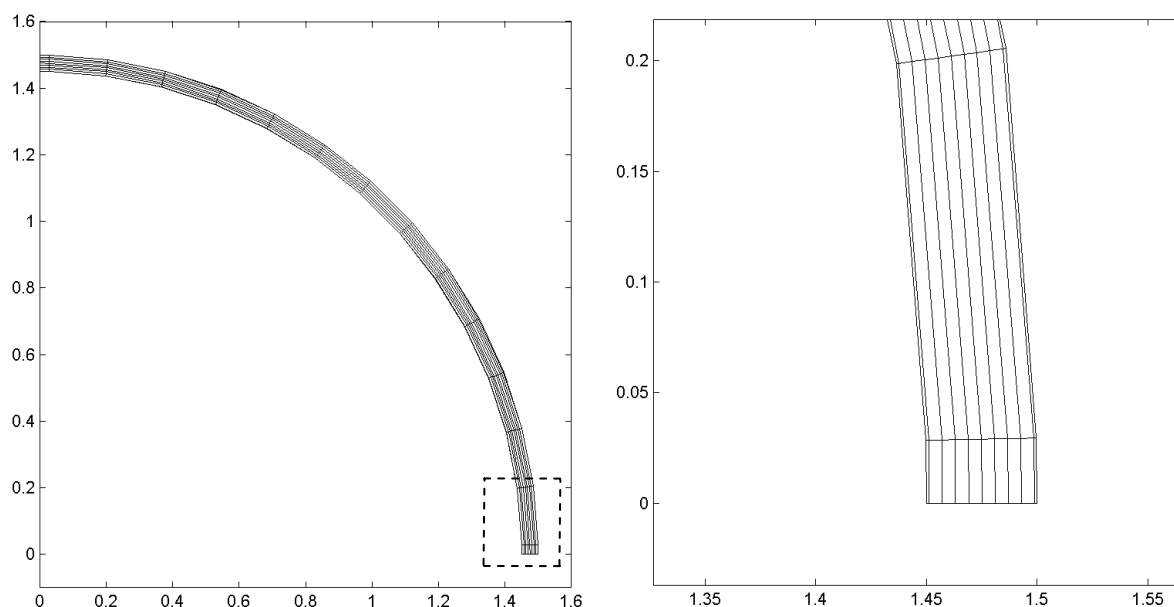


Figura 4.43 – Malha utilizada pela teoria de volumes finitos para a viga engastada curva.

As condições de contorno foram impostas de modo a reproduzir aproximadamente aquelas usadas na solução analítica. Os dados para a análise utilizando o método dos elementos finitos foram gerados no programa MTOOL (1992), aproximando o carregamento atuante no contorno por segmentos de reta que compõem carregamentos com distribuição linear. Na teoria de volumes finitos, este carregamento é representado também de forma aproximada, adotando-se os valores das tensões no meio da face como a tensão média atuante no bordo externo da célula.

Os dados que definem a geometria e as condições de contorno do problema estão na Tabela 4.11, e as propriedades do material da viga são as mesmas do exemplo anterior, e se encontram na Tabela 4.10.

Tabela 4.11 – Dados do problema da viga engastada curva.

Dado	Valor
a	1,45 m
b	1,5 m
P	10 kN

As Figuras 4.44 a 4.46 mostram os resultados obtidos para o campo de deslocamentos utilizando o método dos elementos finitos (em cinza), a teoria de volumes finitos (em azul claro)

e a solução analítica (representada pelo traço preto contínuo). Para uma melhor visualização, multiplicou-se por 4 os valores obtidos para os deslocamentos. Como no exemplo anterior, o elemento finito Q4 enrijeceu consideravelmente a estrutura, por outro lado, as deformadas obtidas com o elemento finito Q8 e pela teoria de volumes finitos praticamente coincidiram com a solução analítica.

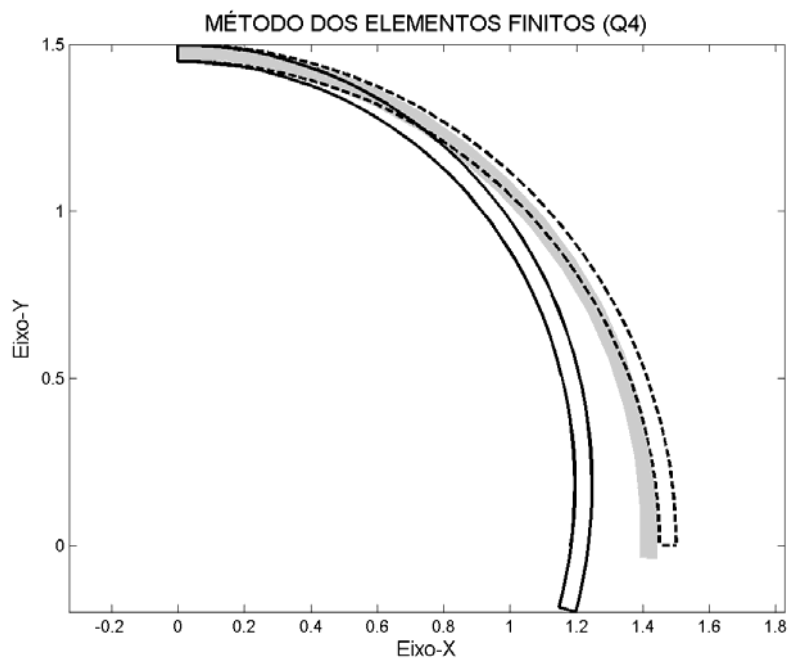


Figura 4.44 – Deformada obtida com o elemento finito Q4 para a viga engastada curva.

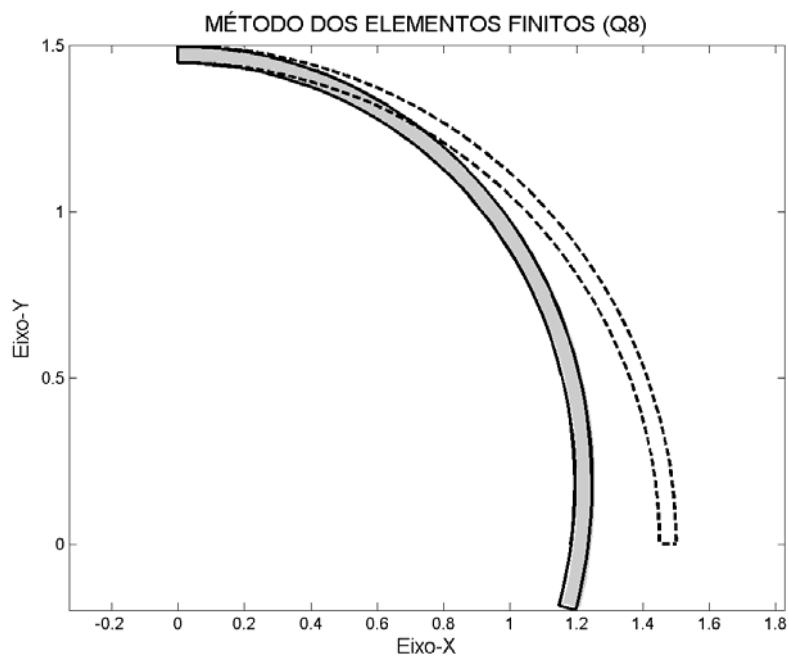


Figura 4.45 – Deformada obtida com o elemento finito Q8 para a viga engastada curva.

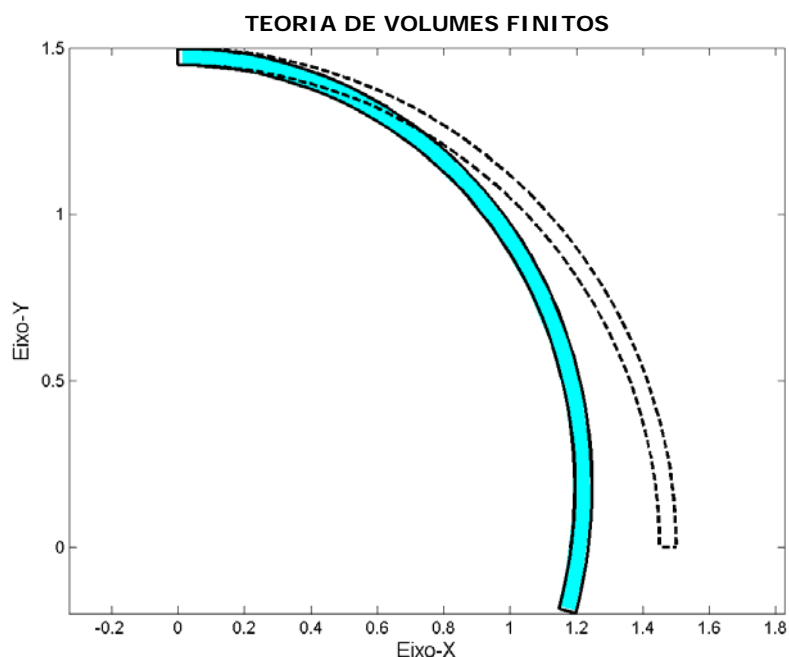


Figura 4.46 – Deformada obtida com a teoria de volumes finitos para a viga engastada curva.

Nas Figuras 4.47 a 4.49 estão os diagramas de tensão para uma seção média ($\theta = \pi/4$) da viga engastada curva. Como no exemplo anterior, os resultados obtidos com o elemento finito Q4 divergiram consideravelmente da solução analítica, mostrando a necessidade de uma malha mais refinada. Os resultados oriundos da análise utilizando o elemento finito Q8 apresentaram uma boa convergência com a solução analítica, no entanto, a teoria de volumes finitos mostrou-se mais precisa.

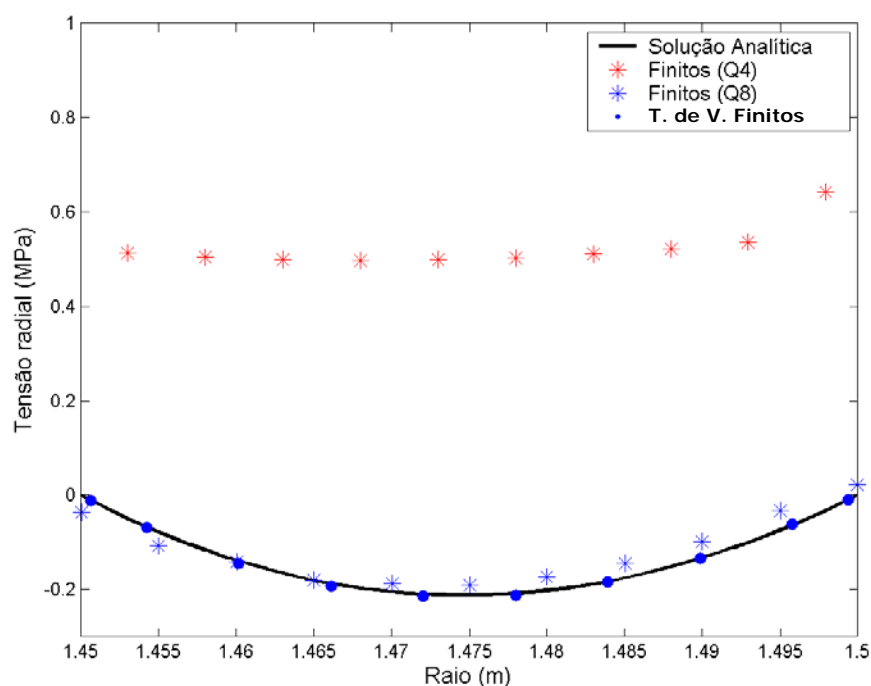


Figura 4.47 – Diagrama de tensão radial numa seção média da viga engastada curva.

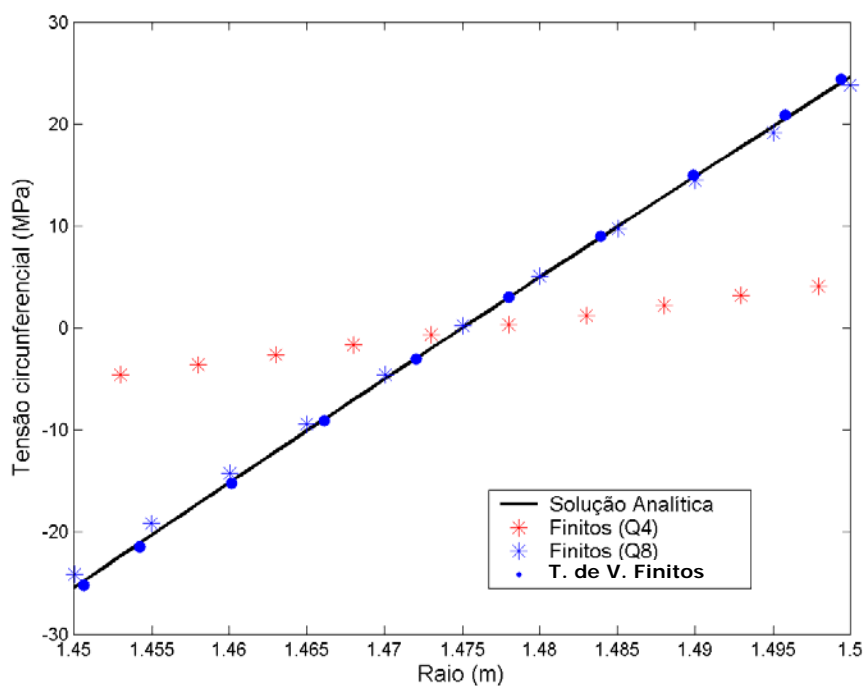


Figura 4.48 – Diagrama de tensão circunferencial numa seção média da viga engastada curva.

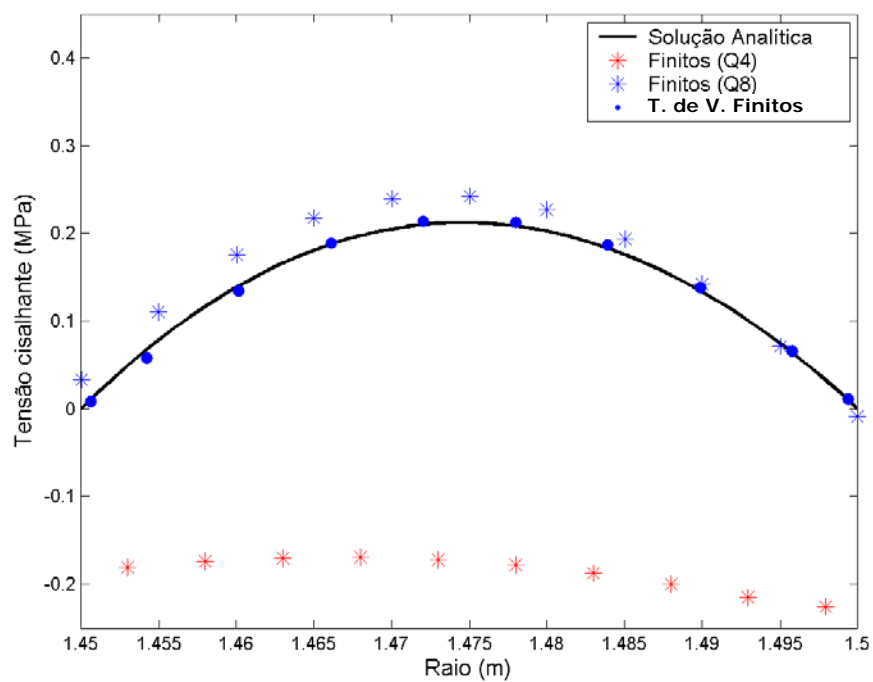


Figura 4.49 – Diagrama de tensão cisalhante numa seção média da viga engastada curva.

Conclusões

Neste trabalho apresentou-se a base teórica da teoria de volumes finitos, em sua versão *Higher-Order Theory* (Aboudi et al., 1999), e formulações destinadas às análises termo-elásticas de materiais compósitos em regime estacionário e transiente. No que se chamou de formulação convencional foi adotada uma simplificação na discretização e montagem do sistema de equações, abandonando o conceito de sub-células da formulação original.

A formulação paramétrica bidimensional da teoria de volumes finitos, apresentada como uma contribuição deste trabalho, permitiu uma maior flexibilidade na geração da malha e uma diminuição do problema em relação ao número de incógnitas.

No capítulo 3 apresentou-se uma proposta para avaliação das propriedades efetivas de materiais compósitos reforçados por fibras e particulados, incluindo *FGM*, utilizando a formulação tridimensional da teoria de volumes finitos. Através de estudo comparativo de resultados para os módulos de elasticidade efetivos de materiais compósitos obtidos com diferentes métodos, foi observado que os modelos da micromecânica apresentaram uma boa concordância entre si para pequenas frações da fase inclusão, o que não aconteceu para frações superiores a 25%, no caso dos exemplos analisados. Os resultados das análises com os modelos micromecânicos simplificados afastaram-se consideravelmente daqueles obtidos com os modelos micromecânicos baseados na teoria de campos médios, principalmente para as maiores frações de fibras, onde a interação entre as mesmas passa a ser mais relevante. De acordo com os resultados apresentados neste trabalho, faz-se necessário realizar análises elásticas tridimensionais para a determinação das propriedades efetivas, captando os efeitos decorrentes das diferenças de rigidezes dos materiais constituintes, o que pode não ocorrer em análises bidimensionais, como as que foram realizadas com o método dos elementos finitos para compósitos reforçados por fibras. Os resultados obtidos com a teoria de volumes finitos podem ser considerados satisfatórios, desde que se defina uma configuração microestrutural para o volume representativo que considere a interação entre as inclusões. Quanto à determinação das propriedades efetivas de materiais com gradação funcional, fez-se um estudo da sensibilidade de vários modelos micromecânicos em relação ao material adotado como inclusão ou como matriz. Em conformidade com o disposto na literatura, os melhores resultados foram obtidos quando o material mais flexível foi adotado como matriz. Esta conclusão baseou-se em comparações com resultados oriundos de análises realizadas com a formulação tridimensional da teoria de volumes finitos, admitindo-se uma distribuição randômica dos constituintes.

No capítulo 4, vários exemplos numéricos de análises termo-elásticas e elásticas bidimensionais foram apresentados e os resultados obtidos através da teoria de volumes finitos comparados com aqueles encontrados por outros procedimentos: soluções analíticas e método dos elementos finitos. Verificou-se para os exemplos analisados uma excelente concordância da teoria de volumes finitos com o as soluções analíticas. Para estruturas de contorno curvo, a formulação paramétrica demonstrou maior eficiência em relação à formulação convencional, tanto no que diz respeito ao tamanho e geometria da malha como no fornecimento de melhores resultados. Quanto às comparações com o método dos elementos finitos, em dois problemas clássicos da elasticidade, constatou-se o enrijecimento da estrutura quando foi utilizado o elemento finito Q4, e excelentes resultados, em relação aos campos de deslocamento, nas análises utilizando o elemento finito Q8 e a teoria de volumes finitos. Quanto aos resultados em termos de tensão, o elemento finito Q4 mostrou a necessidade de uma malha mais refinada para a convergência com a solução analítica. No entanto, as análises com o elemento finito Q8 apresentaram boa concordância com valores analíticos. Vale ressaltar que, utilizando-se o mesmo número de células e de elementos finitos nos dois exemplos analisados, a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos mostrou-se mais precisa em relação à solução analítica.

Referências bibliográficas

- Aboudi, J.; Pindera, M.-J.; Arnold, S. M. (1995). Thermoelastic Theory for the Response of Materials Functionally Graded in Two Directions. *Journal Solids and Structures*, v. 33, n. 7, p. 931-66.
- Aboudi, J.; Pindera, M.-J.; Arnold, S. M. (1999). Higher-order Theory for Functionally Graded Materials. *Composites: Part B, Engineering*, v. 30, p. 777-832.
- Arnold, S. M.; Bednarczyk, B. A.; Aboudi, J. (2004). Analysis of internally cooled structures using a higher order theory. *Computers and Structures*, v. 82, p. 659-88.
- Bansal, Y. (2005). Finite Volume Direct Averaging Micromechanics of Heterogeneous Media. MS Thesis, Faculty of the School of Engineering and Applied Science, University of Virginia.
- Bansal, Y.; Pindera, M.-J. (2003). Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-order Theory for Functionally Graded Materials. *Journal of Thermal Stresses*, v. 26, p. 1055-92.
- Benveniste, Y. (1987). A New Approach to the Application of Mori-Tanaka's Theory in Composite Materials. *Mech. Mater.*, v. 6, p. 147-57.
- Burnett, D.S. (1987). Finite Element Analysis - From Concepts to Applications. Addison-Wesley.
- Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C., (1959). Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press, Oxford.
- Cho, J. R.; Oden, J. T. (2000). Functionally graded material: a parametric study on thermal-stress characteristics using the Crank-Nicolson-Galerkin schema. *Computer methods in applied mechanics and engeneering*, v. 188, p. 17-38.
- Eshelby J. D. (1957). The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, v. 241, p. 376-96.
- Fuchiyama, T.; Noda, N. (1995). Analysis of thermal stress in a plate of fuctionally Gradient material. *JSAE Review*, v. 16, p. 263-68.
- Hashin, Z. (1988). The differential scheme and its application to cracked materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v. 36, n° 6, p. 119-34.
- Hashin, Z; Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v. 11, p. 127-40.

- Hill, R. (1965). A Self Consistent Mechanics of Composite Materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. v. 13, p. 213-22.
- Jabbari, M.; Sohrabpour, S.; Eslami, M. R. (2002). Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 79, p. 493-7.
- Jin, Z.-H.; Paulino, G. H.; Dodds Jr., R. H. (2002). Finite element investigation of quasi-static crack growth in functionally graded materials using a novel cohesive zone fracture model. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 69, p. 370-9.
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composites Materials*. 2 ed. Taylor & Francis, Philadelphia.
- Li, L. X.; Wang, T. J. (2005). A unified approach to predict overall properties of composite materials. *Materials Characterization*. v. 54, p. 49-62.
- Kim, J.-H.; Paulino, G. H. (2003). An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 58, p. 1457-97.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Miyamoto, Y.; Kaysser, W. A.; Rabin, B. H.; Kawasaki, A.; Ford, R. G. (1999). *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Mori, T.; Tanaka, K. (1973). Average Stress in the Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions. *Acta. Metall.*, v. 21, p. 571-4.
- MTOOL – Bidimensional Mesh Tool (Versão 1.0) – Manual do Usuário (1992). Grupo de Tecnologia em Computação Gráfica – TeCGraf/PUC-Rio.
- Nemat-Nasser, S.; Hori, M. (1999). *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. 2 ed., North-Holland.
- Richard, T. (1975). The mechanical behavior of a solid micro-sphere filled composite. *J. Compos. Mater.*, v. 9, p. 108-13.
- Suresh, S.; Mortensen (1997). *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. Cambridge University Press.

- Sutradhar, A.; Paulino, G. H.; Gray, L. J. (2002). Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p.119-32.
- Suvorov, A. P.; Dvorak, G. J. (2002). Rate form of the Eshelby and Hill tensors. *International Journal of Solids and Structures*. v. 39, p. 5659–78.
- Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York.
- Versteeg, H. K.; Malalasekera, W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Prentice Hall, New York.

Apêndice A

Matrizes utilizadas no cálculo da matriz de condutividade térmica local

As matrizes apresentadas abaixo fazem parte da sistematização adotada para o cálculo da matriz de condutividade térmica local da formulação paramétrica bidimensional proposta neste trabalho.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} & n_y^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x^{(2)} & n_y^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x^{(3)} & n_y^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x^{(4)} & n_y^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Apêndice B

Matrizes utilizadas no cálculo da matriz de rigidez local

As matrizes apresentadas abaixo fazem parte da sistematização adotada para o cálculo da matriz de rigidez local da formulação paramétrica bidimensional proposta neste trabalho.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{C}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} n_x^{(1)} & 0 & n_y^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^{(1)} & n_x^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_x^{(2)} & 0 & n_y^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_y^{(2)} & n_x^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x^{(3)} & 0 & n_y^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_y^{(3)} & n_x^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_x^{(4)} & 0 & n_y^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_y^{(4)} & n_x^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{E}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{E}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(B.8)

Apêndice C

Solução analítica para o campo de tensões em uma seção média de uma placa longa de *FGM*

Neste apêndice encontra-se a dedução da solução analítica para o campo de tensões, ao longo da espessura, em uma seção média de uma placa longa de *FGM* (Figura C.1).

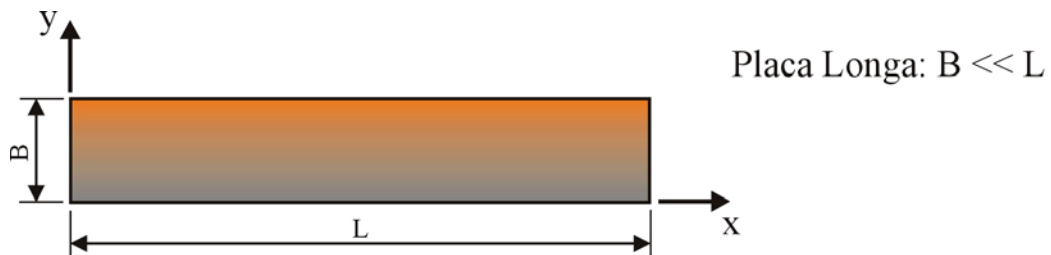


Figura C.1 – Placa longa de material com graduação funcional (*FGM*).

C.1. Campo de Deformações

Admitindo-se que a tensão vertical (σ_{yy}) é nula, têm-se as seguintes expressões para o campo de deformações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(y) &= \frac{\sigma_{xx}(y)}{E(y)} - \nu(y) \frac{\sigma_{zz}(y)}{E(y)} + \alpha(y) \Delta T(y) \\ \varepsilon_{zz}(y) &= \frac{\sigma_{zz}(y)}{E(y)} - \nu(y) \frac{\sigma_{xx}(y)}{E(y)} + \alpha(y) \Delta T(y)\end{aligned}\tag{C.1}$$

Para o caso de estado plano de deformações ($\varepsilon_{zz} = 0$), utilizando-se a equação (C.1), pode-se chegar à expressão abaixo para a tensão na direção normal ao plano de análise da placa:

$$\sigma_{zz}(y) = \nu(y) \sigma_{xx}(y) - E(y) \alpha(y) \Delta T(y)\tag{C.2}$$

o que implica em:

$$\varepsilon_{xx}(y) = \frac{\sigma_{xx}(y)}{E(y)} [1 - \nu^2(y)] + [1 - \nu(y)] \alpha(y) \Delta T(y)\tag{C.3}$$

C.2. Campo de Tensões

Aplicando-se o princípio da superposição dos efeitos, para duas situações virtuais que juntas compoñam o problema real, como mostra a Figura C.2, podem ser obtidas as soluções para estas duas situações virtuais, para que desta forma, utilizando-se o princípio, chegue-se na solução do problema real.

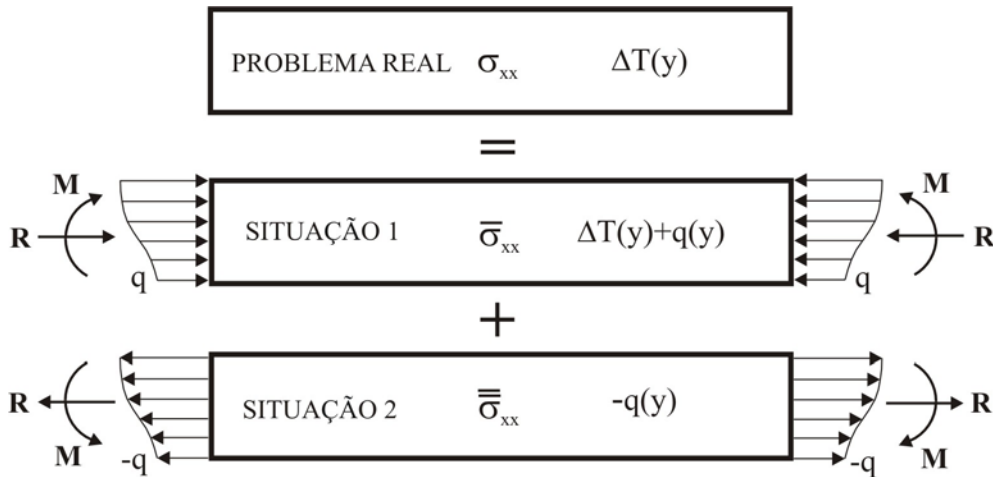


Figura C.2 – Problema real como a soma de duas situações virtuais.

Na primeira situação, admite-se a existência de um carregamento que anule as deformações na direção do eixo-X ($\bar{\epsilon}_{xx} = 0$), como ilustra a Figura C.3. Utilizando-se a equação (C.3) chega-se na relação abaixo para as tensões na direção do eixo-X:

$$\bar{\sigma}_{xx}(y) = -\frac{E(y)}{1-\nu(y)}\alpha(y)\Delta T(y) \quad (C.4)$$

logo, tem-se a seguinte expressão para o carregamento:

$$q(y) = -\bar{\sigma}_{xx}(y) = \frac{E(y)}{1-\nu(y)}\alpha(y)\Delta T(y) \quad (C.5)$$



Figura C.3 – Carregamento anulando as deformações na direção do eixo-X.

O carregamento ilustrado na Figura C.3 resulta nas seguintes ações atuantes nas extremidades da placa longa (Figura C.2):

$$R = \int_0^B q(y)dy$$

$$M = \int_0^B q(y)ydy$$
(C.6)

Na segunda situação, pode-se aplicar a hipótese que seção plana permanece plana para pontos afastados da região de aplicação da carga, como mostra a Figura C.4.

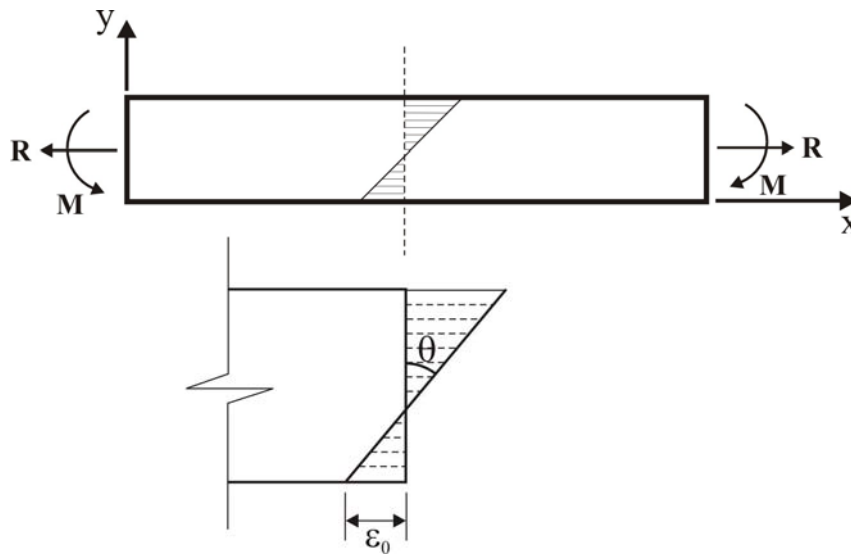


Figura C.4 – Campo de deformações para pontos afastados da região de aplicação da carga.

Desta forma, tem-se a seguinte expressão para o campo de deformações na direção do eixo-X numa seção média da placa:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{xx}(y) = \epsilon_0 + my$$
(C.7)

sendo $m = \text{tg}(\theta)$.

Para o caso de estado plano de deformações, segue que:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(y) = \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)} \bar{\bar{\epsilon}}_{xx}(y) = \frac{E(y)}{1-\nu^2(y)} (\epsilon_0 + my)$$
(C.8)

Além disso, têm-se as seguintes relações para as ações atuantes nas extremidades da placa (Figura C.2):

$$\begin{aligned} R &= \int_0^B \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(y) dy \\ M &= \int_0^B \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(y) y dy \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

que resulta no sistema de equações lineares mostrado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} R \\ M \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

onde, utilizando-se as equações (4.6) para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, tem-se que:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{1}{a} (e^{aB} - 1) \\ A_{12} = A_{21} &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{1}{a^2} (aBe^{aB} - e^{aB} + 1) \\ A_{22} &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \frac{1}{a^3} [e^{aB} (a^2 B^2 - 2aB + 2) - 2] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Com as equações (C.4) e (C.8), chega-se no campo de tensões desejado:

$$\sigma_{xx}(y) = \bar{\sigma}_{xx}(y) + \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(y) \quad (\text{C.12})$$