UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

IDENTIDADES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI:
Uma Proposta de Sequência Didática para Turmas Olímpicas de Nível 2

EDCARLOS DA SILVA MACENA

Maceió
2018

EDCARLOS DA SILVA MACENA

IDENTIDADES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI:
Uma Proposta de Sequência Didática para Turmas Olímpicas de Nível 2

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Adina Rocha.

Maceió

2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

M141i Macena, Edcarlos da Silva.
Identidades dos números de Fibonacci: uma proposta de sequência didática para turmas olímpicas de nível 2 / Edcarlos da Silva Macena. – 2018.
80 f : il.

Orientadora: Adina Rocha dos Santos.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 60-61.
Apêndices: f. 62-71.
Anexos: f. 72-80.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Olimpíadas de matemática. 3. Números de Fibonacci. 4. Identidade de Fibonacci. 5. Análise combinatória. I. Título.

CDU: 519.1

Folha de Aprovação

EDCARLOS DA SILVA MACENA

IDENTIDADES DOS NÚMEROS DE FIBONACCI: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA TURMAS OLÍMPICAS DE NÍVEL 2

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 25 de junho de 2018.

Banca Examinadora:

Adina Rocha dos Santos

Profa. Dra. Adina Rocha dos Santos – IFAL/UFAL (Presidente)

Hilário Alencar da Silva

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva – UFAL

Márcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

MACEIÓ - 2018

Aos meus pais,

irmãos e sobrinhos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pela oportunidade da realização de mais uma conquista, e a Maria, por todas as interseções feitas em meu nome durante este processo.

À minha família, em relevância aos meus pais, Maria das Dores e Manoel, irmãos, Edna e Eduardo, e tio, Eufrásio, pelo apoio e incentivo à educação, recebidos desde cedo.

Aos professores que participaram da jornada desse programa de mestrado: Isnaldo Isaac, Luis Guillermo, André Flores, José Carlos, Gregório Manoel, Vânio Fragoso, Viviane de Oliveira. Em especial a Adina Rocha pela orientação dessa dissertação.

Aos colegas de profissão Carolliny Vilas Boas, Darislânia Rocha, Ednelson Júnior, Elayne Santos, Letícia Leal e Lívia Marbelle pela colaboração nos tópicos do trabalho que não estavam unicamente ligados à Matemática.

Ao Anthony Gabriel, um dos meus alunos olímpicos que aceitou a missão de criar Fibs. E aos seus pais, que me autorizaram a publicá-los neste trabalho.

Ao grupo Pentatonix e aos compositores Alexandre Desplat e John Pesano que embalaram a magnífica trilha sonora da escrita desta dissertação.

Aos colegas de turma que fizeram essa árdua rotina ter seus momentos de leveza, companheirismos e distração, ora com estudos coletivos, ora com jogatina. Sem medo de destacar aqueles que, de alguma forma, foram mais presentes: Isaac Oliveira, Janaílson Mota, Jefferson Cavalcante, Noel de Almeida e Rubia Soares.

À direção e à coordenação da escola onde trabalho, pela colaboração com a flexibilização dos meus dias de trabalho e redução da carga horária, quando por mim solicitado, para que pudesse ter um tempo a mais para me dedicar ao mestrado.

E, por fim, porém não menos importante, àquele que tanto me influenciou na escolha da minha profissão, o professor que sempre tive por modelo, Fábio Araújo.

O

que

me faz

ensinar

Matemática?

Sua essência prática!

Edcarlos Macena

RESUMO

O crescimento do número de participantes nas olimpíadas de matemática espalhadas pelo país, em especial na OBMEP, nos obriga a pensar em como preparar os alunos para enfrentar essas competições. Assim, é proposta uma sequência didática para o desenvolvimento dos números de Fibonacci, que visa treinar algumas habilidades dos estudantes: mediante demonstrações alternativas para sete identidades de Fibonacci, os alunos serão levados a utilizar sua inteligência espacial e se apoiar nela para criar conjecturas e desenvolver estratégias que sustentem tais afirmações. Para isso, será estabelecida uma estreita relação entre os números de Fibonacci e elementos básicos de Combinação, que deverá ser manipulada, prioritariamente, pelos discentes, fazendo com que eles assumam o protagonismo das aulas retirando, assim, o professor do centro das discussões. Também são trazidos elementos que podem contribuir na adaptação da sequência didática para turmas olímpicas de outros níveis ou ainda em turmas regulares de Ensino Médio, com possibilidade de interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia ou Literatura, por exemplo.

Palavras-chaves: Olimpíadas de Matemática; Números de Fibonacci; Identidades de Fibonacci; Análise Combinatória.

ABSTRACT

The increase of the number of participants at the Mathematical Olympiads spread all over the country, especially at the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP), forces us to think about how to prepare the students to face these competitions. Therefore, a didactic sequence for the development of Fibonacci numbers is proposed, that aims to train some of the students' abilities: through alternative proofs for seven Fibonacci identities, they will be led to use their spatial intelligence and rely on it to create conjectures and develop strategies to sustain such affirmations. For this, a close relationship will be established between the Fibonacci numbers and basic elements of combination, which must be manipulated, as a matter of priority, by the students, making them assume the protagonism of the classes and be the center of discussions. Also, there are elements brought that can contribute to the adaptation of the didactic sequence to Olympic classes of other levels or even in regular high school classes, with the possibility of interdisciplinarity between Mathematics and Biology or Literature, for example.

Key Words: Mathematical Olympiad; Fibonacci Numbers; Fibonacci Identities; Combinatorial Analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A importância da sequência de Fibonacci, e de seus números, é inegável e inquestionável, principalmente devido a sua presença recorrente em aspectos naturais, tanto de maneira estética como funcional, causando fascínio aos que os conhecem, sejam eles adultos ou crianças. Estas se encantam com a simplicidade no ato de contar as pétalas de uma flor ou as espirais de um abacaxi, enquanto aqueles usam esses números na construção da estética de seus trabalhos, como o italiano Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), que pintou quadros usando a espiral gerada pelos números de Fibonacci, dentre eles os famosos *Mona Lisa* e *A Anunciação*.

Outro exemplo que pode ser citado é o do escritor e poeta alemão Hans Enzensberger (1929 –), autor do livro fantasioso *O diabo dos números*[1], no qual o protagonista, um garoto chamado *Robert*, tinha seu sono atormentado todas as noites por um demônio, o *Teplotaxl*, responsável por ensinar-lhe algo de matemática a cada pesadelo. Em três deles, os números de Fibonacci e quatro de suas identidades se fazem presente.

Encontrar e demonstrar tais identidades são alvo de diversão e trabalho para matemáticos. Alguns deles estão ligados a "*The Fibonacci Association*[2]", criada em 1963 e vinculada ao Departamento de Matemática da Universidade Dalhausie, Canadá, que publica trimestralmente a revista "*The Fibonacci Quarterly*[3]", que contém, entre outras coisas, novos resultados, novas demonstrações e uma série de problemas, divididos entre simples e desafiadores.

Este trabalho, no entanto, se limitará ao estudo de sete identidades: uma delas foi estudada primeiramente pelo italiano Giovanni Domenico Cassini[4] (1625 – 1712), em 1680, e as outras seis fazem parte do estudo mais reconhecido do francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891) acerca da sequência de Fibonnaci (O'CONNOR & ROBERTSON, 1996). Porém, as demonstrações aqui presentes não serão as mesmas por eles apresentadas e, sempre que possível, não recorrerão ao

---

[1] Esta obra foi a responsável por meu encantamento com os números de Fibonacci e, principalmente, com suas identidades.

[2] Site da associação: <https://www.mathstat.dal.ca/fibonacci/>. Acesso em 26 maio 2018.

[3] Site da revista: <https://www.fq.math.ca/>. Acesso em 26 maio 2018.

[4] Cassini, além de matemático, também foi astrônomo, e quando se mudou para a França, ele trocou seu nome para Jean-Dominique (O'CONNOR & ROBERTSON, 2003).

tradicionalismo das provas por manipulação algébrica, mas sim ao uso de princípios básicos da combinação e/ou à associação de elementos geométricos, tais como retângulos, malhas quadriculadas e dominós, com os números da sequência. Tópicos que aparecem com certa regularidade em Olimpíadas de Matemática.

Dentre essas competições está a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que teve sua primeira edição realizada em 2005 pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Inicialmente, ela foi direcionada, exclusivamente, a estudantes de escolas públicas do país, porém, em sua 13ª edição, estendeu-se àqueles oriundos de escolas privadas, tornando-se a maior competição escolar do mundo, segundo o próprio IMPA. E como a competição premia não somente alunos (que são distribuídos em três níveis, a partir de sua série escolar: no Nível 1 competem alunos matriculados nos 6º e 7º anos; no Nível 2, os alunos de 8º e 9º; e no Nível 3 participam alunos do Ensino Médio), mas também professores, escolas e Secretarias de Educação, o interesse em participar da olimpíada e o empenho na preparação dos estudantes/competidores se intensifica ano após ano.

Com isso, o objetivo central do trabalho se constitui na elaboração de uma sequência didática que use as identidades dos números de Fibonacci como um meio de abordagem dos tópicos já citados. O fato dela estar direcionada a turmas olímpicas de nível 2 traz a necessidade de uma abordagem mais rigorosa e avançada, características típicas dessas competições, principalmente, em suas fases finais. Combinado a isso, todas as aulas foram montadas para que apresentassem elementos de uma aula "excelente", listados por Celso Antunes, e que trabalhe, principalmente, com a inteligência espacial (segundo a denominação de Howard Gardner) dos estudantes.

A estruturação dessa dissertação se deu em cinco capítulos. No primeiro, é realizado um levantamento histórico do surgimento da sequência de Fibonacci e sua aparição em elementos naturais e literários. Nos dois capítulos seguintes, são apresentadas sete identidades de Fibonacci, que são demonstradas mediante o uso de malhas quadriculadas e de um retângulo específico. E os dois últimos apresentam detalhadamente a sequência didática proposta e defendem seu uso.

2 FIBONACCI: DO MATEMÁTICO À SEQUÊNCIA

Antes de falar da sequência de Fibonacci em si, precisamos apresentar o matemático responsável por sua criação e entender porque ela ganhou tanto destaque, tanto entre os matemáticos quanto em leigos no assunto.

2.1 Leonardo de Pisa

Figura 1 – Leonardo de Pisa

Fonte: JOC/EFR (2015).

Leonardo de Pisa[5] (1170 – 1250), membro da família Bonacci, nasceu na Itália, mas foi educado no Norte da África. Seu pai, Guilielmo, ocupava um posto diplomático, representando os comerciantes da República de Pisa, onde atualmente localiza-se a cidade portuária de Bugia, no nordeste da Argélia. Lá teve contato com a Matemática dos árabes (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

Viajando com seu pai, reconheceu as enormes vantagens do sistema numérico utilizado nos países que visitou, tais como Egito, Síria, França e Sicília, e se aperfeiçoou em domínios como a álgebra, até então desconhecida pelos europeus (ROQUE & CARVALHO, 2010).

[5] Ou Leonardo Pisano, como consta em algumas fontes.

Figura 2 – Localização de Bugia

Fonte: Google Maps. Acesso em 11 abr. 2018.

Na pesquisa de O'Connor e Robertson consta ainda que, quando volta à cidade de Pisa, em torno do ano de 1200, Leonardo escreveu uma série de textos que desempenhou um papel importante na revitalização das antigas habilidades matemáticas e fez contribuições significativas de sua autoria. Porém, como ele viveu antes da invenção da imprensa, que só se deu no século XV, a única maneira de possuir algum de seus textos era fazer uma cópia manuscrita, o que causou a perda de alguns deles, como o seu comentário sobre o livro X dos *Elementos* de Euclides. Dentre os livros que ainda possuem cópias estão: *Liber abaci*, *Practica geometriae*, *Flos* e *Liber quadratorum*.

Em 1202, Leonardo escreveu o seu mais conhecido livro, o *Liber abaci*[6] (ou livro do ábaco). Porém o título é enganador, já que não é um livro sobre o ábaco e sim sobre aritmética, centrado principalmente em computações financeiras, com um tratado exaustivo sobre problemas e métodos algébricos em que a notação indo-arábica e o sistema de numeração decimal são fortemente recomendados. O livro teve uma segunda edição feita pelo próprio Leonardo em 1228.

O livro *Practica geometriae*, escrito em 1220, contém uma grande coleção de problemas de geometria organizados em oito capítulos, sendo um sobre a forma de calcular a altura de objetos altos usando triângulos semelhantes.

---

[6] Nas referências usadas para a elaboração deste trabalho, a referida palavra, em latim, aparece de três formas diferentes: *abaci*, *abbaci* e *abacci*. Usei *abaci* por ser a mais recorrente.

Cinco anos depois, Leonardo escreveu *Flos*, onde ele apresenta um problema para o qual ele havia sido desafiado a resolver: determinar as raízes da equação $10x + 2x^2 + x^3 = 20$ (em notação atual). No texto ele dá uma aproximação precisa para uma raiz da equação, apesar de ter mostrado que tal equação não poderia ser classificada em nenhum dos casos apresentados nos *Elementos* de Euclides. Os métodos utilizados para encontrar essa raiz, no entanto, não estão explicados no livro.

Também escrito em 1225, o *Liber quadratorum* é um livro de teoria dos números, que, entre outras coisas, analisa métodos para encontrar triplas pitagóricas. A *Encyclopaedia Britannica* classifica o livro como a principal contribuição à Teoria dos Números desde Diofanto de Alexandria, no século III, até Pierre de Fermat, no século XVII, por isso é o trabalho mais impressionante de Leonardo, apesar de não ser o mais famoso.

Em vida, o próprio Leonardo, por vezes, usou o nome Bigollo[7]. Isto pode ser visto no último documento conhecido que faz menção a Leonardo: um decreto da República de Pisa, datado de 1240, no qual um salário é concedido ao “sério e sábio Mestre Leonardo Bigollo” em reconhecimento pelos serviços concedidos à cidade. Ele só recebeu o apelido de Fibonacci (a forma reduzida de *filius Bonacci,* “filho de Bonacci”) tempos depois de sua morte, provavelmente no século XVIII.

2.2 *Liber abaci* e a sequência de Fibonacci

É *Liber abaci* que se encontra um problema, aparentemente criado pelo próprio Leonardo, que levou à introdução de uma sequência numérica bem peculiar: *um homem pôs um par de coelhos férteis em um lugar cercado por paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos serão produzidos por esse par em um ano, se supusermos que a cada mês, cada par produzirá um novo par, que se tornará fértil a partir do segundo mês de vida?*

A resposta é encontrada contando-se o número de pares de coelhos mês a mês. Para facilitar a explicação, chamaremos os pares de coelhos férteis de adultos e os inférteis de jovens. Perceba que cada par de coelhos adultos dá à luz a um par de

[7] Segundo o *Dictionary of Scientific Biography*, há dúvida sobre os possíveis significados para Bigollo: imprestável ou viajante. No dicionário, inclusive, está presente a seguinte pergunta: “Desejavam seus conterrâneos expressar com este apelido seu desprezo por um homem que se preocupava com questões sem valor prático, ou a palavra no dialeto toscano significa um homem muito viajado, o que ele era?”, em tradução livre.

coelhos jovens por mês que se torna adulto no mês seguinte. Sabendo disso, acompanhe o crescimento da população de coelhos na Tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade de pares de coelhos acompanhados mês a mês

Tempo	**Números de pares de coelhos**		**Número total de pares de coelhos**
	adultos	**jovens**	
Início	1	0	1
1 mês depois	1	1	2
2 meses depois	2	1	3
3 meses depois	3	2	5
4 meses depois	5	3	8
5 meses depois	8	5	13
6 meses depois	13	8	21
7 meses depois	21	13	34
8 meses depois	34	21	55
9 meses depois	55	34	89
10 meses depois	89	55	144
11 meses depois	144	89	233
12 meses depois	233	144	377

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou seja, em um ano terão 377 pares de coelhos nesse cercado, dos quais 233 são adultos e 144 jovens.

Pode-se observar que cada termo da coluna “Número total de pares de coelhos” da tabela acima, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Esta sequência, no entanto, só veio receber o nome de *Fibonacci* anos depois, no século XIX, pelo matemático francês Édouard Lucas.

Mesmo não aparecendo na sequência original presente no *Liber abaci*, a convenção moderna manda colocar mais um número 1 ao início da sequência de Fibonacci, ou seja,

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots\}, \qquad \textbf{(2.1)}$$

que pode ser formalizada da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases} \tag{2.2}$$

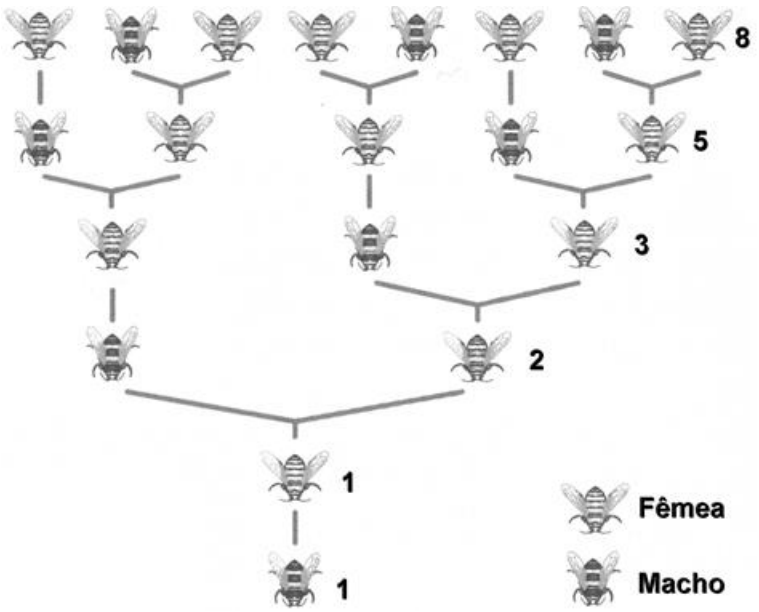
Para atender à essa convenção, alguns livros trazem o problema da reprodução dos coelhos com uma pequena adaptação: ao invés de se colocar um par de coelhos férteis no recinto, é colocado um casal de coelhos recém-nascidos. Assim, a contagem de casais de coelhos aparece tal qual a sequência (2.1).

2.3 Os números de Fibonacci e sua aparição na natureza

Apesar do problema dos coelhos que está presente no livro *Liber Abaci*, os números de Fibonacci são bastante inúteis como modelos de crescimento de populações reais desses animais, pois, normalmente, os filhotes de coelhos não nascem aos pares, um macho e uma fêmea; além disso, o cruzamento entre irmãos e irmãs poderia, ocasionalmente, levar a grandes anomalias genéticas. Porém processos mais gerais do mesmo tipo, chamados modelos de Leslie, são usados na compreensão da dinâmica de populações animais e humanas. Ainda assim, esses números são importantes em diversas áreas da matemática, e também surgem no mundo natural – embora com menos frequência do que costuma ser sugerido.

Podemos observar sua aparição, por exemplo, na árvore genealógica dos antepassados de um zangão. Mas antes de constatar este fato, é preciso lembrar que o sexo das abelhas é determinado pela fecundação ou não dos ovos da abelha rainha: se eles forem fecundados nascerão abelhas fêmeas (operárias ou rainhas), caso contrário, acontecerá a partenogênese e nascerão machos, os zangões. Para uma melhor compreensão, entende-se que, enquanto uma abelha fêmea é um indivíduo diploide (possui em seu material genético informações dos gametas do *pai* e da *mãe*), o zangão é haploide (o seu material genético contém informações vindas apenas dos gametas da *mãe*). Consequentemente, um zangão tem dois *avós* (os *pais* da *mãe*), três *bisavós* (os *pais* da sua *avó* e a *mãe* do seu *avô*), cinco *tataravós* (dois para cada *bisavó* e um para seu *bisavô*), e assim por diante. Os números dessa árvore genealógica, que pode ser observada na Figura 3, formam a sequência de Fibonacci.

Figura 3 – Árvore genealógica de um zangão



Fonte: Alex Bellos (2011).

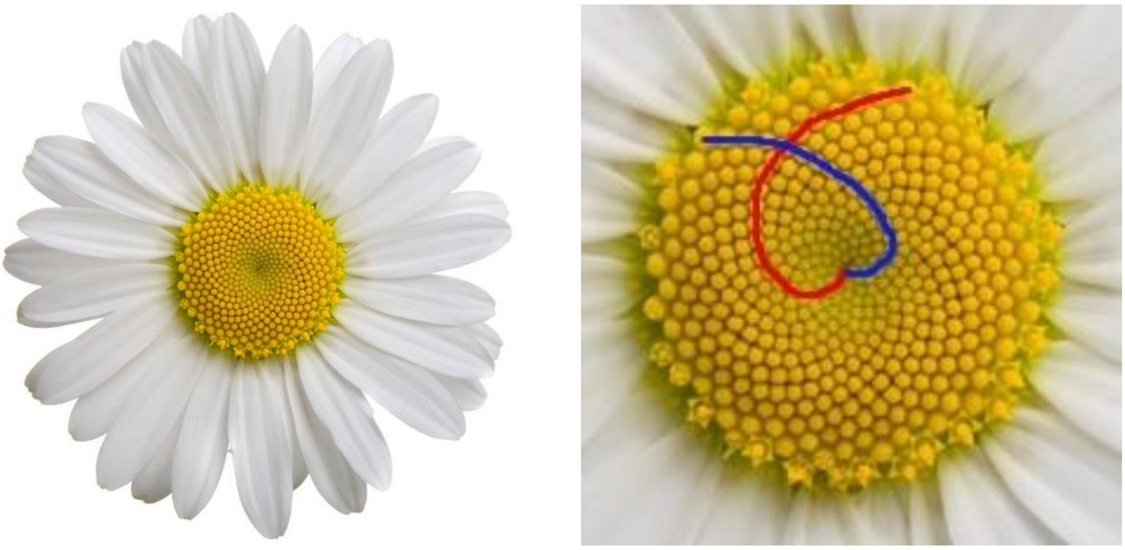
Na botânica, os fatos não estão ligados diretamente aos números de Fibonacci, mas sim ao número ou ao ângulo áureos, que têm uma forte relação com os termos da sequência. Boa parte das plantas formam novos órgãos, a exemplo das flores, a partir de um ponto central de crescimento, chamado meristema, um grupo de células capazes de dividirem-se indefinidamente. Cada nova estrutura, ou primórdio, se desenvolve e cresce começando do centro para uma nova direção, formando um ângulo, que geralmente é único, com o primórdio que cresceu antes, formando assim espirais, o que resulta na otimização da captação de luz solar e facilita o escoamento da água.

Entretanto, a quantidade de espirais nas superfícies de abacaxis, de couves-flores, de amoras e de pinhas, por exemplo, são números da sequência. Inflorescências capituliformes[8], como as margaridas e os girassóis, também possuem as flores do disco organizadas em espirais, que se apresentam em números de Fibonacci. Essas espirais podem ser contadas nos dois sentidos (horário e anti-horário), contagem essa que não resultará em dois números iguais, mas sim em dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Observando a margarida da Figura 4, podemos encontrar três números da sequência contanto as espirais que aparecem

[8] Inflorescência do tipo capítulo é um aglomerado de flores dispostas em uma superfície achatada (receptáculo) que funciona como uma única flor, na atração de polinizadores. (RAVEN, EVERT & EICHHORN, 2007)

em seu capítulo: contam-se 55 espirais, sendo 21 delas que giram no sentido horário e 34 que descrevem suas trajetórias no sentido oposto.

Figura 4 – Margarida



Fonte: Thinkstock/Getty Images
Legenda: Na imagem da esquerda, podemos observar toda a estrutura de uma margarida, mostrando tanto as sépalas (de cor branca), quanto as flores do receptáculo (de cor amarela); utilizando o *software* de edição de imagens *PhotoFiltre7*, um *zoom* foi aplicado nessa imagem evidenciando a organização espiralada das flores do receptáculo e destacando, em vermelho, uma das espirais que giram, do centro para a borda, em sentido horário e, em azul, uma espiral que gira em sentido anti-horário.

As flores de uma margarida apresentam cinco pétalas, cada uma, enquanto que as sépalas podem aparecer em um total de 55 ou 89 unidades, números que também fazem parte da sequência. A aparição de um número de Fibonacci na contagem de pétalas de uma flor não é exclusividade das margaridas, como pode ser notado na Tabela 2.

Tabela 2 – Quantidade de pétalas presentes em algumas espécies de flores

Flores	Quantidade de pétalas
Lírio, íris	3
Cravo, ranúnculo	5
Espora	8
Cravo-de-defunto, tanaceto	13
Áster	21

Fonte: Alex Bellos (2011).

Entretanto, mesmo dentre as espécies apresentadas anteriormente, é possível achar flores que possuam outras quantidades de pétalas, porém, com uma frequência bem inferior.

2.4 Fibs

Você reparou no poema da epígrafe? Conte as sílabas, linha a linha. O que descobriu?

O (**1** sílaba)
que (**1** sílaba)
me faz (**2** sílabas)
en-si-nar (**3** sílabas)
Ma-te-má-ti-ca? (**5** sílabas)
Su-a es-sên-cia prá-ti-ca! (**8** sílabas)

O poema acima surgiu a partir da minha primeira tentativa de criar um Fib, um poema de forma fixa, como os sonetos e os haicais, construído de forma que o número de sílabas em cada verso é ditado pela sequência de Fibonacci. A criação desse tipo de poema é creditada ao poeta estadunidense John Frederick Nims (1913 – 1999), em 1974. Tradicionalmente, eles são compostos por uma única sextilha (estrofe de seis versos) e contam histórias de forma rápida como um “soco”, que é o significado do termo inglês “fib”, utilizado nos guetos da Califónia, na década de 1970. Em 2006, através de uma postagem em seu blog, Gregory K. Pincus fez com que este tipo de poema viesse à tona, e o Fib com o qual ele abriu a postagem se tornou um dos exemplos mais famosos e recorrentes da internet:

One	Uma mistura
Small,	Pequena,
Precise,	Precisa,
Poetic,	Poética,
Spiraling mixture:	Espiralada:
Math plus poetry yields the Fib.	Matemática mais poesia produz o Fib.
Gregory K. Pincus	**Gregory K. Pincus – Tradução livre**

Vale ressaltar que os poemas em língua portuguesa não contam as sílabas gramaticais, como feito no poema que abre a seção, mas sim as sílabas métricas, também chamadas de sílabas poéticas. O que me fez criar um segundo Fib, veja:

Me	**Me**
chamo	**Cha** / mo
Edcarlos,	Ed / **car** / los
professor,	Pro / fes / **sor**
um pouco ignorante	Um / pou / coig / no / **ran** / te
e, da Matemática, amante.	E / da / ma / te / má / ti / caa / **man** / te

O Fib acima parece ter algumas incoerências: tanto no que diz respeito à contagem das sílabas, como em suas respectivas separações. Porém as regras de separação silábica em poemas diferem daquelas presentes nas gramaticas em dois pontos: a contagem silábica é interrompida na última sílaba tônica de cada verso, aquelas que estão destacadas em negrito; e quando uma sílaba terminar em vogal átona e a sílaba seguinte começar com uma vogal, elas podem se fundir numa única, como ocorreu na oitava sílaba do último verso. Veja mais dois Fibs de autores brasileiros.

Dardo
no
meu peito
a saudade
que vem violenta
me perfurando devagar...
Ronaldo Rhusso[9]

[9] Para os dois Fibs desse autor que estão presentes neste trabalho, ele esclarece que usou “o título [primeiro verso] combinando diretamente com o último verso (estão em itálicos). O restante é o ‘recheio’!”

Eu
Sei
O que
Você fez,
Pois sou visionário;
Mas você consegue entender?
Marcelo Bancalero

Existem também variações dos Fibs: os estendidos, com mais versos, porém com a quantidade de sílabas nos versos seguintes ainda fazendo parte da sequência de Fibonacci; os refletidos, onde a contagem das sílabas em cada verso se dá de forma reflexiva (1-1-2-3-5-8-8-5-3-2-1-1); e ainda os refletidos e estendidos, que são uma combinação dos dois tipos anteriores. Observe mais alguns exemplos:

Guerra
A
maior
covardia
contra a raça humana
provocada por ela própria.
Auto flagelo que não se vê nos animais...
Ronaldo Rhusso

Um
Bardo,
uns contos
escreveu.
E dos três irmãos
transeuntes, ele não esqueceu.
Bato minhas mãos, se este Fib você entendeu!
Edcarlos Macena

Uma
Vez
Aqui
Pude ver
Como é muito bom
Poder abraçar os amigos.
Não tem nenhum preço que pague
A grande amizade.
Real... Pura...
Sincera...
Nada!
Nada!!!
Fiore Carlos

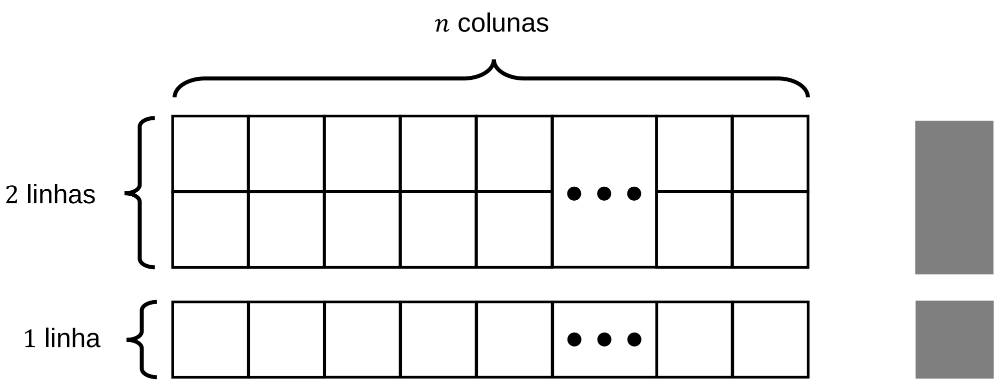
Entretanto, essas variações deixam um pouco de lado a essência do Fib: *ser rápido como um soco*.

Caso essa leitura tenha despertado em você algum interesse, existem outros poemas nos anexos, tanto de minha autoria, como de amigos que atenderam ao meu chamado para criarem seus próprios Fibs. Por que você também não faz algumas tentativas?

3 O DOMINÓ E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dois objetos serão utilizados em todo o trabalho e, portanto, precisam ser definidos: malha e dominó. A malha será um quadriculado com dimensões $2 \times n$ ou $1 \times n$, com $n \in \mathbb{N}$, enquanto que o dominó serão um retângulo, cujas dimensões podem ser 2×1 ou 1×1, como ilustrados[10] na Figura 5.

Figura 5 – Modelos das malhas e dos dominós



Fonte: Elaborada pelo autor.
Legenda: À esquerda, as malhas de dimensões $2 \times n$ (superior) e $1 \times n$ (inferior); à direita, os dominós de dimensões 2×1 (superior) e 1×1 (inferior).

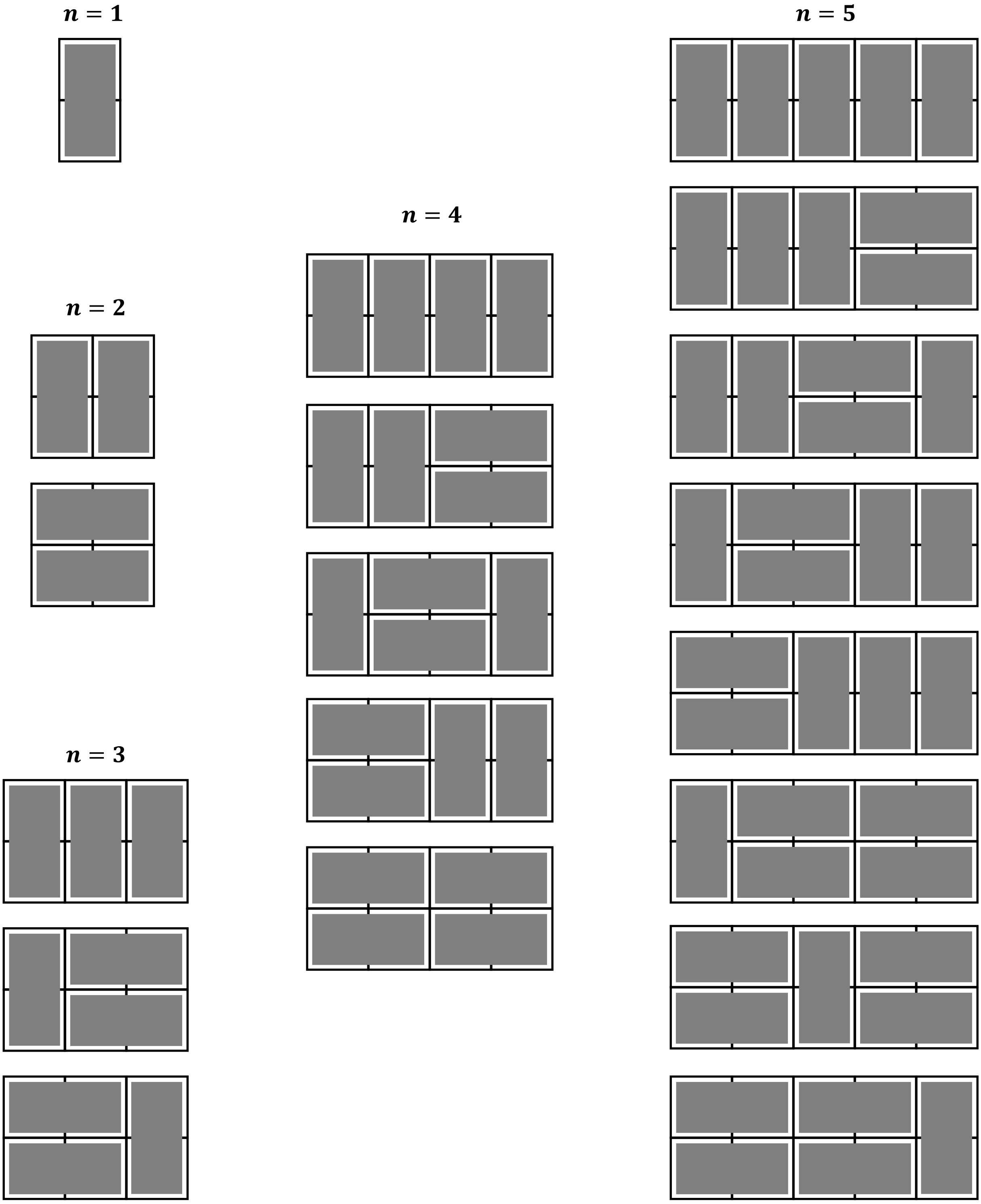
3.1 Cobrindo uma malha de duas linhas com dominós 2×1

Para começar, vamos definir M_n como sendo o número de possibilidades com as quais podemos cobrir, por completo, uma malha genérica de dimensões $2 \times n$ com dominós de dimensões 2×1, sem sobreposições.

Não é de difícil observação que são necessários n dominós para cobrir a malha. Porém, determinar a quantidade de maneiras que eles podem ser organizados sob a malha não é assim tão simples. Através da Figura 6, podemos contar as possibilidades para um n relativamente pequeno: $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 3$, $M_4 = 5$ e $M_5 = 8$.

[10] Todas as imagens presentes nesta seção, e nas posteriores, que estiverem relacionadas com a malha quadriculada foram criadas com o uso do *software* de edição de texto *Word*. Porém, nas próximas figuras, os dominós terão suas dimensões levemente reduzidas ($1{,}8 \times 0{,}8$ ou $0{,}8 \times 0{,}8$) para que a malha, que fica por trás, continue sendo visualizada, facilitando a compreensão do que está sendo demonstrado.

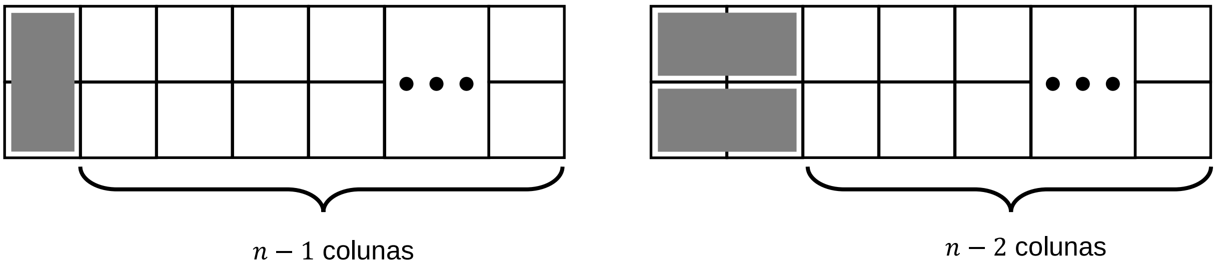
Figura 6 – Contagem das possibilidades de cobertura de uma malha $2 \times n$, para $n \leq 5$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para generalizar o valor de M_n, vamos levar em consideração o posicionamento do primeiro dominó à esquerda da malha que pode ocorrer tanto vertical como horizontalmente. Ao colocar o primeiro dominó na vertical, as demais $n-1$ colunas poderão, por definição, ser cobertas de M_{n-1} maneiras diferentes. Porém o posicionamento do primeiro dominó na horizontal, obriga outro dominó a ser posicionado no mesmo sentido, observe a Figura 7, sobrando assim $n - 2$ colunas a serem preenchidas, o que pode ocorrer de M_{n-2} maneiras diferentes.

Figura 7 – Cobertura da primeira coluna da malha $2 \times n$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, a quantidade total de possibilidades de se cobrir a malha dar-se-á pela soma das possibilidades dos dois casos analisados:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}. \tag{3.1}$$

Ou seja, M_n apresenta a mesma característica da sequência de Fibonacci, F_n: a partir do terceiro termo, cada termo é obtido somando-se os dois anteriores. Portanto:

$$\begin{cases} M_1 = 1 \\ M_2 = 2 \\ M_n = M_{n-1} + M_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases} \tag{3.2}$$

E como F_n e M_n diferem apenas pela presença/ausência de um número 1 no início das sequências, podemos estabelecer a seguinte relação entre as elas:

$$M_n = F_{n+1}. \tag{3.3}$$

3.2 Utilizando a malha de duas linhas na demonstração de identidades

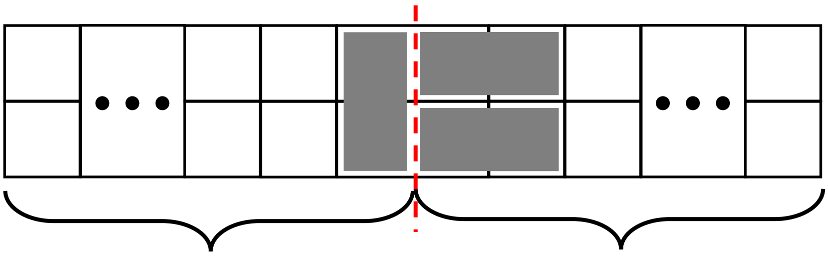
Uma vez estabelecida a igualdade (3.3), podemos analisar as combinações de posicionamentos de dominós numa malha para demonstrar identidades encontradas na sequência de Fibonacci.

Identidade I: $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

De fato, por (3.3), $F_{2n+1} = M_{2n}$, então vamos calcular de quantas maneiras diferentes podemos cobrir uma malha com dimensões $2 \times 2n$. Dividindo essa malha ao meio, duas situações podem acontecer: ou as partes não terão dominós em comum, ou terão dois dominós em comum, posicionados, obrigatoriamente, na horizontal.

O primeiro caso reduz o problema a calcular a quantidade de possibilidades com que se pode cobrir duas malhas independentes de dimensões $2 \times n$ cada, como exemplificado na Figura 8. Ou seja, para este caso serão $M_n \cdot M_n$ possibilidades.

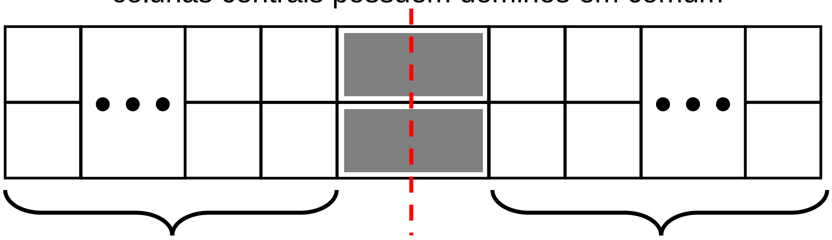
Figura 8 – Exemplo de uma malha $2 \times 2n$, cujas colunas centrais não possuem dominós em comum



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o segundo caso, como fica bem visível na Figura 9, basta calcular a quantidade de possibilidades com que se pode cobrir duas malhas independentes de dimensões $2 \times (n-1)$ cada. Com isso, surgem outras $M_{n-1} \cdot M_{n-1}$ maneiras de cobrir a malha.

Figura 9 – Malha $2 \times 2n$ cujas colunas centrais possuem dominós em comum



Fonte: Elaborada pelo autor.

Totalizando, portanto:

$$M_{2n} = M_n \cdot M_n + M_{n-1} \cdot M_{n-1} = M_n^2 + M_{n-1}^2.$$

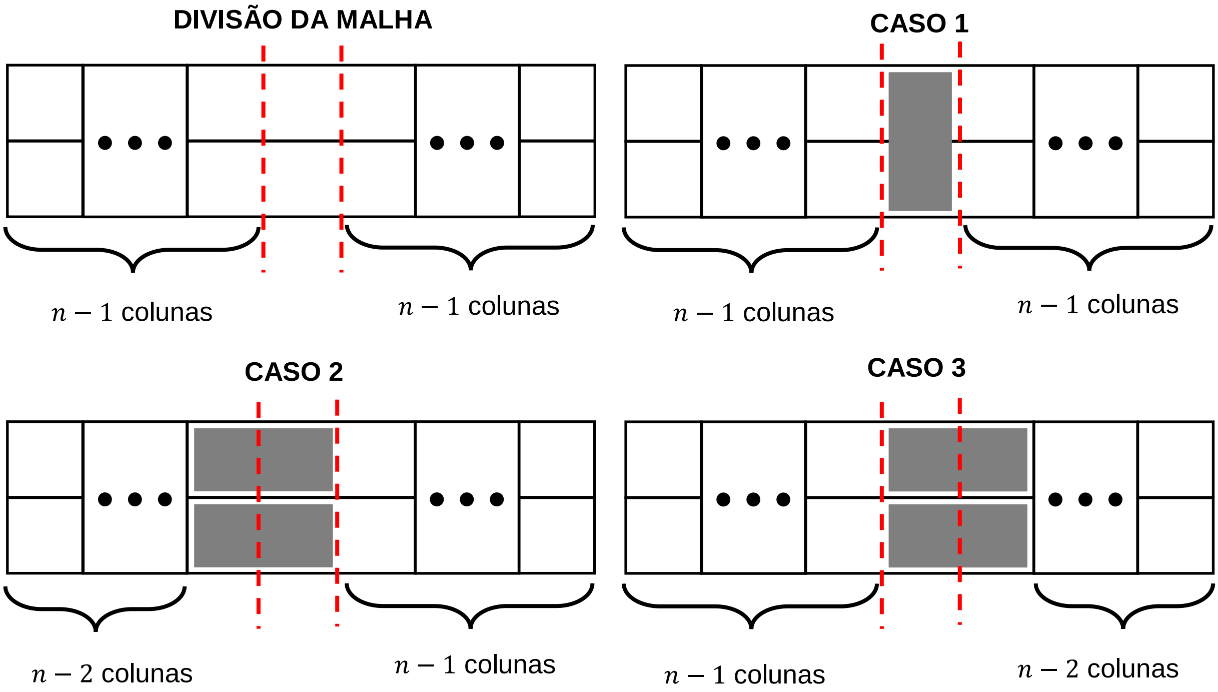
O que nos permite estabelecer a seguinte equivalência:

$$M_{2n} = M_n^2 + M_{n-1}^2 \therefore F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

Identidade II: $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$

Dessa vez, precisamos calcular M_{2n-1}, assim, a nossa investigação acontecerá sobre uma malha com dimensões $2 \times (2n-1)$, que tem uma quantidade ímpar de colunas e nos impede de fazer a divisão da malha ao meio, como fizemos na Identidade I. Porém, se separamos a coluna central, as duas regiões adjacentes à ela terão a mesma quantidade de colunas o que nos permite fazer uma análise semelhante à anterior. Com esta divisão, três situações podem ocorrer com a coluna isolada, como ilustrado na imagem que segue:

Figura 10 – Estudo dos casos de uma malha $2 \times (2n-1)$, isolando sua coluna central



Fonte: Elaborada pelo autor.

No primeiro caso, onde a coluna central é ocupada por um dominó posicionado verticalmente, precisamos calcular a quantidade de possibilidades com que se pode cobrir duas malhas independentes de dimensões $2 \times (n-1)$ cada, ou seja, $M_{n-1} \cdot M_{n-1}$.

Nos segundo e terceiro casos, onde a coluna central é ocupada por dois dominós posicionados horizontalmente (que podem estar deslocados para a esquerda ou para a direita, como nos casos 2 e 3, respectivamente, mostrados na Figura 10), basta calcular, para cada um deles, a quantidade de possibilidades com que se pode cobrir duas malhas independentes, uma com dimensões $2 \times (n-1)$ e a outra como $2 \times (n-2)$, ou seja, $M_{n-1} \cdot M_{n-2}$.

Assim, a quantidade total de combinações é dada pela soma das quantidades dos três casos:

$$M_{2n-1} = M_{n-1} \cdot M_{n-1} + M_{n-1} \cdot M_{n-2} + M_{n-1} \cdot M_{n-2}$$
$$M_{2n-1} = M_{n-1}^2 + 2 \cdot M_{n-1} \cdot M_{n-2}$$
$$M_{2n-1} = M_{n-1}^2 + 2 \cdot M_{n-1} \cdot M_{n-2} + (M_{n-2}^2 - M_{n-2}^2)$$
$$M_{2n-1} = (M_{n-1} + M_{n-2})^2 - M_{n-2}^2$$
$$M_{2n-1} = M_n^2 - M_{n-2}^2.$$

E concluímos que:

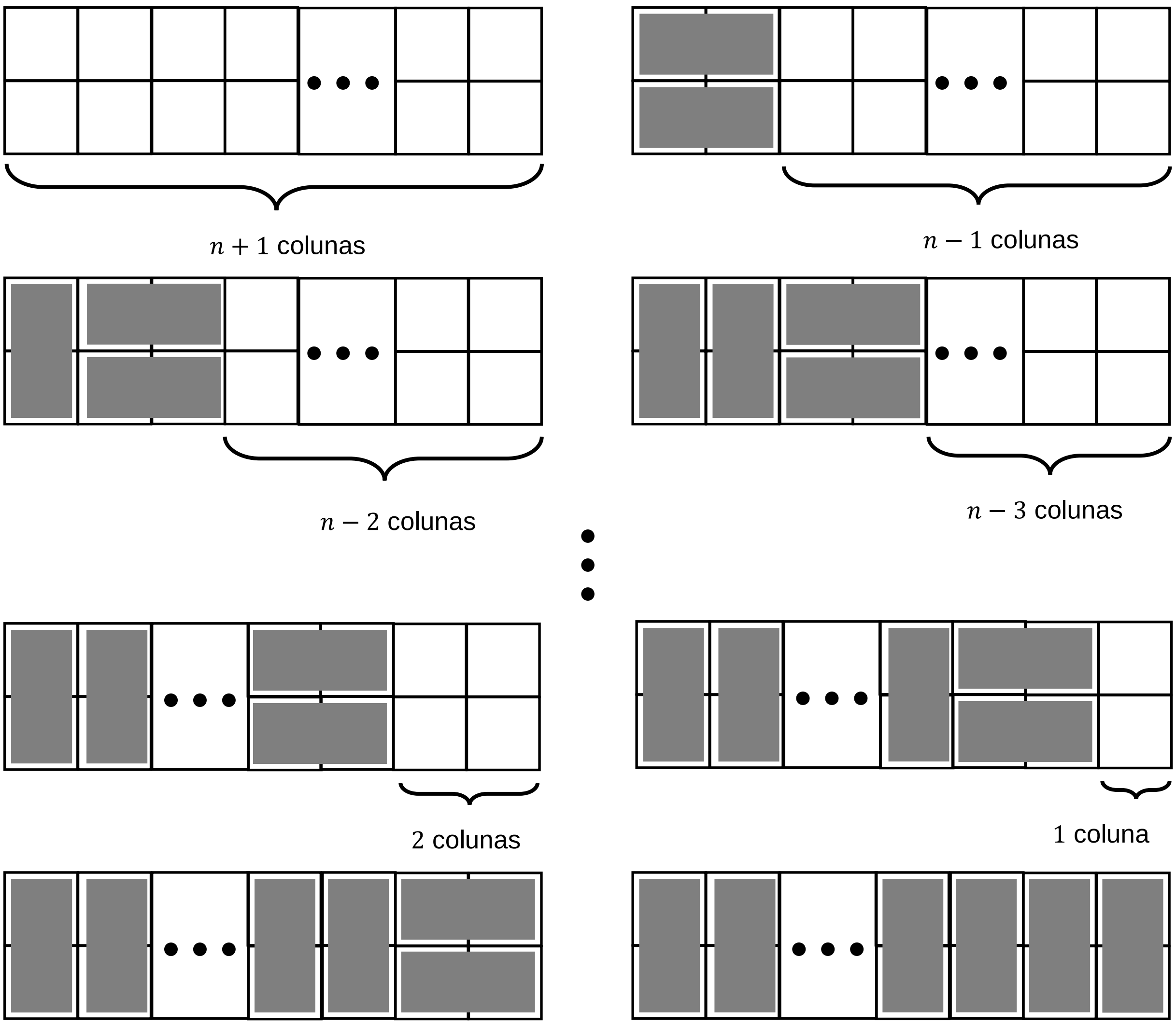
$$M_{2n-1} = M_n^2 - M_{n-2}^2 \therefore F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Uma alternativa para a demonstração dessa identidade seria dividir a malha em duas: uma com dimensões $2 \times (n-1)$ e a outra com dimensões $2 \times n$. A análise dos casos, bem como sua resolução se dão de forma análoga ao que acabou de ser desenvolvido aqui, precisando somente fazer a substituição (3.1) em um determinado ponto do cálculo.

Identidade III: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$

As duas primeiras identidades foram de uma demonstração mais simples, nos bastou analisar o que acontece com uma malha de acordo com a paridade da quantidade de suas colunas. Porém, a presença de um somatório nesta identidade nos obriga a analisar o termo $F_{n+2}\ (= M_{n+1})$ através de uma malha $2 \times (n+1)$. O somatório irá surgir quando fizermos uma análise de casos a partir da localização na malha do primeiro par de dominós posicionados na horizontal, como pode ser visto na Figura 11. Assim, conseguiremos avaliar as combinações coluna a coluna.

Figura 11 – Posicionamento do primeiro par de dominós horizontais em uma malha $2 \times (n+1)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, se o primeiro par de dominós posicionados na horizontal estiver ocupando as colunas 1 e 2, sobrarão outras $(n-1)$ colunas, que poderão ser cobertas de M_{n-1} maneiras distintas. Mas se o primeiro par de dominós horizontais estiver posicionado nas colunas 2 e 3, sobrarão outras $(n-2)$ colunas, que poderão ser cobertas de M_{n-2} maneiras diferentes. Se o primeiro par de dominós posicionados horizontalmente estiver nas colunas 3 e 4, teremos M_{n-3} maneiras distintas de cobrir a malha.

O processo pode ser repetido indefinidamente até o momento no qual os primeiros dominós horizontais estejam posicionados nas colunas $(n-1)$ e n, sobrando apenas a última coluna, quando teremos M_1 maneiras distintas de cobrir a malha. Caso o primeiro par de dominós horizontais esteja posicionado nas duas últimas colunas, teremos uma única maneira de cobrir a malha. E mais uma outra forma, se todos os dominós forem posicionados verticalmente.

Assim, a quantidade total de combinações é:

$$M_{n+1} = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + \cdots + M_1 + 1 + 1.$$

E, ao utilizar a relação entre M_n e F_n, obtemos:

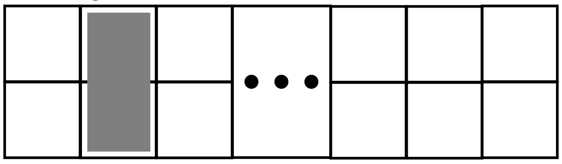
$$F_{n+2} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_2 + 1 + 1$$
$$F_{n+2} = F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \cdots + F_2 + F_1 + 1$$
$$F_{n+2} = \sum_{i=1}^{n} F_i + 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Identidade IV: $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$

Para esta identidade, voltaremos a utilizar a malha de dimensões $2 \times 2n$, afim de calcular M_{2n}. Entretanto, o somatório presente nesta identidade, assim como na seguinte, é de termos alternados e, portanto, a análise a partir da localização do primeiro par de dominós horizontais fica inviável.

Quando passamos a analisar o posicionamento do primeiro dominó vertical, observamos que ele não pode ficar na segunda coluna, por exemplo, uma vez que isso implicaria que a primeira coluna também deveria ser ocupada por outro dominó vertical, como pode ser notado na Figura 12.

Figura 12 – Dominó posicionado verticalmente na segunda coluna de uma malha $2 \times 2n$

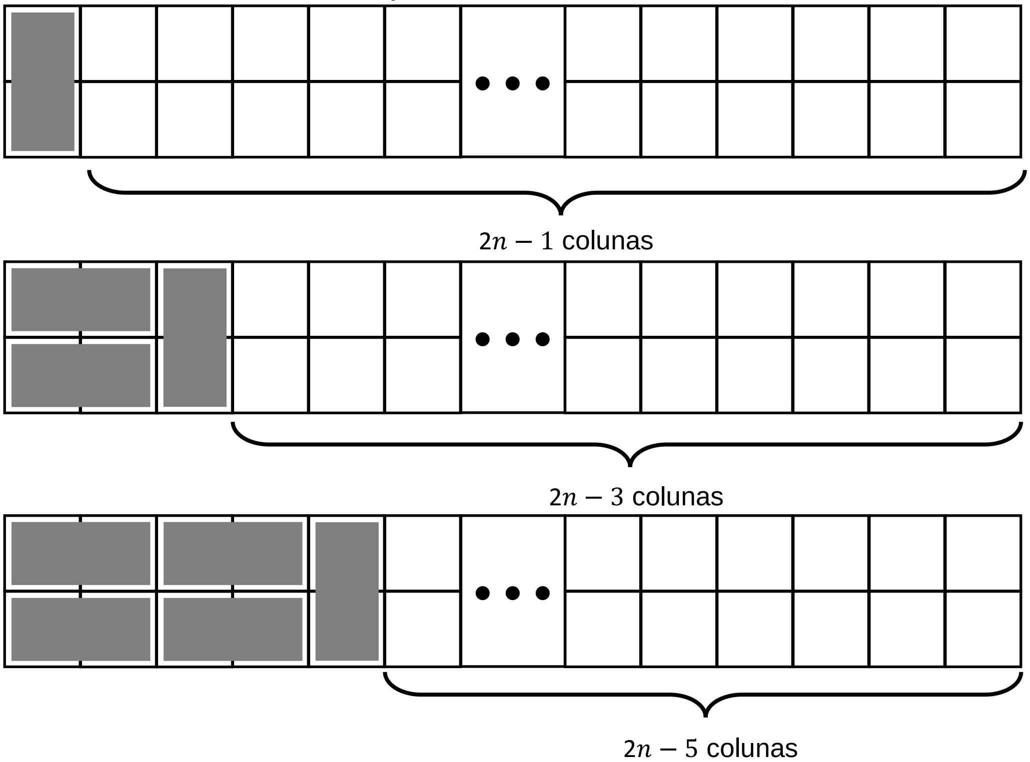


Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo geral, o primeiro dominó que estiver posicionado na vertical nunca ocupará uma coluna de número par, pois isso resultaria em alguma outra coluna anterior a esta sendo ocupada por outro dominó também posicionado na vertical, uma vez que não é possível cobrir uma quantidade ímpar de colunas apenas com dominós posicionados horizontalmente.

Então, com a análise dos casos a partir da localização do primeiro dominó vertical, que só poderá estar em uma coluna ímpar, conseguiremos obter a soma de termos alternados que procuramos: se ele estiver na primeira coluna, como ilustrado na Figura 13, as outras $2n - 1$ colunas poderão ser cobertas de M_{2n-1} formas; estando na terceira coluna, teremos mais M_{2n-3} maneiras de cobrir o restante da malha; caso esteja na quinta, outras M_{2n-3} possibilidades aparecem.

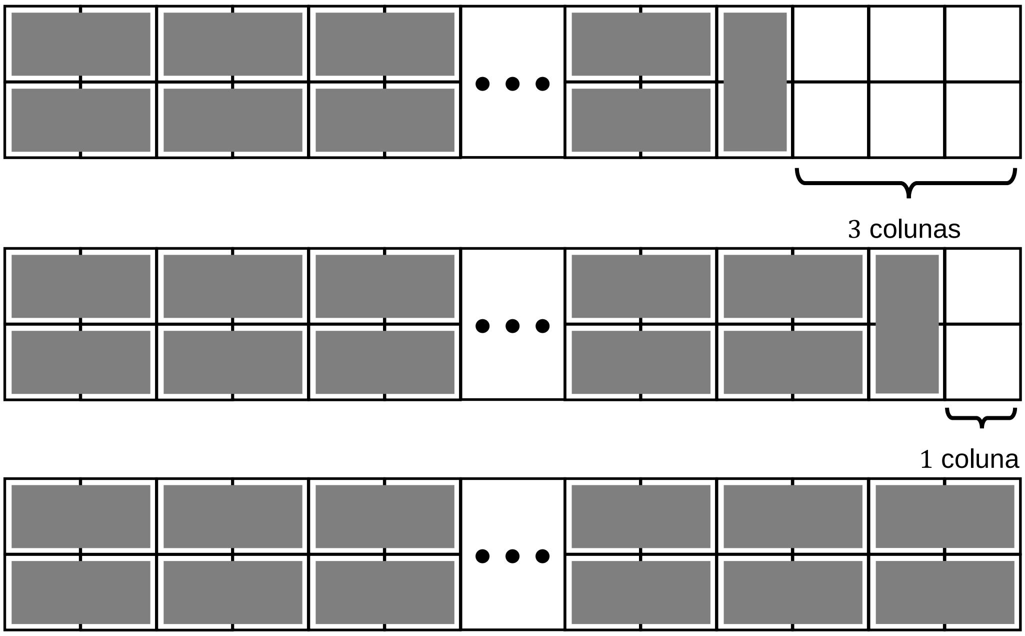
Figura 13 – Posicionamento do primeiro dominó vertical nas primeiras colunas de uma malha $2 \times 2n$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Repetindo o processo sucessivamente até o ponto onde o primeiro dominó posicionado na vertical esteja na coluna $(2n-3)$, teremos M_3 maneiras distintas de cobrir a malha; se ele estiver na penúltima coluna, teremos mais M_1 possibilidade. E precisamos contar ainda a possibilidade de não haver dominós verticais.

Figura 14 – Posicionamento do primeiro dominó vertical nas últimas colunas de uma malha $2 \times 2n$



Fonte: Elaborada pelo autor.

O que totaliza:

$$M_{2n} = M_{2n-1} + M_{2n-3} + M_{2n-5} + \cdots + M_3 + M_1 + 1.$$

E utilizando, mais uma vez, a relação entre M_n e F_n, conseguimos:

$$F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n-2} + F_{2n-4} + \cdots + F_4 + F_2 + 1$$

$$F_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i} + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

Identidade V: $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.

Aqui, a análise é análoga a que foi feita para a Identidade IV, porém com uma quantidade ímpar de colunas $(2n-1)$, o que elimina a possibilidade de todos os dominós serem posicionados horizontalmente, como pode ser constatado na Figura 15.

Posicionando o primeiro dominó vertical na primeira coluna, teremos M_{2n-2} maneiras distintas de cobrir a malha. Se ele estiver na terceira, surgem outros M_{2n-4} modos. E mais M_{2n-6} possibilidades diferentes, caso o primeiro dominó vertical esteja na quinta coluna. Com a repetição sucessiva do processo descrito acima, chegamos ao ponto onde a coluna ocupada pelo primeiro dominó vertical será a de número $(2n-5)$, sobrando 4 colunas que podem ser cobertas de M_4 formas diferentes. Se o primeiro dominó posicionado na vertical estiver na coluna $(2n-3)$, teremos M_2 maneiras de cobrir a malha. E se o primeiro, e único, dominó posicionado na vertical estiver na última coluna, só teremos uma maneira de cobrir a malha.

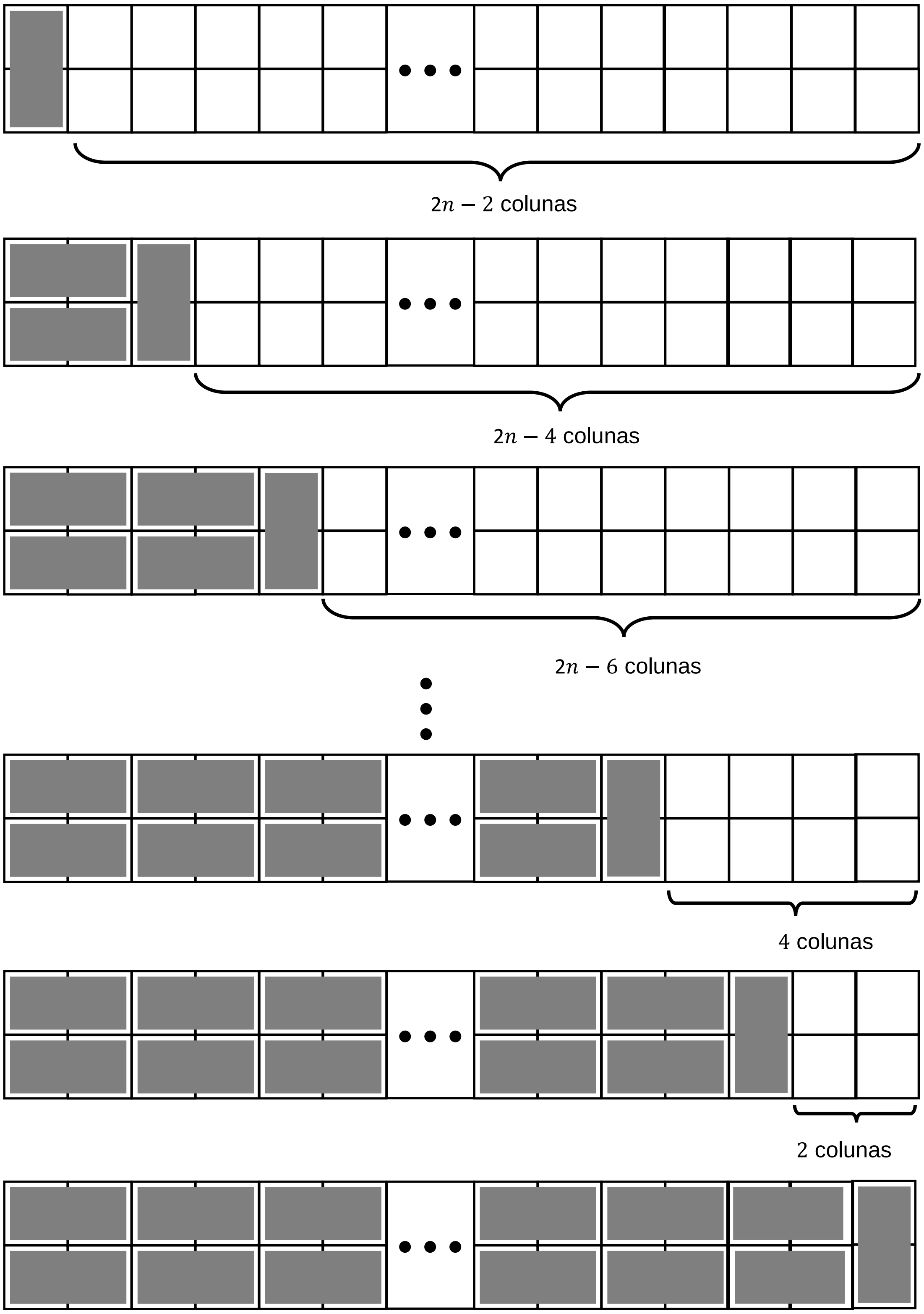
Assim, a quantidade total de combinações será dada por

$$M_{2n-1} = M_{2n-2} + M_{2n-4} + M_{2n-6} + \cdots + M_4 + M_2 + 1.$$

Equivalentemente, obtemos

$$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + \cdots + F_5 + F_3 + 1$$
$$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-3} + F_{2n-5} + \cdots + F_5 + F_3 + F_1$$
$$F_{2n} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}.$$

Figura 15 – Posicionamento do primeiro dominó vertical de uma malha $2 \times (2n-1)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Identidade VI – Identidade de Cassini: $F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n$.

Utilizando a relação entre as sequências F_n e M_n, obtemos:

$$F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n \therefore M_n^2 - M_{n-1} \cdot M_{n+1} = (-1)^n. \qquad \textbf{(3.4)}$$

A uma primeira vista, pode parecer estranho não alterar o expoente do -1 para $(n-1)$. Mas basta atribuir um valor a n para perceber que isso não pode acontecer:

$$n = 5 \Rightarrow \begin{cases} F_6^2 - F_5 \cdot F_7 = 8^2 - 5 \cdot 13 = 64 - 65 = -1 = (-1)^5; \\ M_5^2 - M_4 \cdot M_6 = 8^2 - 5 \cdot 13 = 64 - 65 = -1 = (-1)^5. \end{cases}$$

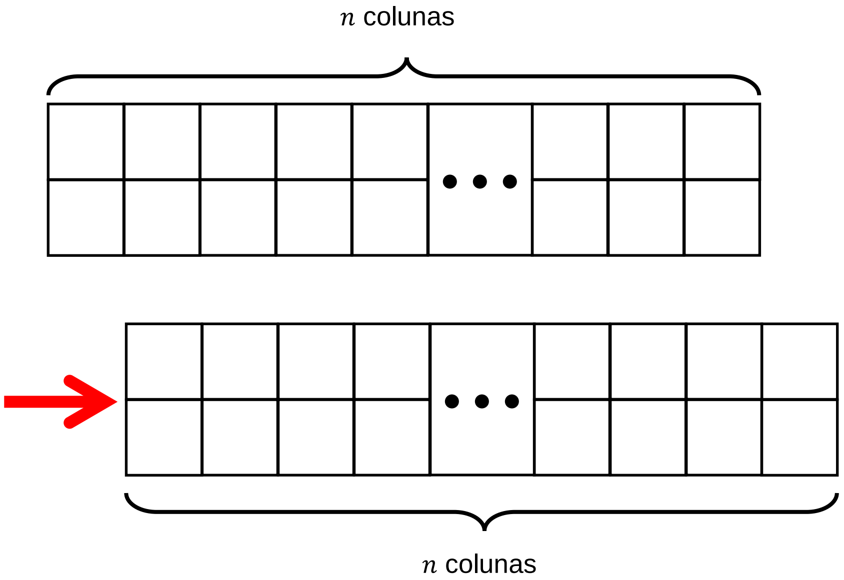
No caso de ainda ter ficado alguma dúvida, é só lembrar que quando substituímos $F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2}$ por $M_n^2 - M_{n-1} \cdot M_{n+1}$ não estamos fazendo uma troca de variável, mas apenas dando uma nova notação para os mesmos números e, portanto, o valor da expressão não pode mudar. E troca de $(-1)^n$ por $(-1)^{n-1}$ provocaria tal mudança, uma vez que

$$(-1)^n = (-1)(-1)^{n-1} \Longrightarrow (-1)^n \neq (-1)^{n-1}.$$

Interpretando cada um dos elementos da segunda parte da equivalência (3.4), notamos que $M_{n-1} \cdot M_{n+1}$ pode representar a quantidade total de possíveis coberturas de duas malhas desconexas, uma com dimensões $2 \times (n-1)$ e a outra com dimensões $2 \times (n+1)$, enquanto que M_n^2 pode representar a quantidade de possibilidades com as quais podemos cobrir duas malhas desconexas com dimensões $2 \times n$ cada. Precisamos agora, identificar a relação entre essas duas composições de malhas.

Vamos começar usando duas malhas idênticas de dimensões $2 \times n$, posicionadas uma abaixo da outra e deslocando a malha inferior uma coluna para a direita, como mostra a Figura 16. A razão desse deslocamento ficará mais clara na próxima passagem da demonstração.

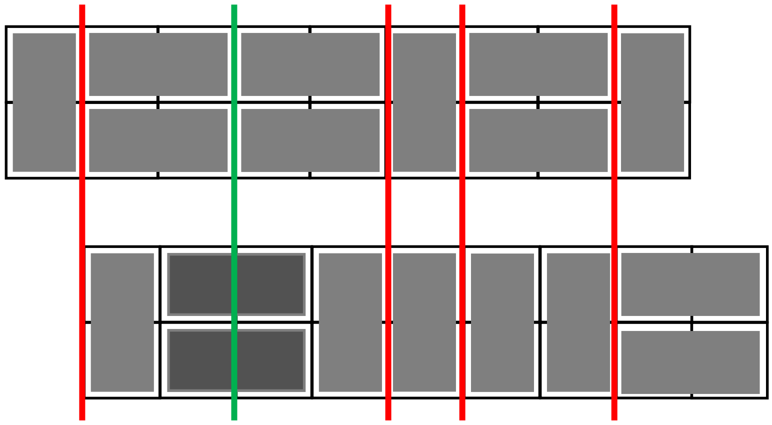
Figura 16 – Composição de duas malhas com dimensões $2 \times n$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Receberá o nome de *linha de ruptura*[11] aquela linha vertical que atravessar ambas as malhas da composição sem cortar dominó algum, como pode ser notado na imagem seguinte:

Figura 17 – Exemplo de uma composição de duas malhas com quatro linhas de ruptura

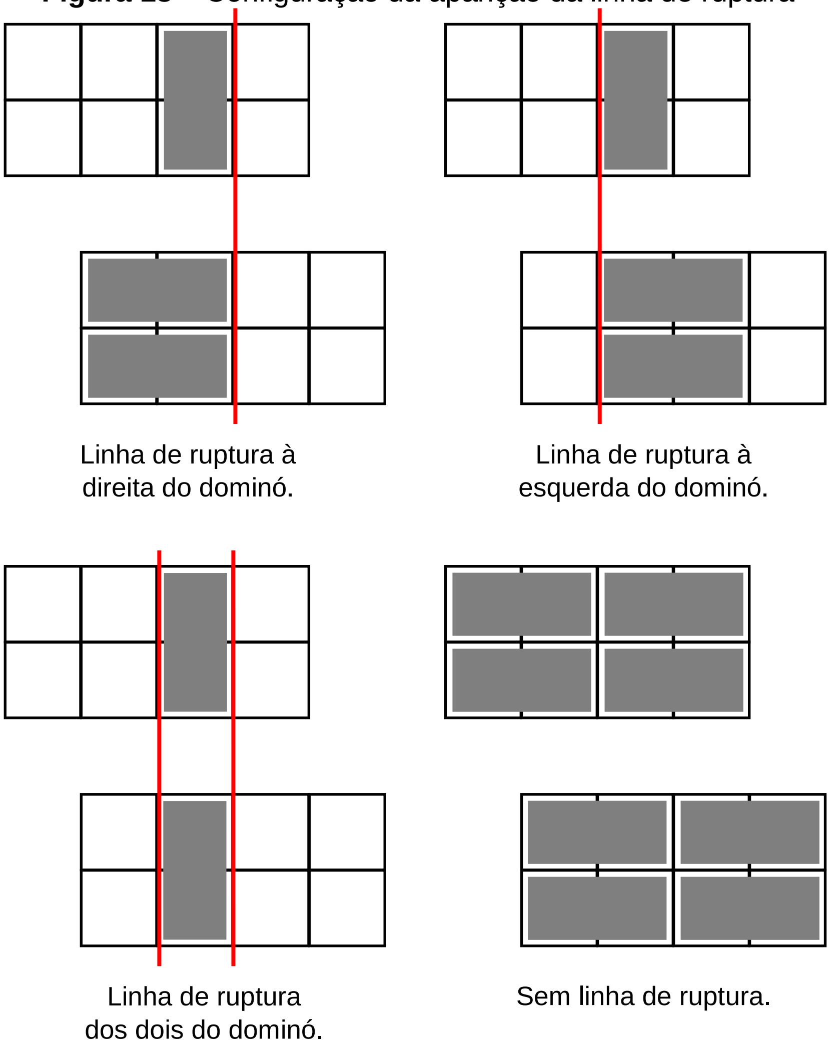


Fonte: Elaborada pelo autor.
Legenda: Em vermelho, estão destacadas as quatro linhas de ruptura pressentes neste exemplo de composição. Já a linha verde representa uma linha que não pode ser classificada com linha de ruptura, pois, na malha inferior, corta dois de seus dominós (destacados em um tom de cinza mais escuro).

[11] Adaptação feita por mim para a expressão em inglês "fault line", que se refere a uma fissura em uma pedra, em uma rocha ou no solo decorrente de uma falha geológica, utilizada por Bogomolny em seu trabalho "Fibonacci Tilings", usado de referência para a elaboração dessa seção.

Observando a Figura 17, notamos que todos os dominós que foram posicionados na vertical possuem pelo menos uma linha de ruptura ao seu lado, mas nem todos os dominós que foram acomodados horizontalmente têm linhas de ruptura ao seu lado. O que nos faz concluir dois pontos: a presença de um dominó vertical induz a aparição de uma ou de duas linhas de ruptura ao seu lado, vai depender do posicionamento do dominó imediatamente acima ou abaixo dele; e se todos os dominós forem posicionados horizontalmente, quando possível, não haverá sequer uma linha de ruptura. Tais situações podem ser melhor visualizadas na imagem a seguir:

Figura 18 – Configuração da aparição da linha de ruptura

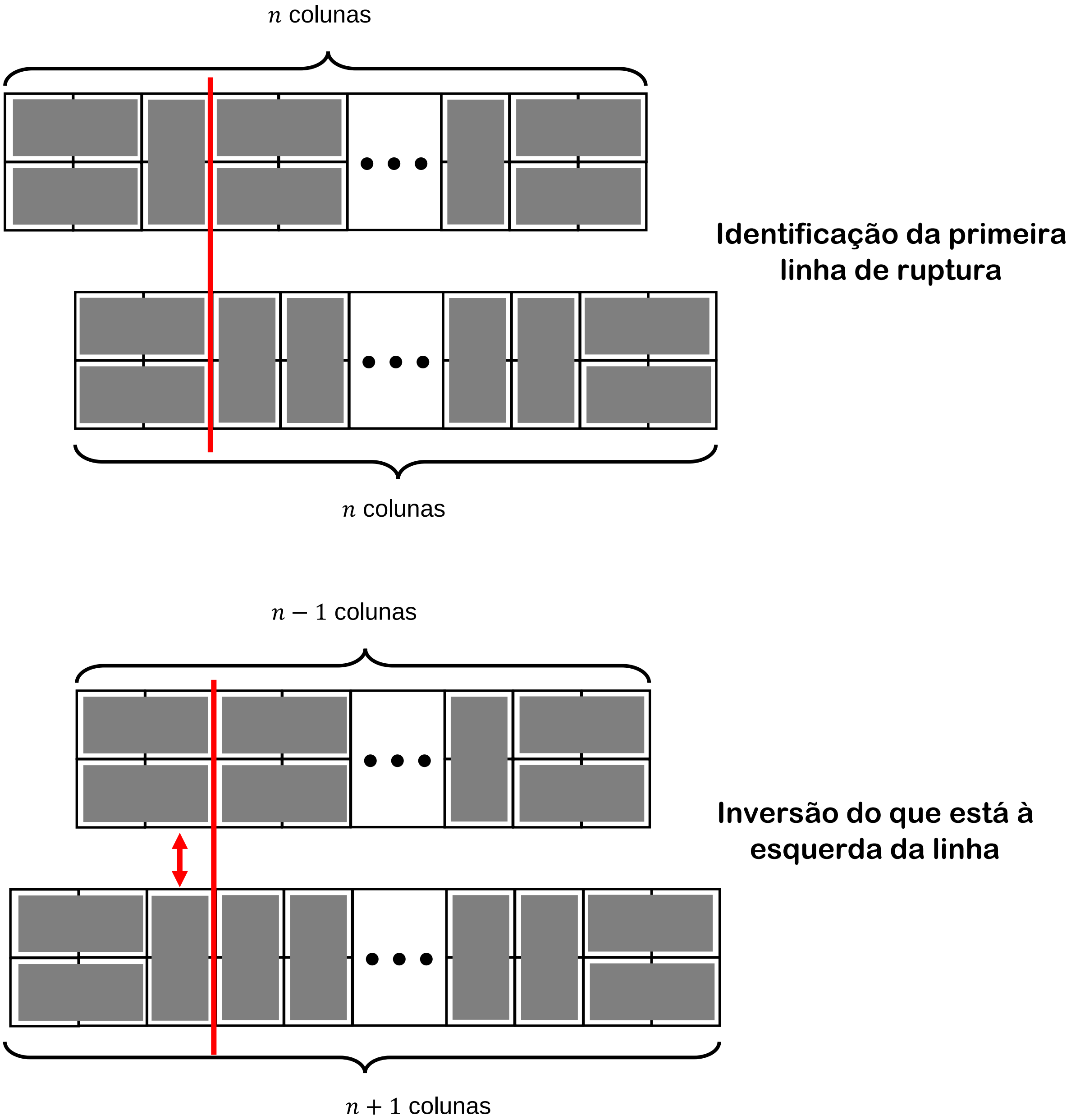


Fonte: Elaborada pelo autor.

Voltando à composição genérica da Figura 16, vamos precisar analisá-la sob duas vertentes: a presença ou não de linhas de ruptura e a paridade de n.

Começando com o caso onde exista(m) linha(s) de ruptura: vamos escolher a primeira dessas linhas e inverter a parte das malhas que estiver à esquerda dela (o que pertencer a malha superior passa para a inferior e vice-versa), observe:

Figura 19 – Manipulação da composição de duas malhas $2 \times n$, a fim de se obter uma malha com $(n-1)$ colunas e outra com $(n+1)$ colunas



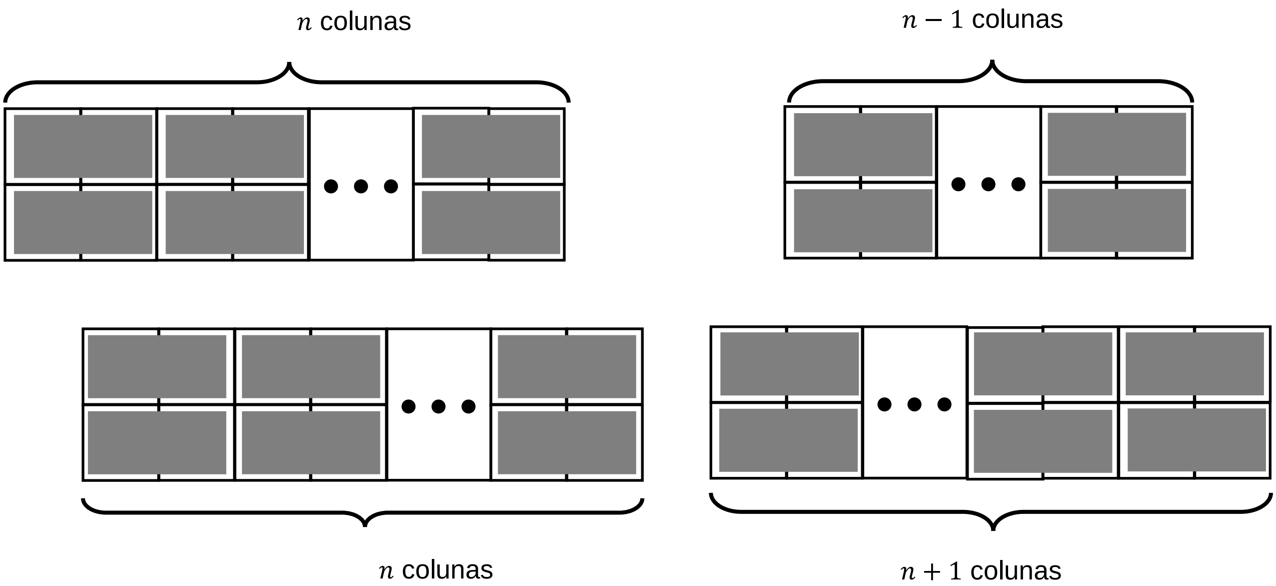
Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que, apesar da inversão, todas as linhas de ruptura já existentes continuam nos mesmos lugares e que nenhuma nova linha surgiu. Note também que se não houvesse o deslocamento da malha inferior, feito na Figura 16, ou se o mesmo fosse realizado numa quantidade maior, a relação procurada não apareceria com a inversão de parte das malhas. Mais um ponto a ser observado é que se essa inversão fosse feita à esquerda ou à direita de qualquer uma das linhas de ruptura presentes na composição de duas malhas com n colunas cada, a quantidade de colunas nas malhas passariam a ser $n-1$ e $n+1$, estabelecendo assim a relação que queremos desde o início da demonstração.

No entanto, a escolha da primeira linha (ou da última) não acontece por acaso. Perceba que cada cobertura das duas malhas idênticas tem uma associação com uma cobertura das duas malhas diferentes e vice-versa, estabelecendo uma relação biunívoca entre as possibilidades de cobrir a composição de duas malhas $2 \times n$ que apresente linha(s) de ruptura e as possibilidades de cobrir a composição de uma malha $1 \times (n-1)$ com uma malha $1 \times (n+1)$, que também apresente linha(s) de ruptura. E, sendo biunívoca, podemos afirmar que elas se apresentam em mesmo número.

Ainda precisamos analisar o caso de não haver linhas de ruptura entre as malhas da composição. E, como já foi dito e pode ser visualizado na Figura 20, para que isso ocorra, todos os dominós deverão ser posicionados horizontalmente.

Figura 20 – Composições de malhas sem linhas de ruptura



Fonte: Elaborada pelo autor.

Porém, tal configuração só é possível quando a quantidade de colunas de ambas as malhas é um número par, o que nos permite afirmar que apenas um dos casos exemplificados na Figura 20 vai ocorrer: quando n for par teremos uma possibilidade a mais de cobrir a composição formada pelas duas malhas idênticas, mas quando for ímpar teremos uma possibilidade a mais de cobrir a composição formada pelas malhas com $n-1$ e $n+1$ colunas. Portanto:

$$\begin{cases} M_n^2 = M_{n-1} \cdot M_{n+1} + 1, & \text{quando } n \text{ é par} \\ M_{n-1} \cdot M_{n+1} = M_n^2 + 1, & \text{quando } n \text{ é ímpar} \end{cases} \Rightarrow M_n^2 - M_{n-1} \cdot M_{n+1} = (-1)^n.$$

E, adaptando para a sequência de Fibonacci, temos:

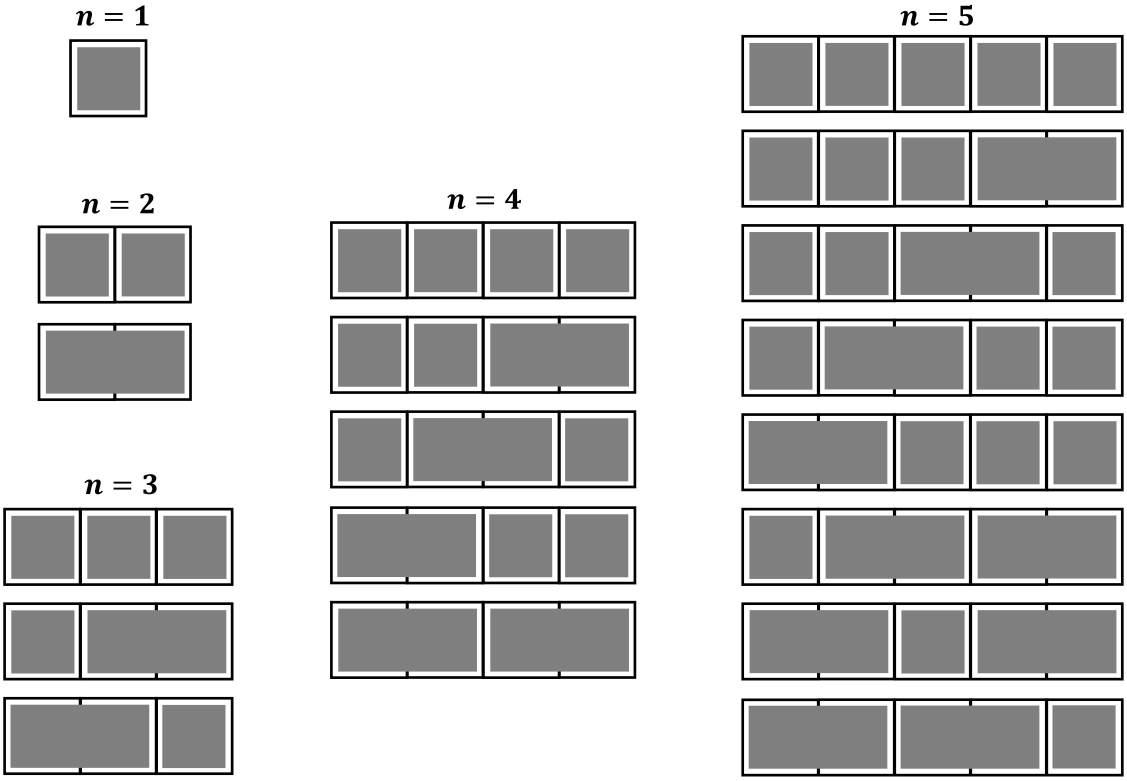
$$M_n^2 - M_{n-1} \cdot M_{n+1} = (-1)^n \therefore F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n.$$

3.3 Cobrindo uma malha de uma linha com os dois tipos de dominós

O uso da malha de uma linha nos obriga a utilizar os dois tipos de dominós ilustrados na Figura 5: o tradicional, com dimensões 2×1, que só poderá ser usado horizontalmente; e outro no formato de um quadrado, de dimensões 1×1, que vai desempenhar o mesmo papel que o dominó posicionado verticalmente tinha para a malha de duas linhas. Aqui, eles serão chamados de dominós do Tipo 1 e dominós do Tipo 2, respectivamente.

Ao contar, para um número relativamente pequeno de colunas, a quantidade de formas com as quais essa nova malha pode ser coberta, usando um ou os dois tipos de dominós, obtemos os mesmos valores de M_n, como pode ser notado na Figura 21. Mas, ainda se faz necessária a análise de uma malha genérica, com dimensões $1 \times n$.

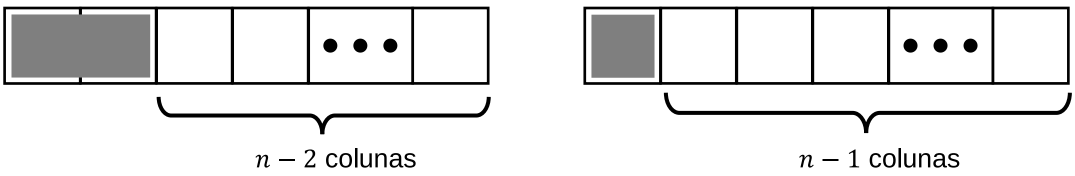
Figura 21 – Contagem dos possíveis modos de cobertura de uma malha $1 \times n$, para $n \leq 5$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Veja que não faz mais sentido falar do posicionamento do dominó (vertical ou horizontal), como feito anteriormente, teremos que analisar qual tipo de dominó será usado: o primeiro dominó posicionado à esquerda da malha pode ser do Tipo 1, o que faz sobrar $(n-2)$ colunas para serem preenchidas, ou do Tipo 2, sobrando $(n-1)$ colunas para cobrir.

Figura 22 – Tipo do primeiro dominó utilizado



Fonte: Elaborada pelo autor.

É fácil ver que a situação é idêntica ao que foi feito na seção 3.1, o que nos garante afirmar que a quantidade de maneiras de revestir uma malha $1 \times n$ também é dada por M_n.

3.4 Utilizando a malha de uma linha na demonstração de identidades

Uma vez que ambas as malhas se comportam de maneira idêntica, todas as seis identidades apresentadas na seção 3.2 ganham uma nova possibilidade de demonstração, porém bem similares àquelas que foram lá desenvolvidas. Na Tabela 3 serão apresentadas as ideias iniciais para as demonstrações das identidades com esta nova configuração de malha e de dominós.

Tabela 3 – Técnicas de demonstrações utilizando a malha de uma linha

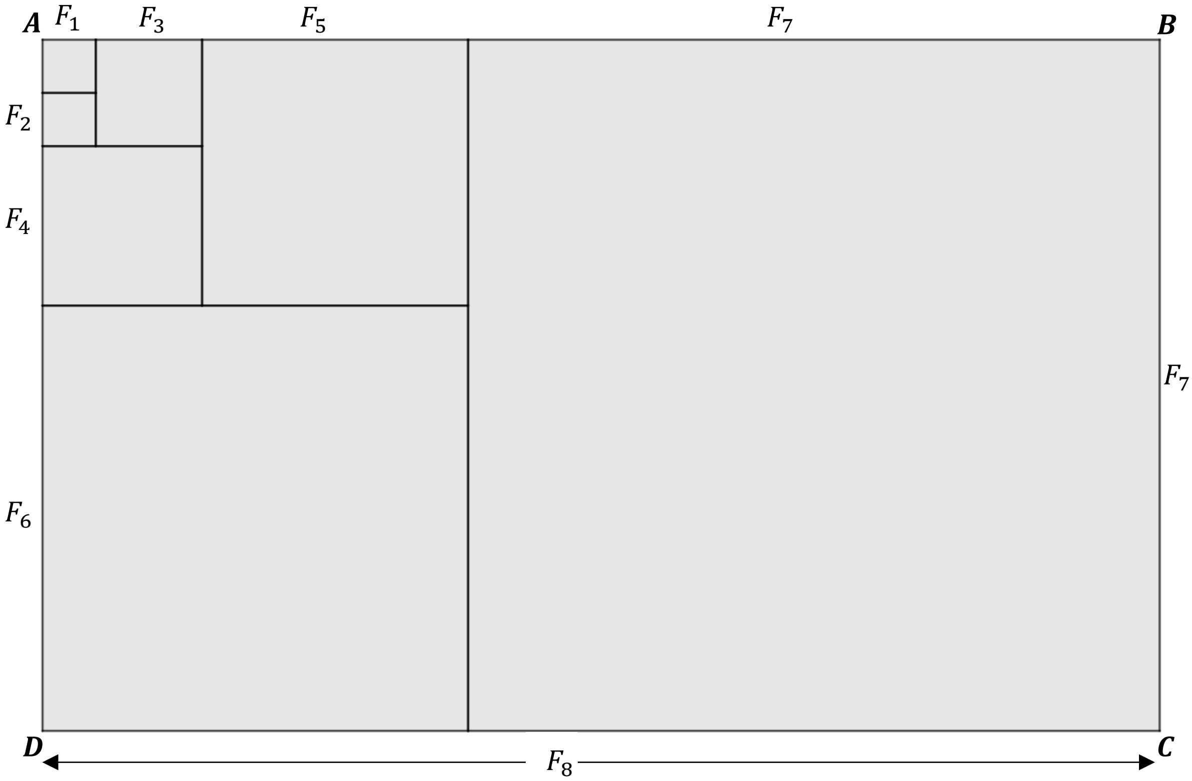
	Identidades	Ideia Inicial para a Demonstração
I	$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	Dividir uma malha de dimensões $1 \times 2n$ ao meio e analisar se as partes tem algum dominó em comum.
II	$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$	Isolar a coluna central de uma malha de dimensões $1 \times (2n-1)$ e analisar se tal coluna terá ou não dominós em comum com as regiões vizinhas.
III	$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$	Analisar o posicionamento do primeiro dominó do Tipo 1 em uma malha de dimensões $1 \times (n+1)$.
IV	$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$	Analisar o posicionamento do primeiro dominó do Tipo 2 em uma malha de dimensões $1 \times 2n$.
V	$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$	Analisar o posicionamento do primeiro dominó do Tipo 2 em uma malha de dimensões $1 \times (2n-1)$.
VI	$F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (-1)^n$	Analisar a presença ou não de linhas de ruptura em uma composição de duas malhas independentes e idênticas de dimensões $1 \times n$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 DEMONSTRANDO COM OS OLHOS

O retângulo $ABCD$ da imagem a seguir foi construído a partir da junção de quadrados cujos lados são termos da sequência de Fibonacci: primeiro é traçado um quadrado de lado F_1; abaixo dele, outro quadrado de lado F_2; à direita dos dois, um de lado F_3; um quadrado de lado F_4 abaixo; e assim sucessivamente, até traçar o quadrado de lado F_7.

Figura 23 – Construção de quadrados adjacentes, com lados pertencentes a F_n



Fonte: Elaborada pelo autor.
Legenda: Figura elaborada com o auxílio de dois *softwares*, *GeoGebra* e *Word*.

Esse retângulo, que poderia ser formado por mais quadrados, foi baseado em uma imagem do artigo *Fibonacci Numbers and Geometry* (*Números de Fibonacci e Geometria*, em tradução livre), de Brother Alfred Brousseau, usada para ilustrar a demonstração da identidade que será apresentada a seguir. O matemático estadunidense Roger Nelsen (1942 –), em seu primeiro livro da série *Proofs Without Words* (*Provas sem Palavras*, em tradução livre), vai mais além: utiliza a imagem como único recurso na demonstração da identidade.

Identidade VII: $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

No intuito de preservar a ideia de Nelsen, volte para a Figura 23, fixe seus olhos nela por mais algum tempo e tente, sem usar palavras, garantir a validade desta identidade. Só então avance a leitura para o próximo parágrafo.

Sabemos que a área do retângulo $ABCD$ pode ser determinada de duas formas: por sua decomposição em quadrados ou pelo produto de suas dimensões. Formando a seguinte igualdade:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 + F_7^2 = F_7 \cdot F_8.$$

Essa mesma relação pode ser utilizada para retângulos formados com menos (ou mais) quadrados, como pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 – Áreas dos retângulos formados com menos de sete quadrados

Quantidade de quadrados	Área por decomposição	Área pelo produto das dimensões
1	F_1^2	$F_1 \cdot F_2$
2	$F_1^2 + F_2^2$	$F_2 \cdot F_3$
3	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$	$F_3 \cdot F_4$
4	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2$	$F_4 \cdot F_5$
5	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2$	$F_5 \cdot F_6$
6	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2$	$F_6 \cdot F_7$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Feita essa análise, somos obrigados a concordar que Nelsen tinha razão: a imagem, por si só, já parece demonstrar a identidade, sem a menor necessidade de alguma argumentação complementar. A generalização é facilmente percebida por uma simples abstração feita mentalmente.

Entretanto, se quisermos o rigor matemático, a generalização é indispensável. Mas essa análise pode ser considerada como o primeiro passo de uma demonstração por indução. Assim sendo, supondo que a igualdade seja válida para um n arbitrário (hipótese de indução) e acrescentando mais um quadrado de lado F_{n+1} ao retângulo ou, em outras palavras, adicionando F_{n+1}^2 a ambos os membros da identidade, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} \cdot F_{n+2}.$$

Mas essa não é a única contribuição que a Figura 23 pode fazer. Além da área, podemos usar duas propriedades dos retângulos (na verdade, dos paralelogramos): os lados opostos são congruentes ($AB = CD$ e $AD = BC$); a soma das medidas de dois lados adjacentes é igual ao semiperímetro do retângulo ($AB + AD = CD + BC = p$). Porém, antes de fazer uso dessas igualdades, vamos entender as relações entre os elementos do retângulo e os números de Fibonacci, descritas na Tabela 5.

Tabela 5 – Relação entre os elementos do retângulo da Figura 23 e a sequência de Fibonacci

Elementos do retângulo e suas respectivas medidas	O que podemos supor
Lado $\overline{AB}$: $AB = F_1 + F_3 + F_5 + F_7$	A soma dos termos de ordem ímpar.
Lado $\overline{CD}$: $CD = F_8$	O termo subsequente ao último adicionado em AB.
Lado $\overline{AD}$: $AD = 1 + F_2 + F_4 + F_6$	O sucessor da soma dos termos de ordem par.
Lado $\overline{BC}$: $BC = F_7$	O termo subsequente ao último adicionado em AD.
Semiperímetro $AB + AD$: $AB + AD = 1 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7$	O sucessor da soma de todos os termos adicionados ao retângulo.
Semiperímetro $CD + BC$: $CD + BC = F_7 + F_8 = F_9$	O segundo termo posterior ao último termo adicionado ao retângulo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, podemos conjecturar as seguintes afirmações:

i. Como $AB = CD$, então, a soma dos termos de ordem ímpar é igual ao termo subsequente ao último adicionado em AB ($\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$);

ii. Como $AD = BC$, então, o sucessor da soma dos termos de ordem par é igual ao termo subsequente ao último adicionado em AD ($1 + \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1}$);

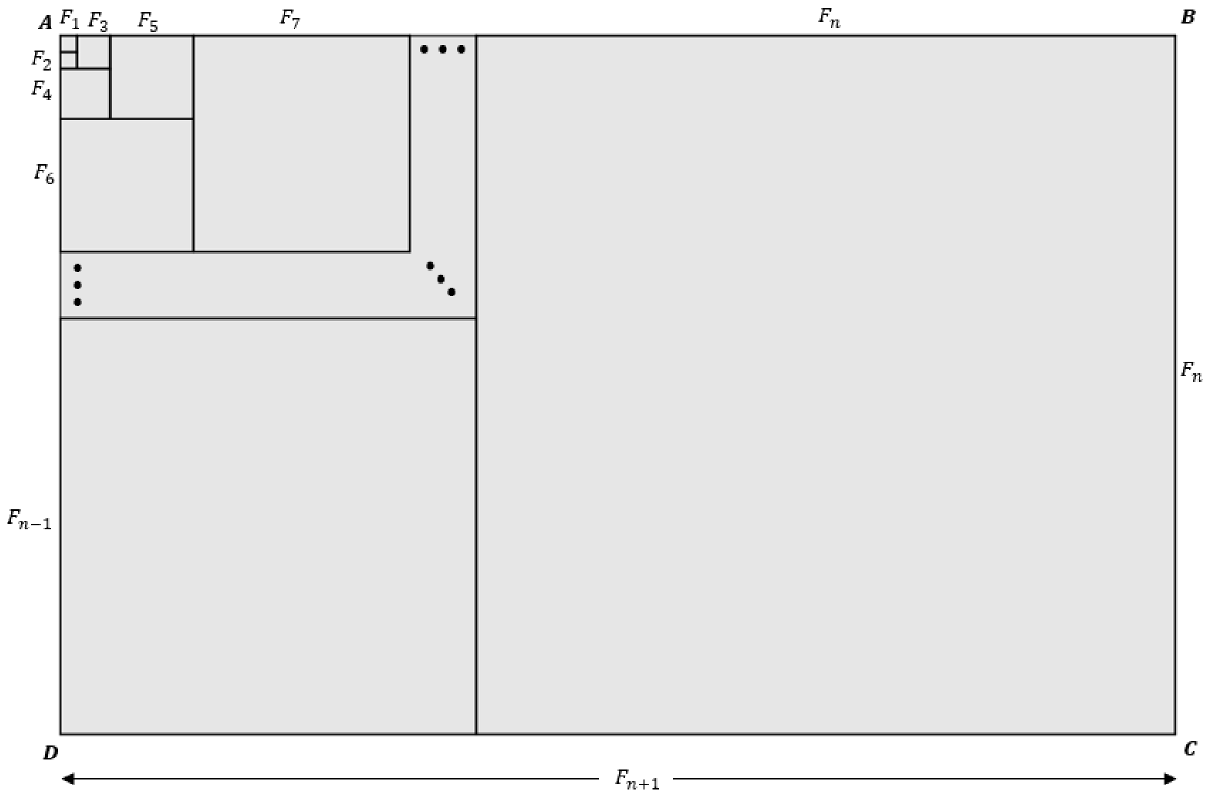
iii. E como $AB + AD = CD + BC$, então, o sucessor da soma de todos os termos adicionados ao retângulo é igual ao segundo termo posterior ao último termo adicionado ao retângulo ($1 + \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2}$);

que são equivalentes às identidades V, IV e III, respectivamente.

Em suma, fazendo uma interpretação geométrica para a sequência de Fibonacci a partir da observação da Figura 23, conseguimos detectar quatro de suas identidades que foram demonstradas neste trabalho utilizando exatamente 1.039 palavras[12]. E, assim, conseguimos um exemplo matemático ideal para a frase célebre do filósofo chinês Confúcio (511 a.C. – 479 a.C.): *"uma imagem vale mais do que mil palavras"*.

No entanto, se quisermos garantir ainda mais essas conjecturas, podemos generalizar a Figura 23 de duas formas: com a Figura 24 podemos visualizar mais facilmente a Identidade III; já com a Figura 25, as Identidades IV e V serão melhor visualizadas..

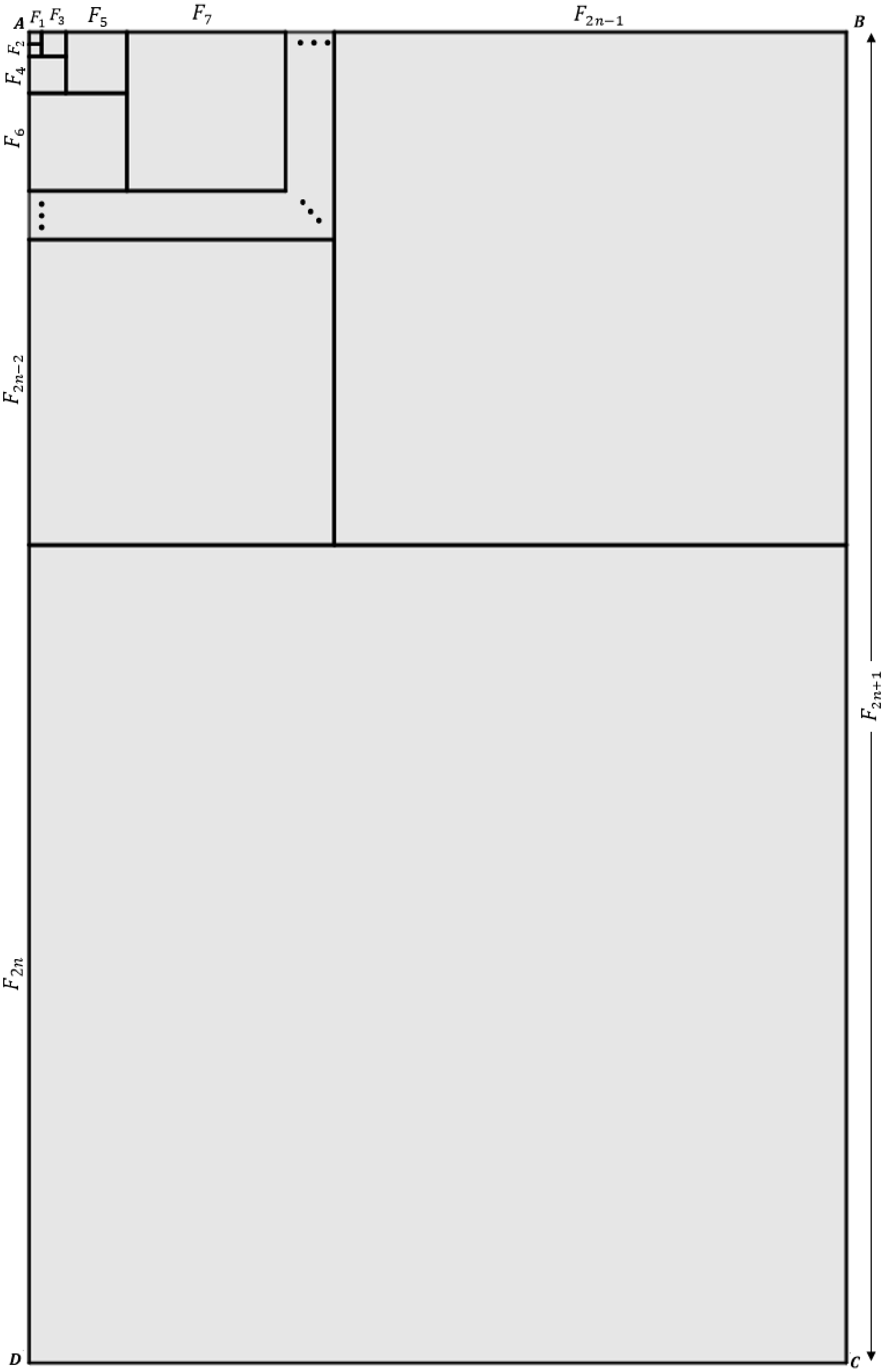
Figura 24 – Expansão da Figura 23 até o quadrado de lado F_n



Fonte: Elaborada pelo autor.
Legenda: Figura elaborada com o auxílio de dois *softwares*, *GeoGebra* e *Word*.

[12] Contadas pelo *software Word*.

Figura 25 – Expansão da Figura 23 até o quadrado de lado F_{2n}



Fonte: Elaborada pelo autor.
Legenda: Figura elaborada com o auxílio de dois *softwares*, *GeoGebra* e *Word*.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentaremos uma proposta de sequência didática com quatro aulas para turmas olímpicas de nível 2, turmas que contêm estudantes de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, organizadas em grupos com três ou quatro alunos cada um. Ela foi preparada tendo em vista aulas com uma hora de duração, porém se as suas aulas tiverem uma duração diferente, você pode reagrupar as questões aumentando, ou diminuindo, a quantidade de aulas da sequência. Além disso, como professor, você tem total autonomia para realizar as alterações que julgar necessárias, tais como: mudanças nos enunciados e/ou nas imagens das questões, retirada de alguma(s) delas, acréscimo de outras ou, ainda, a seleção de quais atividades sugeridas serão utilizadas[13].

Vale ressaltar que a sequência de Fibonacci não é o principal assunto de nenhuma das aulas, ela servirá de mera ferramenta para a abordagem, principalmente, de dois assuntos frequentemente cobrados nas olimpíadas de matemática: combinação e recorrência. Nos últimos anos, a OBMEP, por exemplo, vem cobrando três questões de combinação e uma de recorrência a cada edição. Contudo, de maneira indireta, outros tópicos também acabam sendo abordados, como a influência da paridade dos números na resolução de um problema, relação de congruência entre lados de um retângulo, produtos notáveis, a ideia de indução e de outras técnicas de demonstração, que, vez por outra, se fazem necessários nessas competições.

Outro ponto a ser destacado é que as três primeiras etapas da sequência foram montadas para o uso da malha de duas linhas, no entanto, elas podem ser facilmente adaptadas para fazer o uso da malha de uma linha, como visto na Tabela 3, podendo até usar os dois modelos de malhas (cada metade da turma usando um tipo, por exemplo). Você pode também adaptá-la para uso em turmas de nível 3 ou em turmas regulares. Para este último caso, inclusive, o capítulo “FIBONACCI: DO MATEMÁTICO À SEQUÊNCIA” oferece algumas possibilidades de interdisciplinaridade com Biologia ou Literatura.

[13] As atividades foram preparadas para serem distribuídas separadamente aos alunos, uma a cada aula, mas se preferir entregar todas de uma única vez, basta reproduzir cópias do Anexo C, onde contém todas as 24 questões presentes nas quatro atividades, distribuídas ao longo de três páginas.

O uso dessas malhas vem como tentativa de criar uma metodologia diferenciada, que priorize o uso da criatividade na elaboração de estratégias e deixando de lado a aplicação sistemática de fórmulas. Assim, a sequência didática aqui desenvolvida está estruturada da seguinte forma: inicialmente, ela faz com que cada estudante recorra à sua inteligência espacial, através da sua esfera visual, na identificação de padrões, que, em seguida, serão utilizados na elaboração de conjecturas, o que já permeia outra inteligência também definida por Gardner (1994, p. 100), a lógico-matemática.

Elas deixarão de ser conjecturas quando forem comprovadas pelo professor, em um momento posterior da aula. É importante destacar que esta é a ordem natural dos eventos: antes de se comprovar uma afirmação, ela precisa ter sido pensada, conjecturada, em algum momento do passado, que pode ser curto ou não. Não se pode ter como certo aquilo que sequer foi imaginado. E preservar na explicação de um determinado conteúdo a ordem e o modo nos quais ele foi, inicialmente, estudado são fatores fortemente defendidos pelos historiadores matemáticos.

Com isso, fica claro que o professor deixa de ser a figura principal da aula e passa a ter a função de mediador entre o estudante e o que está sendo estudado. O protagonismo fica a cargo dos discentes, ponto amplamente defendido por Celso Antunes (2011, p. 52). Para ele, para uma aula ser classificada como "excelente" ela precisa ser desafiadora, propositiva e intrigante, fazendo com que os alunos interroguem, sugiram, simbolizem e busquem soluções, como se a aula fosse um "jogo" que ele queira ganhar.

Como serão amplamente usadas nas sessões seguintes, vamos relembrar que as sequências F_n (2.2) e M_n (3.2) diferem apenas pelo termo inicial de F_n que está ausente em M_n:

$$F_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\};$$
$$M_n = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}.$$

O que nos permitiu estabelecer uma ligação entre as sequências numéricas, descrita em (3.3):

$$M_n = F_{n+1}.$$

5.1 Aula 1: Cobrindo uma malha com dominós

5.1.1 Objetivo

Fazer com que os alunos percebam a recorrência presente na sequência M_n.

5.1.2 Roteiro

Em um primeiro momento deve-se entregar a cada estudante (ou cada grupo) uma folha com as malhas e os dominós que serão usados, como a do Apêndice A. Na sequência o professor deve explicar aos alunos como cobrir a malha e pedir para que eles registrem os valores na primeira questão da Atividade I (Apêndice C).

Deixar que eles tentem, sozinhos, resolver as próximas três questões da lista, que serão corrigidas em seguida. Feita a correção, a formalização da sequência M_n precisa ser estabelecida, deixando registrada a expressão (3.2).

5.1.3 Descrição das questões

A primeira questão é para que os alunos adquiram familiaridade com a malha, que será de grande importância para as aulas seguintes. A questão seguinte é para que eles consigam perceber a recorrência entre os números que vão aparecendo, ou seja, que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois números imediatamente anteriores a ele. A terceira questão é para que ele tenha a certeza do fato encontrado na questão anterior. E a última questão é apenas um exercício simples para que os alunos cheguem aos 10 primeiros termos dessa sequência.

5.2 Aula 2: Uso da malha quadriculada e dos dominós para conjecturar identidades – Parte 1

5.2.1 Objetivo

Identificar duas propriedades da sequência M_n, a partir da paridade da quantidade de colunas da malha. São elas: $M_{2n} = M_n^2 + M_{n-1}^2$ e $M_{2n-1} = M_n^2 - M_{n-2}^2$.

5.2.2 *Roteiro*

Entregar a Atividade II aos alunos, presente no Apêndice D, e solicitar que eles respondam as três primeiras questões, que serão corrigidas na sequência. Depois disso, a formalização do caso geral, para uma malha com um número par de colunas, deve acontecer.

Preparando os alunos para a próxima etapa da atividade, a seguinte indagação deve ser levantada: “a divisão da malha só poderia ter sido ao meio?”. Após uma curta discussão, o professor deve deixar claro que a divisão da malha poderia acontecer em qualquer lugar (a exemplo da aula anterior, onde a divisão foi feita na primeira coluna), mas que a identidade que surgiria não seria tão interessante. A partir desse diálogo, uma nova indagação deve ser feita: “como ficaria, então, a divisão de uma malha com uma quantidade ímpar de colunas, como na questão 4?”. Finalizada a discussão, o professor deve solicitar que os alunos façam as três últimas questões da atividade. Feita a correção dessas questões, o professor deve formalizar o caso geral para quando o número de colunas da malha for ímpar.

5.2.3 *Descrição das questões*

A primeira questão serve para que os alunos possam identificar a possibilidade de repartir uma malha em outras de dimensões menores, facilitando o cálculo. A questão 2 vai ajudar na fixação desse fato. Enquanto que a terceira questão vai exigir do aluno a percepção de que este fato não é um caso isolado.

A quarta questão é para que identifiquem uma nova maneira de fazer a divisão da malha, já que ela não tem “meio”. Muito provavelmente, a divisão mais escolhida pelos alunos será a da forma que fiquem seis colunas de um lado e sete colunas do outro. Com isso, a propriedade que aparecerá na quinta questão pode estar formulada de uma maneira diferente daquela que foi apresentada neste trabalho e a última questão vem na intenção de fazer esta “correção”.

5.3 Aula 3: Uso da malha quadriculada e dos dominós para conjecturar identidades – Parte 2

5.3.1 *Objetivo*

Identificar uma propriedade da sequência M_n a partir do localização do primeiro par de dominós horizontais ($M_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} M_i + 2$) e outras duas propriedades a partir da localização do primeiro dominó vertical ($M_{2n} = 1 + \sum_{i=1}^{n} M_{2i-1}$ e $M_{2n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} M_{2i}$).

5.3.2 *Roteiro*

Entregar a Atividade III aos alunos, presente no Apêndice E, e solicitar que eles respondam a primeira questão, que será corrigida em seguida. Depois da correção, o professor deve formular a Identidade III. Procedimento que será repetido com a segunda questão, a fim de formular as identidades IV e V. Ao fim da aula a Atividade IV, Apêndice F, deverá ser entregue aos estudantes como uma atividade extra sala, que será corrigida na aula seguinte.

5.3.3 *Descrição das questões*

Com a primeira questão o aluno vai perceber a influência que o primeiro par de dominós posicionados horizontalmente tem sobre a malha. Já com a segunda questão eles notarão no que implica a posição na qual está alocado o primeiro dominó vertical. Em ambos os casos eles serão interrogados sobre a paridade da quantidade de colunas da malha, a fim de que investiguem em qual deles haverá interferência.

A quantidade de questões dessa parte foi propositalmente reduzida. Acredita-se que, pela complexidade da configuração das malhas, o tempo necessário para que os alunos consigam desenvolver de maneira autônoma essas conjecturas seja maior, quando comparado com as duas aulas anteriores.

5.4 Aula 4: Problemas olímpicos

5.4.1 Objetivo

Manipular a sequência de Fibonacci.

5.4.2 Roteiro

Como a lista foi proposta como atividade extra sala, esta última aula funcionará como fechamento da discussão. Portanto, como método de avaliação, é sugerido que sejam os próprios estudantes os condutores da aula, indo ao quadro para expor suas soluções e confrontar com as respostas dos colegas, quando elas divergirem.

5.4.3 Descrição das questões

A maioria das questões foram adaptadas de olimpíadas de matemática estaduais, nacionais e estrangeiras. Elas foram escolhidas ou porque falam diretamente da sequência de Fibonacci, como as três primeiras questões, ou porque usam as mesmas ideias de combinação utilizadas nas malhas (questões 4 a 6), ou ainda porque intercala a sequência com outros assuntos (7ª questão).

A questão de número 8 é clássica e histórica, não poderia faltar. As duas próximas questões são para associar, diretamente, a malha à sequência de Fibonacci. A penúltima questão aborda, unicamente, a percepção visual, que foi tão importante no decorrer das atividades.

Já a última questão, traz o exercício da criatividade do aluno. E está completamente equivocado quem a dissocia da matemática: a busca por palavras com quantidades específicas de sílabas que faça algum sentido no texto que está sendo construído é de uma estratégia riquíssima. E a capacidade de desenvolver estratégias é indispensável na resolução de problemas matemáticos, principalmente oriundos de olimpíadas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A OBMEP, com seu eficiente trabalho de divulgação, vem fazendo com que a adesão de alunos na participação de olimpíadas de matemática aumente a cada ano. Incentivos a professores, escolas e Secretarias de Educação ligados aos alunos premiados, também tiveram sua parcela de contribuição nesse crescimento. Com isso, turmas de preparação para a olimpíada são cada vez mais presentes nas escolas, públicas e privadas. Existem também, espalhados pelo país, os Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), que treinam alunos dos níveis 2 e 3, tanto de forma presencial quanto à distância.

Na maioria dessas turmas, o treinamento dos estudantes/competidores se dá, unicamente, através da resolução de questões que compuseram edições anteriores das olimpíadas. E, para respondê-las, os alunos só podem fazer uso de fatos comprovados, como lemas e teoremas, que lhes são apresentados em aulas, ignorando qualquer intuição que vieram a ter no decorrer da resolução da questão. Porém, por se tratar de uma competição, acreditamos que quanto mais habilidades um aluno conseguir adquirir, melhor será seu desempenho.

Portanto, essas aulas também precisam conter elementos que colaborem no exercício de habilidades múltiplas dos estudantes. E a utilização dos dominós e das malhas quadriculadas, articulados com elementos de combinação para intermediar as demonstrações de identidades, ajuda a aguçar a curiosidade e, consequentemente, a despertar interesse dos estudantes envolvidos na prática pedagógica aqui desenvolvida. A “demonstração visual”, que foi feita a partir da observação de um retângulo, também oferece vantagens, uma vez que dá mais segurança ao aluno no momento de defender seu ponto de vista, literalmente falando.

Assim, de forma sutil, eles são levados a criar estratégias, a usar sua criatividade, a fazer suposições a partir da sua visão, defendê-las e confirmá-las. No entanto, realizar apenas uma atividade como esta, também não é suficiente. O que desejamos é que este trabalho sirva como incentivo para os professores: que eles criem e/ou vão em busca de outras atividades que também contemplem as múltiplas habilidades dos estudantes olímpicos.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. **Professores e professauros:** reflexões sobre a aula e práticas pedagógicas diversas. 5 ed. Petrópolis: Vozes, 2011.

BARROS, Dimas Monteiro de. **Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos**. Araçatuba: Novas Conquistas, 2003.

BELLOS, Alex. **Alex no país dos números:** uma viagem ao mundo maravilhoso da matemática. Tradução de Berilo Vargas e Claudio Carina. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BOGOMOLNY, Alexander. **Fibonacci Tilings**. Disponível em: <http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.shtml>. Acesso em 11 mai. 2018

BROUSSEAU, Brother Alfred. Fibonacci Numbers and Geometry. **The Fibonacci Quarterly**, Halifax, v. 10, n. 3, p. 303-318, abr. 1972.

CELUQUE, Leonardo. **A Série de Fibonacci**: um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2004.

CUNHA, Celso; CINTRA, Lindley. **Gramática do português contemporâneo**. 6 ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2013.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O diabo dos números:** Um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de matemática. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.

GARDNER, Howard. **Estruturas da Mente:** A Teoria das Inteligências Múltiplas. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

______ . **Inteligências múltiplas:** a teoria na prática. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Maior competição escolar do mundo foi criada pelo IMPA e pela SBM**. Rio de janeiro, 2018. Disponível em: <https://impa.br/page-noticias/olimpiadas-promovem-o-interesse-pela-matematica-em-todo-o-pais/>

KRZYWKOWSKI, Marcin. New Proofs of Some Fibonacci Identities. **International Mathematical Forum**, v. 5, n. 18, p. 869-874, 2010. ISSN: 1314-7536.

NELSEN, Roger B. **Proofs Without Words:** Exercises in Visual Thinking. Washington: The Mathematical Association of America, 1993.

O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **François Édouard Anatole Lucas**. St. Andrews, 1996. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lucas.html>. Acesso em 11 abr. 2018.

______ . **Giovanni Domenico Cassini**. St. Andrews, 2003. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cassini.html>. Acesso em 11 abr. 2018.

______ . **Leonardo Pisano**. St. Andrews, 1998. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fibonacci.html>. Acesso em 11 abr. 2018.

RAVEN, Petter Hamilton; EVERT, Ray Franklin; EICHHORN, Susan E. **Biologia Vegetal**. 7 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2007.

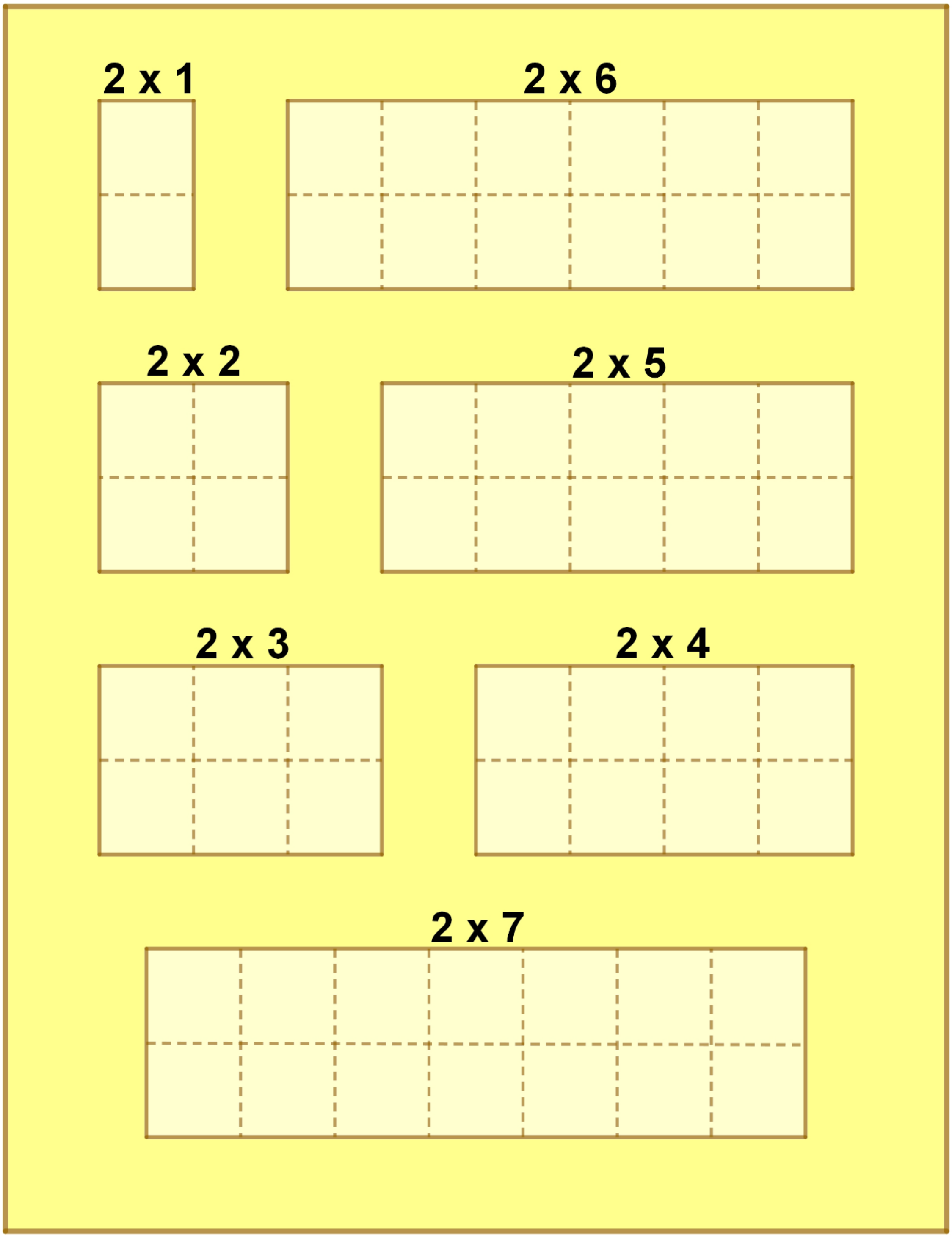
RHUSSO, Ronaldo. **2016 - O Dia, O Tema e O Poema:** Sagrado Coração de Poeta. Parati: Clube de Autores, 2015.

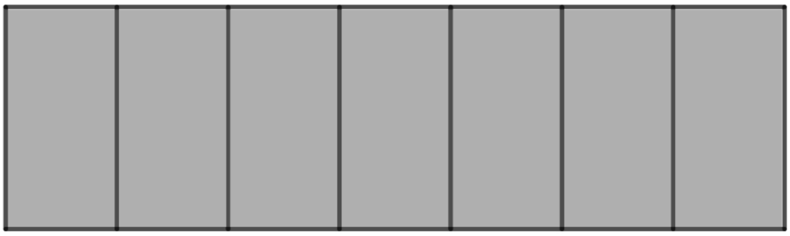
ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

STEWART, Ian. **Almanaque das curiosidades matemáticas**. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

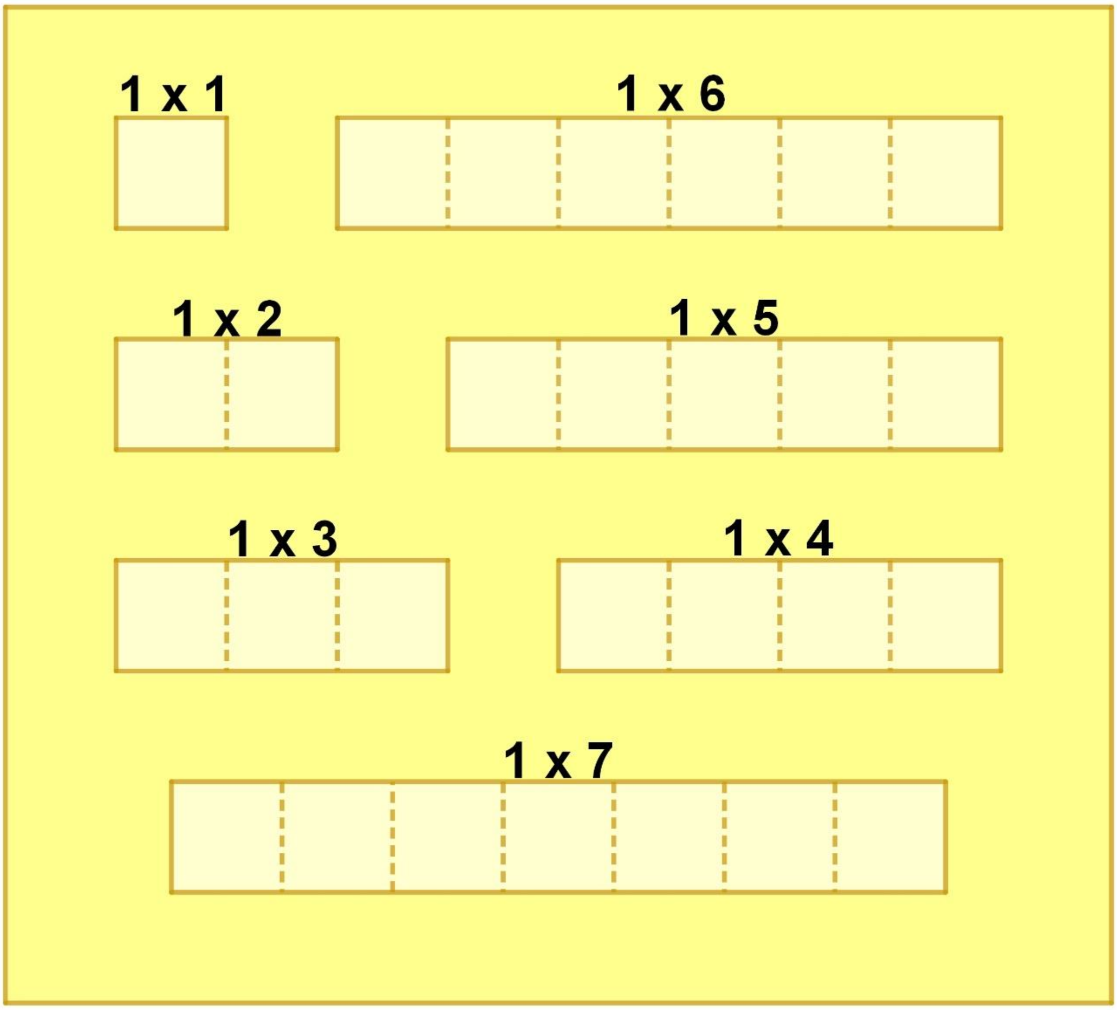
APÊNDICES

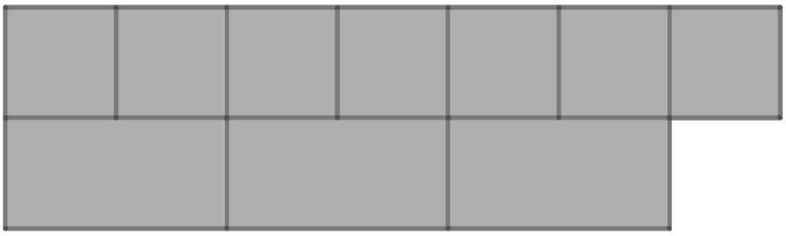
Apêndice A – Modelo de malha de duas linhas e de dominós





Apêndice B – Modelo de malha de uma linha e de dominós





Apêndice C – Atividade I

1) Indique a quantidade de formas diferentes que cada uma das malhas pode ser revestida pelos dominós.

a. Malha 2×1:

b. Malha 2×2:

c. Malha 2×3:

d. Malha 2×4:

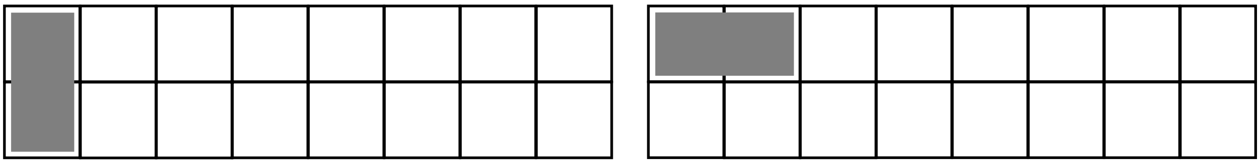
e. Malha 2×5:

f. Malha 2×6:

g. Malha 2×7:

2) Se houvesse uma malha de dimensões 2×8, na sua opinião, ela poderia ser coberta de quantas maneiras distintas?

3) Observe as malhas a seguir:



a. De quantas formas diferentes a primeira malha pode terminar de ser preenchida?

b. E a segunda malha?

c. Existe alguma outra forma para começar a cobertura da malha?

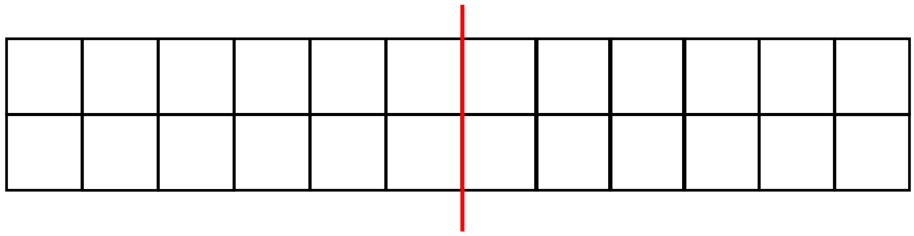
d. Qual o total de possibilidades?

e. O resultado encontrado na segunda questão foi confirmado com o item “d”?

4) Calcule a quantidade de possibilidades diferentes com as quais uma malha de dimensões 2×10 pode ser revestida.

Apêndice D – Atividade II

1) A malha a seguir foi dividida ao meio por uma barra vermelha.



a. De quantas maneiras diferentes essa malha pode ser preenchida, de forma que as duas partes tenham dominós em comum? (Dê sua resposta usando termos de M_n)

b. Quantas são as formas de se revestir a malha, de modo que as partes não tenham dominós em comum? (Dê sua resposta usando termos de M_n)

c. Quantas são as possibilidades totais de se revestir a malha?

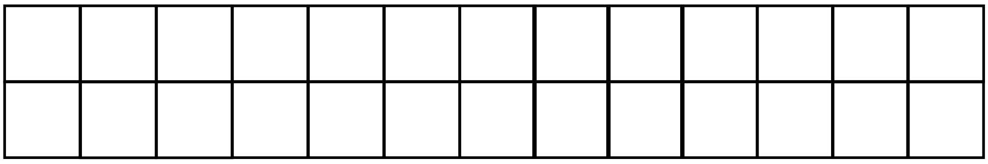
2) Repita o processo da questão anterior para uma malha de dimensões 2×20.

3) Observando os resultados das duas questões, formule alguma propriedade presente entre os números da sequência M_n.

4) Considere agora uma malha com uma quantidade ímpar de coluna.

a. Como você efetuaria a divisão da malha?

b. Com a divisão escolhida, repita o processo da primeira questão para a malha abaixo.



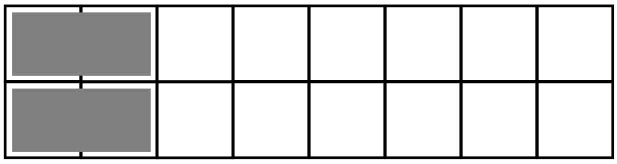
5) Com este último resultado, formule outra propriedade presente entre os números da sequência.

6) Utilizando fatoração e produtos notáveis, manipule o resultado anterior a fim de encontrar uma diferença de dois quadrados.

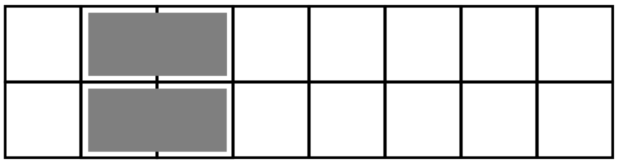
Apêndice E – Atividade III

1) Analise novamente a malha de oito colunas da primeira atividade, mas desta vez a partir do posicionamento do primeiro par de dominós colocados na horizontal.

a. De quantas formas ela pode ser revestida se o primeiro par de dominós horizontais estiver nas duas primeiras colunas? (Dê sua resposta no formato de M_n)



b. E se estiverem na segunda e terceira colunas? (Dê sua resposta no formato de M_n)



c. Repita o processo até que o os únicos dominós horizontais estejam nas duas últimas colunas?

d. Algum caso faltou ser contabilizado?

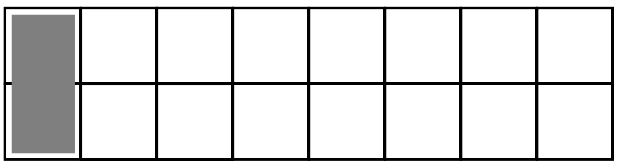
e. Qual a quantidade total de combinações?

f. Desta vez, qual propriedade da sequência M_n podemos concluir?

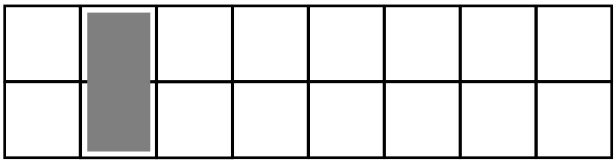
g. Mudaria alguma coisa se a quantidade de colunas fosse ímpar?

2) Faça o mesmo tipo de análise da questão anterior, mas dessa vez levando em conta o posicionamento do primeiro dominó colocado na vertical.

a. De quantas formas ela pode ser revestida se o primeiro dominó vertical estiver na primeira coluna? (Dê sua resposta no formato de M_n)



b. E se estiver na segunda coluna?



c. Finalize os casos e determine a quantidade total de combinações.

d. Desta vez, qual propriedade da sequência M_n podemos concluir?

e. Mudaria alguma coisa se a quantidade de colunas fosse ímpar?

Apêndice F – Atividade IV

1) A sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma: o termo 1, representado por F_1, é igual a 1, o termo 2, representado por F_2, é igual a 1 e, a partir do termo 3, cada termo é igual à soma dos dois anteriores. Por exemplo: o termo 3, representado por F_3, é igual a $F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$.

a. Determine os 11 primeiros termos da sequência.

b. F_{2018} é par ou ímpar? Justifique.

2) Se $F_{18} = 2584$ e $F_{21} = 10946$, então, quanto é F_{22}?

3) Existe um teorema que diz que *todo número natural pode ser escrito como uma soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos*. Sendo assim, represente os números 50, 75, 100 e 125 como soma de números de Fibonacci.

4) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

21 → 22 → 11 → 12 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem **comprimento** 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma **sequência ímpar**.

a. Escreva a sequência que começa com 37.

b. Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.

c. Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?

d. Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares?

5) Ache o número possível de sequências de 0's e 1's, de comprimento *n* que não tenham dois zeros consecutivos. *010110* é um exemplo de uma sequência de comprimento 6.

6) De quantas formas diferentes você pode pagar uma conta de *n* reais usando apenas moedas de R$ 1,00 e/ou cédulas de R$ 2,00?

7) Considere o número *0,112358314...* onde cada algarismo de sua parte decimal, a partir do terceiro, é obtido a partir soma dos dois algarismos anteriores a ele, levando-se em conta apenas o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

8) Um homem pôs um par de coelhos férteis em um lugar cercado por paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos serão produzidos por esse par em um ano, se supusermos que a cada mês, cada par produzirá um novo par, que se tornará fértil a partir do segundo mês de vida?

9) Qual a relação entre as sequências de Fibonacci e M_n?

10) Encontre as equivalências entre as identidades encontradas nas aulas anteriores, para a sequência M_n, e a sequência de Fibonacci.

a. $M_{2n} = M_n^2 + M_{n-1}^2$

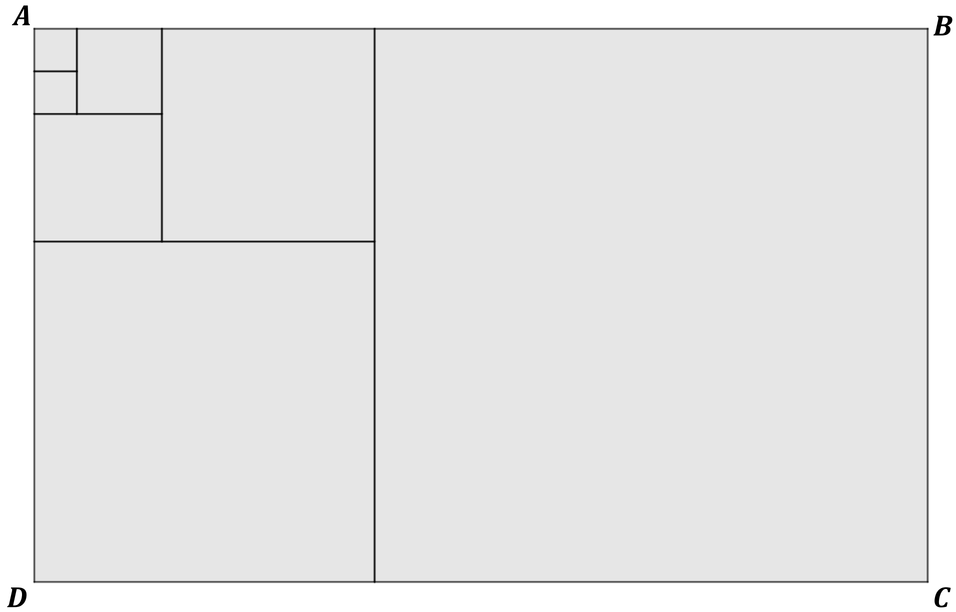
b. $M_{2n-1} = M_n^2 - M_{n-2}^2$

c. $M_{n+1} = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + \cdots + M_1 + 1 + 1$

d. $M_{2n} = M_{2n-1} + M_{2n-3} + M_{2n-5} + \cdots + M_3 + M_1 + 1$

e. $M_{2n-1} = M_{2n-2} + M_{2n-4} + M_{2n-6} + \cdots + M_4 + M_2 + 1$

11) O retângulo $ABCD$ da imagem a seguir foi construído a partir da junção de quadrados cujos lados são termos da sequência de Fibonacci: primeiro é traçado um quadrado de lado F_1; abaixo dele, outro quadrado de lado F_2; à direita dos dois, um de lado F_3; um quadrado de lado F_4 abaixo; e assim sucessivamente, até traçar o quadrado de lado F_7.



Quais identidades você consegue encontrar a partir dele?

12) Fibs são poemas forma fixa compostos por uma única estrofe de seis versos, construídos de forma que o número de sílabas em cada verso é ditado pela sequência de Fibonacci, confira dois exemplos:

O
Que
Me faz
Ensinar
Matemática?
Sua essência prática!
Edcarlos Macena

Se
É
Pra ser
Difícil
Que seja, então
Mas desistir eu não vou, não
Letícia Leal

Que tal se arriscar e o seu tentar? Não precisa rimar, só não pode o número de sílabas errar. Desenvolva sua própria estratégia e mãos à obra. (Se gostou, procura saber sobre as sílabas métricas.)

ANEXOS

Anexo A: Fibs que contam as sílabas gramaticais

Bem,
Mal,
Opte
Tu que diz,
E assim leva,
Sucede pelo caminho.
Anthony Gabriel Souto

Eu
Sou
Eco
Berrante
Quase gritante
Neste passado instante
Levado pra longe sem terminar, minar, nar...
Letícia Leal

Se
Foi
Ou não,
Quem sabe?
Descrente estou
Até porque eu acho que
O meu tempo já acabou!
Mas será que há
Esperança?
Sei lá.
Já
Fui!
Letícia Leal

Ver
um
filme
envolto
em seu abraço
me causa embaraço!
Edcarlos Macena

Ei,
Oi,
Sou eu,
Faz tempo,
Apenas vejo,
Você tem que fazer advir
Anthony Gabriel Souto

Se
É
Pra ser
Difícil
Que seja, então
Mas desistir eu não vou, não
Letícia Leal

Que
mês!
Julho,
não tenha
pressa em chegar,
deixe Junho se prolongar!
Edcarlos Macena

Eu
Sei
Que tu
Não queres
Acreditar que
Tudo isso já não passa
De uma bela história de ninar, não é?
Mas a vida não brinca, não, meu bem, e o sonho já se foi, mais uma vez
Letícia Leal

Anexo B: Fibs que contam as sílabas métricas

O
filme
foi bom!
Não gostei.
Aff... Sempre do contra!
A Marvel que não impressiona.
Edcarlos Macena

Não,
penso,
começo,
porém paro e
termino fazendo
nada, rindo, me desdizendo
Ednelson João Ramos e Silva Júnior

Quando
algo
ou alguém
te enfurece,
respire... Procure
aquele bom parça e converse.
Edcarlos Macena

Filme,
na
poltrona
do cinema
ou na sua cama,
é sempre um excelente programa!
Edcarlos Macena

Snape:
príncipe
mestiço,
do Alvo amigo,
mestre das poções
e que traz as trevas consigo.
Edcarlos Macena e Letícia Leal

Num
dia
de chuva,
um amigo
na rua avistei.
Meu carro parei e ele adentrou.
E, por todo o carpete, camarão derrubou.
Edcarlos Macena

Um,
Dois,
Prossiga,
Sua vez,
Continue assim
A partir daqui é você
Anthony Gabriel Souto

E
se
comigo
namorar
você aceitar,
lealdade não vai faltar!
Edcarlos Macena

Mãe
bruxa,
pai
trouxa,
assim nasce
Você-Sabe-Quem:
coitado que nem nariz tem.
Edcarlos Macena e Letícia Leal

Anexo C – Lista de atividades

No caso do professor preferir entregar aos alunos as quatro atividades de uma só vez, é sugerido que seja utilizada esta compilação. Nela, nenhuma das questões foi suprimida, nem trocada de ordem.

A primeira página contém as questões das Atividades I (questões de 1 a 4) e II (questões de 5 a 10). As questões 11 e 12 são aquelas que compõem a Atividade III. Já as questões da Atividade IV estão numeradas de 13 a 24.

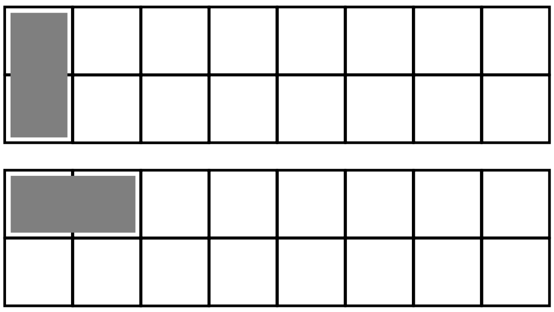
Lista de Atividades

1) Indique a quantidade de formas diferentes que cada uma das malhas pode ser revestida pelos dominós.

- **a.** Malha 2×1:
- **b.** Malha 2×2:
- **c.** Malha 2×3:
- **d.** Malha 2×4:
- **e.** Malha 2×5:
- **f.** Malha 2×6:
- **g.** Malha 2×7:

2) Se houvesse uma malha de dimensões 2×8, na sua opinião, ela poderia ser coberta de quantas maneiras distintas?

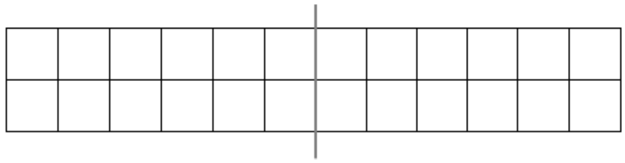
3) Observe as malhas a seguir:



- **a.** De quantas formas diferentes a primeira malha pode terminar de ser preenchida?
- **b.** E a segunda malha?
- **c.** Existe alguma outra forma para começar a cobertura da malha?
- **d.** Qual o total de possibilidades?
- **e.** O resultado encontrado na segunda questão foi confirmado com o item “d”?

4) Calcule a quantidade de possibilidades diferentes com as quais uma malha de dimensões 2×10 pode ser revestida.

5) A malha a seguir foi dividida ao meio por uma linha.



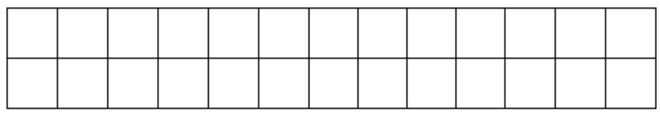
- **h.** De quantas maneiras diferentes essa malha pode ser preenchida, de forma que as duas partes tenham dominós em comum? (Dê sua resposta usando termos de M_n)
- **i.** Quantas são as formas de se revestir a malha, de modo que as partes não tenham dominós em comum? (Dê sua resposta usando termos de M_n)
- **j.** Quantas são as possibilidades totais de se revestir a malha?

6) Repita o processo da questão anterior para uma malha de dimensões 2×20.

7) Observando os resultados das duas questões, formule alguma propriedade presente entre os números da sequência M_n.

8) Considere agora uma malha com uma quantidade ímpar de coluna.

- **a.** Como você efetuaria a divisão da malha?
- **b.** Com a divisão escolhida, repita o processo da primeira questão para a malha abaixo.

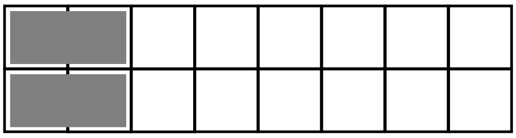


9) Com este último resultado, formule outra propriedade presente entre os números da sequência.

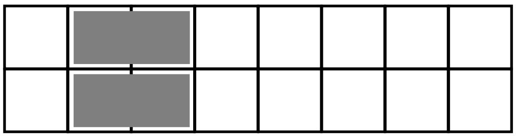
10) Utilizando fatoração e produtos notáveis, manipule o resultado anterior a fim de encontrar uma diferença de dois quadrados.

11) Analise novamente a malha de oito colunas da primeira atividade, mas desta vez a partir do posicionamento do primeiro par de dominós colocados na horizontal.

- **a.** De quantas formas ela pode ser revestida se o primeiro par de dominós horizontais estiver nas duas primeiras colunas? (Dê sua resposta no formato de M_n)



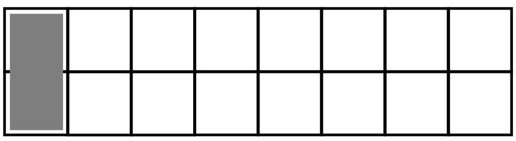
- **b.** E se estiverem na segunda e terceira colunas? (Dê sua resposta no formato de M_n)



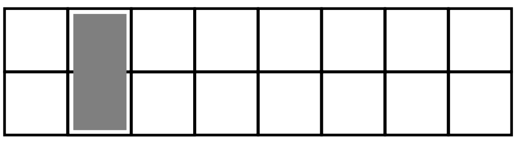
- **c.** Repita o processo até que o os únicos dominós horizontais estejam nas duas últimas colunas?
- **d.** Algum caso faltou ser contabilizado?
- **e.** Qual a quantidade total de combinações?
- **f.** Desta vez, qual propriedade da sequência M_n podemos concluir?
- **g.** Mudaria alguma coisa se a quantidade de colunas fosse ímpar?

12) Faça o mesmo tipo de análise da questão anterior, mas dessa vez levando em conta o posicionamento do primeiro dominó colocado na vertical.

- **a.** De quantas formas ela pode ser revestida se o primeiro dominó vertical estiver na primeira coluna? (Dê sua resposta no formato de M_n)



- **b.** E se estiver na segunda coluna?



- **c.** Finalize os casos e determine a quantidade total de combinações.
- **d.** Desta vez, qual propriedade da sequência M_n podemos concluir?
- **e.** Mudaria alguma coisa se a quantidade de colunas fosse ímpar?

13) A sequência de Fibonacci é definida da seguinte forma: o termo 1, representado por F_1, é igual a 1, o termo 2, representado por F_2, é igual a 1 e, a partir do termo 3, cada termo é igual à soma dos dois anteriores. Por exemplo: o termo 3, representado por F_3, é igual a $F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$.

- **a.** Determine os 11 primeiros termos da sequência.
- **b.** F_{2018} é par ou ímpar? Justifique.

14) Se $F_{18} = 2584$ e $F_{21} = 10946$, então, quanto é F_{22}?

15) Existe um teorema que diz que *todo número natural pode ser escrito como uma soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos*. Sendo assim, represente os números 50, 75, 100 e 125 como soma de números de Fibonacci.

16) Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções abaixo:

- se o número for ímpar, soma-se 1;
- se o número for par, divide-se por 2.

Por exemplo, começando com o número 21, forma-se a seguinte sequência:

21 → 22 → 11 → 12 → 6 → 3 → 4 → 2 → 1

Nessa sequência aparecem nove números; por isso, dizemos que ela tem **comprimento** 9. Além disso, como ela começa com um número ímpar, dizemos que ela é uma **sequência ímpar**.

- **a.** Escreva a sequência que começa com 37.
- **b.** Existem três sequências de comprimento 5, sendo duas pares e uma ímpar. Escreva essas sequências.
- **c.** Quantas são as sequências pares e quantas são as sequências ímpares de comprimento 6? E de comprimento 7?
- **d.** Existem ao todo 377 sequências de comprimento 15, sendo 233 pares e 144 ímpares. Quantas são as sequências de comprimento 16? Dessas, quantas são pares?

17) Ache o número possível de sequências de 0's e 1's, de comprimento *n* que não tenham dois zeros consecutivos. *010110* é um exemplo de uma sequência de comprimento 6.

18) De quantas formas diferentes você pode pagar uma conta de *n* reais usando apenas moedas de R$ 1,00 e/ou cédulas de R$ 2,00?

19) Considere o número *0,112358314...* onde cada algarismo de sua parte decimal, a partir do terceiro, é obtido a partir soma dos dois algarismos anteriores a ele, levando-se em conta apenas o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional? Justifique.

20) Um homem pôs um par de coelhos férteis em um lugar cercado por paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos serão produzidos por esse par em um ano, se supusermos que a cada mês, cada par produzirá um novo par, que se tornará fértil a partir do segundo mês de vida?

21) Qual a relação entre as sequências de Fibonacci e M_n?

22) Encontre as equivalências entre as identidades encontradas nas aulas anteriores, para a sequência M_n, e a sequência de Fibonacci.

a. $M_{2n} = M_n^2 + M_{n-1}^2$

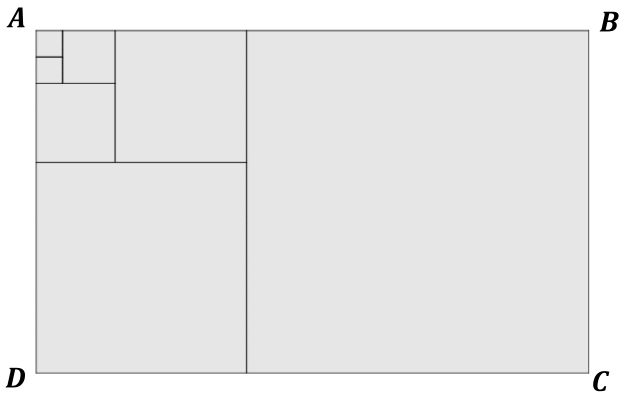
b. $M_{2n-1} = M_n^2 - M_{n-2}^2$

c. $M_{n+1} = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + \cdots + M_1 + 1 + 1$

d. $M_{2n} = M_{2n-1} + M_{2n-3} + M_{2n-5} + \cdots + M_3 + M_1 + 1$

e. $M_{2n-1} = M_{2n-2} + M_{2n-4} + M_{2n-6} + \cdots + M_4 + M_2 + 1$

23) O retângulo $ABCD$ da imagem a seguir foi construído a partir da junção de quadrados cujos lados são termos da sequência de Fibonacci: primeiro é traçado um quadrado de lado F_1; abaixo dele, outro quadrado de lado F_2; à direita dos dois, um de lado F_3; um quadrado de lado F_4 abaixo; e assim sucessivamente, até o quadrado de lado F_7 ser traçado.



Quais identidades você consegue encontrar a partir dele?

24) Fibs são poemas forma fixa compostos por uma única estrofe de seis versos, construídos de forma que o número de sílabas em cada verso é ditado pela sequência de Fibonacci, confira dois exemplos:

O
Que
Me faz
Ensinar
Matemática?
Sua essência prática!
Edcarlos Macena

Se
É
Pra ser
Difícil
Que seja, então
Mas desistir eu não vou, não
Letícia Leal

Que tal se arriscar e o seu tentar? Não precisa rimar, só não pode o número de sílabas errar. Desenvolva sua própria estratégia e mãos à obra. (Se gostou, procura saber sobre as sílabas métricas.)