



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RONALDO SILVA RÊGO

**INVESTIGAÇÕES SOBRE A AÇÃO DE EULER-HEISENBERG COM
VIOLAÇÃO DE SIMETRIA CPT**

Maceió - AL
2018

RONALDO SILVA RÊGO

**INVESTIGAÇÕES SOBRE A AÇÃO DE EULER-HEISENBERG COM
VIOLAÇÃO DE SIMETRIA CPT**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo programa de Pós-graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento

Maceió - AL

2018

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

R343i Rêgo, Ronaldo Silva.

Investigações sobre a ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria
CPT / Ronaldo Silva Rêgo. – 2018.
79 f. : il.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.

Dissertação (mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Física. Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 78-79.

1. Violação de simetria CPT-ímpar. 2. Ação de Euler-Heisenberg. 3. Divisão
tripla de fótons. I. Título.

CDU: 539.122



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

***“Investigações sobre a ação de Euler-Heisenberg com
violação de simetria CPT”***

por

Ronaldo Silva Rêgo

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Wellington Romero Serafim Freire, da Universidade Federal Rural de Pernambuco e Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, da Universidade Federal do Ceará consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 2 de março de 2018


Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento


Prof. Dr. Wellington Romero Serafim Freire


Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Raimundo Maciel Rêgo e Maria Ester Silva Rêgo, dádivas da minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus, não o terreno.

Agradeço aos meus pais, Raimundo e Maria, que sempre me apoiaram em momentos bons ou ruins, sendo eles minha fonte de força e inspiração; e aos meus irmãos, em especial Antonio, Vanilma e Vanderlice.

Um agradecimento especial a minha namorada Maria Keliane, que tem me fortalecido e compartilha de meus sonhos, entendendo-os e dando-me a certeza de um amor recíproco e verdadeiro, fazendo de mim uma pessoa melhor.

Ao meu Professor e Orientador Tiago Mariz pela orientação e discussões, que me proporcionaram clarear as ideias e solidificar essa pesquisa, o que resultou neste trabalho de grande esmero.

Ao meu professor e amigo Isafias Coelho, que sempre me presenteia com boas conversas e conselhos; e ao professor e amigo Rivelino Vilela, pelo apoio e por sua grande solicitude.

Ao meu amigo/irmão Daniel Mendes, que sempre está disposto a discutir comigo física de altas energias, bem como, agradeço a sua família, que agora também é minha.

Aos meus amigos, em especial Eliete Alvin pelas longas conversas, por vezes tristes, mas em maior parte alegres, e Lendel Rodrigues por sua parceria e histórias engraçadas.

À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho de pesquisa.

“A busca de uma teoria que descreva a física de uma maneira unificada não se origina de um desejo meramente estético, mas da certeza de que esta construção nos faz compreender mais profundamente os processos naturais, e abre possibilidades nunca antes pensadas.”

(H. Belich)

RESUMO

Neste trabalho, consideramos correções radiativas de um loop da QED estendida, com violação de Lorentz e CPT, para discutir o problema específico de encontrar uma amplitude decorrente do efeito da divisão tripla do fóton. Para isso, trabalhamos com uma lagrangiana que comporta o coeficiente b_μ que é uma constante quadrivetorial que regula a violação de Lorentz e CPT no setor fermiônico, cuja presença afeta o efeito da divisão de fótons. Realizamos um estudo acerca das transformações de Lorentz de partícula e observador, no qual se observou que na presença de um campo elétrico, as rotações e *boost* quebram a correspondência entre tais transformações, e ainda discorremos acerca da violação da invariância de Lorentz levando em conta o Modelo Padrão Estendido. A ação efetiva foi encontrada por meio da ação de Euler-Heisenberg, que descreve a dinâmica não linear de campos eletromagnéticos no vácuo, onde a partir dessa ação foi possível escrevermos uma expressão matemática para o diagrama de quatro pernas de fótons analisado, de modo que comportasse a quebra de simetria e desse viabilidade ao cálculo da amplitude do efeito gerado pela divisão tripla do fóton em questão. Mostramos que não há amplitude diferente de zero para a divisão de fótons, para o caso não colinear; seguindo a prescrição de referências consultadas obtivemos um resultado diferente de zero, no limite colinear.

Palavras-chave: Violação de simetria CPT-ímpar. Ação de Euler-Heisenberg. Divisão tripla de fótons.

ABSTRACT

In this work, we consider radiative corrections of an extended QED loop, with violation of Lorentz and CPT, to discuss the specific problem of finding an amplitude due to the effect of the triple division of the photon. For this, we work with a lagrangian that includes the coefficient b_μ which is a four-vector constant that regulates the Lorentz and CPT violation in the fermionic sector, whose presence affects the effect of the photon division. We performed a study on the Lorentz transformations of particle and observer, in which it was observed that in the presence of an electric field, the rotations and textit boost break the correspondence between such transformations, and we still discourse about the violation of Lorentz invariance taking into account the Extended Standard Model. The effective action was found through the Heisenberg-Euler Action, which describes the nonlinear dynamics of electromagnetic fields in vacuum, where from this action it was possible to write a mathematical expression for the analyzed diagram of four legs of photons , so that it contains the breaking of symmetry and would be viable to calculate the amplitude of the effect generated by the triple division of the photon in question. We show that there is no nonzero amplitude for the division of photons, for the non-collinear case; following the prescription of references consulted we obtained a result different from zero, in the collinear limit.

Keywords: CPT-odd symnetic violation. Heisenberg-Euler Action. Triple division of photon.

SUMÁRIO

1	Introdução	4
2	Quebra das transformações de CPT e Lorentz	7
2.1	Simetria CPT	7
2.2	Simetria de Lorentz	10
2.2.1	<i>A relatividade restrita e os fenômenos eletromagnéticos</i>	10
2.3	Transformações de Lorentz	11
2.3.1	<i>Transformações de observador e partícula</i>	13
2.4	Violação da invariância de Lorentz	14
2.4.1	<i>Modificação de campos sob transformação de observador</i>	15
2.4.2	<i>Quebra da invariância de Lorentz através de uma rotação e de um boost</i>	18
3	Eletrodinâmica quântica e a violação de Lorentz	24
3.1	Equações de Maxwell	24
3.2	Equação de Dirac	28
3.3	Modelo padrão	33
3.4	Modelo padrão estendido	35
3.5	Violação da invariância de Lorentz para férmions	35
4	Ação de Euler-Heisenberg com quebra de simetria CPT-ímpar	38
4.1	Ação de Euler-Heisenberg	38
4.2	Ação efetiva	39
4.3	Divisão tripla de fótons	44
4.4	Limite colinear	52
5	Considerações Finais e Perspectivas	56
	Referências Bibliográficas	58

A	Transformações lineares que resultam em transformações de Lorentz.	65
B	Demonstração do campo elétrico entre duas placas paralelas.	67
C	Contração espacial	69
D	Campos E' e B' em função de E e B.	72
E	Expressão matemática para u_y.	73
F	Traços	75
F.1	Contribuição 1	75
F.2	Contribuição 2	76
F.3	Contribuição 3	78

LISTA DE FIGURAS

2.1	Decaimento de W^- se convertendo em decaimento de W^+ após as transformações C e P.	9
2.2	Observador analisando o movimento de uma partícula de dois pontos diferentes do laboratório.	13
2.3	Observador analisando o movimento de uma partícula num mesmo sistema de coordenadas.	14
2.4	Referencial inercial em repouso representando um capacitor de placas paralelas	15
2.5	Referencial S sofrendo um boost de velocidade para a direita.	16
2.6	Rotação passiva de um ângulo $+\frac{\pi}{2}$ na presença de um campo de fundo. . .	19
2.7	Rotação ativa de um ângulo $-\frac{\pi}{2}$ na presença de um campo de fundo. . . .	19
2.8	Sistema S' movendo-se com velocidade \vec{v} em relação ao sistema S que está em repouso, tendo como referência as placas paralelas.	20
2.9	Trajetórias do elétron submetido a um campo de fundo: (1) velocidade inicial \vec{u} , para transformação de observador; (2) velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$, para transformação de partícula.	23
4.1	Representação em diagrama das ações efetivas de um loop.	42
4.2	Diagrama de Feynman referente a contribuição $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$. . .	46
B.1	Representação de uma superfície gaussiana em uma placa.	67
C.1	a) Observador no referencial S' . b) Observador no referencial S	69

Capítulo 1

Introdução

O conceito de simetria foi, em princípio, discutido pelos matemáticos com a ideia de isometria, ou seja, preservação de distância, que está no ramo da geometria, conforme mostrado em [1]. No que se refere ao conceito físico de simetria, diz-se que um sistema possui simetria se for possível aplicar uma modificação no mesmo, de tal forma que, o sistema permaneça inalterado.

Em outras palavras, aplica-se uma transformação sobre o sistema, e este se mostra invariante. Isto implica diretamente em leis de conservação, como teorizado em [2]. Surge, nesse contexto, o Teorema de Noether¹ [3], que enuncia:

1. A toda simetria contínua deve corresponder uma lei de conservação;
2. A toda lei de conservação deve corresponder uma simetria contínua.

Simetria contínua é a transformação cujo parâmetro pode variar continuamente, como em um ângulo de rotação, e leis de conservação implicam em uma grandeza física que não se altera em qualquer processo físico. Assim, pode-se declarar que, dentre muitas outras, existem três simetrias importantes:

- Paridade (P): inversão de todas as coordenadas espaciais;
- Reversão temporal (T): Inversão da componente temporal;
- Conjugação de carga (C): trocar matéria por antimatéria.

¹Amalie Emmy Noether (1882-1935) foi uma matemática alemã, conhecida pelas suas contribuições nos campos de física teórica e álgebra abstrata.

Acreditava-se que a manutenção de simetrias em um modelo físico era essencial para sua validade e consistência, onde somente a partir do final da década de 80 se passou a creditar modelos com violação, com os trabalhos de Kostelický e outros [4].

O atual Modelo Padrão (MP) se fundamenta nos conceitos que descrevem as três interações fundamentais, sendo elas eletromagnética, forte e fraca. A interação gravitacional não é descrita com praticidade pelo MP, na escala de energia eletrofraca, 246GeV .

Em algumas teorias fundamentais, que implicam altos níveis de energia, ocorre uma quebra espontânea de simetria, através da qual surgem efeitos de violação da invariância de Lorentz, bem como, CPT [5, 6]. Surgem, nesse contexto, os estudos do Modelo Padrão Estendido (MPE) com os trabalhos de Kostelecky e Colladay [7, 8], uma vez que, com base nessa quebra propuseram um modelo em sua lagrangiana à uma extensão dos possíveis termos de violação de Lorentz e CPT, no limite de baixas energias.

Atualmente o MPE é uma teoria bem sucedida no que se refere a violação da invariância de Lorentz. Apesar do MPE possuir coeficientes que são responsáveis pela violação de simetria de Lorentz e CPT, a simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ é mantida, proporcionando a renormalização da teoria, bem como, conservando outras propriedades importantes [9].

O MPE se divide em duas seções, sendo elas mínimo e não-mínimo. A primeira apresenta apenas termos renormalizáveis com operadores de dimensão $d = 3$ ou $d = 4$, enquanto que, a segunda trata de operadores de dimensão $d \geq 5$, com termos não renormalizáveis. Alguns trabalhos foram feitos para verificar a ocorrência de certos efeitos que só ocorreriam com violação de invariância de Lorentz. É o caso de [10] que aborda o efeito da divisão de fótons no vácuo, onde, na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) convencional, um fóton tem amplitude zero de decaimento em múltiplos fótons em qualquer ordem de perturbação. Tal resultado foi mostrado em trabalhos de Schwinger sobre o método do tempo próprio e Ação de Euler-Heisenberg [11].

Os cálculos feitos nesta dissertação estão apresentados com o uso de unidades naturais, ou seja, consideramos aqui $\hbar = c = 1$, onde \hbar é proporcional a constante de Planck por $\frac{1}{2\pi}$, e c é a velocidade da luz no vácuo. A métrica $g_{\mu\nu}$ utilizada apresenta os seguintes elementos diagonais: $(+1, -1, -1, -1)$.

Esta dissertação tem o objetivo de estudar a ação de Euler-Heisenberg com violação de CPT-ímpar, através de um laço (loop) de quatro “pernas” de fótons, a partir do setor fermiônico da EDQ estendida, através do método de expansão derivativa nos momentos externos, assim como utilizando o método perturbativo no coeficiente constante b_μ . Com os resultados obtidos seremos capazes de discutir o efeito da divisão de fótons no vácuo, e

também algumas amplitudes de espalhamento, como fóton-fóton [12–14] e espalhamento Delbrück [15–17].

O capítulo 2 apresenta conceitos que explicam mais detalhadamente a transformação de CPT e Lorentz, assim a sua violação. O capítulo 3 trata das Equações de Maxwell e Equação de Dirac, que são fundamentais para o estudo de sistemas relativísticos, bem como, para a construção da lagrangiana da EDQ. Será apresentado ainda o MP no âmbito da EDQ convencional, e também se explanará acerca do MPE, definido como a extensão do MP com o uso da EDQ estendida. O capítulo 4 expõe os conceitos e os cálculos desenvolvidos na área do objeto de estudo abordado, no que concerne a correção radiativa com quebra da simetria de CPT-ímpar, expondo os resultados para o limite não colinear e colinear, encontrados com as devidas considerações. Por fim, no capítulo 5 são discutidas as conclusões desta dissertação e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Quebra das transformações de CPT e Lorentz

Neste capítulo apresentaremos a teoria das transformações de CPT e Lorentz, para assim abordarmos as transformações de observador e partícula. Mostraremos que campos elétrico e magnético se modificam com uma transformação de observador, e que existe quebra de simetria com a presença de um campo de fundo constante para o caso de uma transformação de partícula.

2.1 Simetria CPT

É acessível e difundida a ideia de simetria do tipo geométrico, envolvendo formas espaciais. Entretanto, o conceito é mais abrangente, pois existem a simetria no tempo, da paridade, entre outras. A matemática alemã Emmy Noether, em Göetingen, enunciou o teorema que foi batizado com seu nome. Esse teorema associa simetria e lei de conservação [3]. A translação espacial, por exemplo, implica na conservação da quantidade de movimento, enquanto que a invariância das leis físicas em relação ao tempo compreende a conservação da energia. Atualmente, busca-se compreender as transformações e leis de conservação associadas a elas. Dessa forma, existem simetrias físicas facilmente demonstráveis e visíveis, no entanto, há algumas mais complexas, tais como a simetria de calibre (gauge). A Eletrodinâmica Quântica como enunciada por Feynman e outros, têm simetria de gauge, na qual chega-se a todas as propriedades da interação eletromagnética, observando que uma dessas propriedades implica na ausência de massa nos fótons.

As interações nucleares Fraca e Forte também obedecem princípios de simetria, de

forma que estes orientam sua descrição, sendo essas forças também sujeitas a uma simetria de calibre [2]. O estudo das simetrias tem uma parte importante na ciência, uma vez que, existem três tipos de simetria de particular interesse, pois possuem intrínseca relação com a preferência da natureza pela matéria, em contrapartida a antimatéria. São:

1. Conjugação de carga (C): operando-se com a simetria C se transforma uma partícula em sua respectiva antipartícula, ou vice-versa, isto é, troca-se a carga elétrica da partícula, bem como, algumas outras propriedades semelhantes;
2. Paridade (P): é a simetria que muda os sinais das coordenadas, por exemplo, ao ser aplicada a uma partícula com *spin up*, este se torna *spin down* e vice-versa;
3. Reversão Temporal (T): a validade dessa simetria implica que as leis naturais não diferenciam processos que avançam ou retrocedem no tempo.

Ao longo dos anos, estudos [6, 7] construíram sólidos argumentos teóricos, e asseguram que o produto dessas três simetrias (CPT) deve ser obedecido, ou seja, ao serem aplicadas conjuntamente a uma partícula ou a um sistema físico, o resultado obtido será uma partícula existente na natureza, ou ainda outro processo inteiramente natural. Em suma, tudo que existe parece apresentar invariância à simetria CPT.

Pensava-se que essas três simetrias eram válidas isoladamente, mas em 1956, foi observado [18] que a paridade é violada em certos processos nucleares. E, posteriormente se verificou que a simetria C também era violada em casos específicos. Nesse contexto, Lev Landau² sugeriu que o conjunto C e P poderia ser invariante. Mostrou-se uma transformação hipotética de uma partícula chamada W^- em sua antipartícula W^+ , representada esquematicamente pela Fig. 2.1. Temos então as seguintes etapas para tal transformação:

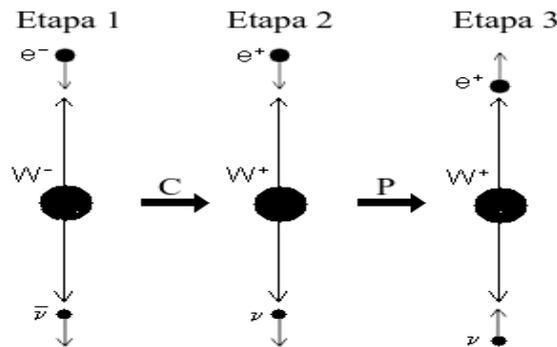
1. W^- decai em um elétron e^- e um antineutrino $\bar{\nu}$;
2. A simetria C inverte a carga das partículas;
3. A simetria P inverte os *spins* das partículas.

Nesse processo, elétron e antineutrino têm spin no sentido de seu movimento. Com a aplicação da simetria C ao decaimento observado, o elétron passa a ser pósitron e o antineutrino se torna neutrino. Visto que este segundo resultado não é observado na natureza, C sozinha não é válida. No entanto, ao se efetuar uma transformação P sobre o

²Físico soviético (1908-1968), com significativas contribuições em Teoria Quântica de Campos.

processo não-natural, é obtido um processo legítimo, observado naturalmente, onde, uma partícula W^+ decai em um pósitron com *spin* no sentido do movimento e um neutrino com *spin* oposto ao movimento.

Figura 2.1: Decaimento de W^- se convertendo em decaimento de W^+ após as transformações C e P .



Fonte: Próprio autor.

Diante do exposto, concluímos que em algumas situações o produto CP é válido, bem como, através dele, partículas se transformam naturalmente em antipartículas. Mas, para justificar a preferência da natureza pela matéria sobre a antimatéria, logo após o *Big Bang*, a simetria CP não pode ser regra, ou seja, deve ser violada em alguns processos naturais.

Surgiu então a necessidade e interesse em buscar processos que violassem a simetria CP , e em meados de 1964, físicos do acelerador de partículas de Brookhaven [19], detectaram um processo de partículas chamadas *kaons* que violavam a simetria CP , pois *antikaons* se convertem em *kaons* com menor frequência que o inverso.

Em [6] foi mostrado que existe a possibilidade de uma quebra espontânea de simetria CPT na natureza, de modo que tal quebra apareceria no nível da teoria efetiva de cordas, no limite de baixas energias. No sistema $K - \bar{K}$, pode haver violação CPT de uma parte em 10^{19} . É interessante que as diferenças entre teorias de campo de partículas e cordas são insuficientes para causar violação CPT dinâmica. Esta situação pode ser contrastada com modelos de teoria de partículas não-locais aparentemente mais simples, como certos multipletos autoconjugados de campos fermiônicos, que são conhecidos por violar CPT .

Ao se tratar de simetria CPT , é importante salientar que para uma comutatividade local fraca, toda violação desta simetria implica necessariamente em uma violação da invariância de Lorentz [20]. Entretanto, nem toda violação de Lorentz provoca uma quebra de simetria CPT .

2.2 Simetria de Lorentz

Há muito tempo se acredita que a Terra exerce um movimento translacional elíptico, tendo como um dos focos o Sol, e existem estrelas com movimentos de velocidade muito alta, entretanto, a velocidade da luz, proveniente de diferentes direções e de astros em movimento, não possui alteração em seu valor no vácuo, $c = 300.000\text{Km/s}$, atestado por estudos [21,22] em ótica e eletromagnetismo. Essa invariância na velocidade da luz demandava explicações alternativas ao modelo vigente (clássico), visto que acarretava concepções de espaço e tempo absolutos. Surgiu então a Teoria da Relatividade Restrita, que buscava conciliar conceitos da então mecânica dos corpos e da dinâmica do eletromagnetismo.

A relatividade restrita, publicada em 1905 por Albert Einstein³ [23], inicialmente tratava da eletrodinâmica dos corpos, onde se buscava reformulá-la para estar compatível com o princípio da relatividade, que propunha não existir referenciais inerciais preferenciais, pois as leis físicas que regem os fenômenos (naturais ou não) independem do referencial. Com este primeiro postulado, Einstein viabiliza o despontar da relatividade restrita que exprime uma condição de covariância, que seria para certa grandeza a forma de sua transformação devido a mudanças do referencial espaço-temporal.

2.2.1 A relatividade restrita e os fenômenos eletromagnéticos

No final do século XIX, a mecânica newtoniana e o Tratado sobre a Eletricidade e Magnetismo de Maxwell estavam em alta [24]. Na teoria de Newton, defendia-se o conceito de tempo absoluto e um sistema de observadores preferenciais, sendo estes conhecidos como inerciais. Neste período, uma das buscas em vigor era a de encontrar a velocidade relativa v da Terra e do éter (sistema de referência privilegiado), sendo a mais famosa experiência realizada, nesse sentido, de Michelson e Morley [25] em 1887.

Einstein observou que os fenômenos eletromagnéticos permaneciam os mesmos quando movimentos relativos eram invertidos, e em 1905 anunciou o princípio da relatividade afirmando que nenhuma experiência poderia distinguir um quadro inercial de outro e, portanto, que todas as leis físicas deveriam refletir essa invariância. Com base nos trabalhos até então desenvolvidos por Lorentz⁴, Einstein supôs que as equações de Maxwell eram invariantes na forma sob as transformações de Lorentz (conforme esperado pelo princípio

³Físico alemão, que viveu entre os anos de 1879 e 1955, cujos trabalhos renderam a Teoria Geral da Relatividade, bem como, a Relatividade Restrita, e ainda uma descrição matemática do Efeito Fotoelétrico.

⁴Físico neerlandês (1853-1928) que recebeu em 1902 o Nobel de Física por seu trabalho sobre as radiações eletromagnéticas.

da relatividade) para encontrar as relações entre os campos elétricos e magnéticos em dois quadros inerciais, derrubando de vez a ideia de referencial privilegiado.

Com essa desarmonia, era imprescindível surgir uma nova teoria que explicasse a eletrodinâmica dos corpos em movimento, conciliando o princípio da relatividade e a constância da velocidade da luz (propriedade fundamental da teoria eletromagnética de Maxwell e o segundo postulado da relatividade restrita). Relatividade e constância da velocidade da luz pareciam conciliáveis, porém, a lei da adição de velocidades de Galileu não poderia ser aplicada, uma vez que a velocidade era sempre definida como a relação da distância percorrida pelo tempo gasto, e se interrogava sobre a significação do espaço e tempo relacionados. Einstein então investigou a natureza do espaço e tempo, inspirado em reflexões de Henri Poincaré (1854-1912) e Ernst Mach (1838-1916). Emergiu a ideia de simultaneidade, o que levou ao sentido físico mais profundo de espaço e tempo. Percebeu-se então que fenômenos acontecem em tempo finito, e não instantaneamente, e a velocidade limite de processos físicos que ocorrem no universo é a rapidez de propagação da luz no vácuo, de forma que esta tem o mesmo valor para todos os observadores, qualquer que seja o movimento do observador ou da fonte.

As ideias de Einstein relacionadas a noção de tempo foram experimentadas em 1971 [26], quando relógios de césio foram postos em aviões a jato, e estes completaram a volta ao redor da Terra, em sentidos contrários, onde um foi para leste e o outro para oeste. Antes da decolagem os relógios foram ajustados a um terceiro relógio que ficou na Terra, e como resultado os relógios não coincidiam quando comparados ao relógio de controle deixado na Terra.

2.3 Transformações de Lorentz

Do abandono das leis de transformação de Galileu emergiu uma alternativa, que foi fazer uso das Transformações de Lorentz (TL), mantendo a equivalência entre referenciais em velocidades próximas a da luz, bem como, ao se tomar limites de baixas velocidades são recuperadas as transformadas de Galileu que funcionam perfeitamente para casos clássicos. Essas transformações são matematicamente expressas como

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.1)$$

$$y' = y, \quad (2.2)$$

$$z' = z, \quad (2.3)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right). \quad (2.4)$$

As equações (2.1) à (2.4) podem ser demonstradas através da equação de onda, de modo que a mantenha invariante ao ser aplicada uma transformação linear em x e t , o que será feito mais adiante.

A teoria da relatividade restrita é uma das teorias mais bem sucedidas atualmente, pois já passou por vários testes, e permanece satisfatória. Entretanto, teorias vem mostrando que há violação da simetria de Lorentz em um limite de altas energias. Kostelecký e Samuel [5, 6] apresentaram no final da década de 80 a existência de interações em teoria de cordas (altíssimas energias) que podem acarretar a quebra espontânea da simetria de Lorentz. Da impossibilidade de testar a quebra de simetria espontânea no limite de energia apresentado pela teoria de cordas surgiu o forte interesse nesse estudo em Teoria de Campos, que apresenta um limite de baixas energias de teorias fundamentais.

Em resumo, as transformações de Lorentz relacionam sistemas físicos com base no olhar de diferentes observadores inerciais, e essas transformações tornam as soluções das equações de Maxwell invariantes. Considerando a equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

que representa a equação de onda propagando-se, no vácuo, na direção x com velocidade c . Ao buscarmos transformações lineares que associam o sistema de coordenadas (x, t) a outro sistema (x', t') que se encontra em movimento, com velocidade v em relação ao primeiro sistema, obtemos

$$x' = \alpha x + \beta t, \quad (2.6)$$

$$t' = \lambda x + \delta t, \quad (2.7)$$

de forma que, para encontrar as constantes apresentadas nas Eqs. (2.6) e (2.7), é requerido um trabalho matemático envolvendo a Eq. (2.5), demonstrado no Apêndice A.

Ao serem encontradas as constantes, observa-se que em comparação as transformações de Galileu, temos

$$\frac{\beta}{\alpha} = -v, \quad (2.8)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma, \quad (2.9)$$

onde γ é conhecido como fator de Lorentz. Ressaltamos ainda que a transformação apresentada até aqui foi na direção do eixo x , de forma que o procedimento para os demais eixos é análogo.

Finalmente, as transformações apresentadas genericamente pelas Eqs. (2.6) e (2.7) passam a ser

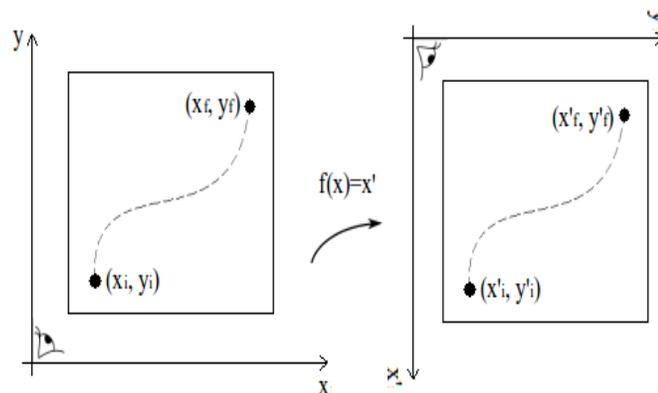
$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.10)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \quad (2.11)$$

2.3.1 Transformações de observador e partícula

Existem basicamente dois tipos de TL's, sendo elas as transformações passiva e ativa, como indica [27]. As passivas (TP), também conhecidas como transformações de coordenadas mudam o sistema de coordenadas, entretanto não alteram o local físico. Um exemplo prático seria de um observador que está em determinado laboratório analisando o movimento de uma partícula, supondo que este observador se desloque para outro ponto dentro do laboratório de maneira que o movimento da partícula não seja alterado, observe-se que a diferença quanto a descrição da trajetória reside no sistema de coordenadas, como mostrado na Fig. 2.2.

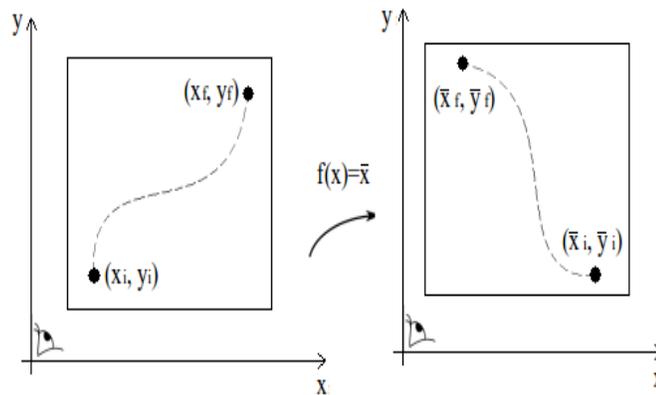
Figura 2.2: Observador analisando o movimento de uma partícula de dois pontos diferentes do laboratório.



Fonte: Calegari, 2017.

Já a transformação ativa (TA), conhecida também por transformação de ponto, mantém o conjunto de coordenadas, e desloca o sistema físico. Tal transformação pode ser exemplificada ao se usar o exemplo do laboratório, uma vez que se mantém o observador imóvel, e se move o laboratório inteiro, como ilustra a Fig. 2.3.

Figura 2.3: Observador analisando o movimento de uma partícula num mesmo sistema de coordenadas.



Fonte: Calegari, 2017.

Com o advento da teoria das cordas, é consenso para a comunidade científica que a simetria de Lorentz deve ser quebrada em escalas de energia da ordem do modelo padrão [4], ou seja, com o surgimento de campos vetoriais e/ou tensoriais de fundo, resultantes de processos de transição de fase, que provocam anisotropia na malha espaço-temporal, é selecionada uma direção preferencial no universo, e assim a correspondência entre transformações passiva e ativa é quebrada, tornando-se respectivamente transformações de observador e de partícula; esclareceremos melhor essa quebra de simetria na subseção 2.4.

2.4 Violação da invariância de Lorentz

A violação da invariância de Lorentz só acontece com a realização de uma TL de referencial ativa, na presença de um campo de fundo constante, o que implica em uma nova terminologia para a modificação de coordenadas no espaço-tempo, que são as transformações de observador e partícula [4]. Nesta subseção elucidamos a maneira que ocorre a quebra de simetria com a adição de um campo de fundo, neste caso gerado por um capacitor de placas paralelas, configurando-o como campo elétrico uniforme, de modo a se observar o movimento do elétron em meio a este campo. E será identificada a violação

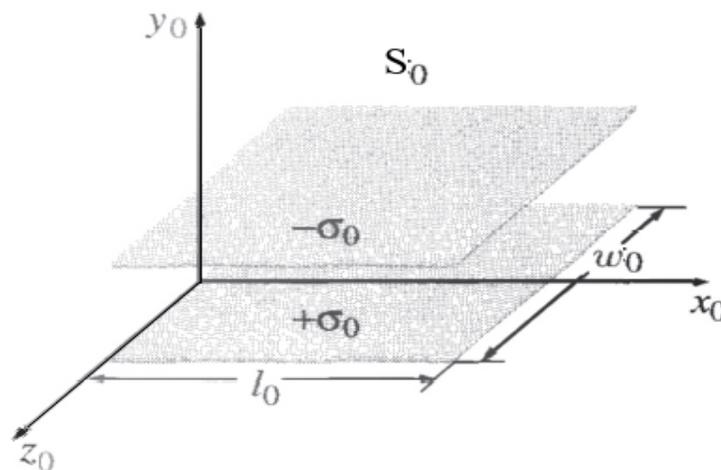
de equivalência na descrição do movimento por uma TL passiva ou ativa por meio da trajetória do elétron.

2.4.1 *Modificação de campos sob transformação de observador*

Partindo do fato de que a carga é invariante, ou seja, independe da velocidade na qual a partícula está se movendo, e supondo ainda que as transformações não dependem da origem dos campos, podemos conceber regras gerais de transformação.

Considerando então uma região entre duas placas paralelas, sendo estas de um capacitor; levando em conta que o capacitor esteja em repouso no sistema S_0 , e cujas placas possuem uma densidade superficial de cargas $\pm\sigma_0$, conforme representado pela Fig. 2.4, em [28].

Figura 2.4: Referencial inercial em repouso representando um capacitor de placas paralelas.



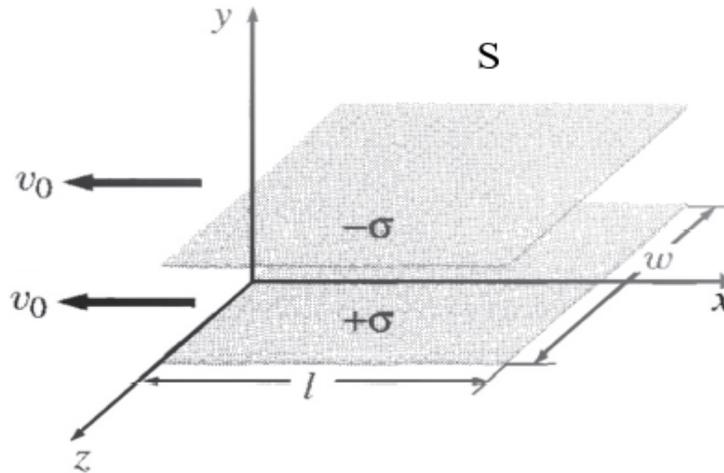
Fonte: Griffiths, 2007.

Assim, o campo elétrico na região entre as placas do capacitor da Fig. 2.4 é matematicamente representado por

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}, \quad (2.12)$$

demonstrada no Apêndice B. Pode-se ainda considerar o sistema S_0 movendo-se para a direita, que é equivalente a mover as placas para a esquerda com a mesma velocidade v_0 . Assim teremos um novo sistema a ser considerado, chamado de S e representado pela Fig. 2.5, [28].

Figura 2.5: Referencial S sofrendo um boost de velocidade para a direita.



Fonte: Griffiths, 2007.

No caso de altas velocidades, o campo elétrico entre as placas assume a forma

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}, \quad (2.13)$$

uma vez que, ao se movimentar em velocidades próximas a da luz, um corpo ou sistema se contrai na direção do movimento, ou seja, o fator de Lorentz relaciona l e l_0 , que são comprimentos mostrados nas Figs. 2.5 e 2.4 respectivamente, bem como, são representados matematicamente pela expressão abaixo, demonstrada no Apêndice C, dada por

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}. \quad (2.14)$$

Assim o valor superficial de carga sofre uma variação, conforme abaixo:

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0, \quad (2.15)$$

onde, $\gamma_0 = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, e dessa forma, $\vec{E}_\perp = \gamma_0 \vec{E}_{0\perp}$ e analogamente tem-se $\vec{E}_\parallel = \vec{E}_{0\parallel}$.

Podemos generalizar as equações de transformação (2.10) e (2.11) mostradas, visto que o ponto de partida agora será o sistema S mostrado na Fig. 2.5, que além do campo elétrico Eq. (2.13) há um campo magnético devido a densidade de corrente superficial

$\vec{K} = -\sigma v_0 \hat{x}$. Pela regra da mão direita, o campo magnético

$$B_z = -\mu_0 \sigma v_0, \quad (2.16)$$

aponta para o sentido negativo do eixo z , e sua magnitude é encontrada ao se fazer uso da lei de Ampère.

Introduzindo um sistema S' nesse contexto, deslocando-se para a direita com velocidade v em relação ao sistema S , por analogia determina-se os campos associados a S' , sendo eles dados por

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad (2.17)$$

$$B'_z = -\mu_0 \sigma' v', \quad (2.18)$$

onde v' é a velocidade de S' em relação ao referencial em repouso S_0 .

A representação matemática para v' assume a forma

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + \frac{vv_0}{c^2}}, \quad (2.19)$$

de forma que a densidade superficial, similar a (2.15) é

$$\sigma' = \gamma' \sigma_0, \quad (2.20)$$

com $\gamma' = \frac{1}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{1/2}}$.

Usando agora as Eqs. (2.15), (2.17) e (2.20) para escrevermos E' em termos de E , demonstrado no Apêndice D, obtemos

$$E'_y = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0}\right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.21)$$

podendo ser verificado que

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2}\right), \quad (2.22)$$

de modo que ao substituirmos (2.22) em (2.21) teremos

$$E'_y = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} B_z \right), \quad (2.23)$$

e, analogamente a Eq. (2.21) para o campo elétrico obtemos a Eq. (2.24) para o campo magnético, na forma

$$B'_z = - \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0} \right) \mu_0 \sigma v', \quad (2.24)$$

onde, semelhantemente, substituindo a Eq. (2.22) em Eq. (2.24) adquirimos

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \mu_0 \epsilon_0 v E_y \right). \quad (2.25)$$

Ao tratarmos de dois referenciais em movimento, encontramos as transformações generalizadas, tal que

$$\begin{cases} E'_x = E_x, \\ B'_x = B_x, \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} E'_z = \gamma(E_z + v B_y), \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z), \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} E'_y = \gamma(E_y - v B_z), \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y), \end{cases} \quad (2.28)$$

com $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$.

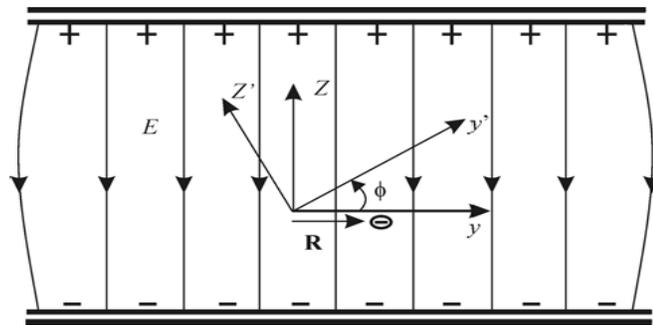
2.4.2 *Quebra da invariância de Lorentz através de uma rotação e de um boost*

Ao posicionarmos um elétron em um ponto P imerso em um campo de fundo originado por um capacitor de placas paralelas, e transferindo o cenário para os observadores no interior desse capacitor, com campo elétrico \vec{E} na direção z , de forma a caracterizar uma rotação do elétron de $\frac{\pi}{2}$ radianos, tendo como vetor posição inicial $\vec{R} = (0, a, 0)$, que é perpendicular ao campo, vemos uma transformação que relaciona o observador inicial com o outro o' .

Nessa situação, ambos os observadores tem opiniões coincidentes quanto ao fato de o vetor \vec{R} ser perpendicular ao campo elétrico \vec{E} , $\vec{R} \perp \vec{E}$.

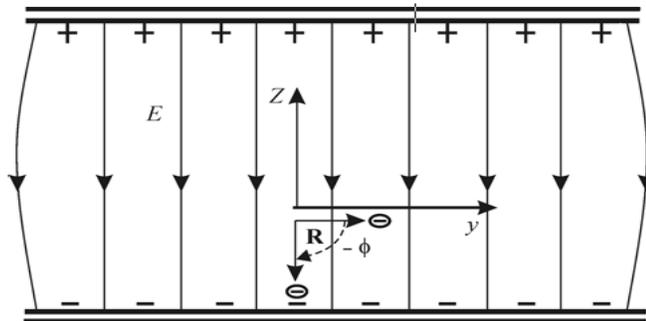
Mantendo o referencial o , conforme apresentado na Fig. 2.6, e realizando uma rotação ativa no elétron em um ângulo de $-\frac{\pi}{2}$, Fig. 2.7, constatamos que o vetor posição $\vec{R} = (0, 0, -a)$ torna-se agora paralelo ao campo \vec{E} , $\vec{R} \parallel \vec{E}$.

Figura 2.6: Rotação passiva de um ângulo $+\frac{\pi}{2}$ na presença de um campo de fundo.



Fonte: Belich et al., 2007.

Figura 2.7: Rotação ativa de um ângulo $-\frac{\pi}{2}$ na presença de um campo de fundo.



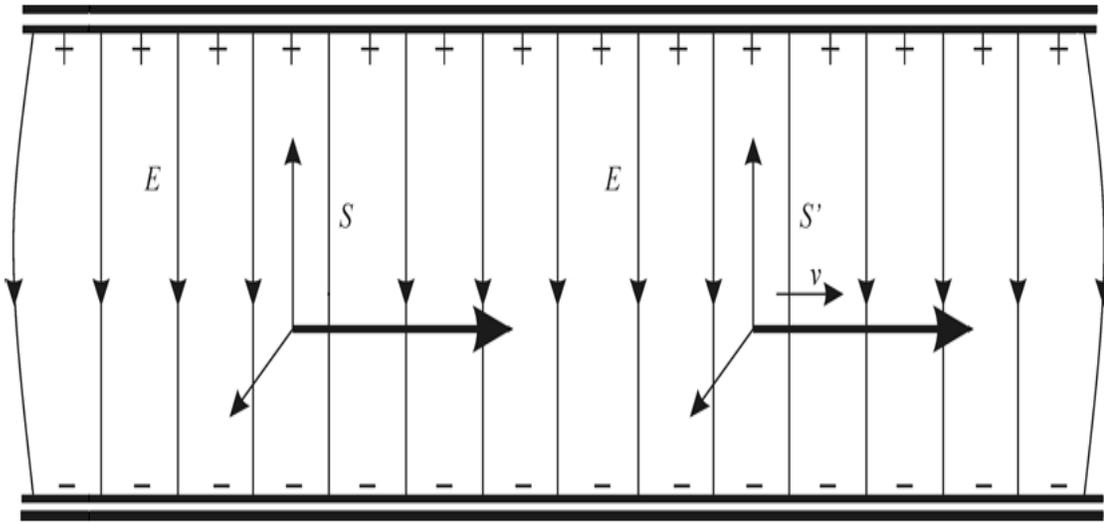
Fonte: Belich et al., 2007.

Ao serem realizadas as rotações passiva e ativa, respectivamente, chega-se a dois cenários distintos, onde na rotação passiva não se verifica quebra de simetria, enquanto que há uma quebra de simetria, com a presença do campo, na rotação ativa. Graças a isso, na década de 90 surgiram duas novas nomenclaturas para TL's [4], sendo estas de observador e de partícula, que representam respectivamente as transformações passiva e

ativa na presença de um campo de fundo, uma vez que a quebra de simetria de Lorentz só acontece na transformação de partícula.

Utilizando como um campo elétrico uniforme, vamos observar a modificação da expressão dos campos por transformação de observador. Colocando nossos referenciais inerciais S e S' imersos neste campo elétrico, de modo que S encontra-se em repouso em relação as placas, enquanto que S' se move paralelamente as placas, com uma velocidade \vec{v} perpendicular a direção do campo de fundo, como mostra a Fig. 2.8.

Figura 2.8: Sistema S' movendo-se com velocidade \vec{v} em relação ao sistema S que está em repouso, tendo como referência as placas paralelas.



Fonte: Belich et al., modificado pelo autor, 2018.

Mostrados os campos elétrico e magnético sob uma transformação de observador, Eqs. (2.26) à (2.28), podemos agora simplificar tais equações fazendo uso da notação vetorial, tal como

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}, \quad (2.29)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}\right)_{\perp}, \quad (2.30)$$

e, considerando o estado inicial, no qual o sistema S encontra-se em repouso, o campo

magnético é nulo, incorrendo na simplificação das Eqs. (2.29) e (2.30), da forma

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma \vec{E}, \quad (2.31)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = -\gamma \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (2.32)$$

Portanto, temos um novo campo elétrico e magnético, de modo que suas novas representações são totalmente transversos a velocidade. Ao nos movermos perpendicularmente a um campo elétrico estático uniforme, será notada uma redução do novo campo elétrico e o aparecimento de um campo magnético $\vec{B}'_{\perp} = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2}$.

Ao realizarmos uma transformação de partícula sobre o elétron, com as placas do capacitor em repouso, caracterizando o campo elétrico como um campo de fundo invariante, a transformação de partícula atua apenas nos pontos do espaço-tempo, onde somente o elétron se desloca com velocidade $-\vec{v}$ em relação as placas, então o campo elétrico de fundo não sofre modificação, diferente da transformação de observador, em que o campo é reduzido, surgindo ainda uma contribuição devida ao campo magnético.

Supondo um elétron se movendo paralelamente as placas do capacitor, com velocidade \vec{u} , levando em conta apenas a componente y do movimento, vemos que o observador S verá o elétron executando um movimento parabólico de queda, ou seja, sendo acelerado somente pelo campo elétrico, uma vez que S encontra-se em repouso, e portanto $\vec{B} = 0$.

Dessa forma, a força que o elétron sente é a força de Lorentz, dada pela equação $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$, e pelo princípio fundamental da dinâmica $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, obtemos

$$p = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2}} = Ft. \quad (2.33)$$

Sabendo que $p = 0$ quando $t = 0$, e ao isolarmos u_y a partir da Eq. (2.33) logramos

$$u_y = \frac{\left(\frac{Ft}{m}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}, \quad (2.34)$$

conforme mostrado no Apêndice E. Assim, para encontrarmos a posição do elétron na vertical basta que se integre a Eq. (2.34), substituindo $u_y = \frac{dy}{dt}$, de modo que

$$\int dy = \int \frac{\left(\frac{Ft}{m}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} dt, \quad (2.35)$$

obtendo por fim

$$y(t) = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} - 1 \right), \quad (2.36)$$

em que a Eq. (2.36), demonstrada no Apêndice E, representa uma hipérbole, o que difere do caso não relativístico representado por uma parábola.

Fazendo uma expansão em série de Taylor do termo $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2$, e substituindo-o na Eq. (2.36) temos

$$y(t) = \frac{F}{2m} t^2, \quad (2.37)$$

assim, o observador em S' avistará o elétron submetido a uma força \vec{F}' , descrita como

$$\vec{F}' = e\vec{E}' = e\gamma\vec{E}, \quad (2.38)$$

e de forma análoga ao procedimento mostrado acima, obtemos a posição vertical

$$y'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} y(t), \quad (2.39)$$

e o alcance do elétron, definido por

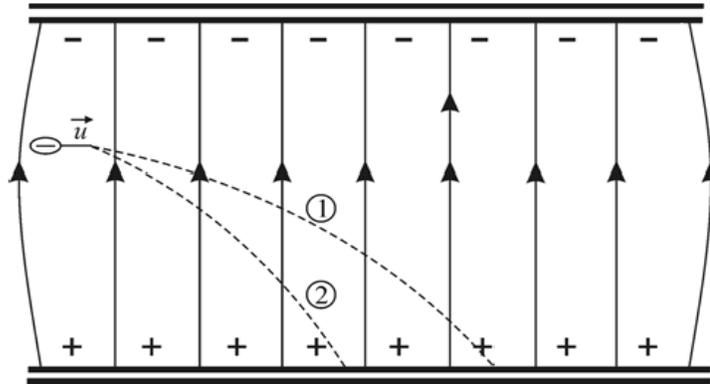
$$x'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x(t), \quad (2.40)$$

onde, é possível observar que no limite de baixas velocidades, $v \ll c$, o alcance do elétron representado pela Eq. (2.40) é coincidente tanto para o observador no sistema S quanto S' , ou seja, $A = x'(t) = x(t)$.

Analisando apenas o que é percebido pelo observador que se localiza no sistema de referência S , para as duas transformações, vemos que em uma transformação de partícula o elétron experimenta um *boost* dado pela velocidade de $-\vec{v}$, como discutido, e por consequência o observador o verá cair e obter o alcance $A = (\vec{u} - \vec{v})t_q$, sendo t_q o tempo de queda, visto na representação (2) da Fig. 2.9. E, para uma transformação de observador, caso anteriormente apresentado, o elétron move-se com velocidade \vec{u} , e seu alcance percebido pelo observador será maior que para a observação com transformação

de partícula, como pode ser visto esquematicamente em (1) da Fig. 2.9.

Figura 2.9: Trajetórias do elétron submetido a um campo de fundo: (1) velocidade inicial \vec{u} , para transformação de observador; (2) velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$, para transformação de partícula.



Fonte: Belich et al., 2007.

Vemos então que a presença de um campo de fundo, neste caso um campo elétrico constante causado pela diferença de potencial entre as placas paralelas, torna as duas transformações não correspondentes. Onde, através da transformação de observador o campo elétrico apresenta um comportamento covariante, portanto preserva a simetria de covariância de Lorentz, enquanto que sob transformação de partícula o campo elétrico fica inalterado, e o elétron sofre um boost instantâneo e seu alcance é reduzido. Assim, a simetria de Lorentz é quebrada apenas sob transformação de partícula, e espera-se que na natureza existam quadrivetores, como o que será trabalhado nessa dissertação, que quebram espontaneamente a simetria, como sugerem [29] e [30].

Capítulo 3

Eletrodinâmica quântica e a violação de Lorentz

A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) é a teoria responsável por realizar a quantização dos campos eletromagnéticos e fermiônicos, proporcionando fundamentação teórica para a análise entre as interações dos fótons e elétrons. Para o tratamento teórico e matemático dessa teoria é crucial conhecer as Equações de Maxwell, bem como, a Equação de Dirac, nas suas formas covariantes, uma vez que descrevem os campos eletromagnéticos e partículas de spin semi-inteiro, respectivamente.

Neste capítulo apresentaremos o Modelo Padrão, que é uma teoria que identifica as partículas básicas e especifica como elas interagem, ou seja, engloba a EDQ que se refere aos fótons e elétrons, bem como, trata ainda da cromodinâmica quântica (CDQ) que estuda os glúons e quarks. Com base no MP, discutiremos acerca do Modelo Padrão Estendido (MPE), que acrescenta a teoria do modelo padrão as quebras de simetria.

3.1 Equações de Maxwell

O primeiro postulado da Relatividade Restrita [23] diz que as leis físicas devem ser as mesmas para referenciais inerciais distintos. Dessa forma, as equações de Maxwell podem ser escritas na forma covariante, de modo que permaneçam as mesmas, ainda que os campos elétrico e magnético necessitem de correção quando observados em referenciais inerciais diferentes.

Partindo das Equações de Maxwell na forma diferencial, em unidades naturais,

temos

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde, ρ é a densidade de carga e \vec{j} representa a densidade de corrente.

Fazendo uso dos potenciais vetor \vec{A} e escalar ϕ , podemos reescrever os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} . Com base na equação de ausência de monopolo magnético, obtemos

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.2)$$

pois o divergente de um rotacional, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$, é zero.

Em posse das Eqs. (3.2) podemos calcular o campo elétrico inteiramente em termo dos potenciais, a partir da lei de Faraday, representada em (3.1). Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e, sabendo que o rotacional de um gradiente é zero, é viável tomarmos

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi,$$

uma vez que ϕ é o potencial escalar, implicando em

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Tomando as componentes x , y e z da Eq. (3.4) e definindo $\phi = A^0$, temos

$$E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0}$$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1 \\
&= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \\
&= F^{10},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e, de modo análogo

$$\begin{aligned}
E_2 &= \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 \\
&= F^{20},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

e

$$\begin{aligned}
E_3 &= \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 \\
&= F^{30},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

tal que, generalizando os resultados obtidos em (3.5), (3.6) e (3.7) podemos reescrever o campo elétrico \vec{E} da seguinte forma:

$$E_i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = F^{i0}. \tag{3.8}$$

Olhando agora para o campo magnético escrito em (3.2), e calculando suas componentes x , y e z , logramos

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \\
&= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\
&= -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 = F^{32},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e, analogamente

$$B_2 = -\partial^3 A^1 + \partial^1 A^3 = F^{13}, \tag{3.10}$$

e

$$B_3 = -\partial^1 A^2 + \partial^2 A^1 = F^{21}, \tag{3.11}$$

onde, genericamente temos

$$B_k = \partial^i A^j - \partial^j A^i = F^{ij}. \quad (3.12)$$

Das Eqs. (3.8) e (3.12) encontramos o tensor identidade do campo eletromagnético, representado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (3.13)$$

que, ao ser multiplicado por si, isto é, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, obtemos um termo escalar invariante de Lorentz da forma

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0i}F^{0i} + F_{j0}F^{j0} + F_{kl}F^{kl} + F_{no}F^{no} \\ &= E_i E^i + E_j E^j + B_m B^m + B_p B^p \\ &= -\vec{E}^2 - \vec{E}^2 + \vec{B}^2 + \vec{B}^2 \\ &= 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sendo conhecido o tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$, podemos encontrar a forma covariante para as equações de Maxwell. Utilizando inicialmente as leis de Gauss e de Ampère-Maxwell, de modo a encontrarmos as equações com fonte, temos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \rho \\ \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} &= \rho \\ \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= \rho \\ \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= j^0 \\ \partial_\mu F^{\mu 0} &= j^0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

uma vez que definimos $\rho = j^0$, e

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial B^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^1}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial B^2}{\partial x^1} - \frac{\partial B^1}{\partial x^2}\right)\hat{z} = (j^1, j^2, j^3) + \frac{\partial(E^1, E^2, E^3)}{\partial t}, \quad (3.16)$$

que implica em

$$\begin{cases} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = j^1, \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} = j^2, \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} = j^3, \end{cases} \quad (3.17)$$

de forma que, podemos escrever genericamente, a partir de (3.15) e (3.17), as equações de Maxwell com fonte, como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (3.18)$$

Para as equações de Maxwell sem fonte, ou seja, as leis de ausência de monopolo e de Faraday, temos cálculos análogos, que resultam em

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.19)$$

com $\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$ sendo o tensor dual. A diferença entre (3.18) e (3.19) incorre da impossibilidade de se contrair adequadamente as equações vetoriais na ausência de fonte, resultando na necessidade de se usar o tensor dual.

A lagrangiana referente as equações de Maxwell é conhecida como termo de Maxwell, ou ainda termo cinético e é representada como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

3.2 Equação de Dirac

Em Mecânica Quântica, a equação de Dirac é uma equação de onda semelhante a de Schrodinger, entretanto usada para casos relativísticos, proposta por Paul Dirac⁵, descrevendo com êxito partículas elementares de spin $\frac{1}{2}$, como o elétron.

Dirac assumiu que a Relatividade Especial associada com a Mecânica Quântica

⁵Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) nascido em Bristol, foi um físico teórico britânico, mais conhecido pela formulação da Equação que leva seu nome e descreve o comportamento do férmion, levando-o à prenuciar a antimatéria.

deveriam incorporar-se a uma equação de movimento, tal como de Schrödinger, contudo essa equação necessita ser de primeira ordem no tempo [31]. Assim, Dirac propôs aplicar a prescrição de quantização em uma expressão linearizada, dada por

$$E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2, \quad (3.21)$$

onde, para obtermos a expressão da energia relativística

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4, \quad (3.22)$$

basta que se encontre algumas condições que caracterizem os objetos $\vec{\alpha}$ e β .

Elevando ao quadrado a Eq. (3.21) temos

$$E^2 = \alpha_i p_i \alpha_j p_j c^2 + \alpha_i p_i \beta mc^3 + \beta \alpha_i p_i mc^3 + \beta^2 m^2 c^4, \quad (3.23)$$

que, reescrevendo o primeiro termo do segundo membro, alcançamos

$$\alpha_i p_i \alpha_j p_j c^2 = \frac{1}{2} \alpha_i p_i \alpha_j p_j c^2 + \frac{1}{2} \alpha_i p_i \alpha_j p_j c^2, \quad (3.24)$$

de forma que, trocando os índices $j \rightarrow i$ e $i \rightarrow j$ no segundo termo do segundo membro, o termo gerado é

$$\alpha_i p_i \alpha_j p_j c^2 = \frac{1}{2} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j = \frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j, \quad (3.25)$$

e, usando a Eq. (3.25) para reescrever a Eq. (3.23), encontramos

$$E^2 = \frac{1}{2} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j c^2 + \{\alpha_i, \beta\} p_i mc^3 + \beta^2 m^2 c^4, \quad (3.26)$$

visto que, para se manter a equivalência da Eq. (3.26) com a Eq. (3.22) (equação da energia relativística), é necessário que sejam definidos valores específicos para os anticomutadores $\{\alpha_i, \alpha_j\}$, $\{\alpha_i, \beta\}$ e para o termo β^2 , sendo tais valores, respectivamente, $2\delta_{ij}$, 0 e 1, mostrando assim, pela igualdade $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$ que $\alpha_i^2 = 1$.

Observando que os objetos α e β são matrizes, obtemos algumas propriedades, tais como

$$\beta^2 = 1 \implies \det(\beta^2) = \det(1) = 1, \quad (3.27)$$

podendo ser trabalhada matematicamente, restando

$$\det(\beta^2) = \det(\beta) \cdot \det(\beta) = 1,$$

que implica na igualdade

$$(\det(\beta))^2 = 1,$$

resultando em uma expressão para o determinante da matriz β , na forma

$$\det(\beta) = \pm 1, \tag{3.28}$$

e, de modo semelhante podemos obter o determinante de α_i , conforme abaixo:

$$\det(\alpha_i) = \pm 1. \tag{3.29}$$

A partir do cálculo do anticomutador $\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$, temos

$$\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i, \tag{3.30}$$

de maneira que, a Eq. (3.30) ao ser multiplicada por α_i pela esquerda, resulta em

$$\alpha_i^2\beta = -\alpha_i\beta\alpha_i \implies \beta = -\alpha_i\beta\alpha_i, \tag{3.31}$$

pois $\alpha_i^2 = 1$, e assim, calculando o traço de β , tal que

$$\begin{aligned} \text{tr}\beta &= -\text{tr}(\alpha_i\beta\alpha_i) \\ &= -\text{tr}(\alpha_i^2\beta) \\ \text{tr}\beta &= -\text{tr}(\beta), \end{aligned} \tag{3.32}$$

sendo este um resultado interessante, visto que um número igual ao seu negativo só pode ser zero, alcançamos então

$$\text{tr}\beta = 0. \tag{3.33}$$

Analisando novamente a Eq. (3.30) e multiplicando β pela esquerda logramos

$$\beta^2 \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta, \quad (3.34)$$

e sabendo que $\beta^2 = 1$, tomamos o traço de (3.34) implicando em

$$\text{tr} \alpha_i = -\text{tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\text{tr} \alpha_i, \quad (3.35)$$

uma vez que, como definido, estamos tratando a Eq. (3.21) como uma matriz, devendo esta ser hermitiana, bem como os objetos β e α_i , ou seja, $\beta^\dagger = \beta$ e $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$.

Escolhendo uma base na qual a matriz α_i seja diagonal, dada por

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & 0 & \\ 0 & 0 & a_3 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

e elevando membralmente ao quadrado a Eq. (3.36), segue que

$$\alpha_i^2 = 1 \implies \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2^2 & 0 & \\ 0 & 0 & a_3^2 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

assim $a_k^2 = 1$, o que pressupõe $a_k = \pm 1$. Isso também vem do fato de que $\det \alpha_i = \pm 1$.

Sabendo que $\text{tr} \alpha_i = 0$, vemos que a matriz α_i deve possuir dimensão par, pois a menor dimensão $N = 2$ não pode ser usada em $(3 + 1)$ dimensões, já que existem apenas três matrizes 2×2 que anticomutam, sendo estas as matrizes de Pauli.

Portanto, em $(3 + 1)$ dimensões, usamos matrizes de dimensão $N = 4$, onde, uma representação possível para as matrizes de Dirac é

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Usando agora a prescrição de quantização, $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$, na Eq. (3.21), e

aplicando-a em uma função ψ , temos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta mc^2 \psi, \quad (3.39)$$

que é a Equação de Dirac, em notação vetorial.

Para expressar a Eq. (3.39) em notação covariante, multiplicamos β pela esquerda, obtendo

$$i\hbar \beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \beta \alpha^i \partial_i \psi + \beta^2 mc^2 \psi, \quad (3.40)$$

que implica

$$i\beta \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \alpha^i \partial_i \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi,$$

de maneira que, definindo $\beta \rightarrow \gamma^0$, $\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \rightarrow \partial_0$ e $\beta \alpha^i \rightarrow \gamma^i$ resulta em

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_0 \psi &= -i\gamma^i \partial_i \psi + \frac{mc}{\hbar} \psi \\ i(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi &= 0 \\ \left(i\rlap{-}\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde, ao utilizarmos unidades naturais na Eq. (3.42), obtemos

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (3.43)$$

que é a Equação de Dirac, agora na forma covariante.

A lagrangiana para o setor fermiônico, conhecida como lagrangiana de Dirac é expressa como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi. \quad (3.44)$$

Um diferencial ao se usar a Equação de Dirac é que não se incorre em erro ao ser calculada a densidade de probabilidade de uma função, como mostrado em [32], pois essa

será positiva, tal que, após alguma manipulação algébrica é possível definir $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, conhecida como densidade de quadricorrente, onde, tomando apenas o índice $\mu = 0$, encontramos a densidade de corrente de probabilidade da forma

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi, \quad (3.45)$$

reformulada como

$$\begin{aligned} j^0 &= (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ &= \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por convenção adotamos $\psi_1^*\psi_1$ e $\psi_2^*\psi_2$ como as densidades correspondentes ao elétron, respectivamente para o spin $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, bem como, $\psi_3^*\psi_3$ e $\psi_4^*\psi_4$ representam as densidades do pósitron.

Por fim, observa-se que a Equação de Dirac (3.43) é bem comportada no que concerne a descrição do elétron, assim como a expressão gerada por meio dela trata da densidade de corrente de probabilidade corretamente, extinguindo a possibilidade desta ser negativa, e explicando ainda que a solução de energia negativa apenas prevê a antimatéria, ou seja, ao se trabalhar com o elétron e surgir um valor de energia negativa, significa que tal energia é correspondente ao pósitron.

3.3 Modelo padrão

A busca por unificação de teorias é uma tarefa humana secular. É atribuída a teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton (1642-1727) a primeira unificação, uma vez que mostrou fenômenos gravitacionais terrestres regidos pelo mesmo princípio que rege o movimento dos corpos celestes, ou seja, unificaram fenômenos sub e supralunares. Cerca de um século mais tarde Maxwell unificou a eletricidade e o magnetismo, alegando que ambos são faces de uma mesma moeda [33].

Da busca por unificar leis e princípios naturais surgiu o Modelo Padrão (MP), que pormenoriza as interações nucleares Fraca e Forte, bem como, trata da interação eletromagnética. Acredita-se que o MP é o limite de baixas energias de uma teoria fundamental, que

inclui em sua lista de tratamento e descrição a gravidade, situando-se portanto na escala de $10^{19} GeV$, sendo constituído pelo setor eletrofraco (unificação da força eletromagnética com a nuclear fraca) e pela cromodinâmica (interações nucleares fortes).

Atualmente conhecemos 12 bósons, sendo γ , W^+ , W^- e Z_0 pertencentes ao setor eletrofraco e a cromodinâmica conta com 8 glúons (g). Há ainda 12 férmions, compostos pelos léptons e , ν_e , μ , ν_μ , τ e ν_τ , e os quarks u , d , c , s , t e b , conforme [34].

A Teoria Quântica de Campos e as simetrias de gauge sustentam o MP [34]. A origem da conservação de simetrias se dá pela análise de diferentes potenciais capazes de descrever os mesmos campos eletromagnéticos, uma vez que tais potenciais estão conectados por um grupo de transformações contínuas gerando uma simetria, também contínua, $U(1)$ na lagrangiana padrão da EDQ.

Começamos pela teoria de um férmion livre, representada pela lagrangiana em (3.44). Buscamos que a teoria do férmion seja invariante sob transformações de calibre $U(1)$, da forma

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (3.47)$$

ou seja, se impõe invariância rotacional por fase local, onde α é uma função arbitrária de x .

Uma vez que (3.44) não é invariante sob transformações $U(1)$, podemos alcançar essa invariância se a teoria possuir um termo de interação com outro campo A^μ , tal como

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}A\psi, \quad (3.48)$$

com a seguinte transformação de calibre

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (3.49)$$

Para a completude da lagrangiana da EDQ resta-nos inserir o termo cinético do fóton, representado pela Eq. (3.20), de modo que, observando as equações (3.20), (3.44) e (3.48) satisfazemos as transformações (3.47), que impõe a invariância rotacional por fase local, e (3.49) que assegura a comutação $[\partial, e^{i\alpha(x)}] = 0$. Temos então

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}A\psi, \quad (3.50)$$

invariante.

Embora o modelo padrão possua simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, a Eq. (3.50) se

assemelha a sua lagrangiana, diferenciando-se apenas por algumas simetrias e estruturas internas. O MP é eficiente, no entanto não é uma teoria completa, tendo em vista sua incapacidade em explicar com praticidade a interação gravitacional.

3.4 Modelo padrão estendido

Em teorias mais fundamentais, ou seja, com maior fronteira de energia, verifica-se a quebra espontânea de simetria de Lorentz⁶, sendo este o ponto chave do surgimento do Modelo Padrão Estendido, que é o MP acrescido de previsões de quebra de simetria, seja de Lorentz ou CPT, com a finalidade de buscar teorias mais fundamentais, com escalas de energias alcançáveis experimentalmente.

No caso de um campo tensorial que contém índices de Lorentz, um valor esperado no vácuo diferente de zero implica em quebra de isotropia, que é equivalente a quebrar a transformação de Lorentz de partícula, como visto no capítulo 2.

Os termos com quebra de simetria, seja CPT-ímpar ou CPT-par, do MPE são invariantes de calibre e renormalizáveis; dessa forma os coeficientes responsáveis pela escala de violação de simetria são adimensionais, e de dimensão de massa $d = 1$, contraídos com operadores de dimensão de massa $d = 3$ e $d = 4$. Operadores não renormalizáveis de dimensão de massa $d \geq 5$ têm sido considerados na literatura [34]. Ainda que tais operadores não sejam renormalizáveis, possuem coeficientes de dimensão de massa $d \leq -1$, ou seja, podem ser suprimidos naturalmente pela massa de Planck.

Muitos limites experimentais tem sido atribuídos aos coeficientes do MPE, atualmente. Conectados a registros laboratoriais que envolvem hádrons e káons [35,36], prótons e nêutrons [37,38], elétrons [39–42], múons [43,44] e fótons [45–48].

3.5 Violação da invariância de Lorentz para férmions

Nesta seção, apresentaremos o modelo de quebra de simetria CPT, visto que, em mecânica quântica relativística em 4D, é fundamental o acoplamento de campos de fundo na lagrangiana convencional da EDQ, apresentada na Eq. (3.50), podemos adicionar tais campos às lagrangianas do férmion e fóton, obtendo

⁶Processo análogo ao de Higgs, onde um campo escalar obtém um valor esperado diferente de zero no vácuo, produzindo então massa para as partículas que o compõem e são descritas pelo MP.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} + \bar{\psi}(i\Gamma^\mu D_\mu - m')\psi \quad (3.51)$$

que é a lagrangiana completa da eletrodinâmica quântica, com

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \quad (3.52)$$

e

$$m' = m + a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \quad (3.53)$$

Sob certa redefinição spinorial, apenas $\bar{c}_{\mu\nu}$, $\bar{d}_{\mu\nu}$, $\tilde{g}_{\lambda\nu\mu}$, b_μ , e $H_{\mu\nu}$ sobrevivem, de maneira que a Eq. (3.51) pode ser reescrita.

Sabendo que a Equação de Dirac é modificada pela introdução desses termos, visto que a equação de onda relativística para a EDQ estendida possui termos que provocam a quebra das simetrias de Lorentz e CPT, as correções surgem tanto na massa do férmion quanto nas matrizes de Dirac, produzindo

$$(i\Gamma^\mu D_\mu - M)\psi = 0, \quad (3.54)$$

levando em conta que $iD_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$, $\Gamma_\nu = \gamma_\nu + c_{\mu\nu}\gamma^\mu + d_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma_5$ e $M = m + \phi + \not{b}\gamma_5 + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$, com $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, a_μ , b_μ e $H_{\mu\nu}$ os campos de fundo que propiciarão a quebra de simetria.

No setor fermiônico, cada um desses termos adicionais contém um parâmetro constante, com ordem de grandeza muito pequena, e tais parâmetros são os controladores das medidas de violação de simetria. Os termos CPT-ímpar, ou seja, que violam CPT e Lorentz estão contraídos aos termos extras a_μ e b_μ , enquanto que os termos $H_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$ violam apenas a simetria de Lorentz, ou seja, são CPT-par, o que não é objeto de estudo desse trabalho. Contudo, sob uma redefinição espinorial, os termos relacionados com o coeficiente a_μ são removidos da lagrangiana, e apenas os coeficientes $\bar{c}_{\mu\nu}$, $\bar{d}_{\mu\nu}$, bem como, b_μ e $H_{\mu\nu}$ sobrevivem.

Uma vez que, apenas o quadrivetor constante b_μ contribui para a quebra de simetria CPT-ímpar [9], podemos reescrever a lagrangiana da EDQ, tornando-a estendida, prevendo

a violação CPT-ímpar, como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M_b)\psi - e\bar{\psi}A\psi, \quad (3.55)$$

onde $M_b = m + b\gamma_5$.

Capítulo 4

Ação de Euler-Heisenberg com quebra de simetria CPT-ímpar

Neste capítulo, consideraremos correções radiativas de um loop da EDQ estendida, com violação de Lorentz e CPT, com o objetivo de discutir o problema específico de encontrar uma amplitude para o efeito da tripla divisão do fóton. Para isso, trabalharemos com $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial - M_b)\psi - e\bar{\psi}A\psi$, onde $M_b \equiv m + b\gamma_5$, sendo m a massa do campo fermiônico e b_μ uma constante quadrivetorial que controla a violação de Lorentz e CPT neste setor fermiônico. Veremos que a presença de b_μ irá afetar o efeito da divisão de fótons. Para essa análise utilizaremos o método da expansão derivativa, assim como discutiremos o limite não colinear e colinear.

4.1 Ação de Euler-Heisenberg

Dentre as propostas de eletrodinâmica não linear a ação de Euler-Heisenberg, descrita por

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_1(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + c_2(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2, \quad (4.1)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de acoplamento de dimensão de massa m^{-4} , conforme [49].

Esta teoria é uma das mais conhecidas, de modo que pormenoriza a dinâmica não linear de campos eletromagnéticos no vácuo, de forma que leva em conta a polarização no vácuo para um laço, além de caracterizar a propagação de fótons através de campos arbitrários que variam lentamente. Essa ação tem constituído abundantes investigações, em

contextos variados, nas últimas décadas [50–52]. Contudo, estudos referentes à violação de simetria de Lorentz, conforme já citado [7, 8], vem sendo executados até o momento, no que concerne a divisão de fótons [53–57].

A geração da ação de Euler-Heisenberg apresentada neste trabalho é de suma importância, visto que, possibilita calcular amplitudes de espalhamento específicas, tais como o espalhamento do fóton em um campo eletromagnético de um núcleo (espalhamento Delbrück), e a divisão de um fóton em um campo magnético intenso [58, 59]. Uma vez que estes experimentos possuem comprovação, temos a oportunidade de estimar numericamente os coeficientes de violação da simetria de Lorentz.

Recentemente, foi argumentado que o espalhamento fóton-fóton pode ser observado no grande colisor de Hádrons (Large Hadron Collider - LHC) [12], gerando a possibilidade de discutir interações não comutativas [60], entre outras, e por conseguinte efeitos de violação de Lorentz.

4.2 Ação efetiva

Com a intenção de estudarmos a ação de Euler-Heisenberg, no contexto de quebra da simetria de Lorentz, a densidade de lagrangiana deve conter os termos de Maxwell, de Dirac e de interação, sendo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - M_b)\psi - e\bar{\psi}A\psi, \quad (4.2)$$

em que, como visto anteriormente, $M_b \equiv m + \mathbf{b}\gamma_5$, $i\rlap{\not{D}} = i\gamma^\mu\partial_\mu = \rlap{\not{p}}$, $\mathbf{b} = \gamma^\mu b_\mu$ e $A = \gamma^\mu A_\mu$.

Observando o formalismo de integrais de trajetória, onde uma amplitude de espalhamento é calculada considerando todas as trajetórias possíveis no espaço de fase que a partícula pode tomar do estado inicial ao final, integramos o campo de férmion ψ na integral funcional a fim de obtermos a ação efetiva para o campo de calibre $A_\mu(x)$.

Definimos então o gerador funcional como

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi DA_\mu e^{iS}, \quad (4.3)$$

com

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (4.4)$$

Dessa forma, o gerador funcional em (4.3) pode ser reescrito explicitamente na forma

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi DA_\mu e^{i \int d^4x [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial - M_b)\psi - e\bar{\psi} \mathbb{A} \psi]}, \quad (4.5)$$

levando em conta que

$$Z = \int DA_\mu e^{i \int d^4x (-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})} Z_\psi, \quad (4.6)$$

onde

$$Z_\psi = \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi}(i\partial - e\mathbb{A} - M_b)\psi}. \quad (4.7)$$

O termo a ser calculado a partir de Z_ψ se assemelha a uma gaussiana, da forma

$$I = \int dx_1 \dots dx_n e^{-\left[\begin{array}{ccc} & & \\ \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} \end{array} \right]} \approx Det(A), \quad (4.8)$$

que implica em

$$Z = \int DA_\mu e^{i \int d^4x (-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})} Det(\not{p} - e\mathbb{A} - M_b), \quad (4.9)$$

uma vez que o argumento $(\not{p} - e\mathbb{A} - M_b)$ é propositalmente arranjado para ser uma matriz diagonal.

Reescrevendo $Det(A)$ temos

$$Det(A) = \prod_i a_i = \prod_i e^{\ln a_i} = e^{\sum_i \ln a_i} = e^{Tr \begin{pmatrix} \ln a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ln a_n \end{pmatrix}}, \quad (4.10)$$

de onde logramos que

$$Z = \int DA_\mu e^{i \int d^4x (-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})} e^{Tr[\ln(\not{p} - e\mathbb{A} - M_b)]}$$

$$= \int DA_\mu e^{iS_{Max}} e^{iS_{ef}}. \quad (4.11)$$

A partir de (4.11) temos

$$S_{ef} = -iTr \ln(\not{p} - e\mathbb{A} - M_b), \quad (4.12)$$

de modo que, reorganizando a expressão para a ação efetiva, obtemos

$$S_{ef} = -iTr \ln \left[(\not{p} - M_b) \left(1 - \frac{e\mathbb{A}}{\not{p} - M_b} \right) \right], \quad (4.13)$$

tal que, utilizando a propriedade de logaritmos $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ em (4.13), a ação efetiva de um loop $S_{ef}[b, A(x)]$ do campo de calibre $A(x)$ pode ser expressa na forma do seguinte traço funcional

$$\begin{aligned} S_{ef} &= -iTr \ln(\not{p} - M_b) - iTr \ln \left(1 - \frac{e\mathbb{A}}{\not{p} - M_b} \right) \\ &= S_{ef}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{ef}^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

O termo $S_{ef}^{(0)}$ não depende de A_μ , sendo assim, a dinâmica não trivial é concentrada somente no segundo termo $S_{ef}^{(n)}$, dado por

$$S'_{ef} = -iTr \ln(1 - S^b(p)e\mathbb{A}), \quad (4.15)$$

com

$$S^b(p) = \frac{1}{(\not{p} - M_b)}. \quad (4.16)$$

Fazendo uso da série de Taylor para o logaritmo natural (\ln), temos

$$\ln(1 - x) = \ln(1 + (-x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-x)^{n+1}, \quad (4.17)$$

e estabelecendo que $n \rightarrow n - 1$, adquirimos

$$\ln(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (4.18)$$

Por comparação entre as Eqs. (4.18) e (4.15), podemos concluir que

$$S'_{ef} = iTr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(S^b(p)e\mathbb{A})^n}{n}, \quad (4.19)$$

e assim, reescrevendo (4.19), a ação efetiva resultante é dada pela série de potência

$$S_{ef}^{(n)} = iTr \frac{(S^b(p)e\mathbb{A})^n}{n}. \quad (4.20)$$

Da ação efetiva podemos destacar as seguintes regras de Feynman [61–63]:

- O propagador do férmion

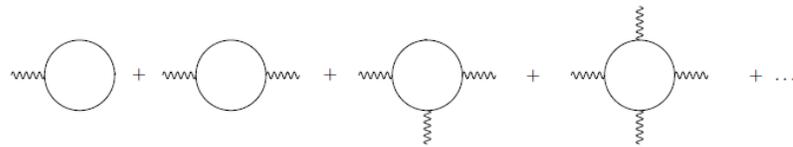
$$\longrightarrow = iS^b(p);$$

- O vértice férmion-fóton

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \uparrow \\ \longrightarrow \end{array} = -ie\gamma^\mu.$$

Logo, a expressão (4.20) pode ser representada por meio de uma construção em diagramas, como mostra a Fig. 4.1.

Figura 4.1: Representação em diagrama das ações efetivas de um loop.



Fonte: Próprio autor.

O cálculo para $n = 4$, com fundamento na Eq. (4.20), resulta na busca pelo termo de divisão tripla de fótons induzidos na ação efetiva, uma vez que expressa matematicamente um loop de quatro pernas de fótons, conforme ilustrado na Fig. 4.1, assim, calculamos $S_{ef}^{(4)}$, que resulta em

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(4)} &= iTr \frac{(S^b(p)e\mathbb{A})^4}{4} \\ &= i \frac{e^4}{4} Tr \sum [S^b(p)\mathbb{A}S^b(p)\mathbb{A}S^b(p)\mathbb{A}S^b(p)\mathbb{A}] \end{aligned}$$

$$= i \frac{e^4}{4} Tr \int d^4 x \langle x | S^b(p) A S^b(p) A S^b(p) A S^b(p) A | x \rangle. \quad (4.21)$$

Agora, aplicando a propriedade do método de expansão derivativa, observamos que funções de momento podem ser convertidas em quantidades que são dependentes das coordenadas, como $A(x)S(p) = [S(p - i\partial)A(x)]$, conforme mostrado em [53]. É importante salientar que a derivada parcial atua somente em $A(x)$.

Neste caso, a ação de contribuição de divisão de fótons torna-se

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(4)} &= i \frac{e^4}{4} Tr \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle x | S^b(p) \gamma^{\mu_1} S^b(p_1) \gamma^{\mu_2} S^b(p_{12}) \gamma^{\mu_3} S^b(p_{123}) \gamma^{\mu_4} | p \rangle \\ &\times \langle p | A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} | x \rangle \\ &= i \frac{e^4}{4} Tr \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^b(p) \gamma^{\mu_1} S^b(p_1) \gamma^{\mu_2} S^b(p_{12}) \gamma^{\mu_3} S^b(p_{123}) \gamma^{\mu_4} \\ &\times A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} \langle x | p \rangle \langle p | x \rangle \\ &= i \frac{e^4}{4} Tr \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^b(p) \gamma^{\mu_1} S^b(p_1) \gamma^{\mu_2} S^b(p_{12}) \gamma^{\mu_3} S^b(p_{123}) \gamma^{\mu_4} \\ &\times A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dado que o campo $A(x)$ pode ser escrito em termos dos momentos k 's, fazendo uso da transformada de Fourier, temos

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} A_\mu(k). \quad (4.23)$$

A ação efetiva $S_{ef}^{(4)}$ então, toma a forma

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(4)} &= i \frac{e^4}{4} \int d^4 x \int d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k_3 d^4 k_4 e^{-i(k_1+k_2+k_3+k_4) \cdot x} \\ &\times G_b^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} A_{\mu_1}(k_1) A_{\mu_2}(k_2) A_{\mu_3}(k_3) A_{\mu_4}(k_4), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$G_b^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S^b(p) \gamma^{\mu_1} S^b(p_1) \gamma^{\mu_2} S^b(p_{12}) \gamma^{\mu_3} S^b(p_{123}) \gamma^{\mu_4}, \quad (4.25)$$

com

$$S^b(p_i) = \frac{1}{(\not{p} - M_b - \not{k}_i)}, \quad (4.26)$$

sendo $p_1 = p + k_1$, $p_{12} = p + k_1 + k_2$ e $p_{123} = p + k_1 + k_2 + k_3$.

4.3 Divisão tripla de fótons

Como mostrado pela Eq. (4.25), a amplitude total do efeito da divisão tripla de fótons é

$$G_b^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^b(p) \gamma^{\mu_1} S^b(p_1) \gamma^{\mu_2} S^b(p_{12}) \gamma^{\mu_3} S^b(p_{123}) \gamma^{\mu_4},$$

e, nessa conformidade, reescrevemos a expressão (4.25) de acordo com a potência de b , e obtemos

$$G_b^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = G_{b_0}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{b_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{b_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \dots \quad (4.27)$$

Baseados na Eq. (4.27), considerando apenas os termos de ordem linear em b_μ , podemos reescrever G_{b_1} como a soma de contribuições CPT-ímpar finitas para a amplitude da divisão do fóton, tal como

$$G_{b_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{1}{3} H_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3) + \frac{1}{3} H_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_2, k_1, k_3) + \frac{1}{3} H_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_4, k_2, k_3), \quad (4.28)$$

em que H_1 pode ser representado por meio de contribuições menores, conforme

$$H_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3) + T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_2, k_3, k_4) + T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_3, k_4, k_1) + T_4^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_4, k_1, k_2), \quad (4.29)$$

assim como H_2 e H_3 podem ser reformulados em termos de T 's.

Calculamos então $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_4^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ usando a expressão

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A}, \quad (4.30)$$

como realizado em [64].

Encontramos assim as integrais para T_1, T_2, T_3 e T_4 , ao aplicarmos a Eq. (4.30) em (4.25), de modo que expandimos os $S^b(p_i)$, gerando

$$T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[S(p)\gamma_5 \not{b} S(p)\gamma^{\mu_1} S(p_1)\gamma^{\mu_2} S(p_{12})\gamma^{\mu_3} S(p_{123})\gamma^{\mu_4}], \quad (4.31)$$

$$T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[S(p)\gamma^{\mu_1} S(p_1)\gamma_5 \not{b} S(p_1)\gamma^{\mu_2} S(p_{12})\gamma^{\mu_3} S(p_{123})\gamma^{\mu_4}], \quad (4.32)$$

$$T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[S(p)\gamma^{\mu_1} S(p_1)\gamma^{\mu_2} S(p_{12})\gamma_5 \not{b} S(p_{12})\gamma^{\mu_3} S(p_{123})\gamma^{\mu_4}], \quad (4.33)$$

$$T_4^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[S(p)\gamma^{\mu_1} S(p_1)\gamma^{\mu_2} S(p_{12})\gamma^{\mu_3} S(p_{123})\gamma_5 \not{b} S(p_{123})\gamma^{\mu_4}], \quad (4.34)$$

tal que o símbolo Tr representa o traço sobre as matrizes de Dirac e $S(p) = \frac{1}{\not{p}-m}$.

Podemos obter $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_4^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ a partir de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, quando realizamos as mudanças $\mu_2 \leftrightarrow \mu_1$, $\mu_1 \leftrightarrow \mu_4$, $\mu_4 \leftrightarrow \mu_3$, $\mu_3 \leftrightarrow \mu_2$ e $k_1 \leftrightarrow k_2$, $k_2 \leftrightarrow k_3$, $k_3 \leftrightarrow k_4$, bem como, $\mu_3 \leftrightarrow \mu_1$, $\mu_4 \leftrightarrow \mu_2$ e $k_1 \leftrightarrow k_3$, $k_2 \leftrightarrow k_4$, e ainda $\mu_4 \leftrightarrow \mu_1$, $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$, $\mu_2 \leftrightarrow \mu_3$, $\mu_3 \leftrightarrow \mu_4$ e $k_1 \leftrightarrow k_4$, $k_2 \leftrightarrow k_1$, $k_3 \leftrightarrow k_2$ respectivamente, e aplicamos os devidos deslocamentos, sendo estes $p \rightarrow p + k_1$, $p \rightarrow p + k_1 + k_2$ e $p \rightarrow p + k_1 + k_2 + k_3$, de maneira tal que

$$T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3) = T_1^{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1}(k_2, k_3, k_4), \quad (4.35)$$

$$T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3) = T_1^{\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2}(k_3, k_4, k_1), \quad (4.36)$$

$$T_4^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3) = T_1^{\mu_4\mu_1\mu_2\mu_3}(k_4, k_1, k_2). \quad (4.37)$$

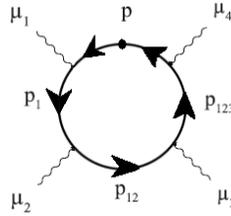
Dessa forma, precisamos calcular apenas $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ em (4.31), uma vez que os demais termos podem ser encontrados por permutação simples dos índices dos campos e

momentos. Obtemos então

$$\begin{aligned}
T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[\\
& \frac{1}{\not{p} + m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + m} \not{k}_1 \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_3} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_4} + \\
& \frac{1}{\not{p} + m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\not{p} + m} \not{k}_{12} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_3} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_4} + \\
& \frac{1}{\not{p} + m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_3} \frac{1}{\not{p} + m} \not{k}_{123} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_4}].
\end{aligned} \tag{4.38}$$

A expressão $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ pode ainda ser representada por meio de um diagrama de Feynman, conforme mostrado na Fig. 4.2, contemplando uma inserção de b_μ em um dos propagadores, simbolizada por um ponto escuro. Os demais T' s também possuem figuração diagramática, no entanto, não os apresentamos nesta dissertação.

Figura 4.2: Diagrama de Feynman referente a contribuição $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$.



Fonte: Próprio autor.

Fundamentados na Eq. (4.38), resolveremos o problema em duas partes, primeiramente trataremos do traço, e depois realizaremos a integração dos termos resultantes.

As integrações que faremos já são conhecidas, mostradas em [65], e possuem resoluções específicas, tais como

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{-m^2}\right)^{n - \frac{d}{2}}, \tag{4.39}$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p^2)^k}{(p^2 - m^2)^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2} - k\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(n)} \left(\frac{1}{-m^2}\right)^{n - \frac{d}{2} - k}, \tag{4.40}$$

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \frac{p^{\mu_1} p^{\mu_2} p^{\mu_3} \dots p^{\mu_j}}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{-m^2} \right)^{\alpha - \frac{n}{2} - \frac{j}{2}} T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_j}, \quad (4.41)$$

onde $T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_j} = (-1)^j \left[(2)^{-\frac{j}{2}} \sum_{perm} (g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} \dots g^{\mu_{j-1} \mu_j}) \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2} - \frac{j}{2}\right) \right]$.

Após calcularmos o traço de (4.38), detalhado no Apêndice F, faremos a integração sobre os momentos do primeiro termo entre colchetes da Eq. (4.38), com o propósito de exemplificar as operações realizadas, observando somente algumas das expressões que apresentam o produto $A_{\mu_1}(k_1)A_{\mu_2}(k_2)$.

Para a primeira contribuição, temos

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4i\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 m^6}{(p^2 - m^2)^6} = \\ & = 4i\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 m^6 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{4}{2}}} \frac{\Gamma\left(6 - \frac{4}{2}\right)}{\Gamma(6)} \left(\frac{1}{-m^2} \right)^{6 - \frac{4}{2}} \\ & = \frac{4i \cdot i \Gamma(4)}{16 \Gamma(6)} \frac{1}{\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 \\ & = -\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{16 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{1}{\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 \\ & = -\frac{1}{80\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sabendo que não é usual manter a notação de A 's contraídos, o resultado em (4.42) pode ser reescrito na forma:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{80\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 & = -\frac{1}{80\pi^2 m^2} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 b k_1} A_{\mu_1} A^{\mu_1} A_{\mu_3} A_{\mu_4} \\ & = -\frac{1}{80\pi^2 m^2} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 b k_1} A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} g^{\mu_1 \mu_2}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde consideramos por simplicidade, que $A_1 \cdot A_2 = A_{\mu_1}(k_1)A_{\mu_2}(k_2)g^{\mu_1 \mu_2}$ e $\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} = \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \nu} A_{\mu_3}(k_3)A_{\mu_4}(k_4)b_\nu k_{1\nu}$, resultando em

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4i\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 m^6}{(p^2 - m^2)^6} = -\frac{1}{80\pi^2 m^2} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \nu} b_\nu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_2} A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4}. \quad (4.44)$$

Continuando com as integrações propostas, temos ainda

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{8i\epsilon^{A_3 b k_1 p} A_1 \cdot A_2 A_4 \cdot p m^4}{(p^2 - m^2)^6} =$$

$$\begin{aligned}
&= 8i\epsilon^{A_3bk_1\alpha} A_4^\beta A_1 \cdot A_2 m^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^6} \\
&= 8i\epsilon^{A_3bk_1\alpha} A_4^\beta A_1 \cdot A_2 m^4 \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i\pi^{\frac{4}{2}}}{\Gamma(6)(-m^2)^{(6-\frac{4}{2})}} g_{\alpha\beta} \left(\frac{-m^2}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \Gamma\left(6 - \frac{2}{2} - \frac{4}{2}\right) \\
&= \frac{8}{16.2} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(6)} \frac{1}{\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 \\
&= \frac{1}{4} \frac{2.1}{5.4.3.2.1} \frac{1}{\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 \\
&= \frac{1}{240\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2, \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-12i)\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 p^2 m^4}{(p^2 - m^2)^6} = \\
&= -12i\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 m^4 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{4}{2}}} \frac{\Gamma\left(6 - \frac{4}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{4}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right) \Gamma(6)} \left(\frac{1}{-m^2}\right)^{6-\frac{4}{2}-1} \\
&= -\frac{12.2.1.2.1}{16.5.4.3.2.1} \frac{1}{\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 \\
&= -\frac{1}{40\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2, \tag{4.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{12i\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 p^4 m^2}{(p^2 - m^2)^6} = \\
&= 12i\epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 m^2 \frac{i}{(4\pi)^{\frac{4}{2}}} \frac{\Gamma\left(6 - \frac{4}{2} - 2\right) \Gamma\left(\frac{4}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right) \Gamma(6)} \left(\frac{1}{-m^2}\right)^{6-\frac{4}{2}-2} \\
&= -\frac{12.3.2.1}{16.5.4.3.2.1} \frac{1}{\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2 \\
&= -\frac{3}{80\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3 A_4 b k_1} A_1 \cdot A_2. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-32i)\epsilon^{A_3 A_4 b p} A_1 \cdot p A_2 \cdot p k_1 \cdot p m^2}{(p^2 - m^2)^6} = \\
&= -32im^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \epsilon^{A_3 A_4 b p} A_1^\alpha A_2^\beta k_1^\gamma \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma}{(p^2 - m^2)^6} = \\
&= -32i\epsilon^{A_3 A_4 b \delta} A_1^\alpha A_2^\beta k_1^\gamma m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta}{(p^2 - m^2)^6} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -32i\epsilon^{A_3A_4b\delta} A_1^\alpha A_2^\beta k_1^\gamma m^2 \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\pi^{\frac{4}{2}}}{\Gamma(6)(-m^2)^{6-\frac{4}{2}}} \cdot \\
&\cdot (g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \left(\frac{-m^2}{2}\right)^{\frac{4}{2}} \Gamma\left(6 - \frac{4}{2} - \frac{4}{2}\right) = \\
&= \frac{32}{16 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} \frac{\epsilon^{A_3A_4b\delta}}{\pi^2 m^2} (g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) = \\
&= \frac{1}{240\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3A_4b\delta} (A_1 \cdot A_2 k_{1\delta} + A_1 \cdot k_1 A_{2\delta} + A_2 \cdot k_1 A_{1\delta}) \\
&= \frac{1}{240\pi^2 m^2} (\epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot A_2 + \dots), \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Assim, somando todas as contribuições que apresentam o produto $A_{\mu_1}(k_1)A_{\mu_2}(k_2)$, obtemos

$$R = -\frac{1}{16\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot A_2, \tag{4.49}$$

que representa uma das contribuições que caracterizam a terça parte do resultado total de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$.

Realizando a operação de descontração dos A 's, b e k_1 , que estão no tensor de Levi-civita, encontramos

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{16\pi^2 m^2} \epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot A_2 \\
&= -\frac{1}{16\pi^2 m^2} \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\nu} b_\mu k_{1\nu} A_{\mu_1} A^{\mu_1} A_{\mu_3} A_{\mu_4} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2 m^2} g^{\mu_1\mu_2} \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\nu} b_\mu k_{1\nu} A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4}. \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Através do procedimento mostrado acima, podemos encontrar as demais contribuições referentes as outras permutações de tensores métricos, ou seja, que acompanham as quantidades $g^{\mu_1\mu_3}$, $g^{\mu_1\mu_4}$, $g^{\mu_2\mu_3}$, $g^{\mu_2\mu_4}$ e $g^{\mu_3\mu_4}$. O resultado de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ decorre de uma inserção de b_μ no propagador representado pelo diagrama usual de quatro pontos de um loop, como mostrado na Fig. 4.2. As demais contribuições possuem representações similares, com inserção de b_μ em diferentes propagadores de férmion e distinta topologia. Temos então

$$T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\left(\frac{1}{\pi^2 m^2}\right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1\mu_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_3} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_4} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_4} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_3} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_2 \mu_3} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_3} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_4} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_4} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_3 \mu_4} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_3 \mu_4} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_3 \mu_4} \right].
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Encontraremos agora T_2 efetuando as permutações de índices e momentos $\mu_2 \leftrightarrow \mu_1$, $\mu_1 \leftrightarrow \mu_4$, $\mu_4 \leftrightarrow \mu_3$, $\mu_3 \leftrightarrow \mu_2$ e $k_1 \leftrightarrow k_2$, $k_2 \leftrightarrow k_3$, $k_3 \leftrightarrow k_4$, bem como, empregando o deslocamento $p \rightarrow p + k_1$ fundamentados em $T_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$, produzindo

$$\begin{aligned}
T_2^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} & = \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_2} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_3} - \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_3} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_4} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_4} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_3} - \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_2 \mu_3} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_3} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_4} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_4} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_3 \mu_4} - \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_3 \mu_4} \right].
\end{aligned} \tag{4.52}$$

O cálculo de T_3 é realizado de forma análoga ao de T_2 , diferenciando-se fundamentalmente no que concerne as permutações a serem aplicadas, sendo estas, $\mu_3 \leftrightarrow \mu_1$, $\mu_4 \leftrightarrow \mu_2$ e $k_1 \leftrightarrow k_3$, $k_2 \leftrightarrow k_4$, assim como, usando o deslocamento $p \rightarrow p + k_1 + k_2$. Obtemos

$$\begin{aligned}
T_3^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} & = - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_2} - \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_2} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_3} - \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_3} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_4} - \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_4} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_3} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_3} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_4} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_4} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_3 \mu_4} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_3 \mu_4} \right]. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Tomando como base a Eq. (4.51), e realizando as devidas permutações, tais como $\mu_4 \leftrightarrow \mu_1$, $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$, $\mu_2 \leftrightarrow \mu_3$, $\mu_3 \leftrightarrow \mu_4$ e $k_1 \leftrightarrow k_4$, $k_2 \leftrightarrow k_1$, $k_3 \leftrightarrow k_2$ e também aplicando o deslocamento $p \rightarrow p + k_1 + k_2 + k_3$, alcançamos T_4 da forma

$$\begin{aligned}
T_4^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} & = - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_2} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_3} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_3} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_4} + \frac{1}{48} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_4} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_4} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_3} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_3} \right] \\
& - \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{48} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_4} + \frac{1}{16} \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_4} \right] \\
& + \left(\frac{1}{\pi^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_3 \mu_4} + \frac{1}{24} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_3 \mu_4} \right]. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Calculando agora $H_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$, conforme Eq. (4.29), temos

$$\begin{aligned}
H_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} & = - \left(\frac{1}{12\pi^2 m^2} \right) \left[\epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_2} + \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_2} \right. \\
& - \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_3} - 2\epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \rho} b_\mu k_{2\rho} g^{\mu_1 \mu_3} - \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_3} \\
& - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_1 \mu_4} - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_1 \mu_4} + \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_3} \\
& + \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_3} - \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_2 \mu_4} + \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_2 \mu_4} \\
& \left. + \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} b_\mu k_{1\nu} g^{\mu_3 \mu_4} + \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \lambda} b_\mu k_{3\lambda} g^{\mu_3 \mu_4} \right]. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

De modo que, expressando a primeira contribuição, representada pela Eq. (4.55),

no espaço das coordenadas por meio da transformada de Fourier inversa, obtemos

$$\begin{aligned}
S_{ef\frac{1}{3}} = & \frac{ie^4}{12} \int d^4x \left(-\frac{1}{12\pi^2 m^2} \right) [\epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\nu} b_\mu i \partial_\nu g^{\mu_1\mu_2} + \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\lambda} b_\mu i \partial_\lambda g^{\mu_1\mu_2} \\
& - \epsilon^{\mu_2\mu_4\mu\nu} b_\mu i \partial_\nu g^{\mu_1\mu_3} - 2\epsilon^{\mu_2\mu_4\mu\rho} b_\mu i \partial_\rho g^{\mu_1\mu_3} - \epsilon^{\mu_2\mu_4\mu\lambda} b_\mu i \partial_\lambda g^{\mu_1\mu_3} \\
& - \epsilon^{\mu_2\mu_3\mu\nu} b_\mu i \partial_\nu g^{\mu_1\mu_4} - \epsilon^{\mu_2\mu_3\mu\lambda} b_\mu i \partial_\lambda g^{\mu_1\mu_4} + \epsilon^{\mu_1\mu_4\mu\nu} b_\mu i \partial_\nu g^{\mu_2\mu_3} \\
& + \epsilon^{\mu_1\mu_4\mu\lambda} b_\mu i \partial_\lambda g^{\mu_2\mu_3} - \epsilon^{\mu_1\mu_3\mu\nu} b_\mu i \partial_\nu g^{\mu_2\mu_4} + \epsilon^{\mu_1\mu_3\mu\lambda} b_\mu i \partial_\lambda g^{\mu_2\mu_4} \\
& + \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu\nu} b_\mu i \partial_\nu g^{\mu_3\mu_4} + \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu\lambda} b_\mu i \partial_\lambda g^{\mu_3\mu_4}] A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4}, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

onde $S_{ef\frac{1}{3}}$ representa apenas a terça parte da ação efetiva total, observando a Eq. (4.28).

Atuando as derivadas parciais nos devidos A 's, a partir de (4.56) logramos

$$\begin{aligned}
S_{ef\frac{1}{3}} = & \frac{b_\mu e^4}{144\pi^2 m^2} \int d^4x [g^{\mu_1\mu_2} \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\nu} (\partial_\nu A_{\mu_1}) A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} + \\
& + g^{\mu_1\mu_2} \epsilon^{\mu_3\mu_4\mu\lambda} A_{\mu_1} A_{\mu_2} (\partial_\lambda A_{\mu_3}) A_{\mu_4} - g^{\mu_1\mu_3} \epsilon^{\mu_2\mu_4\mu\nu} (\partial_\nu A_{\mu_1}) A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} \\
& - 2g^{\mu_1\mu_3} \epsilon^{\mu_2\mu_4\mu\rho} A_{\mu_1} (\partial_\rho A_{\mu_2}) A_{\mu_3} A_{\mu_4} - g^{\mu_1\mu_3} \epsilon^{\mu_2\mu_4\mu\lambda} A_{\mu_1} A_{\mu_2} (\partial_\lambda A_{\mu_3}) A_{\mu_4} \\
& - g^{\mu_1\mu_4} \epsilon^{\mu_2\mu_3\mu\nu} (\partial_\nu A_{\mu_1}) A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} - g^{\mu_1\mu_4} \epsilon^{\mu_2\mu_3\mu\lambda} A_{\mu_1} A_{\mu_2} (\partial_\lambda A_{\mu_3}) A_{\mu_4} \\
& + g^{\mu_2\mu_3} \epsilon^{\mu_1\mu_4\mu\nu} (\partial_\nu A_{\mu_1}) A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} + g^{\mu_2\mu_3} \epsilon^{\mu_1\mu_4\mu\lambda} A_{\mu_1} A_{\mu_2} (\partial_\lambda A_{\mu_3}) A_{\mu_4} \\
& - g^{\mu_2\mu_4} \epsilon^{\mu_1\mu_3\mu\nu} (\partial_\nu A_{\mu_1}) A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} + g^{\mu_2\mu_4} \epsilon^{\mu_1\mu_3\mu\lambda} A_{\mu_1} A_{\mu_2} (\partial_\lambda A_{\mu_3}) A_{\mu_4} \\
& + g^{\mu_3\mu_4} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu\nu} (\partial_\nu A_{\mu_1}) A_{\mu_2} A_{\mu_3} A_{\mu_4} + g^{\mu_3\mu_4} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu\lambda} A_{\mu_1} A_{\mu_2} (\partial_\lambda A_{\mu_3}) A_{\mu_4}] \\
= & 0. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Em resumo, mostramos que na EDQ estendida, com violação de Lorentz e CPT, não há amplitude diferente de zero para o efeito da divisão tripla de fótons no caso não colinear, uma vez que utilizamos o método da expansão derivativa, bem como, consideramos apenas a primeira ordem de b e realizamos a permutação dos índices dos campos e momentos.

4.4 Limite colinear

Conforme [10, 50], a divisão tripla de fótons no vácuo possui uma cinemática intrínseca ao processo, pois para um fóton incidente com energia E_1 e momento \vec{k}_1 , o produto dessa divisão será de fótons com energia E_i e momentos \vec{k}_i , com $i = 2, 3, 4$ onde

pela conservação do momento, $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4$, ou seja,

$$|\vec{k}_1| \leq |\vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4|. \quad (4.58)$$

Assumindo que cada fóton possua um quadrimomento $k^\mu = (E, \vec{k})$, de modo que $k^\mu k_\mu = k^0 k_0 + k^i k_i = |k^0|^2 - |\vec{k}|^2 = 0$, com $E = |\vec{k}|$ satisfazendo a conservação de energia $E_1 = E_2 + E_3 + E_4$, a inequação apresentada em (4.58) estará em conformidade apenas para o caso em que os \vec{k}_i estiverem alinhados, sendo assim o fóton incidente e o produto gerado pelo seu espalhamento devem ser colineares; portanto os quadrimomentos dos fótons envolvidos são respectivamente ortogonais, $k_i^\mu k_{j\mu} = 0$, sendo proporcionais a algum k_0^μ que implica em $k_0^2 = 0$. Podemos escrever $k_i^\mu = k_i k_0^\mu$, de modo que $k_i^\mu k_{j\mu} = k_i k_j k_0^2 = 0$, em que k_i é agora um coeficiente escalar, em vez de quadrimomento.

Outro aspecto importante é a condição de transversalidade do quadri vetor de polarização do fóton, ϵ^μ , usualmente expresso como $\epsilon_{i\mu} k_i^\mu = k_i \epsilon_{i\mu} k_0^\mu = 0$, ou ainda, $A_\mu(k_i) k_i^\mu = 0$. Agregado a necessidade da colinearidade, há a premissa de que $\epsilon_{i\mu} k_j^\mu = k_j \epsilon_{i\mu} k_0^\mu = 0$.

Em [10] é mostrado o cálculo da divisão tripla de fótons que revela uma amplitude diferente de zero, onde para isso calculamos $G_{b1}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$, lembrando que $H_2^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = H_1^{\mu_2 \mu_1 \mu_3 \mu_4}(k_2, k_1, k_3)$ e $H_3^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = H_1^{\mu_4 \mu_2 \mu_3 \mu_1}(k_4, k_2, k_3)$. A prescrição de [10] mostra-nos que para o cálculo de G_{b1} serão permutados apenas os índices dos campos, não sendo alterados os momentos, ou seja, trocamos $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ e $\mu_1 \leftrightarrow \mu_4$, para obtermos $H_2^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$ e $H_3^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$ respectivamente, a partir de $H_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$. Levando em conta essas considerações, encontramos

$$\begin{aligned} H_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = & - \left(\frac{b_\mu k_{0\nu}}{12\pi^2 m^2} \right) [\epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu\nu} k_1 g^{\mu_1 \mu_2} + \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu\nu} k_3 g^{\mu_1 \mu_2} - \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu\nu} k_1 g^{\mu_1 \mu_3} \\ & - 2\epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu\nu} k_2 g^{\mu_1 \mu_3} - \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu\nu} k_3 g^{\mu_1 \mu_3} - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu\nu} k_1 g^{\mu_1 \mu_4} - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu\nu} k_3 g^{\mu_1 \mu_4} \\ & + \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu\nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_3} + \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu\nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_3} - \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu\nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_4} + \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu\nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_4} \\ & + \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu\nu} k_1 g^{\mu_3 \mu_4} + \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu\nu} k_3 g^{\mu_3 \mu_4}], \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} H_2^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = & - \left(\frac{b_\mu k_{0\nu}}{12\pi^2 m^2} \right) [\epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu\nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_1} + \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu\nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_1} - \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu\nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_3} \\ & - 2\epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu\nu} k_2 g^{\mu_2 \mu_3} - \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu\nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_3} - \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu\nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_4} - \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu\nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_4} \\ & + \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu\nu} k_1 g^{\mu_1 \mu_3} + \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu\nu} k_3 g^{\mu_1 \mu_3} - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu\nu} k_1 g^{\mu_1 \mu_4} + \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu\nu} k_3 g^{\mu_1 \mu_4} \end{aligned}$$

$$+ \epsilon^{\mu_2 \mu_1 \mu \nu} k_1 g^{\mu_3 \mu_4} + \epsilon^{\mu_2 \mu_1 \mu \nu} k_3 g^{\mu_3 \mu_4}], \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} H_3^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = & - \left(\frac{b_\mu k_{0\nu}}{12\pi^2 m^2} \right) [\epsilon^{\mu_3 \mu_1 \mu \nu} k_1 g^{\mu_4 \mu_2} + \epsilon^{\mu_3 \mu_1 \mu \nu} k_3 g^{\mu_4 \mu_2} - \epsilon^{\mu_2 \mu_1 \mu \nu} k_1 g^{\mu_4 \mu_3} \\ & - 2\epsilon^{\mu_2 \mu_1 \mu \nu} k_2 g^{\mu_4 \mu_3} - \epsilon^{\mu_2 \mu_1 \mu \nu} k_3 g^{\mu_4 \mu_3} - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} b_\mu k_1 g^{\mu_4 \mu_1} - \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} k_3 g^{\mu_4 \mu_1} \\ & + \epsilon^{\mu_4 \mu_1 \mu \nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_3} + \epsilon^{\mu_4 \mu_1 \mu \nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_3} - \epsilon^{\mu_4 \mu_3 \mu \nu} k_1 g^{\mu_2 \mu_1} + \epsilon^{\mu_4 \mu_3 \mu \nu} k_3 g^{\mu_2 \mu_1} \\ & + \epsilon^{\mu_4 \mu_2 \mu \nu} k_1 g^{\mu_3 \mu_1} + \epsilon^{\mu_4 \mu_2 \mu \nu} k_3 g^{\mu_3 \mu_1}]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Podemos então calcular G_{bl} aplicando (4.59), (4.60) e (4.61) na Eq. (4.28), resultando em

$$\begin{aligned} G_{bl}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \frac{1}{3} H_1 + \frac{1}{3} H_2 + \frac{1}{3} H_3 \\ &= \frac{1}{3} H_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \frac{1}{3} H_1^{\mu_2 \mu_1 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \frac{1}{3} H_1^{\mu_4 \mu_2 \mu_3 \mu_1}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &= \frac{b_\mu k_{0\nu}}{36\pi^2 m^2} [(-k_1 - k_3 - k_1 - k_3 + k_3 - k_1) \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \nu} g^{\mu_1 \mu_2} \\ &+ (k_1 + 2k_2 + k_3 - k_1 - k_3 + k_1 + k_3) \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} g^{\mu_1 \mu_3} \\ &+ (k_1 + k_3 + k_1 - k_3 + k_1 + k_3) \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} g^{\mu_1 \mu_4} \\ &+ (-k_1 - k_3 + k_1 + 2k_2 + k_3 + k_1 + k_3) \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} g^{\mu_2 \mu_3} \\ &+ (k_3 - k_1 + k_1 + k_3 + k_1 + k_3) \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} g^{\mu_2 \mu_4} \\ &(-k_1 - k_3 + k_1 + k_3 - k_1 - 2k_2 - k_3) \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} g^{\mu_3 \mu_4}], \end{aligned} \quad (4.62)$$

tal que, efetuando as devidas operações em (4.62) obtemos

$$\begin{aligned} G_{bl}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \frac{b_\mu k_{0\nu}}{36\pi^2 m^2} [-(3k_1 + k_3) \epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu \nu} g^{\mu_1 \mu_2} + (k_1 + 2k_2 + k_3) \epsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu \nu} g^{\mu_1 \mu_3} \\ &+ (3k_1 + k_3) \epsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu \nu} g^{\mu_1 \mu_4} + (k_1 + 2k_2 + k_3) \epsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu \nu} g^{\mu_2 \mu_3} + (3k_3 + k_1) \epsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu \nu} g^{\mu_2 \mu_4} \\ &- (k_1 + 2k_2 + k_3) \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu \nu} g^{\mu_3 \mu_4}]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

O resultado apresentado na Eq. (4.63) implica em uma contribuição diferente de zero, uma vez que ao tomarmos o limite colinear, perdemos informação dos momentos, e assim não é possível recuperar o resultado para o caso não colinear. A existência de amplitudes diferentes de zero no limite colinear basta para mostrar que o resultado de Schwinger [11] para a não divisão é alterado na presença de um campo que viole a simetria de Lorentz. A amplitude não-zero surge de termos invariantes de gauge na ação efetiva S_{ef}

para extensão da EDQ que comporta a violação de Lorentz.

Para o presente trabalho mostramos então que no limite não colinear a amplitude é zero, no que concerne a divisão tripla de fótons, resultado esse que está de acordo com o obtido por Schwinger [11], sem violação de simetria, e é diferente do resultado obtido por Kostelecky [10], uma vez que este usou o limite colinear, propiciando uma amplitude não nula. Acontece que, mostramos de acordo com a prescrição em [10] que não é possível analisar o limite não colinear no resultado do limite colinear.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas

O tema é abrangente e tem sido foco de estudo, pois modelos que compõe violação CPT-ímpar são o limite de baixas energias de teorias fundamentais, tais como a Teoria de Cordas. Estudamos a ação de Euler-Heisenberg no contexto de quebra de simetria de Lorentz e CPT, com a intenção de encontrarmos amplitudes zero para a divisão tripla de fótons.

Foi necessário o uso da EDQ estendida, especificamente no que concerne a correções radiativas provenientes do setor fermiônico, expandido por um termo derivativo que se caracteriza pelo coeficiente b_μ , responsável pela quebra de simetria do sistema em questão. Além disso, a partir do gerador funcional Z , foi utilizada a lagrangiana com o termo de quebra, para encontrarmos a expressão da ação efetiva para $n = 4$.

Após uma expansão até a primeira ordem no momento externo, obtivemos o resultado para a amplitude do efeito da divisão de fótons no vácuo. Ao levarmos em conta as permutações nos índices dos campos e dos momentos, logramos a anulação de todas as contribuições de ordem $\frac{1}{m^2}$, no caso não colinear. Alcançamos, ao utilizarmos a prescrição discutida em [10], para o caso colinear, um resultado diferente de zero, explicado pela perda de informação dos momentos. Portanto, ao contrário do que foi discutido em [10], o limite não colinear apresenta um resultado nulo para a amplitude da divisão tripla de fótons. Este é nosso principal resultado, apresentado nesta dissertação.

Uma perspectiva deste trabalho é efetuarmos o mesmo cálculo, usando a quinta ordem dos momentos, que implica na geração radiativa do termo de Chern-Simons de ordem superior [66], para verificar se os termos de ordem superior a $\frac{1}{m^2}$ se anulam. Ou ainda efetuarmos cálculos de estimativas numéricas para o coeficiente b_μ , o que proporcionaria avaliar efeitos extras provenientes deste coeficiente ao erro experimental de determinadas

amplitudes de espalhamento, tais como, fóton-fóton [12–14] e Delbrück [15–17], além da amplitude da divisão de fótons na presença de um campo magnético intenso [58, 59].

Referências Bibliográficas

- [1] F. Gieres, "About symmetries in physics", Proc. of the fifth Semin Rhodanien de Phys. (1997) 9754 [arXiv:hep-th/9712154].
- [2] D. J. Gross, "The role of symmetry in fundamental physics", Proc. Nat. Acad. of Sci. 93 (1996) 25 14256.
- [3] Y Kosmann-Schwarzbach, "The Noether Theorem", Springer, (2010) DOI: 10.1007/978-0-387-87868-3.
- [4] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos e M. T. D. Orlando, "Violação da Simetria de Lorentz", Rev. Bras. de Ens. de Fis., v. 29, n. 1, p. 57-64 (2007).
- [5] V. A. Kostelecky and S. Samuel, "Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory", Phys. Rev. D 39 (1989) 683.
- [6] V. A. Kostelecky and R. Potting, "CPT and strings", Nucl. Phys. B 359, 545 (1991).
- [7] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "CPT violation and the standard model", Phys. Rev. D 55 (1997) 6760 [arXiv:hep-ph/9703464].
- [8] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "Lorentz-violating extension of the standard model", Phys. Rev. D 58 (1998) 116002 [arXiv:hep-ph/9809521].
- [9] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, "One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics", Phys. Rev. D 65 (2002) 056006 [hep-th/0111123].
- [10] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, "Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics", Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 031801 [hep-ph/0212382].
- [11] J. S. Schwinger, "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization", Phys. Rev. 82, 664 (1951).

- [12] D. Dõenterria, G. G. Silveira “Observing light-by-light scattering at the Large Hadron Collider”, arXiv:1305.7142 [hep-ph].
- [13] Liang, Y. Czarnecki, A. ”Photon-photon scattering: a tutorial”, Canadian Journal of Physics, 2012, 90(1): 11-16, 10.1139/p11-144.
- [14] R. Karplus and M. Neuman, “The Scattering of Light by Light”, Phys. Rev. 83, 776 (1951).
- [15] G. Jarlskog, L. Joensson, S. Pruenster, H. D. Schulz, H. J. Willutzki, G. G. Winter, “Measurement of Delbruck Scattering and Observation of Photon Splitting at High Energies”, Phys. Rev. D 8, 3813-3823 (1973).
- [16] A. I. Milstein, M. Schumacher “Present status of Delbruck scattering”, Phys. Rept. 243, 183 (1994).
- [17] Sh. Zh. Akhmadaliev et al, “Delbruck scattering at energies of 140-450 MeV”, Phys. Rev. C 58, 2844 (1998).
- [18] T. D. Lee, C. N. Yang, "Question of Parity Conservation in Weak Interactions", Phys. Rev. 106 (1957) 1371.
- [19] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay "Evidence for the 2π decay of the K_2^0 meson", Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964).
- [20] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. 89, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [21] T. G. Blaney et al, "Measurement of the speed of light II. Wavelength measurements and conclusion", Proc. R. Soc. Lond. A (1977) 355, 89-114.
- [22] S. Mak, D. Yip, "The measurement of the speed of light using a laser pointer", Phys. Educ. 35 95 (2000).
- [23] A. Einstein, "On the Electrodynamics of Moving Bodies", Annalen der Physik 17 (1905): 891-921.
- [24] G. Hall, "Maxwell’s electromagnetic theory and special relativity"Phil. Trans. R. Soc. A (2008) 366 1849-1860.
- [25] A. A. Michelson and E. W. Morley, "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether", Am. Jour. of Sci. 3 ed. v. 34 (1887) 203.

- [26] J. C. Hafele, R. E. Keating, "Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains", *Science, New Series*, 177 (1972) 4044, 166-168.
- [27] S. Calegari "Invariância Conforme na Física", dissertação de mestrado, UFSC (2017).
- [28] D. J. Griffiths "Introduction to Electrodynamics", 3 Ed. New Jersey, EUA: Prentice Hall, Inc. (1999) 576 p.
- [29] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, "Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics", *Phys. Rev. D* 41 (1990) 1231.
- [30] S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* 59, 116008 (1999).
- [31] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the electron", *Proc. R. Soc. Lond. A* (1928) 117 610-624.
- [32] W. Greiner, "Relativistic Quantum Mechanics: Wave equation", 3 Ed. Berlin, Germany: Springer (2000) 424 p.
- [33] AccessScience Editors, "Unification Theories and a Theory of Everything," McGraw-Hill Education (2014), DOI: 10.1036/1097-8542.BR0814141.
- [34] J. Furtado, "Ação de Euler-Heisenberg no Contexto de Violação de Simetria de Lorentz", dissertação de mestrado, UFAL (2013).
- [35] P. Massarotti, "Recent results from KLOE", *Nuovo Cim. B* 123, 840 (2008).
- [36] A. Di Domenico et al. [KLOE Collaboration], "Search for CPT violation and decoherence effects in the neutral kaon system", *J. Phys. Conf. Ser.* 171, 012008 (2009).
- [37] V. A. Kostelecky, C. D. Lane, "Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments", *Phys Rev. D* 60 116010 (1999).
- [38] R. Bluhm et al, "Clock-Comparison Tests of Lorentz and CPT Symmetry in Space", *Phys. Rev. Lett.* 88 090801 (2002).
- [39] H. Dehmelt et al. "Past Electron-Positron g-2 Experiments Yielded Sharpest Bound on CPT Violation for Point Particles", *Phys. Rev. Lett.* 83, 4694 (1999).
- [40] R. Mittleman et al. "Bound on CPT and Lorentz Symmetry with a Trapped Electron", *Phys. Rev. Lett.* 83, 2116 (1999).

- [41] G. Gabrielse et al. "Precision Mass Spectroscopy of the Antiproton and Proton Using Simultaneously Trapped Particles", Phys. Rev. Lett. 82, 3198 (1999).
- [42] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen", Phys. Rev. Lett. 82, 2254 (1999).
- [43] V.W. Hughes et al. "Test of CPT and Lorentz Invariance from Muonium Spectroscopy", Phys. Rev. Lett. 87, 111804 (2001).
- [44] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests with Muons", Phys. Rev. Lett. 84, 1098 (2000).
- [45] H. Muller, P. L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger and E. Kovalchuk et al., "Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments", Phys. Rev. Lett. 99, 050401 (2007) [arXiv:0706.2031 [physics.class-ph]].
- [46] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk and C. Novotny et al., "Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities", Nature Phys. 3, 861 (2007).
- [47] S. R. Parker, M. Mewes, P. L. Stanwix and M. E. Tobar, "Cavity Bounds on Higher-Order Lorentz-Violating Coefficients", Phys. Rev. Lett. 106, 180401 (2011) [arXiv:1102.0081 [hep-ph]].
- [48] F. Baynes, A. Luiten and M. Tobar, "Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator," Phys. Rev. D 84, 081101 (2011) [arXiv:1108.5414 [grqc]].
- [49] F. Přeučil, J. Hořejší, "Effective Euler-Heisenberg Lagrangians in models of QED", (2017) [arXiv:1707.08106 [hep-ph]].
- [50] J. Furtado, T. Mariz, "Lorentz-violating Euler-Heisenberg effective action", Phys. Rev. D 89, 025021 (2014).
- [51] G. V. Dunne, In *Shifman, M. (ed.) et al.: From Field to Strings, vol. 1* 445-522 [hep-th/0406216].
- [52] G. V. Dunne, "The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 years on", Int. J. Mod. Phys. A 27, 1260004 (2012) [arXiv: 1202.1557 [hep-th]].

- [53] F. A. Brito, E. Passos, P. V. Santos, "On the effective action of the vacuum photon splitting in Lorentz-violating QED", *Europhys. Lett.* 95, 51001 (2011) [arXiv: 1101.5390[hep-th]].
- [54] T. Jacobson, S. Liberati e D. Mattingly "Threshold effects and Planck scale Lorentz violation: Combined constraints from high energy astrophysics", *Phys. Rev. D* 67, 124011 (2003) [hep-ph/0209264].
- [55] C. Adam, F. R. Klinkhamer, "Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics", *Nucl. Phys. B* 657, 214 (2003) [hep-th/0212028].
- [56] G. Gelmini, S. Nussinov, C. E. Yaguna, *JCAP* 0506, 012 (2005) [hep-th/0503130].
- [57] C. Kaufhold, F. R. Klinkhamer. *Nucl. Phys. B* 734, 1(2006) [hep-th/0508074].
- [58] S. L. Adler "constant magnetic field of arbitrary strength", *Annals Phys.* 67, 599 (1971).
- [59] S. L. Adler, C. Schubert "Photon Splitting in a Strong Magnetic Field: Recalculation and Comparison with Previous Calculations", *Phys. Rev. Lett.* 77, 1695 (1996).
- [60] J. L. Hewett, F. J. Petriello, T. G. Rizzo "Signals for noncommutative interactions at linear colliders", *Phys. Rev. D* 64, 075012 (2001).
- [61] W. Greiner, J. Reinhardt, "Quantum Electrodynamics", 3 Ed. Frankfurt, Germany: Springer (2002) 475 p.
- [62] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, "An Introduction To Quantum Field Theory", Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [63] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p.
- [64] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, "Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics", *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 3572 [hep-ph/9901358].
- [65] M. Kaku, "Quantum Field Theory: A Modern Introduction", Oxford Univ. Pr., USA: (1993) 808p.
- [66] F. T. Brandt, A. Das and J. Frenkel, "Parity-violating electromagnetic interactions in QED_3 at finite temperature", *Phys.Rev. D* 62 085012 (2000).

- [67] G. V. Dunne, LHSUMMER, v. 69(1999) [arXiv:hep-th/9902115].
- [68] R. Jackiw, S. Y. Pi, Phys. Rev. D 68, 104012 (2003)
- [69] R. C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. 90, 211601 (2003) [hep-ph/0301124].
- [70] T. Mariz, Phys. Rev. D 83, 045018 (2011) [arXiv:1010.5013 [hep-th]].
- [71] L. Qiongui, Comm. in Theor. Phys 30 2 249 (1998).
- [72] Rubtsov, G. Satunin P. Sibiryakov, S "On calculation of cross sections in Lorentz violating theories", Physical Review D, vol. 86, Issue 8, id. 085012.
- [73] V.A. Kostelecky, ed., CPT and Lorentz Symmetry, World Scientific, Singapore, 1999.
- [74] V.A. Kostelecky, ed., CPT and Lorentz Symmetry II, World Scientific, Singapore, 2002.
- [75] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, "Non-commutative field theory and Lorentz violation", Phys. Rev. Lett. 87, 141601 (2001) [hep-th/0105082].
- [76] D. Bailin, A. Love "Introduction to gauge field theory", Ed. University of Sussex Press.
- [77] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D 80, 015020 (2009) [arXiv:0905.0031 [hep-ph]].
- [78] A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D 85, 096005 (2012) [arXiv:1112.6395 [hep-ph]].
- [79] V. A. Kostelecky and N. Russell, Rev. Mod. Phys. 83, 11 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [80] M. I. Katsnelson, G. E. Volovik "Quantum electrodynamics with anisotropic scaling: Heisenberg-Euler action and Schwinger pair production in the bilayer graphene", JETP Letters (2012), Volume 95, Issue 8, pp 411-415.
- [81] J. Leite, "Violação da Invariância de Lorentz no Regime de Temperatura Finita", dissertação de mestrado, UFAL (2012).

- [82] Huet, Y. Traubenberg, M.R, Schubert, C. "The Euler-Heisenberg Lagrangian Beyond one loop", International Journal of Modern Physics: Conference Series Vol. 14 (2012) 383-393.
- [83] U. D. Jentschura, H. Gies, S. R. Valluri, D. R. Lamm, and E. J. Weniger "QED Effective Action Revisited", Canadian Journal of Physics, 2002, 80(3): 267-284, 10.1139/p01-139.
- [84] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, "Lorentz and CPT symmetries in commutative and noncommutative space-time", J. Phys. A A 36, 4937 (2003) [hep-th/0303122].
- [85] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, "On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms", arXiv:1111.0198 [hep-th].
- [86] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, "Stability, causality, and Lorentz and CPT violation", Phys. Rev. D 63 (2001) 065008 [hep-th/0012060].
- [87] Z. Bialynicka-Birula, I. Bialynicki-Birula, "Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field", Phys. Rev. D 10, 2341 (1970).

Apêndice A

Transformações lineares que resultam em transformações de Lorentz.

Tomando

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (\text{A.2})$$

e levando em conta as Eqs. 2.6 e 2.7 temos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} + \lambda \frac{\partial}{\partial t'} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial x'} + \delta \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (\text{A.4})$$

Calculando agora a derivada de segunda ordem das equações acima, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \delta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (\text{A.6})$$

onde, reorganizando estas equações por meio da substituição das Eqs. A.3 e A.4, segue-se que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\beta\delta \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \quad (\text{A.8})$$

Utilizando a Eq. (2.5), podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (\text{A.9})$$

de forma que, ao substituir as Eqs. (A.7) e (A.8) na Eq. (A.9), é obtida a seguinte relação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi = \left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2\alpha\lambda \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\beta^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2\beta\delta}{c^2} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\delta^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi,$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi = \left[\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \left(2\alpha\lambda - \frac{2\beta\delta}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t'} + \left(\lambda^2 - \frac{\delta^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \psi, \quad (\text{A.10})$$

que, por comparação entre os membros da Eq. (A.10), o resultado é

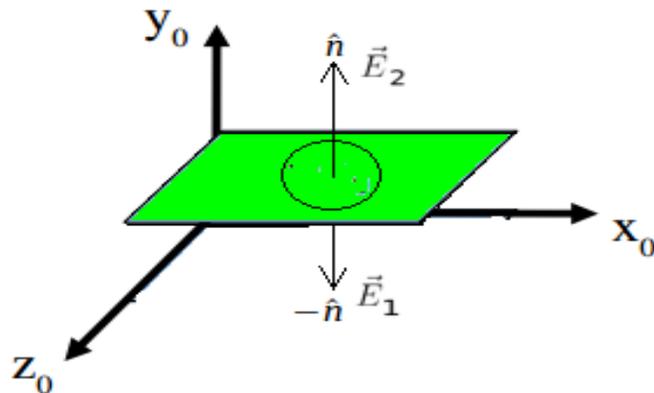
$$\begin{cases} \alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} = 1, \\ \alpha = \delta, \\ c^2 \frac{\lambda}{\beta} = 1. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Demonstração do campo elétrico entre duas placas paralelas.

Tomando apenas uma das placas, e traçando uma superfície gaussiana na mesma, vemos na Fig. B.1 que existe uma descontinuidade superficial.

Figura B.1: Representação de uma superfície gaussiana em uma placa.



Fonte: Próprio autor.

Pela Lei de Gauss,

$$\int (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (\text{B.1})$$

de forma que, para campos uniformes, alcançamos

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} S = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}. \quad (\text{B.2})$$

Levando em conta que a placa possui uma dimensão considerável, temos que $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1 = \vec{E}$, assim

$$2|\vec{E}| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad (\text{B.3})$$

o que resulta em

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{n}. \quad (\text{B.4})$$

Sabendo que são duas placas, basta somarmos os campos resultantes de cada placa, que implica em

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}, \quad (\text{B.5})$$

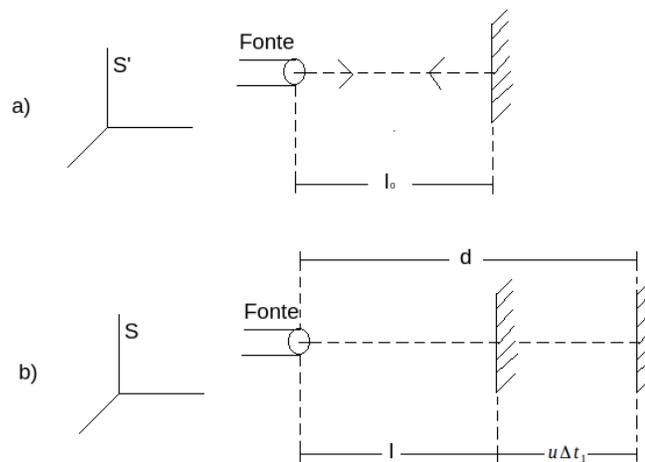
com $\hat{n} = \hat{y}$.

Apêndice C

Contração espacial

A distância entre dois pontos pode depender do sistema de referência, de modo que, os comprimentos paralelos à direção do movimento do sistema podem ser alterados, conforme ilustrado pela Fig. C1.

Figura C.1: a) Observador no referencial S' . b) Observador no referencial S .



Fonte: Próprio autor.

Na Fig. C1 a) temos o observador no sistema de referência S' que não constata o deslocamento para a direita, com velocidade u desse referencial, enquanto que o observador em S percebe esse boost de velocidade no sistema S' e consegue perceber uma contração espacial na direção paralela ao movimento, onde em a) temos a Eq. (C.1)

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}, \tag{C.1}$$

e em b) obtemos uma relação entre a velocidade u e o comprimento l , por meio de

$$d = l + u\Delta t_1. \quad (\text{C.2})$$

Uma vez que o pulso de luz se desloca com velocidade c , é correto afirmarmos que

$$d = c\Delta t_1,$$

que implica em

$$c\Delta t_1 = l + u\Delta t_1,$$

de forma que, ao ser simplificada, obtemos

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - u}. \quad (\text{C.3})$$

A Eq. (C.3) implica que a distância que a luz percorre em S é maior que l , assim o tempo de retorno da luz é matematicamente expresso por

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + u}, \quad (\text{C.4})$$

portanto, $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$.

Com base nas Eqs. (C.3) e (C.4) podemos encontrar Δt , da forma

$$\Delta t = l \left(\frac{1}{c - u} + \frac{1}{c + u} \right) \Rightarrow \left(\frac{c - u + c + u}{c^2 - u^2} \right), \quad (\text{C.5})$$

onde, trabalhando apenas com o segundo membro da Eq. (C.5), temos

$$l \left(\frac{2c}{c^2 - u^2} \right) = \frac{2lc}{c^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right).$$

assim, logramos

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1}. \quad (\text{C.6})$$

Substituindo as Eqs. (C.1) e (C.6) em $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, temos

$$\Delta t_0 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \Delta t$$

$$\frac{2l_0}{c} = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$l_0 = l \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

que produz

$$l = l_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad (\text{C.7})$$

onde na Eq. (C.7) temos l_0 como sendo o comprimento próprio do objeto, ou seja, medido no referencial de repouso, enquanto que l é o comprimento do objeto no referencial S . Dessa maneira, a relação entre l e l_0 pode ser expressa também na forma da Eq (C.8),

$$l = \frac{l_0}{\gamma}. \quad (\text{C.8})$$

Portanto, o comprimento l medido em S , que é o sistema no qual há movimento, é menor que o comprimento medido no sistema de repouso S' .

Apêndice D

Campos E' e B' em função de E e B .

Substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.17) temos

$$E'_y = \frac{\gamma' \sigma_0}{\epsilon_0}, \quad (\text{D.1})$$

de forma que, ao multiplicar e dividir a expressão (D.1) por γ_0 e fazendo uso da Eq. (2.15), alcançamos

$$E'_y = \frac{\gamma' \sigma}{\gamma_0 \epsilon_0}. \quad (\text{D.2})$$

Apêndice E

Expressão matemática para u_y .

Partindo da Eq. (2.33) isolamos o termo u_y , de forma que

$$mu_y = Ft \sqrt{1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2}, \quad (\text{E.1})$$

onde, elevando ambos os membros da Eq. (E.1) ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} m^2 u_y^2 &= F^2 t^2 \left[1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2 \right] \\ m^2 u_y^2 + F^2 t^2 \frac{u_y^2}{c^2} &= F^2 t^2 \\ u_y^2 \left[m^2 + \left(\frac{Ft}{c}\right)^2 \right] &= (Ft)^2 \\ u_y^2 &= \frac{(Ft)^2}{m^2 + \left(\frac{Ft}{c}\right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Calculando a raiz quadrada de ambos os membros da Eq. (E.2), temos

$$u_y = \frac{\left(\frac{Ft}{m}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \quad (\text{E.3})$$

A partir da Eq. (2.35), fazendo uma substituição de variáveis tal que $w = t^2$, o que

implica $dw = 2t dt$, rende-nos

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) \int \frac{dw}{\sqrt{1 + \left(\frac{F}{mc} \right)^2 w}}. \quad (\text{E.4})$$

Substituindo agora $1 + \left(\frac{F}{mc} \right)^2 w = \theta$, temos $d\theta = \left(\frac{F}{mc} \right)^2 dw$, o que implica

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{m} \right) \left(\frac{mc}{F} \right)^2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}, \quad (\text{E.5})$$

assim

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{F} c^2 \cdot 2\theta^{1/2},$$

onde, levando em conta os limites de integração de 0 à t , obteremos, após ressubstituições das variáveis originais,

$$y(t) = \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc} \right)^2} - 1 \right]. \quad (\text{E.6})$$

Apêndice F

Traços

Dada a Eq. (4.38)

$$T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[$$

$$\frac{1}{\not{p} + m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + m} \not{k}_1 \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_3} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_4} +$$

$$\frac{1}{\not{p} + m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\not{p} + m} \not{k}_{12} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_3} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_4} +$$

$$\frac{1}{\not{p} + m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_1} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_2} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_3} \frac{1}{\not{p} + m} \not{k}_{123} \frac{1}{\not{p} + m} \gamma^{\mu_4}],$$

apresentada no Capítulo 4, e levando em consideração apenas k_i linear, obtemos três contribuições, como mostrado a seguir, a partir do cálculo do traço.

F.1 Contribuição 1

$$(m + \not{p}) \gamma_5 \not{b} (m + \not{p}) \not{A}_1 (m + \not{p}) \not{k}_1 (m + \not{p}) \not{A}_2 (m + \not{p}) \not{A}_3 (m + \not{p}) \not{A}_4. \quad (\text{F.1})$$

Estamos interessados apenas nos termos com momentos k' s contraídos no tensor de Levi-civita, e para tal calculamos o traço da expressão (F.1), efetuando as simplificações $b \cdot k_1 \rightarrow 0$, $A_1 \cdot k_1 \rightarrow 0$, $A_2 \cdot k_1 \rightarrow 0$, $A_3 \cdot k_1 \rightarrow 0$, $A_4 \cdot k_1 \rightarrow 0$, $A_1 \cdot b \rightarrow 0$, $A_2 \cdot b \rightarrow 0$, $A_3 \cdot b \rightarrow 0$, $A_4 \cdot b \rightarrow 0$, tal que

$$\begin{aligned}
& 4i\epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot A_2m^6 - 4i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot A_3m^6 + 4i\epsilon^{A_2A_3bk_1} A_1 \cdot A_4m^6 + 4i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot A_3m^6 - \\
& 4i\epsilon^{A_1A_3bk_1} A_2 \cdot A_4m^6 + 4i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot A_4m^6 - 8i\epsilon^{A_4bk_1p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3m^4 + 8i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot pA_2 \cdot \\
& A_4m^4 + 8i\epsilon^{A_4bk_1p} A_1 \cdot A_3A_2 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot A_4A_2 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4m^4 + \\
& 8i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot pA_3 \cdot A_4m^4 - 8i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot pA_3 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot pA_3 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot \\
& A_2A_4 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot pA_4 \cdot \\
& pm^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4k_1} A_1 \cdot pb \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_3A_4k_1} A_2 \cdot pb \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2A_3k_1} A_4 \cdot pb \cdot pm^4 + \\
& 8i\epsilon^{A_2A_3A_4b} A_1 \cdot pk_1 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3A_4b} A_2 \cdot pk_1 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_3b} A_4 \cdot pk_1 \cdot pm^4 - 12i\epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot \\
& A_2p^2m^4 + 12i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot A_3p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_2A_3bk_1} A_1 \cdot A_4p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot A_3p^2m^4 + \\
& 12i\epsilon^{A_1A_3bk_1} A_2 \cdot A_4p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot A_4p^2m^4 + 12i\epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot A_2p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot \\
& A_3p^4m^2 + 12i\epsilon^{A_2A_3bk_1} A_1 \cdot A_4p^4m^2 + 12i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot A_3p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_1A_3bk_1} A_2 \cdot A_4p^4m^2 + \\
& 12i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot A_4p^4m^2 - 32i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot pA_3 \cdot pA_4 \cdot pm^2 + 32i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot pA_3 \cdot pA_4 \cdot pm^2 - \\
& 32i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot pA_2 \cdot pk_1 \cdot pm^2 - 32i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot pA_4 \cdot pk_1 \cdot pm^2 + 16i\epsilon^{A_4bk_1p} A_1 \cdot pA_2 \cdot \\
& A_3p^2m^2 - 16i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4p^2m^2 - 16i\epsilon^{A_4bk_1p} A_1 \cdot A_3A_2 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot A_4A_2 \cdot \\
& pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4p^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot pA_3 \cdot A_4p^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot pA_3 \cdot \\
& pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot pA_3 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot \\
& pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot pA_4 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2A_3A_4k_1} A_1 \cdot pb \cdot \\
& pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_3A_4k_1} A_2 \cdot pb \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_2A_3k_1} A_4 \cdot pb \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2A_3A_4b} A_1 \cdot pk_1 \cdot \\
& pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_3A_4b} A_2 \cdot pk_1 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2A_3b} A_4 \cdot pk_1 \cdot pp^2m^2 - 4i\epsilon^{A_3A_4bk_1} A_1 \cdot A_2p^6 + \\
& 4i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot A_3p^6 - 4i\epsilon^{A_2A_3bk_1} A_1 \cdot A_4p^6 - 4i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot A_3p^6 + 4i\epsilon^{A_1A_3bk_1} A_2 \cdot A_4p^6 - \\
& 4i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot A_4p^6 - 8i\epsilon^{A_4bk_1p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3p^4 + 8i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4p^4 + 8i\epsilon^{A_4bk_1p} A_1 \cdot \\
& A_3A_2 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot A_4A_2 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4p^4 + 8i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot pA_3 \cdot A_4p^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_2A_4bk_1} A_1 \cdot pA_3 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_4bk_1} A_2 \cdot pA_3 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_3bk_1p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot \\
& A_3A_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2bk_1} A_3 \cdot pA_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4k_1} A_1 \cdot pb \cdot pp^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_1A_3A_4k_1} A_2 \cdot pb \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2A_3k_1} A_4 \cdot pb \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4b} A_1 \cdot pk_1 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3A_4b} A_2 \cdot \\
& pk_1 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_3b} A_4 \cdot pk_1 \cdot pp^4 + 32i\epsilon^{A_2bk_1p} A_1 \cdot pA_3 \cdot pA_4 \cdot pp^2 - 32i\epsilon^{A_1bk_1p} A_2 \cdot pA_3 \cdot \\
& pA_4 \cdot pp^2 + 32i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot pA_2 \cdot pk_1 \cdot pp^2 + 32i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot pA_4 \cdot pk_1 \cdot pp^2.
\end{aligned}$$

(F.2)

F.2 Contribuição 2

$$(m+p)\gamma_5 b(m+p)A_1(m+p)A_2(m+p)k_{12}(m+p)A_3(m+p)A_4. \quad (\text{F.3})$$

Do traço de (F.3), levando em conta as simplificações $b \cdot k_{12} \rightarrow 0$, $A_1 \cdot k_{12} \rightarrow 0$, $A_2 \cdot k_{12} \rightarrow 0$, $A_3 \cdot k_{12} \rightarrow 0$, $A_4 \cdot k_{12} \rightarrow 0$, $A_1 \cdot b \rightarrow 0$, $A_2 \cdot b \rightarrow 0$, $A_3 \cdot b \rightarrow 0$, $A_4 \cdot b \rightarrow 0$, que excluem os termos com momentos não contraídos ao tensor, temos

$$\begin{aligned}
& -4i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_2 m^6 + 4i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_3 m^6 - 4i\epsilon^{A_2A_3bk_{12}} A_1 \cdot A_4 m^6 - 4i\epsilon^{A_1A_4bk_{12}} A_2 \cdot \\
& A_3 m^6 + 4i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot A_4 m^6 - 4i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot A_4 m^6 + 8i\epsilon^{A_4bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3 m^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4 m^4 - 8i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot pA_2 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4 m^4 + \\
& 8i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot pA_3 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot pm^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_1bk_{12}p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot pA_4 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot pA_4 \cdot pm^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_2A_3A_4k_{12}} A_1 \cdot pb \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_3k_{12}} A_4 \cdot pb \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot A_2k_{12} \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_2A_4bp} A_1 \cdot \\
& A_3k_{12} \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot A_4k_{12} \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_4bp} A_2 \cdot A_3k_{12} \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3bp} A_2 \cdot \\
& A_4k_{12} \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3A_4b} A_2 \cdot pk_{12} \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot A_4k_{12} \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_4b} A_3 \cdot \\
& pk_{12} \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2A_3A_4b} b \cdot pk_{12} \cdot pm^4 + 12i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_2p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot \\
& A_3p^2m^4 + 12i\epsilon^{A_2A_3bk_{12}} A_1 \cdot A_4p^2m^4 + 12i\epsilon^{A_1A_4bk_{12}} A_2 \cdot A_3p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot A_4p^2m^4 + \\
& 12i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot A_4p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_2p^4m^2 + 12i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_3p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_2A_3bk_{12}} A_1 \cdot \\
& A_4p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_1A_4bk_{12}} A_2 \cdot A_3p^4m^2 + 12i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot A_4p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot A_4p^4m^2 - \\
& 32i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot pA_4 \cdot pm^2 + 32i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot pA_4 \cdot pm^2 - 32i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot pA_2 \cdot pk_{12} \cdot \\
& pm^2 - 32i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot pA_4 \cdot pk_{12} \cdot pm^2 - 16i\epsilon^{A_4bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3p^2m^2 + 16i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot \\
& A_4p^2m^2 + 16i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot pA_2 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4p^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot pA_3 \cdot \\
& pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1bk_{12}p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \\
& pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot pA_4 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot pA_4 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2A_3A_4k_{12}} A_1 \cdot pb \cdot \\
& pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2A_3k_{12}} A_4 \cdot pb \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot A_2k_{12} \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2A_4bp} A_1 \cdot A_3k_{12} \cdot \\
& pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot A_4k_{12} \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_4bp} A_2 \cdot A_3k_{12} \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_3bp} A_2 \cdot A_4k_{12} \cdot \\
& pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_3A_4b} A_2 \cdot pk_{12} \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot A_4k_{12} \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2A_4b} A_3 \cdot \\
& pk_{12} \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_2A_3A_4b} b \cdot pk_{12} \cdot pp^2m^2 + 4i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_2p^6 - 4i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot A_3p^6 + \\
& 4i\epsilon^{A_2A_3bk_{12}} A_1 \cdot A_4p^6 + 4i\epsilon^{A_1A_4bk_{12}} A_2 \cdot A_3p^6 - 4i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot A_4p^6 + 4i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot A_4p^6 + \\
& 8i\epsilon^{A_4bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3p^4 - 8i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4p^4 - 8i\epsilon^{A_3A_4bk_{12}} A_1 \cdot pA_2 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot \\
& pA_3 \cdot A_4p^4 + 8i\epsilon^{A_2A_4bk_{12}} A_1 \cdot pA_3 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot \\
& pp^4 - 8i\epsilon^{A_1bk_{12}p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3bk_{12}} A_2 \cdot pA_4 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2bk_{12}} A_3 \cdot pA_4 \cdot pp^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_2A_3A_4k_{12}} A_1 \cdot pb \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_3k_{12}} A_4 \cdot pb \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot A_2k_{12} \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2A_4bp} A_1 \cdot \\
& A_3k_{12} \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot A_4k_{12} \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_1A_4bp} A_2 \cdot A_3k_{12} \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3bp} A_2 \cdot A_4k_{12} \cdot \\
& pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_3A_4b} A_2 \cdot pk_{12} \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot A_4k_{12} \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_4b} A_3 \cdot pk_{12} \cdot pp^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_1A_2A_3A_4b} b \cdot pk_{12} \cdot pp^4 + 32i\epsilon^{A_3bk_{12}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot pA_4 \cdot pp^2 - 32i\epsilon^{A_2bk_{12}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot pA_4 \cdot
\end{aligned}$$

$$pp^2 + 32i\epsilon^{A_3A_4bp} A_1 \cdot pA_2 \cdot pk_{12} \cdot pp^2 + 32i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot pA_4 \cdot pk_{12} \cdot pp^2.$$

(F.4)

F.3 Contribuição 3

$$(m + p)\gamma_5 b(m + p)A_1(m + p)A_2(m + p)A_3(m + p)k_{123}(m + p)A_4. \quad (F.5)$$

Calculando o traço da Eq. (F.5), observando $b \cdot k_{123} \rightarrow 0$, $A_1 \cdot k_{123} \rightarrow 0$, $A_2 \cdot k_{123} \rightarrow 0$, $A_3 \cdot k_{123} \rightarrow 0$, $A_4 \cdot k_{123} \rightarrow 0$, $A_1 \cdot b \rightarrow 0$, $A_2 \cdot b \rightarrow 0$, $A_3 \cdot b \rightarrow 0$, $A_4 \cdot b \rightarrow 0$, com o intuito de eliminar os termos que não possuem momentos contraídos, logramos

$$\begin{aligned} & 4i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_2m^6 - 4i\epsilon^{A_2A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_3m^6 + 4i\epsilon^{A_2A_3bk_{123}} A_1 \cdot A_4m^6 + 4i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot \\ & A_3m^6 - 4i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot A_4m^6 + 4i\epsilon^{A_1A_2bk_{123}} A_3 \cdot A_4m^6 - 8i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3m^4 + \\ & 8i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4m^4 + 8i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot pA_2 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4m^4 - \\ & 8i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot A_2A_3 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot A_4A_3 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1bk_{123}p} A_2 \cdot A_4A_3 \cdot pm^4 + \\ & 8i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot pA_3 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot pm^4 + \\ & 8i\epsilon^{A_1bk_{123}p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot pA_4 \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4k_{123}} A_1 \cdot pb \cdot pm^4 + \\ & 8i\epsilon^{A_1A_2A_4k_{123}} A_3 \cdot pb \cdot pm^4 - 8i\epsilon^{A_1A_2A_3k_{123}} A_4 \cdot pb \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4b} A_1 \cdot pk_{123} \cdot pm^4 + \\ & 8i\epsilon^{A_1A_2A_4b} A_3 \cdot pk_{123} \cdot pm^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_3b} A_4 \cdot pk_{123} \cdot pm^4 - 12i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_2p^2m^4 + \\ & 12i\epsilon^{A_2A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_3p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_2A_3bk_{123}} A_1 \cdot A_4p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot A_3p^2m^4 + 12i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot \\ & A_4p^2m^4 - 12i\epsilon^{A_1A_2bk_{123}} A_3 \cdot A_4p^2m^4 + 12i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_2p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_2A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_3p^4m^2 + \\ & 12i\epsilon^{A_2A_3bk_{123}} A_1 \cdot A_4p^4m^2 + 12i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot A_3p^4m^2 - 12i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot A_4p^4m^2 + 12i\epsilon^{A_1A_2bk_{123}} A_3 \cdot \\ & A_4p^4m^2 - 32i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot pA_3 \cdot pm^2 + 32i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot pA_4 \cdot pm^2 - 32i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot \\ & pA_4 \cdot pk_{123} \cdot pm^2 - 32i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot pA_4 \cdot pk_{123} \cdot pm^2 + 16i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3p^2m^2 - \\ & 16i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4p^2m^2 - 16i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot pA_2 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4p^2m^2 + \\ & 16i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot A_2A_3 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot A_4A_3 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1bk_{123}p} A_2 \cdot A_4A_3 \cdot \\ & pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot pA_3 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot \\ & pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1bk_{123}p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot pA_4 \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2A_3A_4k_{123}} A_1 \cdot \\ & pb \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2A_4k_{123}} A_3 \cdot pb \cdot pp^2m^2 + 16i\epsilon^{A_1A_2A_3k_{123}} A_4 \cdot pb \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_2A_3A_4b} A_1 \cdot \\ & pk_{123} \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2A_4b} A_3 \cdot pk_{123} \cdot pp^2m^2 - 16i\epsilon^{A_1A_2A_3b} A_4 \cdot pk_{123} \cdot pp^2m^2 - 4i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot \\ & A_2p^6 + 4i\epsilon^{A_2A_4bk_{123}} A_1 \cdot A_3p^6 - 4i\epsilon^{A_2A_3bk_{123}} A_1 \cdot A_4p^6 - 4i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot A_3p^6 + 4i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot \\ & A_4p^6 - 4i\epsilon^{A_1A_2bk_{123}} A_3 \cdot A_4p^6 - 8i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_3p^4 + 8i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot A_4p^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8i\epsilon^{A_3A_4bk_{123}} A_1 \cdot pA_2 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot pA_3 \cdot A_4p^4 - 8i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot A_2A_3 \cdot pp^4 + \\
& 8i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot A_4A_3 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_1bk_{123}p} A_2 \cdot A_4A_3 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_4bk_{123}} A_2 \cdot pA_3 \cdot pp^4 + \\
& 8i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot A_2A_4 \cdot pp^4 - 8i\epsilon^{A_2bk_{123}p} A_1 \cdot A_3A_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1bk_{123}p} A_2 \cdot A_3A_4 \cdot pp^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_1A_3bk_{123}} A_2 \cdot pA_4 \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4k_{123}} A_1 \cdot pb \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_4k_{123}} A_3 \cdot pb \cdot pp^4 - \\
& 8i\epsilon^{A_1A_2A_3k_{123}} A_4 \cdot pb \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_2A_3A_4b} A_1 \cdot pk_{123} \cdot pp^4 + 8i\epsilon^{A_1A_2A_4b} A_3 \cdot pk_{123} \cdot pp^4 + \\
& 8i\epsilon^{A_1A_2A_3b} A_4 \cdot pk_{123} \cdot pp^4 + 32i\epsilon^{A_4bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot pA_3 \cdot pp^2 - 32i\epsilon^{A_3bk_{123}p} A_1 \cdot pA_2 \cdot pA_4 \cdot \\
& pp^2 + 32i\epsilon^{A_2A_3bp} A_1 \cdot pA_4 \cdot pk_{123} \cdot pp^2 + 32i\epsilon^{A_1A_2bp} A_3 \cdot pA_4 \cdot pk_{123} \cdot pp^2.
\end{aligned}$$

(F.6)