

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DO SERTÃO
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ALLAN KENEDY SANTOS SILVA

**Desenvolvimento de ferramenta computacional
para a análise estrutural de pórticos planos**

Delmiro Gouveia – AL
2018

ALLAN KENEDY SANTOS SILVA

**Desenvolvimento de ferramenta computacional para a análise
estrutural de pórticos planos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Engenharia Civil como parte dos
requisitos exigidos para obtenção do Grau de
Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador(a): Alverlando Silva Ricardo

Delmiro Gouveia – AL
2018

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca do Campus Sertão
Sede Delmiro Gouveia

Bibliotecária responsável: Larissa Carla dos Prazeres Leobino – CRB-4 2169

S237p Silva, Allan Kenedy Santos

Desenvolvimento de ferramenta computacional para a análise estrutural de pórticos planos / Allan Kenedy Santos Silva. – 2018.
85 f. : il.

Orientação: Prof. Me. Alverlando Silva Ricardo.
Monografia (Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Curso de Engenharia Civil. Delmiro Gouveia, 2018.

1. Engenharia de estruturas. 2. Análise estrutural. 3. Método da Rigidez Direta. 4. MATLAB. I. Título.

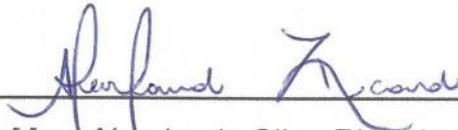
CDU: 624.04

Folha de Aprovação

AUTOR: ALLAN KENEDY SANTOS SILVA

DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE ESTRUTURAL DE PÓRTICOS PLANOS

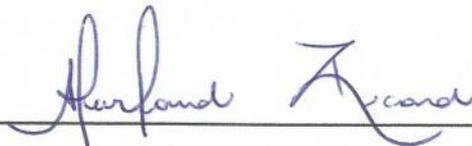
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil como parte dos requisitos exigidos para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Civil e aprovada em 03 de outubro de 2018.



Prof. Msc. Alverlando Silva Ricardo, UFAL

(Orientador)

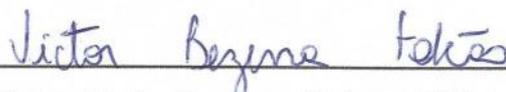
Banca Examinadora:



Prof. Msc. Alverlando Silva Ricardo, UFAL – Campus do Sertão
(Orientador)



Prof. Msc. Vinicius Costa Correia, UFAL – Campus do Sertão
(Examinador Interno)



Prof. Msc. Victor Bezerra Falcão, UFAL – Campus do Sertão
(Examinador Interno)

RESUMO

O projeto estrutural consiste em um processo de idealização da estrutura de forma que ela possa resistir às cargas impostas com segurança e economia. Dentro do projeto estrutural existe a análise estrutural, fase em que é feita uma idealização do comportamento da estrutura por meio da análise de esforços internos e externos e deformações. Dentre as diversas metodologias de cálculo de esforços e deslocamentos se destacam o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. Apesar de serem métodos gerais, eles se tornam trabalhosos na análise de estruturas complexas. Com o surgimento dos computadores, os quais possuem capacidade de cálculo muito superior à humana, tais estruturas complexas podem ser calculadas de forma muito mais rápida. Dentre os métodos de cálculo se destaca o Método da Rigidez Direta, o qual é o utilizado em softwares comerciais de cálculo estrutural. A maioria dos softwares gratuitos de cálculo estrutural não permitem realizar análises detalhadas da estrutura, limitando-se ao cálculo de esforços e deslocamentos. Neste contexto, o presente trabalho visa implementar o Método da Rigidez Direta em uma rotina que realiza o cálculo e a análise de pórticos planos reticulados, criado no software MATLAB. Para a validação do programa criado, é feito um comparativo dos resultados gerados com os obtidos por outros métodos e pelo software de cálculo estrutural Ftool. Os resultados obtidos são satisfatórios, observando excelente concordância com os obtidos por outros métodos.

Palavras-chave: Análise estrutural. Método da Rigidez Direta. MATLAB.

ABSTRACT

The structural design consists of a process of idealization of the structure so that it can withstand the loads imposed with safety and economy. Within the structural design there is the structural analysis, where it is made an idealization of the behavior of the structure through the analysis of internal and external stresses and deformations. Among the various methodologies for calculating effort and displacement, the Force Method and the Displacement Method are highlighted. Although they are general methods, they become cumbersome in the analysis of complex structures. With the emergence of computers, which have much higher computational capacity than human, such complex structures can be calculated much faster. Among the methods of calculation the Direct Stiffness Method is highlighted, which is the one used in commercial structural calculation software. Most free structural calculation software does not allow for detailed analysis of the structure, limiting itself to the calculation of efforts and displacements. In this context, the present work aims to implement the Direct Stiffness Method in a routine that performs the calculation and analysis of lattice frames, created in MATLAB software. For the validation of the program created, a comparison of the results generated with those obtained by other methods and by the structural calculation software Ftool is made. The results obtained are satisfactory, observing excellent agreement with those obtained by other methods.

Key-words: Structural analysis. Direct Stiffness Method. MATLAB.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Elemento infinitesimal de volume submetido a uma deformação normal.	15
Figura 2 – Deformação do corpo.	18
Figura 3 – Estrutura hiperestática. A linha azul é a estrutura deformada.	22
Figura 4 – Estrutura isostática com redundantes.	22
Figura 5 – Estrutura E_0	22
Figura 6 – Deformação da estrutura devido à carga $X_1 = 1$ (estado E_1).	23
Figura 7 – Deformação da estrutura devido à carga $X_j = 1$ (estado E_j).	23
Figura 8 – Viga hiperestática.	25
Figura 9 – Divisão da estrutura em seções.	25
Figura 10 – Diagramas da viga	27
Figura 11 – Configuração deformada de um pórtico	28
Figura 12 – Sistema hipergeométrico do pórtico.	29
Figura 13 – Sistema hipergeométrico da viga.	29
Figura 14 – Reações de engastamento.	29
Figura 15 – Coeficientes de rigidez à flexão.	30
Figura 16 – Esforços cortantes e momentos fletores nos apoios.	32
Figura 17 – Barra elástica sujeita a deslocamentos nodais u_1 e u_2	34
Figura 18 – Esforços nodais e deslocamentos nodais da barra elástica.	35
Figura 19 – Deslocamentos nodais em sentido positivo.	36
Figura 20 – Esforços nodais.	37
Figura 21 – Deslocamentos nodais em coordenadas locais e globais	39
Figura 22 – Esforços em coordenadas locais e globais	41
Figura 23 – Convenção de sinais	43
Figura 24 – Esquerda: Estrutura exemplo. Direita: Designação de elementos e deslocamentos.	43
Figura 25 – Numeração dos deslocamentos nodais da viga exemplo.	46
Figura 26 – Cargas nodais equivalentes da barra 3 da viga exemplo.	46
Figura 27 – Numeração dos deslocamentos globais.	48
Figura 28 – Representação estrutural de articulações.	49
Figura 29 – Equivalência de articulações tipo rótula	51
Figura 30 – Carregamento transversal distribuído sobre um trecho de barra.	52
Figura 31 – Carregamento axial distribuído sobre um trecho de barra.	52
Figura 32 – Esquerda: Carregamento transversal linear. Direita: Carregamento axial linear	53
Figura 33 – Decomposição de uma carga distribuída em suas componentes locais.	53
Figura 34 – Posicionamento do gráfico de $f(x)$ no desenho da estrutura.	54
Figura 35 – Posicionamento da linha deformada da barra.	54

Figura 36 – Interface gráfica do MATLAB.	56
Figura 37 – Exemplo de pórtico.	58
Figura 38 – Interface gráfica utilizada na criação e manipulação de dados.	60
Figura 39 – Caixas de diálogos	60
Figura 40 – Estrutura de dados do programa.	61
Figura 41 – Diagramas de esforços do pórtico exemplo.	62
Figura 42 – Gráficos das tensões atuantes nas barras.	63
Figura 43 – Janela de análise de resistência aos esforços.	63
Figura 44 – Apresentação dos dados da viga na plicação em Java.	64
Figura 45 – Desenho da viga exemplo.	65
Figura 46 – Reações de apoio da viga.	65
Figura 47 – Diagrama de esforços normais.	66
Figura 48 – Diagrama de esforços cortantes.	66
Figura 49 – Diagrama de momentos fletores.	67
Figura 50 – Configuração deformada da viga.	67
Figura 51 – Resultados apresentados pelo software Ftool.	68
Figura 52 – Gráficos de tensões atuantes na viga.	68
Figura 53 – Resultados da análise de tensões.	69
Figura 54 – Esquema estrutural do pórtico exemplo.	70
Figura 55 – Dimensões da viga de aço.	70
Figura 56 – Numeração dos nós e barras do pórtico.	71
Figura 57 – Reações de apoio do pórtico.	72
Figura 58 – Diagrama de esforços normais do pórtico.	72
Figura 59 – Diagrama de esforços cortantes do pórtico.	73
Figura 60 – Diagrama de momentos fletores do pórtico.	73
Figura 61 – Configuração deformada do pórtico.	74
Figura 62 – Diagramas apresentados no Ftool para o pórtico exemplo.	74
Figura 63 – Tensões atuantes no pórtico exemplo.	75
Figura 64 – Resultados da análise de tensões do pórtico.	76
Figura 65 – Pórtico exemplo 3.	77
Figura 66 – Diagramas gerados pela rotina criada em MATLAB para o pórtico exemplo 3.	77
Figura 67 – Diagramas de esforços do pórtico exemplo 3 gerados pelo Ftool.	78
Figura 68 – Gráficos de tensões atuantes no pórtico exemplo 3.	79
Figura 69 – Resultados da análise de tensões para o pórtico exemplo 3.	79
Figura 70 – Diagramas de esforços do pórtico exemplo 1, com sentido da barra 4 invertido.	80
Figura 71 – Gráficos de tensões do pórtico exemplo 1.	80
Figura 72 – Diagramas de esforços do pórtico exemplo 1, com sentido da barra 1 invertido.	81
Figura 73 – Diagramas de esforços do pórtico exemplo 1, com sentido da barra 1 invertido e carregamento distribuído invertido.	82

Figura 74 – Esquerda: Barra sujeita a um carregamento transversal. Direita: Barra flexionada.	85
Figura 75 – Elemento de barra flexionado.	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estrutura de dados nodais.	59
Tabela 2 – Estrutura de dados das barras parte 1.	59
Tabela 3 – Estrutura de dados das barras parte 2.	59

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Considerações iniciais	12
1.2	Objetivos	12
1.2.1	Geral	12
1.2.2	Específicos	13
1.3	Justificativa	13
1.4	Estrutura do trabalho	13
2	MÉTODO DAS FORÇAS E MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS . . .	15
2.1	Energia de deformação	15
2.1.1	Energia de deformação para alguns tipos de carga	17
2.1.2	Hipóteses de aplicação	17
2.2	Princípio do Trabalho Virtual	18
2.3	Teorema de Betti-Maxwell	19
2.4	Teoremas de Castigliano	20
2.5	Método das forças	21
2.6	Método dos deslocamentos	27
2.7	Comparativo entre os métodos	32
3	MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA	34
3.1	Barra elástica	34
3.2	Barra flexionada	36
3.3	Matriz de rigidez de barra flexionada	37
3.4	Flexão de elemento com carregamento axial	38
3.5	Mudança de coordenadas	39
3.6	Trabalho equivalente para carregamentos distribuídos	41
3.7	Convenção de sinais	42
3.8	Montagem da matriz de rigidez global	42
3.9	Vetor de localização	48
3.10	Método dos zeros e uns	48
3.11	Articulações em extremidade de barra	49
3.12	Diagramas	52
3.12.1	Cortante, normal e fletor	52
3.12.2	Cargas distribuídas em coordenadas locais e globais	53
3.12.3	Plotando os gráficos	54
3.13	Tensões	55

4	METODOLOGIA	56
4.1	MATLAB	56
4.2	Estrutura do programa	57
4.2.1	Dados de entrada	57
4.2.2	Cálculo da estrutura	61
4.2.3	Apresentação dos resultados	62
5	RESULTADOS	64
5.1	Exemplo 1	64
5.2	Exemplo 2	69
5.3	Exemplo 3	76
5.4	Um "bug"	80
6	CONCLUSÃO	83
	REFERÊNCIAS	84
	APÊNDICE A – TEORIA DE VIGAS DE NAVIER	85

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

O projeto estrutural consiste em um processo de idealização da estrutura de forma que ela possa resistir às cargas impostas com segurança e economia. Dentro do projeto estrutural existe a análise estrutural, fase em que é feita uma idealização do comportamento da estrutura por meio da análise de esforços internos e externos e deformações. Existem diversas metodologias para o cálculo de tais esforços e deslocamentos. Dentre essas metodologias tem-se o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos, que são os métodos clássicos em cálculo estrutural. Apesar de serem métodos gerais, eles se tornam trabalhosos na análise de estruturas complexas, como pórticos em edifícios. Buscando simplificar tais cálculos, foram criadas diversas simplificações dos métodos apresentados, como por exemplo o Método de Cross, que é um método mais simples porém não geral (MARTHA, 2010). Mesmo com tais simplificações, os cálculos permanecem trabalhosos em estruturas complexas.

Com o surgimento dos computadores, projetos que durariam meses ou até anos podem ser feitos atualmente em questão de semanas. Isso permitiu a concepção de estruturas cada vez mais complexas e os métodos clássicos voltaram a ter atenção nos cursos de Engenharia Civil (MOREIRA, 1977).

Dentre os métodos de cálculo se destaca o Método da Rigidez Direta (MRD), o qual permite tratar o problema em determinar os esforços e deslocamentos de forma matricial. Atualmente, esse é o método mais utilizado em softwares comerciais de cálculo estrutural.

A maioria dos programas gratuitos que realizam essa tarefa não permitem a realização de análises mais detalhadas da estrutura, como tensões atuantes, estabilidade, etc., ficando restritos apenas ao cálculo de esforços e deslocamentos. Um excelente comparativo entre alguns desses programas nesse quesito e em alguns outros pode ser visto em ORMONDE (2013).

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

O presente trabalho visa implementar o MRD em uma rotina que realiza o cálculo e dimensionamento de pórticos planos reticulados, criado no software MATLAB, o qual permite manipulação de matrizes e construção de gráficos. Tal programa, além de mostrar diagramas de esforços, configuração deformada da estrutura e tensões atuantes, realiza também uma análise simples das tensões na estrutura para verificar se a mesma suporta as cargas atuantes.

1.2.2 Específicos

- Desenvolver uma ferramenta computacional que permita determinar os esforços atuantes na estrutura e realizar uma análise das tensões atuantes;
- Realizar uma análise das tensões atuante na estrutura;
- Validar os resultados apresentados pelo programa com os obtidos por outros métodos e pelo software de cálculo estrutural Ftool;
- Verificar as tensões apresentadas através de cálculos manuais.

1.3 Justificativa

Conforme mencionado anteriormente, a maioria dos softwares gratuitos de cálculo estrutural não disponibilizam ferramentas de dimensionamento, sendo este feito de forma manual e, em alguns casos, tal dimensionamento torna-se trabalhoso, sendo feitas diversas tentativas e erros até chegar às dimensões dos componentes que atendam as especificações de forma eficiente e econômica. Nesse sentido, um software que realiza o cálculo e desenho de diagramas de esforços, esquema da estrutura deformada, cálculo de tensões e verificar se a estrutura suporta as cargas impostas se torna uma ferramenta extremamente útil, podendo auxiliar estudantes nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos, Teoria das estruturas, Projeto de Estruturas de Concreto Armado, Projeto de Estruturas de Madeira e Projeto de Estruturas de Aço, além de auxiliar engenheiros estruturais em seus projetos.

1.4 Estrutura do trabalho

Ao longo deste capítulo foi apresentada a proposta do presente estudo, incluindo as justificativas para a sua realização, bem como sua relevância e objetivos.

No Capítulo 2 são apresentados os princípios físicos fundamentais para a análise estrutural: o Princípio da Conservação de Energia e o Princípio do Trabalho Virtual. Como consequência deles, são apresentados o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. São mostrados também alguns exemplos para melhor compreensão desses métodos.

No Capítulo 3 é apresentado o Método da Rigidez Direta, que, como já foi dito, é um método matricial de cálculo estrutural em que se permite implementação computacional.

No Capítulo 4 é mostrado como funciona o programa criado para cálculo e dimensionamento de pórticos: a estrutura do programa, a estrutura dos dados de entrada, as etapas de cálculo, a apresentação dos resultados, e a análise de tensões, a qual permite dimensionar a estrutura.

No Capítulo 5 é feita a validação do programa por meio de exemplos de estruturas, comparando os resultados obtidos com outros métodos e com os resultados do programa Ftool.

E no Capítulo 6 é feita a síntese do trabalho e de seus resultados, e são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 MÉTODO DAS FORÇAS E MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Neste capítulo serão apresentados o Princípio da Conservação de Energia e o Princípio do Trabalho Virtual e como esses princípios podem ser utilizados para determinar os esforços e as deformações de uma estrutura. Com isso serão apresentados o Método das Forças e o Método dos deslocamentos.

2.1 Energia de deformação

O *Princípio da Conservação de Energia* afirma que "o trabalho realizado por todas as forças externas atuando sobre uma estrutura, U_e , é transformado em trabalho interno ou energia de deformação, U_i , que é desenvolvida quando a estrutura se deforma". (HIBBELER, 2013, p. 250)

A energia interna é causada por tensões internas à estrutura (como tensões normais e cisalhantes) e as deformações correspondentes.

Se uma força F passa por um deslocamento dx na mesma direção dela, o trabalho realizado é $dU_e = F dx$. Se o deslocamento total é Δ , então o trabalho total é

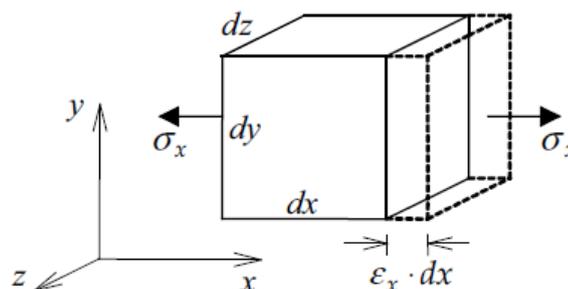
$$U_e = \int_0^{\Delta} F dx \quad (2.1)$$

Se F varia de forma gradual, de 0 para P , e o material é elástico linear, então F irá variar com x como $F = \frac{P}{\Delta}x$. O trabalho realizado é

$$U_e = \int_0^{\Delta} \frac{P}{\Delta} x dx = \frac{1}{2} P \Delta \quad (2.2)$$

Considere um elemento infinitesimal de volume de uma estrutura submetido a uma deformação normal na direção x com força $\sigma_x dy dz$ aplicada de forma gradual como mostrado na Figura 1.

Figura 1: Elemento infinitesimal de volume submetido a uma deformação normal.



Fonte: MARTHA (2010).

O elemento sofre deslocamento $\epsilon_x dx$. A energia de deformação do elemento é

$$dU_{ix} = \frac{1}{2} \sigma_x dy dz (\epsilon_x dx)$$

e a energia por unidade de volume é

$$du_{ix} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \quad (2.3)$$

Com isso, a energia de deformação total é

$$U_{ix} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dV \quad (2.4)$$

Devido a hipótese de linearidade elástica, pode-se aplicar a lei de Hooke $\sigma = E \cdot \epsilon$, onde E é o módulo de elasticidade. Com isso

$$U_{ix} = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad (2.5)$$

De forma análoga obtém-se

$$U_{iy} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y dV = \int_V \frac{\sigma_y^2}{2E} dV \quad (2.6)$$

$$U_{iz} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z dV = \int_V \frac{\sigma_z^2}{2E} dV \quad (2.7)$$

Um raciocínio semelhante pode ser aplicado para calcular a energia de deformação por cisalhamento, a qual é dada por (HIBBELER, 2010)

$$U_i = \int_V \frac{1}{2} \tau \gamma dV = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (2.8)$$

para as direções xy , xz e yz , onde G é o módulo de cisalhamento

A energia de deformação para o estado geral de tensão é obtido somando as energias de cada componente de tensão, resultando em

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} \right] dV \quad (2.9)$$

ou usando a lei de Hooke generalizada (NETO, 2017)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.10)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.11)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (2.14)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (2.15)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson, obtém-se

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] dV \quad (2.16)$$

O deslocamento Δ na direção de uma força F pode ser calculado com auxílio do Princípio da Conservação de Energia como

$$P \cdot \Delta = U_i \quad (2.17)$$

De forma análoga, a rotação θ na direção de um momento M é determinada por

$$M \cdot \theta = U_i \quad (2.18)$$

2.1.1 Energia de deformação para alguns tipos de carga

Considerando estruturas reticuladas prismáticas tem-se:

Carga axial: A tensão normal é dada por $\sigma = N/A$ onde N é a carga aplicada e A é a área da seção transversal. A energia de deformação é

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{N^2}{2EA^2} dV$$

Como $dV = Adx$

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx \quad (2.19)$$

onde L é o comprimento da barra.

Momento fletor: De acordo com a teoria de vigas de Navier (Apêndice A), a tensão normal é dada por $\sigma = \frac{M}{I}y$ onde M é o momento aplicado, I é momento de inércia da seção transversal e y é a ordenada do ponto considerado em relação ao centroide da seção. A energia de deformação é

$$U_i = \int_V \frac{1}{2E} \left(\frac{My}{I} \right)^2 dV = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

Como $I = \int_A y^2 dA$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2.20)$$

Esforço cortante: Segundo MARTHA (2010) e SÜSSEKIND (1981b), em estruturas usuais, a energia de deformação por efeito cortante é desprezível em relação às energias de deformação axial e por flexão, mesmo para vigas curtas como mostrado por HIBBELER (2010). Por isso tal formulação não será apresentada neste trabalho.

2.1.2 Hipóteses de aplicação

Para aplicação das formulações apresentadas devem ser assumidas as seguintes hipóteses:

- a) A estrutura é composta por barras reticuladas prismáticas;

- b) O material da estrutura apresenta comportamento linear elástico, deve ser isotrópico, homogêneo e contínuo;
- c) Perdas de energia são desprezadas (forças conservativas);
- d) As deformações são pequenas em comparação com as dimensões da estrutura;
- e) A energia de deformação por cisalhamento é desprezível;
- f) As seções transversais de uma barra inicialmente planas se mantêm planas após a deformação da barra;
- g) As cargas são aplicadas de forma gradual.

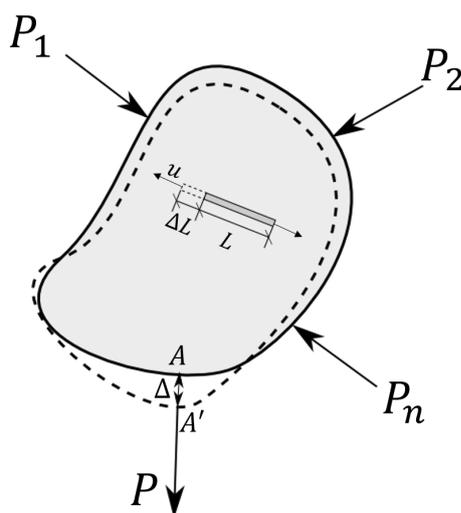
2.2 Princípio do Trabalho Virtual

O método apresentado na seção anterior para cálculo dos deslocamentos de uma estrutura, que é utilizando as Equações (2.17) e (2.18), possui um inconveniente: os deslocamentos só podem ser calculados nas direções dos esforços e não pode haver restrições nos deslocamentos dos pontos considerados nas direções desses esforços (por exemplo, as reações de apoio não podem ser calculadas diretamente por meio dessas equações).

Uma forma de contornar esse problema é utilizando o Princípio do Trabalho Virtual, o qual será apresentado a seguir.

Num corpo são aplicados diversos esforços P_1, P_2, \dots, P_n , os quais deformam a estrutura. O ponto A é deslocado uma distância Δ para o ponto A' como ilustrado na Figura 2

Figura 2: Deformação do corpo.



Fonte: O autor.

Suponha que antes da aplicação das forças P_1, P_2, \dots, P_n , é aplicada uma força *imaginária* P . Essa força P é chamada *virtual*. Ela causa esforços virtuais internos u . Ao aplicar P_1, P_2, \dots ,

P_n , o trabalho realizado por P é $P \cdot \Delta$, ao passo que o trabalho realizado por u é $\sum u \cdot \Delta L$. Pelo Princípio da Conservação de Energia

$$P \cdot \Delta = \sum u \cdot \Delta L \quad (2.21)$$

Se a força virtual for unitária, o deslocamento é calculado de forma direta:

$$\Delta = \sum u \cdot \Delta L \quad (2.22)$$

De forma análoga, para momento virtual M

$$M \cdot \theta = \sum m \cdot \Delta L \quad (2.23)$$

onde m são os momentos virtuais internos. Para momento virtual unitário

$$\theta = \sum m \cdot \Delta L \quad (2.24)$$

Nas equações anteriores ΔL representa deslocamentos lineares ou rotacionais.

Seja δ o deslocamento (rotacional ou linear) de um ponto da estrutura. Das equações anteriores, o segundo membro delas pode ser decomposto como

$$\delta = \sum n \cdot \Delta L + \sum m \cdot \Delta \theta \quad (2.25)$$

onde n são os esforços normais virtuais unitários e m são os momentos fletores virtuais unitários.

Como os deslocamentos ΔL e $\Delta \theta$ são reais, eles podem ser calculados como

$$\Delta L = \frac{\sigma}{E} \Delta x = \frac{N}{AE} \Delta x \quad \text{e} \quad \Delta \theta = \frac{M}{EI} \Delta x \quad (2.26)$$

obtendo

$$\delta = \sum \frac{nN}{AE} \Delta x + \sum \frac{mM}{EI} \Delta x \quad (2.27)$$

para deslocamentos pequenos e lembrando da hipótese de efeitos de cisalhamento desprezíveis.

Com raciocínio semelhante, pode-se aplicar um deslocamento virtual δ , obtendo deslocamentos virtuais internos δL e, de acordo com o Princípio da Conservação de Energia

$$F \cdot \delta = \sum f \cdot \delta L \quad (2.28)$$

onde F é o esforço externo (real) aplicado na direção de δ e f são os esforços internos (reais).

Se mais de um esforço virtual ou mais de um deslocamento virtual forem aplicados, pode-se realizar um somatório nos primeiros membros das Equações (2.21), (2.23) e (2.28)

2.3 Teorema de Betti-Maxwell

Uma consequência do Princípio do Trabalho Virtual é o teorema de reciprocidade de Betti-Maxwell.

Teorema 2.1 (Betti-Maxwell) *Considere que uma estrutura linear elástica é submetida a dois sistemas independentes de forças (F_A, D_A) e (F_B, D_B) , onde D_A e D_B são os deslocamentos externos dos sistemas A e B, respectivamente. Então*

$$\sum F_A D_B = \sum F_B D_A \quad (2.29)$$

desde que os deslocamentos sejam pequenos.

Demonstração:

Sejam f_A e f_B os esforços internos e d_A e d_B são os deslocamentos internos dos sistemas A e B, respectivamente. Considerando o sistema A como real e B como virtual, segue do Princípio do Trabalho Virtual que

$$\sum F_A D_B = \sum f_A d_B$$

Considerando agora o sistema B como real e A como virtual, tem-se

$$\sum F_B D_A = \sum f_B d_A$$

Novamente pelo Princípio do Trabalho Virtual

$$\sum f_A d_B = \sum f_B d_A = \sum \frac{N_A N_B}{AE} \Delta x + \sum \frac{M_A M_B}{EI} \Delta x$$

Portanto

$$\sum F_A D_B = \sum f_A d_B = \sum f_B d_A = \sum F_B D_A$$

□

2.4 Teoremas de Castigliano

Uma alternativa para o cálculo de deslocamentos ou de esforços em estruturas são os teoremas de Castigliano.

Teorema 2.2 *Para um sistema elástico em equilíbrio, a derivada parcial da energia de deformação em relação à deflexão em um ponto é igual ao esforço aplicado na direção da deflexão nesse ponto.*

Demonstração:

Um corpo elástico é sujeito a esforços F_j , de modo que a energia de deformação é

$$U = \sum_j \int_0^{\delta_j} F_j d\delta_j$$

Se todos os pontos de aplicação de cargas estiverem fixos, exceto i , e nele é feito um deslocamento infinitesimal $\Delta\delta_i$ por uma esforço incremental ΔF_i , a variação de energia de deformação é

$$\Delta U = F_i \Delta\delta_i + \int_0^{\Delta\delta_i} \Delta F_i d\delta_i$$

A parcela integral é um infinitésimo de ordem superior em relação a $\Delta\delta_i$. Dividindo ambos os membros por $\Delta\delta_i$ e passando ao limite com $\Delta\delta_i \rightarrow 0$ obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i$$

□

Teorema 2.3 *Considere um corpo linear elástico com temperatura constante. A derivada parcial da energia de deformação em relação a um esforço em um ponto é igual ao deslocamento daquele ponto na direção do esforço.*

Demonstração:

Um corpo elástico é sujeito a esforços F_j , de modo que a energia de deformação é U . Aplicando um esforço infinitesimal ΔF_i , a energia de deformação será

$$U + \Delta U_i = U + \frac{\partial U}{\partial F_i} \Delta F_i$$

Eliminando todos os esforços e aplicando primeiramente ΔF_i , ela provoca um deslocamento $\Delta\delta_i$. A aplicação posterior dos esforços F_j acarretam um deslocamento Δ_i na direção de P_i . A energia de deformação final será

$$U + \Delta F_i \Delta_i + \int_0^{\Delta\delta_i} \Delta F_i d\delta_i$$

Como a energia de deformação é independente da ordem como foram aplicadas as cargas

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} \Delta F_i = U + \Delta F_i \Delta_i + \int_0^{\Delta\delta_i} \Delta F_i d\delta_i$$

A parcela integral é um infinitésimo de ordem superior em relação a ΔF_i . Dividindo ambos os membros por ΔF_i e passando ao limite com $\Delta F_i \rightarrow 0$ obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i$$

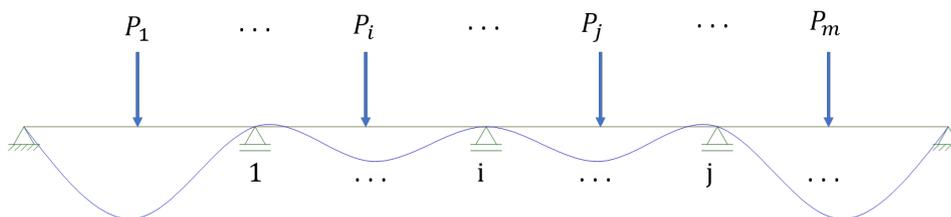
2.5 Método das forças

Considere uma estrutura hiperestática sujeita aos esforços P_1, \dots, P_m , como mostrado na Figura 3.

Essa estrutura pode ser transformada em uma estrutura isostática eliminando os vínculos e substituindo-os pelas reações de apoio, esforços esses chamados de *redundantes*, como mostrado na Figura 4. Tal estrutura é chamada *Sistema Principal*.

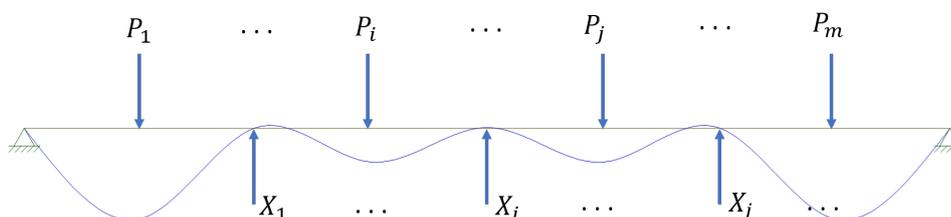
Supondo a validade do Princípio da Superposição, essas redundantes podem ser calculadas como segue: seja E_0 a estrutura isostática sem redundantes (Figura 5). Os pontos onde ocorrem restrições de apoio se deslocam $\delta_{10}, \dots, \delta_{i0}, \dots, \delta_{j0}, \dots, \delta_{n0}$.

Figura 3: Estrutura hiperestática. A linha azul é a estrutura deformada.



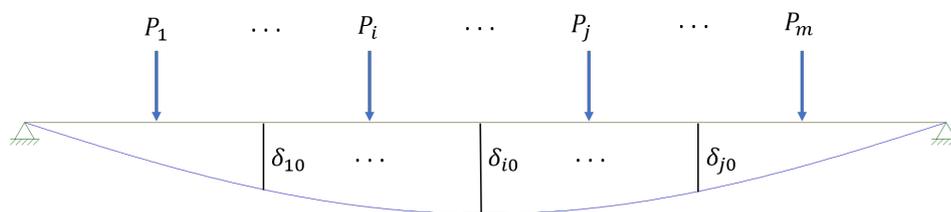
Fonte: O autor.

Figura 4: Estrutura isostática com redundantes.



Fonte: O autor.

Figura 5: Estrutura \$E_0\$.



Fonte: O autor.

Aplicando uma carga unitária na direção de \$X_1\$, os pontos mencionados se deslocam \$\delta_{11}, \dots, \delta_{i1}, \dots, \delta_{j1}, \dots, \delta_{n1}\$.

De forma análoga, aplica-se uma carga unitária na direção de \$X_j\$ para cada \$j = 2, \dots, n\$, obtendo os deslocamentos \$\delta_{1j}, \dots, \delta_{ij}, \dots, \delta_{jj}, \dots, \delta_{nj}\$ (Figura 7).

Superpondo os efeitos obtém-se as equações de compatibilidade

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.30}$$

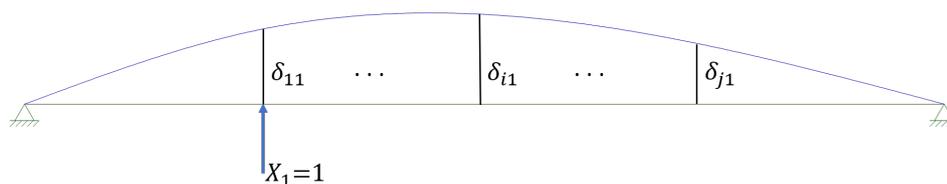
Em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

ou de forma compacta

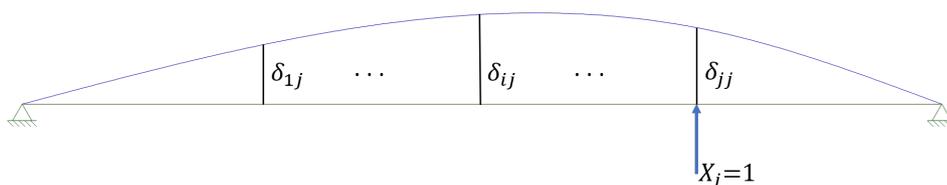
$$\{\delta_0\} + [\delta]\{X\} = \{0\} \tag{2.32}$$

Figura 6: Deformação da estrutura devido à carga $X_1 = 1$ (estado E_1).



Fonte: O autor.

Figura 7: Deformação da estrutura devido à carga $X_j = 1$ (estado E_j).



Fonte: O autor.

A matriz $[\delta]$ é chamada *matriz de flexibilidade*.

Teorema 2.4 *A matriz de flexibilidade possui as seguintes propriedades:*

- a) *é não-singular, isto é, é invertível;*
- b) *é simétrica.*

Demonstração:

- a) Como X_1, \dots, X_n são independentes, $[\delta]$ é invertível, pois do contrário, o sistema (2.30) seria impossível ou indeterminado. O 1º caso é absurdo. O 2º caso implica que o conjunto de soluções do sistema forma uma variedade afim¹ com dimensão $n - \text{posto}([\delta]) \neq 0$ (LIMA, 2006, p. 106), contradizendo a hipótese de independência das incógnitas.
- b) Decorre do teorema de Betti-Maxwell. □

Pelo teorema anterior, o sistema (2.30) é possível e determinado, com solução

$$\{X\} = -[\delta]^{-1}\{\delta_0\} \tag{2.33}$$

Os coeficientes de flexibilidade podem ser obtidos pelo Princípio do Trabalho Virtual, assumindo a forma

$$\delta_{i0} = \int_{\text{estrutura}} \frac{Mm_{0i}}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{Nn_{0i}}{AE} dx \tag{2.34}$$

¹ Um subconjunto V de um espaço vetorial E é uma *variedade afim* se existe um subespaço vetorial F de E tal que $V = x + F$ em que $x \in V$. Uma variedade afim pode ser encarada como uma translação de um espaço vetorial. (LIMA, 2006)

onde m_{0i} e n_{0i} são os momentos fletores e esforços normais virtuais unitários obtidos por aplicação de cargas virtuais unitárias no sistema E_0 na direção i e

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estrutura}} \frac{m_i m_j}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{m_i n_j}{AE} dx \quad (2.35)$$

onde m_j e n_j são os momentos fletores e esforços normais obtidos pela aplicação da carga $X_j = 1$ e m_i e n_i são os momentos fletores e esforços normais virtuais unitários obtidos por aplicação de carga virtual unitária no sistema E_j na direção de X_i .

Esses coeficientes podem ser obtidos também pelo Teorema 2.3

$$\delta_{i0} = \int_{\text{estrutura}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_i} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial X_i} dx \quad (2.36)$$

e

$$\delta_{ij} = \int_{\text{estrutura}} \frac{1}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_i} \frac{\partial M}{\partial X_j} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{1}{AE} \frac{\partial N}{\partial X_i} \frac{\partial N}{\partial X_j} dx \quad (2.37)$$

Percebe-se que nas duas formulações

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

o que mostra também que $[\delta]$ é simétrica.

Se a estrutura possui deslocamentos prescritos $\{\delta_0^p\}$ (por exemplo: recalques) nas direções das redundantes, o sistema de equações de compatibilidade toma a forma

$$\{\delta_0\} + [\delta]\{X\} = \{\delta_0^p\} \quad (2.38)$$

Caso os deslocamentos prescritos não sejam segundo as redundantes estáticas, eles passam a ser considerados ações atuantes na estrutura no estado E_0 e assim

$$\delta_{i0} = -\sum_r R_{ri} \delta_r^p + \int_{\text{estrutura}} \frac{M m_{0i}}{EI} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{N n_{0i}}{AE} dx \quad (2.39)$$

$$= -\sum_r R_{ri} \delta_r^p + \int_{\text{estrutura}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_i} dx + \int_{\text{estrutura}} \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial X_i} dx \quad (2.40)$$

onde δ_r^p é o r -ésimo deslocamento prescrito não atuante em redundantes e R_{ri} é a reação de apoio correspondente no estado E_i na direção r .

Os esforços e deslocamentos da estrutura original podem ser obtidos por superposição dos estados E_0, E_1, \dots, E_n .

$$E = E_0 + \sum_{j=1}^n E_j X_j \quad (2.41)$$

Exemplo:

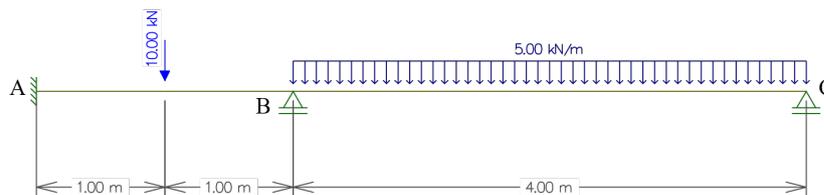
Considere a viga da Figura 8, retilínea, prismática de rigidez EI constante. O objetivo é traçar os diagramas de esforços cortante e momento fletors.

Inicialmente serão escolhidos redundantes nos pontos B e C. A viga será dividida em três seções como mostrado na Figura 9.

Aplicando as condições de equilíbrio para obter as reações em termos das redundantes:

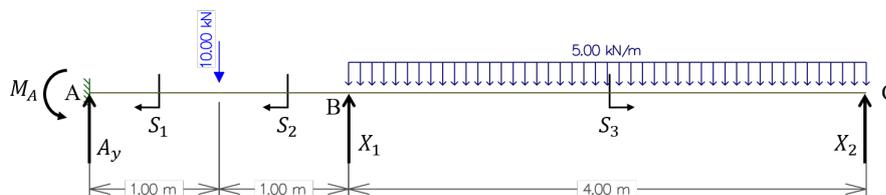
$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y + X_1 + X_2 - 10 - 5 \cdot 4 = 0 \Rightarrow A_y = 30 - X_1 - X_2 \\ + \circlearrowleft \sum M^{(A)} = 0 &\Rightarrow M_A - 10 \cdot 1 + 2X_1 - 4 \cdot 5 \cdot 4 + 6X_2 = 0 \Rightarrow M_A = 90 - 2X_1 - 6X_2 \end{aligned}$$

Figura 8: Viga hiperestática.



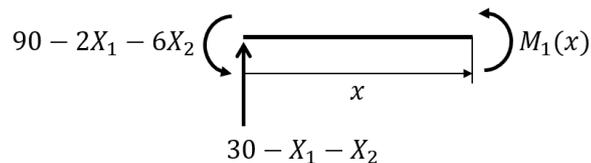
Fonte: O autor.

Figura 9: Divisão da estrutura em seções.



Fonte: O autor.

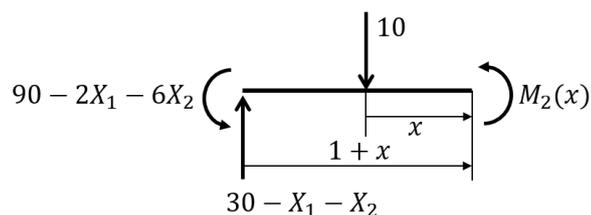
Seção S_1 : $0 \leq x \leq 1\text{m}$



$$+ \circlearrowleft: M_1(x) - (30 - X_1 - X_2)x + (90 - 2X_1 - 6X_2) = 0$$

$$M_1(x) = (30 - X_1 - X_2)x - (90 - 2X_1 - 6X_2)$$

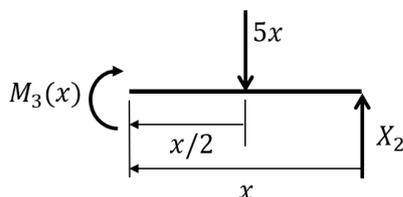
Seção S_2 : $0 \leq x \leq 1\text{m}$



$$+ \circlearrowleft: M_2(x) + 10x - (30 - X_1 - X_2)(1 + x) + (90 - 2X_1 - 6X_2) = 0$$

$$M_2(x) = (20 - X_1 - X_2)x + (X_1 + 5X_2 - 60)$$

Seção S_3 : $0 \leq x \leq 4\text{m}$



$$+ \circlearrowleft: -M_3(x) - 5x \cdot \frac{x}{2} + X_2x = 0 \Rightarrow M_3(x) = -2.5x^2 + X_2x$$

Os deslocamentos podem ser obtidos pelo Princípio do Trabalho Virtual ou pelo Teorema 2.3. Adotando a segunda abordagem tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial X_1} &= -x + 2 & \frac{\partial M_2}{\partial X_1} &= -x + 1 & \frac{\partial M_3}{\partial X_1} &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial X_2} &= -x + 6 & \frac{\partial M_2}{\partial X_2} &= -x + 5 & \frac{\partial M_3}{\partial X_2} &= x \end{aligned}$$

Funções de momento fletor no estado E_0 :

$$M_{10}(x) = 30x - 90 \quad M_{20}(x) = 20x - 60 \quad M_{30}(x) = -2.5x^2$$

Os deslocamentos podem ser obtidos pelas equações 2.36 e 2.37.

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \sum_i \int \frac{M_{i0}}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial X_1} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^1 (30x - 90)(-x + 2) dx + \int_0^1 (20x - 60)(-x + 1) dx + 0 \right] \\ &= \frac{-141.67}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{20} &= \sum_i \int \frac{M_{i0}}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial X_2} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^1 (30x - 90)(-x + 6) dx + \int_0^1 (20x - 60)(-x + 5) dx + \int_0^4 (-2.5x^2)x dx \right] \\ &= \frac{-801.65}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_i \int \frac{1}{EI} \left(\frac{\partial M_i}{\partial X_1} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^1 (-x + 2)^2 dx + \int_0^1 (-x + 1)^2 dx + 0 \right] = \frac{2.67}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \sum_i \int \frac{1}{EI} \frac{\partial M_i}{\partial X_1} \frac{\partial M_i}{\partial X_2} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^1 (-x + 2)(-x + 6) dx + \int_0^1 (-x + 1)(-x + 5) dx + 0 \right] \\ &= \frac{10.67}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \sum_i \int \frac{1}{EI} \left(\frac{\partial M_i}{\partial X_2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^1 (-x + 6)^2 dx + \int_0^1 (-x + 5)^2 dx + \int_0^1 x^2 dx \right] = \frac{72}{EI} \end{aligned}$$

Aplicando o Sistema (2.30):

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 2.67 & 10.67 \\ 10.67 & 72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 141.67 \\ 801.65 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21.01 \\ 8.02 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Assim as funções de momento fletor são

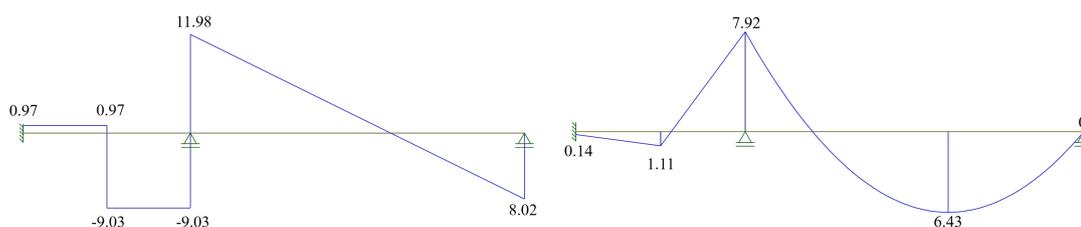
$$M_1(x) = 0.97x + 0.14 \quad M_2(x) = -9.03x + 1.11 \quad M_3(x) = -2.5x^2 + 8.02x$$

e os cortantes são

$$V_1(x) = \frac{dM_1}{dx} = 0.97 \quad V_2(x) = \frac{dM_2}{dx} = -9.03 \quad V_3(x) = \frac{dM_3}{dx} = 5x - 8.02$$

Desenhando os gráficos dessas funções obtém-se os diagramas da Figura 10.

Figura 10: Esquerda: Diagrama de esforços cortantes. Direita: Diagrama de momentos fletores.



Fonte: O autor.

2.6 Método dos deslocamentos

Considerando o sistema

$$\{\delta_0\} + [\delta]\{f\} = \{0\}$$

que é uma extensão do sistema (2.32) para todos os esforços nodais $\{f\}$, admite solução

$$\{f\} = -[\delta]^{-1}\{\delta_0\} = [K]\{\delta_0\} \quad (2.42)$$

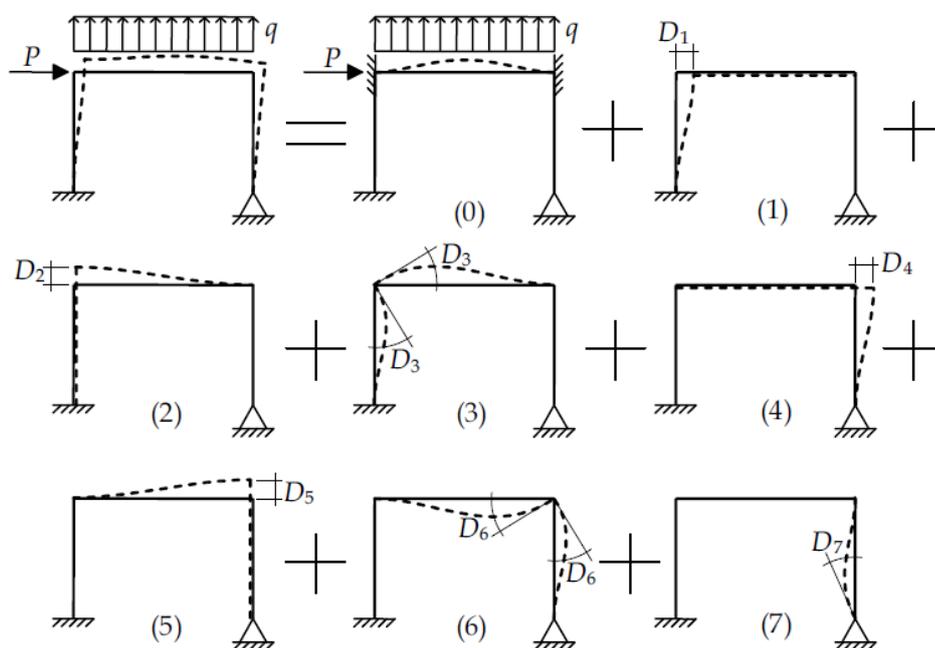
A matriz $[K]$ é chamada *matriz de rigidez* da estrutura.

Fazendo $\delta_{j0} = 1$ e $\delta_{i0} = 0$ para cada $i \neq j$ encontra-se

$$K_{ij} = f_i \quad (2.43)$$

ou seja, K_{ij} é o esforço necessário na direção i para provocar um deslocamento unitário na direção j mantendo os deslocamentos restantes nulos.

Figura 11: Configuração deformada de um pórtico formada pela superposição das configurações deformadas elementares.



Fonte: MARTHA (2010).

É nisso que consiste o *método dos deslocamentos*: restringir todos os nós da estrutura contra os deslocamentos e aplicar deslocamentos unitários um de cada vez. Daí se faz a superposição dos casos.

A título de exemplo, considere o pórtico da Figura 11.

A configuração deformada do caso 0 restringe todos os deslocamentos e rotações dos nós da estrutura, isolando os efeitos do carregamento. Tal configuração é chamada *sistema hipergeométrico*. As demais configurações (1 a 7) correspondem a imposições de deslocamentos e rotações nodais isoladas. Esses deslocamentos e rotações livres são chamados de *deslocabilidades*.

O sistema hipergeométrico é obtido adicionando apoios fictícios impedindo as deslocabilidades como mostrado na Figura 12.

Com isso são obtidas reações β_{i0} nos apoios fictícios. Aplicando deslocamentos e rotações unitárias obtém-se as reações β_{ij} , reação na direção i causada por um deslocamento unitário na direção j , mantidas as demais deslocabilidades fixas. As reações β_{i0} e β_{ij} podem ser calculadas por meio de tabelas presentes na literatura (ver MARTHA (2010) por exemplo). Os termos β_{ij} são os *coeficientes de rigidez*.

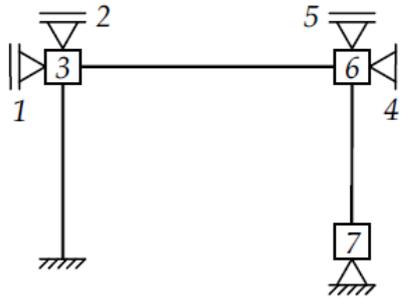
Aplicando as condições de equilíbrio resulta o sistema de equações

$$\beta_{i0} + \sum_j \beta_{ij} D_j = 0 \tag{2.44}$$

ou na forma matricial

$$\{\beta_0\} + [\beta]\{D\} = \{0\} \tag{2.45}$$

Figura 12: Sistema hipergeométrico do pórtico.



Fonte: MARTHA (2010).

No caso de haverem deslocamentos prescritos

$$\{\beta_0\} + \{\beta^p\} + [\beta]\{D\} = \{0\} \tag{2.46}$$

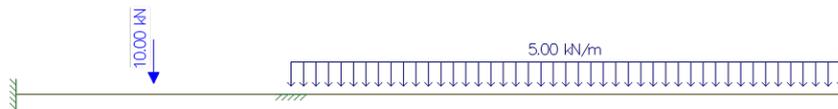
Os esforços nodais são obtidos por superposição dos casos básicos.

$$E = E_0 + E^p + \sum_j E_j D_j \tag{2.47}$$

Exemplo:

Considere a mesma viga mostrada na seção anterior. Restringindo todos os deslocamentos nodais obtém-se o sistema hipergeométrico da Figura 13

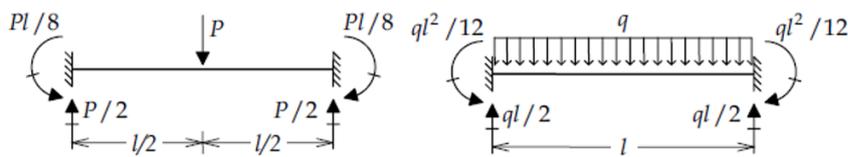
Figura 13: Sistema hipergeométrico da viga.



Fonte: O autor.

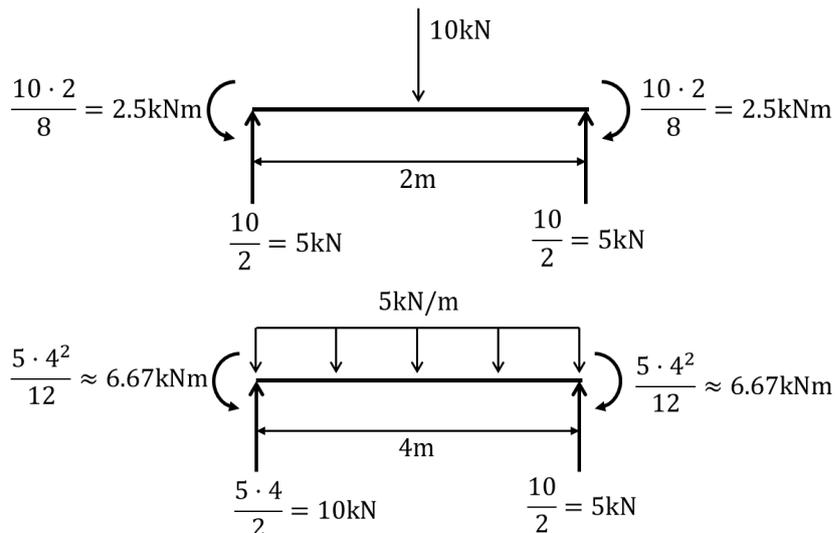
As reações de engastamento são calculadas como mostrado na Figura 14

Figura 14: Reações de engastamento.

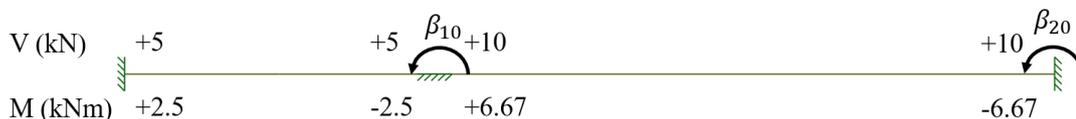


Fonte: MARTHA (2010).

Assim,



obtendo as reações do SH

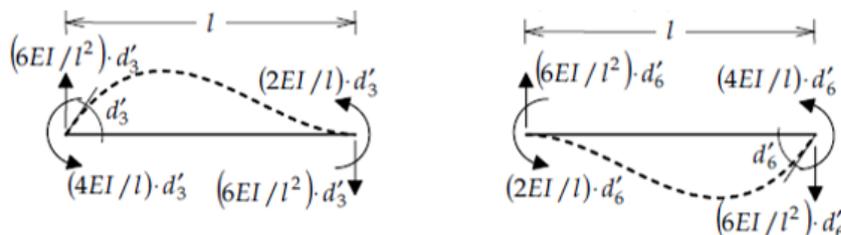


cujas reações de poios fictícios são

$$\beta_{10} = -2.5 + 6.67 = 4.17\text{kNm/rad} \quad \beta_{20} = -6.67\text{kNm/rad}$$

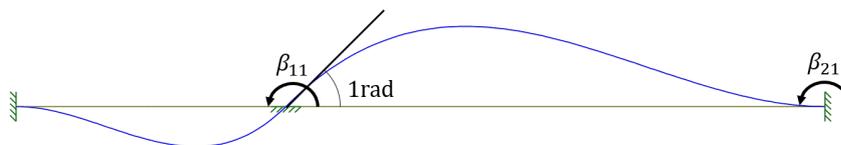
Os coeficientes de rigidez à flexão são calculados como mostrado na Figura 15.

Figura 15: Coeficientes de rigidez à flexão.

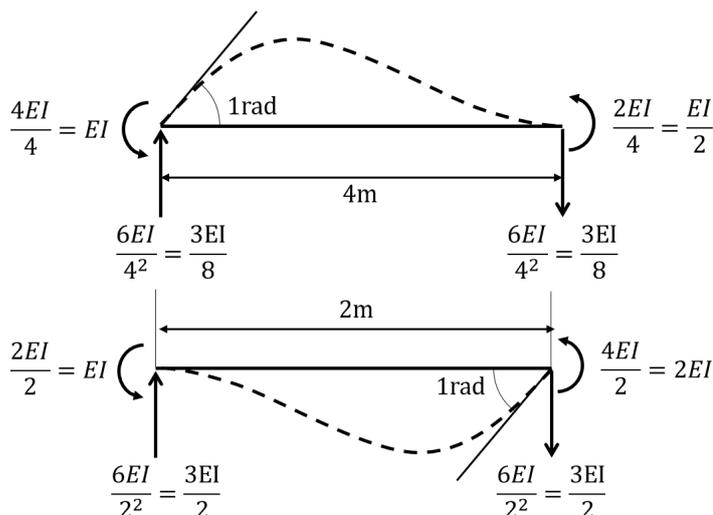


Fonte: MARTHA (2010).

Aplicando deslocamento unitário na direção 1 tem-se:



cujos coeficientes de rigidez à flexão são



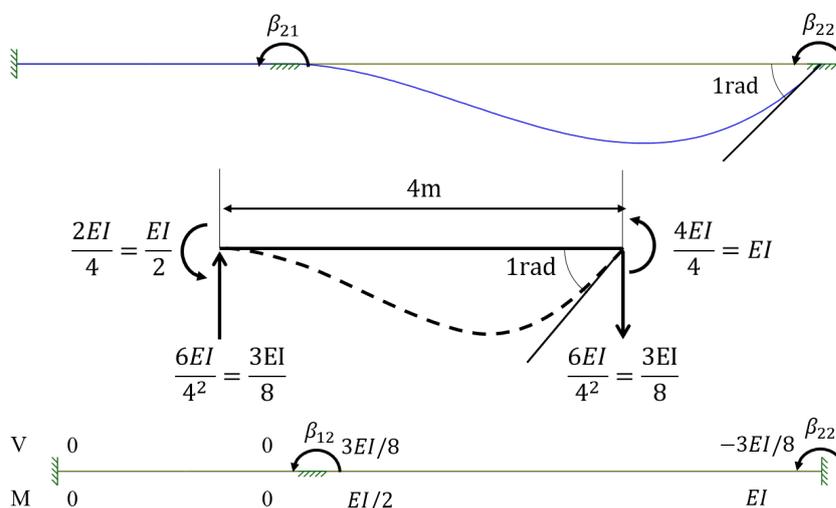
obtendo as reações



Assim

$$\beta_{11} = 2EI + EI = 3EI \quad \beta_{21} = \frac{EI}{2}$$

De forma análoga, aplicando um deslocamento unitário na direção 2 obtém-se



$$\beta_{12} = 0 + \frac{EI}{2} = \frac{EI}{2} \quad \beta_{22} = EI$$

Aplicando as condições de equilíbrio:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$EI \begin{bmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 4.17 \\ -6.67 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 8.03 \end{Bmatrix}$$

e finalmente pelo Princípio da Superposição:

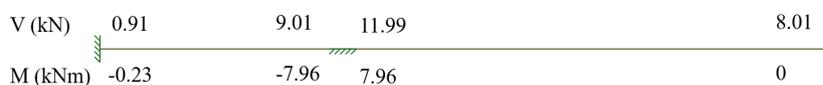
Momentos fletores:

$$\begin{aligned} 2.5 + EI \cdot \frac{-2.73}{EI} + 0 \cdot \frac{8.03}{EI} &= -0.23 \text{ kNm} \\ -2.5 + 2EI \cdot \frac{-2.73}{EI} + 0 \cdot \frac{8.03}{EI} &= -7.96 \text{ kNm} \\ 6.67 + EI \cdot \frac{-2.73}{EI} + \frac{EI}{2} \cdot \frac{8.03}{EI} &= 7.96 \text{ kNm} \\ -6.67 + \frac{EI}{2} \cdot \frac{-2.73}{EI} + EI \cdot \frac{8.03}{EI} &= 0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Esforços cortantes:

$$\begin{aligned} 5 + \frac{3EI}{2} \cdot \frac{-2.73}{EI} + 0 \cdot \frac{8.03}{EI} &= 0.91 \text{ kN} \\ 5 - \frac{3EI}{2} \cdot \frac{-2.73}{EI} + 0 \cdot \frac{8.03}{EI} &= 9.01 \text{ kN} \\ 10 + \frac{3EI}{8} \cdot \frac{-2.73}{EI} + \frac{EI}{8} \cdot \frac{8.03}{EI} &= 11.99 \text{ kN} \\ 10 - \frac{3EI}{8} \cdot \frac{-2.73}{EI} - \frac{3EI}{8} \cdot \frac{8.03}{EI} &= 8.01 \text{ kN} \end{aligned}$$

Figura 16: Esforços cortantes e momentos fletores nos apoios.



Fonte: O autor.

Observa-se que os resultados são próximos dos obtidos pelo método das forças.

2.7 Comparativo entre os métodos

Observa-se aqui algumas diferenças entre o método das forças e o método dos deslocamentos:

1. No método das forças deve-se primeiro transformar a estrutura em isostática, eliminando os apoios e aplicando esforços redundantes. Em seguida aplicam-se as condições de compatibilidade para determinar as redundantes e com elas determinam-se os esforços internos da estrutura.
2. No método dos deslocamentos é feito quase o inverso do método das forças: primeiro restringe-se todas as deslocabilidades da estrutura; em seguida aplica-se deslocamentos unitários um de cada vez; faz-se a superposição dos casos; e, por fim, aplicam-se as condições de equilíbrio para determinar os esforços da estrutura.

3. A resolução pelo método das forças pode ser feita de diversas formas, pois existem diferentes formas de escolher os esforços redundantes. Já o método dos deslocamentos fornece um único processo de solução, pois existe um único sistema hipergeométrico possível para cada estrutura e são únicas as deslocabilidades da estrutura.

Devido a unicidade de resolução do método dos deslocamentos, é esse o utilizado em sistemas computacionais para cálculo dos esforços de estruturas. No próximo capítulo será visto uma versão modificada dele, chamado *método da rigidez direta*, o qual permite implementação computacional.

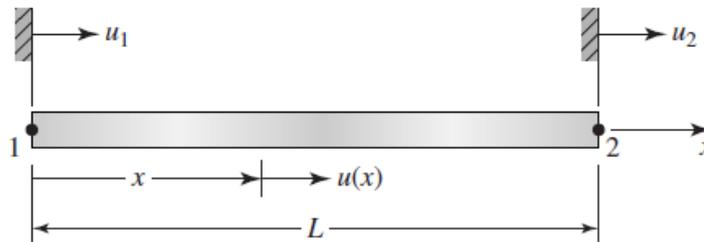
3 MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

Neste capítulo será apresentado o método da rigidez direta (MRD) para cálculo dos esforços em estruturas. Tal método é o utilizado em softwares de cálculo estrutural e é uma reformulação matricial do método dos deslocamentos. A abordagem utilizada no seu desenvolvimento segue as linhas de [HUTTON \(2005\)](#), como um caso particular do *método dos elementos finitos*. Outras abordagens podem ser vistas em [MARTHA \(2010\)](#), [SORIANO \(2005\)](#) e [LEET; UANG; GILBERT \(2009\)](#).

3.1 Barra elástica

Considere uma barra elástica sujeita a carregamentos axiais em suas extremidades. Seja $u(x)$ o deslocamento da barra da Figura 17 na posição x , com deslocamentos nodais $u_1 = u(x=0)$ e $u_2 = u(x=L)$.

Figura 17: Barra elástica sujeita a deslocamentos nodais u_1 e u_2 .



Fonte: [HUTTON \(2005\)](#).

Para expressar $u(x)$ em termos de u_1 e u_2 , assume-se a existência de funções de interpolação $N_1(x)$ e $N_2(x)$ tais que

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \quad (3.1)$$

sujeitas às condições de contorno

$$N_1(0) = 1 \quad N_1(L) = 0 \quad N_2(0) = 0 \quad N_2(L) = 1 \quad (3.2)$$

Assumindo que N_1 e N_2 são funções lineares

$$N_1(x) = a_1x + b_1 \quad N_2(x) = a_2x + b_2$$

aplicando as condições (3.2) encontra-se

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (3.3)$$

e portanto

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 \quad (3.4)$$

O deslocamento na barra causado por uma carga axial N é

$$\delta = \varepsilon L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{NL}{AE}$$

Como o carregamento é axial, basta considerar somente a deformação normal

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

que, aplicando (3.4) obtém-se

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

Pela lei de Hooke

$$\sigma_x = E \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.5)$$

e a carga associada é

$$N = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1)$$

Com isso, os esforços nodais são (+: tração; -: compressão)

$$N_1 = -\frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad N_2 = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1)$$

ou na forma matricial

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ou ainda, em forma compacta

$$[k_e] \{u\} = \{N\} \quad (3.7)$$

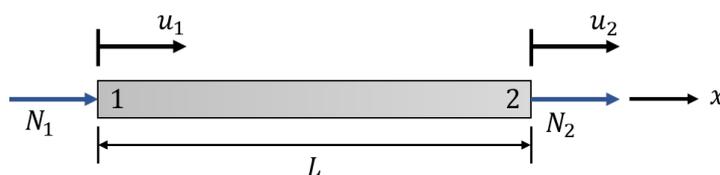
em que

$$[k_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

é a *matriz de rigidez* da barra.

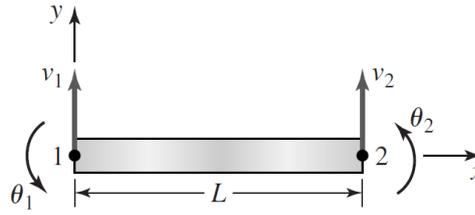
Perceba que $[k_e]$ é 2×2 , correspondendo aos 2 graus de liberdade da barra (as duas extremidades). Isso se repete em situações mais gerais, como se verá mais a frente.

Figura 18: Esforços nodais e deslocamentos nodais da barra elástica.



Fonte: O autor.

Figura 19: Deslocamentos nodais em sentido positivo.



Fonte: HUTTON (2005).

3.2 Barra flexionada

Considere uma barra elástica sujeita a carregamentos transversais. As suas extremidades sofrem deslocamentos transversais e rotações nodais (Figura 19).

A função deslocamento transversal $v(x)$ é tal que

$$v(x) = f(v_1, v_2, \theta_1, \theta_2, x) \quad (3.9)$$

deve estar sujeita às condições de contorno

$$v(x=0) = v_1 \quad v(x=L) = v_2 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2 \quad (3.10)$$

Assumindo que a função deslocamento transversal tem a forma

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.11)$$

Aplicando as condições de contorno (3.10):

$$\begin{aligned} v(x=0) = v_1 = a_0 & \quad v(x=L) = v_2 = a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 = a_1 & \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2 = a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema encontra-se

$$a_0 = v_1 \quad a_1 = \theta_1 \quad a_2 = \frac{3}{L^3}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L^2}(2\theta_1 + \theta_2) \quad a_3 = \frac{2}{L^3}(v_1 - v_2) + \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2)$$

Com isso

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)v_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\theta_2 \quad (3.12)$$

ou

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (3.13)$$

em que

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & N_4(x) &= \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{aligned}$$

3.3 Matriz de rigidez de barra flexionada

A energia de deformação do elemento é

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV \quad (3.14)$$

Pela teoria de vigas de Navier

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.15)$$

logo

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V E \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dV = \frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \underbrace{\left(\int_A y^2 dA \right)}_I dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

Substituindo (3.13)

$$U_e = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right)^2 dx$$

Aplicando o Teorema 2.2:

$$\frac{\partial U_e}{\partial v_1} = F_1 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \quad (3.16)$$

De forma análoga se obtém

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_1} = M_1 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial v_2} = F_2 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_2} = M_2 = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \quad (3.19)$$

em que F_1 , M_1 , F_2 e M_2 são as forças transversais e momentos fletores no nós 1 e 2, respectivamente (Figura 20).

Figura 20: Esforços nodais.



Fonte: HUTTON (2005).

Essas equações podem ser compactadas sob a forma

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

onde

$$k_{ij} = k_{ji} = EI \int_0^L \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.21)$$

Efeutando as integrações obtém-se os coeficientes de rigidez

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{12EI}{L^3} & k_{22} &= \frac{4EI}{L} & k_{33} &= \frac{12EI}{L^3} & k_{44} &= \frac{4EI}{L} \\ k_{12} &= k_{21} = \frac{6EI}{L^2} & k_{13} &= k_{31} = -\frac{12EI}{L^3} & k_{14} &= k_{41} = \frac{6EI}{L^2} \\ k_{23} &= k_{32} = -\frac{6EI}{L^2} & k_{24} &= k_{42} = \frac{2EI}{L} & k_{34} &= k_{43} = -\frac{6EI}{L^3} \end{aligned}$$

e a matriz de rigidez da barra flexionada é

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A matriz $[k_e]$ é 4×4 pois a barra tem 4 graus de liberdade (2 por nó).

3.4 Flexão de elemento com carregamento axial

Como os deslocamentos são pequenos em comparação com as dimensões da barra, os efeitos de 2ª ordem são desprezíveis, de modo que a carga axial é independente dos efeitos de flexão. Com isso as Equações (3.6) e (3.20) podem ser unificadas como

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

ou de forma compacta

$$\begin{bmatrix} [k_{axial}] & [0] \\ [0] & [k_{flexão}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{axial}\} \\ \{u_{flexão}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{axial}\} \\ \{f_{flexão}\} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

A Equação (3.23) pode ser escrita de uma forma mais conveniente como

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ F_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

De forma abreviada

$$[k_e]\{u\} = \{f\} \quad (3.26)$$

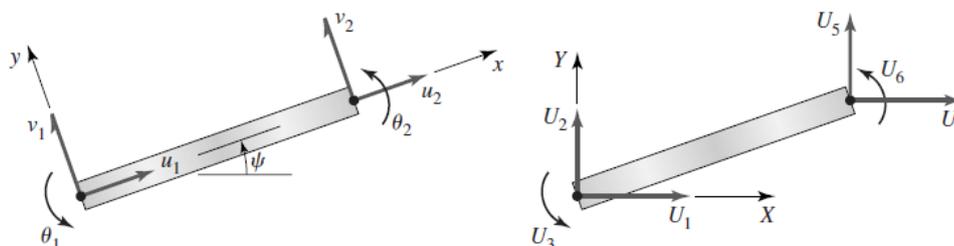
em que $[k_e]$ é a matriz de rigidez da barra, $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{f\}$ é a matriz de esforços nodais. $[k_e]$ é do tipo 6×6 , pois possui 6 graus de liberdade. Em geral: se uma barra possui g graus de liberdade por nó, sua matriz de rigidez é do tipo $2g \times 2g$.

3.5 Mudança de coordenadas

Pela Figura 21, os deslocamentos locais $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2$ e θ_2 estão relacionados com os deslocamentos globais U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6 como¹

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos \psi + U_2 \sin \psi \\ v_1 &= -U_1 \sin \psi + U_2 \cos \psi \\ \theta_1 &= U_3 \\ u_2 &= U_4 \cos \psi + U_5 \sin \psi \\ v_2 &= -U_4 \sin \psi + U_5 \cos \psi \\ \theta_2 &= U_6 \end{aligned}$$

Figura 21: Esquerda: Deslocamentos em coordenadas locais. Direita: Deslocamentos em coordenadas globais.



Fonte: HUTTON (2005).

¹ Aqui os deslocamentos ao longo da barra causados por flexão são pequenos, de modo que as relações apresentadas valem com boa aproximação.

Em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

ou em forma abreviada

$$\{u\} = [R]\{U\} \quad (3.28)$$

onde $[R]$ é a matriz de rotação, $\{u\}$ é a matriz de deslocamentos locais e $\{U\}$ é a matriz de deslocamentos globais.

De forma análoga, os esforços nodais locais se relacionam com os globais como (ver Figura 22)

$$F_1 = n_1 \cos \psi - f_1 \text{sen } \psi$$

$$F_2 = n_1 \text{sen } \psi + f_1 \cos \psi$$

$$F_3 = m_1$$

$$F_4 = n_2 \cos \psi - f_2 \text{sen } \psi$$

$$F_5 = n_2 \text{sen } \psi + f_2 \cos \psi$$

$$F_6 = m_2$$

Em forma matricial

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ f_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

ou em forma abreviada

$$\{F\} = [R]^T \{f\} \quad (3.30)$$

onde $\{f\}$ é a matriz de esforços nodais locais e $\{F\}$ é a matriz de esforços nodais globais.

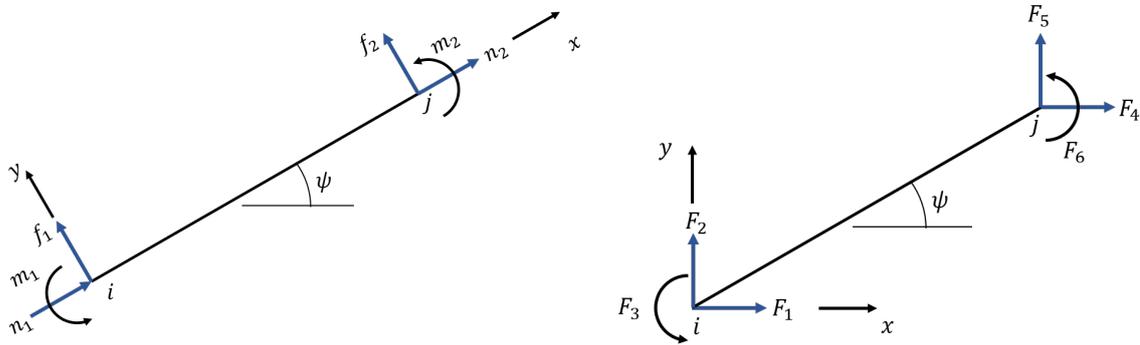
Da Equação (3.26)

$$[k_e]\{u\} = \{f\}$$

multiplicando ambos os membros por $[R]^T$ e aplicando as Equações (3.28) e (3.30) obtém-se

$$[R]^T [k_e] \{u\} = [R]^T \{f\} \Rightarrow [R]^T [k_e] [R] \{U\} = \{F\}$$

Figura 22: Esquerda: Esforços nodais em coordenadas locais. Direita: Esforços nodais em coordenadas globais.



Fonte: O autor.

$$\therefore [K_e]\{U\} = \{F\} \quad (3.31)$$

onde

$$[K_e] = [R]^T [k_e] [R] \quad (3.32)$$

é a matriz de rigidez da barra em coordenadas globais.

Como a matriz $[R]$ é ortogonal, isto é, $[R]^{-1} = [R]^T$, valem as relações

$$\{U\} = [R]^T \{u\} \quad \text{e} \quad \{f\} = [R]\{F\} \quad (3.33)$$

A inclinação da barra em relação às coordenadas globais pode ser obtida por meio das coordenadas nodais dos nós i e j como

$$\cos \psi = \frac{x_j - x_i}{L} \quad \text{sen} \psi = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (3.34)$$

onde

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (3.35)$$

é o comprimento da barra.

3.6 Trabalho equivalente para carregamentos distribuídos

Uma das hipóteses para a aplicação das formulações anteriores é que as barras sejam carregadas somente nos nós. Caso haja carregamentos distribuídos, pode-se contornar essa restrição do seguinte modo: substituir a carga distribuída por forças nodais e momentos tais que o trabalho realizado pelo sistema de carga nodal seja equivalente ao trabalho realizado pela carga distribuída. O trabalho realizado por uma carga transversal $q(x)$ é

$$W = \int_0^L q(x)v(x)dx \quad (3.36)$$

deve ser igual a

$$W = f_{1q}v_1 + m_{1q}\theta_1 + f_{2q}v_2 + m_{2q}\theta_2 \quad (3.37)$$

onde f_{1q} , m_{1q} , f_{2q} e m_{2q} são os esforços nodais cujo trabalho é igual ao realizado por $q(x)$. Substituindo (3.13):

$$\int_0^L q(x)[N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2]dx = f_{1q}v_1 + m_{1q}\theta_1 + f_{2q}v_2 + m_{2q}\theta_2$$

Por comparação

$$f_{1q} = \int_0^L q(x)N_1(x)dx \quad (3.38)$$

$$f_{2q} = \int_0^L q(x)N_3(x)dx \quad (3.39)$$

$$m_{1q} = \int_0^L q(x)N_2(x)dx \quad (3.40)$$

$$m_{2q} = \int_0^L q(x)N_4(x)dx \quad (3.41)$$

De forma análoga para carregamento distribuído axial $p(x)$

$$W = \int_0^L p(x)u(x)dx = \int_0^L p(x) \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2 \right] dx = n_{1q}u_1 + n_{2q}u_2$$

$$n_{1q} = \int_0^L p(x) \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \quad n_{2q} = \int_0^L p(x) \frac{x}{L} dx \quad (3.42)$$

3.7 Convenção de sinais

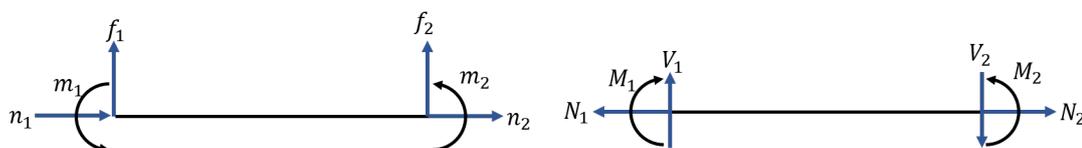
Observando a Figura 23 vê-se que os esforços obtidos pela formulação precedente devem ter seus sinais alterados para a convenção usada na teoria dos materiais para esforços cortantes, normais e momentos fletores da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} -n_1 \\ f_1 \\ -m_1 \\ n_2 \\ -f_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

3.8 Montagem da matriz de rigidez global

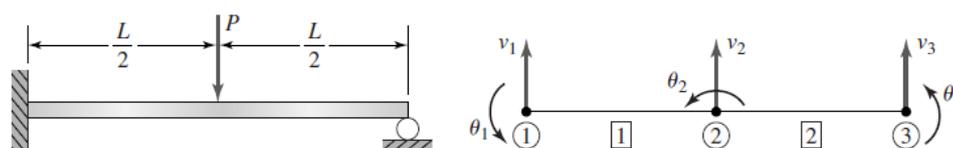
Considere como exemplo a estrutura indeterminada da Figura 24. O objetivo é determinar os deslocamentos e as reações de apoio.

Figura 23: Esquerda: Convenção de sinais pelo teorema de Castigliano. Direita: Convenção de sinais pela teoria dos materiais.



Fonte: O autor.

Figura 24: Esquerda: Estrutura exemplo. Direita: Designação de elementos e deslocamentos.



Fonte: HUTTON (2005).

Como o carregamento só pode ser aplicado nos nós, a barra é dividida em duas, com a carga P aplicada no nó 2. As matrizes de rigidez de cada barra são

$$[K^{(1)}] = [K^{(2)}] = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$

originando as equações

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ m_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ m_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ m_3^{(2)} \\ f_3^{(2)} \\ m_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

As matrizes $[K^{(1)}]$ e $[K^{(2)}]$ são 4×4 pois não há carregamento axial, originando 4 graus de liberdade por barra. As condições de contorno são

$$v_1 = \theta_1 = v_3 = 0 \tag{3.44}$$

Os esforços resultantes nos nós são

$$F_1 = f_1^{(1)} \quad M_1 = m_1^{(1)} \quad F_2 = f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \quad M_2 = m_2^{(1)} + m_2^{(2)} \quad F_3 = f_3^{(2)} \quad M_3 = m_3^{(2)}$$

Efetuada as somas, as equações obtidas podem ser sintetizadas em forma matricial como

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L & 0 & 0 \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -96 & -24L & 192 & 0 & -96 & 24L \\ 24L & 4L^2 & 0 & 16L^2 & -24L & 4L^2 \\ 0 & 0 & -96 & -24L & 96 & 24L \\ 0 & 0 & 24L & 4L^2 & 24L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Aplicando as condições de contorno (3.44) obtém-se o sistema reduzido

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 192 & 0 & 24L \\ 0 & 16L^2 & 4L^2 \\ 24L & 4L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

obtendo os deslocamentos nodais

$$v_2 = \frac{-7PL^3}{768EI} \quad \theta_2 = \frac{-PL^2}{128EI} \quad \theta_3 = \frac{PL^2}{32EI}$$

As reações são obtidas substituindo os deslocamentos calculados no sistema (3.45)

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{EI}{L^3}(-96v_2 + 24L\theta_2) = \frac{11P}{16} \\ F_3 &= \frac{EI}{L^3}(-96v_2 - 24L\theta_2 - 24L\theta_3) = \frac{5P}{16} \\ M_1 &= \frac{EI}{L^3}(-24Lv_2 + 4L^2\theta_2) = \frac{3PL}{16} \end{aligned}$$

O leitor poderá checar as condições de equilíbrio.

Perceba que no sistema (3.45), os coeficientes de rigidez correspondentes ao nó 2 são obtidos pela soma dos coeficientes correspondentes nas barras 1 e 2. Isso nos fornece um procedimento para o cálculo dos coeficientes de rigidez globais.

Para cada barra com extremidades nos nós i e j é associado um *vetor de localização de deslocamentos* $[L_e]_{1 \times 2g}$, em que g é o número de graus de liberdade por nó. Esse vetor contém as numerações dos deslocamentos nodais.

Cada elemento K_{pq} da matriz de rigidez global $[K]$ é obtido da seguinte forma: localizam-se os elementos p e q do vetor $[L_e]$. O elemento p está na posição r e o q está na posição s . Daí localiza-se o elemento $k_{e,rs}$ da matriz de rigidez da barra. Efetua-se esse procedimento para cada barra da estrutura e somam-se os resultados para obter K_{pq} . Se p e/ou q não estiver presente em $[L_e]$, desconsidera-se $k_{e,rs}$.

Será obtida uma equação da forma

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.46)$$

em que $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\{U\}$ é a matriz de deslocamentos nodais globais e $\{F\}$ é a matriz de esforços nodais globais (resultantes de cada nó).

Teorema 3.1 A matriz de rigidez global $[K]$ possui as seguintes propriedades:

- a) é singular, isto é, não é invertível;
 b) é simétrica.

Demonstração:

- a) Como foi visto no capítulo anterior, K_{ij} é o esforço necessário na direção i para provocar um deslocamento unitário na direção j mantendo os deslocamentos restantes nulos. Isso significa que a j -ésima coluna de $[K]$ é o conjunto de forças generalizadas (em coordenadas globais) necessária para equilibrar a estrutura quando é aplicado um deslocamento unitário na direção j e as demais deslocabilidades com valor nulo, o que implica que o somatório de todos os esforços na direção j deve ser nulo; logo, o somatório de todos os elementos da coluna j da matriz $[K]$ é nulo para qualquer j . Isso significa que as linhas de $[K]$ são linearmente dependentes. Portanto $[K]$ não é invertível;

- b) Decorre do teorema de Betti-Maxwell. □

Perceba que $[K]$ é uma matriz quadrada de ordem ng , onde n é o número de nós da estrutura e g é o número de graus de liberdade por nó.

Como a Equação (3.46) possui elementos conhecidos e desconhecidos nas matrizes $\{U\}$ e $\{F\}$, um meio de resolvê-la é particionando-a em blocos como

$$\begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{ra}] \\ [K_{ar}] & [K_{aa}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_r\} \\ \{U_a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_r\} \\ \{F_a\} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

onde

- $\{U_r\}$: vetor de deslocamentos restringidos;
- $\{F_r\}$: vetor de esforços restringidos (reações);
- $\{U_a\}$: vetor de deslocamentos ativos (deslocabilidades);
- $\{F_a\}$: vetor de esforços ativos (ações).

Desenvolvendo (3.47)

$$[K_{rr}]\{U_r\} + [K_{ra}]\{U_a\} = \{F_r\}$$

$$[K_{ar}]\{U_r\} + [K_{aa}]\{U_a\} = \{F_a\}$$

Sendo $\{U_a\}$ e $\{F_r\}$ incógnitas e $\{U_r\}$ e $\{F_a\}$ conhecidas:

$$\{U_a\} = [K_{aa}]^{-1}(\{F_a\} - [K_{ar}]\{U_r\}) \quad (3.48)$$

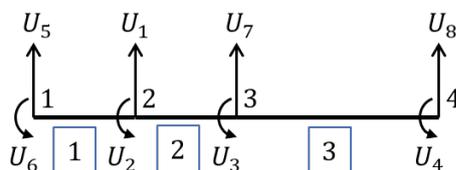
$$\{F_r\} = [K_{rr}]\{U_r\} + [K_{ra}]\{U_a\} \quad (3.49)$$

Pode-se também fazer o inverso: numerar primeiramente os deslocamentos ativos e em seguida os restringidos. O resultado final é o mesmo.

Exemplo:

Será tomado novamente como exemplo a viga do capítulo anterior. A numeração dos deslocamentos nodais será feita como mostrado na Figura 25 considerando $g = 2$ (pois não existe carregamento axial).

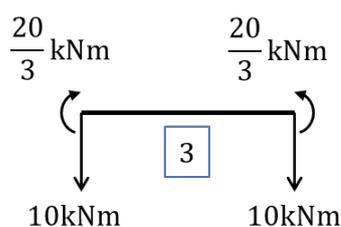
Figura 25: Numeração dos deslocamentos nodais da viga exemplo.



Fonte: O autor.

Para a barra 3, as cargas nodais equivalentes são obtidas por meio das Equações (3.38) a (3.41), resultando nas cargas mostradas na Figura 26.

Figura 26: Cargas nodais equivalentes da barra 3 da viga exemplo.



Fonte: O autor.

As matrizes de rigidez das barras são

$$k^{(1)} = k^{(2)} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$k^{(3)} = EI \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.375 & -0.1875 & 0.375 \\ 0.375 & 1 & -0.375 & 0.5 \\ -0.1875 & -0.375 & 0.1875 & -0.375 \\ 0.375 & 0.5 & -0.375 & 1 \end{bmatrix}$$

cujos vetores de localização são

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad [L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad [L_3] = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, os coeficientes de rigidez globais são obtidos por meio dos vetores de localização como:

$$K_{11} = k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} = 24 \quad K_{22} = k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)} = 8 \quad K_{33} = k_{44}^{(2)} + k_{22}^{(3)} = 5 \quad K_{44} = k_{44}^{(3)} = 1$$

$$\begin{aligned}
K_{55} = k_{11}^{(1)} = 12 \quad K_{66} = k_{22}^{(1)} = 4 \quad K_{77} = k_{33}^{(2)} + k_{11}^{(3)} = 12.1875 \quad K_{88} = k_{33}^{(3)} = 0.1875 \\
K_{12} = K_{21} = k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} = 0 \quad K_{13} = K_{31} = k_{14}^{(2)} = 6 \quad K_{14} = K_{41} = 0 \\
K_{15} = K_{51} = k_{31}^{(1)} = -12 \quad K_{16} = K_{61} = k_{32}^{(1)} = -6 \quad K_{17} = K_{71} = k_{13}^{(2)} = -12 \\
K_{18} = K_{81} = 0 \quad K_{23} = K_{32} = k_{34}^{(2)} = 2 \quad K_{24} = K_{42} = 0 \quad K_{25} = K_{52} = k_{41}^{(1)} = 6 \\
K_{26} = K_{62} = k_{42}^{(1)} = 2 \quad K_{27} = K_{72} = k_{32}^{(2)} = -6 \quad K_{28} = K_{82} = 0 \\
K_{34} = K_{43} = k_{24}^{(3)} = 0.5 \quad K_{35} = K_{53} = 0 \quad K_{36} = K_{63} = 0 \\
K_{37} = K_{73} = k_{43}^{(2)} + k_{21}^{(3)} = -5.625 \quad K_{38} = K_{83} = k_{23}^{(3)} = -0.375 \\
K_{45} = K_{54} = 0 \quad K_{46} = K_{64} = 0 \quad K_{47} = K_{74} = k_{41}^{(3)} = 0.375 \quad K_{48} = K_{84} = k_{43}^{(3)} = -0.375 \\
K_{56} = K_{65} = k_{21}^{(1)} = 6 \quad K_{57} = K_{75} = 0 \quad K_{58} = K_{85} = 0 \\
K_{67} = K_{76} = 0 \quad K_{68} = K_{86} = 0 \quad K_{78} = K_{87} = k_{31}^{(3)} = -0.1875
\end{aligned}$$

obtendo a equação matricial

$$EI \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6 & 0 & -12 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 6 & 2 & -6 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 0.5 & 0 & 0 & -5.625 & -0.375 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0.375 & -0.375 \\ -12 & 6 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & -5.625 & 0.375 & 0 & 0 & 12.1875 & -0.1875 \\ 0 & 0 & -0.375 & -0.375 & 0 & 0 & -0.1875 & 0.1875 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ -20/3 \\ 20/3 \\ R_5 \\ R_6 \\ -10 + R_7 \\ -10 + R_8 \end{Bmatrix}$$

em que R_5 , R_6 , R_7 e R_8 são as reações de apoio nas direções 5, 6, 7 e 8. Os deslocamentos são calculados como

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ -20/3 \\ 20/3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.2652 \\ 0.6816 \\ -2.7273 \\ 8.0303 \end{Bmatrix}$$

e as reações de apoio

$$\begin{Bmatrix} R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -12 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & -5.625 & 0.375 \\ 0 & 0 & -0.375 & -0.375 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.2652 \\ 0.6816 \\ -2.7273 \\ 8.0303 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ -10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.91\text{kN} \\ -0.23\text{kNm} \\ 21.1\text{kN} \\ 8.01\text{kN} \end{Bmatrix}$$

Os esforços cortantes e momentos fletores nos nós podem ser obtidos aplicando as equações (3.26) e (3.43).

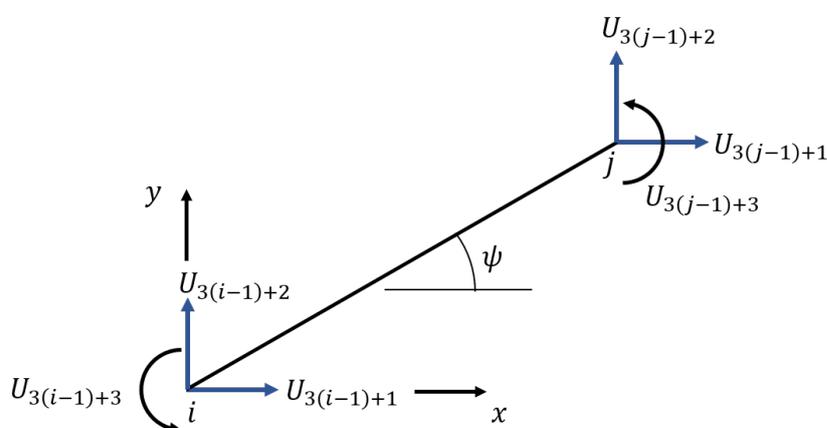
Observe que os valores são próximos dos obtidos pelos métodos apresentados no capítulo anterior.

Contudo, existe um inconveniente na Equação (3.47): deve ser feita a numeração dos deslocamentos restringidos e depois os ativos ou vice-versa (feita manualmente) e depois são aplicadas as equações (3.48) e (3.49); ou é mantida uma numeração padrão (feita pelo computador) e em seguida é feita uma reordenação das linhas e colunas das matrizes na Equação (3.46) para ficar no formato da Equação (3.47). Neste trabalho foi tomada a segunda abordagem.

3.9 Vetor de localização

Os deslocamentos dos nós i e j serão numerados como mostrado na Figura 27, com $g = 3$.

Figura 27: Numeração dos deslocamentos globais.



Fonte: O autor.

O vetor de localização da barra é

$$[L_e] = \begin{bmatrix} 3(i-1)+1 & 3(i-1)+2 & 3(i-1)+3 & 3(j-1)+1 & 3(j-1)+2 & 3(j-1)+3 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Para $g = 2$, o vetor de localização é tomado como

$$[L_e] = \begin{bmatrix} 2(i-1)+1 & 2(i-1)+2 & 2(j-1)+1 & 2(j-1)+2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

3.10 Método dos zeros e uns

Uma vez feita a numeração dos deslocamentos, deve ser feita a reordenação das linhas e colunas das matrizes na Equação (3.46), porém isso é pouco prático. Será feita uma modificação na Equação (3.46) de forma a não ser necessária a reordenação de seus elementos. Seja U_p um

deslocamento prescrito (não necessariamente nulo). A Equação (3.46) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,p-1} & 0 & K_{1,p+1} & \cdots & K_{1,ng} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{p-1,1} & \cdots & K_{p-1,p-1} & 0 & K_{p-1,p+1} & \cdots & K_{p-1,ng} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{p+1,1} & \cdots & K_{p+1,p-1} & 0 & K_{p+1,p+1} & \cdots & K_{p+1,ng} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ng,1} & \cdots & K_{ng,p-1} & 0 & K_{ng,p+1} & \cdots & K_{ng,ng} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{p-1} \\ U_p \\ U_{p+1} \\ \vdots \\ U_{ng} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1,p}U_p \\ \vdots \\ F_{p-1} - K_{p-1,p}U_p \\ U_p \\ F_{p+1} - K_{p+1,p}U_p \\ \vdots \\ F_{ng} - K_{ng,p}U_p \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

ou

$$[K_{zeros}]\{U\} = \{F_{zeros}\}$$

Se houver mais de um deslocamento prescrito, pode-se aplicar (3.52) sucessivamente, obtendo

$$\{U\} = [K_{zeros}]^{-1}\{F_{zeros}\} \quad (3.53)$$

Os esforços globais são obtidos como

$$F_j = \sum_{k=1}^{ng} K_{jk}U_k \quad (3.54)$$

e as reações de apoio como

$$R_j = F_j - FNC_j \quad (3.55)$$

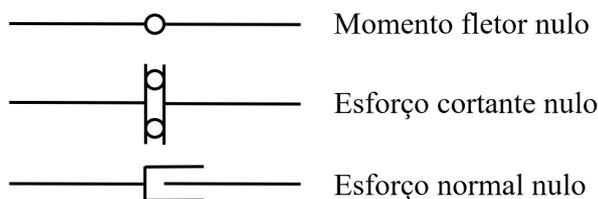
em que FNC_j é a *força nodal combinada* na direção j (resultante das cargas nodais globais na direção j).

3.11 Articulações em extremidade de barra

As *articulações* são mecanismos que permitem deslocamentos entre extremidades de barras ou entre essas extremidades e o meio exterior à estrutura, de modo a anular os esforços nas direções desses deslocamentos. (SORIANO, 2005)

Uma articulação é *simples* quando anula apenas um esforço. Quando anula vários esforços, é chamada *múltipla*.

Figura 28: Representação estrutural de articulações.



Fonte: Adaptado de SORIANO (2005).

O vetor de esforços da barra i em coordenadas locais é

$$\{f^{(i)}\} = [k_e^{(i)}] \{u^{(i)}\} - \{fne^{(i)}\} \quad (3.56)$$

onde $\{fne^{(i)}\}$ é o vetor de *forças nodais equivalentes* em coordenadas locais da barra i . A j -ésima equação desse sistema é

$$f_j^{(i)} = \sum_{k=1}^{2g} k_{ejk}^{(i)} u_k^{(i)} - fne_j^{(i)} \quad (3.57)$$

Considerando uma articulação que libera o deslocamento da direção l tem-se

$$f_l^{(i)} = 0 = \sum_{k=1}^{l-1} k_{e lk}^{(i)} u_k^{(i)} + k_{e ll}^{(i)} u_l^{(i)} + \sum_{k=l+1}^{2g} k_{e lk}^{(i)} u_k^{(i)} - fne_l^{(i)}$$

obtendo o deslocamento $u_l^{(i)}$

$$u_l^{(i)} = \frac{-1}{k_{e ll}^{(i)}} \left(\sum_{k=1}^{l-1} k_{e lk}^{(i)} u_k^{(i)} + \sum_{k=l+1}^{2g} k_{e lk}^{(i)} u_k^{(i)} - fne_l^{(i)} \right) \quad (3.58)$$

Substituindo este resultado em (3.57) e organizando os termos obtém-se, para $j \neq l$

$$f_j^{(i)} = \sum_{k=1}^{l-1} k'_{e lk}^{(i)} u_k^{(i)} + \sum_{k=l+1}^{2g} k'_{e lk}^{(i)} u_k^{(i)} - fne'_l{}^{(i)} \quad (3.59)$$

em que

$$k'_{e jk}{}^{(i)} = k_{e jk}{}^{(i)} - \frac{k_{e jl}^{(i)}}{k_{e ll}^{(i)}} k_{e lk}{}^{(i)} \quad (3.60)$$

$$fne'_j{}^{(i)} = fne_j^{(i)} - \frac{k_{e jl}^{(i)}}{k_{e ll}^{(i)}} fne_l^{(i)} \quad (3.61)$$

Em forma matricial

$$\{f^{(i)}\} = [k'^{(i)}] \{u^{(i)}\} - \{fne'^{(i)}\} \quad (3.62)$$

onde

$$[k'^{(i)}] = \begin{bmatrix} k'_{11}{}^{(i)} & \cdots & k'_{1,l-1}{}^{(i)} & 0 & k'_{1,l+1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{1,2g}{}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k'_{l-1,1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{l-1,l-1}{}^{(i)} & 0 & k'_{l-1,l+1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{l-1,2g}{}^{(i)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k'_{l+1,1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{l+1,l-1}{}^{(i)} & 0 & k'_{l+1,l+1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{l+1,2g}{}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k'_{2g,1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{2g,l-1}{}^{(i)} & 0 & k'_{2g,l+1}{}^{(i)} & \cdots & k'_{2g,2g}{}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{fne'^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} fne'_1{}^{(i)} \\ \vdots \\ fne'_{l-1}{}^{(i)} \\ 0 \\ fne'_{l+1}{}^{(i)} \\ \vdots \\ fne'_{2g}{}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Caso haja articulação em mais de uma direção, realiza-se o procedimento anterior de forma sucessiva.

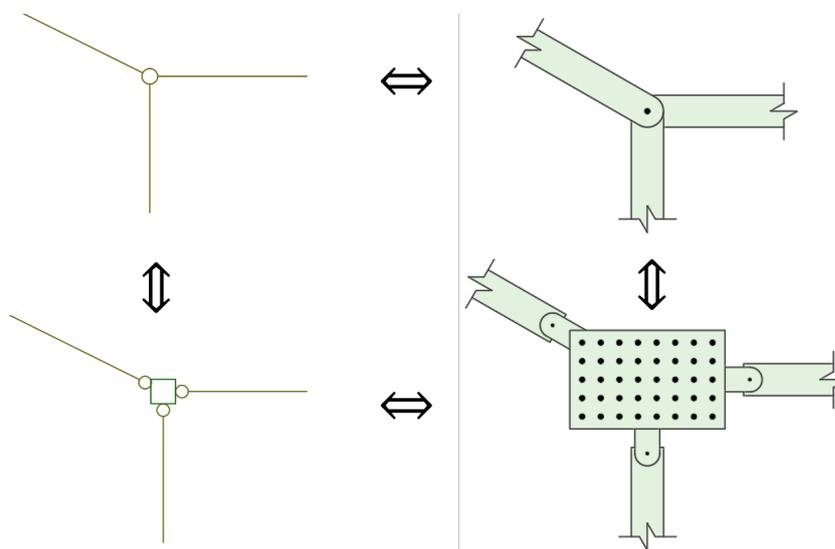
Na montagem das matrizes de rigidez e de forças da estrutura devem ser utilizadas as matrizes $[k^{(i)}]$ e $\{fne^{(i)}\}$.

Suponha que exista uma articulação que libera um deslocamento de índice global l das extremidades de **todas** as barras que interceptam esse nó. Os elementos das matrizes linha correspondentes ao índice l serão nulos e a Equação (3.46) toma a forma

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1,l-1} & 0 & K_{1,l+1} & \cdots & K_{1,ng} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{l-1,1} & \cdots & K_{l-1,l-1} & 0 & K_{l-1,l+1} & \cdots & K_{l-1,ng} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{l+1,1} & \cdots & K_{l+1,l-1} & 0 & K_{l+1,l+1} & \cdots & K_{l+1,ng} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ng,1} & \cdots & K_{ng,l-1} & 0 & K_{ng,l+1} & \cdots & K_{ng,ng} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{l-1} \\ U_l \\ U_{l+1} \\ \vdots \\ U_{ng} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{l-1} \\ 0 \\ F_{l+1} \\ \vdots \\ F_{ng} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

que forma um sistema indeterminado a menos que U_l seja pré-definido. Pode-se atribuir $U_l = 0$ e depois corrigir usando a Equação (3.58)². É como se inserisse um apoio fictício restringindo os deslocamentos na direção l e articulando as barras correspondentes. O modelo estrutural é virtualmente o mesmo em ambos os casos e a (3.64) torna-se solúvel.

Figura 29: Equivalência de articulações tipo rótula. Esquerda: Modelo estrutural. Direita: Mecanismo físico.



Fonte: O autor.

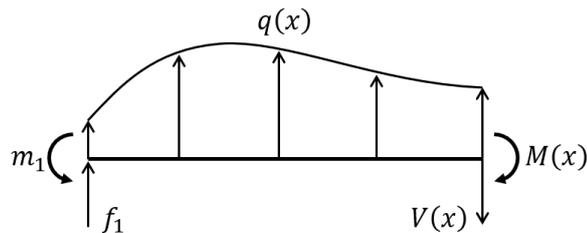
² Só se for necessário determinar as deformações da estrutura.

3.12 Diagramas

3.12.1 Cortante, normal e fletor

Considere o trecho de barra sujeito a um carregamento distribuído transversal $q(x)$ e aos esforços nodais M_1 e F_1 como mostrado na Figura 30.

Figura 30: Carregamento transversal distribuído sobre um trecho de barra.



Fonte: O autor.

Para que a barra esteja em equilíbrio, o esforço cortante $V(x)$ deve ser

$$V(x) = \int_0^x q(t)dt + f_1 \tag{3.65}$$

O momento fletor está relacionado com o esforço cortante como (SÜSSEKIND, 1981a)

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \tag{3.66}$$

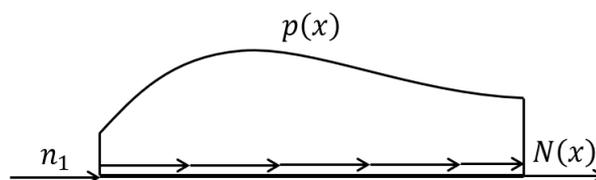
e assim

$$M(x) = \int_0^x V(t)dt + m_1 \tag{3.67}$$

De forma semelhante, considerando um carregamento distribuído axial no trecho de barra da Figura 31, o esforço normal é calculado como

$$N(x) = - \int_0^x p(t)dt - n_1 \tag{3.68}$$

Figura 31: Carregamento axial distribuído sobre um trecho de barra.

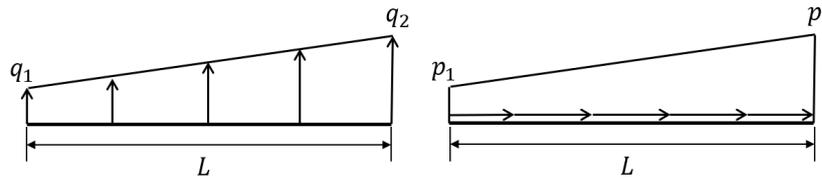


Fonte: O autor.

No presente trabalho serão considerados apenas carregamentos distribuídos lineares, de modo que

$$q(x) = \frac{q_2 - q_1}{L}x + q_1 \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{p_2 - p_1}{L}x + p_1 \tag{3.69}$$

Figura 32: Esquerda: Carregamento transversal linear. Direita: Carregamento axial linear



Fonte: O autor.

Assim, os esforços normais, cortantes e fletores são calculados como³

$$N(x) = - \left(\frac{p_2 - p_1}{2L} x^2 + p_1 + n_1 \right) \quad (3.70)$$

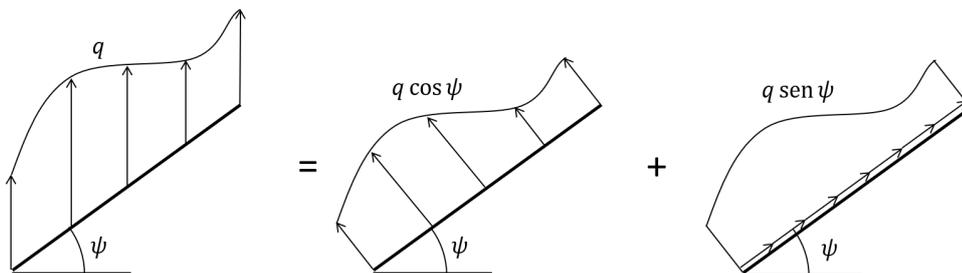
$$V(x) = \frac{q_2 - q_1}{2L} x^2 + q_1 + f_1 \quad (3.71)$$

$$M(x) = \frac{q_2 - q_1}{6L} x^3 + \frac{q_1}{2} x^2 + f_1 x + m_1 \quad (3.72)$$

3.12.2 Cargas distribuídas em coordenadas locais e globais

Um carregamento distribuído pode ser apresentado em coordenadas locais da barra ou em coordenadas globais da estrutura. Se o carregamento for apresentado em coordenadas locais, basta aplicar as formulações apresentadas anteriormente. Se o for apresentado em coordenadas globais, ele pode ser decomposto em suas componentes locais como mostrado na Figura 33.

Figura 33: Decomposição de uma carga distribuída em suas componentes locais.



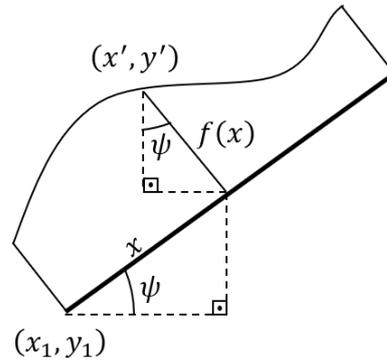
Fonte: O autor.

³ O momento fletor poderia ser calculado usando a relação (A.8) $M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$. Contudo, devido ao fato de a expressão para v ser do 3º grau (de acordo com a Equação (3.12)), $M(x)$ seria uma função do 1º grau. Essa aparente contradição se deve à hipótese de os esforços serem aplicados somente nos nós. Os esforços equivalentes são um macete de cálculo para a consideração de carregamentos distribuídos sem ir contra às condições de contorno (as quais são atendidas nos nós), de modo que o momento fletor numa barra deve ser calculado conforme a Equação (3.72).

3.12.3 Plotando os gráficos

Seja $f(x)$ uma função que representa um tipo de esforço (normal, cortante ou fletor). Objetiva-se traçar seu gráfico na direção da barra. As coordenadas globais (x', y') do seu gráfico podem ser obtidas em termos das locais $(x, f(x))$ como mostrado na Figura 34. Assim

Figura 34: Posicionamento do gráfico de $f(x)$ no desenho da estrutura.



Fonte: O autor.

$$x' = x_1 + x \cos \psi - k \cdot f(x) \sin \psi \quad (3.73)$$

$$y' = y_1 + x \sin \psi + k \cdot f(x) \cos \psi \quad (3.74)$$

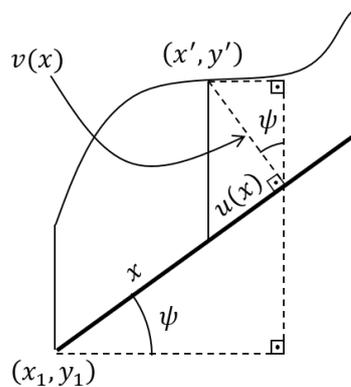
em que (x_1, y_1) são as coordenadas do nó inicial e k é um fator de escala.

De forma semelhante, o desenho da deformada da estrutura pode ser obtido em termos dos deslocamentos u e v como

$$x' = x_1 + (x + k \cdot u(x)) \cos \psi - k \cdot v(x) \sin \psi \quad (3.75)$$

$$y' = y_1 + (x + k \cdot u(x)) \sin \psi + k \cdot v(x) \cos \psi \quad (3.76)$$

Figura 35: Posicionamento da linha deformada da barra.



Fonte: O autor.

3.13 Tensões

As tensões normais atuantes numa barra podem ser obtidas por meio da superposição dos efeitos devidos à tração e compressão, como também aos devidos à flexão.

Dessa forma, a tensão devida a esforços de tração e compressão é

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} \quad (3.77)$$

onde N é o esforço normal e A é a área da seção transversal.

A tensão devida a efeitos de flexão é

$$\sigma_x = -\frac{M(x)}{I}y \quad (3.78)$$

em que M é o momento fletor, I é o momento de inércia da seção e y é a ordenada do ponto de tensão em relação ao centroide da seção.

Portanto

$$\sigma_x(x, y) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M(x)}{I}y \quad (3.79)$$

As tensões máxima e mínima na seção de abscissa x são obtidas fazendo $y = y_{max}$ e $y = y_{min}$. Considerando seções com dois eixos de simetria, tem-se que

$$y_{max} = -y_{min}$$

Logo

$$\sigma_{x,max,min}(x) = \frac{N(x)}{A} \pm \frac{M(x)}{I} \cdot \frac{h}{2} \quad (3.80)$$

onde h é a altura da seção.

Os materiais de construção possuem cargas limite de resistência, as quais são obtidas por ensaios de laboratório, os quais ocorrem até a ruptura do material (GOMES; NETTO, 2016). Sejam f_t e f_c respectivamente as tensões resistentes à tração e à compressão do material de uma barra da estrutura. Para que a estrutura suporte às sollicitações é necessário que

$$\sigma_{t,max} \leq FS \cdot f_t \quad \sigma_{c,max} \leq FS \cdot f_c \quad (3.81)$$

em todas as barras, onde $\sigma_{t,max}$ é a tensão máxima de tração, $\sigma_{c,max}$ é a tração máxima de compressão e $0 < FS < 1$ é um fator de segurança obtido através de normas de cálculo estrutural.

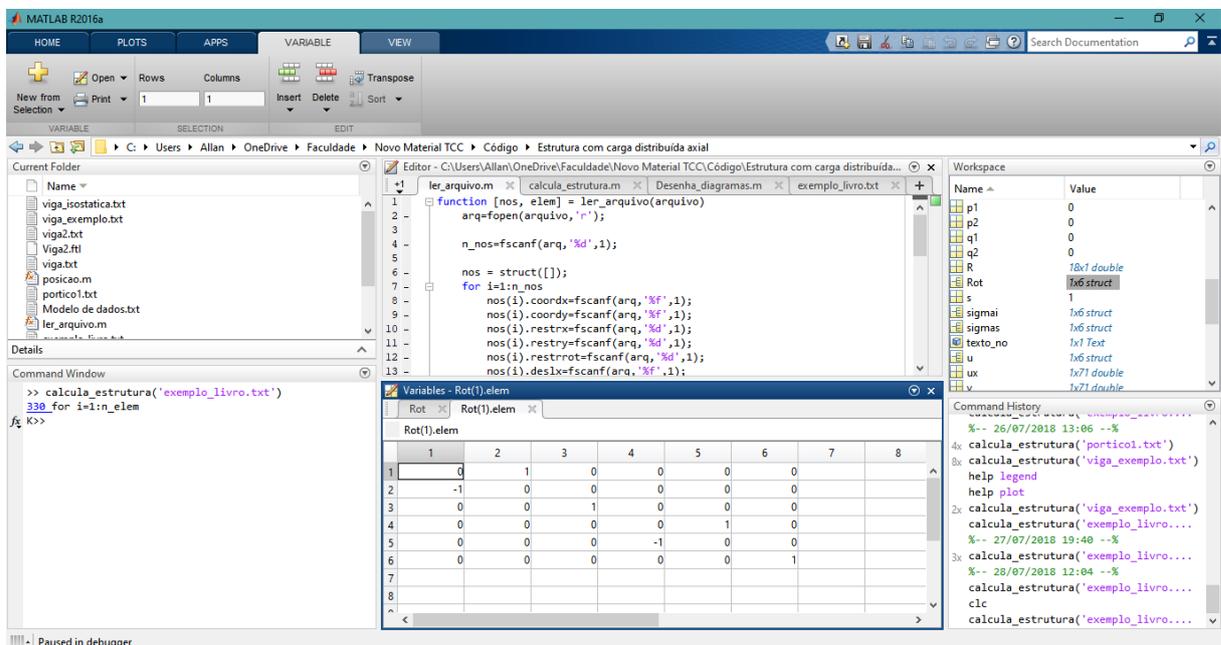
Estruturas sujeitas a compressão axial tendem à ocorrência de flambagem, sendo este fenômeno mais crítico à segurança da estrutura do que a própria tensão de resistência à compressão. No presente trabalho não serão feitas análises sobre estabilidade da estrutura pois fogem ao escopo deste trabalho, sendo assim adotada uma análise simplificada das tensões com base nos critérios de resistência apresentados acima.

4 METODOLOGIA

4.1 MATLAB

O MATLAB (abreviação de MATrix LABoratory – laboratório de matrizes) é um software especializado e otimizado para cálculos científicos e de engenharia. Ele implementa a linguagem de programação MATLAB e possui uma grande biblioteca de funções pré-definidas para resolução de problemas gerais e específicos, o que torna as tarefas de programação mais fáceis e eficientes. (CHAPMAN, 2003)

Figura 36: Interface gráfica do MATLAB.



Fonte: O autor.

Esse software apresenta várias vantagens como: facilidade de uso, independência de plataforma, funções pré-definidas, ampla variedade de comandos para desenhos e imagens, interface gráfica de usuário (GUI), o compilador MATLAB, manipulação de arquivos, manipulação de matrizes dentre outros. (CHAPMAN, 2003)

Pelo fato de o MATLAB permitir grande facilidade de manipulação de matrizes e rapidez nas tarefas, foi o software escolhido para a implementação do método da rigidez direta – afinal, é um método matricial.

4.2 Estrutura do programa

No MATLAB é possível estruturar o código em diferentes arquivos com extensão *.m. Os arquivos de funções devem ser nomeados com os nomes das funções. Por exemplo, se é criada uma função `soma(x,y)`, o arquivo deve ser nomeado como `soma.m`. Essa estruturação permite maior organização do código.

Para a análise de estruturas foi criado um programa cujo código consiste em quatro arquivos de funções:

1. `ler_arquivo`: Realiza a leitura do arquivo de dados;
2. `calcula_estrutura`: Realiza o cálculo dos esforços. Implementa as formulações apresentadas no Capítulo 3;
3. `Desenha_diagramas`: Plota a estrutura, apresentando os diagramas de esforços normais, cortantes e momentos fletores; Plota a deformada da estrutura; Apresenta as tensões atuantes nas barras;
4. `analisa_tensoes`: Faz uma análise das tensões para verificar se a estrutura suporta os esforços aplicados.

4.2.1 Dados de entrada

Os dados de entrada são armazenados num arquivo de texto (extensão .txt). Tal arquivo é dividido em duas partes: Dados dos nós e dados das barras. Tal arquivo possui as seguintes informações:

Nós:

- Número de nós;
- Numeração dos nós (identificadores);
- Coordenadas nodais;
- Restrições de deslocamentos;
- Deslocamentos prescritos;
- Cargas nodais atuantes.

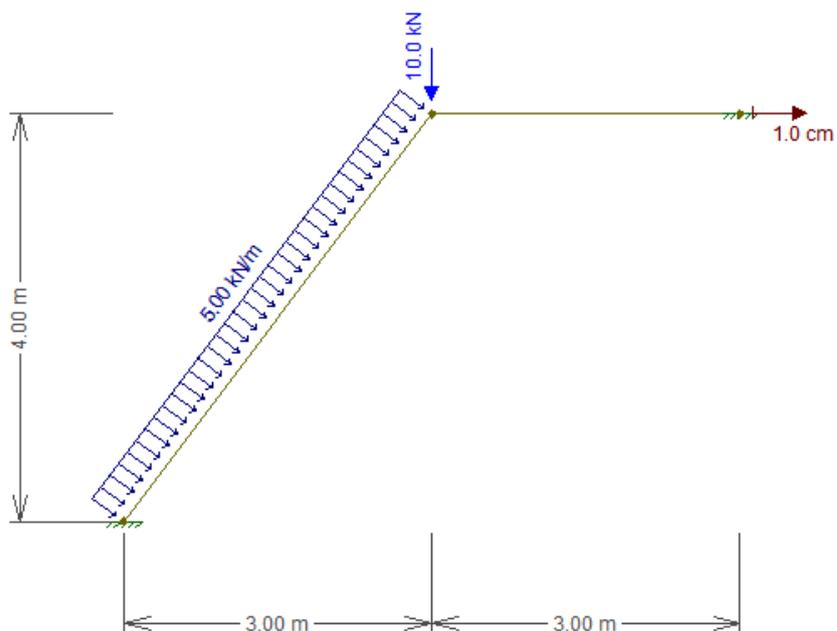
Barras:

- Número de barras;
- Numeração das barras (identificadores);
- Extremidades;

- Articulações;
- Carregamento distribuído linear;
- Direção do carregamento distribuído (local ou global);
- Propriedades do material (módulo de elasticidade, resistência à tração e à compressão);
- Propriedades geométricas da seção transversal.

Por exemplo, considerando a estrutura da Figura 37. Todas as barras possuem módulo de elasticidade de 200 GPa, tensão resistente à tração e à compressão de 400 MPa, seção transversal retangular de 15 cm de base e 20 cm de altura em todas as barras. A estrutura de dados é apresentada nas Tabelas 1, 2 e 3

Figura 37: Exemplo de pórtico.



Fonte: O autor.

O arquivo de dados será da seguinte forma:

```

3
0.0 0.0 1 1 1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3.0 4.0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 -10.0 0.0
6.0 4.0 1 1 1 0.01 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
2
1 2 0 0 0 0 0 0 1 -5.0 -5.0 2.0E8 4.00E-4 4.00E-4 1.00E-4 0.03 0.2
2 3 0 0 0 0 0 0 0 0.0 0.0 2.0E8 4.00E-4 4.00E-4 1.003E-4 0.03 0.2
    
```

Tabela 1: Estrutura de dados nodais.

ID	x (m)	y (m)	Restrições		Deslocamentos (m)				Fx (kN)	Fy (kN)	Mz (kNm)
			Horizontal	Vertical	Rotacional	Horizontal	Vertical	Rotacional			
1	0	0	Sim	Sim	0	0	0	0	0	0	0
2	3	4	Não	Não	0	0	0	0	0	-10	0
3	6	4	Sim	Sim	0,01	0	0	0	0	0	0

Fonte: O autor.

Tabela 2: Estrutura de dados das barras parte 1.

ID	Nó inicial	Nó final	Articulação nó inicial			Articulação nó final		
			Horizontal	Vertical	Rotação	Horizontal	Vertical	Rotação
1	1	2	Não	Não	Não	Não	Não	Não
2	2	3	Não	Não	Não	Não	Não	Não

Fonte: O autor.

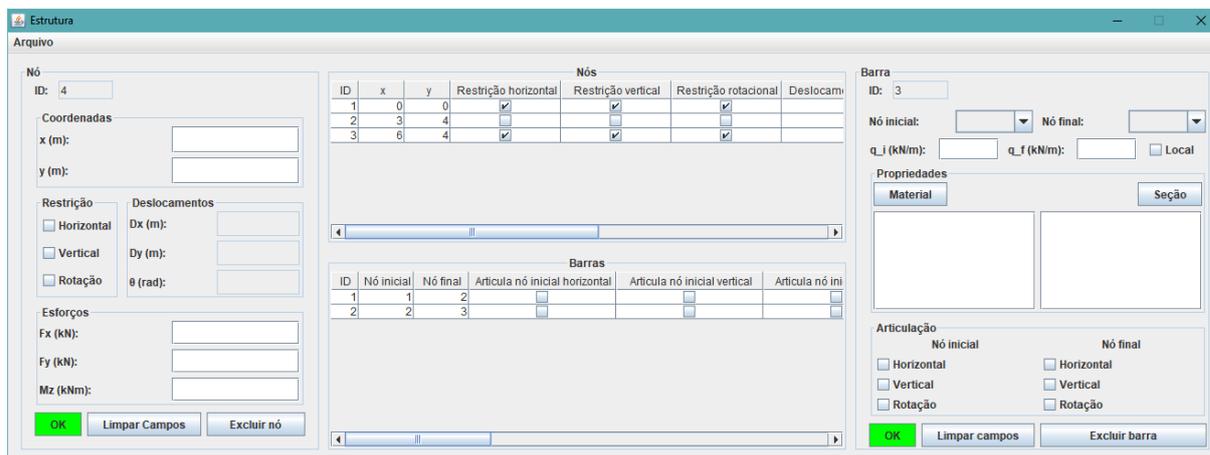
Tabela 3: Estrutura de dados das barras parte 2.

ID	Direção da carga linear	Carga início (kN/m)	Carga fim (kN/m)	E (kN/m ²)	Resistência à tração (kN/m ²)	Resistência à compressão (kN/m ²)	I (m ⁴)	A (m ²)	h (m)
1	Local	-5	-5	2.00E+8	4.00E+6	4.00E+6	1.00E-4	0.03	0.2
2	Local	0	0	2.00E+8	4.00E+6	4.00E+6	1.00E-4	0.03	0.2

Fonte: O autor.

Para facilitar a criação e manipulação do arquivo de dados, foi criada uma interface gráfica em Java que permite realizar a inserção dos dados dos nós e das barras da estrutura. Apesar de o MATLAB fornecer ferramentas para GUI (Graphical User Interface), optou-se por Java pelo fato de o autor deste trabalho ter maior domínio sobre essa linguagem de programação.

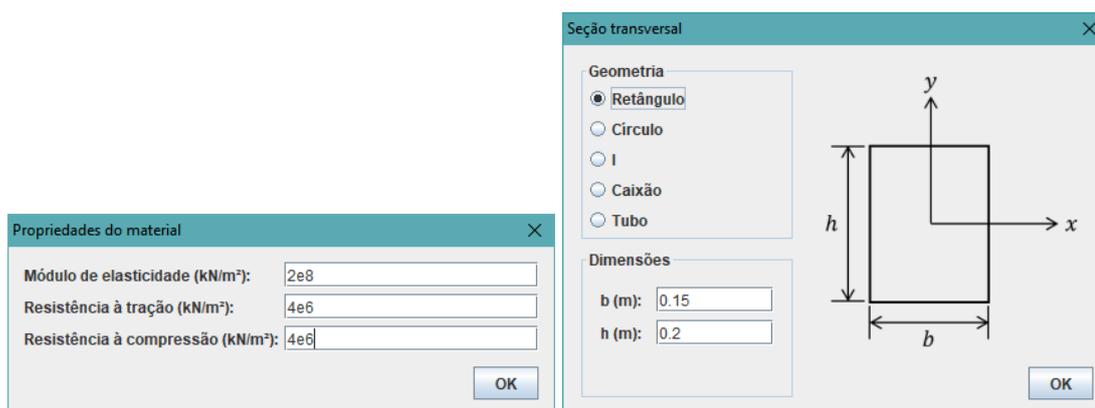
Figura 38: Interface gráfica utilizada na criação e manipulação de dados.



Fonte: O autor.

Nessa aplicação é possível criar, salvar e editar os arquivos de dados utilizados no programa em MATLAB. Também é possível escolher a geometria da seção transversal. Para facilitar as análises, foram consideradas apenas seções com dois eixos de simetria. São elas: retângulo, círculo, I, caixão e tubo.

Figura 39: Esquerda: Caixa de diálogo com propriedades do material. Direita: Caixa de diálogo com seções transversais.



Fonte: O autor.

O arquivo de dados é lido por um arquivo de função chamado ler_arquivo. Tal leitura é feita pelo comando fscanf(arquivo, formato de dado, número de caracteres lidos). Os dados são armazenados em structs (estruturas). Um struct é um tipo de dado em que cada elemento recebe um nome (CHAPMAN, 2003). Neste trabalho foram criadas duas

estruturas de dados: `nos`, que armazena os dados nodais, e `elem`, que armazena os dados das barras. Os detalhes são mostrados na Figura 40.

Figura 40: Estrutura de dados do programa.

<code>nos</code>		<code>elem</code>	
<code>coordx</code>	(coordenada x)	<code>noi</code>	(nó inicial)
<code>coordy</code>	(coordenada y)	<code>noi</code>	(nó final)
<code>restrx</code>	(restrição na direção x)	<code>libera_xi</code>	(libera deslocamento na direção x do nó inicial)
<code>restry</code>	(restrição na direção y)	<code>libera_yi</code>	(libera deslocamento na direção y do nó inicial)
<code>restrrot</code>	(restrição de rotação)	<code>libera_roti</code>	(libera rotação no nó inicial)
<code>deslx</code>	(deslocamento em x)	<code>libera_xf</code>	(libera deslocamento na direção x do nó final)
<code>desly</code>	(deslocamento em y)	<code>libera_yf</code>	(libera deslocamento na direção y do nó final)
<code>rotz</code>	(rotação)	<code>libera_rotf</code>	(libera rotação no nó final)
<code>Fx</code>	(força em x)	<code>local</code>	(direção do carregamento distribuído)
<code>Fy</code>	(força em y)	<code>Qi</code>	(carga no nó inicial)
<code>Mz</code>	(momento)	<code>Qf</code>	(carga no nó final)
		<code>E</code>	(módulo de elasticidade)
		<code>sigmat</code>	(tensão de resistência à tração)
		<code>sigmac</code>	(tensão de resistência à compressão)
		<code>I</code>	(momento de inércia)
		<code>A</code>	(área da seção transversal)
		<code>h</code>	(altura da seção transversal)

Fonte: O autor.

4.2.2 Cálculo da estrutura

Os cálculos dos esforços são executados na função `calcula_estrutura`. Os algoritmos implementados foram baseados nos apresentados por [SORIANO \(2005\)](#). Tal arquivo apresenta a seguinte sequência de cálculos:

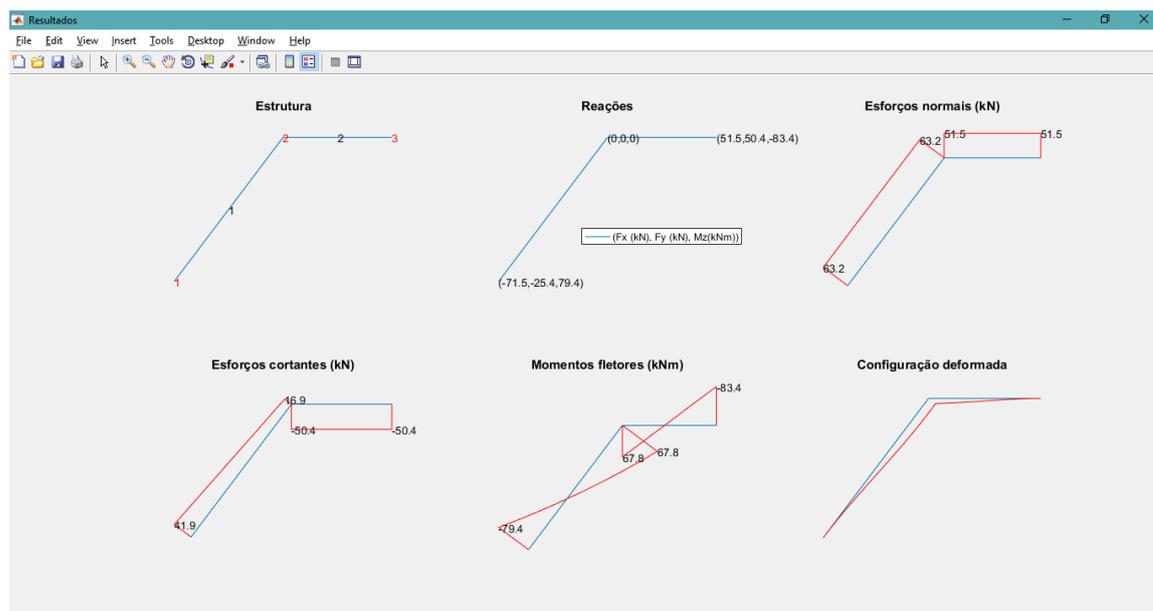
1. Dados iniciais: criação das estruturas `nos` e `elem` com auxílio da função `ler_arquivo`, definição no número de nós, do número de barras e do número de graus de liberdade por nó;
2. Matriz de direções restringidas;
3. Matriz de deslocamentos prescritos;
4. Matriz de forças nodais;
5. Vetores de localização;
6. Matriz de rotação;
7. Matrizes de forças nodais equivalentes dos elementos em coordenadas locais;
8. Montagem das matrizes de rigidez dos elementos em coordenadas locais;
9. Matriz de liberação de deslocamentos nas extremidades dos elementos (para a consideração de articulações);

10. Modificação das matrizes de rigidez das barras e de forças nodais equivalentes para inclusão de articulações;
11. Matriz de forças nodais equivalentes em coordenadas globais;
12. Matriz de forças nodais equivalentes da estrutura;
13. Matriz de forças nodais combinadas (resultantes);
14. Montagem das matrizes de rigidez das barras em coordenadas globais;
15. Montagem da matriz de rigidez global;
16. Método dos zeros e uns para determinação da matriz de deslocamentos nodais globais;
17. Matrizes de esforços nas barras e de deslocamentos em coordenadas locais (utilizados na plotagem dos diagramas e da deformada da estrutura).

4.2.3 Apresentação dos resultados

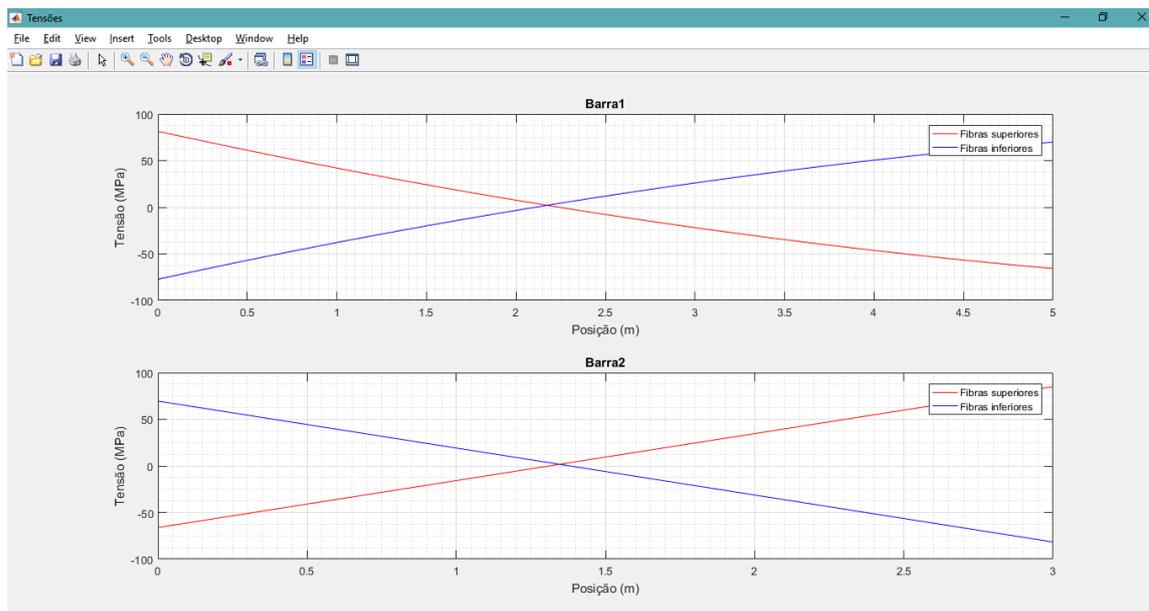
Os resultados das análises são apresentados em três partes: Diagramas de esforços, em que é apresentado um desenho simplificado da estrutura, com a numeração dos nós (vermelho) e das barras (preto); as reações em cada nó; os diagramas de esforços normais, cortantes e momentos fletores; e a configuração deformada da estrutura; os gráficos de tensões em cada barra; e uma análise de resistência, para verificar se a estrutura suporta as cargas impostas.

Figura 41: Diagramas de esforços do pórtico exemplo.



Fonte: O autor.

Figura 42: Gráficos das tensões atuantes nas barras.



Fonte: O autor.

A análise das tensões é feita em duas partes: cálculo das tensões máximas nas fibras superiores e das tensões máximas nas fibras inferiores. Tal análise é feita por meio das condições (3.81). Se essas condições forem satisfeitas, a estrutura resiste às solicitações impostas, do contrário, é necessário redimensionar a estrutura de modo a satisfazer às mesmas.

Figura 43: Janela de análise de resistência aos esforços.

```

Command Window
>> calcula_estrutura('exemplos/portico1.txt')
Análise de resistência
Insira o fator de segurança (0<FS<1): 0.75

A estrutura resiste às solicitações impostas.
fx >> |
    
```

Fonte: O autor.

5 RESULTADOS

Neste capítulo é feita a validação da rotina criada em MATLAB por meio de um comparativo com estruturas calculadas por outros métodos e pelo software de análise estrutural Ftool.

5.1 Exemplo 1

Considere a mesma viga apresentada nos capítulos anteriores, de seção transversal retangular de 0.15m de base por 0.20m de altura, cujo material é concreto armado de tensão de resistência à compressão de 25MPa (concreto C25). A armadura é feita de aço CA-50, cuja tensão resistente à tração é de 500MPa. Considerando granito como agregado graúdo, a NBR 6118:2014 (item 8.2.8) estima o módulo de elasticidade secante como 24GPa.

Pelo fato de o concreto sozinho não resistir bem à tração (cerca de 1/10 da resistência à compressão), a tensão resistente à tração a ser considerada no programa é a da armadura (CARVALHO; FIGUEIREDO, 2014).

Figura 44: Apresentação dos dados da viga na aplicação em Java.

ID	x	y	Restrição horizontal	Restrição vertical	Restrição rotacional	Deslocam.
1	0	0	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
2	1	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
3	2	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
4	6	0	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

carga fim	E	σ tração	σ compressão	I	A	h
0	24.000.000	500.000	25.000	0	0.03	0.2
0	24.000.000	500.000	25.000	0	0.03	0.2
-5	24.000.000	500.000	25.000	0	0.03	0.2

Fonte: O autor.

O arquivo de dados de entrada do programa em MATLAB é apresentado a seguir:

```

4
0.0 0.0 1 1 1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1.0 0.0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 -10.0 0.0
2.0 0.0 0 1 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
6.0 0.0 0 1 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3
1 2 0 0 0 0 0 1 0.0 0.0 2.4E7 25000.0 500000.0 1.0E-4 0.03 0.2

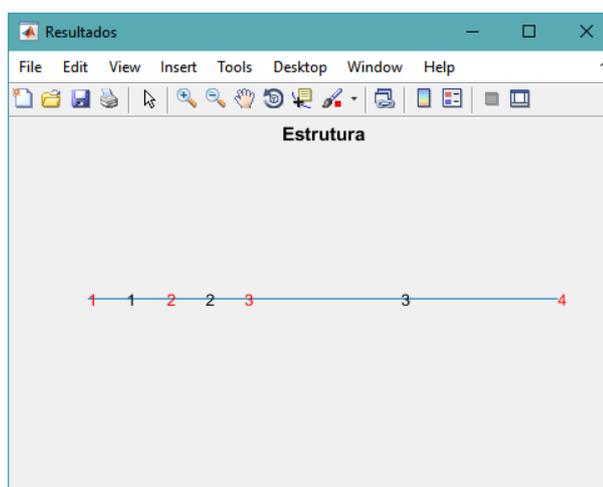
```

```

2 3 0 0 0 0 0 0 0 0.0 0.0 2.4E7 25000.0 500000.0 1.0E-4 0.03 0.2
3 4 0 0 0 0 0 0 1 -5.0 -5.0 2.4E7 25000.0 500000.0 1.0E-4 0.03 0.2
    
```

Na geração dos resultados, a primeira imagem que aparece é um esboço da estrutura, com os nós numerados em vermelho e as barras numeradas em preto.

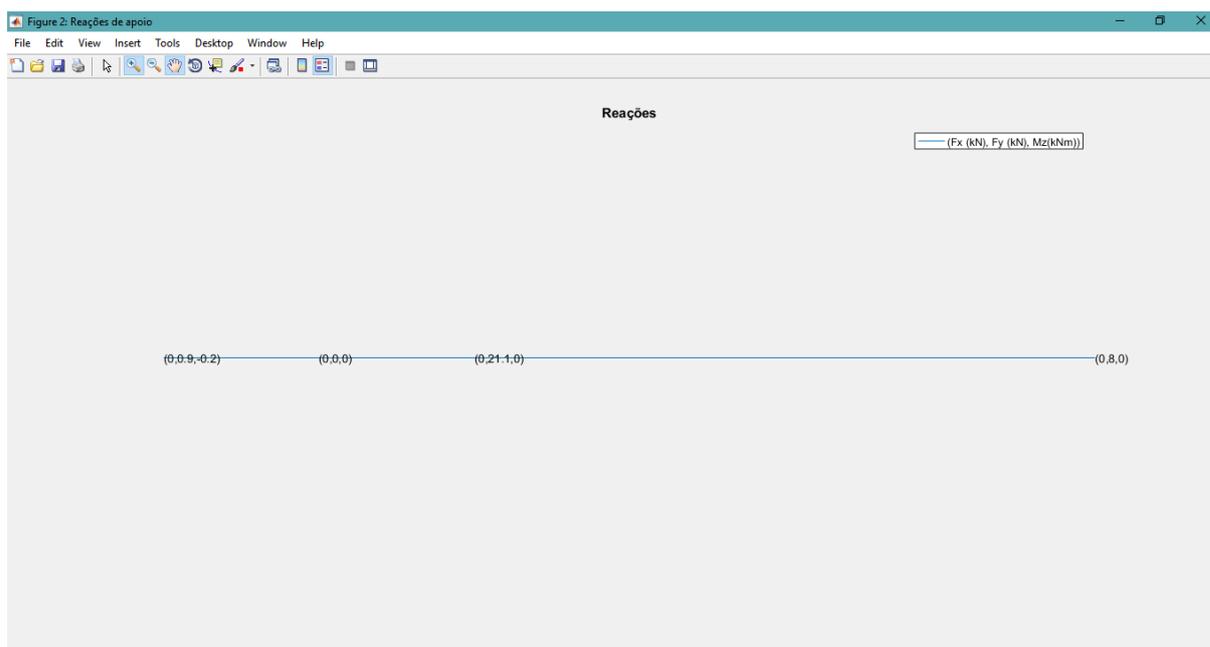
Figura 45: Desenho da viga exemplo.



Fonte: O autor.

A segunda figura mostra as reações de apoio em cada nó, sendo apresentadas no formato (F_x, F_y, M_z) , onde F_x é o esforço na direção x global em kN, F_y é o esforço na direção y global em kN e M_z é o momento em kNm.

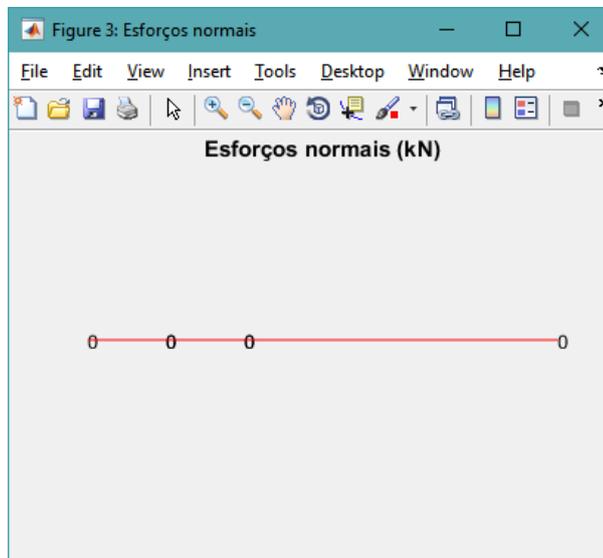
Figura 46: Reações de apoio da viga.



Fonte: O autor.

Em seguida é mostrado o diagrama de esforços normais. Como não são aplicados esforços axiais, seu gráfico tem valor constante 0.

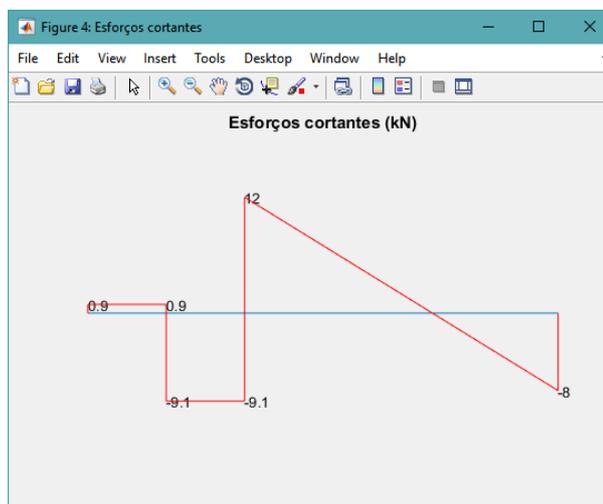
Figura 47: Diagrama de esforços normais.



Fonte: O autor.

Depois é mostrado o diagrama de esforços cortantes, com unidades em kN.

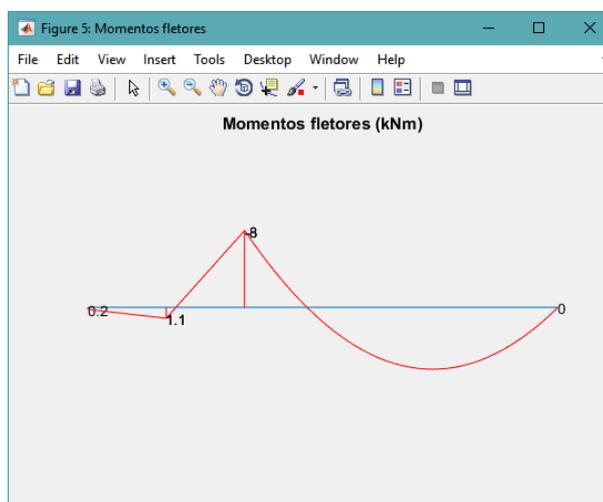
Figura 48: Diagrama de esforços cortantes.



Fonte: O autor.

Em seguida é mostrado o diagrama de momentos fletores, com unidades em kNm.

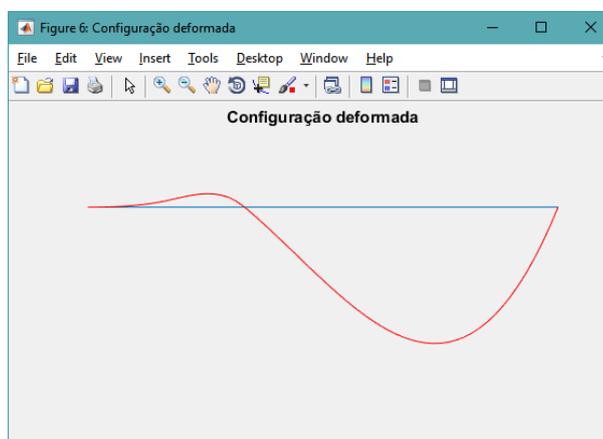
Figura 49: Diagrama de momentos fletores.



Fonte: O autor.

E por fim, é mostrado a configuração deformada da estrutura, sem unidades¹.

Figura 50: Configuração deformada da viga.



Fonte: O autor.

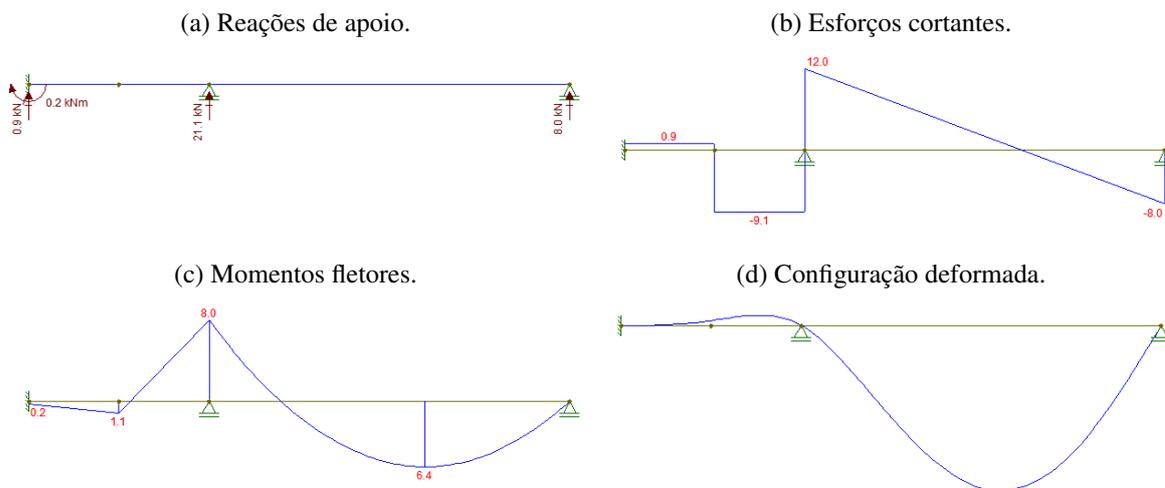
Tais diagramas estão de acordo com os cálculos feitos nos capítulos anteriores e com os resultados do programa Ftool como mostrado na Figura 51.

Depois é apresentada uma segunda tela apresentando gráficos de tensões em MPa para cada barra, mostrando as tensões nas fibras superiores e inferiores.

Percebe-se que a maior tensão apresentada é de 8MPa. De fato, o momento fletor máximo apresentado na estrutura é 8kNm. O momento de inércia da seção é $\frac{0.15 \cdot 0.20^3}{12} = 1 \cdot 10^{-4} \text{m}^4$ e a

¹ O autor deste trabalho não conseguiu criar um código que permita demonstrar graficamente de forma satisfatória os valores dos deslocamentos da estrutura.

Figura 51: Resultados apresentados pelo software Ftool.

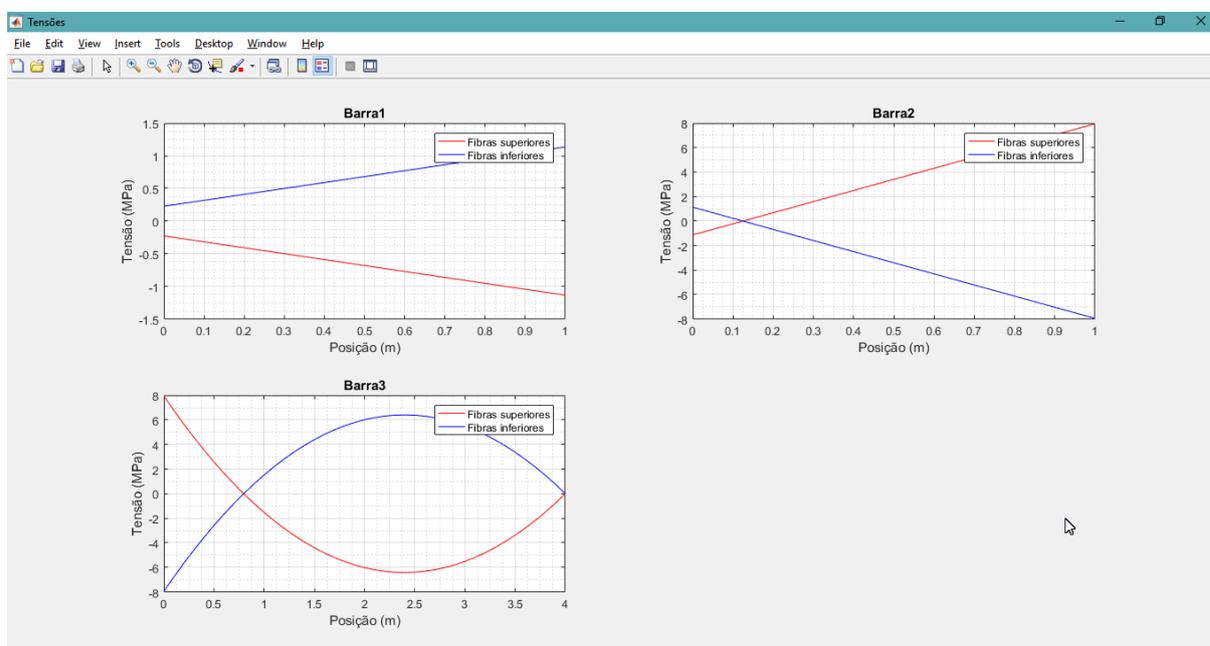


Fonte: O autor.

altura em relação ao eixo neutro é $0.20/2 = 0.10\text{m}$. Com isto, a tensão é

$$\sigma = \frac{8}{1 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.1 = 8000\text{kPa} = 8\text{MPa}$$

Figura 52: Gráficos de tensões atuantes na viga.

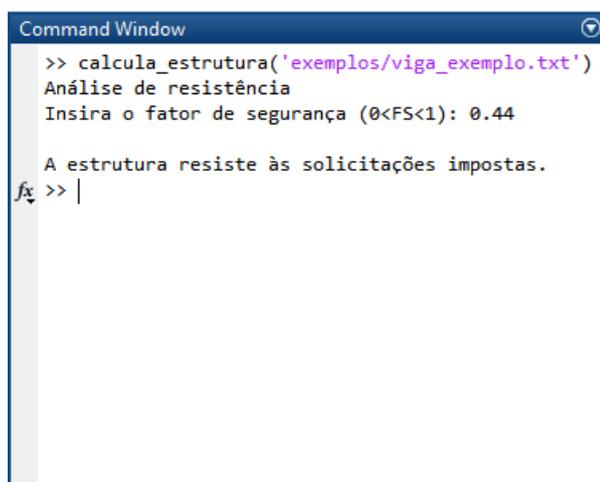


Fonte: O autor.

Aplicando um fator de majoração de esforços de 1.4, fator de minoração de resistência à compressão de 1.4 e fator de minoração de resistência à tração como 1.15, o fator de segurança a ser inserido no programa é $\frac{1}{1.4 \cdot 1.4 \cdot 1.15} \approx 0.44$. Com isso a tela da Figura 53 é apresentada.

De fato, a tensão resistente à tração é 500MPa e à compressão é 25MPa. Aplicando o fator de segurança, as tensões efetivas são $0.44 \cdot 500 = 200\text{MPa}$ e $0.51 \cdot 25 = 11\text{MPa}$, que são superiores às tensões solicitantes máxima de tração e de compressão apresentadas nos gráficos da Figura 52. De acordo com essa análise, a viga suporta as cargas impostas.

Figura 53: Resultados da análise de tensões.



```

Command Window
>> calcula_estrutura('exemplos/viga_exemplo.txt')
Análise de resistência
Insira o fator de segurança (0<FS<1): 0.44

A estrutura resiste às solicitações impostas.
fx >> |
  
```

Fonte: O autor.

5.2 Exemplo 2

Considere agora o pórtico da Figura 54, sujeita a cargas devidas ao vento. Suas colunas são de concreto classe C25 (tensão resistente à compressão de 25MPa) de seção transversal retangular de 15cm×20cm e módulo de elasticidade 24GPa. As colunas não apresentam armadura de aço. As vigas são de aço CA-50 (tensão resistente à tração de 500MPa) de módulo de elasticidade de 200GPa, de seção I com dimensões mostradas na Figura 55. Por simplicidade, a tensão resistente à compressão do aço será considerada igual a tensão resistente à tração. De acordo com a NBR 6118:2014, a tensão de resistência média à tração do concreto pode ser estimada como

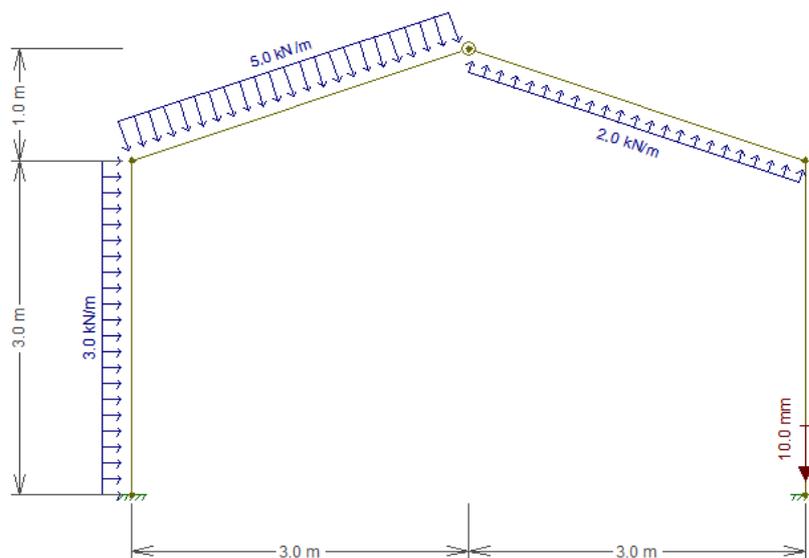
$$f_{ct,m} = 0.3f_{ck}^{2/3} \quad (5.1)$$

para concretos de classes até C50, em que f_{ck} é a resistência característica do concreto (em MPa).

Para este exemplo

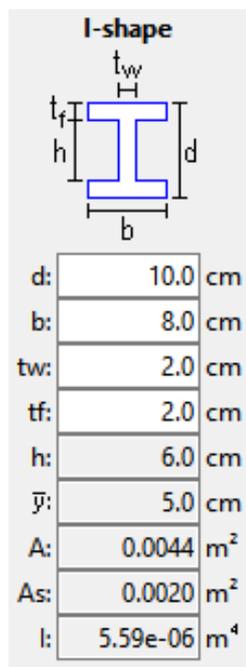
$$f_{ct,m} = 0.3 \cdot 25^{2/3} = 2.565\text{MPa} = 2565\text{kPa}$$

Figura 54: Esquema estrutural do pórtico exemplo.



Fonte: O autor.

Figura 55: Dimensões da viga de aço.



Fonte: O autor.

Uma das colunas sofre recalque de 10mm e existe uma articulação do tipo rótula ligando as vigas de aço.

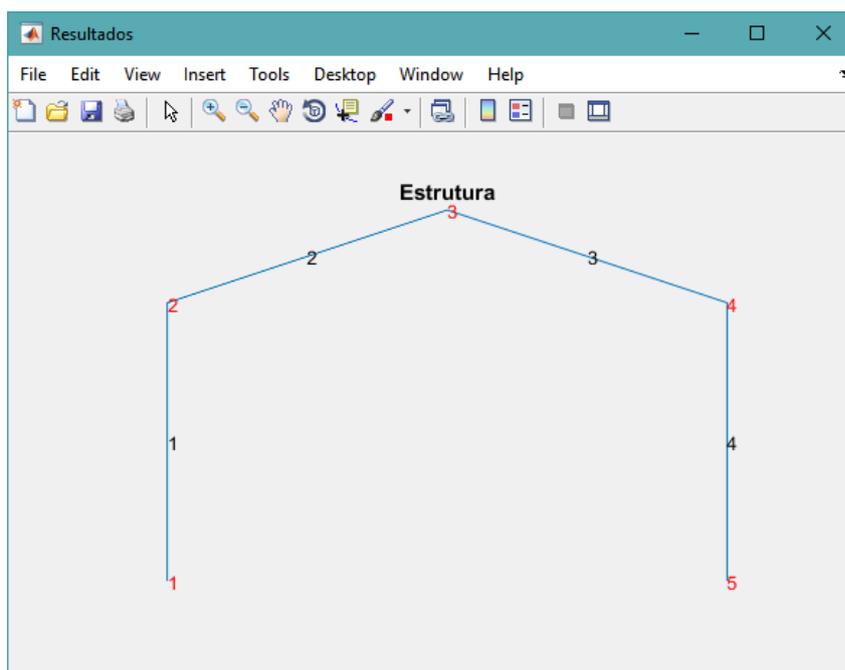
Os dados de entrada são

```

5
0.0 0.0 1 1 1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 3.0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3.0 4.0 0 0 1 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
6.0 3.0 0 0 0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
6.0 0.0 1 1 1 0.0 -0.01 0.0 0.0 0.0 0.0
4
1 2 0 0 0 0 0 1 -3.0 -3.0 2.4E7 2565.0 25000.0 1.000000000000000003E-4 0.03 0.2
2 3 0 0 0 0 0 1 1 -5.0 -5.0 2.0E8 500000.0 500000.0 5.59E-6 0.0044 0.1
3 4 0 0 1 0 0 0 1 2.0 2.0 2.0E8 500000.0 500000.0 5.59E-6 0.0044 0.1
5 4 0 0 0 0 0 0 1 0.0 0.0 2.4E7 2565.0 25000.0 1.000000000000000003E-4 0.03 0.2
    
```

Perceba que no nó 3 foi considerada uma restrição na rotação para a inclusão da rótula. Inserindo os dados no MATLAB, são gerados os diagramas seguintes:

Figura 56: Numeração dos nós e barras do pórtico.

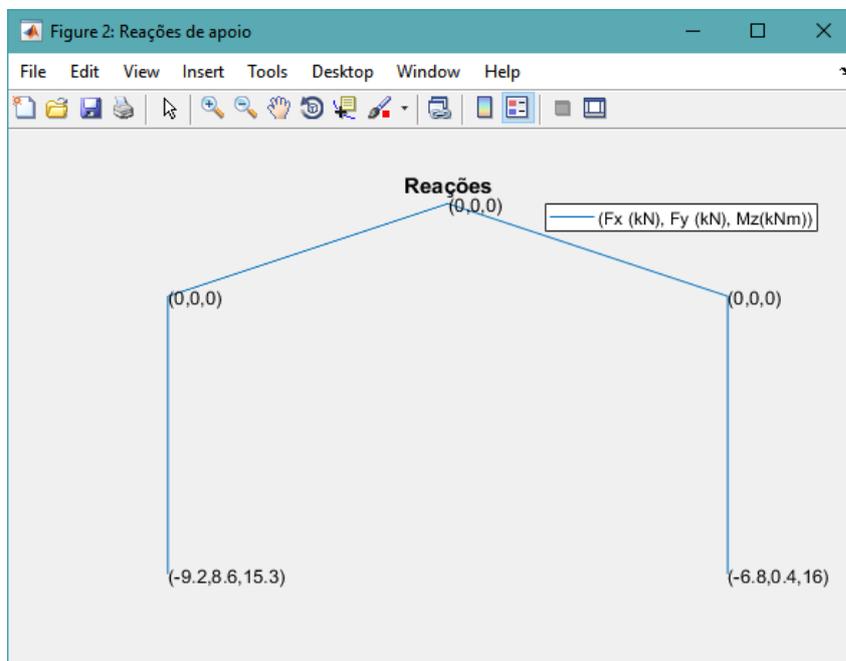


Fonte: O autor.

Na figura 62 são mostrados os resultados do programa Ftool. Percebe-se que os resultados são idênticos aos calculados pelo Ftool.

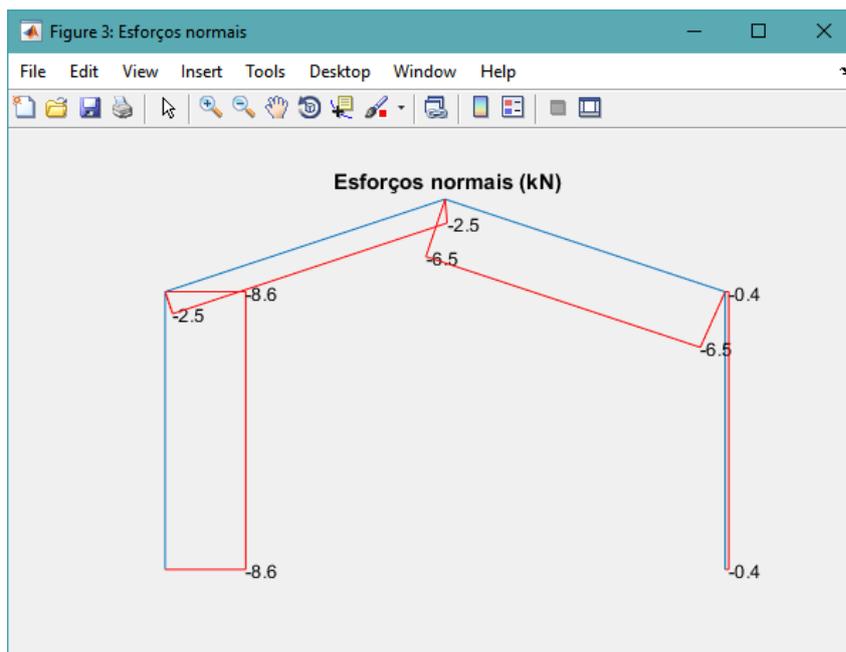
Os gráficos de tensões são apresentados na Figura 63.

Figura 57: Reações de apoio do pórtico.



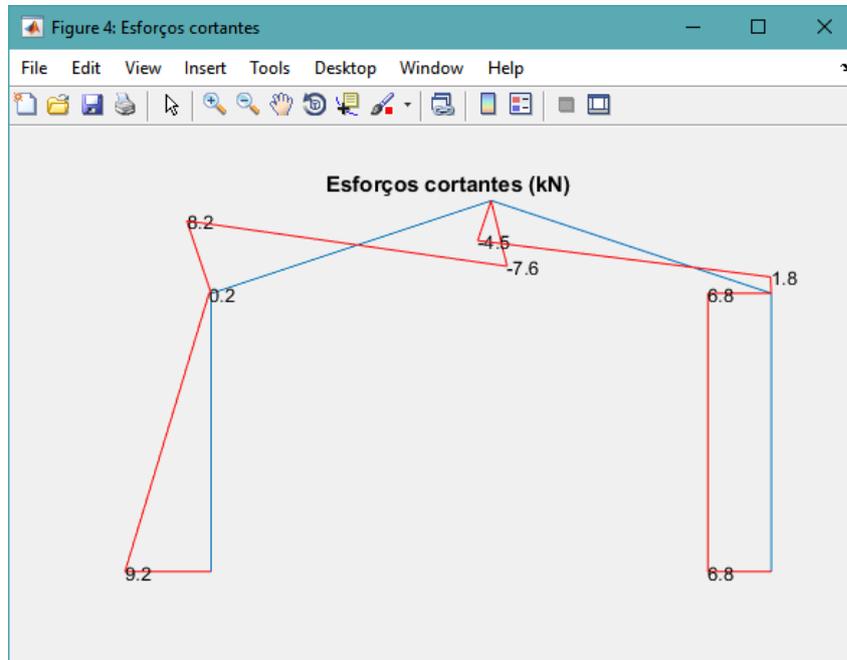
Fonte: O autor.

Figura 58: Diagrama de esforços normais do pórtico.



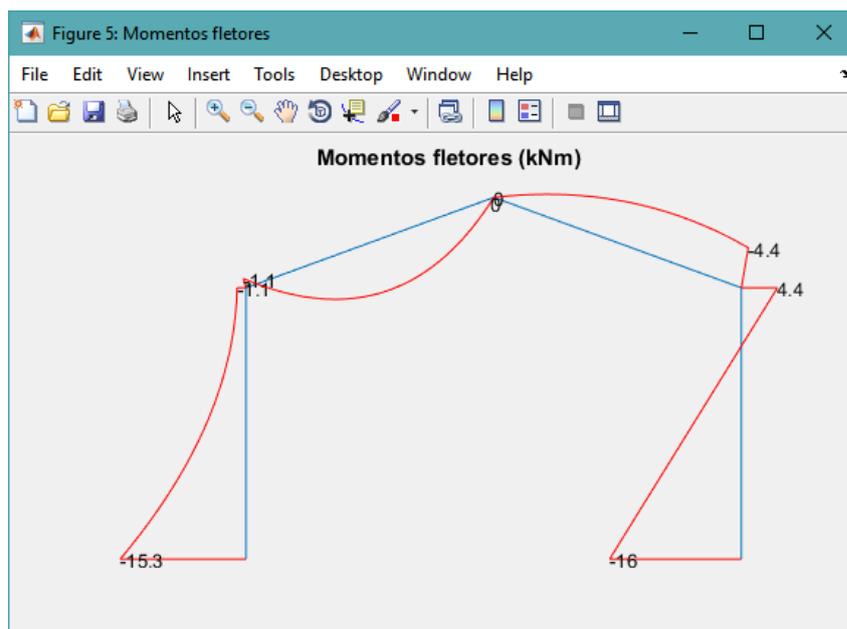
Fonte: O autor.

Figura 59: Diagrama de esforços cortantes do pórtico.



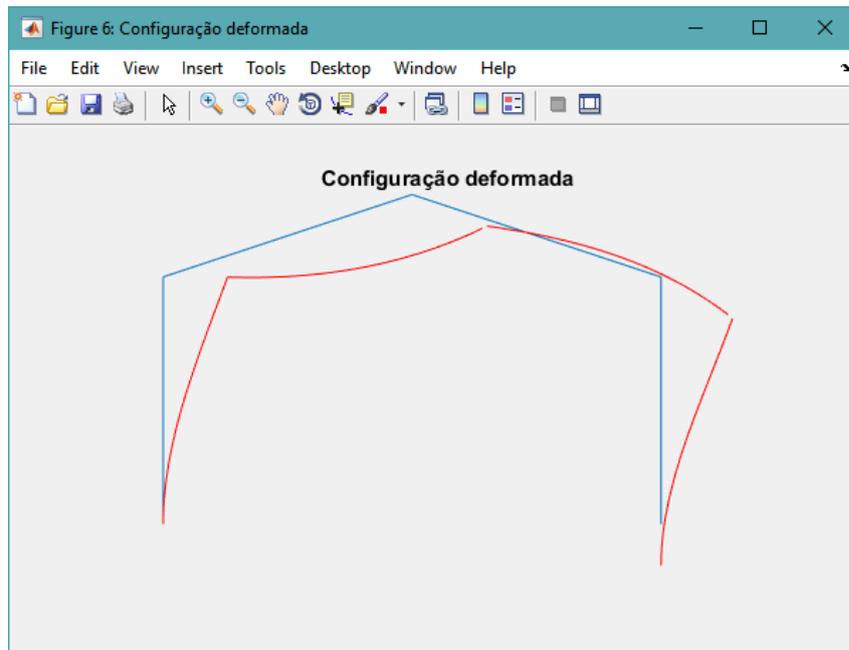
Fonte: O autor.

Figura 60: Diagrama de momentos fletores do pórtico.



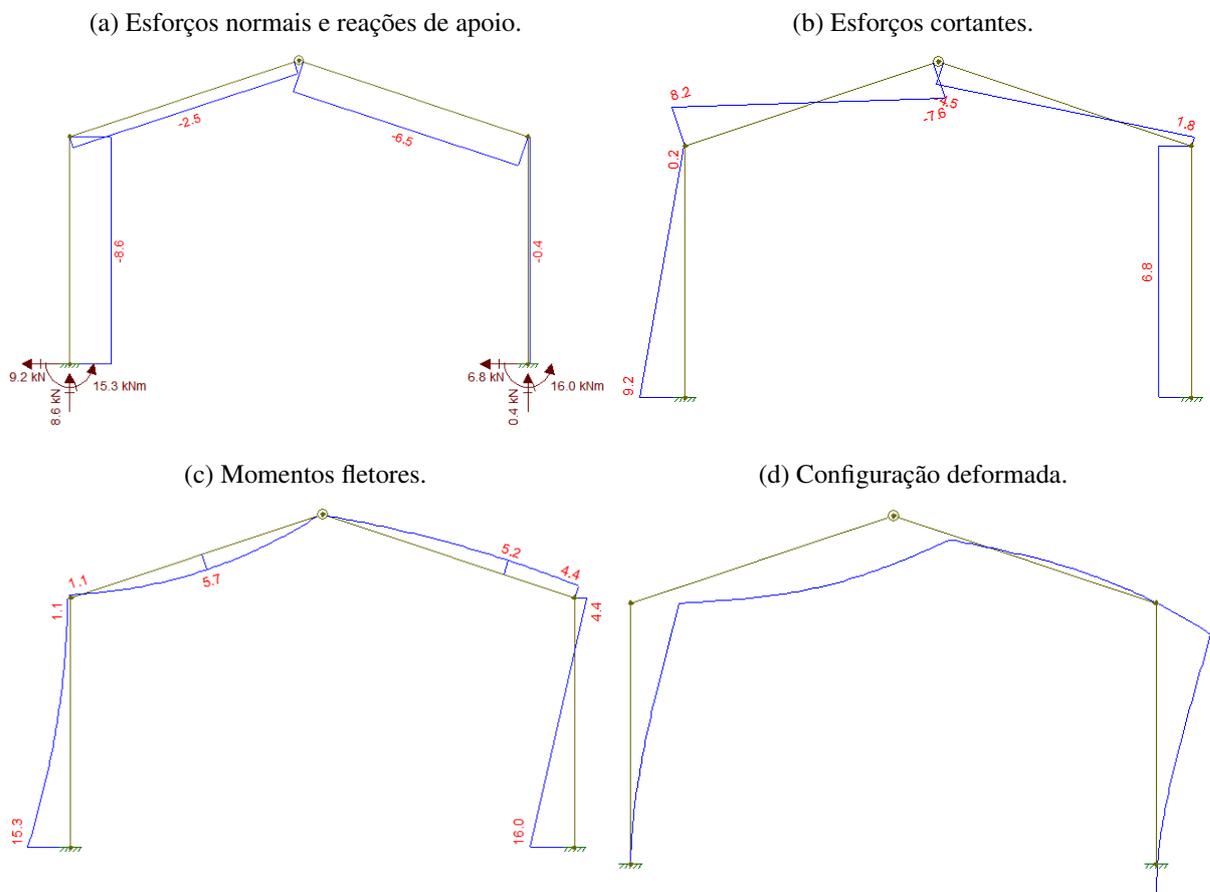
Fonte: O autor.

Figura 61: Configuração deformada do pórtico.



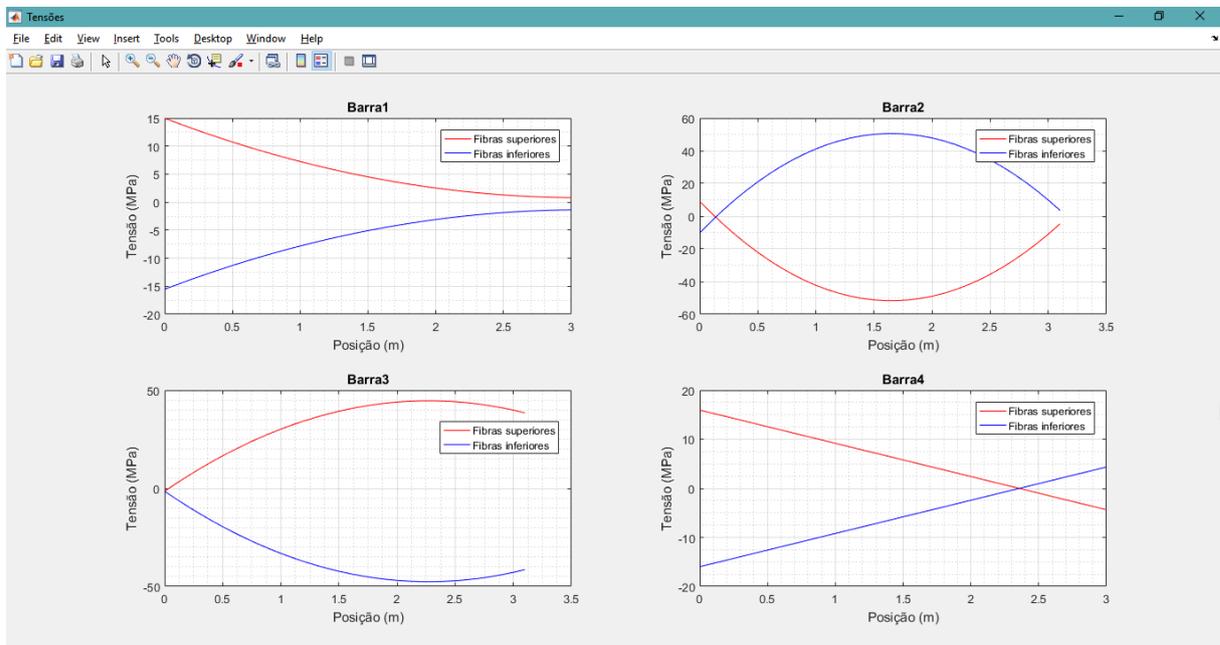
Fonte: O autor.

Figura 62: Diagramas apresentados no Ftool para o pórtico exemplo.



Fonte: O autor.

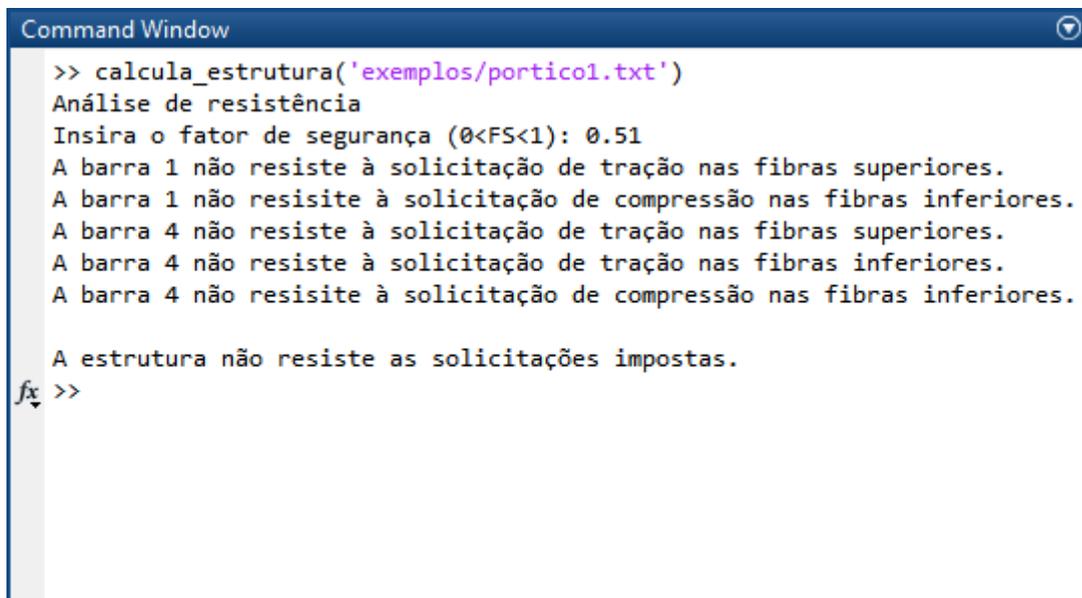
Figura 63: Tensões atuantes no pórtico exemplo.



Fonte: O autor.

Aplicando o mesmo fator de segurança da viga da seção anterior, obtém-se a seguinte tela no MATLAB:

Figura 64: Resultados da análise de tensões do pórtico.



```

Command Window
>> calcula_estrutura('exemplos/portico1.txt')
Análise de resistência
Insira o fator de segurança (0<FS<1): 0.51
A barra 1 não resiste à solicitação de tração nas fibras superiores.
A barra 1 não resiste à solicitação de compressão nas fibras inferiores.
A barra 4 não resiste à solicitação de tração nas fibras superiores.
A barra 4 não resiste à solicitação de tração nas fibras inferiores.
A barra 4 não resiste à solicitação de compressão nas fibras inferiores.

A estrutura não resiste as solicitações impostas.
fx >>

```

Fonte: O autor.

Percebe-se da Figura 64 que as colunas não resistem às solicitações. De fato, na coluna 1 as tensões máximas nas fibras superiores e inferiores são, respectivamente

$$\sigma_{sup} = \frac{15.3}{0.0001} \cdot 0.1 + \frac{8.6}{0.03} = 15587 \text{KPa} = 15.587 \text{MPa}$$

$$\sigma_{inf} = \frac{15.3}{0.0001} \cdot (-0.1) + \frac{8.6}{0.03} = -15013 \text{KPa} = -15.013 \text{MPa}$$

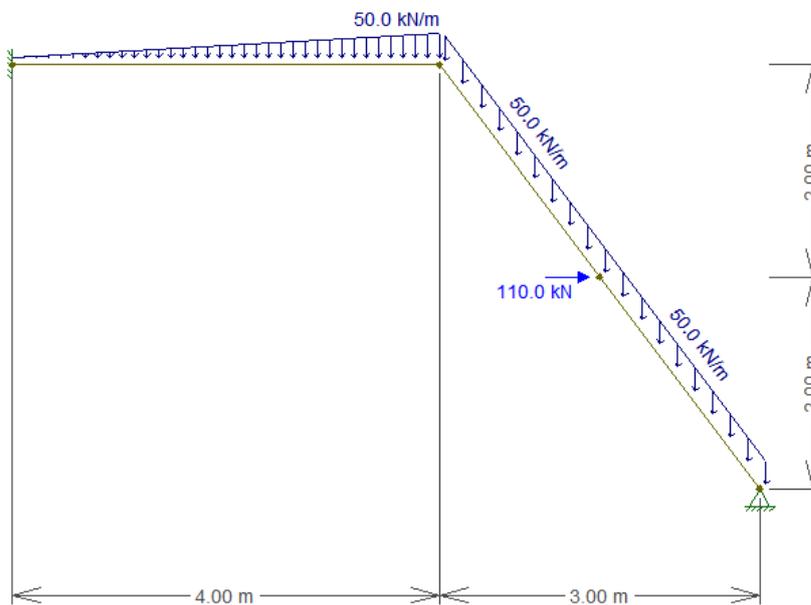
e aplicando o fator de segurança obtém-se as tensões resistente efetivas de tração e compressão respectivamente de $0.51 \cdot 2565 = 1308.15 \text{kPa}$ e $0.51 \cdot 25000 = 12750 \text{kPa}$, menores do que as solicitantes. O mesmo ocorre para a coluna 4. Assim, se faz necessário o redimensionamento das colunas.

5.3 Exemplo 3

Considere o pórtico da Figura 65. As seções transversais das barras componentes são perfis W360×91.0 (momento de inércia $I_x = 2.6755 \cdot 10^{-4} \text{m}^4$, área $A = 0.0116 \text{m}^2$, altura $h = 35.3 \text{cm}$) de aço A36 (tensão de escoamento de 250MPa e módulo de elasticidade 200GPa)

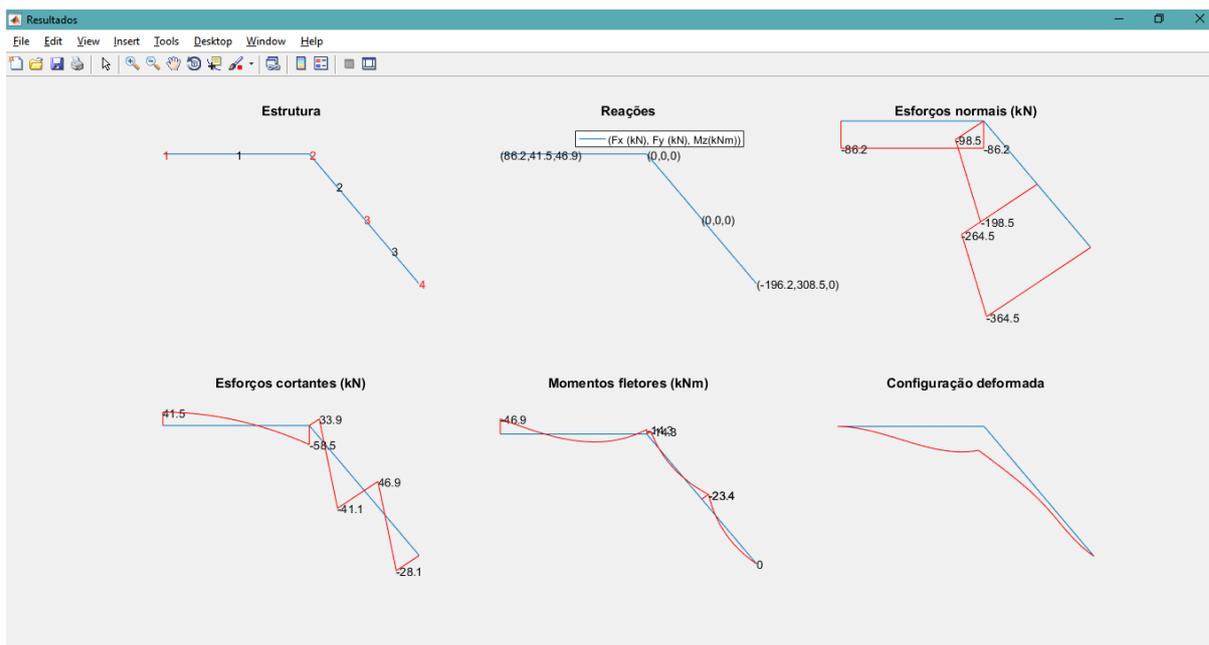
Os diagramas dos esforços gerados pelo MATLAB são mostrados na Figura 66; os diagramas gerados pelo Ftool são mostrados na Figura 67; e os gráficos de tensões são mostrados na Figura 68.

Figura 65: Pórtico exemplo 3.



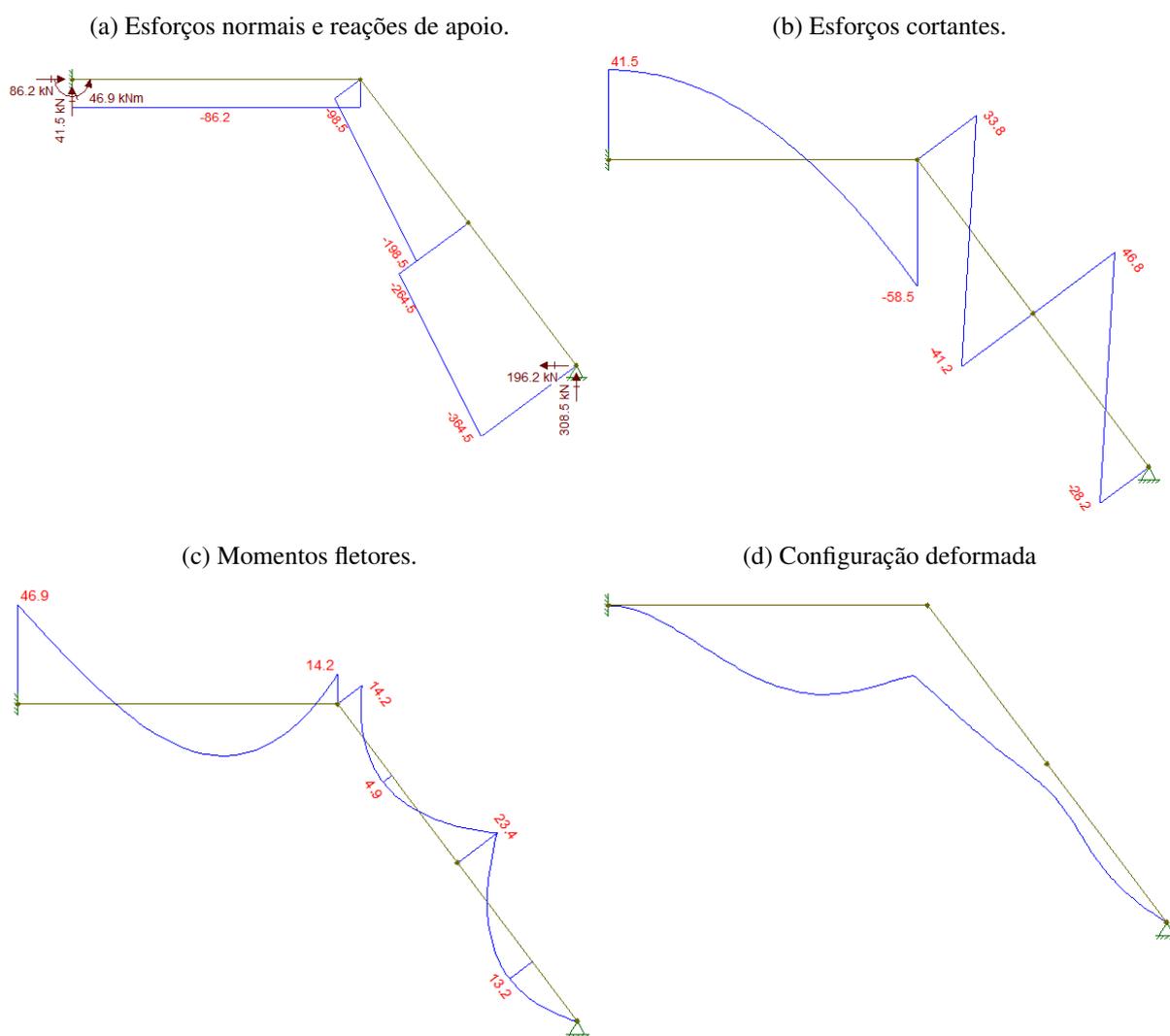
Fonte: O autor.

Figura 66: Diagramas gerados pela rotina criada em MATLAB para o pórtico exemplo 3.



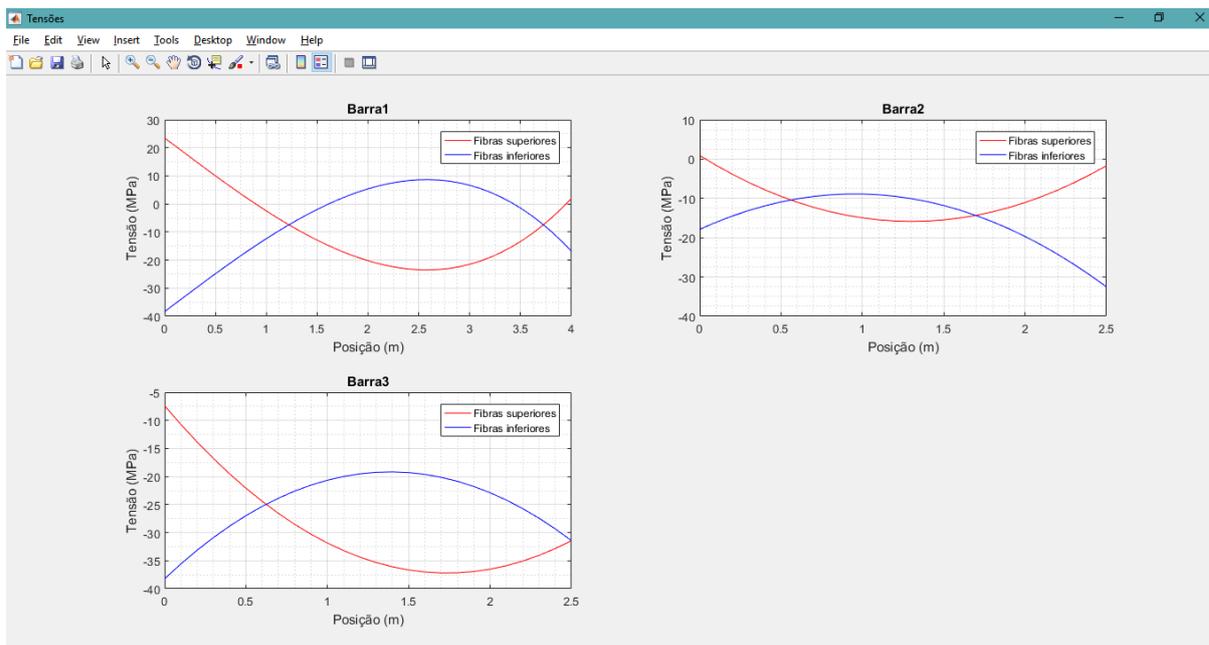
Fonte: O autor.

Figura 67: Diagramas de esforços do pórtico exemplo 3 gerados pelo Ftool.



Fonte: O autor.

Figura 68: Gráficos de tensões atuantes no pórtico exemplo 3.



Fonte: O autor.

Considerando fator de majoração de esforços de 1.3 e de minoração de resistência de 1.4, o fator de segurança é $\frac{1}{1.3 \cdot 1.4} \approx 0.55$, gerando uma tensão resistente efetiva de $0.55 \cdot 250 = 137.4 \text{ MPa}$. Com isso é mostrada uma mensagem no MATLAB como pode ser visto na Figura 69.

Figura 69: Resultados da análise de tensões para o pórtico exemplo 3.

```

Command Window
>> calcula_estrutura('exemplos/portico2.txt')
Análise de resistência
Insira o fator de segurança (0<FS<1): .55

A estrutura resiste às solicitações impostas.
fx >>
    
```

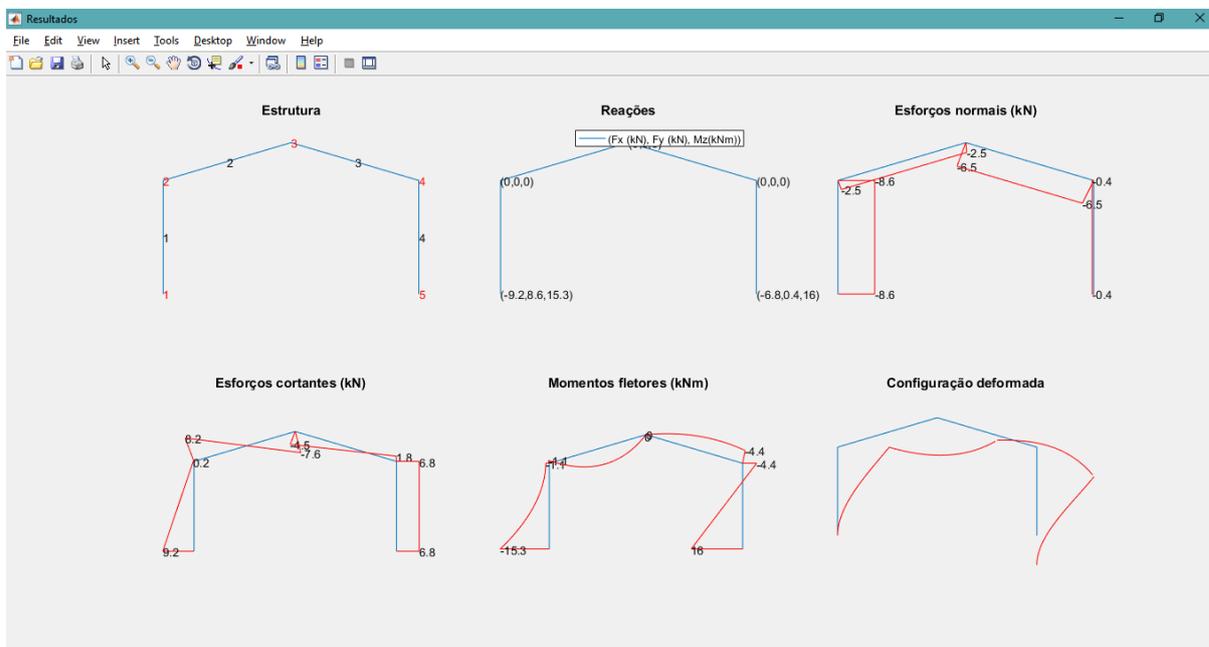
Fonte: O autor.

Percebe-se pelos gráficos de tensões que a estrutura atende às condições de segurança com relativa folga. O projetista pode, se preferir, usar um perfil mais leve.

5.4 Um "bug"

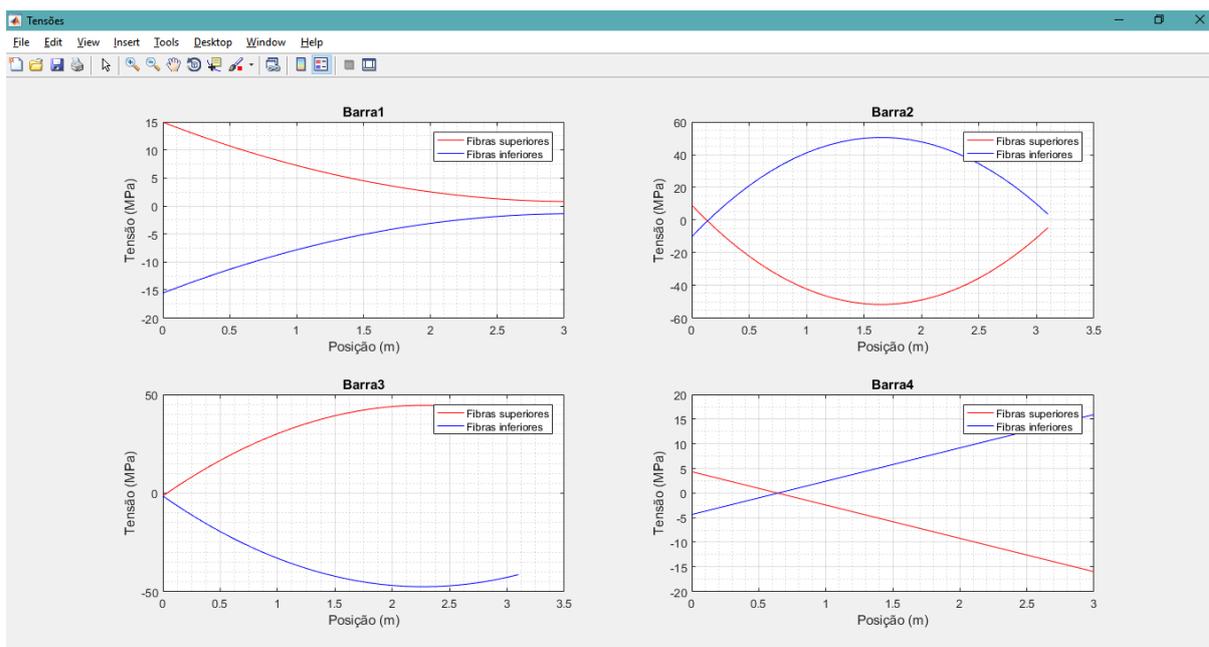
Considere o pórtico da Figura 54. Alterando o sentido de numeração da barra 4 (o nó inicial passa a ser o nó 4 e o final o nó 5) obtém-se os diagramas seguintes.

Figura 70: Diagramas de esforços do pórtico exemplo 1, com sentido da barra 4 invertido.



Fonte: O autor.

Figura 71: Gráficos de tensões do pórtico exemplo 1.



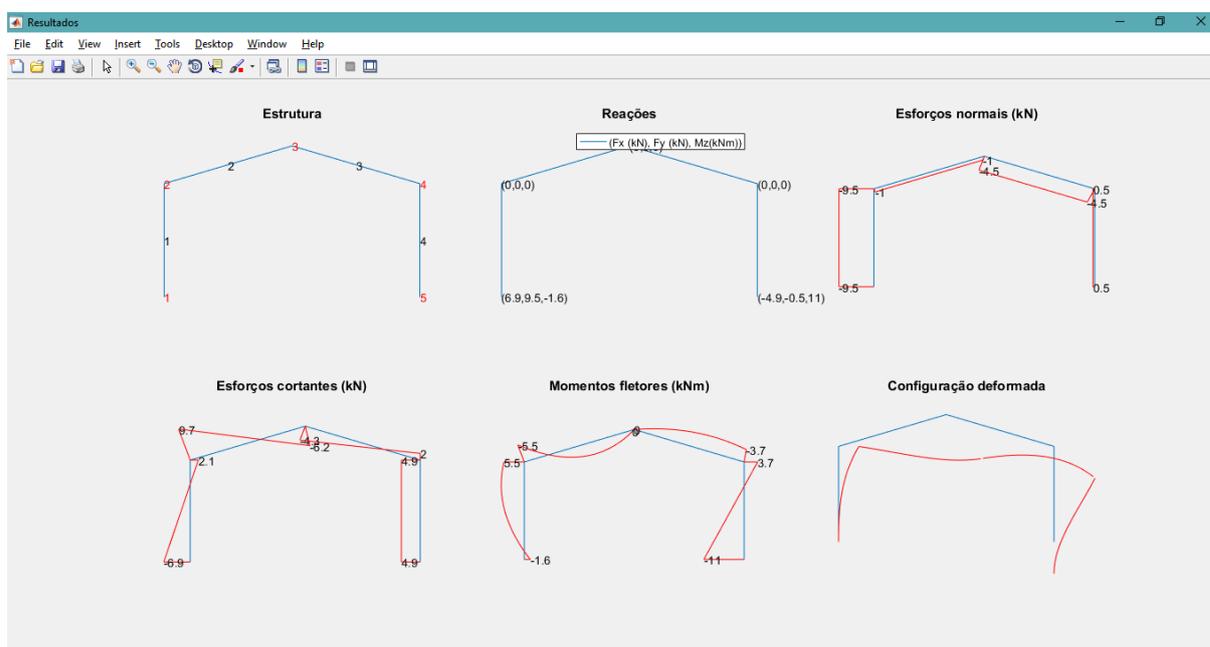
Fonte: O autor.

Percebe-se que os diagramas de esforços normais e cortantes na barra 4 aparecem invertidos, porém com os valores nodais corretos; o mesmo ocorre para os respectivos gráficos de tensões. No entanto, os diagramas de momentos fletores e deformada não são alterados.

Uma possível explicação para isso seja o seguinte: ao inverter o sentido de numeração nodal, invertem-se as direções dos eixos locais x e y , fazendo com que os gráficos dos esforços normais e cortantes (que são esforços aplicados nessas direções) apareçam invertidos; os momentos fletores e rotações nodais são aplicados no eixo z , o qual não é invertido, fazendo com que seus gráficos permaneçam inalterados.

Agora se o sentido de numeração nodal da barra 1 for invertido, os diagramas serão os seguintes:

Figura 72: Diagramas de esforços do pórtico exemplo 1, com sentido da barra 1 invertido.

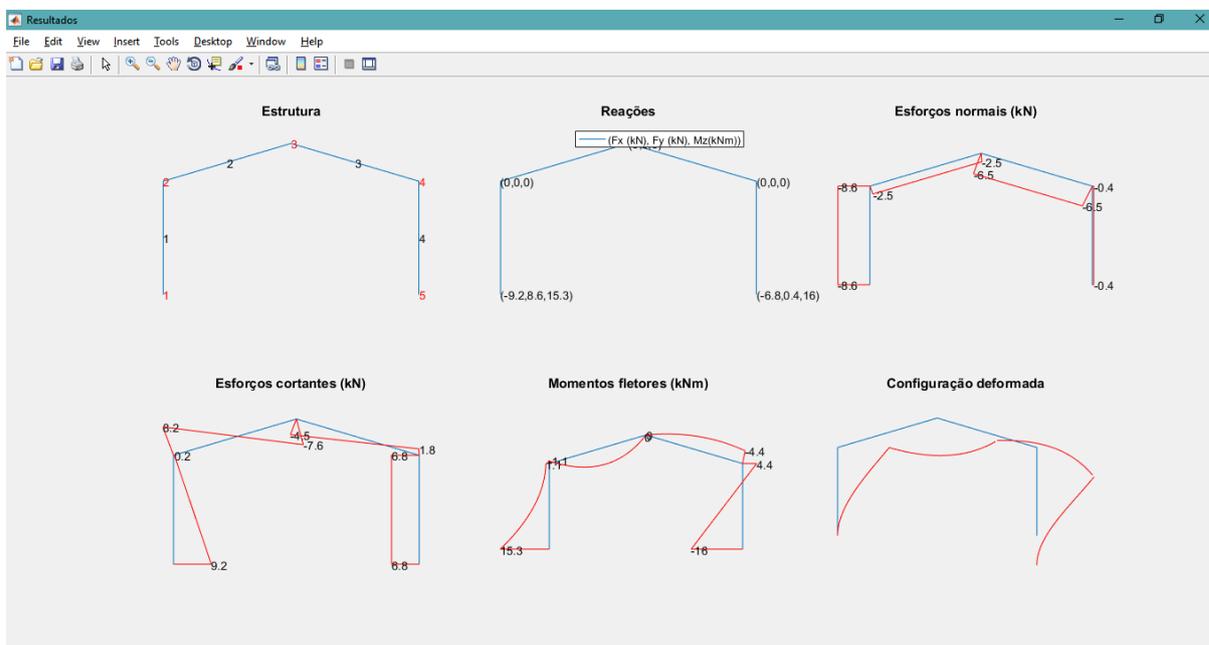


Fonte: O autor.

Percebe-se que os diagramas não são invertidos: são alterados totalmente! Isto se deve, provavelmente, a existência de carga distribuída, a qual é invertida quando se inverte o sentido de numeração da barra. De fato, invertendo o sentido de aplicação de carga (trocando-se o sinal), obtém-se os diagramas da Figura 73. Aí, os gráficos de esforços normal e cortante são invertidos, mas seus valores nodais estão corretos.

Outros testes mostraram que, para que não haja tais problemas, os sentidos de numeração das barras devem ser feitas de baixo para cima e da esquerda para direita.

Figura 73: Diagramas de esforços do pórtico exemplo 1, com sentido da barra 1 invertido e carregamento distribuído invertido.



Fonte: O autor.

6 CONCLUSÃO

Ao longo do presente trabalho foram apresentadas diversas metodologias para cálculo e análise estrutural, todas baseadas em três princípios: Princípio da Conservação da Energia, Princípio do Trabalho Virtual e Princípio da Superposição. Desses princípios foram derivados dois métodos clássicos de cálculo estrutural: o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. Tais métodos foram exemplificados para uma mesma estrutura exemplo, verificando a validade de ambos. Em seguida foi apresentado o Método da Rigidez Direta, cujo processo de cálculo sintetiza os dados da estrutura em matrizes, a qual se resume na resolução da equação $[K]\{U\} = \{F\}$, onde $\{F\}$ é a matriz de esforços, $\{U\}$ é a matriz de deslocamentos e $[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura. Devido ao processo algorítmico de construção de tais matrizes, é o método utilizado em softwares de cálculo estrutural. Foi feita a implementação do MRD no software de cálculo MATLAB, o qual possui diversas ferramentas para cálculo e tratamento de matrizes e plotagem de gráficos. A rotina criada lê um arquivo de dados da estrutura, os converte em matrizes, aplica o MRD, constrói os diagramas estruturais, plota os gráficos de tensões normais e, por fim, analisa as tensões atuantes para verificar o dimensionamento feito.

Foram criados alguns exemplos de estruturas para verificar a rotina criada. Para a validação, foi feito um comparativo dos resultados gerados em MATLAB com os métodos apresentados e com o software de análise estrutural Ftool. Verificou-se excelente concordância entre os resultados obtidos da rotina e os obtidos por outros métodos e pelo Ftool. Tal rotina também permite analisar as tensões atuantes na estrutura, a qual foi verificada por meio de cálculos manuais.

Foi observado um erro na rotina com respeito ao sentido de numeração dos nós em barras: os diagramas gerados aparecem invertidos ou totalmente alterados ao se inverter o sentido de numeração dos nós em barras. Uma possível explicação foi dada, baseada em inversão de eixos locais da barra.

Foram feitas diversas hipóteses simplificadoras. Apesar de tais parecerem restritivas, elas podem ser aplicadas com boa aproximação em diversas estruturas em construções cotidianas (residências, edifícios, pontes ...), o que permite a utilização da rotina criada neste trabalho não só para fins de estudo, mas também para uso profissional.

Como sugestões para trabalhos futuros tem-se:

- a) Melhorar a apresentação dos resultados;
- b) Corrigir o "bug" apresentado.
- c) Incluir efeitos térmicos;
- d) Incluir efeitos de cisalhamento;
- e) Incluir análise de estabilidade e de deslocamentos;
- f) Permitir a inserção de apoios inclinados e apoios elásticos;
- g) Permitir diversas geometrias, não apenas as seções com dois eixos de simetria;
- h) Estender a análise a estruturas espaciais;
- i) Criar um grupo de pesquisa no Campus do Sertão para dar prosseguimento a este trabalho e, com isso, criar um software de análise estrutural para uso educacional e/ou comercial.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 8800*: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118*: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO, J. R. de. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*: segundo a nbr 6118:2014. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.
- CHAPMAN, S. J. *Programação em MATLAB para engenheiros*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- GOMES, E. P.; NETTO, R. V. *Cálculo de treliças planas utilizando modelagem computacional em MATLAB*. 89 f. Monografia (Projeto de Graduação) — Faculdade de Tecnologia TATUAPÉ "Victor Civita", Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza, São Paulo, 2016.
- HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- HIBBELER, R. C. *Análise de estruturas*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.
- HUTTON, D. V. *Fundamentals Of Finite Element Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill Education (India) Pvt Limited, 2005. (McGraw-Hill series in mechanical engineering).
- LEET, K.; UANG, C.-M.; GILBERT, A. M. *Fundamentos de análise estrutural*. São Paulo: Mc-Graw Hill, 2009.
- LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- MARTHA, L. F. *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MOREIRA, D. F. *Análise matricial de estruturas*. São Paulo: LTC, 1977.
- NETO, E. S. A. Noções sobre energia de deformação. *Escola Politécnica da USP*, 2017. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3892058/mod_resource/content/4/eStrnEner-m_2p200_2017may24.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2018.
- ORMONDE, P. C. *Software educacional livre para análise não linear de pórticos planos em estruturas metálicas*. 125 f. Monografia (Dissertação) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.
- PFEIL, W.; PFEIL, M. *Estruturas de aço: dimensionamento prático*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- PYSKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*. 18. ed. Porto: Edições Lopes da Silva, 2000. v. 1.
- SORIANO, H. de L. *Análise de estruturas: Formulação matricial e implementação computacional*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.
- SORIANO, H. de L.; LIMA, S. de S. *Análise de estruturas: Método das forças e método dos deslocamentos*. 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.
- SÜSSEKIND, J. C. *Curso de análise estrutural: Estruturas isostáticas*. 6. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1981a. v. 1.
- SÜSSEKIND, J. C. *Curso de análise estrutural: Deformações em estruturas. método das forças*. 5. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1981b. v. 2.

APÊNDICE A : TEORIA DE VIGAS DE NAVIER

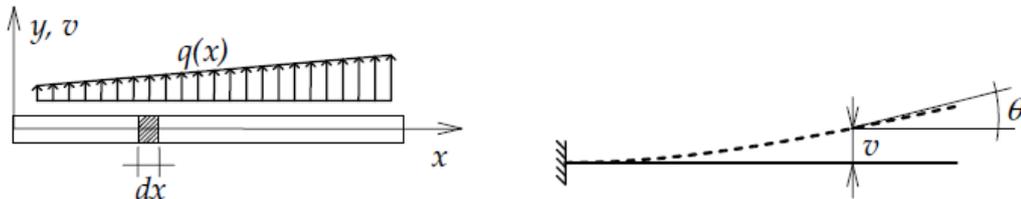
Hipóteses básicas (MARTHA, 2010; HUTTON, 2005):

- Deslocamentos pequenos em relação às dimensões da barra;
- Deformações por cisalhamento são desprezíveis;
- Seções planas e normais ao eixo da barra permanecem planas e normais ao eixo quando a barra é flexionada (hipótese de Bernoulli);
- Material isotrópico, homogêneo e elástico linear (vale a lei de Hooke).
- Barras prismáticas.

Considere uma barra sujeita a um carregamento transversal $q(x)$, o qual deforma a barra (Figura 74). Considerando um comprimento diferencial dx após a flexão (Figura 75), existirá uma camada na superfície que não sofrerá variação de comprimento, chamada *linha neutra*. Assumindo que esta camada está a uma distância ρ do centro de curvatura e correspondendo a $y = 0$, o comprimento após a flexão de uma camada na posição y é

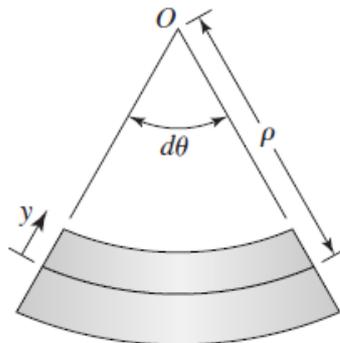
$$ds = (\rho - y)d\theta \quad (\text{A.1})$$

Figura 74: Esquerda: Barra sujeita a um carregamento transversal. Direita: Barra flexionada.



Fonte: MARTHA (2010).

Figura 75: Elemento de barra flexionado.



Fonte: HUTTON (2005)

e a deformação é

$$\epsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (\text{A.2})$$

O raio de curvatura é (PYSKUNOV, 2000)

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (\text{A.3})$$

onde $v = v(x)$ é a deflexão da curva da linha neutra. Pela hipótese a), dv/dx é desprezível, resultando

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (\text{A.4})$$

A deformação é

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{A.5})$$

e a tensão normal é dada pela lei de Hooke

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -yE \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{A.6})$$

Se não há carregamento axial, a resultante em x é nula, logo

$$\int_A \sigma_x dA = - \int_A E \frac{y}{\rho} dA = 0$$

Segue da hipótese c) que ρ é constante ao longo da seção, resultando

$$\int_A y = 0$$

a qual é satisfeita se a linha neutra passa pelo centroide da seção.

O momento é

$$M(x) = - \int_A y \sigma_x dA = E \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y^2 dA \quad (\text{A.7})$$

O sinal $-$ é necessário pois σ_x é de compressão para $y > 0$ e de tração para $y < 0$.

O fator integral é o momento de inércia em relação ao eixo z . Portanto

$$M(x) = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{A.8})$$

e a tensão é

$$\sigma_x = - \frac{M(x)y}{I_z} \quad (\text{A.9})$$

Ainda pela hipótese a), a inclinação da linha neutra é

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} \quad (\text{A.10})$$

o que dá

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} \quad (\text{A.11})$$