

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOSÉ HENRIQUE DO NASCIMENTO

SISTEMAS FOTÔNICOS \mathcal{PT} -SIMÉTRICOS

Maceió

2018

JOSÉ HENRIQUE DO NASCIMENTO

SISTEMAS FOTÔNICOS \mathcal{PT} -SIMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Solange Bessa Cavalcanti

Maceió

2018

Catologação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecário Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante - CRB: 1664

N244s Nascimento, José Henrique do.
Sistemas fotônicos *PT*-simétricos / José Henrique do Nascimento. – 2018.
70 f.: il. color.

Orientador: Solange Bessa Cavalcanti.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Programa de Pós Graduação em Física, 2018

Bibliografia: f. 68-70.

1. Física da matéria condensada. 2. Sistemas fotônicos. 3. Simetria *PT*.
3. Oscilação de Bragg. 4. Aproximação paroxial. I. Título.

CDU: 535-34



PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Sistemas fônicos PT-simétricos”

por

José Henrique do Nascimento

A Banca Examinadora composta pelos professores Solange Bessa Cavalcanti (orientadora e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Paulo Cesar Aguiar Brasão Filho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Elias Brito Alves Júnior, doutor pela Universidade Federal da Paraíba consideram o **candidato aprovado com grau “A”**.

Maceió, 27 de julho de 2018

Prof. Dra. Solange Bessa Cavalcanti

Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Dr. Elias Brito Alves Júnior

Agradecimentos

Acima de tudo, aos meus pais, Márcia e Cícero, por todo apoio durante essa jornada.

A minha orientadora prof^a Solange Bessa por todo suporte, discussões e por sempre ter me ensinado a pensar como um verdadeiro físico. Ao prof. Paulo Brandão, por toda a paciência, ensinamentos, discussões e resenhas durante meu período de Mestrado. Ambos excelentes físicos e espero um dia ser como vocês.

Aos amigos do IF: Anderson, Luan, Zezo, Danilo, Pedro, Artur, Rafaela, Elias, Givanildo, Camyla, Carol, Clívia, Waléria, Elaine, Ana, Samuel, Geovana, Michele, Rubens, Sendy, Branca, Giclênio, Raul (e todos os demais que com certeza eu esqueci). Aos amigos de fora do IF: Jéssica, Nilson, Amanda, Raphael, Elderson, Rodrigo, Luana, Breno, Mailde, Thatiane e Catarina. Agradeço por todos os momentos de felicidade, resenhas, fofocas e festinhas.

Ao secretário da Pós-Graduação, Victor, por ter sido sempre solícito comigo. Aos professores do IF por terem me ensinado tudo o que sei. Em especial, professores Iram, Wandearley, Ítalo e Marcelo e professora Socorro.

À CAPES pelo apoio financeiro.

I go my own way, I swim against the stream. - The eagle flies alone - Arch Enemy.

Resumo

A evolução espacial de um par de modos de Bragg ressonantes através de um meio descrito por uma permissividade elétrica relativa \mathcal{PT} -simétrica é completamente investigada. Usando o modelo de duas ondas, soluções analíticas para as equações de Maxwell são derivadas no regime não-paraxial a fim de investigar a transferência de energia entre esses modos de Bragg para uma rede ótica Hermitiana bem como para uma rede ótica complexa e também estudar a evolução espacial da parte real do campo elétrico que se propaga através desse meio. Três regimes definidos pela quebra de simetria são discutidos: abaixo, acima e no ponto de quebra de simetria. Estes regimes são determinados pela existência de quatro autovalores complexos distintos abaixo da quebra de simetria, que colidem e coalescem num par de autovalores valores complexos duplamente degenerados no ponto de quebra de simetria. Acima do ponto de quebra, quatro autovalores complexos distintos voltam a existir e agora cada um possui uma parte real não-nula. No caso Hermitiano, é demonstrado que uma transferência de energia completamente recíproca entre o par de modos de Bragg, numa maneira similiar ao efeito Pendellösung conhecido da difração de raios X por cristais, ocorre. Quando a rede ótica é complexa, a dinâmica da transferência de energia é completamente diferente do caso Hermitiano: abaixo do ponto de quebra de simetria existe um comportamento oscilatório do tipo batimento muito não-recíproco para a transferência de energia entre os modos de Bragg; acima do ponto de quebra de simetria a evolução espacial da transferência de energia cresce ilimitadamente mas um evolução oscilatória ainda ocorre; no ponto de quebra o fenômeno do aprisionamento de modo não ocorre nesse regime não-paraxial (anteriormente visto em redes óticas \mathcal{PT} -simétricas no regime paraxial). Para a rede ótica complexa, todos estes regimes compartilham características em comum: existência de um modo preferencial para o qual a energia é transferida e uma evolução espacial dessa transferência de maneira não-recíproca, algumas das características muito bem conhecidas de sistemas óticos \mathcal{PT} simétricos.

Palavras-chave: 1. Sistemas fotônicos. 2. Simetria \mathcal{PT} . 3. Oscilações de Bragg. 4. Aproximação paraxial.

Abstract

The spatial evolution of a pair of resonant Bragg modes through a medium characterized by a complex one-dimensional \mathcal{PT} -symmetric periodic relative electric permittivity is thoroughly investigated. By using the two wave model, analytic solutions of Maxwell's equations are derived in the nonparaxial regime in order to investigate the periodic energy exchange between the Bragg modes for the Hermitian optical lattices as well as for complex lattices and also to investigate the spatial evolution of the real part of the electric field that propagates through this medium. Three regimes defined by the symmetry breaking point are discussed: below it, above it and at it. These regimes are determined by the existence of four complex eigenvalues below the symmetry breaking point, which collide and coalesce into a pair of complex doubly degenerate eigenvalues at the breaking point. Above the critical value each member of the pair bifurcates into a pair of complex values and now they have a nonzero real part. In the Hermitian case, it is demonstrated that a complete reciprocal energy transfer between the pair of Bragg modes, in a manner similar to the Pendellösung effect known from X-ray diffraction by a crystal, takes place. When the optical lattice is complex, the dynamics of the energy transfer is completely different from the Hermitian case: below the symmetry breaking point there exist a very nonreciprocal beating-like oscillatory behavior of the energy transfer between the Bragg modes; above the symmetry breaking point the spatial evolution of the energy transfer grows unlimited but an oscillatory evolution still takes place; and at the symmetry breaking point the phenomenon of mode trapping does not occur in this nonparaxial regime (previously seen in \mathcal{PT} -symmetric optical lattices in the paraxial regime). For the complex lattice, all these regimes share the common features: existence of a preferable mode for which the energy is transferred and a spatial evolution of this transfer in a nonreciprocal fashion, some of the characteristics very well known of \mathcal{PT} -symmetric optical systems.

Keywords: 1. Photonic systems. 2. \mathcal{PT} symmetry. 3. Bragg oscillations. 4. Paraxial approximation.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Energias em função de N do Hamiltoniano dado na equação (1.32). Pode-se definir três regiões nesta figura: para $N \geq 2$ os autovalores são reais, discretos e positivos, para $1 < N < 2$ o espectro de H torna-se parcialmente complexo e para $N < 1$ não há mais autovalores reais e o espectro de autovalores é totalmente complexo. Em $N = 2$, ocorre uma quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} , que ocorre exatamente no caso do Hamiltoniano de um oscilador harmônico (cujas energias são dadas por $E_n = 2n + 1$). 23
- Figura 2 – Sistemas abertos onde existe um fluxo de probabilidade (ilustrado pelas setas azuis, que podem representar número de partículas, energia, etc.) que entra (a) ou sai (b) do sistema. (c) Quando estes sistemas interagem entre si, o fluxo de probabilidade que entra no sistema S_1 provém do sistema S_2 26
- Figura 3 – Energias do Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico dado pela equação (1.47). A quebra da simetria \mathcal{PT} no sistema ocorre quando $\Delta/\kappa = 1$ e claramente é possível distinguir as regiões onde as energias são totalmente reais ($\Delta/\kappa > 1$) ou complexas ($\Delta/\kappa < 1$). 28
- Figura 4 – (a) Partes real (linha contínua azul) e imaginária (linha pontilhada vermelha) do potencial \mathcal{PT} -simétrico dado na equação (2.25). (b) Estrutura de bandas correspondente a este potencial para $V_0 = 0,2$ (linha pontilhada vermelha) e $V_0 = 0,5$ (linha contínua azul). Note que abaixo do ponto de quebra espontânea de simetria existe um gap na estrutura de banda e exatamente no ponto de quebra esse gap fecha nas bordas da primeira zona de Brillouin. Em (c) e (d) estão ilustradas as partes real e imaginária, respectivamente, da estrutura de banda acima do ponto de quebra de simetria, para $V_0 = 0,7$ e C e R denotam valores complexos e reais de β , respectivamente. Acima do ponto de quebra de simetria, as bandas mostradas em (b) se juntam e formam uma banda com valores reais e complexos de β 33

- Figura 5 – (a) e (b) ilustram a evolução espacial da intensidade de um feixe gaussiano que se propaga numa rede ótica descrita pelo potencial da equação (2.25) para $V_0 = 0,49$ para dois ângulos de incidência distintos. Para um ângulo de incidência obtêm-se uma evolução espacial simétrica em relação ao eixo $x = 0$ enquanto que para o outro ângulo de incidência surge uma divisão do feixe incidente em outros três, sendo um com a maior parte da energia e esta evolução é completamente assimétrica. (c) e (d) representam as oscilações de potência nos casos descritos em (a) e (b), respectivamente. Duas evoluções completamente distintas são obtidas e um fato interessante é a presença de tais oscilações, uma vez que o espectro é real. 34
- Figura 6 – Propagação espacial do feixe ótico incidente no meio (a) sem perda nem ganho óticos (ou seja, no caso Hermitiano), (b) abaixo e (c) acima do ponto de quebra da simetria \mathcal{PT} . No caso Hermitiano a propagação é recíproca, no sentido em que independente se o feixe incide na guia de onda com ganho ótico (seta preta) ou na guia de onda com perda ótica (seta verde), a propagação é a mesma. Esta dinâmica muda quando o sistema está abaixo do ponto que quebra de simetria e torna-se completamente assimétrica acima do ponto de quebra, onde é possível notar que o feixe sempre se propaga na guia com ganho ótico. 35
- Figura 7 – Fenômeno da transparência induzida por perda ótica num sistema fotônico \mathcal{PT} -simétrico com perda ótica. Surpreendentemente, o fato deste sistema possui perda ótica não implica dizer que o feixe é absorvido, pelo contrário, a transmissão aumenta consideravelmente a medida que mais crômio é depositado sobre a guia de onda. 36
- Figura 8 – Partes real (linha preta) e imaginária (linha vermelha) da constante de propagação b para uma guia de onda descrita por uma permissividade elétrica relativa dada pela equação (2.28) e cuja largura é (a) 120 nm, (b) 60 nm e (c) 30 nm. No regime *subwavelength* ilustrado em (a) é possível ver uma quebra da simetria \mathcal{PT} no sistema, com dois modos cujas partes imaginárias da constante de propagação são complexos conjugados uma da outra. Diminuindo a largura da guia de onda, ilustrada em (b), é possível recuperar a simetria \mathcal{PT} depois que ela foi quebrada e em (c) é mostrado o regime *deep-subwavelength* onde não há a quebra da simetria para todo valor de α . Os círculos em (b) representam os campos elétricos ilustrados na Figura 9. Nesta figura, $p = 1,7$ 38

- Figura 9 – Perfis espaciais dos campos elétricos para os casos indicados pelos círculos na Figura 8(b) quando (a) $\alpha = 2,0$, (b) $\alpha = 4,5$ e (c) $\alpha = 9,5$. Antes da quebra da simetria \mathcal{PT} os perfis são todos simétricos e após a quebra eles se tornam bastante assimétricos. Após a recuperação da simetria \mathcal{PT} os perfis espaciais voltam a ser simétricos mas agora são mais estreitos em relação aos mostrados em (a). Nesta figura, $p = 1,7$ 39
- Figura 10 – Estrutura de banda para a situação de um meio periódico descrito por uma permissividade elétrica relativa dada pela equação (2.29) para (a) $\alpha = 0,6$, (b) $\alpha = 6,0$ e (c) $\alpha = 14,2$. Abaixo da quebra de simetria existe um gap entre as duas primeiras bandas da estrutura (ambas reais), no ponto de quebra de simetria \mathcal{PT} essas bandas se juntam e tornam-se complexas e a medida que o valor de α cresce, a simetria \mathcal{PT} do sistema é restaurada. Nesta figura, $d = 230$ nm e $p = 0,7$ 40
- Figura 11 – (a) O gap entre as bandas mostrado na Figura 10(c) permanece durante o intervalo $12,6 < \alpha < 16,3$, em seguida volta a fechar e o sistema sofre outra quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} . Com o aumento de α , o sistema recupera novamente a simetria e agora o gap envolve as três primeiras bandas da estrutura. Nesta figura, $d = 230$ nm e $p = 0,7$ 41
- Figura 12 – (a) Excitação de modos ressonantes de uma rede devido a uma onda plana; (b) modelo de duas ondas. 42
- Figura 13 – Evolução espacial da troca de energia espectral entre os modos $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ nas situações onde (a) o modo $\psi_1(z)$ possui inicialmente toda a energia espectral e (b) o modo $\psi_{-1}(z)$ possui inicialmente toda a energia espectral para $0 \leq \beta \leq 1/2$. Quando o sistema não possui perda nem ganho óticos, $\beta = 0$, é possível ver claramente um comportamento oscilatório recíproco da troca de energia espectral e a medida que β cresce a evolução torna-se cada vez mais assimétrica. Nesta figura, $\alpha = 0,5$ 42
- Figura 14 – Partes real e imaginária dos autovalores m_j para os casos onde o sistema é Hermitiano ($\varepsilon_I = 0$), abaixo ($\varepsilon_I=0,5$), no ponto ($\varepsilon_I = 1$) e acima ($\varepsilon_I = 1,5$) do ponto de quebra de simetria. Inicialmente existem quatro autovalores distintos e imaginários puros antes de eles colidirem no ponto de quebra de simetria, onde passam a ser degenerados, e logo depois voltam a ser quatro autovalores mas agora possuindo tanto parte imaginária quanto parte real. Nesta figura, $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$ 48
- Figura 15 – Determinante da matriz \mathbf{U} em função de ε_I . O determinante é diferente de zero quando $\varepsilon_I \neq 1$, implicando em autovetores linearmente independentes. É justamente no ponto de quebra de simetria que os autovetores tornam-se linearmente dependentes. Nesta figura, $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$ 50

Figura 16 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) e $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para (a) $\varepsilon_0 = 3$, (b) $\varepsilon_0 = 5$, (c) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$. No caso Hermitiano a evolução espacial acontece de forma simétrica e conservativa pois o meio não possui perda nem ganho. A linha preta pontilhada indica a situação onde a quantidade de energia espectral dos modos de Bragg são iguais.	52
Figura 17 – Oscilações do tipo fase e do tipo envelope para as funções inversão de população $W_1(z)$ (coluna esquerda) e $W_{-1}(z)$ (coluna direita) no caso Hermitiano para (a)-(b) $\varepsilon_0 = 3$, (c)-(d) $\varepsilon_0 = 5$, (e)-(f) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$	53
Figura 18 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$. A curva preta indica a permissividade elétrica relativa e o eixo superior algum de seus valores.	54
Figura 19 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) and $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para (a) $\varepsilon_0 = 3$, (b) $\varepsilon_0 = 5$, (c) $\varepsilon_0 = 7$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 0, 5$. Quando a permissividade elétrica relativa possui uma parte imaginária não-nula, surge uma evidente assimetria entre as funções inversão de população, gerando então um modo de Bragg preferencial. A linha preta pontilhada indica a situação onde a quantidade de energia espectral dos modos de Bragg são iguais.	56
Figura 20 – Oscilações do tipo fase e do tipo envelope para as funções inversão de população $W_1(z)$ (coluna esquerda) e $W_{-1}(z)$ (coluna direita) no caso abaixo da quebra de simetria para (a)-(b) $\varepsilon_0 = 3$, (c)-(d) $\varepsilon_0 = 5$, (e)-(f) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$	57
Figura 21 – Média espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) and $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para $\varepsilon_R = 1$. Note o caso Hermitiano onde as médias espaciais são nulas e também um comportamento divergente na média $\langle W_{-1} \rangle$ quando ε_I se aproxima de 1, significando $\psi_1(z)$ recebe cada vez mais energia durante maior parte da propagação.	58
Figura 22 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 0, 5$. Esta evolução claramente é assimétrica e depende da condição inicial do problema, em especial quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico possui maior contraste. As curvas pretas contínua e tracejada representam, respectivamente, as partes real e imaginária da permissividade relativa e a linha preta pontilhada está mostrada para indicar as regiões onde a parte imaginária de $\varepsilon(x)$ é positiva ou negativa.	59

- Figura 23 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) and $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para (a) $\varepsilon_0 = 3$, (b) $\varepsilon_0 = 5$, (c) $\varepsilon_0 = 7$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 1, 5$. Há uma evidente assimetria entre as evoluções e a amplitude das oscilações crescem muito rapidamente com a distância de propagação. A linha preta pontilhada indica a situação onde a quantidade de energia espectral dos modos de Bragg são iguais. 62
- Figura 24 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 1, 5$. Novamente, uma evolução claramente assimétrica ocorre e quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico possui maior contraste. As curvas pretas contínua e tracejada representam, respectivamente, as partes real e imaginária da permissividade relativa e a linha preta pontilhada está mostrada para indicar as regiões onde a parte imaginária de $\varepsilon(x)$ é positiva ou negativa. 64
- Figura 25 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_{-1}(z)$ e $W_1(z)$ para (a)-(b) $\varepsilon_0 = 3$, (c)-(d) $\varepsilon_0 = 5$, (e)-(f) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$. Estas evoluções são completamente distintas dependendo da condição inicial escolhida e particularmente quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, $W_{-1}(z)$ cresce ilimitadamente com o quadrado da distância de propagação. A curva preta representa a parábola $[4(\varepsilon_0 - 1)]^{-1} z^2$ 66
- Figura 26 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$. Novamente uma evolução assimétrica ocorre e quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico possui valores maiores e desta vez crescendo linearmente com a distância de propagação. As curvas pretas contínua e tracejada representam, respectivamente, as partes real e imaginária da permissividade relativa e a linha preta pontilhada está mostrada para indicar as regiões onde a parte imaginária de $\varepsilon(x)$ é positiva ou negativa. 67

Sumário

1	MECÂNICA QUÂNTICA \mathcal{PT}-SIMÉTRICA	16
1.1	Uma breve revisão da mecânica quântica Hermitiana	16
1.2	Introdução à mecânica quântica \mathcal{PT}-simétrica	17
1.2.1	Operadores paridade e inversão temporal	17
1.2.2	Hamiltonianos \mathcal{PT} -simétricos	21
1.2.3	Comparação entre as mecânicas quânticas Hermitiana e \mathcal{PT} -simétrica	25
1.3	Relação entre sistemas \mathcal{PT}-simétricos com sistemas abertos e fechados	26
2	ÓTICA \mathcal{PT}-SIMÉTRICA	29
2.1	Equações de Maxwell e a equação paraxial de onda	29
2.2	Implementação da simetria \mathcal{PT} na ótica	31
2.3	Indo além da aproximação paraxial	36
2.4	Oscilações de potência de Bragg \mathcal{PT}-simétricas	41
3	OSCILAÇÕES DE BRAGG ELETROMAGNÉTICAS ALÉM DA APROXIMAÇÃO PARAXIAL EM MEIOS PERIÓDICOS COM SIMETRIA \mathcal{PT}	44
3.1	Teoria geral	44
3.2	Modelo de duas ondas	46
3.3	Oscilações de Bragg Hermitianas	50
3.3.1	Função inversão de população	52
3.3.2	Campo elétrico	54
3.4	Oscilações de Bragg \mathcal{PT}-simétricas abaixo do ponto de quebra de simetria	55
3.4.1	Função inversão de população	55
3.4.2	Campo elétrico	58
3.5	Oscilações de Bragg \mathcal{PT}-simétricas acima do ponto de quebra de simetria	59
3.5.1	Função inversão de população	61
3.5.2	Campo elétrico	62
3.6	Oscilações de Bragg \mathcal{PT}-simétricas no ponto de quebra de simetria	64
3.6.1	Função inversão de população	65
3.6.2	Campo elétrico	66
4	CONCLUSÕES	68

REFERÊNCIAS	70
--------------------	-----------

1 Mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos básicos da mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica, a fim de familiarizar o leitor com algumas ideias importantes que serão estudadas no decorrer deste texto. A discussão começa com uma breve análise da mecânica quântica Hermitiana dada na seção 1.1, em seguida a mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica propriamente dita é abordada na seção 1.2 e por fim, na seção 1.3, a relação entre sistemas \mathcal{PT} -simétricos com sistemas abertos e fechados é estudada.

1.1 Uma breve revisão da mecânica quântica Hermitiana

A mecânica quântica fornece os postulados necessários para a construção de um formalismo matemático coerente do mundo microscópico. Dentre esses postulados estão (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991):

- O estado de um sistema físico num dado instante t é inteiramente determinado por um ket ou uma função de onda que pertence a um espaço de Hilbert.
- A toda grandeza física mensurável está associada um operador Hermitiano chamado de observável.
- O possível resultado de uma medida dessa grandeza física é um dos autovalores do observável associado a essa grandeza física.
- A evolução temporal de um sistema físico é determinada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

onde $H(t)$ é o operador Hamiltoniano associado a energia total do sistema.

Para uma teoria quântica baseada no operador Hamiltoniano H de um sistema, três condições devem ser satisfeitas (BENDER, 2007): (i) o espectro de autovalores de H , que são as energias permitidas ao sistema, deve ser real e possuir um estado fundamental; (ii) as autofunções de H pertencem a um espaço de Hilbert que possui um produto interno que leva a uma norma positiva; e (iii) H deve ser tal que a evolução temporal do sistema seja unitária de modo a garantir a conservação da probabilidade. Estas condições são satisfeitas para um operador Hamiltoniano Hermitiano, $H^\dagger = H$. Desta maneira, para uma teoria quântica baseada num operador Hamiltoniano Hermitiano, devem valer as seguintes condições (BENDER, 2007):

- Para um dado Hamiltoniano é possível escrever a equação de Schrödinger independente do tempo de modo a obter as respectivas autofunções $\varphi_n(x)$ e autovalores E_n desse operador.
- Estas autofunções satisfazem um produto interno dado por

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int \varphi_n^*(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm} \quad (1.2)$$

e esta definição do produto interno garante uma norma unitária para uma dada autofunção de H .

- Dada uma função de onda $\rho(x)$ pertencente ao espaço de Hilbert gerado pelas autofunções $\varphi_n(x)$ de H , é possível escrever $\rho(x)$ como

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (1.3)$$

onde c_n são constantes complexas. Ou seja, as autofunções do operador Hamiltoniano Hermitiano são completas e a relação de completude é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(x)\varphi_n(x') = \delta(x - x'). \quad (1.4)$$

1.2 Introdução à mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica

É interessante primeiro revisar algumas propriedades dos operadores paridade \mathcal{P} e inversão temporal \mathcal{T} , de uma partícula sem spin, antes de iniciar o estudo da mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica e o motivo do porquê de estudar especificamente esses operadores será visto mais a frente.

1.2.1 Operadores paridade e inversão temporal

O operador paridade \mathcal{P} é definido através das seguintes operações sobre os operadores posição \mathbf{x} e momento \mathbf{p} (considerando o caso tridimensional)¹:

$$\mathcal{P}^\dagger \mathbf{x} \mathcal{P} = -\mathbf{x}, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{P}^\dagger \mathbf{p} \mathcal{P} = -\mathbf{p} \quad (1.6)$$

e

$$\mathcal{P}^\dagger c \mathbf{I} \mathcal{P} = c \mathbf{I}, \quad (1.7)$$

¹ Esta seção será baseada inteiramente nas referências (SHANKAR, 2012), (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991) e (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014).

onde c é uma constante arbitrária complexa e \mathbf{I} é o operador identidade, e essas definições implicam que

$$\mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle = |-\mathbf{x}\rangle \quad (1.8)$$

e

$$\mathcal{P} |\mathbf{p}\rangle = |-\mathbf{p}\rangle, \quad (1.9)$$

onde esta última é demonstrada como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} |\mathbf{p}\rangle &= \int d^3r |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \mathcal{P} |\mathbf{x}\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} |-\mathbf{x}\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'/\hbar} |\mathbf{x}'\rangle \\ &= |-\mathbf{p}\rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Calculando agora $\mathcal{P}^2 |\mathbf{x}\rangle$ obtém-se

$$\mathcal{P}^2 |\mathbf{x}\rangle = \mathcal{P} |-\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle \Rightarrow \mathcal{P}^2 = \mathbf{I}, \quad (1.11)$$

logo

- $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$
- os autovalores de \mathcal{P} são ± 1
- \mathcal{P} é Hermitiano e unitário
- $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$
- \mathcal{P} é um operador linear

e assim os autovetores de \mathcal{P} com autovalor $+1$ (-1) possuem paridade par (ímpar), implicando também que as autofunções no espaço da posição ou no espaço do momento são autofunções pares ou autofunções ímpares, justamente pela ação desse operador nos kets $|\mathbf{x}\rangle$ e $|\mathbf{p}\rangle$ dadas nas equações (1.8) e (1.9). No espaço das funções de onda tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P} |\psi\rangle &= \mathcal{P} \int d^3r |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \\ &= \int d^3r |-\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \\ &= \int d^3r |\mathbf{x}'\rangle \langle -\mathbf{x}' | \psi \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{P}|\psi\rangle &= \mathcal{P} \int d^3p |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{p}|\psi\rangle \\ &= \int d^3p |-\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|\psi\rangle \\ &= \int d^3p |\mathbf{p}'\rangle \langle -\mathbf{p}'|\psi\rangle,\end{aligned}\tag{1.13}$$

seguinto então que se $\langle \mathbf{x}|\psi\rangle = \psi(\mathbf{x})$ e $\langle \mathbf{p}|\psi\rangle = \psi(\mathbf{p})$ logo

$$\langle \mathbf{x}|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\mathbf{x})\tag{1.14}$$

e

$$\langle \mathbf{p}|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-\mathbf{p}).\tag{1.15}$$

Diante do exposto, conclui-se que a ação do operador paridade \mathcal{P} é trocar o sinal de todas as componentes do operador posição e do operador momento da partícula e não trocar uma constante complexa pelo seu complexo conjugado (esta última é a grande diferença entre este operador e o operador inversão temporal, como será visto a seguir). Para um dado sistema físico cujo operador Hamiltoniano é escrito como $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, tal sistema é dito ser invariante sob paridade se

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = H(-\mathbf{x}, -\mathbf{p}, t),\tag{1.16}$$

implicando em

$$[\mathcal{P}, H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] = 0\tag{1.17}$$

o que por sua vez torna possível encontrar uma base formada por autoestados comuns a ambos os operadores. Considerando estados ligados em sistemas unidimensionais (que são não-degenerados²), tem-se que cada autovetor de H é necessariamente um autovetor de \mathcal{P} . De fato, para um oscilador harmônico quântico unidimensional, cujo Hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,\tag{1.18}$$

portanto satisfazendo a equação (1.16), tem-se que as autofunções do oscilador possuem paridade igual a $(-1)^n$, onde n é o número quântico associado a autoenergia do sistema³. Ainda considerando um sistema invariante sob paridade, tem-se também que o operador evolução temporal $U(t)$ para tal sistema comuta com o operador paridade (uma vez que $U(t)$ é função de H),

$$[\mathcal{P}, U(t)] = 0,\tag{1.19}$$

² Considerar estados não-degenerados é uma hipótese importante e exemplos de sistemas físicos degenerados onde os autoestados de H não são autoestados de \mathcal{P} podem ser encontrados em (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014).

³ As referências (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014) e (SHANKAR, 2012) são sugeridas ao leitor interessado sobre um exemplo de sistema físico que viola a simetria de paridade.

e fisicamente isto implica que se num dado instante inicial t_0 o estado quântico do sistema é dado por $|\psi(t_0)\rangle$ e considerando ainda o estado $\mathcal{P}|\psi(t_0)\rangle$, então para um instante $t > t_0$ esses estados devem estar relacionados pela transformação de paridade.

O operador inversão temporal \mathcal{T} é definido através das seguintes ações

$$\mathcal{T}^\dagger \mathbf{x} \mathcal{T} = \mathbf{x}, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{T}^\dagger \mathbf{p} \mathcal{T} = -\mathbf{p} \quad (1.21)$$

e

$$\mathcal{T}^\dagger c \mathbf{I} \mathcal{T} = c^* \mathbf{I}, \quad (1.22)$$

de modo que a ação de \mathcal{T} nos kets $|\mathbf{x}\rangle$ e $|\mathbf{p}\rangle$ é

$$\mathcal{T} |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle \quad (1.23)$$

e

$$\mathcal{T} |\mathbf{p}\rangle = |-\mathbf{p}\rangle. \quad (1.24)$$

O operador inversão temporal possui as seguintes propriedades:

- \mathcal{T} é um operador antilinear e antiunitário
- os autovalores de \mathcal{T} são ± 1
- $\mathcal{T}^2 = \mathbf{I}$

e no espaço das funções de onda tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{T} |\psi\rangle &= \mathcal{T} \int d^3r |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \\ &= \int d^3r |\mathbf{x}\rangle \mathcal{T} \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \\ &= \int d^3r |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle^*, \end{aligned} \quad (1.25)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{T} |\psi\rangle &= \mathcal{T} \int d^3p |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \\ &= \int d^3p |-\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle^* \\ &= \int d^3p' |\mathbf{p}'\rangle \langle -\mathbf{p}' | \psi \rangle^*, \end{aligned} \quad (1.26)$$

implicando que o operador inversão temporal transforma $\psi(\mathbf{x})$ em $\psi^*(\mathbf{x})$ e $\psi(\mathbf{p})$ em $\psi^*(-\mathbf{p})$. Um sistema físico que seja invariante sob inversão temporal possui um operador Hamiltoniano $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ tal que

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = H^*(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, -t), \quad (1.27)$$

de modo que

$$[\mathcal{T}, H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)] = 0, \quad (1.28)$$

comutando também com o operador evolução temporal $U(t)$. Fisicamente, um sistema que possui invariância sob reversão temporal é tal que se sua evolução temporal for revertida, todos os processos físicos que ocorrem nesse sistema serão idênticos ao do sistema antes da reversão temporal. Por fim, um ponto que deve ser mencionado é que após a ação de \mathcal{P} e \mathcal{T} sobre os operadores posição e momento, a relação de comutação canônica $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}I$ permanece válida.

1.2.2 Hamiltonianos \mathcal{PT} -simétricos

Tendo em mente as definições e propriedades dos operadores \mathcal{P} e \mathcal{T} , a ação do operador conjunto \mathcal{PT} sobre um Hamiltoniano dado por

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

, onde $V(\mathbf{x})$ pode ser um potencial complexo, será

$$\mathcal{P}^\dagger \mathcal{T}^\dagger H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \mathcal{PT} = H^*(-\mathbf{x}, \mathbf{p}, -t) \quad (1.30)$$

e para que H seja invariante sob paridade e inversão temporal, deve-se ter

$$[H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \mathcal{PT}] = 0 \Rightarrow H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = H^*(-\mathbf{x}, \mathbf{p}, -t) \Rightarrow V(\mathbf{x}) = V^*(-\mathbf{x}), \quad (1.31)$$

onde a última igualdade nesta equação implica numa condição necessária (mas não suficiente) para que um operador Hamiltoniano seja \mathcal{PT} -simétrico.

No trabalho (BENDER; BOETTCHER, 1998) os autores reestudaram a Hermiticidade do operador Hamiltoniano como condição necessária para se obter um espectro de autovalores reais, investigando uma classe de Hamiltonianos dada por

$$H = p^2 - (ix)^N, \quad (1.32)$$

onde N é real. Note que estes Hamiltonianos não comutam com os operadores paridade e inversão temporal *individualmente*, porém comutam com ambos operadores *simultaneamente*

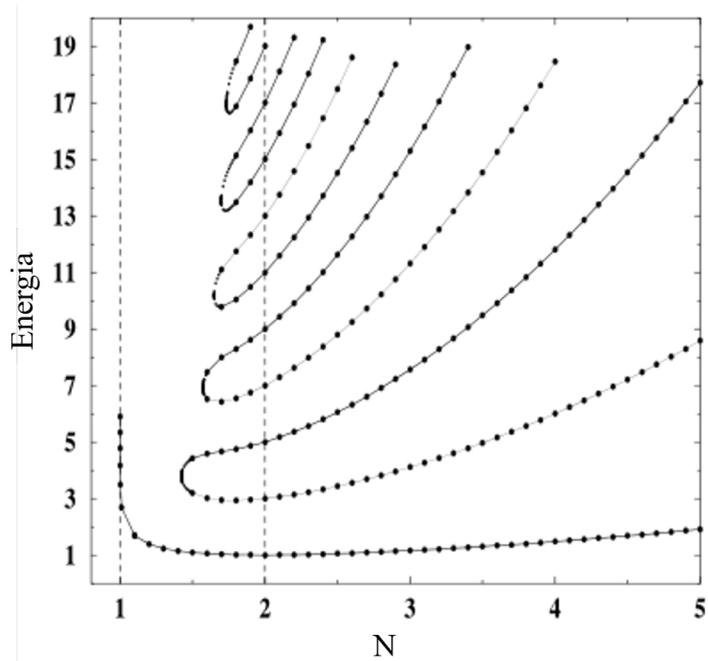
para todo N real. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned}
H - \mathcal{PT}H\mathcal{PT} &= p^2 - (ix)^N - \mathcal{PT}(p^2 - (ix)^N)\mathcal{PT} \\
&= p^2 - (ix)^N - \mathcal{PT}p^2\mathcal{PT} + \mathcal{PT}(ix)^N\mathcal{PT} \\
&= p^2 - (ix)^N - \mathcal{PT}p^2\mathcal{TP} + \mathcal{PT}(ix)^N\mathcal{TP} \\
&= p^2 - (ix)^N - \mathcal{P}(-p)^2\mathcal{P} + \mathcal{P}(-i)^N x^N \mathcal{P} \\
&= p^2 - (ix)^N - p^2 + (-i)^N \mathcal{P}x^N \mathcal{P} \\
&= -(ix)^N + (-i)^N (-x)^N \\
&= -(ix)^N + (-1)^{2N} (ix)^N \\
&= -(ix)^N + (ix)^N \\
&= 0
\end{aligned}$$

e portanto H dado pela equação (1.32) comuta com \mathcal{PT} para todo N real. Os autores mostraram que é possível obter autovalores reais para determinados valores de N justamente pelo fato deste Hamiltoniano ser invariante sob paridade e inversão temporal simultaneamente (neste texto, um Hamiltoniano deste tipo será denotado por Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico). De fato, utilizando métodos assintóticos e numéricos, foi mostrado que o espectro de autovalores em função de N é como mostrado na Figura 1. É possível ver que para $N \geq 2$ o Hamiltoniano possui infinitos autovalores que são discretos, reais e positivos e esta região é comumente chamada de *fase não-quebrada* do Hamiltoniano. Para $1 < N < 2$ existe um número finito de autovalores reais e um número infinito de autovalores que formam pares de números complexos conjugados (que não estão mostrados na Figura 1). Para $N \rightarrow 1^+$ o número de autovalores reais diminui até o ponto onde só existe um autovalor real e na situação onde $N < 1$ não há autovalores reais, apenas autovalores complexos e desta maneira para $N < 2$ tem-se uma região chamada *fase quebrada*. Uma prova rigorosa de que o espectro de H para $N \geq 2$ é real, discreto e positivo é dada no trabalho (DOREY; DUNNING; TATEO, 2001). Exatamente em $N = 2$, ou seja, para o caso do Hamiltoniano de um oscilador harmônico (com energias dadas por $E_n = 2n + 1$ devido às normalizações feitas no Hamiltoniano) ocorre a chamada *quebra espontânea da simetria \mathcal{PT}* no sistema, onde o espectro de autovalores do Hamiltoniano dado pela equação (1.32) deixa de ser totalmente real para tornar-se parcialmente ou completamente complexo⁴ e $N = 2$ é chamado de ponto excepcional (ponto excepcional é um assunto que gera resultados interessantes tanto matematicamente quanto fisicamente e o leitor é sugerido a ler o artigo (HEISS, 2012) para uma revisão deste assunto). Com a introdução dessa classe de Hamiltonianos \mathcal{PT} -simétricos, vários estudos foram publicados a respeito

⁴ Os termos “fase não-quebrada”, “fase quebrada” e “quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} ” podem indicar que esta simetria deixa de existir. A simetria \mathcal{PT} está sempre presente e o leitor deve ter em mente que esses termos implicam que há uma transição de um espectro de autovalores reais para um que é parcialmente ou totalmente complexo.

Figura 1 – Energias em função de N do Hamiltoniano dado na equação (1.32). Pode-se definir três regiões nesta figura: para $N \geq 2$ os autovalores são reais, discretos e positivos, para $1 < N < 2$ o espectro de H torna-se parcialmente complexo e para $N < 1$ não há mais autovalores reais e o espectro de autovalores é totalmente complexo. Em $N = 2$, ocorre uma quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} , que ocorre exatamente no caso do Hamiltoniano de um oscilador harmônico (cujas energias são dadas por $E_n = 2n + 1$).



Fonte: Retirada da referência (BENDER; BOETTCHER, 1998).

das propriedades matemáticas e físicas desses operadores e é importante discutir algumas nuances que uma mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica possui.

Para iniciar, considere o caso $N = 3$ no Hamiltoniano dado pela equação (1.32), ou seja,

$$H = p^2 + ix^3. \quad (1.33)$$

A função potencial neste caso é $V(x) = ix^3$, um potencial puramente imaginário! No caso de uma partícula clássica submetida a esse potencial, a força que atua sobre ela é também complexa e desta forma a dinâmica dessa partícula ocorre agora no plano complexo. No caso de uma partícula quântica, a Figura 1 indica que essa partícula possui energias reais, positivas e discretas, mesmo o Hamiltoniano sendo não-Hermitiano. Outro caso muito interessante ocorre para $N = 4$, onde o potencial é agora dado por $V(x) = -x^4$: classicamente é esperado que uma partícula submetida a esse potencial possua um equilíbrio instável em $x = 0$ e a força que atua sobre ela logo empurraria para $\pm\infty$; no caso quântico o que ocorre é a localização da partícula durante a maior parte do tempo exatamente na origem e as energias dessa partícula são também reais, positivas e discretas (o leitor interessado neste caso em particular é referido ao artigo (BENDER, 2012)).

Um ponto muito importante e extremamente sutil é a “prova” de que um operador Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico possui autovalores reais. De acordo com a equação (1.31) é possível obter um conjunto de autofunções que são comuns a H e \mathcal{PT} , aqui denotada por φ , de modo que as respectivas equações de autovalor para esses operadores são $H\varphi = E\varphi$ e $\mathcal{PT}\varphi = \lambda\varphi$. Logo (BENDER; BRODY; JONES, 2003),

$$\begin{aligned} H\varphi &= E\varphi & \mathcal{PT}\varphi &= \lambda\varphi \\ \mathcal{P}TH\varphi &= \mathcal{P}TE\varphi & \mathcal{P}T\mathcal{P}T\varphi &= \mathcal{P}T\lambda\varphi \\ H\mathcal{P}T\varphi &= E^*\mathcal{P}T\varphi & \mathcal{P}^2\mathcal{T}^2\varphi &= \lambda^*\mathcal{P}T\varphi \\ H\varphi &= E^*\varphi & \varphi &= \lambda^*\lambda\varphi \\ E &= E^* & |\lambda|^2 &= 1 \end{aligned}$$

e das equações acima pode-se concluir que quando o operador Hamiltoniano é \mathcal{PT} -simétrico seus autovalores são reais. Observando a Figura 1 percebe-se que nem todos os autovalores do Hamiltoniano em questão são reais, de modo que a prova dada acima não é totalmente válida. Eis os motivos: quando um operador *linear* comuta com H eles compartilham as mesmas autofunções e no caso tratado aqui a linearidade do operador \mathcal{PT} não existe (este operador é antilinear) e por este motivo deve-se assumir primeiramente que a fase do Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico *não* está quebrada. Com efeito, na fase não-quebrada, H e \mathcal{PT} compartilham as mesmas autofunções mas na fase quebrada isto não ocorre (apesar destes operadores ainda comutarem).

Um operador Hamiltoniano Hermitiano possui um conjunto ortonormal de autofunções que geram um espaço de Hilbert com uma norma positiva e, além disso, a Hermiticidade do Hamiltoniano garante uma evolução temporal unitária para um dado sistema físico, como visto no começo deste capítulo. No caso do Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico dado na equação (1.32), uma evolução unitária somente é possível na sua fase não-quebrada (onde os autovalores são reais) e nesta fase é necessária ainda a introdução de um outro operador de simetria, denotado por \mathcal{C} , de modo a se construir um espaço de Hilbert com as mesmas características do espaço de Hilbert gerado pelas autofunções do operador Hamiltoniano Hermitiano (BENDER; BRODY; JONES, 2002). Começando com a condição de completude para as autofunções de H , é possível mostrar que ela é dada por

$$\sum_n (-1)^n \varphi_n(x)\varphi_n(x') = \delta(x - x'), \quad (1.34)$$

onde o fator $(-1)^n$ não é presente no caso da mecânica quântica Hermitiana. Para o produto interno, seria intuitivo escrevê-lo como

$$(\phi, \rho) = \int [\mathcal{PT}\phi(x)] \rho(x) dx, \quad (1.35)$$

onde $\mathcal{PT}\phi(x) = \phi^*(-x)$, e a condição de ortonormalidade das autofunções do Hamiltoniano é dada por

$$(\varphi_n, \varphi_m) = (-1)^n \delta_{nm} \quad (1.36)$$

e desta maneira é possível concluir que a norma das autofunções não é positiva por causa do fator $(-1)^n$ que gera uma troca no sinal da norma. Para corrigir este problema, de modo que a mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica seja uma teoria física coerente, deve-se criar o operador de simetria \mathcal{C} (que é *linear*) dado por

$$\mathcal{C} = \sum_n \varphi_n(x)\varphi_n(x'), \quad (1.37)$$

onde sua ação nas autofunções do Hamiltoniano é

$$\mathcal{C}\varphi_n = (-1)^n\varphi_n. \quad (1.38)$$

Desta maneira, a condição de completeza dada pela equação (1.34) e a definição de produto interno numa mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica são dadas, respectivamente, por

$$\sum_n \varphi_n(x)[\mathcal{CPT}\varphi_n(x')] = \delta(x - x') \quad (1.39)$$

e

$$(\phi, \rho) = \int_C [\mathcal{CPT}\phi(x)]\rho(x)dx, \quad (1.40)$$

onde C é o contorno de integração no plano complexo definido anteriormente, e agora este produto interno define uma norma positiva pois \mathcal{C} contribui com um fator -1 nos estados de norma negativa. É interessante ressaltar que na mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica, o produto interno é *dinamicamente determinado*, ou seja, depende do operador Hamiltoniano do problema. Considere agora uma função de onda num instante inicial t_0 , $\psi(x, t_0)$, pertencente ao espaço de Hilbert gerado pelas autofunções $\varphi_n(x)$ de H . Num instante posterior $t > t_0$ a função de onda é dada por

$$\psi(x, t) = e^{-iHt}\psi(x, t_0) \quad (1.41)$$

e a norma \mathcal{CPT} de $\psi(x, t)$ é dada então por

$$(\psi(x, t), \psi(x, t)) = (\psi(x, t_0), \psi(x, t_0)), \quad (1.42)$$

uma vez que $[H, \mathcal{CPT}] = 0$ recupera-se a condição de unitariedade da evolução temporal de um sistema físico numa mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica.

1.2.3 Comparação entre as mecânicas quânticas Hermitiana e \mathcal{PT} -simétrica

Assim como foi mostrado na seção 1.1, abaixo seguem alguns pontos a respeito da mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica (BENDER, 2007):

- As autofunções do operador Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico são também autofunções do operador conjunto \mathcal{PT} na fase não-quebrada, onde os autovalores do Hamiltoniano são todos reais. Na fase quebrada, H e \mathcal{PT} não compartilham do mesmo conjunto de autofunções (apesar desses operadores ainda comutarem) e o espectro de autovalores de H torna-se parcialmente ou totalmente complexo.

- Na fase não-quebrada do operador Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico é possível definir um outro operador linear de simetria, \mathcal{C} , dado pela equação (1.37).
- A expressão para o produto interno de duas funções de onda pertencentes ao espaço de Hilbert gerado pelas autofunções de H é dada agora pela equação (1.40) e a relação de completeza para as autofunções de H é dada pela equação (1.39).

1.3 Relação entre sistemas \mathcal{PT} -simétricos com sistemas abertos e fechados

Sejam S_1 e S_2 dois sistemas, inicialmente sem interação um com o outro, descritos pelas seguintes matrizes Hamiltonianas:

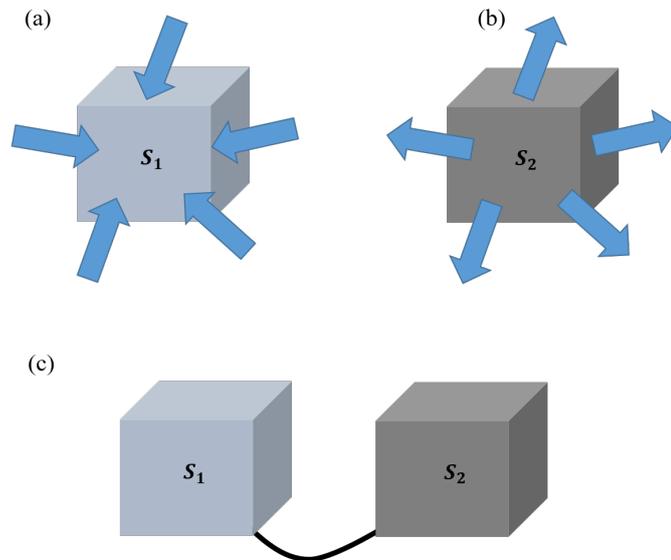
$$H_{S_1} = (i\kappa) \quad (1.43)$$

e

$$H_{S_2} = (-i\kappa), \quad (1.44)$$

onde κ é uma constante real e positiva, conforme a Figura 2. O operador evolução temporal

Figura 2 – Sistemas abertos onde existe um fluxo de probabilidade (ilustrado pelas setas azuis, que podem representar número de partículas, energia, etc.) que entra (a) ou sai (b) do sistema. (c) Quando estes sistemas interagem entre si, o fluxo de probabilidade que entra no sistema S_1 provém do sistema S_2 .



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

para cada sistema é, considerando um instante inicial $t = 0$,

$$U_{S_1}(t) = e^{-iH_{S_1}t} = e^{\kappa t} \quad (1.45)$$

e

$$U_{S_2}(t) = e^{-iH_{S_2}t} = e^{-\kappa t} \quad (1.46)$$

e para $t \rightarrow \infty$ obtem-se $U_{S_1}(t) \rightarrow \infty$ e $U_{S_2}(t) \rightarrow 0$, de modo que a norma da função de onda do sistema S_1 cresce indefinidamente no tempo enquanto que a norma da função de onda do sistema S_2 decresce até chegar a zero. Isto implica que o primeiro sistema é aberto e há um fluxo de probabilidade (que pode ser número de partículas, energia, etc.) entrando no mesmo, e o segundo sistema também é aberto, onde agora há um fluxo de probabilidade saindo do mesmo. Estas situações estão ilustradas na Figura 2(a) e Figura 2(b) a seguir. Quando esses sistemas interagem entre si, situação ilustrada na Figura 2(c), o fluxo de probabilidade que entra no sistema S_1 é devido ao fluxo de probabilidade que sai do sistema S_2 . Esta interação pode ser caracterizada por uma constante (real) de acoplamento Δ de modo que a matriz que representa o operador Hamiltoniano do sistema $S_1 + S_2$ é dada por

$$H_{S_1+S_2} = \begin{pmatrix} i\kappa & \Delta \\ \Delta & -i\kappa \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

e os autovalores podem ser escritos como

$$\frac{E_{\pm}}{\kappa} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\kappa}\right)^2 - 1}. \quad (1.48)$$

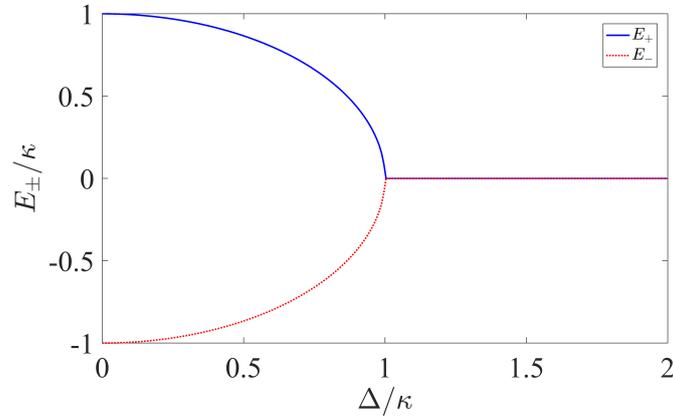
Este Hamiltoniano não Hermitiano porém é \mathcal{PT} -simétrico e para mostrar esta última característica basta lembrar que a representação matricial do operador paridade é dada por

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e como o operador inversão temporal realiza a mudança $i \rightarrow -i$ é fácil mostrar que $[H_{S_1+S_2}, \mathcal{PT}] = 0$. Para $\Delta/\kappa > 1$ ($\Delta/\kappa < 1$) os autovalores são inteiramente reais (complexos) e para $\Delta/\kappa = 1$ ocorre a quebra espontânea de simetria no sistema. Essas situações estão ilustradas na Figura 3. Este exemplo bem simples serve para chamar atenção para o fato que sistemas físicos \mathcal{PT} -simétricos estão situados entre sistemas completamente abertos e sistemas completamente fechados. Outro ponto importante está relacionado com a constante κ relacionada a taxa com a qual o fluxo de probabilidade entra, no caso do sistema S_1 , e sai, no caso do sistema S_2 : para que a simetria \mathcal{PT} no sistema exista, é preciso que κ seja igual para ambos os sistemas. De fato, considerando que o sistema S_1 , por exemplo, possui agora uma taxa de ganho do fluxo de probabilidade igual a κ' , $\kappa' > 0$, então aplicando o operador \mathcal{PT} ao sistema $S_1 + S_2$ ainda seria possível distinguir cada sistema e por isso que a taxa de ganho e perda do fluxo de probabilidade dos sistemas S_1 e S_2 devem ser iguais.

Com isto, encerra-se aqui este capítulo bem introdutório a respeito da mecânica quântica \mathcal{PT} -simétrica. Todavia, este é um assunto extremamente vasto e com ramificações

Figura 3 – Energias do Hamiltoniano \mathcal{PT} -simétrico dado pela equação (1.47). A quebra da simetria \mathcal{PT} no sistema ocorre quando $\Delta/\kappa = 1$ e claramente é possível distinguir as regiões onde as energias são totalmente reais ($\Delta/\kappa > 1$) ou complexas ($\Delta/\kappa < 1$).



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

em outras áreas da física como teoria quântica de campos e mecânica clássica e, portanto, comentar a respeito de todas as características desta nova visão da mecânica quântica deixaria este capítulo muito longo e fora do objetivo específico deste texto, que é a discussão de sistemas óticos \mathcal{PT} -simétricos. O leitor interessado é referido a ler, além das referências deste capítulo, os trabalhos (BENDER, 2005) e (BENDER; BOETTCHER; MEISINGER, 1999). A ótica tornou-se a área da física onde foi possível estudar experimentalmente os efeitos da simetria \mathcal{PT} em um sistema físico e esta discussão será apresentada no capítulo a seguir.

2 Ótica \mathcal{PT} -simétrica

Neste capítulo será discutida a introdução da simetria \mathcal{PT} na ótica, onde foi possível verificar comportamentos que até então não existiam em sistemas óticos Hermitianos como por exemplo unidirecionalidade da propagação de um campo elétrico, oscilações de potência, transparência induzida por perda ótica, dentre outros. A discussão começa com a dedução da equação paraxial de onda feita na seção 2.1; na seção 2.2 alguns exemplos de sistemas óticos \mathcal{PT} -simétricos são apresentados; na seção 2.3 é apresentada a ótica \mathcal{PT} -simétrica para sistemas onde a aproximação paraxial não se aplica; e por fim, na seção 2.4 é apresentado o efeito das oscilações de potência induzidas por ressonância de Bragg.

2.1 Equações de Maxwell e a equação paraxial de onda

Considere um meio dielétrico, não-magnético, linear, não-dispersivo, heterogêneo, isotrópico e sem cargas ou correntes livres. Para uma radiação monocromática, os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ podem ser escritos como (SALEH; TEICH; SALEH, 1991):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right] \quad (2.1)$$

e

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right]. \quad (2.2)$$

As equações de Maxwell para $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ neste meio são

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.5)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.6)$$

onde $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\text{vac}} [1 + \chi(\mathbf{r})]$ e $\mu = \mu_{\text{vac}}$ (ε_{vac} e μ_{vac} ¹ são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética, respectivamente, do vácuo) são a permissividade elétrica relativa e a permeabilidade magnética do meio e valem também as relações constitutivas

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} \quad (2.7)$$

¹ As notações ε_{vac} e μ_{vac} foram adotadas ao invés das comumente vistas ε_0 e μ_0 pois no Capítulo 3 estas notações trariam ambiguidades em relação a determinados termos.

e

$$\mathbf{B} = \mu_{\text{vac}} \mathbf{H}. \quad (2.8)$$

É possível obter uma equação apenas para o campo elétrico a partir de (2.3), (2.4) e (2.6). De fato, calculando o rotacional de (2.4) e usando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ tem-se

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.9)$$

onde $n(\mathbf{r})$ é o índice de refração do meio e é dado por

$$n(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon_{\text{vac}}}}. \quad (2.10)$$

Para um vetor polarização \mathbf{P} linear, é possível escrever o campo elétrico como uma quantidade escalar (AGRAWAL, 2000). Considere um campo elétrico $E(x, z)$ com uma polarização ao longo do eixo y mas se propagando no plano (x, z) , sendo z a distância de propagação e x a distância transversal à direção de propagação. Considere também que o índice de refração dependa apenas da distância transversal à propagação, de modo que $n(\mathbf{r}) = n(x)$, e que $n^2(x)$ possa ser escrito como (HESKETH; JONES, 2010)

$$n^2(x) = [n_0 + \Delta n(x)]^2 \approx n_0^2 + 2n_0 \Delta n(x), \quad (2.11)$$

com $\Delta n(x) \ll n_0$. Com as considerações acima é possível reescrever (2.9) como

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial z^2} + k_0^2 E(x, z) + \frac{2k_0^2}{n_0} \Delta n(x) E(x, z) = 0, \quad (2.12)$$

onde $k_0 = n_0 \omega / c$. O campo elétrico pode ser escrito como o produto de uma função envelope $U(x, z)$ por uma onda plana $e^{ik_0 z}$ que se propaga ao longo do eixo z

$$E(x, z) = U(x, z) e^{ik_0 z} \quad (2.13)$$

e desta forma é possível reescrever (2.12) como

$$\frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial U(x, z)}{\partial z} + \frac{2k_0^2}{n_0} \Delta n(x) U(x, z) = 0 \quad (2.14)$$

É conveniente redefinir as distâncias x e z como

$$x \rightarrow \frac{x}{x_0} \quad (2.15)$$

e

$$z \rightarrow \frac{z}{2k_0 x_0^2}, \quad (2.16)$$

onde x_0 é uma distância característica transversal a direção de propagação e muito maior que o comprimento de onda da onda eletromagnética (comumente esta distância é dada pelo raio do spot do laser, por exemplo). Desta forma, equação (2.12) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial x^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial z^2} + i \frac{\partial U(x, z)}{\partial z} + \frac{2k_0^2 x_0^2}{n_0} \Delta n(x) U(x, z) = 0, \quad (2.17)$$

onde $\eta = 1/(2k_0x_0)$. Uma vez que sendo $x_0 \gg \lambda$, onde λ é o comprimento de onda da radiação eletromagnética, tem-se $\eta \ll 1$ de modo que o segundo termo em (2.17) pode ser desprezado. Esta aproximação é conhecida como aproximação paraxial. Desta maneira, encontra-se a equação paraxial da onda

$$i\frac{\partial U(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 U(x, z)}{\partial x^2} + V(x)U(x, z) = 0, \quad (2.18)$$

onde $V(x) = (2k_0^2x_0^2/n_0)\Delta n(x)$.

2.2 Implementação da simetria \mathcal{PT} na ótica

Inicialmente, considere a equação de Schrödinger para uma partícula sem spin, movendo-se em uma dimensão (ao longo do eixo x por exemplo), de massa m e sujeita a uma função potencial $V(x)$

$$i\hbar\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t). \quad (2.19)$$

Na situação onde a partícula é tratada como um sistema isolado, $V(x)$ é uma função real da posição. Contudo, para sistemas quânticos abertos, é possível tratar $V(x)$ como um potencial não-Hermitiano de modo a considerar os efeitos do ambiente sobre o sistema e desta maneira a função potencial torna-se complexa.

Existe uma semelhança matemática entre a equação paraxial de onda do Eletromagnetismo com a equação de Schrödinger da Mecânica Quântica, como pode ser visto pelas equações (2.18) e (2.19), e a simetria \mathcal{PT} já conhecida na Mecânica Quântica pode ser introduzida na ótica através da construção de sistemas fotônicos onde existem ganho e perda óticos de forma balanceada, de modo que $V(x)$ em (2.18) funciona como um potencial ótico onde $\Delta n(x)$ pode ser escrito como $\Delta n(x) = n_R(x) + in_I(x)$, de modo que $n(x) = n_0 + n_R(x) + in_I(x)$ e ainda

$$\text{Im}[n(x)] < 0 \Rightarrow \text{ganho ótico} \quad (2.20)$$

e

$$\text{Im}[n(x)] > 0 \Rightarrow \text{perda ótica}. \quad (2.21)$$

A condição necessária para que tal sistema fotônico seja \mathcal{PT} -simétrico é que

$$n(x) = n^*(-x), \quad (2.22)$$

implicando em

$$n_R(x) = n_R(-x) \quad (2.23)$$

e

$$n_I(x) = -n_I(-x). \quad (2.24)$$

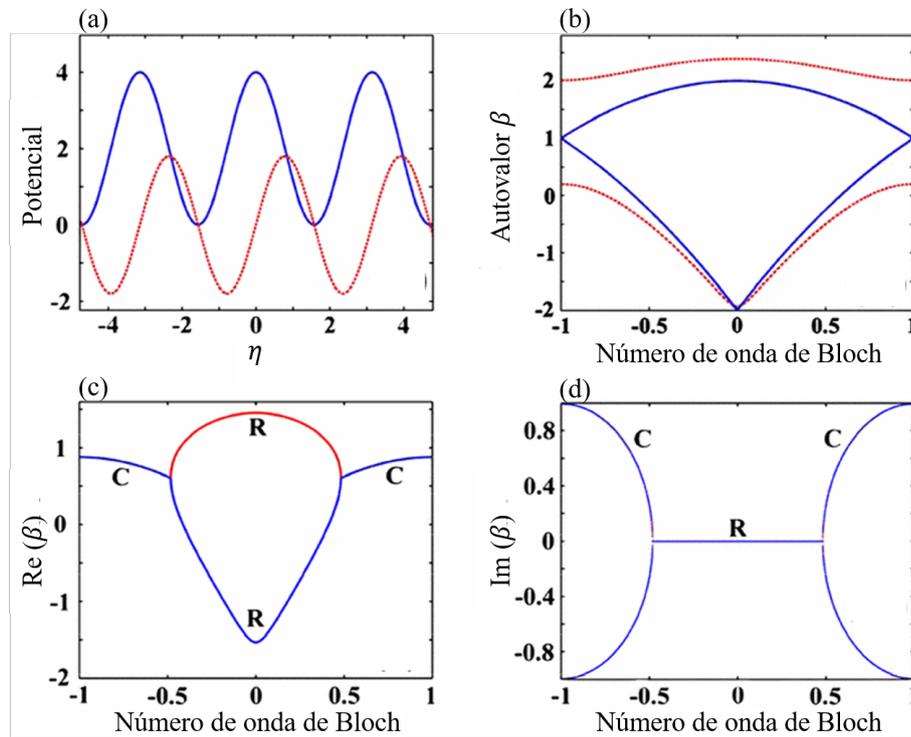
Seguindo as condições acima para o índice de refração de um meio \mathcal{PT} -simétrico e utilizando aproximação paraxial para a propagação de um feixe ótico, uma série de trabalhos teóricos (EL-GANAINY et al., 2007), (BERRY, 2008), (GRAEFE; JONES, 2011), (SINHA; ROYCHOUDHURY, 2013) e (MAKRIS et al., 2008) foram realizados com o objetivo de compreender características nunca antes vistas em redes óticas Hermitianas. Em especial, no trabalho (MAKRIS et al., 2008) os autores estudaram em detalhes a estrutura de banda de uma rede periódica \mathcal{PT} -simétrica bem como a dinâmica dos modos de Floquet-Bloch do campo elétrico. De fato, considerando um potencial ótico periódico \mathcal{PT} -simétrico dado por

$$V(\eta) = 4 \left[\cos^2(\eta) + iV_0 \sin(2\eta) \right], \quad (2.25)$$

onde η é uma distância transversal à distância de propagação (sendo esta última denotada nesse trabalho por ξ) e escrevendo a solução da equação paraxial da onda na forma $\phi_{kn}(\eta)e^{i\beta_{kn}\xi}$, onde n é a n -ésima banda de Floquet-Bloch e k é o número de onda de Bloch, os autores mostraram que para este potencial existe uma quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} quando $V_0 = 1/2$, onde para $V_0 < 1/2$ ($V_0 > 1/2$) a estrutura de banda é totalmente real (complexa). Para $V_0 = 0,2$, Figura 4(b), é possível notar que há um gap na estrutura de bandas enquanto que no ponto de quebra o gap fecha exatamente nas extremidades da primeira zona de Brillouin da estrutura (onde $k = \pm 1$). A medida que V_0 cresce acima do ponto de quebra, essas mesmas bandas começam a se unir e formam uma estrutura ovalada no plano complexo, cujas partes real e imaginária estão mostradas as Figuras 4(c) e 4(d).

A dinâmica de um feixe Gaussiano que incide sobre esta rede fotônica também é estudada por esses autores no trabalho (MAKRIS et al., 2010). Considerando o mesmo potencial ótico dado na equação (2.25), logo abaixo do ponto de quebra de simetria, a evolução espacial da intensidade deste feixe ao longo da rede varia drasticamente dependendo do ângulo de incidência. Como ilustrado na Figura 5(a), para um dado ângulo de incidência tem-se um padrão espacial de intensidade crescente e simétrico em relação a $x = 0$; para outro ângulo de incidência, Figura 5(b), a intensidade divide-se em três partes onde uma delas contém a maior parte da energia do feixe. A fim de explicar estes comportamentos tão distintos, os autores calcularam os coeficientes de projeção, que representam a quantidade de energia ao longo de uma determinada banda. Mostrou-se então que para a situação ilustrada na Figura 5(a) existe uma distribuição simétrica, em relação ao centro da primeira zona de Brillouin, da energia do feixe entre as duas primeiras bandas da rede, resultando então numa evolução simétrica da intensidade. Para a situação da Figura 5(b) o que ocorre é a existência de uma assimetria entre as quantidades de energia das bandas: grande parte da energia fica distribuída ao longo da segunda banda e para a primeira e terceira bandas a quantidade de energia é quase igual. A evolução espacial da potência do feixe também foi estudada para cada situação ilustrada nas Figuras 5(a) e 5(b). Pode-se notar que a situação ilustrada na Figura 5(a) gera uma oscilação

Figura 4 – (a) Partes real (linha contínua azul) e imaginária (linha pontilhada vermelha) do potencial \mathcal{PT} -simétrico dado na equação (2.25). (b) Estrutura de bandas correspondente a este potencial para $V_0 = 0,2$ (linha pontilhada vermelha) e $V_0 = 0,5$ (linha contínua azul). Note que abaixo do ponto de quebra espontânea de simetria existe um gap na estrutura de banda e exatamente no ponto de quebra esse gap fecha nas bordas da primeira zona de Brillouin. Em (c) e (d) estão ilustradas as partes real e imaginária, respectivamente, da estrutura de banda acima do ponto de quebra de simetria, para $V_0 = 0,7$ e C e R denotam valores complexos e reais de β , respectivamente. Acima do ponto de quebra de simetria, as bandas mostradas em (b) se juntam e formam uma banda com valores reais e complexos de β .

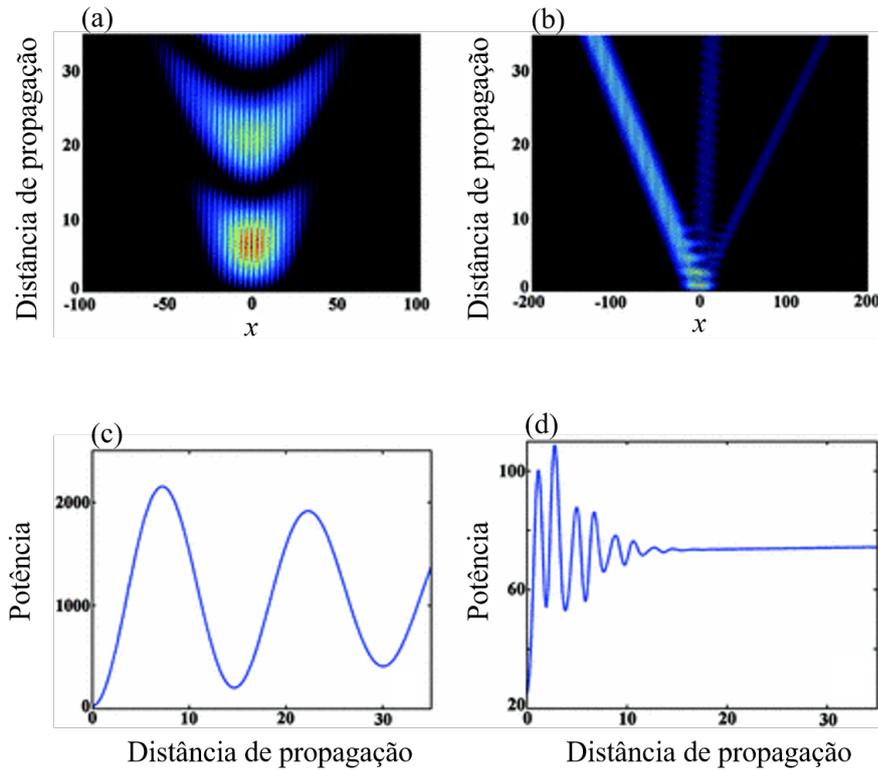


Fonte: retirada da referência (MAKRIS et al., 2008).

espacial da potência do feixe ao longo da distância de propagação e é de tal modo que sua amplitude vai diminuindo com z . Por outro lado, na situação onde a maior parte da energia do feixe está na segunda banda da rede (Figura 5(b)), a potência oscila inicialmente com uma amplitude menor em relação ao caso anterior e logo em seguida tal amplitude diminui consideravelmente. Desta forma, dependendo da condição inicial considerada, a dinâmica da propagação de feixes numa rede ótica, periódica e \mathcal{PT} -simétrica muda drasticamente, levando a resultados nunca antes vistos numa rede ótica, periódica e Hermitiana.

Uma questão ainda permanece: como construir experimentalmente um sistema fotônico \mathcal{PT} -simétrico? Seguindo a ideia de utilizar guias de onda acopladas introduzida em (EL-GANAINY et al., 2007), no trabalho (RÜTER et al., 2010) os autores utilizaram um sistema de guias de onda acopladas onde em uma delas o ganho ótico é introduzido

Figura 5 – (a) e (b) ilustram a evolução espacial da intensidade de um feixe gaussiano que se propaga numa rede ótica descrita pelo potencial da equação (2.25) para $V_0 = 0,49$ para dois ângulos de incidência distintos. Para um ângulo de incidência obtêm-se uma evolução espacial simétrica em relação ao eixo $x = 0$ enquanto que para o outro ângulo de incidência surge uma divisão do feixe incidente em outros três, sendo um com a maior parte da energia e esta evolução é completamente assimétrica. (c) e (d) representam as oscilações de potência nos casos descritos em (a) e (b), respectivamente. Duas evoluções completamente distintas são obtidas e um fato interessante é a presença de tais oscilações, uma vez que o espectro é real.



Fonte: retirada da referência (MAKRIS et al., 2010).

através de um material óticamente ativo (neste trabalho, utilizou-se niobato de lítio), cujo coeficiente de ganho é γ_G , e na outra guia de onda a perda ótica já é presente devido ao material que a constitui, com um coeficiente de perda dado por γ_P . Matematicamente, este sistema é descrito através das seguintes equações diferenciais acopladas

$$i \frac{dE_1}{dz} - \frac{i(\gamma_{\text{Gef}} - \gamma_L)}{2} E_1 + \kappa E_2 = 0 \quad (2.26)$$

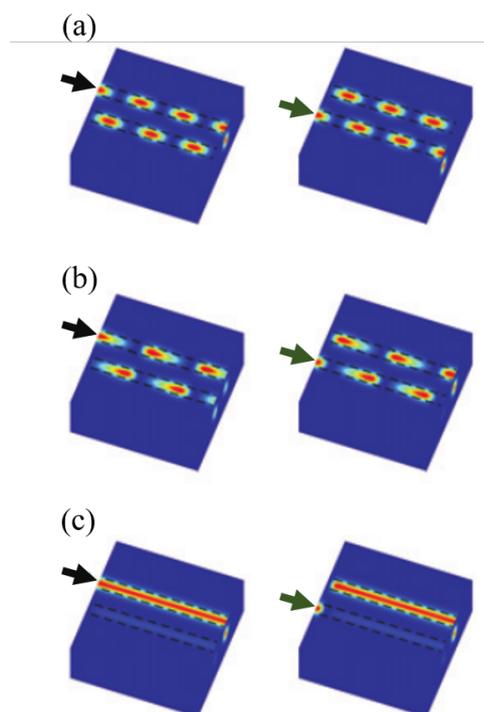
e

$$i \frac{dE_2}{dz} + \frac{i\gamma_L}{2} E_2 + \kappa E_1 = 0, \quad (2.27)$$

onde E_1 (E_2) são as amplitudes do campo elétrico na guia de onda que possui ganho (perda), $\gamma_{\text{Gef}} = \gamma_G - \gamma_P$ é o coeficiente de ganho efetivo, κ é a constante de acoplamento entre as guias e para satisfazer a condição de um sistema \mathcal{PT} -simétrico, é necessário que $\gamma_{\text{Gef}} = \gamma_P = \gamma$.

A evolução espacial da amplitude do campo elétrico foi então estudada nas situações abaixo e acima do ponto de quebra de simetria, a saber, $\gamma = 2\kappa$. Experimentalmente foi observado que para o caso onde o sistema de guias de onda é Hermitiano, ou seja, $\gamma = 0$, observou-se uma evolução recíproca da amplitude do campo elétrico: independente se o feixe incide na guia com ganho ou perda, a dinâmica é a mesma para o sistema (conforme Figura 6(a)). Abaixo (Figura 6(b)) e acima (Figura 6(c)) do ponto de quebra de simetria,

Figura 6 – Propagação espacial do feixe óptico incidente no meio (a) sem perda nem ganho óticos (ou seja, no caso Hermitiano), (b) abaixo e (c) acima do ponto de quebra da simetria \mathcal{PT} . No caso Hermitiano a propagação é recíproca, no sentido em que independente se o feixe incide na guia de onda com ganho ótico (seta preta) ou na guia de onda com perda ótica (seta verde), a propagação é a mesma. Esta dinâmica muda quando o sistema está abaixo do ponto que quebra de simetria e torna-se completamente assimétrica acima do ponto de quebra, onde é possível notar que o feixe sempre se propaga na guia com ganho ótico.



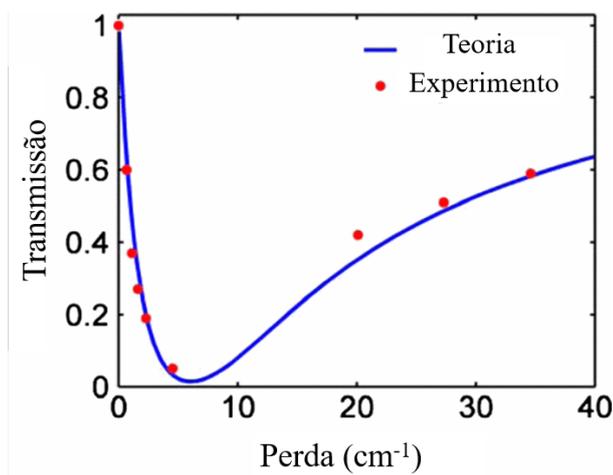
Fonte: retirada da referência (RÜTER et al., 2010).

a evolução espacial do campo elétrico torna-se completamente antissimétrica e em especial, para o caso acima do ponto de quebra de simetria, há uma preferência do feixe se propagar na guia de onda com ganho ótico: mesmo quando inicialmente feixe incide na guia com perda, rapidamente o campo elétrico passa a se propagar na guia com ganho.

A quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} num sistema ótico também foi estudada experimentalmente (GUO et al., 2009). Neste trabalho, os autores utilizaram novamente um sistema de guias de onda acopladas onde uma das guias de onda possui perda ótica devido ao depósito de uma fina camada de crômio sobre uma das guias de onda. O principal

resultado deste trabalho foi a observação de uma transparência induzida pela perda ótica² a medida que a perda ótica aumenta na guia de onda. De fato, conforme Figura 7, é possível

Figura 7 – Fenômeno da transparência induzida por perda ótica num sistema fotônico \mathcal{PT} -simétrico com perda ótica. Surpreendentemente, o fato deste sistema possui perda ótica não implica dizer que o feixe é absorvido, pelo contrário, a transmissão aumenta consideravelmente a medida que mais crômio é depositado sobre a guia de onda.



Fonte: retirada da referência (GUO et al., 2009).

notar que a medida que o coeficiente de perda do crômio aumenta (experimentalmente isto é feito aumentando a espessura da camada de crômio sobre a guia de onda), a transmissão do campo elétrico pela guia de onda com perda diminui até chegar num valor mínimo, onde ocorre a quebra de simetria \mathcal{PT} no sistema, e continuando a aumentar o coeficiente de perda o que é observado é um aumento considerável da transmissão nessa mesma guia de onda, fato este completamente contra-intuitivo e uma manifestação clara do efeito da simetria \mathcal{PT} neste sistema fotônico.

2.3 Indo além da aproximação paraxial

Nos trabalhos citados na seção anterior, a ideia fundamental foi utilizar a equação paraxial para estudar a evolução de um feixe ótico num meio com simetria \mathcal{PT} devido à semelhança matemática com a equação de Schrödinger. Considerar a aproximação paraxial implica dizer que o comprimento de onda da luz é muito menor que distâncias espaciais de tais meios. Naturalmente, começou-se a pensar em como seria a dinâmica de um feixe ótico num meio \mathcal{PT} -simétrico *sem* considerar a equação paraxial como ponto de partida. Neste regime não-paraxial, o comprimento de onda da luz é agora da ordem (ou mesmo

² Do inglês, *loss-induced transparency*.

maior) que as distâncias espaciais do meio considerado³. Com isto em mente, os autores do trabalho (HUANG et al., 2014) estudaram como seria o comportamento espacial de um feixe ótico com modo TM de polarização que se propaga (de forma independente) em dois meios distintos, cada um descrito por uma permissividade elétrica relativa diferente, a saber, uma localizada (ideal para um estudo num único guia de onda) e outra periódica (ideal para uma rede ótica periódica). Matematicamente, tem-se

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{subs}} + p \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{d}\right) + i\alpha \operatorname{sech}\left(\frac{x}{d}\right) \tanh\left(\frac{x}{d}\right) \quad (2.28)$$

e

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{subs}} + p \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right) + i\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{d}\right), \quad (2.29)$$

onde $\varepsilon_{\text{subs}}$ é a permissividade relativa do substrato, p (α) determinam a amplitude da parte real (imaginária) da permissividade relativa e d é a largura do guia de onda ou a periodicidade do meio. Neste trabalho, $\lambda = 632,8$ nm e $\varepsilon_{\text{subs}} = 2,25$. Considerando uma onda eletromagnética cujo comprimento de onda é λ , variando o valor de d é possível sair do regime paraxial ($d \gg \lambda$) para o regime não-paraxial ($d < \lambda$). Note a condição necessária de simetria \mathcal{PT} análoga ao que foi considerado para o índice de refração na seção anterior: $\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$, implicando numa permissividade elétrica relativa cuja parte real (imaginária) é uma função par (ímpar) de x e ainda que $\operatorname{Im}[\varepsilon(x)] > 0 \Rightarrow$ meio com perda ótica e $\operatorname{Im}[\varepsilon(x)] < 0 \Rightarrow$ meio com ganho ótico. Supondo uma solução para as equações de Maxwell do tipo

$$E_x(x, z) = E_x(x)e^{ibz} \quad (2.30)$$

e

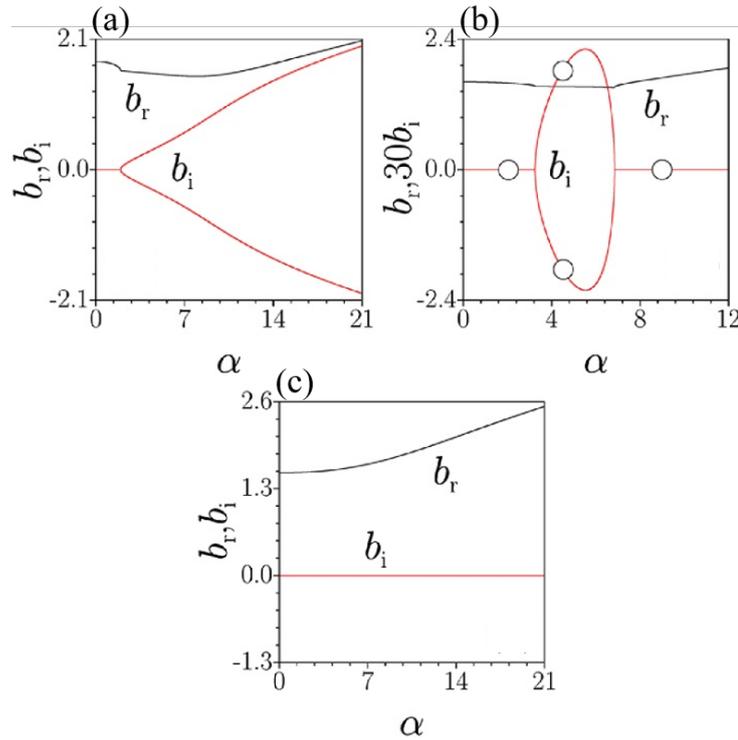
$$H_y(x, z) = H_y(x)e^{ibz} \quad (2.31)$$

na situação da guia de onda, ou seja, considerando a permissividade elétrica relativa dada em (2.28), e considerando uma constante de propagação complexa $b = b_r + ib_i$, os autores mostraram que para valores pequenos de α é possível obter b inteiramente real e desta forma a simetria \mathcal{PT} no sistema não é quebrada. Contudo, aumentando o valor de α até o ponto de quebra de simetria (no trabalho, denotado por α_{ex}), surge uma bifurcação que indica o surgimento de dois modos cujas constantes de propagação são complexos conjugados uma da outra (conforme mostrado na Figura 8(a), para $d = 120$ nm). Um fato interessante ocorre quando o valor de d diminui ainda mais em comparação ao comprimento de onda utilizado. De fato, na Figura 8(b) é considerado $d = 60$ nm e neste regime⁴ é possível notar uma quebra de simetria no sistema para um determinado valor crítico de α porém aumentando seu valor é possível *recuperar* a simetria \mathcal{PT} do sistema a partir de determinado valor de α . Diminuindo cada vez mais o valor de d , como mostrado na

³ Na literatura, é comum encontrar o termo *subwavelength* para indicar que o comprimento de onda luz é maior ou da ordem das distâncias espaciais do meio em estudo.

⁴ Na literatura, quando a distância espacial envolvida no estudo torna-se muito menor que o comprimento de onda, é comum encontrar o termo *deep-subwavelength*.

Figura 8 – Partes real (linha preta) e imaginária (linha vermelha) da constante de propagação b para uma guia de onda descrita por uma permissividade elétrica relativa dada pela equação (2.28) e cuja largura é (a) 120 nm, (b) 60 nm e (c) 30 nm. No regime *subwavelength* ilustrado em (a) é possível ver uma quebra da simetria \mathcal{PT} no sistema, com dois modos cujas partes imaginárias da constante de propagação são complexos conjugados uma da outra. Diminuindo a largura da guia de onda, ilustrada em (b), é possível recuperar a simetria \mathcal{PT} depois que ela foi quebrada e em (c) é mostrado o regime *deep-subwavelength* onde não há a quebra da simetria para todo valor de α . Os círculos em (b) representam os campos elétricos ilustrados na Figura 9. Nesta figura, $p = 1,7$.



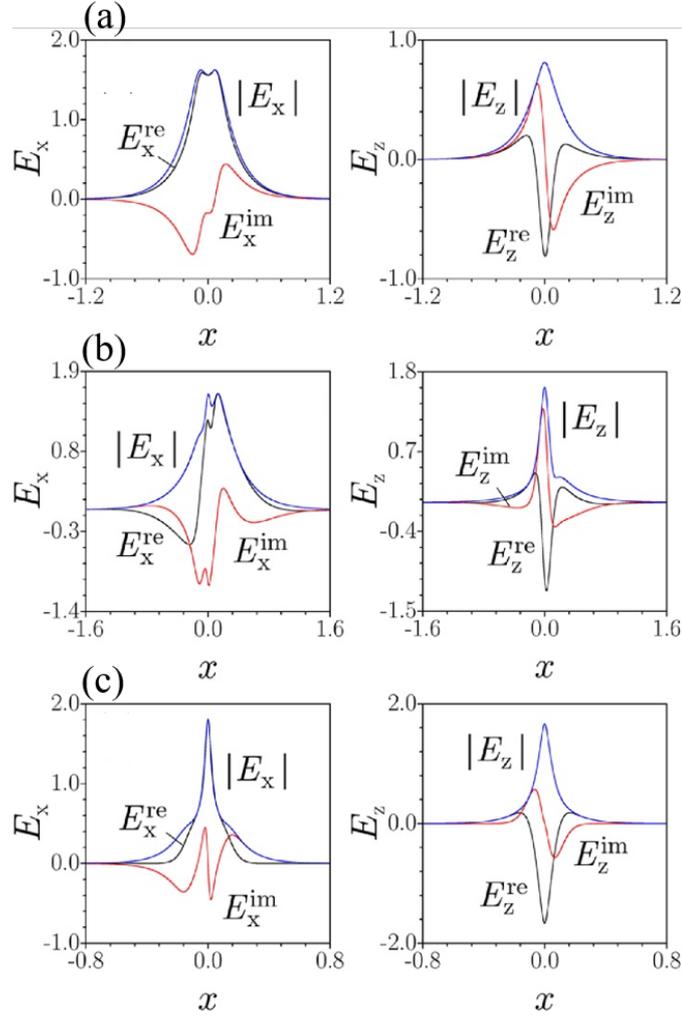
Fonte: retirada da referência (HUANG et al., 2014).

Figura 8(c), a constante de propagação permanece real para todos os valores de α e desta forma a simetria \mathcal{PT} é mantida, eliminando-se a quebra de simetria do sistema⁵. Figura 9 ilustra o comportamento das componentes x e z do campo elétrico para cada um dos círculos mostrados na Figura 8(b). Note que os perfis dos campos são simétricos abaixo do ponto de quebra de simetria, como indicado na Figura 9(a), e tornam-se totalmente antissimétricos acima do ponto de quebra (Figura 9(b)). Na Figura 9(c) está ilustrada a situação onde a simetria \mathcal{PT} do sistema é restaurada e é possível notar novamente perfis simétricos dos campos (agora mais estreitos que o caso mostrado na Figura 9(a)).

No caso de um meio periódico cuja permissividade elétrica relativa é dada por

⁵ É importante ter em mente que o termo “recuperar a simetria \mathcal{PT} ” significa que a partir de um dado valor de α , a constante de propagação b volta a ser apenas real.

Figura 9 – Perfis espaciais dos campos elétricos para os casos indicados pelos círculos na Figura 8(b) quando (a) $\alpha = 2,0$, (b) $\alpha = 4,5$ e (c) $\alpha = 9,5$. Antes da quebra da simetria \mathcal{PT} os perfis são todos simétricos e após a quebra eles se tornam bastante assimétricos. Após a recuperação da simetria \mathcal{PT} os perfis espaciais voltam a ser simétricos mas agora são mais estreitos em relação aos mostrados em (a). Nesta figura, $p = 1,7$.



Fonte: retirada da referência (HUANG et al., 2014).

(2.29), os campos elétricos $E_x(x, z)$ e $E_z(x, z)$ e magnético $H_y(x, z)$ são dados agora por

$$E_x^{(n)}(x, z) = E_x^{(n)}(x)e^{ikx+ib^{(n)}z}, \quad (2.32)$$

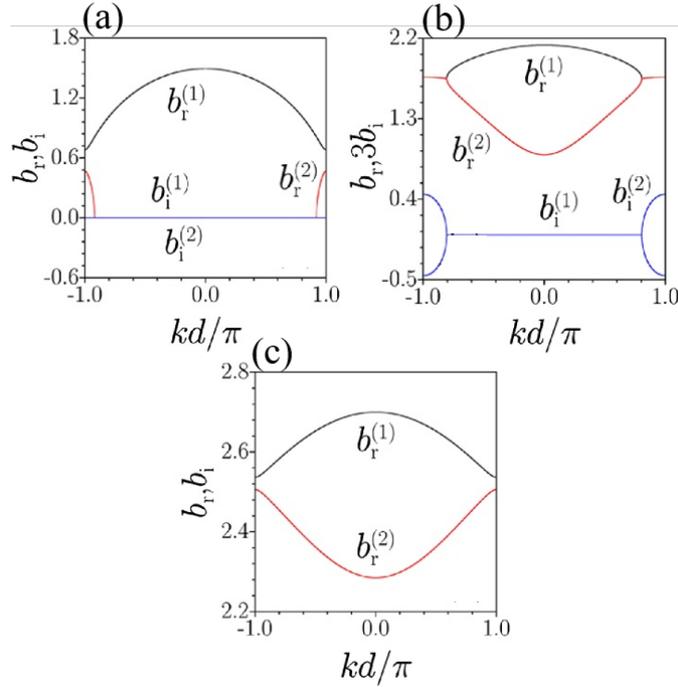
$$E_z^{(n)}(x, z) = E_z^{(n)}(x)e^{ikx+ib^{(n)}z} \quad (2.33)$$

e

$$H_y^{(n)}(x, z) = H_y^{(n)}(x)e^{ikx+ib^{(n)}z}, \quad (2.34)$$

onde as amplitudes desses campos são funções cujo período é igual a d , k é o número de onda de Bloch, n é o índice de banda e a constante de propagação é dada por $b^{(n)} = b_r^{(n)} + ib_i^{(n)}$.

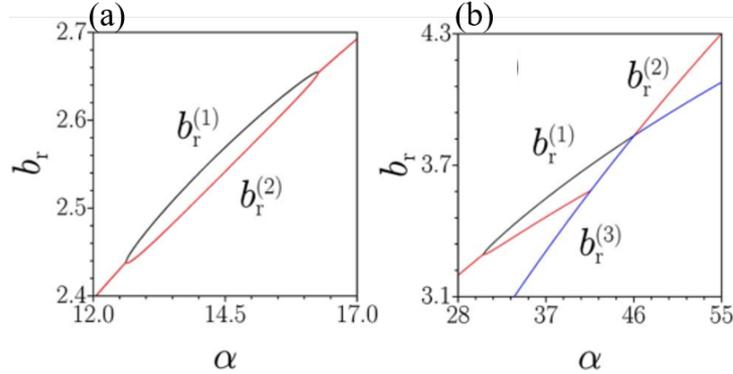
Figura 10 – Estrutura de banda para a situação de um meio periódico descrito por uma permissividade elétrica relativa dada pela equação (2.29) para (a) $\alpha = 0,6$, (b) $\alpha = 6,0$ e (c) $\alpha = 14,2$. Abaixo da quebra de simetria existe um gap entre as duas primeiras bandas da estrutura (ambas reais), no ponto de quebra de simetria \mathcal{PT} essas bandas se juntam e tornam-se complexas e a medida que o valor de α cresce, a simetria \mathcal{PT} do sistema é restaurada. Nesta figura, $d = 230$ nm e $p = 0,7$.



Fonte: retirada da referência (HUANG et al., 2014).

Na Figura 10 estão mostradas as partes real e imaginária das duas primeiras bandas da estrutura periódica para $d = 230$ nm e $p = 0,7$. Figura 10(a) ilustra a situação onde $\alpha = 0,6$ e é possível notar que as duas primeiras bandas da estrutura estão separadas por um gap, cujas respectivas constantes de propagação são reais, como já era esperado. Nesta situação, o sistema permanece com a simetria \mathcal{PT} intacta. À medida que α cresce, essas duas bandas se juntam, como mostrado na Figura 10(b) para $\alpha = 6,0$, e aqui a simetria \mathcal{PT} é quebrada. O fato mais interessante ocorre quando o valor de α cresce ainda mais, pois neste caso o sistema restaura a simetria \mathcal{PT} que fora quebrada anteriormente. Os autores mostram ainda que este último gap permanece aberto para $12,6 < \alpha < 16,3$, voltando a fechar para $\alpha > 16,3$ e abrindo novamente para $\alpha \sim 31$, conforme mostrado na Figura 11. Considerando a aproximação paraxial, esta restauração da simetria \mathcal{PT} do sistema não ocorre e uma vez que a mesma é quebrada, permanece assim independente do valor do parâmetro crítico que controla a Hermiticidade do sistema. Na literatura, ainda são muito poucos os trabalhos envolvendo simetria \mathcal{PT} na ótica além da aproximação paraxial. Com efeito, o leitor interessado é fortemente sugerido a ler os trabalhos (BUSHUEV; DERGACHEVA; MANTSYZOV, 2017) e (KULISHOV; JONES; KRESS, 2015).

Figura 11 – (a) O gap entre as bandas mostrado na Figura 10(c) permanece durante o intervalo $12,6 < \alpha < 16,3$, em seguida volta a fechar e o sistema sofre outra quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} . Com o aumento de α , o sistema recupera novamente a simetria e agora o gap envolve as três primeiras bandas da estrutura. Nesta figura, $d = 230$ nm e $p = 0,7$.



Fonte: retirada da referência (HUANG et al., 2014).

2.4 Oscilações de potência de Bragg \mathcal{PT} -simétricas

Um efeito muito interessante em redes óticas (não necessariamente sendo redes \mathcal{PT} -simétricas) ocorre quando o vetor de onda do campo elétrico (descrito por uma onda plana) incidente é tal que acopla com um vetor da rede recíproca na borda da primeira zona de Brillouin, obedecendo à condição de ressonância de Bragg (analogamente ao que ocorre em redes cristalinas). Isto gera a excitação de vários modos do campo elétrico, como pode ser visto na Figura 12(a) a seguir, de modo que a energia contida nesses modos pode ser transferida de um para o outro e este efeito é chamado de oscilações de potência induzidas por ressonância de Bragg ou, mais comumente conhecido na literatura, oscilações de potência de Bragg⁶. Ao leitor interessado neste efeito numa rede ótica Hermitiana e bidimensional, são sugeridos os trabalhos (SHCHESNOVICH; CHÁVEZ-CERDA, 2007) (para um meio linear) e (BRANDÃO; CAVALCANTI, 2017a) (para um meio não-linear).

Para um meio possuindo simetria \mathcal{PT} , este efeito foi estudado no trabalho (BRANDÃO; CAVALCANTI, 2017b). Neste trabalho, é considerado um potencial ótico dado por

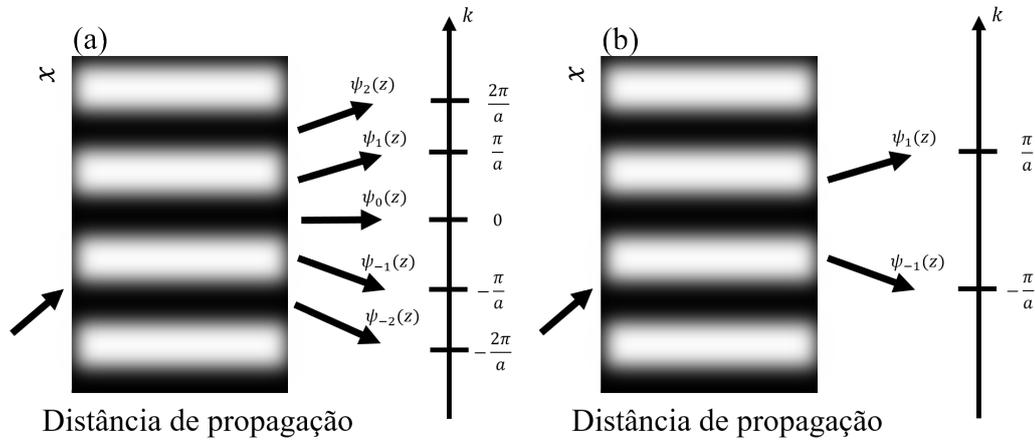
$$V(x) = \alpha \left[\cos^2(x) + i\beta \sin(2x) \right], \quad (2.35)$$

onde α e β são constantes reais (β em especial é positiva e controla o nível de Hermiticidade do sistema). Note que este potencial é o mesmo do trabalho (MAKRIS et al., 2008) e desta forma já é sabido que há uma quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} para $\beta = \beta_c = 1/2$. Escrevendo o campo elétrico incidente como uma expansão em ondas planas

$$\psi(x, z) = \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \psi_n(z) e^{inx}, \quad (2.36)$$

⁶ Do inglês, *power Bragg oscillations*.

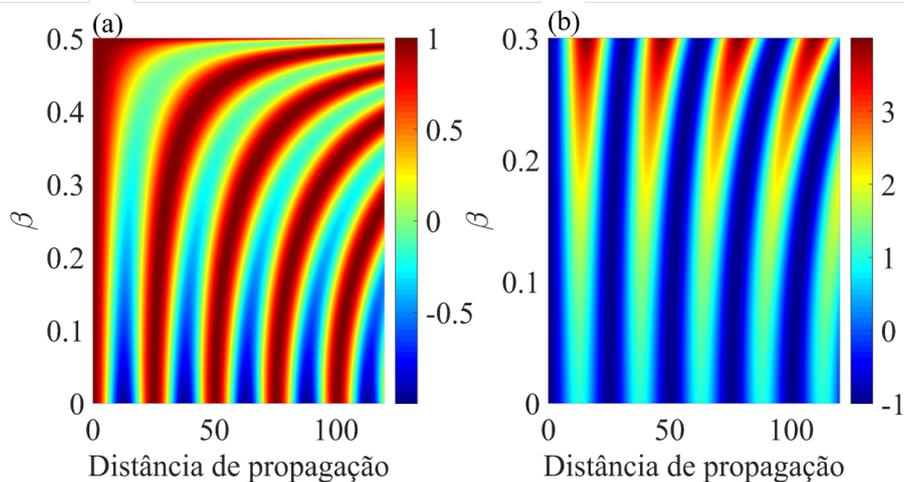
Figura 12 – (a) Excitação de modos ressonantes de uma rede devido a uma onda plana; (b) modelo de duas ondas.



Fonte: retirada da referência (BERRY, 2008).

com $\psi(x, z)$ evoluindo paraxialmente, e considerando o modelo de duas ondas para o qual apenas os modos $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ são excitados (conforme ilustrado na Figura 12(b)), os autores mostraram que a evolução espacial da troca de energia espectral entre esses modos ressonantes evolui de acordo com uma oscilação de potência de Bragg e tal evolução possui um comportamento extremamente assimétrico em relação ao caso Hermitiano, conforme pode ser visto na Figura 13 a seguir. Das Figuras 13(a) e 13(b) é possível

Figura 13 – Evolução espacial da troca de energia espectral entre os modos $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ nas situações onde (a) o modo $\psi_1(z)$ possui inicialmente toda a energia espectral e (b) o modo $\psi_{-1}(z)$ possui inicialmente toda a energia espectral para $0 \leq \beta \leq 1/2$. Quando o sistema não possui perda nem ganho óticos, $\beta = 0$, é possível ver claramente um comportamento oscilatório recíproco da troca de energia espectral e a medida que β cresce a evolução torna-se cada vez mais assimétrica. Nesta figura, $\alpha = 0,5$.



Fonte: retirada da referência (BRANDÃO; CAVALCANTI, 2017b).

notar que no caso Hermitiano, $\beta = 0$, ocorrem oscilações simétricas da troca de energia entre os modos $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ para ambas as condições iniciais $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{0, 1\}$ e $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{1, 0\}$: seguindo as cores da Figura 13 é possível ver que ora a energia está no modo $\psi_1(z)$ (representada pela cor vermelha) ora está no modo $\psi_{-1}(z)$ (representada pela cor azul) e isto ocorre de forma periódica e simétrica, como esperado de sistemas Hermitianos. Ao passo que β se aproxima do valor crítico $\beta_c = 1/2$ e na condição onde $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{0, 1\}$, nota-se uma tendência da energia espectral se concentrar inteiramente no modo ψ_1 , onde na Figura 13 isso está ilustrado pela predominância da cor vermelha na região onde $\beta_c = 1/2$. Para $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{1, 0\}$ os autores mostraram que a transferência de energia entre os modos diverge e cresce indefinidamente. O resultado mais interessante é que exatamente no ponto de quebra de simetria, os autores mostraram a existência do aprisionamento de modo: quando inicialmente toda a energia espectral está concentrada no modo ψ_1 , ela permanece neste modo durante toda a propagação. Por outro lado, quando inicialmente a energia espectral está inteiramente no modo ψ_{-1} , aparece um crescimento parabólico na troca de energia e este crescimento é controlado pelo valor do parâmetro α .

Com isto, encerra-se aqui a discussão sobre ótica \mathcal{PT} -simétrica bem como alguns exemplos de sistemas óticos \mathcal{PT} -simétricos. No próximo capítulo serão apresentados os resultados do estudo das oscilações de potência de Bragg em um sistema ótico periódico, caracterizado por uma permissividade elétrica relativa \mathcal{PT} -simétrica, sobre o qual um campo elétrico monocromático não-paraxial incide.

3 Oscilações de Bragg eletromagnéticas além da aproximação paraxial em meios periódicos com simetria \mathcal{PT}

Neste capítulo serão discutidos os resultados teóricos do estudo das oscilações de potência de Bragg para um meio descrito por uma permissividade elétrica relativa \mathcal{PT} -simétrica e periódica, sobre o qual incide uma onda eletromagnética que se propaga de maneira não-paraxial. A importância prática deste estudo vem do fato que atualmente muitos dispositivos óticos (em especial metamateriais) possuem componentes cujas distâncias espaciais são menores ou da mesma ordem de grandeza que o comprimento de onda da luz, exemplos desses sistemas são encontrados nos trabalhos (CASTALDI et al., 2013), (LAZARIDES; TSIRONIS, 2013) e (FENG et al., 2013). Na seção 3.1 é apresentada a descrição do sistema físico estudado, bem como as características da onda eletromagnética que incide nesse meio; na seção 3.2 estão descritos os métodos matemáticos utilizados nesse estudo; e os resultados desse estudo são discutidos nas seções 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6.

3.1 Teoria geral

O meio considerado no estudo deste trabalho bem como a onda eletromagnética que incide sob este meio são os mesmos daqueles descritos no Capítulo 2. Neste capítulo, a equação (2.9) será reescrita como

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

por conveniência. Como o objetivo deste trabalho é estudar efeitos induzidos pela ressonância de Bragg, considere um meio cuja permissividade elétrica relativa seja uma função periódica da distância transversal à direção de propagação, ou seja, $\varepsilon(x+a) = \varepsilon(x)$, com período a . É possível então escrever a permissividade elétrica relativa como uma série de Fourier dada por

$$\varepsilon(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varepsilon_l e^{ig_l x}, \quad (3.2)$$

onde ε_l são os coeficientes de Fourier da permissividade e $g_l = 2\pi l/a$ são as componentes dos vetores da rede recíproca na primeira zona de Brillouin. Deste modo, a primeira zona de Brillouin da rede está localizada no intervalo $-\pi/a \leq k_x \leq \pi/a$. A propagação do campo elétrico é tal que a componente do vetor de onda paralela a variação da rede é acoplada com as bordas da zona de Brillouin, implicando que a componente do vetor de onda é ressonante com a estrutura do meio. É possível então escrever o campo elétrico

como sendo

$$\mathbf{E}(x, z) = \hat{y} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n(z) e^{i\pi n x/a}, \quad (3.3)$$

onde $\psi_n(z)$ é a amplitude espectral do campo elétrico a uma distância z . Usando a equação (2.4) é possível obter uma expressão para o campo magnético:

$$\mathbf{H}(x, z) = \frac{1}{i\omega\mu_{\text{vac}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\hat{x} \frac{d\psi_n}{dz} + \hat{z} \frac{i\pi n}{a} \psi_n \right) e^{i\pi n x/a}. \quad (3.4)$$

É interessante enfatizar que os campos elétrico e magnéticos assim definidos pelas equações (3.3) e (3.4) satisfazem também as outras duas equações de Maxwell, a saber, $\nabla \cdot \mathbf{H}(x, z) = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{E}(x, z) = 0$. De fato,

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(x, z) = \frac{1}{i\omega\mu_{\text{vac}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{d\psi_n}{dz} \frac{i\pi n}{a} + \frac{i\pi n}{a} \frac{d\psi_n}{dz} \right) e^{i\pi n x/a} = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x, z) = \frac{d}{dy} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n e^{i\pi n x/a} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Utilizando (3.3) é possível calcular cada termo na equação (3.1) de modo a obter um conjunto de equações diferenciais lineares, acopladas e de segunda ordem para a evolução espacial do n -ésimo modo espectral do campo elétrico:

$$\frac{d^2 \psi_n}{dz^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \psi_n - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varepsilon_l \psi_{n-2l}. \quad (3.7)$$

É necessário agora analisar a forma da função permissividade elétrica relativa de modo a continuar com o estudo da equação (3.7). Primeiramente note que os coeficientes de Fourier ε_l da permissividade elétrica relativa $\varepsilon(x)$ tornam-se cada vez menores a medida que l cresce pois quando as propriedades do meio considerado sofrem mudanças abruptas, como acontece num meio estratificado do tipo $ABABAB\dots AB$ por exemplo, frequências maiores são necessárias na equação (3.2) para levar em conta essas mudanças rápidas da permissividade relativa. Torna-se comum então considerar apenas três coeficientes não-nulos de Fourier. Neste trabalho, o meio será descrito por uma permissividade elétrica relativa \mathcal{PT} -simétrica e para que isto ocorra, $\varepsilon(x)$ deve ser tal que

$$\text{Re}[\varepsilon(x)] = \text{Re}[\varepsilon(-x)] \quad (3.8)$$

e

$$\text{Im}[\varepsilon(x)] = -\text{Im}[\varepsilon(-x)], \quad (3.9)$$

ou seja, $\varepsilon(x) = \varepsilon^*(-x)$. O fato de $\varepsilon(x)$ ser \mathcal{PT} -simétrica implica que o meio possui regiões de perda e regiões de ganho óticos de forma balanceada. Logo, considerando o fato que $\varepsilon(x)$ deve ser uma função unidimensional e periódica em relação a distância transversal a

propagação bem como sendo invariante sob paridade e reversão temporal, neste trabalho $\varepsilon(x)$ será escrita como

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_R \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + i\varepsilon_I \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right), \quad (3.10)$$

onde ε_0 , ε_R e ε_I são números positivos e reais. A partir da equação (3.2) obtem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \varepsilon_{-1}e^{-i2\pi x/a} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1e^{i2\pi x/a} \\ &= \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

e comparando com a equação (3.10) tem-se

$$\varepsilon_{\pm 1} = \frac{\varepsilon_R \pm i\varepsilon_I}{2}. \quad (3.12)$$

A permissividade relativa do meio será considerada maior que 1 de modo a ter um índice de refração positivo¹ e para isto ser satisfeito a desigualdade $\varepsilon_0 > 1 + \varepsilon_R$ deve ser verdadeira. Uma vez que apenas três coeficientes de Fourier da permissividade relativa são diferentes de zero, é possível reescrever a equação (3.7) como

$$\frac{d^2\psi_n}{dz^2} = \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2\varepsilon_0}{c^2}\right)\psi_n - \frac{\omega^2\varepsilon_{-1}}{c^2}\psi_{n+2} - \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}\psi_{n-2} \quad (3.13)$$

e redefinindo a distância de propagação z assim como a periodicidade do meio a através de

$$z \rightarrow \frac{\omega}{c}z \quad (3.14)$$

e

$$a \rightarrow \frac{\omega}{c}a, \quad (3.15)$$

equação (3.13) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\psi_n}{dz^2} = \alpha_n\psi_n - \varepsilon_{-1}\psi_{n+2} - \varepsilon_1\psi_{n-2}, \quad (3.16)$$

onde $\alpha_n = n^2\pi^2/a^2 - \varepsilon_0$. Equação (3.16) é um dos principais resultados deste trabalho e suas soluções serão estudadas com mais detalhes nas próximas seções.

3.2 Modelo de duas ondas

Utilizando o modelo de duas ondas, considere a situação onde apenas os modos $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ sejam acoplados durante a propagação, conforme a Figura 12(b). Equação (3.16) fornece então

$$\frac{d^2\psi_{-1}}{dz^2} = \alpha_{-1}\psi_{-1} - \varepsilon_{-1}\psi_1 \quad (3.17)$$

¹ Como o meio é não-magnético então sua permeabilidade magnética é igual a do vácuo e portanto é positiva, garantindo a positividade do índice de refração.

e

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2} = \alpha_1\psi_1 - \varepsilon_{-1}\psi_{-1}. \quad (3.18)$$

Sem perda de generalidade², fazendo $a = \pi$ implica $\alpha_{\pm 1} = \alpha = 1 - \varepsilon_0$ e assim

$$\frac{d^2\psi_{-1}}{dz^2} = \alpha\psi_{-1} - \varepsilon_{-1}\psi_1 \quad (3.19)$$

e

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2} = \alpha\psi_1 - \varepsilon_{-1}\psi_{-1}. \quad (3.20)$$

Talvez a primeira ideia para resolver este sistema de equações diferenciais acopladas seja derivar duas vezes em relação a z ambos os lados de uma das equações, substituir a outra equação no resultado obtido das duas derivações e assim obter uma equação diferencial de quarta ordem para cada um dos modos. É um procedimento válido, porém para determinar a solução de forma única seriam necessárias quatro condições iniciais. Uma saída para este problema é reescrever esse sistema de equações diferenciais acopladas numa forma matricial. De fato, equações (3.19) e (3.20) podem ser obtidas a partir da seguinte equação matricial

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \psi_{-1} \\ \phi_{-1} \\ \psi_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{-1} \\ \phi_{-1} \\ \psi_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde $\phi_{\pm 1}(z) = d\psi_{\pm 1}(z)/dz$. Para resolver uma equação do tipo $(d/dz)\Psi = \mathbf{M} \cdot \Psi$, sendo neste caso

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\varepsilon_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

e

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{-1} \\ \phi_{-1} \\ \psi_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

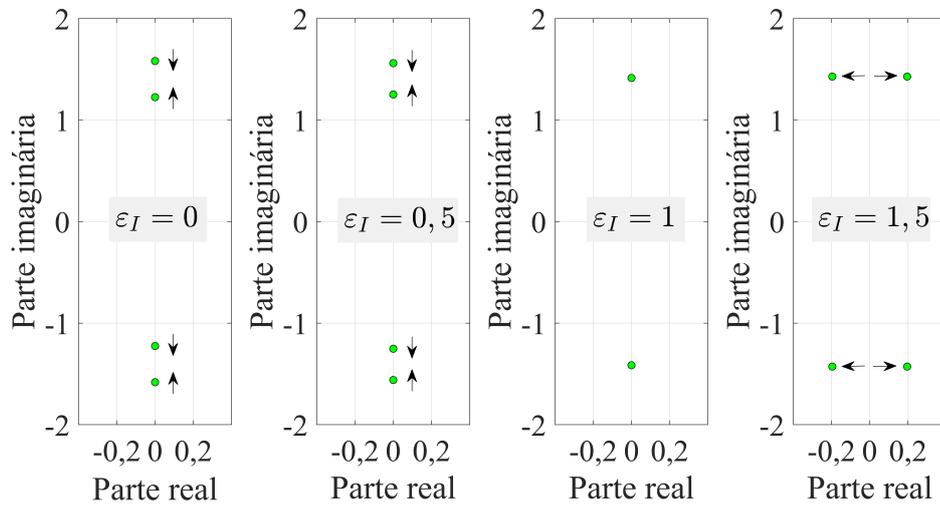
é necessário calcular os autovalores m_j da matriz \mathbf{M} , dados por

$$\begin{aligned} m_1 &= -\sqrt{1 - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}} & m_2 &= +\sqrt{1 - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}} \\ m_3 &= -\sqrt{1 - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}} & m_4 &= +\sqrt{1 - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

² O leitor pode se perguntar se este valor para a periodicidade da permissividade (e, portanto, do meio) resulta num regime não-paraxial. De fato, lembrando que $\omega = 2\pi c/\lambda$ (onde λ é o comprimento de onda da onda eletromagnética), é possível mostrar usando a equação (3.15) que $a = \lambda/2$, ou seja, regime não-paraxial.

Figura 14 ilustra a dinâmica dos autovalores dados na equação (3.24) em função de ε_I . Quando $\varepsilon_I = 0$ existem quatro autovalores distintos e imaginários puros dados por $m = \pm\sqrt{-2 \pm 1/2}$. Por outro lado, quando $\varepsilon_R = \varepsilon_I = 1$, os autovalores colidem em $m = \pm i\sqrt{2}$ tornando-se duplamente degenerados e definindo uma quebra da simetria \mathcal{PT} no meio. Na situação onde $\varepsilon_I > 1$, os autovalores tornam-se novamente distintos mas

Figura 14 – Partes real e imaginária dos autovalores m_j para os casos onde o sistema é Hermitiano ($\varepsilon_I = 0$), abaixo ($\varepsilon_I=0,5$), no ponto ($\varepsilon_I = 1$) e acima ($\varepsilon_I = 1,5$) do ponto de quebra de simetria. Inicialmente existem quatro autovalores distintos e imaginários puros antes de eles colidirem no ponto de quebra de simetria, onde passam a ser degenerados, e logo depois voltam a ser quatro autovalores mas agora possuindo tanto parte imaginária quanto parte real. Nesta figura, $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

agora todos eles possuem uma parte real não-nula. Portanto, é possível definir quatro situações a serem consideradas dependendo do valor assumido por ε_I (mantendo ε_0 e ε_R fixos), a saber, (i) caso Hermitiano ($\varepsilon_I = 0$), (ii) abaixo do ponto de quebra de simetria ($0 < \varepsilon_I < 1$), (iii) no ponto de quebra de simetria ($\varepsilon_I = 1$) e (iv) acima do ponto de quebra de simetria ($\varepsilon_I > 1$) e estas situações serão caracterizadas neste capítulo pelos valores $\varepsilon_I = 0$, $\varepsilon_I = 0,5$, $\varepsilon_I = 1$ e $\varepsilon_I = 1,5$, respectivamente.

Tendo calculado os autovalores da matriz \mathbf{M} , o próximo passo é calcular os respectivos autovetores \mathbf{m}_j tais que $\mathbf{M} \cdot \mathbf{m}_j = m_j \mathbf{m}_j$, para $j = 1, 2, 3$ e 4 , e eles são dados por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{(\varepsilon_R + \varepsilon_I)\sqrt{1 - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ \frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{\varepsilon_R + \varepsilon_I} \\ \frac{-1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{m}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{(\varepsilon_R + \varepsilon_I)\sqrt{1 - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ \frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{\varepsilon_R + \varepsilon_I} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{m}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{(\varepsilon_R + \varepsilon_I)\sqrt{1 - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ \frac{-\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{\varepsilon_R + \varepsilon_I} \\ \frac{-1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{m}_4 &= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{(\varepsilon_R + \varepsilon_I)\sqrt{1 - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ \frac{-\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{\varepsilon_R + \varepsilon_I} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Com o objetivo de verificar se este conjunto de autovetores são linearmente independentes, é necessário construir uma matriz \mathbf{U} tal que suas colunas sejam os autovetores \mathbf{m}_j , ou seja,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\beta r_- & \beta r_- & \beta r_+ & -\beta r_+ \\ \beta & \beta & -\beta & -\beta \\ -r_- & r_- & -r_+ & r_+ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

onde foram definidas as quantidades β e r_{\pm} como sendo respectivamente

$$\beta = \frac{\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}{\varepsilon_R + \varepsilon_I} \tag{3.27}$$

e

$$r_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}}} \tag{3.28}$$

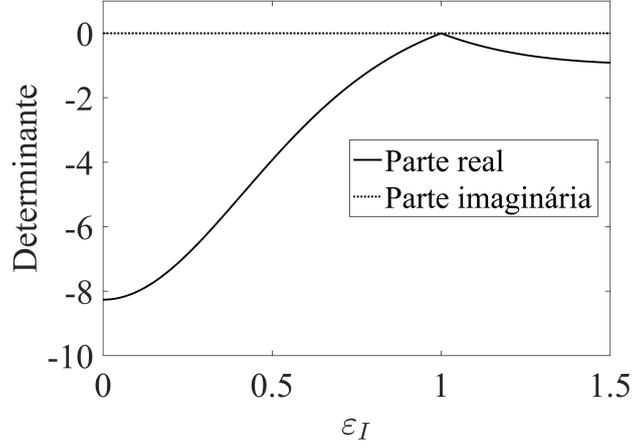
a fim de simplificar a notação. O próximo passo é calcular o determinante de \mathbf{U} em função de ε_I como está mostrado na Figura 15. Nota-se que para $\varepsilon_I \neq 1$ o conjunto de autovetores (3.25) é linearmente independente e o caso para o qual $\varepsilon_I = 1$ será discutido posteriormente (note que é nesta situação onde ocorre a colisão entre os autovalores da matriz \mathbf{M} ilustrada na Figura 14). A solução geral para a equação (3.21) é dada por

$$\Psi(z) = c_1 e^{m_1 z} \mathbf{m}_1 + c_2 e^{m_2 z} \mathbf{m}_2 + c_3 e^{m_3 z} \mathbf{m}_3 + c_4 e^{m_4 z} \mathbf{m}_4, \tag{3.29}$$

onde c_j são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais do problema. Para escrever c_j em termos de $\psi_{\pm 1}(0)$ e $\phi_{\pm 1}(0)$ é necessário analisar a equação (3.29) em $z = 0$. Utilizando a matriz \mathbf{U} definida anteriormente e o vetor coluna $\mathbf{C} = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)^T$, onde T é a operação de transposição, é possível escrever $\Psi(0) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{C}$. Calculando a matriz inversa de \mathbf{U} , \mathbf{U}^{-1} , as constantes c_j podem ser dadas em termos de $\Psi(0)$ como segue

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \Psi(0). \tag{3.30}$$

Figura 15 – Determinante da matriz \mathbf{U} em função de ε_I . O determinante é diferente de zero quando $\varepsilon_I \neq 1$, implicando em autovetores linearmente independentes. É justamente no ponto de quebra de simetria que os autovetores tornam-se linearmente dependentes. Nesta figura, $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

Este procedimento fornecerá a solução geral para o caso $\varepsilon_I \neq 1$. No ponto de quebra de simetria será necessário modificar este método, pois agora existe degenerescência nos autovalores, como será visto mais adiante.

3.3 Oscilações de Bragg Hermitianas

Inicialmente, o meio considerado neste estudo não possuirá ganho ou perda, de modo que $\varepsilon_I = 0$, e a permissividade elétrica (3.10) é Hermitiana. Tem-se então

$$\beta = 1, \quad (3.31)$$

$$r_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{\varepsilon_R}{2}}} \quad (3.32)$$

e

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -r_- & r_- & r_+ & -r_+ \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -r_- & r_- & -r_+ & r_+ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

A matriz inversa \mathbf{U}^{-1} é dada então por

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_-} & 1 & -\frac{1}{r_-} & 1 \\ \frac{1}{r_-} & 1 & \frac{1}{r_-} & 1 \\ \frac{1}{r_+} & -1 & -\frac{1}{r_+} & 1 \\ -\frac{1}{r_+} & -1 & \frac{1}{r_+} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

de modo que, usando (3.30),

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_-} & 1 & -\frac{1}{r_-} & 1 \\ \frac{1}{r_-} & 1 & \frac{1}{r_-} & 1 \\ \frac{1}{r_+} & -1 & -\frac{1}{r_+} & 1 \\ -\frac{1}{r_+} & -1 & \frac{1}{r_+} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{-1}(0) \\ \phi_{-1}(0) \\ \psi_1(0) \\ \phi_1(0) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

e as constantes c_j 's serão dadas por, supondo $\phi_{\pm 1}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4r_-} [-\psi_{-1}(0) - \psi_1(0)] & c_2 &= \frac{1}{4r_-} [\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] \\ c_3 &= \frac{1}{4r_+} [\psi_{-1}(0) - \psi_1(0)] & c_4 &= \frac{1}{4r_+} [-\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) em (3.29) obtem-se então os modos $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$, em termos de $\psi_{-1}(0)$ e $\psi_1(0)$, dados por

$$\psi_{-1}(z) = \frac{1}{4} [\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] (e^{m_1 z} + e^{m_2 z}) + \frac{1}{4} [\psi_{-1}(0) - \psi_1(0)] (e^{m_3 z} + e^{m_4 z}) \quad (3.37)$$

e

$$\psi_1(z) = \frac{1}{4} [\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] (e^{m_1 z} + e^{m_2 z}) + \frac{1}{4} [-\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] (e^{m_3 z} + e^{m_4 z}). \quad (3.38)$$

Contudo, $\varepsilon_I = 0$ implica autovalores m_j imaginários puros satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} m_1 &= i\text{Im}(m_1) & m_2 &= -i\text{Im}(m_1) \\ m_3 &= i\text{Im}(m_3) & m_4 &= -i\text{Im}(m_3) \end{aligned} \quad (3.39)$$

pode-se então reescrever (3.37) e (3.38) como

$$\psi_{-1}(z) = \frac{1}{2} [\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] \cos(\gamma_- z) + \frac{1}{2} [\psi_{-1}(0) - \psi_1(0)] \cos(\gamma_+ z) \quad (3.40)$$

e

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2} [\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] \cos(\gamma_- z) + \frac{1}{2} [-\psi_{-1}(0) + \psi_1(0)] \cos(\gamma_+ z), \quad (3.41)$$

onde

$$\gamma_{\pm} = \text{Im} \left(\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{\varepsilon_R}{2}} \right). \quad (3.42)$$

Sabendo as expressões matemáticas para os modos de Bragg é possível então calcular a função inversão de população W fisicamente definida como sendo a diferença entre a energia espectral presente nesses modos e matematicamente definida por

$$W = |\psi_1(z)|^2 - |\psi_{-1}(z)|^2 \quad (3.43)$$

bem como o campo elétrico (3.3). Existem, contudo, duas condições iniciais possíveis relacionadas a qual modo de Bragg a energia espectral está inicialmente: na primeira condição inicial toda a energia está no modo ψ_1 , implicando $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{0, 1\}$, enquanto que na segunda condição inicial toda a energia no modo ψ_{-1} , implicando $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{1, 0\}$. Desta forma, nas próximas seções serão usadas as seguintes definições: $W_{\pm 1}(z)$ e $\mathbf{E}_{\pm 1}(x, z)$ são as funções inversão de população e os campos elétricos quando a energia espectral está inicialmente no modo $\psi_{\pm 1}$.

3.3.1 Função inversão de população

Com o objetivo de estudar a evolução espacial da troca de energia entre os modos de Bragg, é interessante encontrar as expressões para as funções inversão de população. Assim, estas funções são dadas por

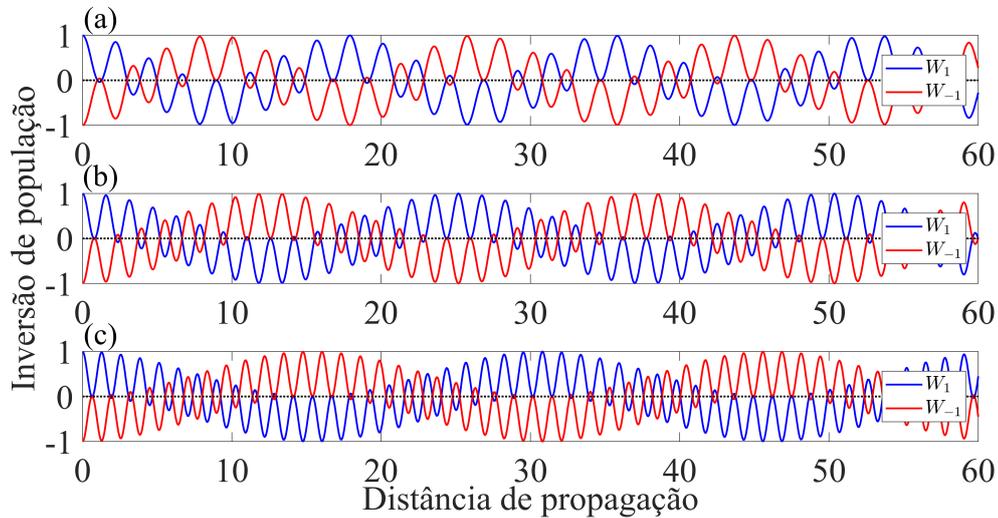
$$W_{-1}(z) = -\cos(\gamma_{-z}) \cos(\gamma_{+z}) \quad (3.44)$$

e

$$W_1(z) = \cos(\gamma_{-z}) \cos(\gamma_{+z}). \quad (3.45)$$

A evolução espacial destas funções está ilustrada na Figura 16. Uma característica a ser notada é que trata-se de um processo conservativo, uma vez que a soma das energias de cada modo de Bragg é sempre igual a energia de entrada, como era o esperado para um sistema Hermitiano. Esta simetria na evolução espacial de $W_{\pm 1}(z)$ implica um valor médio

Figura 16 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) e $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para (a) $\varepsilon_0 = 3$, (b) $\varepsilon_0 = 5$, (c) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$. No caso Hermitiano a evolução espacial acontece de forma simétrica e conservativa pois o meio não possui perda nem ganho. A linha preta pontilhada indica a situação onde a quantidade de energia espectral dos modos de Bragg são iguais.

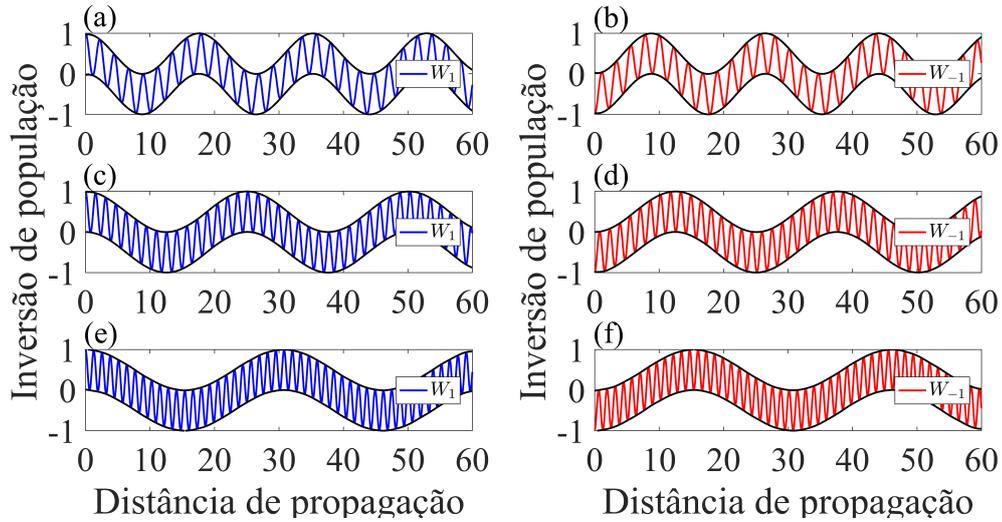


Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

das funções inversão de população nulo: dentre $\psi_{\pm 1}(z)$ não há um modo preferencial do meio, de forma que um deles não transfere e/ou cede mais ou menos energia que o outro. É interessante notar ainda que um modo não transfere toda a sua energia espectral de uma única vez. De fato, tomando a curva de $W_1(z)$ na Figura 16(a) como exemplo, é possível ver que inicialmente $W_1(z)$ diminui de valor mas em um determinado instante espacial seu valor volta a aumentar porém com um valor máximo menor que 1. Seguindo a evolução, esse comportamento de decaimento e crescimento ocorre de forma periódica e

somente um pouco antes da posição $z = 10$ é que ocorre a total transferência de energia de $\psi_1(z)$ para $\psi_{-1}(z)$. É precisamente este comportamento que dá origem a dois tipos de oscilações presentes na evolução espacial de $W_{\pm 1}(z)$: uma oscilação do tipo envelope, com um período espacial maior que modula uma oscilação do tipo fase, como pode ser visto na Figura 17. Quando ε_0 cresce, o período espacial da oscilação do tipo fase diminui enquanto

Figura 17 – Oscilações do tipo fase e do tipo envelope para as funções inversão de população $W_1(z)$ (coluna esquerda) e $W_{-1}(z)$ (coluna direita) no caso Hermitiano para (a)-(b) $\varepsilon_0 = 3$, (c)-(d) $\varepsilon_0 = 5$, (e)-(f) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

que o período da oscilação do tipo envelope aumenta. Também cresce com o aumento de ε_0 a posição na qual a transferência de energia contida num modo de Bragg para outro é total (claramente visto na Figura 16).

Este comportamento oscilatório das funções inversão de população é análogo a batimentos. Sendo uma evolução periódica, é possível encontrar os períodos espaciais de cada oscilação, sendo necessário reescrever qualquer uma das funções inversão de população em termos de funções exponenciais complexas de modo a obter as frequências espaciais relacionadas as oscilações. Escolhendo $W_1(z)$ obtem-se

$$W_1(z) = \frac{1}{4} \left[e^{i(\gamma_- + \gamma_+)z} + e^{i(\gamma_- - \gamma_+)z} + e^{i(-\gamma_- + \gamma_+)z} + e^{i(-\gamma_- - \gamma_+)z} \right], \quad (3.46)$$

de modo que há quatro frequências associadas ao movimento oscilatório de W_1 : $\omega_1 = \gamma_- + \gamma_+$, $\omega_2 = \gamma_- - \gamma_+$, $\omega_3 = -\gamma_- + \gamma_+$ e $\omega_4 = -\gamma_- - \gamma_+$. Tomando as frequências positivas, a saber, ω_1 e ω_2 , os períodos espaciais para as respectivas oscilações são dados então por

$$\Lambda_{\text{fase}} = \frac{2\pi}{\gamma_- + \gamma_+} \quad (3.47)$$

e

$$\Lambda_{\text{envelope}} = \frac{2\pi}{\gamma_- - \gamma_+}. \quad (3.48)$$

Para uma visão um pouco mais qualitativa, usando os mesmos valores de ε_0 e ε_R da Figura 16 obtém-se: $\Lambda_{\text{fase}} = 2, 24, 1, 57, 1, 28$ para $\varepsilon_0 = 3, \varepsilon_0 = 5$ e $\varepsilon_0 = 7$ respectivamente; e $\Lambda_{\text{envelope}} = 17, 63, 25, 08, 30, 75$ para $\varepsilon_0 = 3, \varepsilon_0 = 5$ e $\varepsilon_0 = 7$ respectivamente.

3.3.2 Campo elétrico

A evolução espacial do campo elétrico também é algo que vale a pena ser estudada e que refletirá a dinâmica das funções inversão de população. Usando (3.40) e (3.41) os campos elétricos que se propagam através do meio Hermitiano, associados a cada condição inicial, são dados por

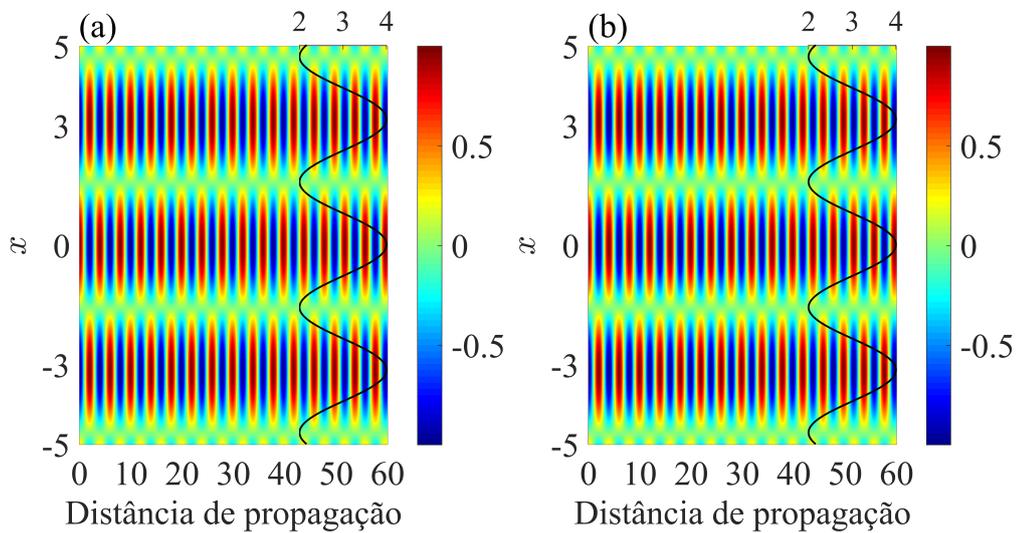
$$\mathbf{E}_{-1}(x, z) = \hat{y} [\cos(\gamma_- z) \cos(x) - i \cos(\gamma_+ z) \text{sen}(x)] \quad (3.49)$$

e

$$\mathbf{E}_1(x, z) = \hat{y} [\cos(\gamma_- z) \cos(x) + i \cos(\gamma_+ z) \text{sen}(x)] \quad (3.50)$$

e na Figura 18 está ilustrada a evolução espacial da parte real de cada um dos campos $\mathbf{E}_{\pm 1}(x, z)$ e uma vez que no caso Hermitiano não há ganhos ou perdas, as franjas de inter-

Figura 18 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$. A curva preta indica a permissividade elétrica relativa e o eixo superior algum de seus valores.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

ferência são idênticas para as duas condições iniciais do problema. Na direção transversal a direção de propagação do campo elétrico, o contraste nas franjas de interferência segue a periodicidade da permissividade elétrica $\varepsilon(x)$: nas regiões de onde $\varepsilon(x)$ atinge seu menor valor o campo elétrico torna-se quase nulo e nas regiões onde $\varepsilon(x)$ é máxima, o campo elétrico atinge seu maior valor (tanto positivamente quanto negativamente).

3.4 Oscilações de Bragg \mathcal{PT} -simétricas abaixo do ponto de quebra de simetria

Nas próximas três seções serão discutidas a troca de energia espectral entre os modos de Bragg $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ bem como a evolução espacial do campo elétrico na situação onde a permissividade elétrica relativa possui uma parte imaginária não-nula. A matriz \mathbf{U} neste caso é dada pela equação (3.26) e sua inversa é

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta r_-} & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{r_-} & 1 \\ \frac{1}{\beta r_-} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{r_-} & 1 \\ \frac{1}{\beta r_+} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta r_+} & 1 \\ -\frac{1}{\beta r_+} & -\frac{1}{\beta} & \frac{1}{r_+} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Seguindo o mesmo procedimento feito no caso Hermitiano, as constantes c_j 's são dadas agora por

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4\beta r_-} [-\psi_{-1}(0) - \beta\psi_1(0)] & c_2 &= \frac{1}{4\beta r_-} [\psi_{-1}(0) + \beta\psi_1(0)] \\ c_3 &= \frac{1}{4\beta r_+} [\psi_{-1}(0) - \beta\psi_1(0)] & c_4 &= \frac{1}{4\beta r_+} [-\psi_{-1}(0) + \beta\psi_1(0)], \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $\phi_{\pm 1}(0) = 0$ foi usado, de modo que $\psi_{-1}(z)$ e $\psi_1(z)$ são dados por

$$\psi_{-1}(z) = \frac{1}{2} [\psi_{-1}(0) + \beta\psi_1(0)] \cos(\gamma'_- z) + \frac{1}{2} [\psi_{-1}(0) - \beta\psi_1(0)] \cos(\gamma'_+ z) \quad (3.53)$$

e

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2\beta} [\psi_{-1}(0) + \beta\psi_1(0)] \cos(\gamma'_- z) + \frac{1}{2\beta} [-\psi_{-1}(0) + \beta\psi_1(0)] \cos(\gamma'_+ z), \quad (3.54)$$

onde as relações (3.39) foram usadas e

$$\gamma'_{\pm} = \text{Im} \left(\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_R^2 - \varepsilon_I^2}} \right). \quad (3.55)$$

3.4.1 Função inversão de população

As funções inversão de população abaixo do ponto de quebra de simetria são dadas por

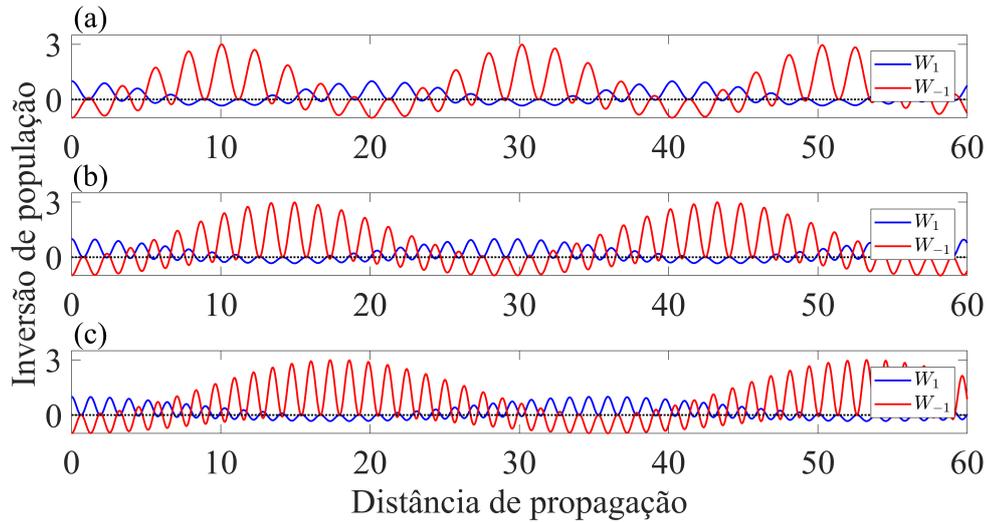
$$W_{-1}(z) = \frac{1 - \beta^2}{4\beta^2} \cos^2(\gamma'_- z) + \frac{1 - \beta^2}{4\beta^2} \cos^2(\gamma'_+ z) - \frac{1 + \beta^2}{2\beta^2} \cos(\gamma'_- z) \cos(\gamma'_+ z) \quad (3.56)$$

e

$$W_1(z) = \frac{1 - \beta^2}{4} \cos^2(\gamma'_- z) + \frac{1 - \beta^2}{4} \cos^2(\gamma'_+ z) + \frac{1 + \beta^2}{2} \cos(\gamma'_- z) \cos(\gamma'_+ z), \quad (3.57)$$

e a evolução espacial de $W_{\pm 1}(z)$ está ilustrada na Figura 19. Uma vez que a permissividade

Figura 19 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) and $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para (a) $\varepsilon_0 = 3$, (b) $\varepsilon_0 = 5$, (c) $\varepsilon_0 = 7$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 0, 5$. Quando a permissividade elétrica relativa possui uma parte imaginária não-nula, surge uma evidente assimetria entre as funções inversão de população, gerando então um modo de Bragg preferencial. A linha preta pontilhada indica a situação onde a quantidade de energia espectral dos modos de Bragg são iguais.



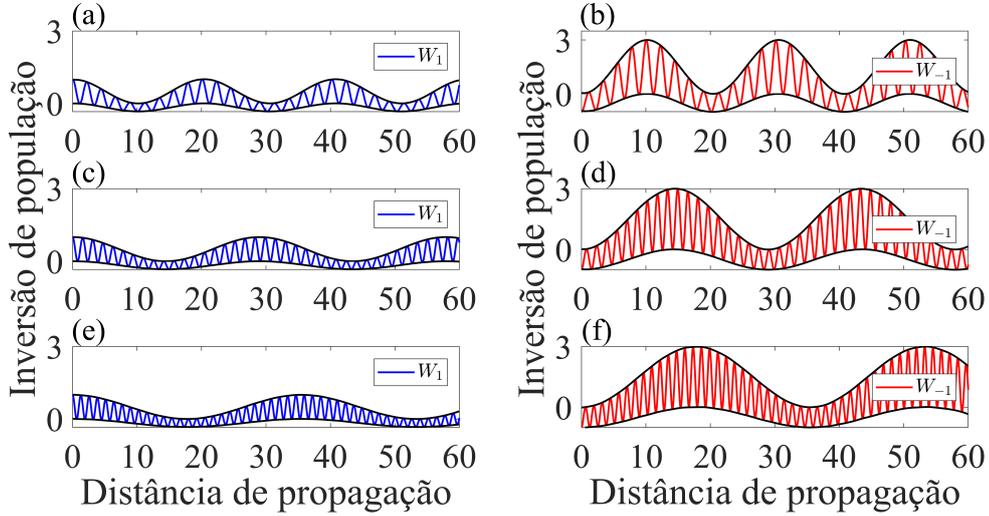
Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

elétrica do meio agora possui uma parte imaginária diferente de zero, implica numa evidente assimetria na evolução espacial das funções inversão de população como pode ser visto na Figura 19. A transferência de energia entre os modos de Bragg nesta situação também não ocorre de uma única vez, assim como foi visto no caso Hermitiano, e agora $W_{-1}(z)$ oscila com uma amplitude maior que a amplitude de oscilação de $W_1(z)$ durante a maior parte da propagação e esta amplitude cresce a medida que ε_0 cresce. Isto significa que a transferência de energia entre os modos de Bragg não mais acontece de forma balanceada e $\psi_1(z)$ tornou-se o modo preferencial para o qual a energia é transferida independente da escolha inicial de qual modo possui toda a energia espectral. Esta transferência ocorre mais pronunciadamente na condição onde o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral. Abaixo do ponto de quebra de simetria, as oscilações do tipo fase e envelope ainda ocorrem, conforme mostra a Figura 20. Fazendo o mesmo procedimento usado no caso Hermitiano para calcular os períodos espaciais, escolhendo $W_1(z)$, pode-se mostrar que

$$W_1 = \frac{1 - \beta^2}{16} (e^{2i\gamma'_- z} + e^{-2i\gamma'_- z}) + \frac{1 - \beta^2}{16} (e^{2i\gamma'_+ z} + e^{-2i\gamma'_+ z}) + \frac{1 + \beta^2}{8} \left[e^{i(\gamma'_- + \gamma'_+) z} + e^{i(\gamma'_- - \gamma'_+) z} + e^{i(-\gamma'_- + \gamma'_+) z} + e^{i(-\gamma'_- - \gamma'_+) z} \right], \quad (3.58)$$

de modo que existem agora seis frequências associadas ao comportamento ondulatório das funções inversão de população: $\omega_1 = 2\gamma'_-$, $\omega_2 = 2\gamma'_+$, $\omega_3 = \gamma'_- + \gamma'_+$, $\omega_4 = \gamma'_- - \gamma'_+$,

Figura 20 – Oscilações do tipo fase e do tipo envelope para as funções inversão de população $W_1(z)$ (coluna esquerda) e $W_{-1}(z)$ (coluna direita) no caso abaixo da quebra de simetria para (a)-(b) $\varepsilon_0 = 3$, (c)-(d) $\varepsilon_0 = 5$, (e)-(f) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

$\omega_5 = -\gamma'_- + \gamma'_+$ e $\omega_6 = -\gamma'_- - \gamma'_+$. Os períodos espaciais associados a oscilação do tipo fase e do tipo envelope são dados, respectivamente, por

$$\Lambda'_{\text{fase}} = \frac{2\pi}{2\gamma'_-} \quad (3.59)$$

e

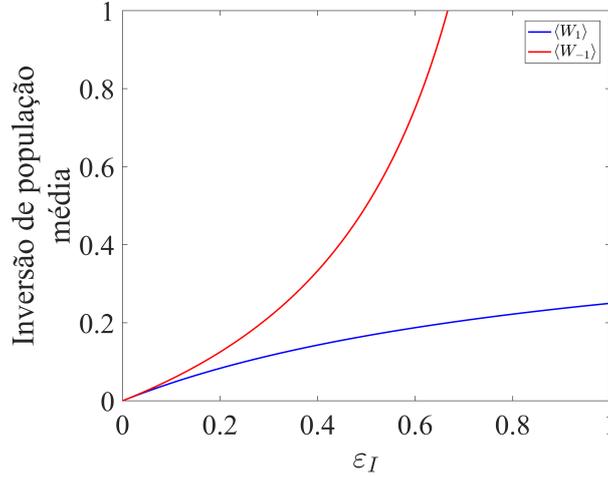
$$\Lambda'_{\text{envelope}} = \frac{2\pi}{\gamma'_- - \gamma'_+} \quad (3.60)$$

e comparando estes períodos com os do caso Hermitiano, nota-se que o período espacial para a oscilação do tipo fase (envelope) diminui (aumenta). Na seção anterior foi visto que as oscilações de Bragg Hermitianas ocorrem de forma simétrica e isto implica em médias nulas, em relação a uma oscilação completa, para cada função inversão de população. No caso das oscilações de Bragg \mathcal{PT} -simétricas abaixo do ponto de quebra de simetria, devido a assimetria na evolução espacial destas funções, tais médias sobre uma oscilação completa é agora não-nula. De fato, para calculá-las basta notar que a função cosseno ao quadrado e o produto de duas funções cossenos (com argumentos distintos) geram médias iguais, respectivamente, a $1/2$ e 0 , em relação a uma oscilação completa. Aplicando este raciocínio nas equações (3.56) e (3.57) obtém-se

$$\langle W_{\pm 1} \rangle = \frac{\varepsilon_I}{2(\varepsilon_R \pm \varepsilon_I)}, \quad (3.61)$$

onde foi usada a definição de β dada pela equação (3.27) a fim de reescrever $\langle W_{\pm 1} \rangle$ em termos de ε_R e ε_I . Estas médias estão ilustradas na Figura 21 e, em particular, pela expressão de $\langle W_{-1} \rangle$ nota-se um comportamento divergente a medida que ε_I se aproxima de 1. Esta característica sugere novamente que o modo $\psi_1(z)$ é o modo preferencial do

Figura 21 – Média espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) and $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para $\varepsilon_R = 1$. Note o caso Hermitiano onde as médias espaciais são nulas e também um comportamento divergente na média $\langle W_{-1} \rangle$ quando ε_I se aproxima de 1, significando $\psi_1(z)$ recebe cada vez mais energia durante maior parte da propagação.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

sistema independente da condição inicial, recebendo cada vez mais energia a medida que ε_I aumenta, e isto pode ser quantitativamente mostrado usando os mesmos valores de ε_R e ε_I da Figura 21 para obter $\langle W_{-1} \rangle \approx 0,5$ e $\langle W_1 \rangle \approx 0,16$. Esta distribuição desbalanceada de energia espectral entre os modos tende a divergir no ponto de quebra de simetria, como de fato é mostrado na Figura 21.

3.4.2 Campo elétrico

Os campos elétricos correspondentes a cada condição inicial do problema são dados por

$$\mathbf{E}_{-1}(x, z) = \hat{y} \left\{ \left[\frac{1+\beta}{2\beta} \cos(\gamma'_- z) - \frac{1-\beta}{2\beta} \cos(\gamma'_+ z) \right] \cos(x) + i \left[\frac{1-\beta}{2\beta} \cos(\gamma'_- z) - \frac{1+\beta}{2\beta} \cos(\gamma'_+ z) \right] \sin(x) \right\} \quad (3.62)$$

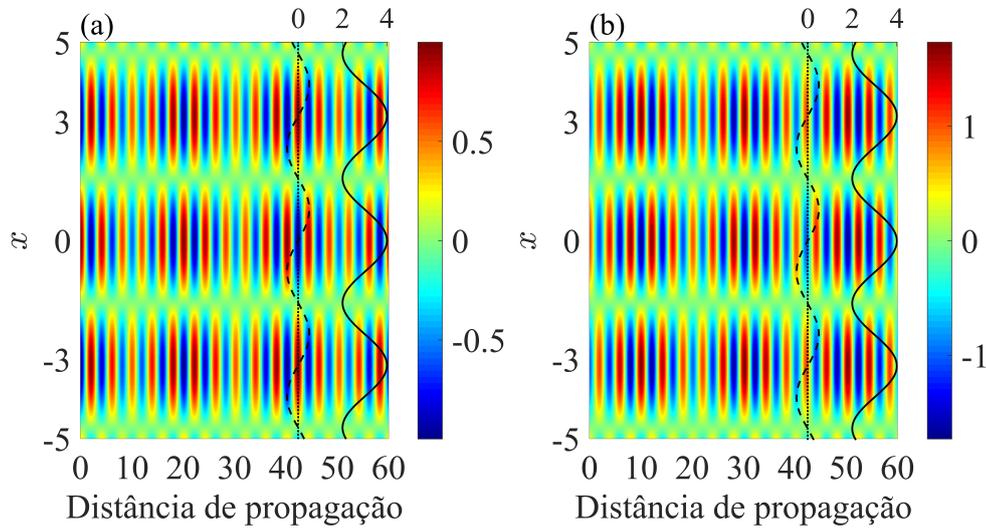
e

$$\mathbf{E}_1(x, z) = \hat{y} \left\{ \left[\frac{1+\beta}{2} \cos(\gamma'_- z) + \frac{1-\beta}{2} \cos(\gamma'_+ z) \right] \cos(x) + i \left[\frac{1-\beta}{2} \cos(\gamma'_- z) + \frac{1+\beta}{2} \cos(\gamma'_+ z) \right] \sin(x) \right\}. \quad (3.63)$$

A partir das expressões dos campos elétricos, nota-se agora a existência de uma assimetria na evolução espacial da parte real desses campos e esta assimetria vem do fato que agora

o meio possui uma permissividade elétrica \mathcal{PT} -simétrica, o que implica a presença de regiões durante a propagação onde há ganho (perda), correspondendo às situações onde $\text{Im}[\varepsilon(x)]$ é menor (maior) que zero, respectivamente. A evolução espacial da parte real de $\mathbf{E}_{\pm 1}(x, z)$ está mostrada na Figura 22. O padrão espacial das franjas de interferência reflete

Figura 22 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 0,5$. Esta evolução claramente é assimétrica e depende da condição inicial do problema, em especial quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico possui maior contraste. As curvas pretas contínua e tracejada representam, respectivamente, as partes real e imaginária da permissividade relativa e a linha preta pontilhada está mostrada para indicar as regiões onde a parte imaginária de $\varepsilon(x)$ é positiva ou negativa.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

a evolução espacial das funções inversão de população mostrada na Figura 19. Assim como no caso Hermitiano, o padrão de interferência transversal é composto por ciclos de franjas claras e escuras separadas por franjas de menor contraste. Uma vez que abaixo do ponto de quebra de simetria o valor máximo da amplitude do envelope da função inversão de população também varia, surge de forma periódica regiões de baixo contraste ao longo da direção de propagação. Estas regiões correspondem aos locais onde a quantidade de energia é quase nula e na Figura 22 elas estão indicadas nas regiões “borradas”.

3.5 Oscilações de Bragg \mathcal{PT} -simétricas acima do ponto de quebra de simetria

Passando agora para a situação acima do ponto de quebra de simetria, ou seja, para $\varepsilon_I > 1$, sabe-se da Figura 14 os autovalores da matriz \mathbf{M} possuem agora tanto parte imaginária quanto parte real e isto provocará uma evolução espacial para as funções

inversão de população e para os campos elétricos totalmente diferente das evoluções vistas anteriormente. Primeiramente é interessante reescrever a matriz \mathbf{U} definindo $\beta = i\tilde{\beta}$ e $r_{\pm} \rightarrow \tilde{r}_{\pm}$ onde

$$\tilde{\beta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_I^2 - \varepsilon_R^2}}{\varepsilon_R + \varepsilon_I} \quad (3.64)$$

e

$$\tilde{r}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon_I^2 - \varepsilon_R^2}}}, \quad (3.65)$$

uma vez que nesta situação $\varepsilon_I > \varepsilon_R$. Desta maneira, basta repetir todos os passos feitos na seção 1.4 fazendo a substituição $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$ e $r_{\pm} \rightarrow \tilde{r}_{\pm}$. Os modos $\psi_{\pm 1}(z)$ são dados por

$$\psi_{-1}(z) = \frac{1}{4} [\psi_{-1}(0) + i\tilde{\beta}\psi_1(0)] (e^{m_1 z} + e^{m_2 z}) + \frac{1}{4} [\psi_{-1}(0) - i\tilde{\beta}\psi_1(0)] (e^{m_3 z} + e^{m_4 z}) \quad (3.66)$$

e

$$\psi_1(z) = \frac{1}{4i\tilde{\beta}} [\psi_{-1}(0) + i\tilde{\beta}\psi_1(0)] (e^{m_1 z} + e^{m_2 z}) - \frac{1}{4i\tilde{\beta}} [\psi_{-1}(0) - i\tilde{\beta}\psi_1(0)] (e^{m_3 z} + e^{m_4 z}). \quad (3.67)$$

Acima do ponto de quebra de simetria os autovalores possuem partes real e imaginárias satisfazendo

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{Re}(m_1) + i\text{Im}(m_1) & m_2 &= -\text{Re}(m_1) - i\text{Im}(m_1) \\ m_3 &= \text{Re}(m_3) + i\text{Im}(m_3) & m_4 &= -\text{Re}(m_3) - i\text{Im}(m_3) \end{aligned} \quad (3.68)$$

de modo que

$$\begin{aligned} e^{m_1 z} + e^{m_2 z} &= e^{[\text{Re}(m_1)z + i\text{Im}(m_1)z]} + e^{-[\text{Re}(m_1)z + i\text{Im}(m_1)z]} \\ &= 2 \cosh [\text{Re}(m_1)z] \cos [\text{Im}(m_1)z] + 2i \sinh [\text{Re}(m_1)z] \text{sen} [\text{Im}(m_1)z] \end{aligned} \quad (3.69)$$

e

$$\begin{aligned} e^{m_3 z} + e^{m_4 z} &= e^{[\text{Re}(m_3)z + i\text{Im}(m_3)z]} + e^{-[\text{Re}(m_3)z + i\text{Im}(m_3)z]} \\ &= 2 \cosh [\text{Re}(m_3)z] \cos [\text{Im}(m_3)z] + 2i \sinh [\text{Re}(m_3)z] \text{sen} [\text{Im}(m_3)z]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Logo, os modos de Bragg (3.66) e (3.67) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \psi_{-1}(z) &= \frac{\tilde{\beta}}{2} \psi_1(0) \left[-\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \text{sen}(\tilde{\gamma}'_- z) + \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \text{sen}(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \psi_{-1}(0) \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \\ &\quad + i \left\{ \frac{\tilde{\beta}}{2} \psi_1(0) \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) - \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \psi_{-1}(0) \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \text{sen}(\tilde{\gamma}'_- z) + \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \text{sen}(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \quad (3.71) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_1(z) = & \frac{1}{2}\psi_1(0) \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \\ & + \frac{1}{2\tilde{\beta}}\psi_{-1}(0) \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) - \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \\ & + i \left\{ \frac{1}{2}\psi_1(0) \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) + \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\tilde{\beta}}\psi_{-1}(0) \left[-\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\}, \quad (3.72) \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\gamma}_\pm = \text{Re} \left(\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon_I^2 - \varepsilon_R^2}} \right) \quad (3.73)$$

e

$$\tilde{\gamma}'_\pm = \text{Im} \left(\sqrt{1 - \varepsilon_0 \pm \frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon_I^2 - \varepsilon_R^2}} \right). \quad (3.74)$$

3.5.1 Função inversão de população

As funções inversão de população nesta situação são dadas por

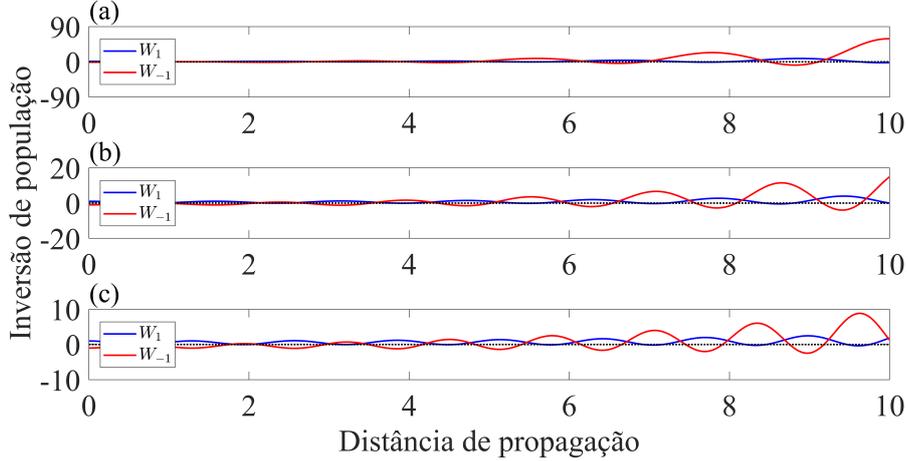
$$\begin{aligned} W_{-1}(z) = & \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{4\tilde{\beta}^2} [\sinh^2(\tilde{\gamma}_- z) + \cos^2(\tilde{\gamma}'_- z)] + \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{4\tilde{\beta}^2} [\sinh^2(\tilde{\gamma}_+ z) + \cos^2(\tilde{\gamma}'_+ z)] \\ & - \frac{1 + \tilde{\beta}^2}{2\tilde{\beta}^2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right. \\ & \left. + \sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \quad (3.75) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W_1(z) = & \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{4} [\sinh^2(\tilde{\gamma}_- z) + \cos^2(\tilde{\gamma}'_- z)] + \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{4} [\sinh^2(\tilde{\gamma}_+ z) + \cos^2(\tilde{\gamma}'_+ z)] \\ & + \frac{1 + \tilde{\beta}^2}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right. \\ & \left. + \sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \quad (3.76) \end{aligned}$$

e devido a presença de funções hiperbólicas nas expressões de $W_{\pm 1}(z)$, a evolução espacial da transferência de energia entre os modos de Bragg possuirá um crescimento ilimitado e muito rápido como de fato está mostrado na Figura 23. A assimetria e o comportamento oscilatório da evolução de $W_{\pm 1}(z)$ ainda são presentes acima do ponto de quebra de simetria mas este último possui uma amplitude que cresce ilimitadamente com a distância de propagação. Quando inicialmente o modo ψ_1 possui toda a energia espectral, é possível notar que praticamente toda a energia fica contida no modo ψ_1 durante a evolução espacial. Uma dinâmica bem diferente é apresentada por $W_{-1}(z)$ onde agora esta função começa com valores negativos, ou seja, a energia espectral fica mais concentrada no modo ψ_{-1} ,

Figura 23 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_1(z)$ (linha contínua azul) and $W_{-1}(z)$ (linha contínua vermelha) para (a) $\varepsilon_0 = 3$, (b) $\varepsilon_0 = 5$, (c) $\varepsilon_0 = 7$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 1, 5$. Há uma evidente assimetria entre as evoluções e a amplitude das oscilações crescem muito rapidamente com a distância de propagação. A linha preta pontilhada indica a situação onde a quantidade de energia espectral dos modos de Bragg são iguais.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

e rapidamente começa a assumir valores positivos e cada vez maiores, aumentando a amplitude da oscilação, e é possível notar que a medida que a evolução acontece, menor são os valores negativos assumidos por $W_{-1}(z)$. Novamente, acima do ponto de quebra de simetria, o modo ψ_1 recebe cada vez mais energia qualquer que seja a condição inicial escolhida, apesar que quando $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{1, 0\}$ esta transferência torna-se muito mais acentuada.

3.5.2 Campo elétrico

Quando a energia espectral está inicialmente no modo ψ_{-1} , o campo elétrico é tal que suas partes real e imaginária são dadas por

$$\begin{aligned}
 \text{Re} [\mathbf{E}_{-1}(x, z)] = & \left\{ \frac{1}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) - \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \cos(x) \\
 & + \left\{ \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) - \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) + \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \sin(x) \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Im} [\mathbf{E}_{-1}(x, z)] = & \left\{ -\frac{1}{2\tilde{\beta}} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) - \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) - \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \left. \right\} \cos(x) \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\tilde{\beta}} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) - \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \sin(x) \quad (3.78) \end{aligned}$$

e considerando que o modo ψ_1 é o modo que possui inicialmente toda a energia espectral, as partes reais e imaginárias do campo elétrico associado são

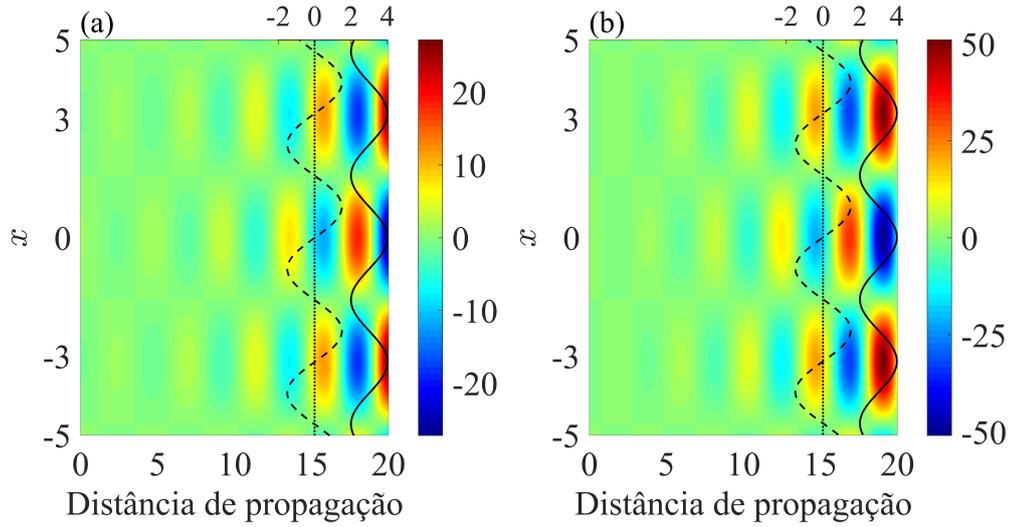
$$\begin{aligned} \text{Re} [\mathbf{E}_1(x, z)] = & \left\{ \frac{1}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{\beta}}{2} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) - \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \cos(x) \\ & + \left\{ \frac{\tilde{\beta}}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) - \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) + \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \sin(x) \quad (3.79) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Im} [\mathbf{E}_1(x, z)] = & \left\{ \frac{\tilde{\beta}}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) - \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) + \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \cos(x) \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \left[\cosh(\tilde{\gamma}_- z) \cos(\tilde{\gamma}'_- z) + \cosh(\tilde{\gamma}_+ z) \cos(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\beta}}{2} \left[\sinh(\tilde{\gamma}_- z) \sin(\tilde{\gamma}'_- z) - \sinh(\tilde{\gamma}_+ z) \sin(\tilde{\gamma}'_+ z) \right] \right\} \sin(x). \quad (3.80) \end{aligned}$$

Figura 24 ilustra a evolução espacial para a parte real dos campos $\mathbf{E}_{\pm 1}(x, z)$. Novamente, o padrão de interferência reflete a evolução espacial mostrada na Figura 23, de modo que no começo da propagação existe um campo elétrico fraco e a medida que a propagação segue, o campo elétrico cresce rapidamente, aumentando assim o contraste nas franjas de interferência (especialmente quando inicialmente o modo ψ_{-1} possui toda a energia espectral).

Figura 24 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$, $\varepsilon_R = 1$ e $\varepsilon_I = 1,5$. Novamente, uma evolução claramente assimétrica ocorre e quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico possui maior contraste. As curvas pretas contínua e tracejada representam, respectivamente, as partes real e imaginária da permissividade relativa e a linha preta pontilhada está mostrada para indicar as regiões onde a parte imaginária de $\varepsilon(x)$ é positiva ou negativa.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

3.6 Oscilações de Bragg \mathcal{PT} -simétricas no ponto de quebra de simetria

No ponto de quebra de simetria, já é sabido que os autovalores da matriz \mathbf{M} tornam-se degenerados e dados por

$$m_1 = -i\sqrt{\tilde{\alpha}} \quad (3.81)$$

e

$$m_2 = i\sqrt{\tilde{\alpha}}, \quad (3.82)$$

onde cada autovalor possui degenerescência igual a 2. Para determinar os respectivos autovetores, considere o seguinte sistema de equações lineares $(\mathbf{M} - m_j \mathbf{I})^{n_j} \mathbf{m}_j = 0$, onde n_j é degenerescência do autovalor m_j . Para o presente caso, tem-se

$$(\mathbf{M} - m_1 \mathbf{I})^2 \mathbf{m}_1 = 0 \quad (3.83)$$

e

$$(\mathbf{M} - m_2 \mathbf{I})^2 \mathbf{m}_2 = 0, \quad (3.84)$$

de modo que a solução geral $\Psi(z)$ seja tal que

$$\Psi(0) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2. \quad (3.85)$$

Usando então (3.83), (3.84) e (3.85), de modo a escrever as componentes dos autovetores em termos de $\psi_{\pm 1}(0)$, é possível mostrar que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\psi_1(0) \\ -\frac{i\sqrt{\tilde{\alpha}}}{2}\psi_{-1}(0) \\ \frac{1}{2}\psi_1(0) \\ \frac{1}{4i\sqrt{\tilde{\alpha}}}\psi_{-1}(0) + \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}}}{2i}\psi_1(0) \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\psi_1(0) \\ \frac{i\sqrt{\tilde{\alpha}}}{2}\psi_{-1}(0) \\ \frac{1}{2}\psi_1(0) \\ -\frac{1}{4i\sqrt{\tilde{\alpha}}}\psi_{-1}(0) - \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}}}{2i}\psi_1(0) \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

de fato satisfazendo (3.85).

A solução geral $\Psi(z)$ neste caso é dada por

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^k e^{m_j z} \left[\sum_{p=0}^{n_j-1} \frac{z^p}{p!} (\mathbf{M} - m_j \mathbf{I})^p \right] \cdot \mathbf{m}_j, \quad (3.88)$$

onde k é o número de autovetores \mathbf{m}_j , n_j é a degenerescência do respectivo autovalor m_j e \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 4. Como há dois autovetores, pode-se mostrar que

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \psi_{-1}(0) \cos(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) \\ -\sqrt{\tilde{\alpha}}\psi_{-1}(0) \operatorname{sen}(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) \\ \psi_1(0) \cos(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) - \frac{\psi_{-1}(0)}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}}z \operatorname{sen}(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) \\ -\frac{\psi_{-1}(0)}{2}z \cos(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) - \frac{\psi_{-1}(0) + \tilde{\alpha}\psi_1(0)}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} \operatorname{sen}(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

e assim, os modos de Bragg no ponto de quebra de simetria são dados por

$$\psi_{-1}(z) = \psi_{-1}(0) \cos(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) \quad (3.90)$$

e

$$\psi_1(z) = \psi_1(0) \cos(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) - \frac{\psi_{-1}(0)}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}}z \operatorname{sen}(\sqrt{\tilde{\alpha}}z). \quad (3.91)$$

3.6.1 Função inversão de população

As funções inversão de população são dadas por

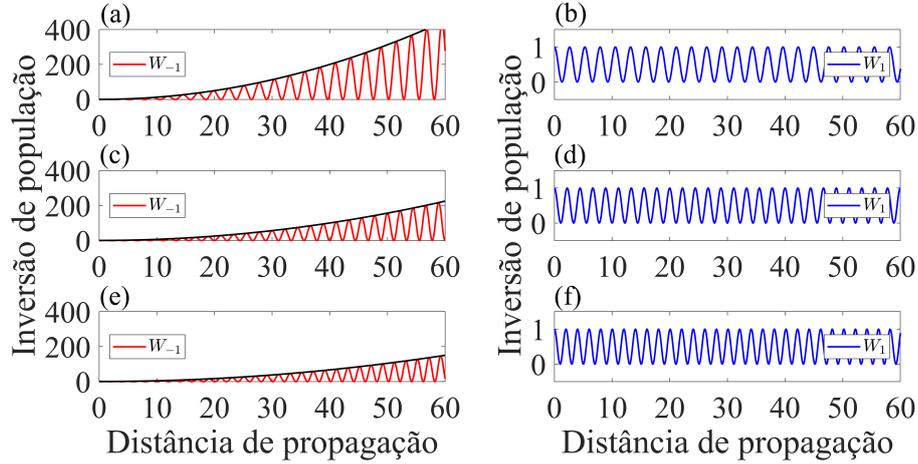
$$W_{-1}(z) = \frac{1}{4\tilde{\alpha}}z^2 \operatorname{sen}^2(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) - \cos^2(\sqrt{\tilde{\alpha}}z) \quad (3.92)$$

e

$$W_1(z) = \cos^2(\sqrt{\tilde{\alpha}}z), \quad (3.93)$$

ilustradas na Figura 25. Apesar de uma evolução oscilatória ainda ocorrer, claramente é uma evolução espacial muito diferente entre $W_{-1}(z)$ e $W_1(z)$ e note que, em especial, a

Figura 25 – Evolução espacial das funções inversão de população $W_{-1}(z)$ e $W_1(z)$ para (a)-(b) $\varepsilon_0 = 3$, (c)-(d) $\varepsilon_0 = 5$, (e)-(f) $\varepsilon_0 = 7$ e $\varepsilon_R = 1$. Estas evoluções são completamente distintas dependendo da condição inicial escolhida e particularmente quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, $W_{-1}(z)$ cresce ilimitadamente com o quadrado da distância de propagação. A curva preta representa a parábola $[4(\varepsilon_0 - 1)]^{-1} z^2$.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

transferência de energia entre os modos não mais apresenta o comportamento de diminuição e logo em seguida de crescimento como visto nos casos Hermitianos e abaixo do ponto de quebra de simetria. É interessante notar ainda que a ocorrência de um modo preferencial surge apenas para uma das condições iniciais, a saber, $\{\psi_{-1}(0), \psi_1(0)\} = \{1, 0\}$, onde $\psi_1(z)$ recebe cada vez mais energia a medida que a evolução espacial ocorre (um crescimento parabólico com a distância de propagação) e aumentando o valor de ε_0 , a amplitude da oscilação de $W_{-1}(z)$ diminui rapidamente. A evolução espacial de $W_{11}(z)$ é totalmente diferente daquela apresentada por $W_1(z)$ e neste regime não-paraxial não foi observado o fenômeno do aprisionamento de modo, como foi mencionado na seção 2.4 do Capítulo 2. De fato, a transferência da energia espectral quando inicialmente esta energia está no modo ψ_1 oscila periodicamente entre os valores 0 e 1, representando as situações onde toda a energia volta a estar no modo ψ_1 e quando a mesma está distribuída entre os modos de Bragg considerados.

3.6.2 Campo elétrico

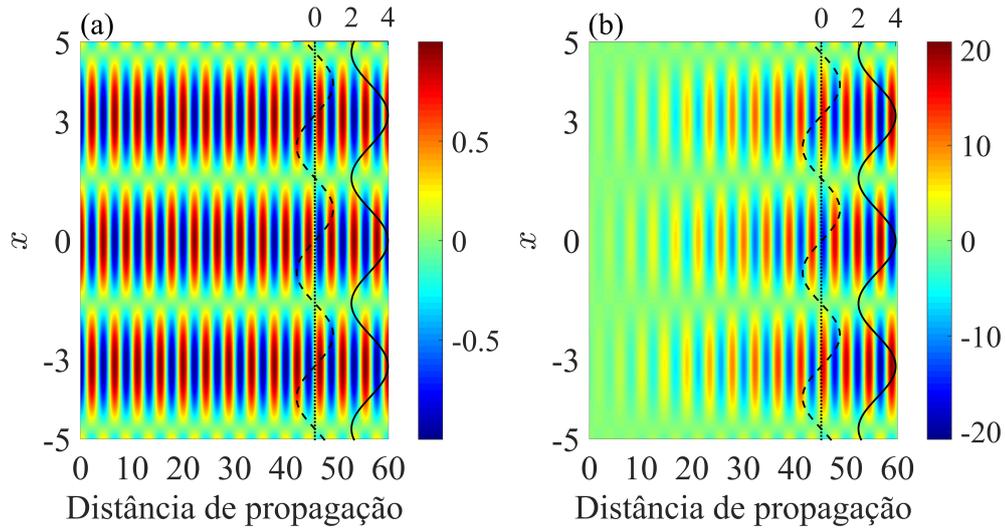
Os campos elétricos para cada condição inicial do problema são dados por

$$\mathbf{E}_{-1}(x, z) = \hat{y} \left[\cos(\sqrt{\tilde{\alpha}z}) e^{-ix} - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\alpha}}} z \operatorname{sen}(\sqrt{\tilde{\alpha}z}) e^{ix} \right] \quad (3.94)$$

e

$$\mathbf{E}_1(x, z) = \hat{y} \cos(\sqrt{\tilde{\alpha}z}) e^{ix}. \quad (3.95)$$

Figura 26 – Evolução espacial da parte real de (a) $\mathbf{E}_1(x, z)$ e (b) $\mathbf{E}_{-1}(x, z)$ para $\varepsilon_0 = 3$ e $\varepsilon_R = 1$. Novamente uma evolução assimétrica ocorre e quando o modo ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico possui valores maiores e desta vez crescendo linearmente com a distância de propagação. As curvas pretas contínua e tracejada representam, respectivamente, as partes real e imaginária da permissividade relativa e a linha preta pontilhada está mostrada para indicar as regiões onde a parte imaginária de $\varepsilon(x)$ é positiva ou negativa.



Fonte: elaborada pelo autor, 2018.

Na Figura 26 está mostrada a parte real de $\mathbf{E}_{\pm 1}(x, z)$ no ponto de quebra de simetria. Quando a energia espectral está inicialmente no modo ψ_1 obtém-se franjas de interferência com contraste semelhante aos campos elétricos obtidos no caso Hermitiano. Por outro lado, na situação onde ψ_{-1} possui inicialmente toda a energia espectral, o campo elétrico cresce linearmente (em módulo) com a distância de propagação, iniciando com valores próximos de zero e crescendo a medida que a propagação ocorre.

4 Conclusões

O objetivo deste trabalho foi estudar detalhadamente a evolução espacial dos modos de Bragg num meio dielétrico descrito por uma permissividade elétrica relativa \mathcal{PT} -simétrica periódica.

No Capítulo 1 foi feita uma discussão introdutória da mecânica quântica baseada numa classe de operadores Hamiltonianos que comutam com os operadores paridade e inversão temporal simultaneamente e mostrou-se que esses operadores possuem duas fases distintas baseadas na natureza de seus autovalores (natureza esta que é determinada por um dado parâmetro no Hamiltoniano): abaixo do valor crítico do parâmetro que controla a Hermiticidade do Hamiltoniano, há uma fase não-quebrada onde os autovalores são totalmente reais e acima do valor crítico deste parâmetro, há uma fase quebrada onde os autovalores são parcialmente ou totalmente complexos. Exatamente no valor crítico desse parâmetro, ocorre uma quebra espontânea da simetria \mathcal{PT} nessa classe de Hamiltonianos, caracterizada pela passagem da fase quebrada para a não-quebrada do espectro de autovalores. Na mecânica quântica \mathcal{PT} simétrica, que pode ser vista como uma extensão ao plano complexo da mecânica quântica Hermitiana, algumas nuances foram enfatizadas, especialmente para o fato onde é necessário a introdução de um novo operador de simetria na fase não-quebrada, denotado por \mathcal{C} , para elaborar uma evolução temporal unitária. Ao final do capítulo, foi mostrado ainda que sistemas \mathcal{PT} simétricos são um meio-termo entre sistemas completamente abertos e sistemas completamente fechados.

A introdução da simetria \mathcal{PT} na ótica foi discutida no Capítulo 2. Neste capítulo foram mostrados alguns trabalhos onde sistemas óticos possuindo ganho e perda óticos de forma balanceada foram construídos de modo a verificar experimentalmente algumas características da mecânica quântica \mathcal{PT} simétrica bem como comportamentos nunca antes vistos nos sistemas óticos Hermitianos, como a propagação do campo elétrico de forma não-recíproca e/ou unidirecional, transmissão induzida por perda ótica, oscilações de potência, dentre outros efeitos. Os primeiros exemplos dados nesse capítulo baseiam-se na aproximação paraxial para a propagação da luz e desta forma, na seção 1.3, foi discutido o comportamento de sistemas óticos \mathcal{PT} -simétricos, uma guia de onda e um meio periódico, onde a luz se propaga de forma não-paraxial, ou seja, o comprimento de onda da luz é maior ou da mesma ordem de grandeza que as dimensões espaciais do sistema estudado. Foi mostrado a existência das fases não-quebrada e quebrada e a ocorrência da recuperação da simetria \mathcal{PT} depois que o sistema está na fase quebrada (quando a dimensão do sistema é muito menor que o comprimento de onda da luz, foi mostrado que a recuperação da simetria \mathcal{PT} não ocorre mais). Por fim, ao final do capítulo, foi discutido brevemente as oscilações de potência induzidas por ressonância de Bragg em redes óticas \mathcal{PT} simétricas

no regime paraxial. Tais oscilações ocorrem quando alguns modos do campo elétrico são ressonantes com as bordas da primeira zona de Brillouin da rede ótica.

Tendo visto os conceitos básicos da mecânica quântica \mathcal{PT} simétrica e como introduzir esta simetria na ótica, no Capítulo 3 é discutido a troca da energia espectral entre dois modos de Bragg que são ressonantes com um meio periódico descrito por uma permissividade elétrica relativa \mathcal{PT} simétrica e para um campo elétrico que se propaga de forma não-paraxial. Foi mostrado que a troca de energia espectral entre os modos ressonantes de Bragg do sistema evoluem espacialmente de forma oscilatória, recíproca e com um comportamento do tipo batimento quando o meio é Hermitiano. Na situação onde há a presença de ganho e perda óticos, ou seja, quando a permissividade elétrica relativa possui uma parte imaginária não-nula, a dinâmica dessa troca muda completamente dependendo da condição inicial escolhida, de modo que a evolução torna-se assimétrica e a troca de energia ocorre sempre de forma preferencial para um dos modos de Bragg nas situações abaixo, acima e no ponto de quebra de simetria. Exatamente no ponto de quebra, onde $\varepsilon_I = 1$, não foi verificado o aprisionamento de modo nesse regime não-paraxial (como já fora visto no caso paraxial), de modo que a troca de energia espectral oscila com uma amplitude que cresce parabolicamente com a distância de propagação ou oscila harmonicamente, dependendo da condição inicial escolhida. Tanto a reciprocidade da troca de energia no caso Hermitiano quanto a não-reciprocidade nos casos onde a parte imaginária da permissividade elétrica relativa é diferente de zero, refletiram nessas mesmas características para as evoluções espaciais da parte real do campo elétrico para cada caso tratado neste trabalho. No caso Hermitiano foi verificado a existência de uma evolução espacial completamente simétrica e independente de qual condição inicial era escolhida e foi visto também que a parte real do campo elétrico obtém seus valores mínimos sempre que a permissividade elétrica atinge seu valor mínimo. Acima, abaixo e no ponto de quebra de simetria, a parte real dos respectivos campos elétricos apresentam uma clara assimetria na sua evolução espacial (com valores que dependem da condição inicial escolhida) e em especial para o caso no ponto de quebra de simetria, uma condição inicial leva uma evolução espacial semelhante ao caso Hermitiano enquanto que a outra condição inicial leva a um campo elétrico que cresce linearmente com a distância de propagação.

Dado o exposto, os resultados obtidos neste trabalho são bem adequados para descrever sistemas óticos periódicos \mathcal{PT} -simétricos, em especial, no estudo da transferência de energia entre os modos de um campo elétrico que se propaga no meio de maneira não-paraxial. Este estudo pode gerar novas rotas para a construção e controle da dinâmica de modos em rede óticas onde há ganho e perda óticos de forma balanceada.

Referências

- AGRAWAL, G. P. Nonlinear fiber optics. In: *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*. [S.l.]: Springer, 2000. p. 195–211. Citado na página 30.
- BENDER, C. M. Introduction to \mathcal{P} -symmetric quantum theory. *Contemporary physics*, Taylor & Francis, v. 46, n. 4, p. 277–292, 2005. Citado na página 28.
- BENDER, C. M. Making sense of non-hermitian hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 70, n. 6, p. 947, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.
- BENDER, C. M. Upside-down potentials. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2012. v. 343, n. 1, p. 012014. Citado na página 23.
- BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having \mathcal{P} \mathcal{T} symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- BENDER, C. M.; BOETTCHER, S.; MEISINGER, P. N. \mathcal{P} \mathcal{T} -symmetric quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 40, n. 5, p. 2201–2229, 1999. Citado na página 28.
- BENDER, C. M.; BRODY, D. C.; JONES, H. F. Complex extension of quantum mechanics. *Physical Review Letters*, APS, v. 89, n. 27, p. 270401, 2002. Citado na página 24.
- BENDER, C. M.; BRODY, D. C.; JONES, H. F. Must a hamiltonian be hermitian? *American Journal of Physics*, AAPT, v. 71, n. 11, p. 1095–1102, 2003. Citado na página 24.
- BERRY, M. Optical lattices with \mathcal{P} \mathcal{T} symmetry are not transparent. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 24, p. 244007, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 42.
- BRANDÃO, P.; CAVALCANTI, S. Effect of nonlinearity on the dynamics of bragg-induced optical rabi oscillations in a one-dimensional periodic photonic structure. *Optics Communications*, Elsevier, v. 400, p. 34–37, 2017. Citado na página 41.
- BRANDÃO, P. A.; CAVALCANTI, S. B. Bragg-induced power oscillations in \mathcal{P} \mathcal{T} -symmetric periodic photonic structures. *Physical Review A*, APS, v. 96, n. 5, p. 053841, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- BUSHUEV, V.; DERGACHEVA, L.; MANTSYZOV, B. Asymmetric pendulum effect and transparency change of \mathcal{P} \mathcal{T} -symmetric photonic crystals under dynamical bragg diffraction beyond the paraxial approximation. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 3, p. 033843, 2017. Citado na página 40.
- CASTALDI, G. et al. \mathcal{P} \mathcal{T} metamaterials via complex-coordinate transformation optics. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 17, p. 173901, 2013. Citado na página 44.

- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1991. (Quantum Mechanics, v. 1). ISBN 9780471164333. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iHcpAQAAMAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- DOREY, P.; DUNNING, C.; TATEO, R. Supersymmetry and the spontaneous breakdown of symmetry. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 28, p. L391, 2001. Citado na página 22.
- EL-GANAINY, R. et al. Theory of coupled optical pt-symmetric structures. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 32, n. 17, p. 2632–2634, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- FENG, L. et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 2, p. 108, 2013. Citado na página 44.
- GRAEFE, E.-M.; JONES, H. Pt-symmetric sinusoidal optical lattices at the symmetry-breaking threshold. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 1, p. 013818, 2011. Citado na página 32.
- GUO, A. et al. Observation of p t-symmetry breaking in complex optical potentials. *Physical Review Letters*, APS, v. 103, n. 9, p. 093902, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- HEISS, W. The physics of exceptional points. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 45, n. 44, p. 444016, 2012. Citado na página 22.
- HESKETH, G. D.; JONES, H. F. Pt-symmetric optical lattices. 2010. Citado na página 30.
- HUANG, C. et al. Pt symmetry in optics beyond the paraxial approximation. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 39, n. 18, p. 5443–5446, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 37, 38, 39, 40 e 41.
- KULISHOV, M.; JONES, H.; KRESS, B. Analysis of unidirectional non-paraxial invisibility of purely reflective pt-symmetric volume gratings. *Optics express*, Optical Society of America, v. 23, n. 14, p. 18694–18711, 2015. Citado na página 40.
- LAZARIDES, N.; TSIRONIS, G. Gain-driven discrete breathers in p t-symmetric nonlinear metamaterials. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 5, p. 053901, 2013. Citado na página 44.
- MAKRIS, K. G. et al. Beam dynamics in p t symmetric optical lattices. *Physical Review Letters*, APS, v. 100, n. 10, p. 103904, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 41.
- MAKRIS, K. G. et al. Pt-symmetric optical lattices. *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 6, p. 063807, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- RÜTER, C. E. et al. Observation of parity–time symmetry in optics. *Nature physics*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 3, p. 192, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

SALEH, B. E.; TEICH, M. C.; SALEH, B. E. *Fundamentals of photonics*. [S.l.]: Wiley New York, 1991. v. 22. Citado na página 29.

SHANKAR, R. *Principles of quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

SHCHESNOVICH, V. S.; CHÁVEZ-CERDA, S. Bragg-resonance-induced rabi oscillations in photonic lattices. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 32, n. 13, p. 1920–1922, 2007. Citado na página 41.

SINHA, A.; ROYCHOUDHURY, R. Spectral singularity in confined pt symmetric optical potential. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 54, n. 11, p. 112106, 2013. Citado na página 32.