

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM ASSOCIAÇÃO COM A UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

ABRAÃO MENDES DO RÊGO

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

MACEIÓ-AL  
2016

ABRAÃO MENDES DO RÊGO

Rigidez de Hipersuperfícies em Variedades Riemannianas

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio Cavalcante

Coorientador: Prof. Dr. Fernando Codá Marques

Maceió-AL

2016

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade**

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| R343r | <p>Rêgo, Abraão Mendes do.<br/>Rigidez de hipersuperfícies em variedades Riemannianas / Abraão Mendes do Rêgo. – 2016.<br/>52 f.</p> <p>Orientador: Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante.<br/>Coorientador: Fernando Codá dos Santos Cavalcanti Marques.<br/>Tese (Doutorado em Matemática) – Doutorado Interinstitucional UFBA/UFAL.<br/>Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2016.</p> <p>Bibliografia: f. 45-47.<br/>Apêndice: f. 48-52.</p> <p>1. MOTSs estáveis. 2. Rigidez de superfícies. 3. Variedades Riemannianas.<br/>4. Free Boundary. I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 514.764.27</p> |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

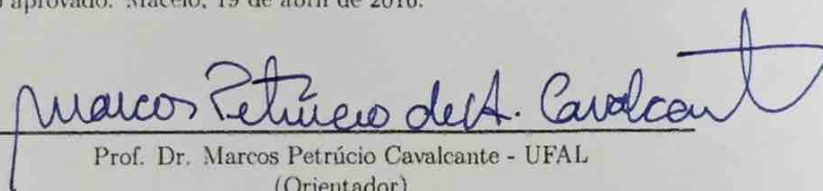
Folha de Aprovação

ABRAÃO MENDES DO RÊGO

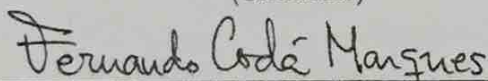
Rigidez de Hipersuperfícies em Variedades Riemannianas

Tese de Doutorado submetida ao Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia na área de Geometria Diferencial.

Trabalho aprovado. Maceió, 19 de abril de 2016.

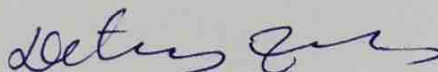


Prof. Dr. Marcos Petrucio Cavalcante - UFAL  
(Orientador)

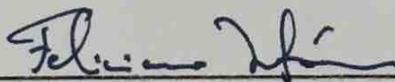


Prof. Dr. Fernando Codá Marques - Princeton University  
(Coorientador)

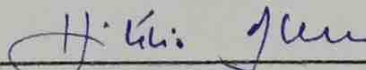
Banca Examinadora:



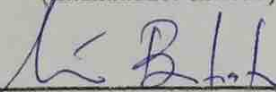
Prof. Dr. Detang Zhou - UFF  
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória - UFAL  
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva - UFAL  
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL  
(Examinador Interno)

À minha esposa, Janaína Rose, e ao meu filho, Jônatas Abraão.

# AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus acima de tudo!

*“Todas as coisas foram feitas por Ele, e sem Ele nada do que foi feito se fez.”* João 1:3.

À minha esposa, Janaína Rose, que esteve comigo desde o início desta jornada, quando ainda éramos adolescentes com muitos sonhos. Sempre acreditando em mim, mesmo nos momentos em que não acreditei. Seu apoio foi imprescindível.

Aos meus pais, Natalício Farias (*in memoriam*) e Palmira Mendes, pelo amor incondicional.

À minha família, em especial ao meu irmão Natalício Júnior, à minha sogra Rosa Elisa e ao meu cunhado Djalma Júnior, pelo amor e carinho.

Ao meu orientador Prof. Marcos Petrucio Cavalcante por todo apoio durante estes seis anos em que trabalhamos juntos desde o mestrado. Pelo seu exemplo de pessoa e de profissional. Pelo seu prazer em ensinar.

Ao meu coorientador Prof. Fernando Codá Marques por todo apoio durante minha experiência em Princeton. Que me acolheu prontamente e me mostrou como ser um profissional exemplar.

Ao meu professor e amigo Márcio Henrique Batista da Silva pelas muitas conversas, tanto sobre matemática como sobre política e cinema. Pelos belos cursos ministrados, sejam no mestrado ou no doutorado.

Aos membros da Banca Examinadora pela disponibilidade e leitura crítica do trabalho.

À Universidade Federal de Alagoas, em especial ao Instituto de Matemática, pela estrutura e todo apoio desde o Ensino Médio quando ainda era bolsista de Iniciação Científica Júnior.

À Princeton University pelo apoio e acolhimento durante um ano de estágio de Doutorado Sanduíche, onde parte deste trabalho foi feito.

À Capes pelo apoio financeiro durante estes quatro anos. Em especial pelo apoio durante o período de estágio de Doutorado Sanduíche através do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (PDSE).

# RESUMO

Nesta tese nós obtemos alguns resultados de rigidez de hipersuperfícies em variedades Riemannianas que satisfazem certas condições geométricas. Na primeira parte do trabalho nós provamos um teorema de *splitting* local para uma 3-variedade  $M$  tipo-espaço em um espaço-tempo  $\overline{M}$  quando  $M$  possui uma MOTS esférica fracamente *outermost* e *outer area minimizing* que satura um determinado limite superior para a área. Além disso, provamos um resultado que caracteriza a geometria extrínseca local de  $M$ , onde nós mostramos que esta variedade pode ser mergulhada de maneira isométrica em um Espaço-tempo de Nariai com constante cosmológica adequada. Ainda, sob uma condição de convexidade, generalizamos nosso teorema de *splitting* para dois diferentes casos: o primeiro caso para MOTSs de gênero maior que um e o segundo caso para MOTSs de dimensão alta com  $\sigma$ -constante negativa. Na segunda parte da tese demonstramos um resultado de rigidez infinitesimal para uma superfície mínima *free boundary* de índice um que satura um certo limite superior para o comprimento do bordo em uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira. Além disso, sob uma hipótese adicional, provamos um teorema de rigidez global para a variedade ambiente. Finalizamos o trabalho com extensões destes dois últimos resultados para superfícies estacionárias estáveis.

**Palavras-chave:** MOTSs estáveis. Rigidez de superfícies. Variedades Riemannianas. Free Boundary.

# ABSTRACT

In this thesis we obtain some rigidity results for hypersurfaces in Riemannian manifolds satisfying certain geometric conditions. In the first part of this work we prove a local splitting theorem for a spacelike 3-manifold  $M$  into a spacetime  $\overline{M}$  when  $M$  has a weakly outermost and outer area minimizing spherical MOTS which saturates an upper bound for the area. Furthermore, we prove a result that characterizes the extrinsic local geometry of  $M$ , where we show that this manifold can be isometrically embedded into a Nariai spacetime with appropriate cosmological constant. More, under a convexity condition, we generalize our splitting theorem to two different cases: the first case to MOTSs of genus greater than one and the second case to MOTSs of high dimension with negative  $\sigma$ -constant. In the second part of this thesis we prove an infinitesimal rigidity result for a free boundary minimal surface of index one that saturates a certain upper bound for the length of the boundary in a compact Riemannian 3-manifold with boundary. Moreover, under an additional hypothesis, we prove a rigidity theorem for the ambient manifold. We finish the work with extensions of these two last results for stationary stable surfaces.

**Keywords:** Stable MOTSs. Rigidity of Surfaces. Riemannian Manifolds. Free Boundary.



# SUMÁRIO

|       |                                                                    |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------|----|
|       | Sumário . . . . .                                                  | 8  |
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .                                               | 8  |
| 2     | RIGIDEZ DE MOTSs ESTÁVEIS . . . . .                                | 13 |
| 2.1   | Introdução . . . . .                                               | 13 |
| 2.2   | Preliminares . . . . .                                             | 14 |
| 2.3   | O Caso Esférico . . . . .                                          | 19 |
| 2.3.1 | Espaço-tempo de Nariai . . . . .                                   | 23 |
| 2.4   | O Caso de Gênero Alto . . . . .                                    | 26 |
| 2.5   | O Caso de Dimensão Alta com $\sigma$ -Constante Negativa . . . . . | 31 |
| 3     | RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES <i>FREE BOUNDARY</i> . . . . .              | 37 |
| 3.1   | Introdução . . . . .                                               | 37 |
| 3.2   | Superfícies Mínimas <i>Free Boundary</i> de Índice Um . . . . .    | 39 |
| 3.3   | Superfícies Estacionárias Estáveis . . . . .                       | 43 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .                                              | 45 |
| A     | APÊNDICE . . . . .                                                 | 48 |
| A.1   | Demonstração da Proposição 2.2.5 . . . . .                         | 48 |
| A.2   | Demonstração do Lema 2.2.8 . . . . .                               | 51 |

# 1 INTRODUÇÃO

Seja  $M^3 = (M^3, g)$  uma 3-variedade Riemanniana. É uma questão bastante interessante saber como a topologia de uma superfície mínima  $\Sigma^2 \subset M^3$  pode influenciar na geometria de  $M^3$ , e vice-versa.

Usando o Teorema de Gauss-Bonnet, a Equação de Gauss e a Desigualdade de Estabilidade para superfícies mínimas, R. Schoen e S.-T. Yau observaram que se  $M^3$  tem curvatura escalar positiva, então  $M^3$  não possui superfícies mínimas fechadas orientáveis de gênero positivo. Além disso, eles provaram o seguinte resultado (veja [39]):

**Teorema 1.1** (Schoen-Yau). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar não-negativa. Se o grupo fundamental de  $M$  possui um subgrupo abstratamente isomorfo ao grupo fundamental do 2-toro, então  $M$  é plana.*

Para provar este resultado, Schoen e Yau primeiramente observaram que a hipótese sobre o grupo fundamental de  $M^3$  garante a existência de um 2-toro mínimo estável. Depois eles usaram que se  $M$  admite uma métrica de curvatura escalar não-negativa que não é plana, então  $M$  também admite uma métrica de curvatura escalar positiva (veja [28]). Portanto, o resultado segue.

Como observado por D. Fischer-Colbrie e R. Schoen em [15], se  $\Sigma^2$  é uma superfície mínima estável fechada orientável de gênero  $g(\Sigma) \geq 1$  em uma 3-variedade Riemanniana completa orientável com curvatura escalar  $R \geq 0$ , então  $\Sigma^2$  é um 2-toro plano totalmente geodésico, com  $R = 0$  sobre  $\Sigma$ . Além disso, Fischer-Colbrie e Schoen também propuseram o problema de estabelecer uma rigidez mais forte (global) se, digamos, o 2-toro é adequadamente área-minimizante; confira [15, Remark 4].

Parcialmente motivados por questões relativas à topologia dos buracos negros, M. Cai e G. J. Galloway [10] resolveram o problema proposto por Fischer-Colbrie e Schoen, em um artigo que tem inspirado uma gama de trabalhos subsequentes nesta área (e.g. [8, 35, 33, 1]). Cai e Galloway provaram o seguinte:

**Teorema 1.2** (Cai-Galloway). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar não-negativa. Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é um 2-toro mergulhado two-sided que é localmente área-minimizante, então uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto*

$$((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0),$$

onde  $g_0$ , a métrica sobre  $\Sigma$  induzida de  $M$ , é plana. Além disso, se  $M$  é completa e  $\Sigma$  minimiza área em sua classe de isotopia, então  $M$  é globalmente plana.

Como observado por Cai e Galloway, na primeira parte do teorema acima,  $M$  não precisa ser globalmente plana. Também, a segunda parte permanece verdadeira se  $M$  for uma variedade com fronteira, assumindo que sua fronteira é convexa em média.

Dois resultados similares ao Teorema 1.2 foram obtidos por H. Bray, S. Brendle e A. Neves [8] e por I. Nunes [35] sob diferentes hipóteses sobre a curvatura escalar de  $M^3$  e a topologia de  $\Sigma^2$ , os quais nós parafraseamos da seguinte maneira:

**Teorema 1.3** (Bray-Brendle-Neves). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por  $2c$ , onde  $c > 0$ . Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma 2-esfera mergulhada que é localmente área-minimizante, então a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}. \quad (1.1)$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma^2, g_0)$  é a 2-esfera redonda de raio  $1/\sqrt{c}$ . Neste caso, se além disso  $M$  é completa e  $\Sigma$  minimiza área em sua classe de isotopia, então o recobrimento universal de  $M$  é isométrico ao produto  $(\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ .*

**Teorema 1.4** (Nunes). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por  $-2c$ , onde  $c > 0$ . Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície de Riemann fechada mergulhada two-sided de gênero  $g(\Sigma) \geq 2$  que é localmente área-minimizante, então a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma) \geq \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma^2, g_0)$  tem curvatura Gaussiana constante igual a  $-c$ . Neste caso, se além disso  $M$  é completa e  $\Sigma$  minimiza área em sua classe de isotopia, então o recobrimento universal de  $M$  é isométrico ao produto  $(\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ .*

As demonstrações originais de Cai-Galloway, Bray-Brendle-Neves e Nunes são bastante diferentes. Contudo, M. Micalef e V. Moraru [33] apresentaram uma demonstração unificada para os Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4.

Do ponto de vista da Teoria da Relatividade, os Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4 podem ser vistos como resultados acerca de conjuntos de dados iniciais tempos-simétricos (totalmente geodésicos). Na primeira parte deste trabalho (Capítulo 2) provaremos versões dos Teoremas 1.3 e 1.4 para conjuntos de dados iniciais gerais (não-tempos-simétricos). Nesta situação mais geral, superfícies mínimas são substituídas por *marginally outer trapped surfaces* (MOTSs).

Na Seção 2.3 do Capítulo 2 provaremos um resultado de rigidez infinitesimal (Proposição 2.3.1) para MOTSs estáveis que saturam uma estimativa de área análoga a (1.1). Isto será então usado para provar um teorema de *splitting* (Teorema 2.3.3), que é o análogo

do Teorema 1.3 para espaços-tempos. Algumas conexões com o Espaço-tempo de Nariai serão feitas na Subseção 2.3.1, onde classificaremos completamente a geometria extrínseca local dos conjuntos de dados iniciais considerados na Seção 2.3. Na Seção 2.4 obteremos um resultado de rigidez infinitesimal (Proposição 2.4.1) e um teorema de *splitting* (Teorema 2.4.4) para MOTSs de gênero  $g \geq 2$ . Este último é o análogo do Teorema 1.4 para espaços-tempos. Na Seção 2.5 estenderemos os principais resultados da Seção 2.4 para MOTSs de dimensão  $n \geq 2$  com  $\sigma$ -constante negativa.

Abaixo enunciaremos o primeiro teorema obtido neste trabalho, onde, sob certas condições, classificaremos a geometria (intrínseca) local do conjunto de dados iniciais  $(M^3, g, K)$ . (Definições serão apresentadas na Seção 2.2.)

**Teorema 1.5** (Teorema 2.3.3). *Seja  $(M^3, g, K)$  um conjunto tridimensional de dados iniciais em um espaço-tempo  $\overline{M}^4 = (\overline{M}^4, \overline{g})$ . Seja  $\Sigma^2$  uma MOTS esférica fracamente outermost e outer area minimizing em  $M^3$ . Suponha que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\mu - |J| \geq c$  em  $M_+$ . Então,*

$$A(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}.$$

*Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $([0, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma^2, g_0)$  é a 2-esfera redonda de raio  $1/\sqrt{c}$ . Também, para cada slice  $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$ , temos que  $K|_{T_x \Sigma_t \times T_x \Sigma_t} = 0$ , qualquer que seja  $x \in \Sigma_t$ . Em particular, tais slices são MOTSs.*

Acima,  $\mu$  e  $J$  são definidos em termos do tensor de Einstein de  $\overline{M}$ ,  $G = \overline{\text{Ric}} - \frac{\overline{R}}{2}\overline{g}$ , por  $\mu = G(u, u)$  e  $J(\cdot) = G(u, \cdot)|_{T_p M}$ , para  $p \in M$ .

Em seguida, na Subseção 2.3.1, classificaremos a geometria extrínseca local do conjunto de dados iniciais  $(M^3, g, K)$ .

**Teorema 1.6** (Teorema 2.3.5). *Seja  $(M^3, g, K)$  um conjunto tridimensional de dados iniciais. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.5, se  $A(\Sigma) = 4\pi/c$ , então uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  pode ser isometricamente mergulhada no Espaço-tempo de Nariai  $(\overline{N}, \overline{h})$  (com constante cosmológica adequada) como uma hipersuperfície tipo-espaço de tal maneira que  $g$  restrita a  $U$  é a métrica induzida de  $\overline{N}$  e  $K$  restrita a  $U$  é a segunda forma fundamental de  $U$  em  $\overline{N}$ .*

Vale ressaltar que as MOTSs apareceram em um contexto puramente matemático no trabalho de Schoen e Yau [40] concernente à existência de soluções da Equação de Jang, em conexão com sua demonstração do Teorema da Massa Positiva. A teoria matemática das MOTSs tem sido bastante desenvolvida nos últimos anos. O *survey* [2] descreve muitos destes desenvolvimentos.

Outro resultado de rigidez bastante conhecido é devido ao matemático V. A. Toponogov [41]. Ele provou o seguinte:

**Teorema 1.7** (Toponogov). *Seja  $M^2$  uma superfície Riemanniana fechada com curvatura Gaussiana  $K \geq 1$ . Então, o comprimento de qualquer geodésica simples fechada  $\gamma \subset M^2$  satisfaz*

$$L(\gamma) \leq 2\pi. \quad (1.2)$$

*Além disso, se  $L(\gamma) = 2\pi$ , então  $M^2$  é isométrica à 2-esfera unitária canônica  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .*

Com o intuito de obter uma versão do Teorema de Toponogov em dimensão 3, H. Bray et. al. [7] consideraram um plano projetivo real  $\Sigma^2$  mergulhado em uma 3-variedade Riemanniana compacta  $M^3$ . Eles provaram que se  $\Sigma$  tem a menor área dentre todos os planos projetivos em  $M$ , e  $M$  tem curvatura escalar  $R \geq 6$ , então a área de  $\Sigma$  satisfaz  $A(\Sigma) \leq 2\pi$ . Além disso, se  $A(\Sigma) = 2\pi$ , então  $M^3$  é isométrica ao  $\mathbb{RP}^3$  munido da métrica canônica.

Em um trabalho mais recente, F. C. Marques e A. Neves [31] consideraram o caso de 2-esferas mínimas instáveis em 3-esferas Riemannianas com curvatura escalar  $R \geq 6$ . Dentre outras coisas, eles provaram o seguinte:

**Teorema 1.8** (Marques-Neves). *Se  $g$  é uma métrica Riemanniana sobre  $S^3$ , com curvatura escalar  $R \geq 6$ , que não possui curvatura seccional constante igual a um, então existe uma 2-esfera mínima  $\Sigma^2$  mergulhada em  $M^3 = (S^3, g)$  satisfazendo  $A(\Sigma) < 4\pi$ . Além disso,  $\Sigma$  tem índice zero ou um.*

Como observado por Marques e Neves, isto pode ser visto como um resultado análogo ao Teorema de Toponogov em dimensão 3, visto que, em geral, não existe limitação de área de 2-esferas mínimas em  $M^3$ .

No Capítulo 3 desta tese provaremos uma estimativa semelhante a (1.2) para curvas que são realizadas como o bordo  $\partial\Sigma$  de uma superfície mínima *free boundary*  $\Sigma^2$  de índice um em uma 3-variedade Riemanniana  $M^3$  com bordo  $\partial M$  estritamente convexo. Além disso, provaremos um resultado de rigidez infinitesimal para as superfícies mínimas cujos bordos saturam tal estimativa (Teorema 3.2.5). Como consequência (Corolário 3.2.8) obteremos um resultado de rigidez global para  $M$ , assumindo uma hipótese adicional sobre a geometria de  $M$  ao longo de  $\partial M$ . Para finalizar, consideraremos o caso de superfícies estacionárias estáveis em 3-variedades com fronteira estritamente convexa.

Abaixo enunciaremos o primeiro resultado obtido no Capítulo 3. (Definições serão apresentadas na Seção 3.2.)

**Teorema 1.9** (Teorema 3.2.5). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ , onde  $\text{Ric}$  é o tensor de Ricci de  $M$  e  $\text{II}$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$  em  $M$ . Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície mínima *free boundary* propriamente mergulhada de índice um, então*

$$L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g + r),$$

onde  $g$  é o gênero de  $\Sigma$  e  $r$  é o número de componentes conexas de  $\partial\Sigma$ . Além disso, se vale a igualdade, então  $\Sigma$  é totalmente geodésica em  $M$ ,  $\Sigma$  (com respeito à métrica induzida) é isométrica ao disco Euclidiano unitário  $\mathbb{D}$  e  $\partial\Sigma$  é uma geodésica de  $\partial M$ .

Como consequência do Teorema 1.9, temos o seguinte:

**Corolário 1.10.** *O único domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  com fronteira suave  $\partial\Omega$  satisfazendo  $\Pi \geq 1$  que admite um disco mínimo free boundary propriamente mergulhado  $\Sigma^2 \subset \Omega$  de índice um com  $L(\partial\Sigma) = 2\pi$  é a bola unitária.*

## 2 RIGIDEZ DE MOTSs ESTÁVEIS

### 2.1 Introdução

Neste capítulo obteremos versões dos Teoremas de Bray-Brendle-Neves e Nunes para MOTSs em conjuntos de dados iniciais gerais (não-tempos-simétricos). Definições serão apresentadas na Seção 2.2.

O primeiro resultado que gostaríamos de destacar é devido ao matemático M. Cai [9], que estendeu o Teorema 1.2 para variedades de dimensão  $n \geq 3$ .

**Teorema 2.1.1** (Cai). *Seja  $(M^{n+1}, g)$  uma  $(n+1)$ -variedade Riemanniana,  $n \geq 3$ , com curvatura escalar não-negativa e suponha que  $\Sigma^n \subset M^{n+1}$  é uma hipersuperfície fechada two-sided localmente área-minimizante. Se  $\Sigma$  não é do tipo Yamabe positivo, então uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma, g_0)$  é Ricci plana.*

Veja [25] para uma demonstração simplificada do teorema acima.

Outro resultado que devemos destacar é devido ao matemático V. Moraru [34], que estendeu o Teorema de Nunes para variedades de dimensão  $n \geq 3$ .

**Teorema 2.1.2** (Moraru). *Seja  $(M^{n+1}, g)$  uma  $(n+1)$ -variedade Riemanniana completa,  $n \geq 3$ , com curvatura escalar  $R \geq -2c$ , onde  $c > 0$ . Se  $\Sigma^n \subset M^{n+1}$  é uma hipersuperfície fechada two-sided localmente área-minimizante com  $\sigma(\Sigma) < 0$ , então a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma^n) \geq \left( \frac{|\sigma(\Sigma^n)|}{2c} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma, g_0)$  é Einstein.

Acima,  $\sigma(\Sigma)$  simboliza a  $\sigma$ -constante de  $\Sigma$  (invariante topológico introduzido por R. Schoen [38] e O. Kobayashi [29] independentemente).

Agora, seja  $\overline{M}^{n+2} = (\overline{M}^{n+2}, \overline{g})$  um espaço-tempo de dimensão  $n+2$ , com  $n \geq 2$ . Se  $M^{n+1}$  é uma hipersuperfície tipo-espaço em  $\overline{M}^{n+2}$ , podemos ver  $M$  como um conjunto de dados iniciais  $M^{n+1} = (M^{n+1}, g, K)$ , onde  $g$  é a métrica (Riemanniana) sobre  $M$  induzida de  $\overline{M}$  e  $K$  é a segunda forma fundamental de  $M$  em  $\overline{M}$ . Dada uma hipersuperfície fechada two-sided  $\Sigma^n$  mergulhada em  $M^{n+1}$ , podemos introduzir dois vetores nulos que apontam para o futuro e são normais a  $\Sigma$ ,  $l_+ = u + \nu$  e  $l_- = u - \nu$ , onde  $u$  é o campo unitário (tipo-tempo) normal a  $M$  que aponta para o futuro e  $\nu$  é o campo unitário normal a  $\Sigma$  em  $M$ . Como introduzido por R. Penrose, se ambas as curvaturas médias  $\theta_+$  e  $\theta_-$  de  $\Sigma$  em  $\overline{M}$  com respeito a  $l_+$  e  $l_-$ , respectivamente, são negativas, dizemos que  $\Sigma$  é uma *trapped surface*.

Se fixamos o campo de vetores  $\nu$  como *apontando para fora* de  $\Sigma$ , dizemos que  $\Sigma$  é uma *outer trapped surface* se  $\theta_+ < 0$ , independentemente do sinal de  $\theta_-$ . Finalmente, se  $\theta_+$  é identicamente nula, dizemos que  $\Sigma$  é uma *marginally outer trapped surface* (MOTS). Sob circunstâncias adequadas, a existência de uma MOTS sinaliza a presença de um buraco negro (veja [12]).

Em um certo sentido, a noção de MOTS estende a noção de superfície mínima para um contexto mais geral. Neste caso, alguns conceitos sobre superfícies mínimas podem ser estendidos para MOTSs; por exemplo, o conceito de estabilidade (veja [3, 4]). Em um contexto puramente matemático, MOTSs apareceram primeiramente em um trabalho de Schoen e Yau [40] sobre o Teorema da Massa Positiva.

Por causa da sua importância tanto no contexto físico quanto matemático, nos últimos anos o estudo sobre MOTSs tem crescido significativamente (veja [13, 32]).

De maneira similar ao caso de superfícies mínimas, saber como a topologia de uma MOTS pode influenciar na geometria de um conjunto de dados iniciais, e vice-versa, são questões bastante interessantes.

Nosso primeiro objetivo neste capítulo é estender o Teorema de Bray-Brendle-Neves para espaços-tempos gerais, o que será feito na Seção 2.3, onde classificaremos a geometria (intrínseca) local do conjunto de dados iniciais  $(M^3, g, K)$ . Em seguida, na Subseção 2.3.1, classificaremos a geometria extrínseca local de  $(M^3, g, K)$ . Nas duas últimas seções estenderemos os Teoremas de Nunes e Moraru para o contexto de espaços-tempos.

Vale lembrar que Galloway [20] generalizou o Teorema de Cai para espaços-tempos, onde ele demonstrou que se  $(\bar{M}^{n+2}, \bar{g})$  é um espaço-tempo que satisfaz a *condição de energia dominante* (CED) e  $\Sigma^n \subset M^{n+1}$  é uma MOTS fechada fracamente *outermost* que não admite métrica de curvatura escalar positiva, onde  $M^{n+1}$  é uma hipersuperfície tipo-espaço em  $\bar{M}^{n+2}$ , então existe uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  tal que cada *slice*  $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$  é uma MOTS. Além disso, cada um destes *slices* possui segunda forma fundamental nula identicamente nula e curvatura de Ricci identicamente zero.

## 2.2 Preliminares

Seja  $\bar{M}^{n+2} = (\bar{M}^{n+2}, \bar{g})$  um espaço-tempo de dimensão  $n + 2$ , onde  $n \geq 2$ . Mais precisamente,  $\bar{M}^{n+2}$  é uma variedade Lorentziana conexa orientada e tempo-orientada de dimensão  $n + 2$ . Dada uma hipersuperfície tipo-espaço  $M^{n+1} \subset \bar{M}^{n+2}$ , seja  $u$  o vetor unitário (tipo-tempo) normal a  $M$  que aponta para o futuro. Neste caso, podemos ver  $M$  como um conjunto de dados iniciais  $M^{n+1} = (M^{n+1}, g, K)$ , onde  $g$  é a métrica (Riemanniana) sobre  $M$  induzida de  $\bar{M}$  e  $K$  é a segunda forma fundamental de  $M$  em  $\bar{M}$  com respeito a  $u$ , ou seja,  $K(V, W) = \bar{g}(\bar{\nabla}_V u, W)$ , para  $V, W \in T_p M$ , para cada  $p \in M$ , onde  $\bar{\nabla}$  é a conexão de Levi-Civita de  $\bar{M}$ .



Dada uma hipersuperfície *two-sided*  $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ , fixamos um vetor unitário  $\nu$  normal a  $\Sigma$  em  $M$ . Por convenção, diremos que  $\nu$  aponta para fora de  $\Sigma$ . Podemos então definir dois vetores nulos normais a  $\Sigma$  que apontam para o futuro,  $l_+ = u + \nu$  e  $l_- = u - \nu$ , que apontam para fora e para dentro de  $\Sigma$ , respectivamente.

**Definição 2.2.1.** As *segundas formas fundamentais nulas*  $\chi_+$  e  $\chi_-$  de  $\Sigma$  em  $\bar{M}$  são definidas por

$$\chi_{\pm}(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X l_{\pm}, Y), \quad X, Y \in T_x \Sigma,$$

em cada ponto  $x \in \Sigma$ , ou seja,  $\chi_+$  e  $\chi_-$  são as segundas formas fundamentais de  $\Sigma$  em  $\bar{M}$  com respeito aos vetores  $l_+$  e  $l_-$ , respectivamente.

Observe que

$$\chi_{\pm} = K|_{T_x \Sigma \times T_x \Sigma} \pm A, \quad (2.1)$$

em cada  $x \in \Sigma$ , onde  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  em  $M$  com respeito a  $\nu$ .

**Definição 2.2.2.** As *curvaturas médias nulas*  $\theta_+$  e  $\theta_-$  de  $\Sigma$  em  $\bar{M}$  são definidas por

$$\theta_{\pm} = \text{tr } \chi_{\pm},$$

respectivamente.

Observe que

$$\theta_{\pm} = \text{tr}_{\Sigma} K \pm H,$$

onde  $H = \text{tr } A$  é a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$  com respeito a  $\nu$ .

**Definição 2.2.3.** Se  $\theta_-$  e  $\theta_+$  são ambas negativas, dizemos que  $\Sigma$  é uma *trapped surface*. Se  $\theta_+ < 0$  (sem nenhuma hipótese sobre  $\theta_-$ ), dizemos que  $\Sigma$  é uma *outer trapped surface*. Finalmente, se  $\theta_+ = 0$ , dizemos que  $\Sigma$  é uma *marginally outer trapped surface* ou simplesmente uma *MOTS*.

De agora em diante, por simplicidade, denotaremos as entidades  $l_+, \chi_+$  e  $\theta_+$  por  $l, \chi$  e  $\theta$ , respectivamente.

**Observação 2.2.4.** No caso em que  $M$  é tempo-simétrica, i.e., quando  $K = 0$ ,  $\chi$  e  $\theta$  são apenas a segunda forma fundamental  $A$  e a curvatura média  $H$  de  $\Sigma$  em  $M$ , respectivamente. Neste caso, uma MOTS nada mais é que uma hipersuperfície mínima.

A seguir, apresentaremos a noção de estabilidade para MOTSs introduzida pelos matemáticos L. Andersson, M. Mars e W. Simon (veja [3, 4]).

Seja  $G = \bar{\text{Ric}} - \frac{R}{2}\bar{g}$  o tensor de Einstein de  $(\bar{M}, \bar{g})$ , onde  $\bar{\text{Ric}}$  e  $\bar{R}$  são o tensor de Ricci e a curvatura escalar de  $(\bar{M}, \bar{g})$ , respectivamente. Defina  $\mu = G(u, u)$  e  $J(\cdot) = G(u, \cdot)|_{T_p M}$ ,

em cada  $p \in M$ . Seja  $R_\Sigma$  a curvatura escalar de  $\Sigma = (\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é a métrica induzida de  $M$ . Além disso, denote por  $X \in \Gamma(T\Sigma)$  o campo de vetores sobre  $\Sigma$  definido em cada ponto  $x \in \Sigma$  como sendo o dual a  $K(\nu, \cdot)|_{T_x\Sigma}$ .

Fazendo uso das Equações de Gauss-Codazzi, podemos expressar  $\mu$  e  $J$  apenas em termos do conjunto de dados iniciais  $M = (M, g, K)$ :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2}(R + \tau^2 - |K|^2), \\ J &= \operatorname{div} K - d\tau,\end{aligned}$$

onde  $R$  é a curvatura escalar de  $M$  e  $\tau = \operatorname{tr} K$  é a curvatura média de  $M$  em  $\bar{M}$  com respeito a  $u$ .

Agora, considere  $t \mapsto \Sigma_t \subset M$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , uma variação de  $\Sigma = \Sigma_0$  com campo variacional  $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} = \phi\nu$ ,  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ . Seja  $\theta(t)$  a curvatura média nula de  $\Sigma_t$  com respeito a  $l_t = u + \nu_t$ , onde  $\nu_t$  é o vetor unitário normal a  $\Sigma_t$  em  $M$  que aponta para fora de  $\Sigma_t$ .

**Proposição 2.2.5.** *Em cada ponto  $x \in \Sigma$ ,*

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=0} = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + \left( Q - |X|^2 + \operatorname{div} X - \frac{1}{2}\theta(0)^2 + \theta(0)\tau \right) \phi,$$

onde  $\Delta$ ,  $\nabla$  e  $\operatorname{div}$  são os operadores Laplaciano, gradiente e divergente de  $\Sigma$ , respectivamente, e

$$Q = \frac{1}{2}R_\Sigma - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2}|X|^2.$$

*Demonstração.* Veja o Apêndice A.1. □

**Definição 2.2.6.** O operador  $L : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  definido por

$$L\phi = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + (Q - |X|^2 + \operatorname{div} X)\phi \quad (2.2)$$

é conhecido como *operador de estabilidade* para MOTSs.

Fazendo uso da Equação de Gauss,  $\operatorname{Ric}(\nu, \nu) + |A|^2 = \frac{1}{2}(R - R_\Sigma + |A|^2 + H^2)$ , onde  $\operatorname{Ric}$  é o tensor de Ricci de  $M$ , podemos ver que no caso tempo-simétrico,  $L$  se reduz ao operador de estabilidade para hipersuperfícies mínimas,  $-\Delta - (\operatorname{Ric}(\nu, \nu) + |A|^2)$ , quando  $\Sigma$  é uma MOTS (neste caso, uma hipersuperfície mínima).

**Definição 2.2.7.** Se  $\Sigma$  é fechada (compacta sem bordo), dizemos que  $\phi \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{C})$  é uma *autofunção* de  $L$  se existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $L\phi = \lambda\phi$ , onde  $L(u + iv) := Lu + iLv$  para  $u, v \in C^\infty(\Sigma) = C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ . Neste caso,  $\lambda$  é chamado um *autovalor* de  $L$  e  $\phi$  é dita uma *autofunção associada ao autovalor*  $\lambda$ .

Mesmo no caso compacto sem bordo, o operador  $L$  não é auto-adjunto em geral. Contudo, ele possui as seguintes propriedades:

**Lema 2.2.8.** *Se  $\Sigma$  é uma MOTS fechada, então:*

- (i) *Existe um autovalor real  $\lambda_1 = \lambda_1(L)$  de  $L$ , chamado autovalor principal, tal que qualquer outro autovalor  $\lambda$  de  $L$  satisfaz  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \lambda_1$ . A autofunção  $\phi_1$  associada a  $\lambda_1$  é única a menos de multiplicação por constante e pode ser escolhida estritamente positiva;*
- (ii)  *$\lambda_1 \geq 0$  (respectivamente,  $\lambda_1 > 0$ ) se, e somente se, existe  $\psi \in C^\infty(\Sigma)$  tal que  $\psi > 0$  e  $L\psi \geq 0$  (respectivamente,  $L\psi > 0$ );*
- (iii) *O operador adjunto formal  $L^*$  de  $L$  (com respeito ao produto interno  $L^2$ ) possui o mesmo autovalor principal que  $L$ .*

*Demonstração.* Veja o Apêndice A.2. □

**Definição 2.2.9.** Uma MOTS fechada  $\Sigma$  é dita *estável* se existe uma função  $\psi \in C^\infty(\Sigma)$  tal que  $\psi > 0$  e  $L\psi \geq 0$ . Segue diretamente do item (ii) do lema anterior que  $\Sigma$  é estável se, e somente se,  $\lambda_1(L) \geq 0$ .

**Observação 2.2.10.** Se  $\Sigma$  é fechada, o operador adjunto formal  $L^* : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  de  $L$  é dado por

$$L^*\phi = -\Delta\phi - 2\langle X, \nabla\phi \rangle + (Q - |X|^2 - \operatorname{div} X)\phi.$$

De fato, dadas  $\phi, \psi \in C^\infty(\Sigma)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \phi \langle X, \nabla\psi \rangle dA &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\psi\phi X) - \psi \operatorname{div}(\phi X) dA \\ &= \int_{\Sigma} \psi(-\langle X, \nabla\phi \rangle - \phi \operatorname{div} X) dA. \end{aligned}$$

Portanto, tomando  $q = Q - |X|^2 + \operatorname{div} X$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \phi L\psi dA &= \int_{\Sigma} \phi(-\Delta\psi + 2\langle X, \nabla\psi \rangle + q\psi) dA \\ &= \int_{\Sigma} \psi(-\Delta\phi - 2\langle X, \nabla\phi \rangle + (q - 2 \operatorname{div} X)\phi) dA. \end{aligned}$$

**Observação 2.2.11.** O lema anterior é verdadeiro para qualquer operador da forma  $-\Delta + 2\langle X, \nabla(\cdot) \rangle + q$ , onde  $X \in \Gamma(T\Sigma)$  e  $q \in C^\infty(\Sigma)$  (veja o Apêndice B de [4]). Em particular, o mesmo vale para o operador  $L^*$ .

Agora, considere o operador “simetrizado”  $L_0 : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ ,

$$L_0\phi = -\Delta\phi + Q\phi,$$

obtido formalmente de (2.2) tomando  $X = 0$ . O próximo lema foi obtido como parte do principal resultado em [24] (veja também [4, 21]). Por questão de completude, apresentamos sua demonstração aqui.

**Lema 2.2.12.** *Se  $\Sigma$  é fechada, então  $\lambda_1(L_0) \geq \lambda_1(L)$ . Em particular, se  $\lambda_1(L) \geq 0$ , temos*

$$\int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 + Qf^2) dA \geq 0, \quad (2.3)$$

qualquer que seja  $f \in C^\infty(\Sigma)$ .

*Demonstração.* Seja  $\phi$  uma autofunção de  $L$  associada ao autovalor principal  $\lambda = \lambda_1(L)$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\phi > 0$ . Então, de (2.2),

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\Delta\phi}{\phi} + 2\langle X, \frac{1}{\phi}\nabla\phi \rangle - |X|^2 + \operatorname{div} X + Q \\ &= -\frac{\Delta\phi}{\phi} + \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi^2} - |X - \frac{1}{\phi}\nabla\phi|^2 + \operatorname{div} X + Q \\ &= -\Delta \ln \phi - |X - \nabla \ln \phi|^2 + \operatorname{div} X + Q \\ &= \operatorname{div} Y - |Y|^2 + Q, \end{aligned}$$

onde  $Y = X - \nabla \ln \phi$ . Desta forma, dada  $f \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}$ , segue das identidades acima,

$$\begin{aligned} \lambda f^2 - Qf^2 &= f^2 \operatorname{div} Y - f^2 |Y|^2 \\ &= \operatorname{div}(f^2 Y) - 2f \langle \nabla f, Y \rangle - f^2 |Y|^2 \\ &\leq \operatorname{div}(f^2 Y) + 2|f| |\nabla f| |Y| - f^2 |Y|^2 \\ &\leq \operatorname{div}(f^2 Y) + (|\nabla f|^2 + f^2 |Y|^2) - f^2 |Y|^2 \\ &= \operatorname{div}(f^2 Y) + |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Finalmente, o resultado segue das últimas desigualdades acima, do Teorema da Divergência e da Fórmula de Rayleigh,

$$\lambda_1(L_0) = \inf_{f \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 + Qf^2) dA}{\int_{\Sigma} f^2 dA}, \quad (2.4)$$

que caracteriza o autovalor principal do operador  $L_0$ . □

Abaixo enunciaremos um lema que aparece como parte da demonstração do principal resultado de [20].

**Lema 2.2.13.** *Seja  $\Sigma$  uma MOTS fechada em um conjunto de dados iniciais  $(M, g, K)$ . Se  $\lambda_1(L) = 0$ , então existe uma variação  $t \mapsto \Sigma_t \subset M$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , de  $\Sigma = \Sigma_0$  tal que  $\Sigma_t$  é uma hipersuperfície de curvatura média nula constante  $\theta = \theta(t)$ , para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Além disso,  $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$  é uma folheação de uma vizinhança de  $\Sigma$  em  $M$  com campo variacional  $\frac{\partial}{\partial t} = \phi_t \nu_t$ , onde  $\nu_t$  é o vetor unitário normal a  $\Sigma_t$  em  $M$  que aponta para fora de  $\Sigma_t$  e  $\phi_t : \Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função positiva.*

Antes de passarmos para a próxima seção, fixaremos algumas terminologias.

**Definição 2.2.14.** Se  $\Sigma$  é uma MOTS em  $M$  que separa, denotamos por  $M_+$  a região de  $M$  consistindo de  $\Sigma$  e da região fora de  $\Sigma$ . Dizemos que  $\Sigma$  é *fracamente outermost* se não existe uma *outer trapped surface* em  $M_+$  homóloga a  $\Sigma$ . Além disso,  $\Sigma$  é *outer area minimizing* se sua área é menor ou igual à área de qualquer hipersuperfície em  $M_+$  homóloga a  $\Sigma$ .

**Observação 2.2.15.** Segue da Proposição 2.2.5 e do Lema 2.2.8 que se  $\Sigma$  é uma MOTS fechada fracamente *outermost*, então  $\Sigma$  é estável. Caso contrário, tomando uma variação de  $\Sigma$  com campo variacional  $\phi_1\nu$ , onde  $\phi_1 > 0$  é a autofunção de  $L$  associada ao autovalor principal  $\lambda_1 < 0$ , teremos hipersuperfícies (arbitrariamente próximas de  $\Sigma$ ) em  $M_+$  homólogas a  $\Sigma$  com curvatura média nula estritamente negativa. Da mesma maneira, usando a Fórmula da Primeira Variação de Área, se  $\Sigma$  é *outer area minimizing*, então a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$  é não-negativa.

## 2.3 O Caso Esférico

Nesta seção estudaremos uma estimativa de área para MOTSs esféricas bidimensionais estáveis sob uma hipótese geométrica no conjunto de dados iniciais. Além disso, provaremos a rigidez local do conjunto de dados iniciais quando esta estimativa é atingida.

Esta seção faz parte do trabalho [22] em colaboração com G. J. Galloway.

Nesta seção,  $\Sigma^2$  denotará uma MOTS fechada de dimensão 2.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $\Sigma^2$  uma MOTS esférica (topologicamente  $S^2$ ) estável em um conjunto tridimensional de dados iniciais  $(M^3, g, K)$ . Suponha que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\mu + J(\nu) \geq c$  sobre  $\Sigma$ , onde  $\nu$  é o vetor unitário normal a  $\Sigma$  em  $M$  que aponta para fora de  $\Sigma$ . Então, a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}. \quad (2.5)$$

*Além disso, se vale a igualdade, então  $\Sigma^2$  é a 2-esfera redonda com curvatura Gaussiana  $\kappa = c$ , a segunda forma fundamental nula  $\chi$  (com respeito ao vetor nulo que aponta para fora) de  $\Sigma$  é identicamente nula,  $\mu + J(\nu) = c$  sobre  $\Sigma$  e  $\lambda_1(L_0) = \lambda_1(L) = 0$ .*

*Demonstração.* Por hipótese,  $\lambda_1(L) \geq 0$ , onde  $L$  é o operador de estabilidade para

MOTSs. Então, usando (2.3) com  $f = 1$  e o Teorema de Gauss-Bonnet, temos

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Sigma} Q dA \\
 &= \int_{\Sigma} \left( \kappa - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) dA \\
 &\leq \int_{\Sigma} \left( \kappa - c - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) dA \\
 &\leq \int_{\Sigma} (\kappa - c) dA \\
 &= 4\pi - cA(\Sigma),
 \end{aligned}$$

o que prova (2.5).

Agora, se vale a igualdade em (2.5), então todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Desta forma,  $\chi = 0$ ,  $\mu + J(\nu) = c$  sobre  $\Sigma$  e  $\int_{\Sigma} Q dA = 0$ . Observe que  $Q = \kappa - c$ . Usando novamente (2.3),

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Sigma} (|\nabla(\alpha + \psi)|^2 + Q(\alpha + \psi)^2) dA \\
 &= \int_{\Sigma} (|\nabla\psi|^2 + Q\psi^2) dA + 2\alpha \int_{\Sigma} Q\psi dA,
 \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\psi \in C^{\infty}(\Sigma)$ . Isto implica que  $\int_{\Sigma} Q\psi dA = 0$  para toda  $\psi \in C^{\infty}(\Sigma)$ , e assim  $Q = \kappa - c = 0$ . Finalmente,  $\lambda_1(L_0) = \lambda_1(L) = 0$  segue do Lema 2.2.12 e de (2.4), lembrando que  $\lambda_1(L) \geq 0$ .  $\square$

**Observação 2.3.2.** Supondo apenas que  $\Sigma$  é orientável, a hipótese topológica sobre  $\Sigma$  na proposição anterior não é necessária. De fato, usando a estabilidade de  $\Sigma$  e procedendo exatamente como na primeira parte da demonstração da proposição, temos que

$$0 \leq 2\pi\chi(\Sigma) - cA(\Sigma),$$

o que implica  $\chi(\Sigma) > 0$ . Logo,  $\Sigma^2$  é topologicamente  $S^2$ .

Abaixo demonstraremos um dos principais resultados deste capítulo.

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $(M^3, g, K)$  um conjunto tridimensional de dados iniciais. Seja  $\Sigma^2$  uma MOTS esférica fracamente outermost e outer area minimizing em  $M^3$ . Suponha que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\mu - |J| \geq c$  em  $M_+$ . Então,*

$$A(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}.$$

Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $([0, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma^2, g_0)$  é a 2-esfera redonda de raio  $1/\sqrt{c}$ . Também, para cada slice  $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$ , temos que  $K|_{T_x \Sigma_t \times T_x \Sigma_t} = 0$ , qualquer que seja  $x \in \Sigma_t$ . Em particular, tais slices são MOTSs.

*Demonstração.* Tendo em vista que  $\Sigma$  é fracamente *outermost* e fechada, segue da Observação 2.2.15 que  $\Sigma$  é estável. Portanto, observando que  $\mu + J(\nu) \geq \mu - |J| \geq c$ , segue da Proposição 2.3.1 que  $A(\Sigma) \leq 4\pi/c$ . Além disso, se  $A(\Sigma) = 4\pi/c$ , então  $\lambda_1(L) = 0$ . Neste caso, sejam  $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ,  $\theta = \theta(t)$  e  $\phi = \phi_t$  dados pelo Lema 2.2.13. Segue da Proposição 2.2.5 que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + \left( Q - |X|^2 + \operatorname{div} X - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \right) \phi,$$

onde  $\Delta = \Delta_t$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_t$ ,  $X = X_t$ ,  $\nabla = \nabla_t$  (operador gradiente),  $Q = Q_t$  e  $\operatorname{div} = \operatorname{div}_t$  são as respectivas entidades associadas a  $\Sigma_t$ , para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\theta'}{\phi} &= -\frac{\Delta\phi}{\phi} + 2\langle X, \frac{1}{\phi}\nabla\phi \rangle - |X|^2 + \operatorname{div} X + Q - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \\ &= \operatorname{div} Y - |Y|^2 + Q - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \\ &\leq \operatorname{div} Y + Q + \theta\tau, \end{aligned}$$

onde  $Y = X - \nabla \ln \phi$ . Assim, observando que  $\theta'(t)$  também é constante sobre  $\Sigma_t$  e usando o Teorema da Divergência, para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ , temos

$$\begin{aligned} \theta'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\phi} dA_t - \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau dA_t &\leq \int_{\Sigma_t} Q dA_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \left( \kappa - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2}|X|^2 \right) dA_t \\ &\leq \int_{\Sigma_t} \left( \kappa - (\mu - |J|) - \frac{1}{2}|X|^2 \right) dA_t \\ &\leq \int_{\Sigma_t} (\kappa - (\mu - |J|)) dA_t \\ &\leq \int_{\Sigma_t} (\kappa - c) dA_t \\ &= 4\pi - cA(\Sigma_t) \\ &= cA(\Sigma) - cA(\Sigma_t) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\theta'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\phi} dA_t \leq \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau dA_t,$$

onde acima nós usamos o Teorema de Gauss-Bonnet e a hipótese de que  $\Sigma$  é *outer area minimizing*. Definindo  $h(t) = \int_{\Sigma_t} \tau dA_t / \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\phi} dA_t$ , segue diretamente da última desigualdade que

$$\frac{d}{dt} \left( \theta(t) e^{-\int_0^t h(s) ds} \right) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Portanto,  $0 \leq \theta(t) \leq \theta(0) = 0$ , i.e.,  $\theta(t) = 0$  para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ . Isto prova que cada *slice*  $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$ ,  $t \in [0, \varepsilon)$ , é uma MOTS.

Visto que  $\theta(t) = 0$  para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ , todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Então,  $Y = X - \nabla \ln \phi = 0$ ,  $\chi = 0$  e  $\mu + J(\nu) = \mu - |J| = c$  sobre  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$ . Além disso,  $A(\Sigma_t) = A(\Sigma) = 4\pi/c$  para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ . Visto que  $\theta'(t) = 0$ , segue da Proposição 2.2.5 e do Lema 2.2.8 que  $\Sigma_t$  é estável. Assim, usando a Proposição 2.3.1, temos que  $\Sigma_t$  é uma esfera redonda com curvatura Gaussiana  $\kappa_t = c$ , i.e., uma esfera redonda de raio  $1/\sqrt{c}$ , para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ .

Agora, visto que  $A(\Sigma_t) = A(\Sigma)$ ,  $\Sigma$  é *outer area minimizing* e  $\Sigma_t \subset M_+$  é homóloga a  $\Sigma$ , segue que  $\Sigma_t$  também é *outer area minimizing*, para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ . Então, a curvatura média  $H_t$  de  $\Sigma_t$  em  $M$  é não-negativa, para cada  $t \in [0, \varepsilon)$  (veja a Observação 2.2.15). Segue então da Fórmula da Primeira Variação de Área que

$$0 = \frac{d}{dt} A(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} H_t \phi dA_t,$$

o que implica  $H_t = 0$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ , pois  $\phi = \phi_t > 0$ .

Tendo em vista que  $\Sigma_t$  é uma MOTS mínima, segue que  $\text{tr}_{\Sigma_t} K = 0$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ . Então, a curvatura média nula  $\theta_-(t) = \text{tr}_{\Sigma_t} K - H_t$  de  $\Sigma_t$  com respeito a  $l_-(t) = u - \nu_t$  também se anula. Desta forma, aplicando a Proposição 2.2.5 para  $\theta_-$  e  $\phi_- = -\phi$  no lugar de  $\theta = \theta_+$  e  $\phi$ , respectivamente, temos

$$0 = \theta'_- = -\Delta \phi_- + 2\langle X_-, \nabla \phi_- \rangle + (Q_- - |X_-|^2 + \text{div } X_-)\phi_-, \quad (2.6)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_- &= \kappa - (\mu + J(-\nu)) - \frac{1}{2}|X_-|^2 \\ &= c - (\mu + |J|) - \frac{1}{2}|X_-|^2 \\ &= -2|J| - \frac{1}{2}|X_-|^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$X_- = (K(-\nu_t, \cdot)|_{T_x \Sigma_t})^\# = -X = -\frac{1}{\phi} \nabla \phi, \quad (2.8)$$

em cada  $x \in \Sigma_t$ . Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6) (e lembrando que  $\phi_- = -\phi$ ), obtemos

$$\Delta \phi + \frac{|\nabla \phi|^2}{\phi} + \left( |J| + \frac{1}{4}|X_-|^2 \right) \phi = 0,$$

o que, após integração sobre  $\Sigma_t$ , implica

$$|\nabla \phi| = |X_-| = |J| = 0 \text{ sobre } U.$$

A equação (2.1) implica que  $K|_{T_x \Sigma_t \times T_x \Sigma_t} = 0$  e que  $(\Sigma, g_t)$  é totalmente geodésica em  $M$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ , onde  $g_t$  é a métrica sobre  $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$  induzida de  $(M, g)$ . Escrevendo  $g = \phi^2 dt^2 + g_t$  sobre  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  e observando que  $\phi = \phi_t$  depende apenas de  $t \in [0, \varepsilon)$ , segue que  $g_t$  não depende de  $t \in [0, \varepsilon)$ . Com a simples mudança de variável  $ds = \phi(t)dt$ ,  $\phi(t) = \phi_t$ , obtemos que  $g$  tem a estrutura de produto  $ds^2 + g_0$  sobre  $U$ , onde  $(\Sigma, g_0)$  é a esfera redonda de raio  $1/\sqrt{c}$ . Isto completa a demonstração do Teorema 2.3.3.  $\square$



**Observação 2.3.4.** Continuando com a notação acima, uma vez que  $J = \operatorname{div} K - \tau = 0$ ,  $K|_{T_x \Sigma_t \times T_x \Sigma_t} = 0$ ,  $K(\nu_t, \cdot)|_{T_x \Sigma_t} = 0$  e  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica em  $M$ , segue que  $\tau$  não depende de  $x \in \Sigma_t$ , i.e.,  $\tau$  depende apenas de  $t \in [0, \varepsilon)$ . De fato, seja  $x = (x^1, x^2)$  um sistema local de coordenadas em  $\Sigma$  e considere a mudança de variável anterior  $ds = \phi(t)dt$ . Observando que  $\nabla_{\partial_s} \partial_s = 0$ ,  $g(\partial_s, \partial_s) = 1$  e  $g(\partial_s, \partial_{x^i}) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \partial_k \tau &= (\operatorname{div} K)(\partial_k) \\ &= g^{ij}(\nabla_{\partial_i} K)(\partial_k, \partial_j) + (\nabla_{\partial_s} K)(\partial_k, \partial_s) \\ &= g^{ij}(\partial_i K(\partial_k, \partial_j) - K(\nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_j) - K(\partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_j)) \\ &\quad + \partial_s K(\partial_k, \partial_s) - K(\nabla_{\partial_s} \partial_k, \partial_s) - K(\partial_k, \nabla_{\partial_s} \partial_s) \\ &= K(\nabla_{\partial_k} \partial_s, \partial_s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

### 2.3.1 Espaço-tempo de Nariai

Nesta subseção caracterizaremos a geometria extrínseca local de  $(M^3, g, K)$  quando, sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.3, vale a igualdade  $A(\Sigma) = 4\pi/c$ .

Dado  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , dizemos que um espaço-tempo  $\overline{M} = (\overline{M}, \overline{g})$  é *solução da Equação de Einstein no vácuo com constante cosmológica*  $\Lambda$  se

$$G + \Lambda \overline{g} = 0,$$

onde  $G = \overline{\operatorname{Ric}} - \frac{\overline{R}}{2} \overline{g}$  é o tensor de Einstein de  $(\overline{M}, \overline{g})$ . O *Espaço-tempo de Nariai* de dimensão 4 é a solução da Equação de Einstein no vácuo com constante cosmológica  $\Lambda > 0$  dada por

$$\overline{N} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2, \quad \overline{h} = \frac{1}{\Lambda}(-dt^2 + \cosh^2 t d\theta^2 + d\Omega^2),$$

onde  $d\theta^2$  e  $d\Omega^2$  são as métricas canônicas de  $\mathbb{S}^1$  e  $\mathbb{S}^2$ , respectivamente. Observe que  $(\overline{N}, \overline{h})$  é localmente isométrica a

$$\tilde{N} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\Lambda}(-dt^2 + \cosh^2 t dr^2 + d\Omega^2). \quad (2.9)$$

Nosso resultado é o seguinte:

**Teorema 2.3.5.** *Seja  $(M^3, g, K)$  um conjunto tridimensional de dados iniciais. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.3, se  $A(\Sigma) = 4\pi/c$ , então uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  pode ser isometricamente mergulhada no Espaço-tempo de Nariai  $(\overline{N}, \overline{h})$  (com constante cosmológica adequada) como uma hipersuperfície tipo-espaço de tal maneira que  $g$  restrita a  $U$  é a métrica induzida de  $\overline{N}$  e  $K$  restrita a  $U$  é a segunda forma fundamental de  $U$  em  $\overline{N}$ .*

Antes de demonstrarmos este teorema, vejamos um exemplo bastante útil.

**Exemplo 2.3.6.** Seja  $\tilde{N} = (\tilde{N}, \tilde{h})$  definida por (2.9) com  $\Lambda = 1$ . Dada uma função suave  $t : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , considere a hipersuperfície  $N = \{(t(s), r(s), z) : s \in [0, \varepsilon), z \in \mathbb{S}^2\} \subset \tilde{N}$ , onde

$$r(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 + (t'(w))^2}}{\cosh t(w)} dw. \quad (2.10)$$

Seja  $\tilde{\Phi}(t, r, x, y) = (t, r, \varphi(x, y))$  uma parametrização local de  $\tilde{N}$ , onde  $\varphi$  é uma parametrização local de  $\mathbb{S}^2$ . Agora, considere a parametrização local  $\Phi(s, x, y) = \tilde{\Phi}(t(s), r(s), x, y)$  de  $N$ . Os campos coordenados  $\{\partial_s, \partial_x, \partial_y\}$  em  $N$  (em relação a  $\Phi$ ) são dados por

$$\partial_s = t' \tilde{\partial}_t + r' \tilde{\partial}_r, \quad \partial_x = \tilde{\partial}_x, \quad \partial_y = \tilde{\partial}_y, \quad (2.11)$$

onde  $\{\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_x, \tilde{\partial}_y\}$  são os campos coordenados em  $\tilde{N}$  (em relação a  $\tilde{\Phi}$ ). Segue diretamente de (2.9) (com  $\Lambda = 1$ ), (2.10) e (2.11) que

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\partial_s, \partial_s) &= -(t')^2 + (r')^2 \cosh^2 t = 1, \\ \tilde{h}(\partial_s, \partial_x) &= \tilde{h}(\partial_s, \partial_y) = 0, \\ \tilde{h}|_{T_x \mathbb{S}^2 \times T_x \mathbb{S}^2} &= d\Omega^2, \end{aligned}$$

para cada  $z \in \mathbb{S}^2$ . Disto, temos que  $([0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^2, ds^2 + d\Omega^2)$  é isométrica a  $(N, h)$ , onde  $h$  é a métrica induzida de  $\tilde{N}$ , com isometria dada por  $(s, z) \mapsto (t(s), r(s), z)$ . Em particular,  $N$  é uma hipersuperfície tipo-espaço em  $\tilde{N}$ .

Fixe  $\tilde{\partial}_t$  como uma tempo-orientação positiva em  $\tilde{N}$ , ou seja, por definição,  $\tilde{\partial}_t$  aponta para o futuro. Denote por  $P$  a segunda forma fundamental de  $N$  em  $\tilde{N}$  e por  $u$  o vetor unitário (tipo-tempo) normal a  $N$  que aponta para o futuro. Podemos ver que

$$u = a \tilde{\partial}_t + b \tilde{\partial}_r, \quad \text{onde } a = \sqrt{1 + (t')^2} \text{ e } b = \frac{t'}{\cosh t}.$$

Usando a Fórmula de Koszul,  $2\tilde{h}(\tilde{\partial}_k, \tilde{\nabla}_{\tilde{\partial}_i} \tilde{\partial}_j) = \tilde{\partial}_i \tilde{h}_{jk} + \tilde{\partial}_j \tilde{h}_{ik} - \tilde{\partial}_k \tilde{h}_{ij}$ , para os campos coordenados  $\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j, \tilde{\partial}_k \in \{\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_x, \tilde{\partial}_y\}$ , segue que

$$\begin{aligned} P(\partial_x, \partial_x) &= -\tilde{h}(u, \tilde{\nabla}_{\partial_x} \partial_x) \\ &= -\tilde{h}(a \tilde{\partial}_t + b \tilde{\partial}_r, \tilde{\nabla}_{\tilde{\partial}_x} \tilde{\partial}_x) \\ &= \frac{a}{2} \tilde{\partial}_t \tilde{h}(\tilde{\partial}_x, \tilde{\partial}_x) + \frac{b}{2} \tilde{\partial}_r \tilde{h}(\tilde{\partial}_x, \tilde{\partial}_x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente,  $P(\partial_x, \partial_y) = P(\partial_y, \partial_y) = 0$ . Também,

$$\begin{aligned} P(\partial_s, \partial_x) &= -\tilde{h}(u, \tilde{\nabla}_{\partial_s} \partial_x) \\ &= -\tilde{h}(a \tilde{\partial}_t + b \tilde{\partial}_r, \tilde{\nabla}_{t' \tilde{\partial}_t + r' \tilde{\partial}_r} \tilde{\partial}_x) \\ &= -\frac{at'}{2} \tilde{\partial}_x \tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_t) - \frac{br'}{2} \tilde{\partial}_x \tilde{h}(\tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_r) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma maneira,  $P(\partial_s, \partial_y) = 0$ . Assim, a curvatura média  $\sigma = \text{tr } P$  de  $N$  em  $\tilde{N}$  é dada por  $P(\partial_s, \partial_s)$ . Neste caso,

$$\begin{aligned}
\sigma &= P(\partial_s, \partial_s) \\
&= -\tilde{h}(u, \tilde{\nabla}_{\partial_s} \partial_s) \\
&= -\tilde{h}(a\tilde{\partial}_t + b\tilde{\partial}_r, \tilde{\nabla}_{\partial_s}(t'\tilde{\partial}_t + r'\tilde{\partial}_r)) \\
&= -\tilde{h}(a\tilde{\partial}_t + b\tilde{\partial}_r, t''\tilde{\partial}_t + r''\tilde{\partial}_r + t'\tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_t + r'\tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_r) \\
&= -[-at'' + br'' \cosh^2 t + \tilde{h}(a\tilde{\partial}_t + b\tilde{\partial}_r, t'\tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_t + r'\tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_r)]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Observe que

$$\tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_t) = \frac{1}{2}\partial_s\tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_t) = 0, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_r) &= \tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\nabla}_{t'\tilde{\partial}_t+r'\tilde{\partial}_r}\tilde{\partial}_r) \\
&= \frac{t'}{2}\tilde{\partial}_r\tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_t) - \frac{r'}{2}\tilde{\partial}_t\tilde{h}(\tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_r) \\
&= -r' \sinh t \cosh t, \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$\tilde{h}(\tilde{\partial}_r, \tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_t) = -\tilde{h}(\tilde{\partial}_t, \tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_r) = r' \sinh t \cosh t, \tag{2.15}$$

$$\tilde{h}(\tilde{\partial}_r, \tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_r) = \frac{1}{2}\partial_s\tilde{h}(\tilde{\partial}_r, \tilde{\partial}_r) = t' \sinh t \cosh t. \tag{2.16}$$

Usando (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma &= -[-at'' + br'' \cosh^2 t - a(r')^2 \sinh t \cosh t + 2bt'r' \sinh t \cosh t] \\
&= at'' - br'' \cosh^2 t + (ar' - 2bt')r' \sinh t \cosh t. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Observando que  $r' = \frac{a}{\cosh t}$  e  $a' = \frac{t't''}{a}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
at'' - br'' \cosh^2 t &= at'' - \frac{t'}{\cosh t} \left( \frac{a}{\cosh t} \right)' \cosh^2 t \\
&= at'' - \left( \frac{t'}{\cosh t} \right) \frac{\frac{t't''}{a} \cosh t - at' \sinh t}{\cosh^2 t} \cosh^2 t \\
&= at'' - \frac{(t')^2 t''}{a} + a(t')^2 \tanh t \\
&= \frac{(a^2 - (t')^2)t''}{a} + a(t')^2 \tanh t \\
&= \frac{t''}{a} + a(t')^2 \tanh t. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
(ar' - 2bt')r' \sinh t \cosh t &= \left( a \frac{a}{\cosh t} - 2 \frac{t'}{\cosh t} t' \right) \frac{a}{\cosh t} \sinh t \cosh t \\
&= (a^2 - 2(t')^2)a \tanh t. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (2.18) e (2.19) em (2.17), obtemos

$$\sigma = \frac{t''}{a} + ((t')^2 + a^2 - 2(t')^2)a \tanh t = \frac{t'' + a^2 \tanh t}{a},$$

i.e.,

$$\sigma = \frac{t'' + (1 + (t')^2) \tanh t}{\sqrt{1 + (t')^2}}.$$

*Demonstração do Teorema 2.3.5.* Após um possível escalonamento, podemos assumir que  $\Lambda = c = 1$ . Usando o Teorema 2.3.3, uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $([0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^2, ds^2 + d\Omega^2)$ . Além disso, pela Observação 2.3.4, a curvatura média  $\tau$  de  $U$  em  $\bar{M}$  depende apenas de  $s \in [0, \varepsilon)$ . Então, escolhendo  $\varepsilon > 0$  possivelmente menor, podemos tomar uma solução  $t : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  para o problema

$$\frac{t'' + (1 + (t')^2) \tanh t}{\sqrt{1 + (t')^2}} = \tau, \quad t(0) = t'(0) = 0.$$

Assim, definindo  $\Psi : [0, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \tilde{N}$  por  $\Psi(s, z) = (t(s), r(s), z)$ , onde  $r$  é dada por (2.10) como no Exemplo 2.3.6, temos um mergulho isométrico de  $U$  em  $\tilde{N}$ . Aqui estamos identificando  $\Sigma$  com  $\mathbb{S}^2$ . É claro que  $K$  restrita a  $U$  é a segunda forma fundamental de  $N \approx U$  em  $\tilde{N}$ . De fato, basta lembrar que, neste caso,  $K$  é determinada pela curvatura média  $\tau = K(\nu, \nu)$ , pois  $K|_{T_z \Sigma_s \times T_z \Sigma_s} = 0$  e  $K(\nu_s, \cdot)|_{T_z \Sigma_s} = 0$ , para cada  $z \in \Sigma_s$ , e a segunda forma fundamental  $P$  de  $N$  em  $\tilde{N}$  é determinada pela curvatura média  $\sigma = \tau$ . Isto garante o resultado, tendo em vista que  $(\mathbb{R} \times [0, \delta) \times \mathbb{S}^2, \tilde{h})$  pode ser isometricamente mergulhada em  $(\bar{N}, \bar{h})$ , se  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno.  $\square$

## 2.4 O Caso de Gênero Alto

O objetivo desta seção é desenvolver resultados similares àqueles obtidos na Seção 2.3 para MOTSs bidimensionais fechadas orientáveis  $\Sigma$  de gênero  $g(\Sigma) \geq 2$ .

O próximo resultado é bastante conhecido (veja [26] para o caso tempo-simétrico e [43] para o caso geral). Contudo, por questão de completude, apresentaremos sua demonstração aqui.

**Proposição 2.4.1.** *Seja  $\Sigma^2$  uma MOTS fechada estável orientável de gênero  $g(\Sigma) \geq 2$  em um conjunto tridimensional de dados iniciais  $(M^3, g, K)$ . Suponha que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\mu + J(\nu) \geq -c$  sobre  $\Sigma$ , onde  $\nu$  é o vetor unitário normal a  $\Sigma$  em  $M$  que aponta para fora de  $\Sigma$ . Então, a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma) \geq \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}. \quad (2.20)$$

Além disso, se vale a igualdade, então  $\Sigma$  tem curvatura Gaussiana constante  $\kappa = -c$ , a segunda forma fundamental nula  $\chi$  (com respeito ao vetor nulo que aponta para fora) de  $\Sigma$  é identicamente nula,  $\mu + J(\nu) = -c$  sobre  $\Sigma$  e  $\lambda_1(L_0) = \lambda_1(L) = 0$ .

*Demonstração.* Por hipótese,  $\lambda_1(L) \geq 0$ , onde  $L$  é o operador de estabilidade para MOTSs. Então, usando (2.3) com  $f = 1$  e o Teorema de Gauss-Bonnet, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} Q dA \\ &= \int_{\Sigma} \left( \kappa - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) dA \\ &\leq \int_{\Sigma} \left( \kappa + c - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) dA \\ &\leq \int_{\Sigma} (\kappa + c) dA \\ &= 4\pi(1 - g(\Sigma)) + cA(\Sigma), \end{aligned}$$

o que prova (2.20).

Agora, se vale a igualdade em (2.20), então todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Desta forma,  $\chi = 0$ ,  $\mu + J(\nu) = -c$  sobre  $\Sigma$  e  $\int_{\Sigma} Q dA = 0$ . Observe que  $Q = \kappa + c$ . Usando novamente (2.3),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} (|\nabla(\alpha + \psi)|^2 + Q(\alpha + \psi)^2) dA \\ &= \int_{\Sigma} (|\nabla\psi|^2 + Q\psi^2) dA + 2\alpha \int_{\Sigma} Q\psi dA, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ . Isto implica que  $\int_{\Sigma} Q\psi dA = 0$  para toda  $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ , e assim  $Q = \kappa + c = 0$ . Finalmente,  $\lambda_1(L_0) = \lambda_1(L) = 0$  segue do Lema 2.2.12 e de (2.4), lembrando que  $\lambda_1(L) \geq 0$ .  $\square$

Antes de passarmos para o principal resultado desta seção, demonstraremos um lema de Cálculo e apresentaremos a definição de  $n$ -convexidade para  $K$ .

A demonstração seguinte está baseada nas técnicas apresentadas em [33].

**Lema 2.4.2.** *Sejam  $f \in C^1([0, \varepsilon])$  e  $\eta, \xi, \rho \in C^0([0, \varepsilon])$  tais que  $\max\{f, \rho\} \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $f(0) = 0$  e*

$$f'(t)\eta(t) \leq \int_0^t f(s)\xi(s)ds + f(t)\rho(t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon].$$

*Então,  $f \leq 0$ . Em particular, se  $f \geq 0$ , então  $f$  é identicamente nula.*

*Demonstração.* Defina

$$I = \{\delta \in (0, \varepsilon) : f \leq 0 \text{ em } [0, \delta]\}.$$

*Afirmção 1.*  $I \neq \emptyset$ .

*Demonstração da Afirmção 1.* Por continuidade, existe uma constante  $C > 0$  satisfazendo

$$\max_{t \in [0, \varepsilon/2]} \left\{ \frac{1}{\eta(t)} \int_0^t \xi(s)ds, \frac{\rho(t)}{\eta(t)} \right\} \leq C.$$

Escolha  $\delta \in (0, \varepsilon/2]$  tal que  $0 < 1 - 2C\delta$ . Afirmamos que  $\delta \in I$ . Caso contrário, tome  $t_0 \in (0, \delta]$  tal que  $f(t_0) > 0$  e defina

$$t_1 = \inf\{t \in [0, t_0] : f(t) \geq f(t_0)\}.$$

Por continuidade,  $f(t_1) = f(t_0) > 0$ . Além disso, por definição,  $f(t) \leq f(t_1)$  para todo  $t \in [0, t_1]$  (observe que  $t_1 > 0$ , visto que  $f(0) = 0$ ). Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $t^* \in (0, t_1)$  tal que  $f(t_1) = f'(t^*)t_1$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{f(t_1)}{t_1} &= f'(t^*) \\ &\leq \frac{1}{\eta(t^*)} \int_0^{t^*} f(s)\xi(s)ds + f(t^*)\frac{\rho(t^*)}{\eta(t^*)} \\ &\leq \frac{f(t_1)}{\eta(t^*)} \int_0^{t^*} \xi(s)ds + f(t^*)\frac{\rho(t^*)}{\eta(t^*)} \\ &\leq Cf(t_1) + f(t^*)\frac{\rho(t^*)}{\eta(t^*)}. \end{aligned}$$

Agora, observe que  $f(t^*)\rho(t^*)/\eta(t^*) \leq Cf(t_1)$ . De fato, se  $f(t^*)\rho(t^*) \leq 0$ , não há o que demonstrar. Caso  $f(t^*)\rho(t^*) > 0$ , então  $f(t^*) > 0$  e  $\rho(t^*) > 0$ , pois  $\max\{f(t^*), \rho(t^*)\} \geq 0$  por hipótese. Portanto,  $f(t^*)(\rho(t^*)/\eta(t^*)) \leq f(t^*)C \leq f(t_1)C$ . Segue então que

$$\frac{f(t_1)}{t_1} \leq 2Cf(t_1),$$

o que implica  $1 \leq 2Ct_1 \leq 2C\delta$ . Isto é uma contradição, pois  $0 < 1 - 2C\delta$ .  $\square$

*Afirmção 2.*  $\sup I = \varepsilon$ .

*Demonstração da Afirmação 2.* Defina  $\delta_0 = \sup I$ . Observe que  $\delta_0 > 0$ , visto que  $I \neq \emptyset$ . Se  $\delta_0 < \varepsilon$ , defina  $\tilde{f}(t) = f(t + \delta_0)$ ,  $\tilde{\eta}(t) = \eta(t + \delta_0)$ ,  $\tilde{\xi}(t) = \xi(t + \delta_0)$  e  $\tilde{\rho}(t) = \rho(t + \delta_0)$ , para  $t \in [0, \varepsilon - \delta_0]$ . Observando que  $f \leq 0$  em  $[0, \delta_0]$  (i.e.,  $\delta_0 \in I$ ), temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(t)\tilde{\eta}(t) &= f'(t + \delta_0)\eta(t + \delta_0) \\ &\leq \int_0^{t+\delta_0} f(s)\xi(s)ds + f(t + \delta_0)\rho(t + \delta_0) \\ &= \int_0^{\delta_0} f(s)\xi(s)ds + \int_{\delta_0}^{t+\delta_0} f(s)\xi(s)ds + \tilde{f}(t)\tilde{\rho}(t) \\ &\leq \int_{\delta_0}^{t+\delta_0} f(s)\xi(s)ds + \tilde{f}(t)\tilde{\rho}(t) \\ &= \int_0^t \tilde{f}(w)\tilde{\xi}(w)dw + \tilde{f}(t)\tilde{\rho}(t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon - \delta_0], \end{aligned}$$

onde acima usamos a substituição  $s = w + \delta_0$ . Segue da definição de  $\delta_0$  que  $\tilde{f}(0) = f(\delta_0) = 0$ . Então, usando a Afirmação 1 para estas novas funções, existe  $\delta_1 \in (0, \varepsilon - \delta_0)$  tal que  $\tilde{f} \leq 0$  em  $[0, \delta_1]$ , o que implica  $f \leq 0$  em  $[0, \delta_0 + \delta_1]$ , contradizendo a definição de  $\delta_0$ .  $\square$

O resultado segue diretamente da Afirmação 2.  $\square$

**Definição 2.4.3.** Seja  $(M^{n+1}, g, K)$  um conjunto de dados iniciais de dimensão  $n + 1$ . Dizemos que  $K$  é  $n$ -convexo (sobre  $M$ ) se  $\text{tr}_\pi K \geq 0$  quaisquer que sejam  $\pi \subset T_p M$  e  $p \in M$ , onde  $\pi$  é um subespaço vetorial de dimensão  $n$ . Dizer que  $K$  é  $n$ -convexo é equivalente a dizer que a soma dos  $n$  menores autovalores de  $K$  é sempre não-negativa.

**Teorema 2.4.4.** *Seja  $(M^3, g, K)$  um conjunto tridimensional de dados iniciais. Seja  $\Sigma^2$  uma MOTS fechada fracamente outermost orientável de gênero  $g(\Sigma) \geq 2$  em  $M^3$ . Suponha que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\mu - |J| \geq -c$  e que  $K$  é 2-convexo, ambos sobre  $M_+$ . Então,*

$$A(\Sigma) \geq \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}.$$

Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica ao produto  $([0, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma, g_0)$  tem curvatura Gaussiana constante  $\kappa = -c$ . Também, para cada slice  $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$ , temos que  $K|_{T_x \Sigma_t \times T_x \Sigma_t} = 0$ , qualquer que seja  $x \in \Sigma_t$ . Em particular, tais slices são MOTSs.

**Observação 2.4.5.** Apesar de termos assumido que  $K$  é 2-convexo sobre  $M_+$ , no Teorema 2.4.4 não supomos que  $\Sigma$  é *outer area minimizing*, diferentemente do Teorema 2.3.3.

*Demonstração do Teorema 2.4.4.* A desigualdade segue diretamente da Proposição 2.4.1. Suponhamos então que  $A(\Sigma) = 4\pi(g(\Sigma) - 1)/c$ . Segue mais uma vez da Proposição 2.4.1 que  $\lambda_1(L) = 0$ . Neste caso, sejam  $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ,  $\theta = \theta(t)$  e  $\phi = \phi_t$  dados pelo Lema 2.2.13. Segue da Proposição 2.2.5 que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + \left( Q - |X|^2 + \text{div } X - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \right) \phi,$$

onde  $\Delta = \Delta_t$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_t$ ,  $X = X_t$ ,  $\nabla = \nabla_t$  (operador gradiente),  $Q = Q_t$  e  $\text{div} = \text{div}_t$  são as respectivas entidades associadas a  $\Sigma_t$ , para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\theta'}{\phi} &= -\frac{\Delta\phi}{\phi} + 2\langle X, \frac{1}{\phi}\nabla\phi \rangle - |X|^2 + \text{div } X + Q - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \\ &= \text{div } Y - |Y|^2 + Q - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \\ &\leq \text{div } Y + Q + \theta\tau, \end{aligned}$$

onde  $Y = X - \nabla \ln \phi$ . Assim, observando que  $\theta'(t)$  também é constante sobre  $\Sigma_t$  e usando

o Teorema da Divergência, para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ , temos

$$\begin{aligned}
 \theta'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\phi} dA_t - \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau dA_t &\leq \int_{\Sigma_t} Q dA_t \\
 &= \int_{\Sigma_t} \left( \kappa - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) dA_t \\
 &\leq \int_{\Sigma_t} \left( \kappa - (\mu - |J|) - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) dA_t \\
 &\leq \int_{\Sigma_t} (\kappa - (\mu - |J|)) dA_t \\
 &\leq \int_{\Sigma_t} (\kappa + c) dA_t \\
 &= 4\pi(1 - g(\Sigma)) + cA(\Sigma_t) \\
 &= -cA(\Sigma_0) + cA(\Sigma_t),
 \end{aligned}$$

onde acima nós usamos o Teorema de Gauss-Bonnet. Segue do Teorema Fundamental do Cálculo, da Fórmula da Primeira Variação de Área e de  $\theta(t) = \text{tr}_{\Sigma_t} K + H_t \geq H_t$  para  $t \in [0, \varepsilon)$ , que

$$\begin{aligned}
 \theta'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\phi} dA_t - \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau dA_t &\leq \int_0^t \frac{d}{ds} A(\Sigma_s) ds \\
 &= \int_0^t \left( \int_{\Sigma_s} H_s \phi dA_s \right) ds \\
 &\leq \int_0^t \theta(s) \left( \int_{\Sigma_s} \phi dA_s \right) ds,
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\theta'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\phi} dA_t \leq \int_0^t \theta(s) \left( \int_{\Sigma_s} \phi dA_s \right) ds + \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau dA_t, \quad \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Segue do Lema 2.4.2 que  $\theta(t) = 0$ , i.e.,  $\Sigma_t$  é uma MOTS, para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ .

Visto que  $\theta(t) = 0$  para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ , todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Então,  $Y = X - \nabla \ln \phi = 0$ ,  $\chi = 0$  e  $\mu + J(\nu) = \mu - |J| = -c$  sobre  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$ . Além disso,  $A(\Sigma_t) = A(\Sigma_0) = 4\pi(g(\Sigma) - 1)/c$  para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ . Visto que  $\theta'(t) = 0$ , segue da Proposição 2.2.5 e do Lema 2.2.8 que  $\Sigma_t$  é estável. Assim, usando a Proposição 2.4.1, temos que  $\Sigma_t$  tem curvatura Gaussiana constante  $\kappa_t = -c$ , para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ .

Agora, como  $t \mapsto A(\Sigma_t)$ ,  $t \in [0, \varepsilon)$ , é constante,

$$0 = \frac{d}{dt} A(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} H_t \phi dA_t.$$

O que implica  $H_t = 0$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ , visto que  $0 = \theta(t) \geq H_t$  e  $\phi = \phi_t > 0$ . Uma vez que  $\Sigma_t$  é uma MOTS mínima,  $\text{tr}_{\Sigma_t} K = 0$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ . Então, a curvatura média nula  $\theta_-(t) = \text{tr}_{\Sigma_t} K - H_t$  de  $\Sigma_t$  com respeito a  $l_-(t) = u - \nu_t$  também se anula. Desta forma, aplicando a Proposição 2.2.5 para  $\theta_-$  e  $\phi_- = -\phi$  no lugar de  $\theta = \theta_+$  e  $\phi$ , respectivamente, temos

$$0 = \theta'_- = -\Delta \phi_- + 2\langle X_-, \nabla \phi_- \rangle + (Q_- - |X_-|^2 + \text{div } X_-) \phi_-, \quad (2.21)$$



onde

$$\begin{aligned}
 Q_- &= \kappa - (\mu + J(-\nu)) - \frac{1}{2}|\chi_-|^2 \\
 &= -c - (\mu + |J|) - \frac{1}{2}|\chi_-|^2 \\
 &= -2|J| - \frac{1}{2}|\chi_-|^2,
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$X_- = -X = -\frac{1}{\phi}\nabla\phi. \tag{2.23}$$

Substituindo (2.22) e (2.23) em (2.21) (e lembrando que  $\phi_- = -\phi$ ), obtemos

$$\Delta\phi + \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} + \left(|J| + \frac{1}{4}|\chi_-|^2\right)\phi = 0,$$

o que, após integração sobre  $\Sigma_t$ , implica

$$|\nabla\phi| = |\chi_-| = |J| = 0 \text{ sobre } U.$$

A equação (2.1) implica que  $K|_{T_x\Sigma_t \times T_x\Sigma_t} = 0$  e que  $(\Sigma, g_t)$  é totalmente geodésica em  $M$  para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ , onde  $g_t$  é a métrica sobre  $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$  induzida de  $(M, g)$ . Escrevendo  $g = \phi^2 dt^2 + g_t$  sobre  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  e observando que  $\phi = \phi_t$  depende apenas de  $t \in [0, \varepsilon)$ , segue que  $g_t$  não depende de  $t \in [0, \varepsilon)$ . Com a simples mudança de variável  $ds = \phi(t)dt$ ,  $\phi(t) = \phi_t$ , obtemos que  $g$  tem a estrutura de produto  $ds^2 + g_0$  sobre  $U$ , onde  $(\Sigma, g_0)$  tem curvatura Gaussiana constante  $\kappa = -c$ , garantindo o Teorema 2.4.4.  $\square$

## 2.5 O Caso de Dimensão Alta com $\sigma$ -Constante Negativa

Nesta seção estenderemos os principais resultados da seção anterior para MOTSs de dimensão alta com  $\sigma$ -constante negativa. Porém, antes de enunciarmos nossos resultados, apresentaremos algumas terminologias.

Seja  $\Sigma^n$  uma  $n$ -variedade fechada (compacta sem bordo), com  $n \geq 3$ . Denote por  $\mathcal{M}(\Sigma)$  o conjunto de todas as métricas Riemannianas sobre  $\Sigma$ . O funcional de Hilbert-Einstein  $\mathcal{E} : \mathcal{M}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$\mathcal{E}(g) = \frac{\int_{\Sigma} R_g dv_g}{\text{Vol}(\Sigma^n, g)^{\frac{n-2}{n}}},$$

onde  $R_g$  é a curvatura escalar de  $(\Sigma, g)$ . Denote por  $[g] := \{e^{2f}g : f \in C^\infty(\Sigma)\} \subset \mathcal{M}(\Sigma)$  a classe conforme de  $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$ . O invariante de Yamabe de  $(\Sigma, [g])$  é definido como o seguinte invariante conforme:

$$\mathcal{Y}(\Sigma, [g]) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \mathcal{E}(\tilde{g}).$$

Dada  $u \in C^\infty(\Sigma^n)$  positiva, sabemos que se  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ , então

$$R_{\tilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left( -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + R_g u \right),$$

onde  $\Delta_g$  é o operador Laplaciano de  $(\Sigma, g)$ . Portanto, usando o Teorema da Divergência e a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} R_{\tilde{g}} dv_{\tilde{g}} &= \int_{\Sigma} u \left( -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + R_g u \right) dv_g \\ &= \int_{\Sigma} \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla^g u|_g^2 + R_g u^2 \right) dv_g \\ &\geq - \int_{\Sigma} |R_g| u^2 dv_g \\ &\geq - \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\Sigma} u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &= - \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \text{Vol}(\Sigma, \tilde{g})^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{E}(\tilde{g}) \geq - \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}},$$

qualquer que seja  $\tilde{g} \in [g]$ . Isto implica

$$\mathcal{Y}(\Sigma^n, [g]) \geq - \left( \int_{\Sigma} |R_g|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} > -\infty.$$

A solução clássica do Problema de Yamabe dada por H. Yamabe [45], N. Trudinger [42], T. Aubin [5] (veja também [6]) e R. Schoen [37] diz que toda classe conforme  $[g]$  contém métricas  $\hat{g}$ , chamadas *métricas de Yamabe*, que realizam o mínimo

$$\mathcal{E}(\hat{g}) = \mathcal{Y}(\Sigma, [g]).$$

Tais métricas possuem curvatura escalar constante dada por

$$R_{\hat{g}} = \mathcal{Y}(\Sigma^n, [g]) \text{Vol}(\Sigma^n, \hat{g})^{-\frac{2}{n}}.$$

Além disso,

$$\mathcal{Y}(\Sigma^n, [g]) \leq \mathcal{Y}(\mathbb{S}^n, [g_{\text{can}}])$$

e vale a igualdade se, e somente se,  $(\Sigma^n, [g])$  é conformemente difeomorfa à  $n$ -esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  munida da métrica canônica  $g_{\text{can}}$ .

R. Schoen [38] e O. Kobayashi [29] introduziram de maneira independente o seguinte invariante topológico:

**Definição 2.5.1.** Dada uma  $n$ -variedade diferenciável fechada  $\Sigma^n$ ,  $n \geq 3$ , a  $\sigma$ -constante de  $\Sigma^n$  é definida por

$$\sigma(\Sigma^n) = \sup_{g \in \mathcal{M}(\Sigma^n)} \mathcal{Y}(\Sigma^n, [g]).$$

**Observação 2.5.2.** Não é difícil demonstrar que  $\sigma(\Sigma^n) > 0$  se, e somente se,  $\Sigma^n$  admite uma métrica Riemanniana de curvatura escalar positiva. De fato, suponha que  $\sigma(\Sigma) > 0$ . Então existe  $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$  tal que  $\mathcal{Y}(\Sigma, [g]) > 0$ . Portanto, tomando uma métrica de Yamabe  $\hat{g} \in [g]$ , temos que  $R_{\hat{g}} = \mathcal{Y}(\Sigma^n, [g]) \text{Vol}(\Sigma^n, \hat{g})^{-\frac{2}{n}} > 0$ . Reciprocamente, suponha que  $g \in \mathcal{M}(\Sigma)$  possui curvatura escalar positiva. Seja  $\hat{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$  uma métrica de Yamabe, onde  $u \in C^\infty(\Sigma^n)$  é positiva. Assim,

$$R_{\hat{g}} \text{Vol}(\Sigma^n, \hat{g}) = \int_{\Sigma} \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla^g u|_g^2 + R_g u^2 \right) dv_g > 0.$$

**Observação 2.5.3.** Se  $\mathcal{Y}(\Sigma^n, [g]) < 0$ , dado  $c > 0$  existe uma única métrica  $\tilde{g} \in [g]$  tal que  $R_{\tilde{g}} \equiv -2c$ . A existência segue diretamente da solução do Problema de Yamabe. Vamos provar a unicidade. Suponha que existem  $g_1, g_2 \in [g]$  tais que  $R_{g_1} \equiv -2c \equiv R_{g_2}$ . Como  $g_2 \in [g_1]$ , temos que  $g_2 = u^{\frac{4}{n-2}}g_1$  para alguma  $u \in C^\infty(\Sigma)$  positiva. Assim,

$$-2cu^{\frac{n+2}{n-2}} = -\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_{g_1} u - 2cu,$$

ou seja,

$$2cu^{\frac{n+2}{n-2}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_{g_1} u + 2cu.$$

Tomando  $x_0 \in \Sigma$  tal que  $u(x_0) = \min u$ , temos que

$$2c(u(x_0))^{\frac{n+2}{n-2}} = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_{g_1} u(x_0) + 2cu(x_0) \geq 2cu(x_0),$$

o que implica  $u(x_0) \geq 1$ . Analogamente, tomando  $x_1 \in \Sigma$  tal que  $u(x_1) = \max u$ , temos que  $u(x_1) \leq 1$ . Portanto,  $u \equiv 1$ , como queríamos demonstrar.

A desigualdade (2.24) abaixo foi demonstrada em [23]. Nossa contribuição consiste na rigidez infinitesimal obtida quando a igualdade acontece. A demonstração da Proposição 2.5.4 abaixo está baseada em [34].

**Proposição 2.5.4.** *Seja  $\Sigma^n$  uma MOTS fechada estável com  $\sigma(\Sigma) < 0$  em um conjunto de dados iniciais  $(M^{n+1}, g, K)$ , onde  $n \geq 3$ . Suponha que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\mu + J(\nu) \geq -c$  sobre  $\Sigma$ , onde  $\nu$  é o vetor unitário normal a  $\Sigma$  em  $M$  que aponta para fora de  $\Sigma$ . Então, a área de  $\Sigma$  satisfaz*

$$A(\Sigma^n) \geq \left( \frac{|\sigma(\Sigma^n)|}{2c} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (2.24)$$

Além disso, se vale a igualdade, então a métrica  $g_\Sigma$  sobre  $\Sigma$  induzida de  $M$  é Einstein com curvatura escalar  $R_\Sigma = -2c$ , a segunda forma fundamental nula  $\chi$  (com respeito ao vetor nulo que aponta para fora) de  $\Sigma$  é identicamente nula,  $\mu + J(\nu) = -c$  sobre  $\Sigma$  e  $\lambda_1(L_0) = \lambda_1(L) = 0$ .

*Demonstração.* Visto que  $\Sigma$  é fechada e estável, temos que  $\lambda_1(L) \geq 0$ , onde  $L$  é o operador de estabilidade para MOTSs. Portanto, segue de (2.3) que

$$0 \leq 2 \int_\Sigma (|\nabla u|^2 + Qu^2) dA \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} &= \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + (R_\Sigma - 2(\mu + J(\nu)) - |\chi|^2)u^2) dA \\ &\leq \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + (R_\Sigma + 2c)u^2) dA, \end{aligned} \quad (2.26)$$

para toda  $u \in C^\infty(\Sigma)$  positiva. Usando  $2 < \frac{4(n-1)}{n-2}$  e a Desigualdade de Hölder em (2.26), temos

$$0 \leq \int_\Sigma \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_\Sigma u^2 \right) dA + 2c \int_\Sigma u^2 dA \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_\Sigma \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_\Sigma u^2 \right) dA + 2cA(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \left( \int_\Sigma u^{\frac{2n}{n-2}} dA \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &= \left( \int_\Sigma u^{\frac{2n}{n-2}} dA \right)^{\frac{n-2}{n}} \left( \mathcal{E}(u^{\frac{4}{n-2}} g_\Sigma) + 2cA(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

para toda  $u \in C^\infty(\Sigma)$  positiva. Então,

$$0 \leq \mathcal{E}(u^{\frac{4}{n-2}} g_\Sigma) + 2cA(\Sigma)^{\frac{2}{n}}, \quad (2.29)$$

para toda  $u \in C^\infty(\Sigma)$  positiva, o que implica

$$0 \leq \mathcal{Y}(\Sigma, [g_\Sigma]) + 2cA(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \leq \sigma(\Sigma) + 2cA(\Sigma)^{\frac{2}{n}}, \quad (2.30)$$

e isto prova (2.24).

Agora, suponha que vale a igualdade em (2.24). Então valem as igualdades em (2.30). Escolha  $u_0 \in C^\infty(\Sigma)$  positiva tal que  $\hat{g} = u_0^{\frac{4}{n-2}} g_\Sigma$  é uma métrica de Yamabe. Assim, as igualdades em (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29) devem ocorrer quando  $u = u_0$ . Desta forma,  $\chi = 0$ ,  $\mu + J(\nu) = -c$  sobre  $\Sigma$  e  $|\nabla u_0| = 0$ , visto que  $2 < \frac{4(n-1)}{n-2}$ . Isto implica que  $u_0$  é constante (em particular  $g_\Sigma$  também é de Yamabe) e que  $\int_\Sigma Q dA = 0$ . De maneira análoga às demonstrações das Proposições 2.3.1 e 2.4.1, temos que  $R_\Sigma = -2c$  e  $\lambda_1(L_0) = \lambda_1(L) = 0$ . Finalmente, as igualdades em (2.30) implicam que  $g_\Sigma$  realiza  $\sigma(\Sigma)$ , i.e.,  $\mathcal{E}(g_\Sigma) = \mathcal{Y}(\Sigma, [g_\Sigma]) = \sigma(\Sigma)$ . Então, por [38, pp. 126-127],  $g_\Sigma$  é Einstein.  $\square$

O principal resultado desta seção é o seguinte:

**Teorema 2.5.5.** *Seja  $(M^{n+1}, g, K)$  um conjunto de dados iniciais de dimensão  $n + 1$ , onde  $n \geq 3$ . Seja  $\Sigma^n$  uma MOTS fechada fracamente outermost em  $M^{n+1}$  com  $\sigma(\Sigma) < 0$ .*

Suponha que  $\mu - |J| \geq -c$  e que  $K$  é  $n$ -convexo, ambos sobre  $M_+$ . Então, a área de  $\Sigma$  satisfaz

$$A(\Sigma^n) \geq \left( \frac{|\sigma(\Sigma^n)|}{2c} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (2.31)$$

Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança exterior  $U \approx [0, \varepsilon) \times \Sigma$  de  $\Sigma$  em  $M$  é isométrica a  $([0, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$ , onde  $(\Sigma, g_\Sigma)$  é Einstein com curvatura escalar  $R_\Sigma = -2c$ . Também, para cada slice  $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ , temos que  $K|_{T_x \Sigma_t \times T_x \Sigma_t} = 0$ , qualquer que seja  $x \in \Sigma_t$ . Em particular, tais slices são MOTSs.

*Demonstração.* Tendo em vista que MOTSs fechadas fracamente *outermost* são estáveis (vide Observação 2.2.15), a desigualdade (2.31) segue da Proposição 2.5.4, uma vez que  $\mu + J(\nu) \geq \mu - |J| \geq -c$  sobre  $M_+$  (em particular sobre  $\Sigma$ ).

Suponha que a igualdade em (2.31) acontece. Segue da Proposição 2.5.4 que  $\lambda_1(L) = 0$ . Portanto, podemos tomar  $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ,  $\theta = \theta(t)$  e  $\phi = \phi_t$  como no Lema 2.2.13. Usando a Proposição 2.2.5, temos

$$\begin{aligned} \theta' &= -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + \left( Q - |X|^2 + \operatorname{div} X - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \right) \phi \\ &= \left( -|Y|^2 + \operatorname{div} Y + Q - \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\tau \right) \phi \\ &\leq \left( -|Y|^2 + \operatorname{div} Y + Q + \theta\tau \right) \phi, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $Y = X - \nabla \ln \phi$ . Aqui,  $\Delta = \Delta_t$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_t$ ,  $X = X_t$ ,  $\nabla = \nabla_t$  (operador gradiente),  $Q = Q_t$  e  $\operatorname{div} = \operatorname{div}_t$  são as respectivas entidades associadas a  $\Sigma_t$ , para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Segue de (2.32) que

$$\begin{aligned} \theta'(t) \frac{u^2}{\phi} - \theta(t) \tau u^2 &\leq -u^2 |Y|^2 + u^2 \operatorname{div} Y + Qu^2 \\ &= -u^2 |Y|^2 + \operatorname{div}(u^2 Y) - 2u \langle \nabla u, Y \rangle \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} R_{\Sigma_t} - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) u^2 \\ &\leq -u^2 |Y|^2 + \operatorname{div}(u^2 Y) + 2|u| |\nabla u| |Y| \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} R_{\Sigma_t} - (\mu - |J|) - \frac{1}{2} |\chi|^2 \right) u^2 \\ &\leq -u^2 |Y|^2 + \operatorname{div}(u^2 Y) + |\nabla u|^2 + u^2 |Y|^2 + \left( \frac{1}{2} R_{\Sigma_t} + c \right) u^2 \\ &= \operatorname{div}(u^2 Y) + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} R_{\Sigma_t} u^2 + cu^2, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $u \in C^\infty(\Sigma_t)$  e  $t \in [0, \varepsilon)$ . Acima usamos o fato de  $\mu - |J| \geq -c$  sobre  $M_+$ . Integrando sobre  $\Sigma_t$ , observando que  $\theta'(t)$  também é constante sobre  $\Sigma_t$  e usando a

Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \left( \theta'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{u^2}{\phi} dA_t - \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau u^2 dA_t \right) &\leq \int_{\Sigma_t} (2|\nabla u|^2 + R_{\Sigma_t} u^2) dA_t + 2c \int_{\Sigma_t} u^2 dA_t \\ &\leq \int_{\Sigma_t} \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_{\Sigma_t} u^2 \right) dA_t \\ &\quad + 2cA(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\Sigma_t} u^{\frac{2n}{n-2}} dA_t \right)^{\frac{n-2}{n}}, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $u \in C^\infty(\Sigma_t)$  positiva e  $t \in [0, \varepsilon)$ . Segue da Observação 2.5.3 que para cada  $t \in [0, \varepsilon)$  existe uma única  $u_t \in C^\infty(\Sigma_t)$  positiva tal que  $u_t^{\frac{4}{n-2}} g_{\Sigma_t}$  é uma métrica de Yamabe com curvatura escalar constante igual a  $-2c$ , visto que  $\mathcal{Y}(\Sigma_t, g_{\Sigma_t}) \leq \sigma(\Sigma) < 0$ , onde  $g_{\Sigma_t}$  é a métrica sobre  $\Sigma_t$  induzida de  $M$ . Segue da unicidade da solução do Problema de Yamabe, que  $u_t$  depende continuamente de  $t \in [0, \varepsilon)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{2 \left( \theta'(t) \int_{\Sigma_t} u_t^2 \phi^{-1} dA_t - \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau u_t^2 dA_t \right)}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2n}{n-2}} dA_t \right)^{\frac{n-2}{n}}} &\leq \mathcal{E}(u_t^{\frac{4}{n-2}} g_{\Sigma_t}) + 2cA(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &= \mathcal{Y}(\Sigma_t, g_{\Sigma_t}) + 2cA(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \sigma(\Sigma) + 2cA(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &= \left( -2cA(\Sigma)^{\frac{2}{n}} + 2cA(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \right) \\ &= \frac{4c}{n} \int_0^t A(\Sigma_s)^{\frac{2-n}{n}} \frac{d}{ds} A(\Sigma_s) ds, \end{aligned}$$

para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ . Usando que  $\theta(t) = \text{tr}_{\Sigma_t} K + H_t \geq H_t$  para  $t \in [0, \varepsilon)$ , visto que  $K$  é  $n$ -convexo sobre  $M_+$ , juntamente com a Fórmula da Primeira Variação de Área, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\theta'(t) \int_{\Sigma_t} u_t^2 \phi^{-1} dA_t - \theta(t) \int_{\Sigma_t} \tau u_t^2 dA_t}{\left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2n}{n-2}} dA_t \right)^{\frac{n-2}{n}}} &\leq \frac{2c}{n} \int_0^t A(\Sigma_s)^{\frac{2-n}{n}} \left( \int_{\Sigma_s} H_s \phi dA_s \right) ds \\ &\leq \frac{2c}{n} \int_0^t \theta(s) \left( A(\Sigma_s)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\Sigma_s} \phi dA_s \right) ds. \end{aligned}$$

Então, usando o Lema 2.4.2 com

$$\begin{aligned} f(t) &= \theta(t), \quad \eta(t) = \left( \int_{\Sigma_t} u_t^2 \phi^{-1} dA_t \right) \left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2n}{n-2}} dA_t \right)^{-\frac{n-2}{n}}, \\ \rho(t) &= \left( \int_{\Sigma_t} \tau u_t^2 dA_t \right) \left( \int_{\Sigma_t} u_t^{\frac{2n}{n-2}} dA_t \right)^{-\frac{n-2}{n}} \quad \text{e} \quad \xi(t) = \frac{2c}{n} A(\Sigma_t)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\Sigma_t} \phi dA_t, \end{aligned}$$

temos que  $\theta(t) = 0$  para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ . De maneira totalmente análoga ao que fizemos nas demonstrações dos Teoremas 2.3.3 e 2.4.4, obtemos o resultado.  $\square$

# 3 RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES *FREE* BOUNDARY

## 3.1 Introdução

Nosso objetivo neste capítulo é obter uma versão do Teorema de Toponogov em dimensão 3 para variedades compactas com fronteira não-vazia. Contudo, antes de enunciarmos nossos resultados, deixe-nos lembrar um importante resultado neste cenário.

Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Denote por  $\mathcal{F}_M$  o conjunto de todos os discos imersos em  $M$  cujas fronteiras são curvas homotopicamente não-triviais em  $\partial M$ . Se  $\mathcal{F}_M \neq \emptyset$ , defina

$$\mathcal{A}(M) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} A(\Sigma) \text{ e } \mathcal{L}(M) = \inf_{\Sigma \in \mathcal{F}_M} L(\partial\Sigma).$$

**Teorema 3.1.1** (Ambrozio, [1]). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Assuma que  $\partial M$  é convexa em média e que  $\mathcal{F}_M \neq \emptyset$ . Então,*

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}(M) \inf_M R + \mathcal{L}(M) \inf_{\partial M} H^{\partial M} \leq 2\pi,$$

onde  $R$  é a curvatura escalar de  $M$  e  $H^{\partial M}$  é a curvatura média de  $\partial M$  em  $M$ . Além disso, se vale a igualdade, então o recobrimento universal de  $M$  é isométrico a  $(\mathbb{R} \times \Sigma_0, dt^2 + g_0)$ , onde  $(\Sigma_0, g_0)$  é um disco com curvatura Gaussiana constante igual a  $\inf_M R/2$  e  $\partial\Sigma_0$  tem curvatura geodésica constante igual a  $\inf_{\partial M} H^{\partial M}$  em  $\Sigma_0$ .

Como consequência imediata do Teorema de Ambrozio temos que se  $\inf_{\partial M} H^{\partial M} = 1$ ,  $\inf_M R = 0$  e  $\mathcal{L}(M) = 2\pi$ , então o recobrimento universal de  $M$  é isométrico ao cilindro sólido  $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{D}}$ , onde  $\overline{\mathbb{D}}$  é o disco unitário em  $\mathbb{R}^2$  munido da métrica canônica.

Observe que o Teorema de Ambrozio é um resultado análogo ao Teorema de Bray-Brendle-Neves (Teorema 1.3) para 3-variedades com fronteira. Assim como Marques e Neves consideraram o caso de 2-esferas mínimas instáveis em 3-variedades fechadas [31], nós consideraremos o caso de superfícies mínimas instáveis em 3-variedades com fronteira não-vazia.

Agora enunciaremos nossos resultados. Definições serão apresentadas na Seção 3.2.

**Teorema 3.1.2** (Teorema 3.2.5). *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ , onde  $\text{Ric}$  é o tensor de Ricci de  $M$  e  $\text{II}$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$  em  $M$ . Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície mínima free boundary propriamente mergulhada de índice um, então*

$$L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g + r), \tag{3.1}$$

onde  $g$  é o gênero de  $\Sigma$  e  $r$  é o número de componentes conexas de  $\partial\Sigma$ . Além disso, se vale a igualdade, então  $\Sigma$  é totalmente geodésica em  $M$ ,  $\Sigma$  (com respeito à métrica induzida) é isométrica ao disco Euclidiano unitário  $\overline{\mathbb{D}}$  e  $\partial\Sigma$  é uma geodésica de  $\partial M$ .

Em [18], A. Fraser e R. Schoen provaram que se  $\Sigma^2$  é uma superfície compacta orientável com fronteira não-vazia, então  $\sigma_1(\Sigma)L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g+r)$ , onde  $\sigma_1(\Sigma)$  é o primeiro autovalor não-nulo de Steklov de  $\Sigma$ . Por outro lado, A. Fraser e M. M.-C. Li [17] provaram que se  $\text{Ric} \geq 0$ ,  $\text{II} \geq 1$  e  $\Sigma^2$  é uma superfície mínima propriamente mergulhada em  $M^3$  com fronteira livre em  $\partial M$ , então  $\sigma_1(\Sigma) \geq 1/2$ . Como corolário, eles obtiveram que  $L(\partial\Sigma) \leq 4\pi(g+r)$ . Contudo, esta estimativa não é *sharp*. Portanto, o Teorema 3.1.2 é uma melhoria no resultado de Fraser e Li para uma estimativa *sharp* quando assumimos que  $\Sigma$  tem índice um.

Segue do trabalho de J. Chen, A. Fraser e C. Pang [11] que sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.2 temos que  $g+r \leq 3$  se  $g$  é par e  $g+r \leq 4$  se  $g$  é ímpar. As mesmas estimativas foram obtidas por A. Ros e E. Vergasta [36] para superfícies estacionárias estáveis na bola unitária de  $\mathbb{R}^3$ . Não é difícil demonstrar que tanto no caso mínimo de índice um quanto no caso estacionário estável é suficiente supor que  $H^2 \geq -2 \inf_{\Sigma} \text{Ric}(N, N)$  e  $\inf_{\partial\Sigma} \text{II} \geq 0$ , onde  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma$  e  $N$  é um campo de vetores unitários normais a  $\Sigma$ .

Se assumirmos uma hipótese adicional sobre a geometria de  $M$  ao longo de  $\partial M$ , seremos capazes de caracterizar a geometria global de  $M$  quando a igualdade em (3.1) ocorrer.

**Teorema 3.1.3** (Corolário 3.2.8). *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.1.2, se vale a igualdade em (3.1) e, adicionalmente,  $K_M(T_p\partial M) \geq 0$  para todo  $x \in \partial M$ , onde  $K_M$  é a curvatura seccional de  $M$ , então  $M^3$  é isométrica à 3-bola Euclidiana unitária  $\overline{B^3}$  e  $\Sigma^2$  é isométrica ao disco unitário  $\overline{\mathbb{D}}$ .*

Como consequência do Teorema 3.1.3, temos que:

**Corolário 3.1.4.** *O único domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  com fronteira suave  $\partial\Omega$  satisfazendo  $\text{II} \geq 1$  que admite um disco mínimo free boundary propriamente mergulhado  $\Sigma^2 \subset \Omega$  de índice um com  $L(\partial\Sigma) = 2\pi$  é a bola unitária.*

Seria muito interessante saber se quando  $M^3$  satisfaz  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ , mas  $M^3$  não é isométrica a  $\overline{B^3}$ , existe uma superfície mínima *free boundary* propriamente mergulhada  $\Sigma^2 \subset M^3$ , de índice um, satisfazendo  $L(\partial\Sigma) < 2\pi(g+r)$ .

Na Seção 3.3 apresentaremos resultados similares aos Teoremas 3.1.2 e 3.1.3 e ao Corolário 3.1.4 para superfícies estacionárias estáveis.



## 3.2 Superfícies Mínimas *Free Boundary* de Índice Um

Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Ao longo deste capítulo, assumiremos que  $M$  tem curvatura de Ricci não-negativa e que  $\partial M$  é estritamente convexa, i.e.,  $\text{II}(V, V) = \langle D_V X, V \rangle > 0$  quaisquer que sejam  $V \in T_p \partial M \setminus \{0\}$  e  $p \in \partial M$ , onde  $X$  é o campo de vetores unitários normais a  $\partial M$  que apontam para fora de  $M$  e  $D$  é a conexão de Levi-Civita de  $M$ . Aqui,  $\text{II}$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$  em  $M$ . Neste caso, pelo Teorema 2.11 de [17],  $M^3$  é difeomorfa à 3-bola Euclidiana unitária  $\overline{B}^3$ . Em particular,  $M^3$  é orientável.

Seja  $\Sigma^2$  uma superfície compacta com fronteira  $\partial \Sigma$  não-vazia. Suponha que  $\Sigma^2$  está propriamente mergulhada em  $M^3$ , i.e.,  $\Sigma^2$  está mergulhada em  $M^3$  e  $\Sigma \cap \partial M = \partial \Sigma$ . Visto que  $M^3$  é difeomorfa à bola unitária  $\overline{B}^3$ , que é simplesmente conexa, temos que  $\Sigma$  é orientável. Fixe um campo de vetores unitários normais a  $\Sigma$  em  $M$ , digamos  $N$ , e denote por  $A$  a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  em  $M$ . Mais precisamente,  $A(Y, Z) = \langle D_Y N, Z \rangle$ ,  $Y, Z \in T_x \Sigma$ ,  $x \in \Sigma$ . Além disso, denote por  $\nu$  o conormal de  $\partial \Sigma$  em  $\Sigma$  que aponta para fora de  $\Sigma$ .

**Definição 3.2.1.** Dizemos que  $\Sigma$  é *free boundary* se  $\Sigma$  intersecta  $\partial M$  ortogonalmente. Em outras palavras,  $\Sigma$  é *free boundary* se  $\nu = X$  ao longo de  $\partial \Sigma$ .

Seja  $t \mapsto \Sigma_t$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , uma variação de  $\Sigma = \Sigma_0$  em  $M$ . É bastante conhecido que a Fórmula da Primeira Variação de Área é dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma}(\xi) dA = \int_{\Sigma} H \phi dA + \int_{\partial \Sigma} \langle \xi, \nu \rangle ds, \quad (3.2)$$

onde  $\xi = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0}$  é o campo variacional,  $\phi = \langle \xi, N \rangle$  e  $H = \text{tr } A$  é a curvatura média de  $\Sigma$ . Segue de (3.2) que  $\Sigma$  é um ponto crítico para o funcional área para variações que preservam a propriedade  $\Sigma \cap \partial M = \partial \Sigma$  se, e somente se,  $\Sigma$  é mínima e *free boundary*. Também, se  $\Sigma$  é mínima e *free boundary* e  $\xi = \phi N$ , então a Fórmula da Segunda Variação de Área é dada por

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} A(\Sigma_t) = \mathcal{I}(\phi, \phi),$$

onde  $\mathcal{I} : C^{\infty}(\Sigma) \times C^{\infty}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma de índice de  $\Sigma$  dada por

$$\mathcal{I}(\psi, \phi) = - \int_{\Sigma} \psi \{ \Delta \phi + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \phi \} dA + \int_{\partial \Sigma} \psi \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \text{II}(N, N) \phi \right\} ds.$$

Aqui,  $\text{Ric}$  é o tensor de Ricci de  $M$  e  $\Delta$  é o operador Laplaciano de  $\Sigma$  com respeito à métrica induzida. (Veja o Apêndice B de [16] para demonstrações das Fórmulas da Primeira e Segunda Variações de Área.)

**Definição 3.2.2.** Dizemos que  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$  é uma *autofunção de  $\mathcal{I}$  associada ao autovalor*  $\lambda \in \mathbb{R}$  se  $\mathcal{I}(\psi, \phi) = \lambda \langle \psi, \phi \rangle_{L^2(\Sigma)}$  para toda  $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ . Isto é equivalente a dizer que  $\phi$  resolve o problema de fronteira do tipo Robin

$$\begin{cases} L\phi = \lambda\phi & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \text{II}(N, N)\phi & \text{sobre } \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde  $L = -\Delta - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)$  é o operador de Jacobi de  $\Sigma$ . Se  $\Sigma$  é mínima *free boundary*, o *índice* de  $\Sigma$  é definido como o número de autovalores negativos de  $\mathcal{I}$  contados com multiplicidades. O índice de  $\Sigma$  é denotado por  $\text{ind}(\Sigma)$ .

**Observação 3.2.3.** É bastante conhecido que o primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $\mathcal{I}$  é caracterizado pela Fórmula de Rayleigh

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{I}(\phi, \phi)}{\int_\Sigma \phi^2 dA}. \quad (3.3)$$

Portanto, segue diretamente de (3.3) que, sob as hipóteses  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} > 0$ , toda superfície mínima *free boundary* tem índice pelo menos um, visto que  $\mathcal{I}(1, 1) < 0$ .

Antes de demonstrarmos nosso primeiro resultado, vejamos um lema bastante útil. Este lema está baseado em um argumento apresentado em [27] (veja também [30]).

**Lema 3.2.4.** *Sejam  $\Sigma^2$  uma superfície Riemanniana compacta com fronteira  $\partial\Sigma$  não-vazia e  $F : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  e  $\phi_1 : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$  funções contínuas. Suponha que  $F(\Sigma \setminus \partial\Sigma) \subset \mathbb{D}$ . Então, existe  $h \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$  tal que  $\int_\Sigma (h \circ F)\phi_1 dA = 0$ .*

*Demonstração.* Se  $\phi_1 = 0$ , o resultado é imediato. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\int_\Sigma \phi_1 dA = 1$ . Sejam  $m_a \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{D}})$  dadas por

$$m_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C},$$

para cada  $a \in \mathbb{D}$ . Defina  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$f(a) = \int_{\Sigma \setminus \partial\Sigma} (m_a \circ F)\phi_1 dA.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que  $f$  é contínua. Nosso objetivo é estender  $f$  a todo o disco  $\overline{\mathbb{D}}$  de maneira contínua. Para isto, primeiro observe que se  $a \in \mathbb{S}^1$ , então

$$\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = \frac{z - a}{a^{-1}(a - z)} = -a,$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Então,

$$\int_{\Sigma \setminus \partial\Sigma} \frac{F - a}{1 - \bar{a}F}\phi_1 dA = -a \int_{\Sigma \setminus \partial\Sigma} \phi_1 dA = -a,$$

onde acima usamos que  $F(\Sigma \setminus \partial\Sigma) \subset \mathbb{D}$ . Depois, se  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{S}^1$  com  $a_n \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , temos

$$m_{a_n}(z) = \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z} = \frac{z - a_n}{a_n^{-1}(a_n - |a_n|^2 z)} \rightarrow \frac{z - a}{a^{-1}(a - z)} = -a,$$

para todo  $z \in \mathbb{D}$ . Então, definindo  $f(a) = -a$  para  $a \in \mathbb{S}^1$ , segue mais uma vez do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que  $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua.

Agora, observe que  $|f(a)| \leq 1$  para todo  $a \in \bar{\mathbb{D}}$ . Então,  $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  é uma função contínua satisfazendo  $f(a) = -a$  para  $a \in \mathbb{S}^1$ . Logo,  $f$  é sobrejetiva. Caso contrário, seja  $y_0 \in \mathbb{D}$  tal que  $f(z) \neq y_0$  para todo  $z \in \bar{\mathbb{D}}$ . Defina  $g : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{S}^1$  por

$$g(z) = \frac{y_0 - f(z)}{|y_0 - f(z)|}$$

e seja  $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  a imersão canônica. Então,

$$H_1 : g \circ i \simeq \text{id}_{\mathbb{S}^1}, \text{ onde } H_1(t, a) = \frac{(1-t)y_0 + a}{|(1-t)y_0 + a|}.$$

Além disso,

$$H_2 : i \circ g \simeq \text{id}_{\bar{\mathbb{D}}}, \text{ onde } H_2(t, z) = (1-t) \frac{y_0 - f(z)}{|y_0 - f(z)|} + tz.$$

Desta forma,  $\mathbb{S}^1$  e  $\bar{\mathbb{D}}$  têm o mesmo tipo de homotopia, o que é uma contradição. Portanto, existe  $a_0 \in \mathbb{D}$  tal que  $f(a_0) = 0$ . Tome  $h = m_{a_0}$ .  $\square$

O primeiro resultado é o seguinte.

**Teorema 3.2.5.** *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ . Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície mínima free boundary com  $\text{ind}(\Sigma) = 1$ , então*

$$L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g + r), \tag{3.4}$$

onde  $g$  é o gênero de  $\Sigma$  e  $r$  é o número de componentes conexas de  $\partial\Sigma$ . Além disso, se vale a igualdade, então  $\Sigma$  é totalmente geodésica,  $\Sigma$  (com respeito à métrica induzida) é isométrica ao disco Euclidiano unitário  $\bar{\mathbb{D}}$  e  $\partial\Sigma$  é uma geodésica de  $\partial M$ .

*Demonstração.* Seja  $\phi_1 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  a primeira autofunção de  $\mathcal{I}$ . Sabemos que  $\phi_1$  não muda de sinal. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\phi_1 \geq 0$ . Visto que  $\text{ind}(\Sigma) = 1$ , segue que  $\mathcal{I}(f, f) \geq 0$ , ou seja,

$$\int_{\Sigma} \{|\nabla f|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)f^2\} dA - \int_{\partial\Sigma} \text{II}(N, N)f^2 ds \geq 0, \tag{3.5}$$

para toda  $f \in C^\infty(\Sigma)$  com  $\int_{\Sigma} f \phi_1 dA = 0$ . Por outro lado, pelo Teorema 7.2 de [19], existe um recobrimento próprio ramificado  $F : \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$  satisfazendo  $\text{gra}(F) \leq g + r$ . Usando

o Lema 3.2.4, podemos assumir que  $\int_{\Sigma} f_i \phi_1 dA = 0$ , onde  $F = (f_1, f_2)$ . Então, usando as  $f_i$ 's como funções-testes em (3.5), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} \{|\nabla f_i|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) f_i^2\} dA - \int_{\partial\Sigma} \text{II}(N, N) f_i^2 ds \\ &\leq \int_{\Sigma} |\nabla f_i|^2 dA - \int_{\partial\Sigma} f_i^2 ds, \end{aligned}$$

onde acima usamos que  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ . Logo, tendo em vista que  $F(\partial\Sigma) \subset \mathbb{S}^1$  (uma vez que  $F$  é própria) e que  $F$  é conforme,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Sigma} |\nabla f_i|^2 dA - \int_{\partial\Sigma} f_i^2 ds \right) = 2 \int_{\Sigma} dF^* g_{\text{can}} - L(\partial\Sigma) \\ &= 2\pi \text{grau}(F) - L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g + r) - L(\partial\Sigma), \end{aligned}$$

o que garante (3.4).

Se a igualdade em (3.4) acontece, todas as desigualdades acima também são igualdades. Então,  $A \equiv 0$ ,  $\text{Ric}(N, N) = 0$  sobre  $\Sigma$  e  $\text{II}(N, N) = 1$  ao longo de  $\partial\Sigma$ . Usando a Equação de Gauss,  $R + H^2 - |A|^2 = 2(\text{Ric}(N, N) + K)$ , onde  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  e  $R$  é a curvatura escalar de  $M$ , temos que  $2K = R \geq 0$ . Por outro lado, uma vez que  $\Sigma$  é *free boundary* ( $\nu = X$  ao longo de  $\partial\Sigma$ ), a curvatura geodésica de  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma$  é dada por  $\kappa = g(D_T \nu, T) = g(D_T X, T) = \text{II}(T, T) \geq 1$ , onde  $T$  é um vetor unitário tangente a  $\partial\Sigma$ . Logo, pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned} 2\pi(2 - 2g - r) &= 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K dA + \int_{\partial\Sigma} \kappa ds \\ &\geq L(\partial\Sigma) = 2\pi(g + r), \end{aligned}$$

i.e.,

$$2 \geq 3g + 2r.$$

Isto implica  $r = 1$  e  $g = 0$ . Portanto, todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Assim,  $K \equiv 0$  e  $\kappa \equiv 1$ . Para concluir a demonstração do teorema, observe que a curvatura geodésica  $\bar{\kappa}$  de  $\partial\Sigma$  em  $\partial M$  (com respeito a  $N$ ) satisfaz  $\bar{\kappa} = g(D_T N, T) = A(T, T) = 0$ , ou seja,  $\partial\Sigma$  é uma geodésica de  $\partial M$ .  $\square$

**Observação 3.2.6.** Observe que o Teorema 3.1.2 continua verdadeiro para superfícies *two-sided* propriamente imersas.

Agora, vamos lembrar um resultado bastante útil devido ao matemático C. Xia (veja [44] para a demonstração). Usaremos este resultado no corolário subsequente.

**Teorema 3.2.7** (Xia). *Seja  $M^{n+1}$  uma  $(n + 1)$ -variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq c > 0$ , onde  $\text{Ric}$  é o tensor de Ricci*

de  $M$  e  $\text{II}$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$  em  $M$ . Então, o primeiro autovalor não-nulo do operador de Laplace de  $\partial M$  (com respeito à métrica induzida) satisfaz

$$\lambda_1 \geq nc^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é isométrica à  $(n+1)$ -bola Euclidiana de raio  $1/c$ .

Temos a seguinte consequência do Teorema 3.2.5.

**Corolário 3.2.8.** *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$ ,  $\text{II} \geq 1$  e  $K_M(T_p\partial M) \geq 0$  para todo  $p \in \partial M$ , onde  $K_M$  é a curvatura seccional de  $M$ . Seja  $\Sigma^2 \subset M^3$  uma superfície mínima free boundary com  $\text{ind}(\Sigma) = 1$ . Se  $L(\partial\Sigma) = 2\pi(g+r)$ , então  $M^3$  é isométrica à 3-bola Euclidiana unitária  $\overline{B^3}$  e  $\Sigma^2$  é isométrica ao disco unitário  $\overline{\mathbb{D}}$ .*

*Demonstração.* Denote por  $K_{\partial M}$  a curvatura Gaussiana de  $\partial M$ . Também, denote por  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais de  $\partial M$ . Pela Equação de Gauss,

$$K_{\partial M} = K_M(T_p\partial M) + k_1k_2 \geq 1.$$

Agora, se  $L(\partial\Sigma) = 2\pi(g+r)$ , pelo Teorema 3.2.5,  $\Sigma^2$  é isométrica a  $\overline{\mathbb{D}}$  e  $\partial\Sigma$  é uma geodésica de  $\partial M$ . Em particular,  $\partial\Sigma$  é uma geodésica simples de  $\partial M$  (pois  $\Sigma$  está mergulhada em  $M$ ) com  $L(\partial\Sigma) = 2\pi$ . Então, pelo Teorema de Toponogov,  $\partial M$  é isométrica à 2-esfera unitária canônica  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Portanto, pelo Teorema de Xia,  $M^3$  é isométrica a  $\overline{B^3}$ .  $\square$

### 3.3 Superfícies Estacionárias Estáveis

Nesta seção nós obtemos resultados similares ao Teorema 3.2.5 e ao seu Corolário 3.2.8 para superfícies estacionárias estáveis.

Assim como na Seção 3.2, seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Assumimos  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ . Também,  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície compacta propriamente mergulhada com fronteira  $\partial\Sigma$  não-vazia. Dizemos que  $\Sigma$  é *estacionária* se ela é um ponto crítico para o funcional área para variações que preservam a propriedade  $\Sigma \cap \partial M = \partial\Sigma$  e que preservam volume (veja [36]). Tais variações são chamadas *admissíveis*. Equivalentemente,  $\Sigma$  é estacionária se ela tem curvatura média constante e é *free boundary*.

**Definição 3.3.1.** Uma superfície estacionária  $\Sigma$  é dita *estável* se sua segunda variação de área for não-negativa para todas as variações admissíveis. O que equivale a dizer que

$$\mathcal{I}(\phi, \phi) \geq 0 \tag{3.6}$$

para toda  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$  satisfazendo  $\int_\Sigma \phi dA = 0$ .

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$  e  $\text{II} \geq 1$ . Se  $\Sigma^2 \subset M^3$  é uma superfície estacionária estável, então*

$$L(\partial\Sigma) \leq 2\pi(g + r), \quad (3.7)$$

onde  $g$  é o gênero de  $\Sigma$  e  $r$  é o número de componentes conexas de  $\partial\Sigma$ . Além disso, se vale a igualdade,  $\Sigma$  é totalmente geodésica,  $\Sigma$  (com respeito à métrica induzida) é isométrica ao disco Euclidiano unitário  $\overline{\mathbb{D}}$  e  $\partial\Sigma$  é uma geodésica de  $\partial M$ .

*Demonstração.* Visto que  $\Sigma$  é estacionária e estável, por (3.6), temos que

$$\int_{\Sigma} \{|\nabla f|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)f^2\} dA - \int_{\partial\Sigma} \text{II}(N, N)f^2 ds \geq 0$$

para toda  $f \in C^\infty(\Sigma)$  satisfazendo  $\int_{\Sigma} f dA = 0$ . Seja  $F = (f_1, f_2) : \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$  um recobrimento próprio ramificado como na demonstração do Teorema 3.2.5. Usando o Lema 3.2.4, podemos assumir que  $\int_{\Sigma} f_i dA = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Sigma} \{|\nabla f_i|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)f_i^2\} dA - \int_{\partial\Sigma} \text{II}(N, N)f_i^2 ds \right\} \\ &\leq 2\pi(g + r) - L(\partial\Sigma). \end{aligned}$$

Isto demonstra (3.7).

Se ocorre a igualdade em (3.7), seguindo exatamente como na demonstração do Teorema 3.2.5, temos o resultado.  $\square$

**Corolário 3.3.3.** *Seja  $M^3$  uma 3-variedade Riemanniana compacta com fronteira  $\partial M$  não-vazia. Suponha  $\text{Ric} \geq 0$ ,  $\text{II} \geq 1$  e  $K_M(T_p\partial M) \geq 0$  para todo  $p \in \partial M$ , onde  $K_M$  é a curvatura seccional de  $M$ . Seja  $\Sigma^2 \subset M^3$  uma superfície estacionária estável. Se  $L(\partial\Sigma) = 2\pi(g + r)$ , então  $M^3$  é isométrica à 3-bola unitária  $\overline{B^3} \subset \mathbb{R}^3$  e  $\Sigma^2$  é isométrica ao disco unitário  $\overline{\mathbb{D}}$ .*

**Corolário 3.3.4.** *O único domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  com fronteira suave  $\partial\Omega$  satisfazendo  $\text{II} \geq 1$  que admite um disco estacionário estável  $\Sigma^2 \subset \Omega$  com  $L(\partial\Sigma) = 2\pi$  é a bola unitária.*

# REFERÊNCIAS

- [1] Ambrozio, L. C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. *J. Geom. Anal.*, 25(2):1001–1017, 2015.
- [2] Andersson, L.; Eichmair, M.; Metzger, J. Jang’s equation and its applications to marginally trapped surfaces. In *Complex analysis and dynamical systems IV. Part 2*, volume 554 of *Contemp. Math.*, pages 13–45. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [3] Andersson, L.; Mars, M.; Simon, W. Local existence of dynamical and trapping horizons. *Phys. Rev. Lett.*, 95:111102, Sep 2005.
- [4] Andersson, L.; Mars, M.; Simon, W. Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 12(4):853–888, 2008.
- [5] Aubin, T. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3):269–296, 1976.
- [6] Aubin, T. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [7] Bray, H.; Brendle, S.; Eichmair, M.; Neves, A. Area-minimizing projective planes in 3-manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 63(9):1237–1247, 2010.
- [8] Bray, H.; Brendle, S.; Neves, A. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 18(4):821–830, 2010.
- [9] Cai, M. Volume minimizing hypersurfaces in manifolds of nonnegative scalar curvature. *Adv. Stud. Pure Math.*, 34:1–7, 2002.
- [10] Cai, M.; Galloway, G. J. Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. Anal. Geom.*, 8(3):565–573, 2000.
- [11] Chen, J.; Fraser, A.; Pang, C. Minimal immersions of compact bordered Riemann surfaces with free boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(4):2487–2507, 2015.
- [12] Chruściel, P. T.; Galloway, G. J.; Solis, D. Topological censorship for Kaluza-Klein space-times. *Ann. Henri Poincaré*, 10(5):893–912, 2009.
- [13] Eichmair, M. The Plateau problem for marginally outer trapped surfaces. *J. Differential Geom.*, 83(3):551–583, 2009.
- [14] Evans, L. C. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [15] Fischer-Colbrie, D.; Schoen, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(2):199–211, 1980.

- 
- [16] Fraser, A. *On the Free Boundary Variational Problem for Minimal Disks*. PhD thesis, Stanford University, August 1998.
- [17] Fraser, A.; Li, M. M.-C. Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary. *J. Differential Geom.*, 96(2):183–200, 2014.
- [18] Fraser, A.; Schoen, R. The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces. *Adv. Math.*, 226(5):4011–4030, 2011.
- [19] Gabard, A. Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes. *Comment. Math. Helv.*, 81(4):945–964, 2006.
- [20] Galloway, G. J. Rigidity of marginally trapped surfaces and the topology of black holes. *Comm. Anal. Geom.*, 16(1):217–229, 2008.
- [21] Galloway, G. J. Stability and rigidity of extremal surfaces in Riemannian geometry and general relativity. In *Surveys in geometric analysis and relativity*, volume 20 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 221–239. Int. Press, Somerville, MA, 2011.
- [22] Galloway, G. J.; Mendes, A. Rigidity of marginally outer trapped 2-spheres. *arXiv:1506.00611v2*, 2016.
- [23] Galloway, G. J.; O’Murchadha, N. Some remarks on the size of bodies and black holes. *Class. Quantum Grav.*, 25(10):105009, 2008.
- [24] Galloway, G. J.; Schoen, R. A generalization of Hawking’s black hole topology theorem to higher dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 266(2):571–576, 2006.
- [25] Galloway, G. J.; Schoen, R. Stability and rigidity of extremal surfaces in Riemannian geometry and general relativity. *Adv. Lect. Math.*, 20:221–239, 2011.
- [26] Gibbons, G. W. Some comments on gravitational entropy and the inverse mean curvature flow. *Class. Quantum Grav.*, 16(6):1677–1687, 1999.
- [27] Hersch, J. Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270:A1645–A1648, 1970.
- [28] Kazdan, J. L.; Warner, F. W. Prescribing curvatures. In *Differential geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), Part 2*, pages 309–319. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [29] Kobayashi, O. Scalar curvature of a metric with unit volume. *Mathematische Annalen*, 279(2):253–265, 1987.
- [30] Li, P.; Yau, S.-T. A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. *Invent. Math.*, 69(2):269–291, 1982.
- [31] Marques, F. C.; Neves, A. Rigidity of min-max minimal spheres in three-manifolds. *Duke Math. J.*, 161(14):2725–2752, 2012.
- [32] Mars, M. Stability of marginally outer trapped surfaces and applications. In *Recent trends in Lorentzian geometry*, volume 26 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 111–138. Springer, New York, 2013.



- 
- [33] Micallef, M.; Moraru, V. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(7):2865–2872, 2015.
- [34] Moraru, V. On area comparison and rigidity involving the scalar curvature. *J. Geom. Anal.*, 26(1):294–312, 2016.
- [35] Nunes, I. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. *J. Geom. Anal.*, 23(3):1290–1302, 2013.
- [36] Ros, A.; Vergasta, E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geom. Dedicata*, 56(1):19–33, 1995.
- [37] Schoen, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2):479–495, 1984.
- [38] Schoen, R. *Topics in Calculus of Variations: Lectures given at the 2nd 1987 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held at Montecatini Terme, Italy, July 20–28, 1987*, chapter Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics, pages 120–154. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [39] Schoen, R.; Yau, S.-T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. *Ann. of Math. (2)*, 110(1):127–142, 1979.
- [40] Schoen, R.; Yau, S.-T. Proof of the positive mass theorem. II. *Comm. Math. Phys.*, 79(2):231–260, 1981.
- [41] Toponogov, V. A. Evaluation of the length of a closed geodesic on a convex surface. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 124:282–284, 1959.
- [42] Trudinger, N. S. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 22:265–274, 1968.
- [43] Woolgar, E. Bounded area theorems for higher-genus black holes. *Class. Quantum Grav.*, 16(9):3005–3012, 1999.
- [44] Xia, C. Rigidity of compact manifolds with boundary and nonnegative Ricci curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(6):1801–1806, 1997.
- [45] Yamabe, H. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.*, 12:21–37, 1960.

# A APÊNDICE

## A.1 Demonstração da Proposição 2.2.5

Seja  $x = (x^1, \dots, x^n)$  um sistema local de coordenadas em  $\Sigma$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$  é ortonormal e geodésico em  $x \in \Sigma$ . Portanto, em  $x \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{t=0} &= \partial_t (g^{ij} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \partial_j)) \\
&= -g^{ik} (\partial_t g_{kl}) g^{lj} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \partial_j) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_t} \bar{\nabla}_{\partial_i} l, \partial_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_i) \\
&= -2\phi A_{ij} \chi_{ij} + \bar{g}(\bar{R}(\partial_t, \partial_i) l, \partial_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla}_{\partial_t} l, \partial_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_i) \\
&= -2\phi \langle A, \chi \rangle - \bar{\text{Ric}}(\partial_t, l) + \bar{g}(\bar{R}(\partial_t, u) l, u) + \text{div}_{\Sigma}(\bar{\nabla}_{\partial_t} l) \\
&\quad + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_i). \\
&= -2\phi \langle A, \chi \rangle - \phi \bar{\text{Ric}}(\nu, u) - \phi \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \phi \bar{g}(\bar{R}(\nu, u) \nu, u) \\
&\quad + \text{div}_{\Sigma}(\bar{\nabla}_{\partial_t} l) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_i). \\
&= -2\phi \langle A, \chi \rangle - \phi J(\nu) + \phi(-\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \bar{\mathcal{K}}(\nu, u)) \\
&\quad + \text{div}_{\Sigma}(\bar{\nabla}_{\partial_t} l) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i} l, \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_i), \tag{A.1}
\end{aligned}$$

onde  $\bar{\mathcal{K}}$  é a curvatura seccional de  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Observe que

$$\begin{aligned}
|K|^2 &= \sum_{i,j} K_{ij}^2 + 2 \sum_i K(\nu, \partial_i)^2 + K(\nu, \nu)^2 \\
&= |K_{\Sigma}|^2 + 2|X|^2 + K(\nu, \nu)^2. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Acima,  $K_{\Sigma}$  significa  $K|_{T_x \Sigma \times T_x \Sigma}$ . Então, por (A.2),

$$\begin{aligned}
-2\langle A, \chi \rangle &= |\chi - A|^2 - |\chi|^2 - |A|^2 \\
&= |K_{\Sigma}|^2 - |\chi|^2 - |A|^2 \\
&= |K|^2 - 2|X|^2 - K(\nu, \nu)^2 - |\chi|^2 - |A|^2. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Agora, denote por  $\mathcal{K}$  e  $\text{Ric}$  a curvatura seccional e o tensor de Ricci de  $(M, g)$ , respectivamente. Então, pela Equação de Gauss,

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}(\nu, \nu) &= \sum_i \mathcal{K}(\nu, \partial_i) \\
 &= \sum_i (\overline{\mathcal{K}}(\nu, \partial_i) - K(\nu, \nu)K(\partial_i, \partial_i) + K(\nu, \partial_i)^2) \\
 &= \sum_i \overline{\mathcal{K}}(\nu, \partial_i) - K(\nu, \nu) \text{tr}_\Sigma K + |X|^2 \\
 &= \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) - \overline{\mathcal{K}}(\nu, u) - K(\nu, \nu) \text{tr}_\Sigma K + |X|^2.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Também pela Equação de Gauss,

$$\mu = \frac{1}{2}(R + \tau^2 - |K|^2), \tag{A.5}$$

$$\frac{1}{2}R_\Sigma = \frac{1}{2}R - \text{Ric}(\nu, \nu) - \frac{1}{2}|A|^2 + \frac{1}{2}H^2, \tag{A.6}$$

onde  $R$  é a curvatura escalar de  $(M, g)$ . Então, por (A.4), (A.5) e (A.6),

$$\begin{aligned}
 -\overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \overline{\mathcal{K}}(\nu, u) &= \frac{1}{2}R_\Sigma - \mu - K(\nu, \nu) \text{tr}_\Sigma K + |X|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(|A|^2 - H^2 + \tau^2 - |K|^2).
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \overline{\nabla}_{\partial_t} l &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} l, \partial_i) \partial_i + \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} l, \nu) \nu - \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} l, u) u \\
 &= -\overline{g}(u + \nu, \overline{\nabla}_{\partial_t}(\phi\nu)) \partial_i + \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_\nu(u + \nu), \nu) \nu - \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_\nu(u + \nu), u) u \\
 &= -\partial_i(\phi) \partial_i - \phi \overline{g}(u, \overline{\nabla}_{\partial_t} \nu) \partial_i + \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_\nu u, \nu) \nu - \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_\nu \nu, u) u \\
 &= -\nabla \phi + \phi K(\nu, \partial_i) \partial_i + \phi K(\nu, \nu) \nu + \phi K(\nu, \nu) u \\
 &= -\nabla \phi + \phi X + \phi K(\nu, \nu) \nu + \phi K(\nu, \nu) u.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Tendo em vista que  $\text{div}_\Sigma(f\nu) = fH$  e  $\text{div}_\Sigma(fu) = f \text{tr}_\Sigma K$ , por (A.8), temos

$$\text{div}_\Sigma(\overline{\nabla}_{\partial_t} l) = -\Delta \phi + \langle X, \nabla \phi \rangle + \phi(\text{div} X + K(\nu, \nu)\theta). \tag{A.9}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} l, \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_i) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t}(u + \nu), \overline{\nabla}_{\partial_t}(\phi\nu)) \\
 &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} u + \overline{\nabla}_{\partial_t} \nu, \partial_i(\phi)\nu + \phi \overline{\nabla}_{\partial_t} \nu) \\
 &= \partial_i(\phi) K(\nu, \partial_i) + \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} u, \overline{\nabla}_{\partial_t} \nu) + \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} \nu, \overline{\nabla}_{\partial_t} \nu) \\
 &= \langle X, \nabla \phi \rangle + \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} u, \nabla_{\partial_t} \nu) + \phi \overline{g}(\overline{\nabla}_{\partial_t} \nu, \overline{\nabla}_{\partial_t} \nu),
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

onde  $\nabla$  denota tanto o operador gradiente quanto a conexão de Levi-Civita de  $(M, g)$ . Uma vez que  $\nabla_{\partial_i}\nu = A_{ij}\partial_j$  e  $\bar{\nabla}_{\partial_i}\nu = \nabla_{\partial_i}\nu - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i}\nu, u)u = A_{ij}\partial_j + K(\nu, \partial_i)u$ , segue de (A.2) e (A.10) que

$$\begin{aligned}
 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_i}l, \bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_t) &= \langle X, \nabla\phi \rangle + \phi A_{ij}K_{ij} + \phi A_{ij}^2 - \phi K(\nu, \partial_i)^2 \\
 &= \langle X, \nabla\phi \rangle + \phi\langle A, K_\Sigma \rangle + \phi|A|^2 - \phi|X|^2 \\
 &= \langle X, \nabla\phi \rangle + \frac{1}{2}\phi(|K_\Sigma + A|^2 - |K_\Sigma|^2 - |A|^2) \\
 &\quad + \phi|A| - \phi|X|^2 \\
 &= \langle X, \nabla\phi \rangle + \frac{1}{2}\phi(|\chi|^2 - |K|^2 + 2|X|^2 + K(\nu, \nu)^2 + |A|^2) \\
 &\quad - \phi|X|^2 \\
 &= \langle X, \nabla\phi \rangle + \frac{1}{2}\phi(|\chi|^2 - |K|^2 + K(\nu, \nu)^2 + |A|^2). \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

Segue de (A.1), (A.3), (A.7), (A.9) e (A.11),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -\phi J(\nu) + \phi(|K|^2 - 2|X|^2 - K(\nu, \nu)^2 - |\chi|^2 - |A|^2) \\
 &\quad + \phi\left(\frac{1}{2}R_\Sigma - \mu - K(\nu, \nu)\operatorname{tr}_\Sigma K + |X|^2 + \frac{1}{2}(|A|^2 - H^2 + \tau^2 - |K|^2)\right) \\
 &\quad - \Delta\phi + \langle X, \nabla\phi \rangle + \phi(\operatorname{div} X + K(\nu, \nu)\theta) \\
 &\quad + \langle X, \nabla\phi \rangle + \frac{1}{2}\phi(|\chi|^2 - |K|^2 + K(\nu, \nu)^2 + |A|^2) \\
 &= -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + \phi\left(\frac{1}{2}R_\Sigma - (\mu + J(\nu)) - \frac{1}{2}|\chi|^2 - |X|^2 + \operatorname{div} X\right) \\
 &\quad \phi\left(-\frac{1}{2}K(\nu, \nu)^2 - K(\nu, \nu)\operatorname{tr}_\Sigma K - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\tau^2 + K(\nu, \nu)\theta\right) \\
 &= -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi \rangle + \phi\left(Q - |X|^2 + \operatorname{div} X\right) \\
 &\quad + \phi\left(\frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}(K(\nu, \nu) + \operatorname{tr}_\Sigma K)^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}_\Sigma K)^2 - \frac{1}{2}H^2 + K(\nu, \nu)\theta\right).
 \end{aligned}$$

Finalmente, visto que  $\theta = \operatorname{tr}_\Sigma K + H$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\operatorname{tr}_\Sigma K)^2 - \frac{1}{2}H^2 + K(\nu, \nu)\theta &= (\operatorname{tr}_\Sigma K)^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}_\Sigma K + H)^2 + H\operatorname{tr}_\Sigma K + K(\nu, \nu)\theta \\
 &= -\frac{1}{2}\theta^2 + \operatorname{tr}_\Sigma K(\operatorname{tr}_\Sigma K + H) + K(\nu, \nu)\theta \\
 &= -\frac{1}{2}\theta^2 + (\operatorname{tr}_\Sigma K + K(\nu, \nu))\theta,
 \end{aligned}$$

e o resultado segue pois  $\tau = \operatorname{tr}_\Sigma K + K(\nu, \nu)$ .

## A.2 Demonstração do Lema 2.2.8

Um *sketch* da demonstração do item (i) pode ser encontrado no Apêndice B de [4]. Um resultado análogo para o caso de domínios limitados do espaço Euclidiano pode ser encontrado em [14, Capítulo 6, Teorema 3].

Considere  $\psi \in C^\infty(\Sigma)$  e defina  $u = \phi_1^{-1}\psi$ . Tomando  $q = Q - |X|^2 + \operatorname{div} X$ , temos

$$\begin{aligned}
2\langle X, \nabla\psi \rangle + q\psi - L\psi &= \Delta\psi \\
&= \Delta(u\phi_1) \\
&= u\Delta\phi_1 + \phi_1\Delta u + 2\langle \nabla\phi_1, \nabla u \rangle \\
&= u(2\langle X, \nabla\phi_1 \rangle + q\phi_1 - \lambda_1\phi_1) + \phi_1\Delta u + 2\langle \nabla\phi_1, \nabla u \rangle \\
&= 2\langle X, u\nabla\phi_1 \rangle + q\psi - \lambda_1\psi + \phi_1\Delta u + 2\langle \nabla\phi_1, \nabla u \rangle,
\end{aligned}$$

o que implica,

$$\Delta u = 2\langle Y, \nabla u \rangle + \phi_1^{-1}(\lambda_1\psi - L\psi),$$

onde  $Y = X - \nabla \ln \phi_1$ , tendo em vista que  $\nabla u = \phi_1^{-1}(\nabla\psi - u\nabla\phi_1)$ . Portanto, tomando  $x_0 \in \Sigma$  tal que  $u(x_0) = \min_{\Sigma} u$ , segue da última identidade acima,

$$0 \leq \Delta u(x_0) = \phi_1^{-1}(x_0)(\lambda_1\psi(x_0) - L\psi(x_0)).$$

Logo, se  $\psi > 0$  (e lembrando que podemos escolher  $\phi_1 > 0$ ), temos

$$\lambda_1 \geq \frac{L\psi(x_0)}{\psi(x_0)},$$

o que garante uma parte do item (ii). A outra parte segue diretamente escolhendo  $\psi = \phi_1$ .

Segue da Observação 2.2.11 que o item (i) é verdadeiro para o operador  $L^*$ . Neste caso, denote por  $\phi_1^*$  a autofunção de  $L^*$  associada ao autovalor principal  $\lambda_1^* = \lambda_1(L^*)$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \langle \phi_1, \phi_1^* \rangle_{L^2(\Sigma)} &= \langle L\phi_1, \phi_1^* \rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&= \langle \phi_1, L^*\phi_1^* \rangle_{L^2(\Sigma)} \\
&= \lambda_1^* \langle \phi_1, \phi_1^* \rangle_{L^2(\Sigma)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\lambda_1 - \lambda_1^*) \langle \phi_1, \phi_1^* \rangle_{L^2(\Sigma)} = 0.$$

O resultado segue do fato que duas funções positivas não podem ser ortogonais.