

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**BRUNA CAMERINO LIRA UCHOA**

**ESTIMATIVA DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO  
SIMPLES POR MEIO DA TEORIA DO DANO CONCENTRADO**

**Maceió**

**2017**

BRUNA CAMERINO LIRA UCHOA

**ESTIMATIVA DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO  
SIMPLES POR MEIO DA TEORIA DO DANO CONCENTRADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: *Estruturas*

Orientador: Dr. Wayne Santos de Assis

Coorientador: Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim

**Maceió**

**2017**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

- U17e Uchoa, Bruna Camerino Lira.  
Estimativa da rigidez à flexão em vigas de concreto simples por meio da teoria do dano concentrado / Bruna Camerino Lira Uchoa. – 2017.  
80 f. : il. tabs., grafs.
- Orientador: Wayne Santos de Assis.  
Coorientador: David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.  
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Ciências Exatas. Instituto de Química. Maceió, 2017.
- Bibliografia: f. 74-77.  
Apêndices: f. 78-80.
1. Teoria do dano concentrado. 2. Mecânica da fratura do concreto. 3. Mecânica do dano contínuo – Concreto. 4. Concreto – Rigidez à flexão. 5. Concreto simples.  
I. Título.

CDU: 624.012.4



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC



**ESTIMATIVA DA RIGIDEZ À FLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO SIMPLES POR  
MEIO DA TEORIA DO DANO CONCENTRADO**

**BRUNA CAMERINO LIRA UCHOA**

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 28 do mês de novembro do ano de 2017.

Banca Examinadora:

**Prof. Dr. Wayne Santos de Assis**  
Orientador – PPGEC/UFAL

**Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim**  
Coorientador – PROEC/UFS

**Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior**  
Avaliador Interno – PPGEC/UFAL

**Prof. Dr. José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa**  
Avaliador Externo – UNICAMP

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora por estarem sempre presentes em minha vida, guiando meus passos e por terem me proporcionado a melhor família.

Aos meus pais, Ranulfo e Mônica, que nunca mediram esforços para me proporcionar a melhor educação, sempre investindo nos meus estudos e apoiando minhas escolhas.

A minha irmã Gabriela, por nunca ter deixado de acreditar na minha capacidade.

Ao meu amor, Victor, por ter sido paciente nos momentos de preocupações e incertezas.

Aos meus avós Dácio, Selma e Jalbas.

Agradeço ao meu professor e orientador Wayne Assis, por não ter só me orientado no TCC e aceitado me orientar na dissertação, mas também por ter sido um amigo durante toda a jornada.

Agradeço ao meu coorientador David Amorim pela paciência e dedicação, por ter sido sempre prestativo e disposto a me ajudar.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - Estruturas pela contribuição no meu crescimento profissional.

Sou grata aos amigos de mestrado que me acompanharam durante todo o percurso, Isadora Nogueira, Jonas Cavalcante e Victor Falcão.

Dedico a presente dissertação à todos que contribuíram de alguma forma para sua realização.

## RESUMO

O presente trabalho trata da aplicação da Teoria do Dano Concentrado (TDC) para estimar a rigidez à flexão em vigas de concreto simples submetidas ao ensaio experimental de flexão de quatro pontos, a partir do comprimento de uma fissura existente, a qual está associada à variável dano. A estimativa é realizada através de ábacos que relacionam rigidez à flexão, deslocamentos e dano para diferentes níveis de força. A formulação utilizada para a construção dos ábacos foi desenvolvida utilizando conceitos da TDC. A teoria é conhecida internacionalmente como *Lumped Damage Mechanic* e foi desenvolvida a partir de conceitos fundamentais da Mecânica da Fratura e da Mecânica do Dano Contínuo aplicados em rótulas plásticas, designadas como rótulas inelásticas nesta teoria, a fim de quantificar de maneira simples e prática os efeitos da fissura sobre o material, considerando seu comportamento não linear. Os resultados obtidos para estimativa de rigidez à flexão por meio da TDC utilizando dados experimentais mostraram-se satisfatórios.

**Palavras-chaves:** Teoria do Dano Concentrado, Mecânica da Fratura, Mecânica do Dano Contínuo, rigidez à flexão, concreto simples.

## **ABSTRACT**

This work addresses the application of Lumped Damage Mechanics (LDM) to the estimation of the flexural stiffness in concrete beams subject to the bending test, according to length a pre-existing crack that is related to the variable called damage. The estimative is carried out using abaci that relate flexural stiffness, displacements and damage to different levels of force. The formulation used to create the abacuses was developed using concepts of lumped damage mechanics. LDM was formulated by applying fundamentals concepts of fracture and damage mechanics applied on plastic hinges, now called inelastic hinges, in order to evaluate the effects of cracks in the material, considering non-linear behavior in a simple approach. The results obtained by the estimation of the flexural stiffness through LDM using experimental data are satisfactory.

**Keywords:** Lumped Damage Mechanics, Fracture Mechanics, Damage Mechanics, Flexural Stiffness, unreinforced concrete.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1 - Concentração de tensão em placa semi-infinita a) abertura circular b) abertura elíptica. ....</b>	<b>23</b>
<b>Figura 2 - Energia total versus comprimento da fissura para um plano de tensão semi-infinito com abertura elíptica. ....</b>	<b>25</b>
<b>Figura 3 - Diferentes modos de abertura de fissura a) Abertura b) cisalhamento no plano c) cisalhamento fora do plano. ....</b>	<b>27</b>
<b>Figura 4 - Elemento de volume representativo (EVR). ....</b>	<b>29</b>
<b>Figura 5 - Tensão efetiva e deformação equivalente. ....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 6 - a) Ações e deformações do elemento e b) deslocamentos do elemento. ....</b>	<b>33</b>
<b>Figura 7 - a) Pórtico plano e deslocamentos generalizados do nó i e b) deformações generalizadas do elemento b entre os nós i e j. ....</b>	<b>34</b>
<b>Figura 8 - a) Coordenadas locais e globais do elemento b do pórtico b) deslocamentos generalizados no eixo de coordenadas locais. ....</b>	<b>35</b>
<b>Figura 9 - Incremento das deformações generalizadas do elemento b do pórtico devido ao deslocamento generalizado nos nós i e j. ....</b>	<b>36</b>
<b>Figura 10 - a) Forças externas aplicadas ao pórtico estrutural b) esforços generalizados de um elemento do pórtico. ....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 11 - Elemento com rótulas inelásticas ....</b>	<b>41</b>
<b>Figura 12 - Teoria do dano concentrado para pórticos a) deformações generalizadas b) esforços generalizados ....</b>	<b>42</b>
<b>Figura 13 - Abertura de fissura: a) fissura física b) rótula inelástica ....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 14 - Entalhe da viga engastada ....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 15 - Dano em função do comprimento da fissura ....</b>	<b>48</b>
<b>Figura 16 - Ilustração do comprimento do entalhe. ....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 17 - Esquematização do ensaio de Flexão de quatro pontos. ....</b>	<b>51</b>
<b>Figura 18- Ilustração do aparato experimental para a realização do ensaio a flexão em quatro pontos com o posicionamento do relógio comparador analógico. ....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 19 - Posicionamento dos carregamentos aplicados. Dimensões em centímetros. .</b>	<b>52</b>
<b>Figura 20 - Modelo implementado. ....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 21 - Variação da rigidez à flexão com o tempo para cada corpo de prova com dano zero a) CP1-SF b) CP2-SF c) CP3-SF d) CP4-SF ....</b>	<b>57</b>



<b>Figura 22 - Variação da rigidez à flexão com o tempo para cada corpo de prova com dano de 30% a) CP1-30 b) CP2-30 c)CP3-30.....</b>	<b>59</b>
<b>Figura 23 - Gráficos força-deslocamento a) CP1-3 cm b) CP2-3 cm c) CP3-3 cm .....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 24 - Gráficos Deslocamento TDC - Deslocamento experimental a) CP1-3 cm b) CP2-3 cm.....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 25 - Gráfico em 3D para curva de dano de 0,5616.....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 26 - Curvas ilustrativas com diferentes valores de dano para uma força fixada.</b>	<b>66</b>
<b>Figura 27 - Ábaco Força de 1000 N: CP 1 - 3 cm - Lote II.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 28 - Ábaco Força de 2000 N: CP 1 - 3 cm - Lote II.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 29 - Ábaco Força de 1000 N: CP 3 - 3 cm - Lote II.....</b>	<b>69</b>
<b>Figura 30 - Ábaco Força de 2000 N: CP 3 - 3 cm - Lote II.....</b>	<b>69</b>
<b>Figura 31 - Ábaco Força de 500 N: CP 1 - 6 cm - Lote II.....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 32 - Ábaco Força de 1000 N: CP 1 - 6 cm Lote II.....</b>	<b>71</b>
<b>Figura 33 - Ábaco Força de 500 N: CP 2 - 6 cm Lote II.....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 34 - Ábaco Força de 1000 N: CP 2 - 6 cm Lote II.....</b>	<b>72</b>
<b>Figura 35 - Ábaco Força de 1000 N.....</b>	<b>73</b>
<b>Figura 36 - Ábaco Força de 1000 N: CP 1 - 3 cm - Lote III.....</b>	<b>81</b>
<b>Figura 37 - Ábaco Força de 2000 N: CP 1 - 3 cm - Lote III.....</b>	<b>81</b>
<b>Figura 38 - Ábaco Força de 1000 N: CP 3 - 3 cm - Lote III.....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 39 - Ábaco Força de 2000 N: CP 3 - 3 cm - Lote III.....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 40 - Ábaco Força de 500 N: CP 2 - 6 cm - Lote III.....</b>	<b>83</b>
<b>Figura 41 - Ábaco Força de 1000 N: CP 2 - 6 cm - Lote III.....</b>	<b>83</b>

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SILGAS**

<b>TDC</b>	Teoria do Dano Concentrado
<b>FCT</b>	Fator de Concentração de Tensão
<b>EP</b>	Energia Potencial
<b>ES</b>	Energia de Superfície
<b>ET</b>	Energia Total
<b>FIT</b>	Fator de Intensidade de Tensões
<b>EVR</b>	Elemento de Volume Representativo
<b>COD</b>	Abertura da Fissura ( Crack Opening Displacement)
<b>CP</b>	Corpo de prova
<b>SF</b>	Sem Fissura

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma_0$	Tensão constante
$\sigma_{m\acute{a}x}$	Tensão máxima
$a$	Comprimento da fissura
$P$	Força aplicada
$U$	Energia de deformação
$EI$	Rigidez à flexão
$W$	Energia de deformação complementar
$\Gamma_S$	Energia de Superfície Elástica
$U_0$	Energia de deformação da placa sem fissuras
$E$	Módulo de elasticidade de Young
$a_{cr}$	Comprimento crítico de fissura
$G$	Taxa de liberação de energia
$R$	Resistência à fissuração
$K_I$	Fator de intensidade de tensão (modo I)
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão (modo II)
$K_{III}$	Fator de intensidade de tensão (modo III)
$K_C$	Valor crítico do fator de intensidade de tensão
$\sigma_C$	Tensão crítica
$S$	Área total do plano do elemento de volume representativo
$\tilde{S}$	Área efetiva do plano do elemento de volume representativo

$S_D$	Área correspondente as microfissuras
$\vec{n}$	Vetor normal ao plano
$D_n$	Dano local na seção transversal do elemento de volume representativo
$n$	Seção transversal do elemento de volume representativo
$D$	Dano
$\sigma$	Tensão de Cauchy
$F$	Força aplicada
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
$\varepsilon_e$	Deformação elástica
$\varepsilon_p$	Deformação plástica
$\varepsilon_d$	Deformação devido a danificação
$G^D$	Taxa de liberação de energia do dano do EVR
$R^D$	Função de resistência à danificação
$\phi_i, \phi_j$	Rotações generalizadas nos nós $i$ e $j$
$\delta$	Alongamento ou encurtamento generalizados
$m_i, m_j$	Momentos fletores generalizados nos nós $i$ e $j$
$n_b$	Força axial generalizada
$L$	Comprimento deformado
$L_0$	Comprimento inicial
$\{\mathbf{u}\}_i$	Deslocamentos generalizados do nó $i$
$u_i$	Deslocamento na direção do eixo $X$
$w_i$	Deslocamento na direção do eixo $Z$

$\theta_i$	Rotação do nó $i$ em relação a configuração inicial
$\{\mathbf{q}\}_b$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados
$\{\mathbf{U}\}$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados de toda estrutura
$\{\Phi\}_b$	Matriz de deformações generalizadas
$XZ$	Eixos das coordenadas globais
$x_L z_L$	Eixos das coordenadas locais
$\alpha_b^0$	Ângulo inicial
$L_b^0$	Comprimento inicial
$\alpha_b$	Ângulo corrente
$L_b$	Comprimento corrente
$\{\mathbf{q}^L\}_b$	Matriz de deslocamentos nodais generalizados em coordenadas locais
$u_i^L$	Deslocamento na direção de $x_L$
$w_i^L$	Deslocamento na direção de $z_L$
$\theta_i^L$	Rotação total do nó $i$ em relação a configuração inicial
$[\mathbf{T}]_b$	Matriz de transformação
$[\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b$	Matriz de transformação cinemática no sistema local de coordenadas
$[\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b$	Matriz de transformação cinemática no sistema global de coordenadas
$[\mathbf{B}^0]_b$	Matriz de transformação cinemática da configuração inicial
$[\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b$	Matriz de transformação cinemática acrescida de zeros na configuração corrente
$[\mathbf{B}_E^0]_b$	Matriz de transformação cinemática acrescida de zeros na configuração inicial
$\mathcal{W}_{def}^*$	Trabalho virtual interno
$\mathcal{W}_{ext}^*$	Trabalho virtual externo

$\{\mathbf{P}\}$	Matriz de forças nodais generalizadas externas
$\{\mathbf{U}^*\}$	Matriz dos deslocamentos virtuais globais
$\{\mathbf{M}\}_b$	Matriz de esforços generalizados
$[\mathbf{F}_0]_b$	Matriz de flexibilidade elástica
$\{\boldsymbol{\Phi}_e\}_b$	Matriz de deformações generalizadas elástica
$\{\boldsymbol{\Phi}_d\}_b$	Matriz de deformação do dano
$\{\boldsymbol{\Phi}_p\}_b$	Matriz de deformação plástica
$\phi_i^p, \phi_j^p$	Rotações plásticas nas rótulas inelásticas $i$ e $j$
$d_i, d_j$	Variável de dano nas rótulas inelásticas $i$ e $j$
$[\mathbf{C}(\mathbf{d})]_b$	Matriz adicional de flexibilidade
$[\mathbf{F}(\mathbf{d})]_b$	Matriz de flexibilidade do elemento danificado
$G_i^d, G_j^d$	Momentos de dano dirigido nas rótulas inelásticas $i$ e $j$
$R_i^d, R_j^d$	Resistência a fissuração nas rótulas inelásticas $i$ e $j$
$\phi_i^d$	Ângulo de abertura da fissura na rótula inelástica
$l$	Distância entre a base da fissura e o eixo neutro
$h$	Altura total da seção transversal
$\tilde{h}$	Altura efetiva da seção transversal
$\tilde{I}_b$	Momento de inércia efetivo
$I_b$	Momento de inércia
$b$	Base da seção transversal
$\Omega$	Superfície fissurada
$A$	Área total da seção transversal

$c$	Distância entre o apoio mais próximo da viga e a carga externa
$L1$	Comprimento da viga ensaiada
$w_r$	Deslocamento indicado no relógio analógico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
1.2	Justificativa.....	19
2.2	Objetivos.....	20
3.2	Metodologia .....	21
<b>2</b>	<b>TEORIA DO DANO CONCENTRADO .....</b>	<b>22</b>
1.2	Mecânica da Fratura.....	22
2.2	Mecânica do Dano Contínuo.....	28
3.2	Teoria das Estruturas para Pórticos Planos.....	32
2.3.1	Cinemática de pórticos planos .....	33
2.3.2	Estática de pórticos planos.....	38
2.3.3	Relação constitutiva .....	40
4.2	Teoria do Dano Concentrado para Pórtico de Concreto .....	40
2.4.1	Relação constitutiva para pórticos rotulados .....	41
5.2	Critério de Griffith Generalizado .....	44
6.2	Abertura de Fissuras como uma Função do Dano em Rótulas Inelásticas .....	44
7.2	Modelagem da evolução de fissura através da TDC .....	46
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO EM VIGA DE CONCRETO SIMPLES .....</b>	<b>49</b>
1.2	Apresentação do problema .....	49
2.2	Modelagem via TDC.....	53
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E ANÁLISES .....</b>	<b>56</b>
1.2	Comparação entre o modelo da TDC com o Modelo Linear .....	56
2.2	Ábacos.....	64
3.2	Ábacos TDC versus Análise Linear .....	67
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>81</b>



<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>81</b>
------------------------	-----------

## 1 INTRODUÇÃO

No decorrer de sua vida útil, as estruturas de concreto estão sujeitas a carregamentos externos e à agressividade do ambiente. Devido à falta de inspeção e manutenção nas estruturas, as mesmas podem apresentar alterações em sua configuração inicial, não só em termos de deformações excessivas como também através do surgimento de fissuras no concreto. Estas, quando surgem, podem acarretar a exposição da armadura, deixando-a sujeita à ação de intempéries que podem provocar corrosão, acarretando a diminuição da capacidade resistente do elemento estrutural.

A presença de fissuras é um dos fatores relacionados com a perda de integridade dos elementos estruturais e, conseqüentemente, com sua perda de rigidez à flexão. Os elementos íntegros são aqueles que não apresentam nenhuma alteração física em relação a sua configuração inicial e que possuem o mesmo valor de rigidez à flexão dessa mesma configuração. Em outras palavras, os elementos íntegros não apresentam fissuração. Desta forma, os termos integridade e rigidez à flexão estão relacionados. Assim, a rigidez à flexão possui ligação direta com as propriedades geométricas do elemento estrutural e pode ser quantificada, pois a rigidez à flexão de uma dada seção de um elemento estrutural corresponde ao produto do módulo de elasticidade do material ( $E$ ) pelo momento de inércia da seção transversal ( $I$ ).

Um elemento estrutural fissurado também pode ser dito como danificado. Carrillo (2004) trata dano como sendo as variações introduzidas em um sistema que afetam de forma adversa seu desempenho atual ou futuro. O dano não tem significado sem que haja uma comparação entre dois estados diferentes do sistema, cujo estado inicial na maioria das vezes corresponde ao estado não danificado ou íntegro.

A Teoria do Dano Concentrado (TDC) foi desenvolvida para modelagem não linear de estruturas apertadas, associando conceitos da mecânica da fratura e mecânica do dano contínuo com o conceito de rótulas plásticas (MARANTE E FLÓREZ-LÓPEZ, 2003). O primeiro livro que trata sobre o tema foi publicado por Flórez-López, Marante e Picón (2015).

A modelagem utilizada na TDC é considerada simplificada quando comparada a teorias mais complexas, tais como mecânica da fratura, teoria da plasticidade e mecânica do dano contínuo. Diversos trabalhos que utilizam a TDC apontam para sua eficiência, tais como os desenvolvidos por: Flórez-López (1993, 1995) e Cipollina et al (1993) que avaliaram a

teoria em pórticos planos de concreto armado, Marante e Flórez-López (2003) através do estudos da TDC em pórticos espaciais, Amorim et al (2014) e Amorim (2016) com a aplicação da teoria em arcos, Marante e Flórez-López (2003) que apresentaram resultados satisfatórios quanto a aplicação da TDC em fadiga de alto ciclo e solicitações cíclicas.

Na TDC, os níveis de fissuração dos elementos estruturais de concreto são quantificados por meio da variável dano ( $d$ ), a qual pode apresentar valores entre zero e um. Quando o dano possui o valor unitário significa que a seção transversal se encontra totalmente degradada. Quando o dano é zero tem-se uma estrutura em seu estado íntegro.

Carvalho (2015) realizou um estudo teórico-experimental para verificar indícios da existência do dano utilizando a rigidez à flexão como parâmetro, comparando as respostas de rigidezes obtidas em vigas íntegras com as danificadas, através de uma análise linear. O presente trabalho pretende avaliar a rigidez de vigas em concreto simples por meio da TDC. O estudo é realizado baseado nos resultados experimentais do ensaio à flexão em quatro pontos em vigas em concreto simples, obtidos por Carvalho (2015).

Os valores de rigidez à flexão obtidos na análise linear desenvolvida por Carvalho (2015), foram comparados com os valores obtidos através da TDC para avaliar o uso da teoria como alternativa para estimativa da rigidez à flexão.

## **1.2 Justificativa**

No ramo da construção civil, o dimensionamento das estruturas é elaborado visando atender às solicitações externas, de maneira que sejam garantidas a capacidade resistente, segurança e durabilidade dos elementos estruturais constituintes da estrutura, durante a vida útil.

Com o passar do tempo os elementos estruturais podem apresentar alguns fatores que prejudicam seu desempenho. Em relação aos fatores de natureza física, o surgimento de fissuras é um dos que mais afetam a capacidade resistente de um elemento estrutural, pois a depender do tamanho da abertura da fissura as armaduras utilizadas no concreto armado podem ficar expostas e desprotegidas, com suscetibilidade à atuação de agentes externos.

A capacidade resistente de um elemento estrutural está relacionada diretamente com sua rigidez à flexão. Quando há perda de rigidez à flexão em vigas de concreto, devido à presença de fissuras, sua seção transversal é reduzida e com isso a rigidez à flexão e a

capacidade resistente da viga diminuem. Dentro desse contexto, nota-se a importância de se obterem meios que avaliem a rigidez à flexão de um elemento estrutural.

Uma maneira de avaliar a rigidez à flexão de uma viga de concreto se dá a partir da TDC, que permite obter a variável chamada de dano da barra representativa de um elemento estrutural, sendo o dano capaz de fornecer informações a respeito da perda de rigidez da barra. A obtenção do valor do dano é realizada a partir das equações matriciais clássicas do cálculo de estruturas e das relações constitutivas (FLÓREZ-LÓPEZ, 1993).

As rigidezes à flexão obtidas com o uso da TDC, a partir dos resultados experimentais das vigas ensaiadas por Carvalho (2015), são comparadas com os resultados de rigidez à flexão obtidos pelo mesmo. Em seu trabalho, Carvalho (2015) obteve gráficos relacionando forças e deslocamentos experimentais e relacionou os valores de rigidez das vigas em concreto simples no decorrer do tempo, para a obtenção da rigidez à flexão Carvalho (2015) tomou como base a curvatura das vigas, suas vigas ensaiadas apresentavam configurações de fissuras; que são chamadas de dano pelo autor, concentradas no meio do vão e impostas com comprimentos distintos.

## **2.2 Objetivos**

O objetivo geral deste trabalho consiste na obtenção de uma metodologia capaz de estimar a rigidez à flexão de vigas de concreto simples e biapoiadas, por meio da Teoria do Dano Concentrado que consiste em uma teoria não linear.

Como objetivos específicos tem-se:

- a) Comparar a rigidez à flexão ao longo do processo de carregamento obtidos com uso do modelo linear adotado por Carvalho (2015) e a rigidez à flexão obtida pela TDC, a fim de verificar se o estudo baseado na TDC aplicado em vigas de concreto simples sujeitas à flexão conduz às mesmas conclusões que as obtidas por meio da análise de Carvalho (2015);
- b) Elaborar ábacos que relacionam a rigidez à flexão, força, deslocamento e valor do dano, baseados nos resultados obtidos através da TDC, para estimativa da rigidez à flexão de uma viga em concreto simples.

### 3.2 Metodologia

Para o desenvolvimento do trabalho mostrou-se necessário o estudo a respeito de algumas teorias existentes no ramo da análise estrutural. A mecânica da fratura, mecânica do dano contínuo, teoria das estruturas e TDC foram estudadas para que o objetivo do trabalho pudesse ser alcançado, visto que tais assuntos estão relacionados com a estimativa da rigidez à flexão de vigas simples por meio de análise não linear. Um maior enfoque foi dado para a TDC, pois a estimativa foi realizada baseada na mesma.

A aplicação da TDC para estimar a rigidez a flexão teve como princípio a consideração da viga em concreto simples como sendo um elemento de barra de pórtico plano, dessa forma para obter o dano concentrado também foi utilizada uma modelagem estrutural por meio de um elemento deste. Na análise de diversos problemas, no âmbito da engenharia estrutural, é comum e suficiente analisar o comportamento estrutural de cada elemento constituinte da estrutura, para que em seguida a estrutura seja analisada como um todo, incluindo-se o caso de estruturas aporticadas.

Após a modelagem da TDC aplicada para análise das vigas, foi realizada a verificação da qualidade dos resultados fornecidos pela análise não linear advindos da TDC, considerou-se como dados de entrada do modelo implementado o dano (comprimento da fissura), o carregamento e o deslocamento medidos no ensaio de Carvalho (2015) para que dessa forma fosse obtido o valor da rigidez ao longo do processo de carregamento e comparado com os valores de rigidez obtidos por Carvalho (2015), também ao longo do processo de carregamento. Parte da formulação utilizada para aplicação da TDC foi fundamentada do trabalho desenvolvido por Amorim (2016).

A última etapa consistiu na elaboração de ábacos para a estimativa da rigidez à flexão de vigas em concreto simples, sendo que dessa vez para fissuras com comprimentos distintos, ou seja, para valores de dano distintos dos impostos por Carvalho (2015) para a execução do ensaio experimental.

## 2 TEORIA DO DANO CONCENTRADO

Diversos modelos são desenvolvidos acoplando mais de uma teoria, como por exemplo, elasticidade e dano, plasticidade e dano, elasticidade e plasticidade, dentre outras (ÁLVARES, 1999). Muitas das relações constitutivas já desenvolvidas, que visam representar o comportamento mecânico do concreto, apresentam elevada complexidade matemática, dificultando as aplicações computacional e prática. Em contrapartida, os modelos constitutivos simplificados passaram a se destacar na simulação do comportamento do concreto (ARAÚJO, 2007). Modelos ditos simplificados são aqueles pertencentes a uma linha de pesquisa que visa formular modelos constitutivos mais simples e úteis na prática do profissional da engenharia.

A TDC é um modelo simplificado que engloba a análise não-linear de estruturas, este modelo é fundamentado nas teorias clássicas da mecânica da fratura, teoria do dano contínuo e conceitos de rótulas plásticas.

Enquanto a mecânica da fratura (GDOUTOS, 2005) descreve as condições para a propagação da fissura, a mecânica do dano contínuo (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985) quantifica a deterioração do elemento estrutural. Na mecânica da fratura é preciso a existência de pelo menos uma fissura para sua aplicação, já na mecânica do dano contínuo a quantificação da deterioração é feita a partir de uma variável denominada dano.

Tendo em vista que a TDC é baseada nestas teorias, são apresentados conceitos básicos da mecânica da fratura e da mecânica do dano contínuo para que seja tratada a TDC.

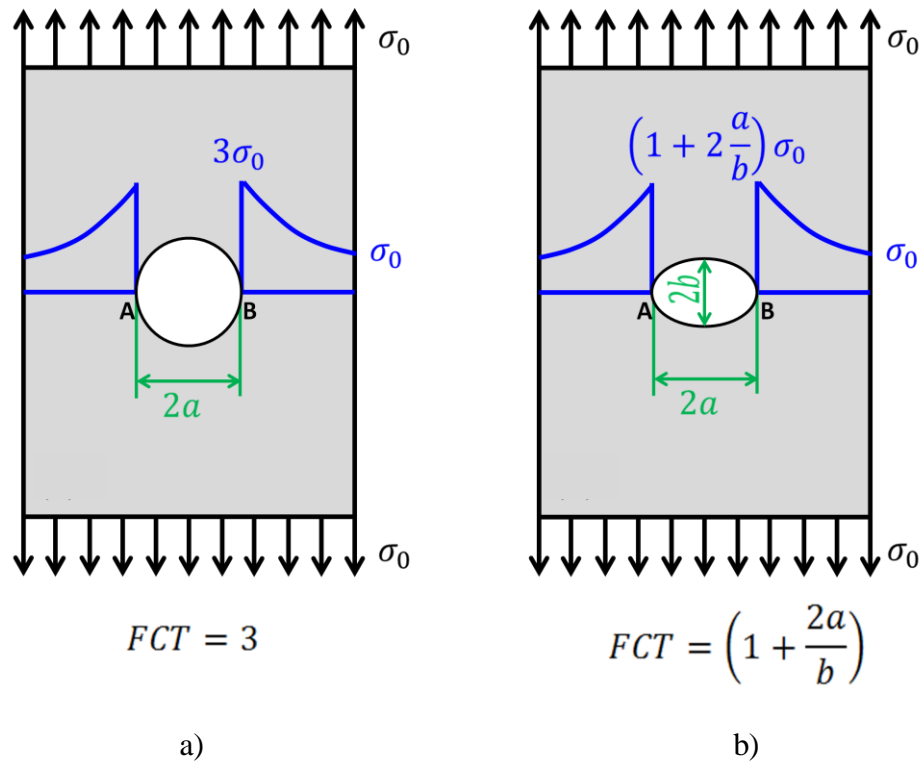
### 1.2 Mecânica da Fratura

A mecânica da fratura é capaz de determinar as condições, sob as quais, um sólido submetido a um carregamento externo, pode ir ao colapso devido à propagação de uma fissura existente nesse sólido, ou seja, permite determinar as condições pra a propagação de uma fissura (BITTENCOURT,1999).

Em situações reais, os materiais estão submetidos a concentração de tensões devido à presença de descontinuidades ou intersecção entre materiais com propriedades distintas. Tendo em vista a atuação das tensões, a concentração de tensões pode ser ilustrada através de uma placa semi-infinita com uma abertura em seu centro (Figura 1). Ao sofrer um alongamento por uma tensão  $\sigma_0$ , a distribuição de tensão no centro da placa não é

uniformemente distribuída, sofrendo um aumento na concentração de tensão nos pontos *A* e *B* da Figura 1 (VAN MIER, 2013).

**Figura 1 - Concentração de tensão em placa semi-infinita a) abertura circular b) abertura elíptica.**



Fonte: Adaptado de AMORIM, 2016.

Quando o orifício existente na placa é circular, a tensão máxima na seção transversal que contém os pontos *A* e *B* corresponde a  $3\sigma_0$  e o fator de concentração de tensão (FCT) é igual a 3, esta foi uma das primeiras soluções analíticas de um FCT e foi desenvolvida por Kirsch (1898). O fator de concentração de tensão quantifica o efeito da geometria do entalhe nas tensões lineares que atuam na sua ponta e é dado por:

$$FCT = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_0} \quad (1)$$

onde  $\sigma_{m\acute{a}x}$  corresponde à tensão máxima.

Inglis (1913) considerou um orifício elíptico de semieixo maior valendo *a* e semieixo menor *b* e obteve que a tensão máxima corresponde a:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_0(1 + 2a/b) \quad (2)$$

A princípio, pode-se aproximar uma fissura por uma elipse ao fazer o semieixo menor tender a zero, dessa forma, o FCT tende a infinito, com o semieixo tendendo a zero ocorre a denominada configuração de fissura. Essa situação mostra que o critério de fratura baseado na aplicação de forças é insuficiente, pois independentemente do valor da tensão aplicada ( $\sigma_0$ ) o valor do FCT sempre tenderá a infinito.

Diante desse contexto, faz-se necessário um critério de avaliação e propagação de fissuras. Griffith (1921) propôs um balanço energético que é tomado como base para a formulação de um critério de propagação de fissura, considerando materiais com resposta elástico-linear enquadrados na mecânica da fratura elástico-linear (PROENÇA, 2008). Para a propagação de uma certa fissura ocorrer é necessário que o sistema disponibilize uma certa quantidade de energia a ser gasta para o aumento de sua superfície.

O balanço energético de um sólido elástico-linear com fissura de Griffith é composto por três parcelas: Energia Potencial ( $EP$ ), Energia de Deformação elástica do sólido ( $U$ ) e Energia de Superfície ( $ES$ ). A energia potencial elástica ( $EP$ ) armazenada no sistema, provém das cargas externas aplicadas ( $EP = W_{ext}$ ), com isso, o trabalho realizado para deformar a estrutura é armazenado no sólido, dando origem a energia de deformação elástica do sólido ( $U$ ) ((FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015). No decorrer da propagação da fissura ocorre uma diminuição na energia potencial elástica armazenada no sistema, que é compensada pelo aumento da energia de superfície do sólido ( $ES$ ) (FERREIRA, 2015).

Considerando um sólido elástico com área de fissura igual a  $2(2a)$  uma nova parcela de energia é considerada, chamada de energia de superfície. Esta é proporcional a superfície da fissura, com isso a energia de superfície aumenta com a propagação da fissura (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015):

$$ES = 2(2\Gamma_s a) \quad (3)$$

onde  $\Gamma_s$  corresponde a energia de superfície elástica do material.

Logo, a energia total de um sólido elástico com fissura é dada por:

$$ET = U + EP + ES \text{ ou } ET = U + W_{ext} + ES \quad (4)$$



Griffith (1921,1924) propôs quantificar o processo de fratura através do balanço energético considerando uma fissura com comprimento  $2a$  no centro do plano sujeita a uma tensão uniforme como indicado na Figura 1. Griffith desenvolveu a primeira análise bem-sucedida do comportamento à fratura de componentes trincados. As experiências iniciais foram realizadas em vidro (GDOUTOS, 2005).

Para um estado plano de tensão a energia total é dada por:

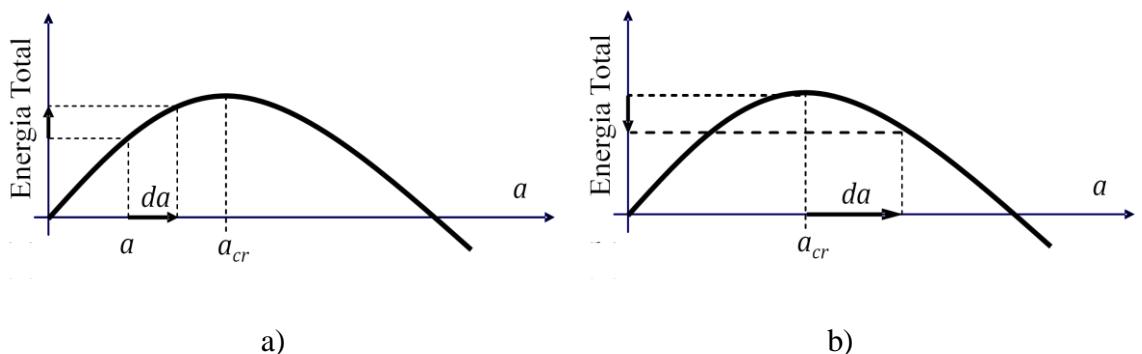
$$ET = U_0 - \frac{\pi\sigma_0^2}{E}a^2 + 2(2\Gamma_s a) \quad (5)$$

onde  $U_0$  é a energia de deformação da placa sem fissura,  $E$  corresponde ao módulo de Young,  $\sigma_0$  é a tensão aplicada e  $\Gamma_s$  é a energia de superfície elástica do material.

Nota-se que a energia total em função do comprimento de fissura é uma função parabólica (Figura 2). Ao comparar comprimentos de fissuras maiores e menores que o comprimento crítico  $a_{cr}$ , algumas observações podem ser feitas:

- Se  $a < a_{cr}$  qualquer aumento  $da$  no comprimento da fissura resulta em um aumento de energia.
- Se  $a \geq a_{cr}$  qualquer aumento  $da$  no comprimento da fissura resulta em uma diminuição no valor da energia.

**Figura 2 - Energia total versus comprimento da fissura para um plano de tensão semi-infinito com abertura elíptica.**



Fonte: Adaptado de FLÓREZ-LÓPEZ et al, 2015.

Considerando fissuras menores que o comprimento crítico ( $a < a_{cr}$ ), o aumento de energia para qualquer aumento no comprimento é fisicamente impossível, pois  $\sigma_0$  é constante durante toda a análise.

Para fissuras com comprimento maior ou igual ao crítico, a diminuição da energia total para  $a \geq a_{cr}$  é fisicamente possível, pois, em um dado instante o excesso de energia pode ser transformado em energia cinética, tal como o rompimento da estrutura.

Com as observações supracitadas, nota-se que existe um comprimento crítico de fissura, para cada configuração de carregamento externo, que garante a propagação da fissura com um carregamento constante.

Para situações de carregamentos e estruturas gerais, é possível obter o comportamento de propagação da fissura a partir da derivação da energia total em relação ao comprimento de fissura  $a$  sendo igual a zero. Isso se dá pelo fato do gráfico  $ET$  versus comprimento da fissura ser uma função com valor máximo de energia total fornecido para um valor de comprimento de fissura crítico. Com isso:

$$G = R \quad (6)$$

$$G = -\frac{d}{da}(U + EP) \quad (7)$$

$$R = \frac{d}{da}(ES) \quad (8)$$

onde  $G$  é a taxa de liberação de energia e  $R$  corresponde a resistência à fissuração. Esta igualdade é chamada de critério de Griffith, que permite afirmar que o crescimento da fissura existe se a taxa de liberação de energia é igual à resistência de fissuração, ou seja, com  $G = R$  é a condição para o início da propagação da fissura e é expressa como (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015):

$$-\frac{\partial}{\partial a} \left[ U_0 - \frac{\pi\sigma_0^2}{E} a^2 \right] = \frac{\partial}{\partial a} [2(2\Gamma_s a)] \quad (9)$$

$$2 \frac{\pi\sigma_0^2}{E} a = 4\Gamma_s \quad (10)$$

Reescrevendo a expressão anterior tem-se a expressão a seguir como condição de instabilidade:

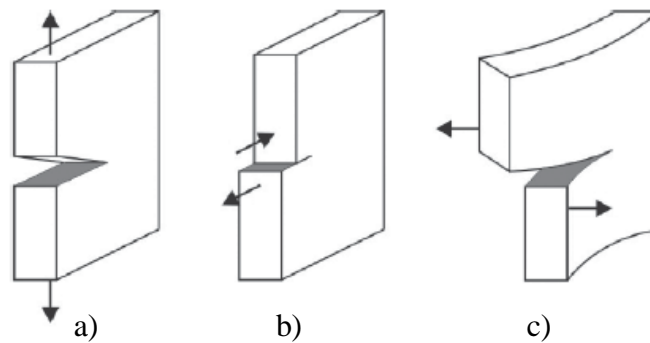
$$\sigma_0\sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E\Gamma_S}{a}} \quad (11)$$

Nota-se que  $\sqrt{2E\Gamma_S/a}$  possui coeficientes constantes, sendo um parâmetro característico do material. A expressão (11) mostra que a fissura aumenta se  $\sigma_0\sqrt{a}$  alcançar o parâmetro do material.

Baseado no estudo sobre mecânica da fratura linear desenvolvido por Griffith (1921), Irwin assume o comportamento da fissura como uma combinação de três aberturas de fissura diferentes (Figura 3):

- Modo I: Abertura;
- Modo II: Cisalhamento no plano;
- Modo III: Cisalhamento fora do plano.

**Figura 3 - Diferentes modos de abertura de fissura a) Abertura b) cisalhamento no plano c) cisalhamento fora do plano.**



Fonte: VAN MIER (2013).

Diferente do fator de concentração de tensão adotado anteriormente, Irwin (1957) adotou o Fator de Intensidade de Tensões (FIT). O FIT considera o esforço aplicado na estrutura e a geometria da fissura, considerando-se que a fissura se propaga quando o FIT atinge a um valor crítico. O valor crítico corresponde ao valor de tenacidade à fratura do material (QUINAN, 2005).

Existe um FIT para cada modo de abertura ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ), sendo a taxa de liberação de energia expressa como (FERREIRA, 2015):

$$G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2 + (1 + \nu)K_{III}^2) \text{ para estado plano de tensão} \quad (12)$$

$$G = \frac{(1 - \nu)^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 - \nu} \right) \text{ para estado plano de deformação} \quad (13)$$

Sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para o problema fundamental de Griffith, apenas o modo I existe, com isso, para o estado plano de tensão, a taxa de liberação de energia corresponde a:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (14)$$

E o fator de intensidade de tensão vale:

$$2 \frac{\pi \sigma_0^2}{E} a = \frac{K_I^2}{E} \Rightarrow K_I = \sigma_0 \sqrt{2\pi a} \quad (15)$$

A condição de instabilidade ocorre para o valor crítico do FIT ( $K_C$ )

$$K_C = \sigma_c \sqrt{2\pi a} \quad (16)$$

com  $\sigma_c$  sendo a tensão crítica.

## 2.2 Mecânica do Dano Contínuo

Segundo Proença (2008), no âmbito físico, a danificação dos materiais é o processo progressivo de deterioração que pode ocasionar a ruptura do material. O dano pode então ser definido como a deterioração apresentada pelo meio em análise num dado instante de tempo.

A mecânica do dano contínuo surgiu como uma formulação alternativa para a introdução de novas variáveis de estado dentro dos modelos constitutivos (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985).

O primeiro trabalho que tratou sobre a integridade do material foi proposto por Kachanov (1958), seguido por Rabotnov (1968). Mais tarde, Lemaître e Chaboche (1985) fizeram uso da teoria da termodinâmica dos processos irreversíveis e formularam o que hoje é chamado de mecânica do dano contínuo.

A mecânica do dano contínuo é fundamentada no pressuposto de que o processo de danificação tem início com o surgimento de microdefeitos, sendo microtrincas ou microfissuras para materiais como o concreto e microvazios para materiais metálicos. A variável dano tem a finalidade de quantificar a densidade de microdefeitos de uma dada estrutura. Tais defeitos são muito pequenos para serem considerados como fissuras ou vazios discretos, mas também não são desprezíveis. Assim, sua quantificação ocorre mediante a definição de uma porção de material chamada de Elemento de Volume Representativo (EVR).

Desta forma, no âmbito da mecânica dos sólidos contínuos, o EVR deve possuir dimensões suficientemente grandes para que seja admitida a homogeneidade para distribuição dos defeitos nele existentes, porém precisam ser suficientemente pequenas para evitar gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação. Estas dimensões dependem do tipo de material (PROENÇA, 2008).

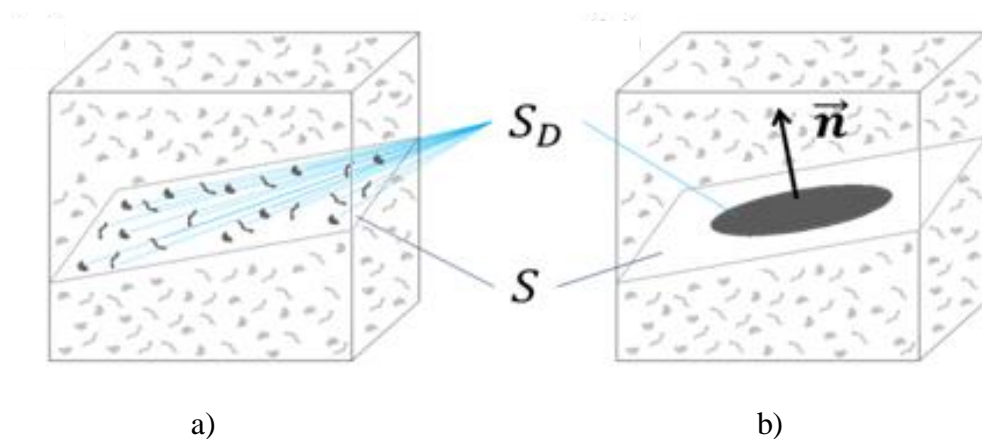
Tomando  $S$  como a área total do plano do elemento de volume representativo,  $S_D$  a área correspondente às microfissuras e  $\vec{n}$  o vetor normal ao plano (Figura 4), a área efetiva é dada por (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985):

$$\tilde{S} = S - S_D \quad (17)$$

Por definição, o dano local vale:

$$D_n = \frac{S_D}{S} \quad (18)$$

**Figura 4 - Elemento de volume representativo (EVR).**



A variável de dano local  $D_{\mathbf{n}}$  possui valores entre 0 e 1. Se  $D_{\mathbf{n}} = 0$  tem-se que os microdefeitos são desconsiderados ou não existem; se  $D_{\mathbf{n}} = 1$  a seção transversal  $\mathbf{n}$  está totalmente danificada, resultando em uma “quebra” do EVR em duas partes. Para qualquer outro valor entre 0 e 1 o EVR apresenta um estado danificado.

Uma simplificação aceitável é considerar o dano como isotrópico, ou seja, o valor do dano é constante em todas as direções:

$$D_{\mathbf{n}} = D \quad \forall \quad \vec{\mathbf{n}} \quad (19)$$

Desta forma, se o EVR for carregado com uma força  $F$ , a tensão nominal ou tensão de Cauchy  $\sigma$  corresponde à divisão entre a força aplicada e a área da seção transversal ( $\sigma = F/S$ ). Na presença do dano isotrópico ( $D$ ), a força  $F$  também pode ser expressa em termos da área efetiva, sendo então necessário introduzir o conceito de tensão efetiva ( $\tilde{\sigma}$ ):

$$F = S\sigma = \tilde{S}\tilde{\sigma} \quad (20)$$

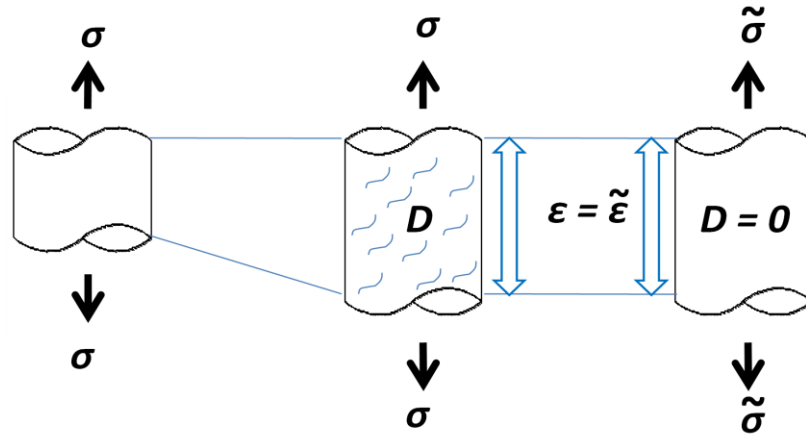
Utilizando a segunda igualdade, a tensão efetiva pode ser calculada como:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma S}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (21)$$

Nota-se que  $\tilde{\sigma} \geq \sigma$ , isto é, para  $D = 0$  tem-se  $\tilde{\sigma} = \sigma$  e para  $D \rightarrow 1$  tem-se  $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$ .

Lemaitre e Chaboche (1985) propuseram ainda a hipótese de equivalência em deformações, onde se assume que o comportamento de deformação do material é afetado pelo dano em termos da tensão efetiva. Em outras palavras, qualquer comportamento de deformação de um material danificado é representado pela lei constitutiva do material íntegro em que a tensão usual é substituída pela tensão efetiva (Figura 5).

Figura 5 - Tensão efetiva e deformação equivalente.



Fonte: Adaptado de PROENÇA, 2008.

A lei elástica de um material danificado submetido ao ensaio de tração uniaxial é dada por:

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (22)$$

onde  $E$  corresponde ao módulo de Elasticidade e  $\varepsilon_e$  a deformação elástica.

Considerando a deformação total do material tem-se:

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon_e \Rightarrow \sigma = (1-D)E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (23)$$

$$\varepsilon - \varepsilon_p = \frac{\sigma}{(1-D)E} = \frac{\sigma}{E} + \frac{D\sigma}{(1-D)E} \therefore \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}; \varepsilon_d = \frac{D\sigma}{(1-D)E} \quad (24)$$

onde  $\varepsilon$  corresponde à deformação total do material,  $\varepsilon_p$  a parcela plástica e  $\varepsilon_d$  a parcela danificada ( $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_d$ ). Com  $D = 0$  tem-se  $\varepsilon_d = 0$  e para  $D \neq 0$  tem-se  $\varepsilon_d \neq 0$  para certo valor de  $\sigma$ .

Para materiais frágeis que consideram a hipótese de equivalência de deformações, o critério de Griffith de maneira generalizada aplicada à mecânica do dano contínuo é dado por:

$$G^D - R^D \leq 0 \quad (25)$$

onde  $G^D$  corresponde à taxa de liberação de energia do dano do EVR e  $R^D$  a função de resistência à danificação.

Para o modelo de dano de materiais frágeis, caso do concreto, o dano apresenta-se em forma de microfissuras. Para estes materiais a taxa de liberação de energia pode ser expressa como (FLÓREZ-LÓPEZ *et al*, 2015):

$$G^D = - \frac{\partial U}{\partial D} = \frac{\partial W}{\partial D} \quad (26)$$

Sendo  $U$  a energia de deformação e  $W$  a energia complementar:

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - D) E \varepsilon^2 \quad (27)$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - D) E} \quad (282)$$

Por fim, a taxa de liberação de energia do dano do EVR pode ser escrita como:

$$G^D = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - D)^2 E} \quad (29)$$

Inúmeros modelos baseados na mecânica do dano têm sido formulado nos últimos anos visando reproduzir de forma mais realista o comportamento mecânico do concreto e do concreto armado. Dentre os modelos existentes, tem-se os modelos de dano desenvolvidos por LA BORDERIE (1991), MAZARS *et al* (2000) e FLÓREZ-LÓPEZ (1993). O presente trabalho terá como base o modelo desenvolvido por FLÓREZ-LÓPEZ (1993).

### 3.2 Teoria das Estruturas para Pórticos Planos

Os métodos das forças e dos deslocamentos são os mais utilizados para a análise de estruturas hiperestáticas com comportamento elástico linear. Powell (1969) desenvolveu uma nova notação das equações (matrizes) utilizadas nestes métodos, a fim de incluir os efeitos de

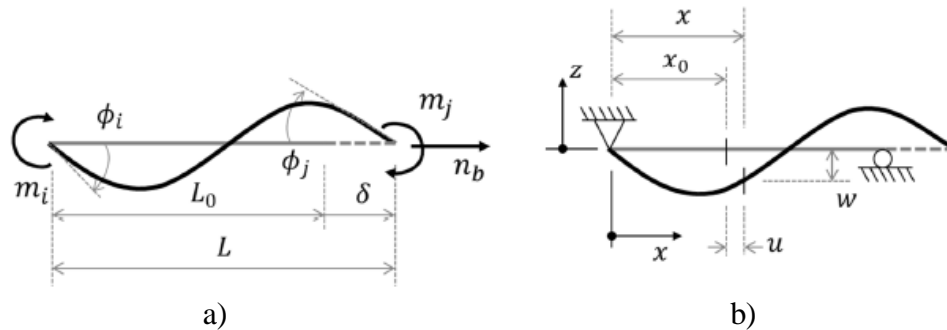


não linearidade geométrica e de obter o comportamento da deformada da estrutura. A nova notação foi aplicada em elementos de pórtico, envolvendo efeitos de flexão e de deformação axial, assumindo-se pequenas deformações, mesmo em condições de grandes deslocamentos.

O elemento de pórtico plano exposto na Figura 6 foi considerado por Powell (1969) e é composto por nós rígidos conectados por um elemento deformável, assumindo-se que as forças externas são aplicadas diretamente nos nós e que o elemento possui sua configuração inicial reta. As deformações e os deslocamentos de corpo rígido do elemento são tratadas separadamente.

O elemento apresenta deformações generalizadas: duas rotações relativas ( $\phi_i, \phi_j$ ) e alongamento ou encurtamento ( $\delta$ ). Associado com cada deformação existem as tensões generalizadas: dois momentos fletores ( $m_i, m_j$ ) e uma força axial ( $n_b$ ). No presente trabalho, as tensões generalizadas chamadas por Powell (1969), são designadas de esforços generalizados. A Figura 6 ilustra as deformações e os esforços generalizados.

**Figura 6 - a) Ações e deformações do elemento e b) deslocamentos do elemento.**



Fonte: Adaptado de AMORIM, 2016.

No presente trabalho, a notação de Powell é utilizada para introduzir os conceitos da TDC.

### 2.3.1 Cinemática de pórticos planos

Considere um elemento  $b$  do pórtico plano constituído por  $m$  elementos conectados por  $n$  nós (Figura 7a). A matriz de deslocamentos generalizados do nó  $i$  é dada por:

$$\{\mathbf{u}\}_i = \{u_i \quad w_i \quad \theta_i\}^T \quad (30)$$

onde  $u_i$  e  $w_i$  são os deslocamentos nodais na direção dos eixos globais  $X$  e  $Z$ , respectivamente e  $\theta$  corresponde à rotação total do nó em relação à configuração inicial. A matriz de deslocamentos nodais generalizados do elemento  $b$  entre os nós  $i$  e  $j$  é dada por:

$$\{\mathbf{q}\}_b = \{ \{\mathbf{u}\}_i^T \quad \{\mathbf{u}\}_j^T \}^T = \{u_i \quad w_i \quad \theta_i \quad u_j \quad w_j \quad \theta_j\}^T \quad (31)$$

A matriz de deslocamentos nodais generalizados de toda estrutura é dada pela junção das matrizes de deslocamentos generalizados de todos os nós:

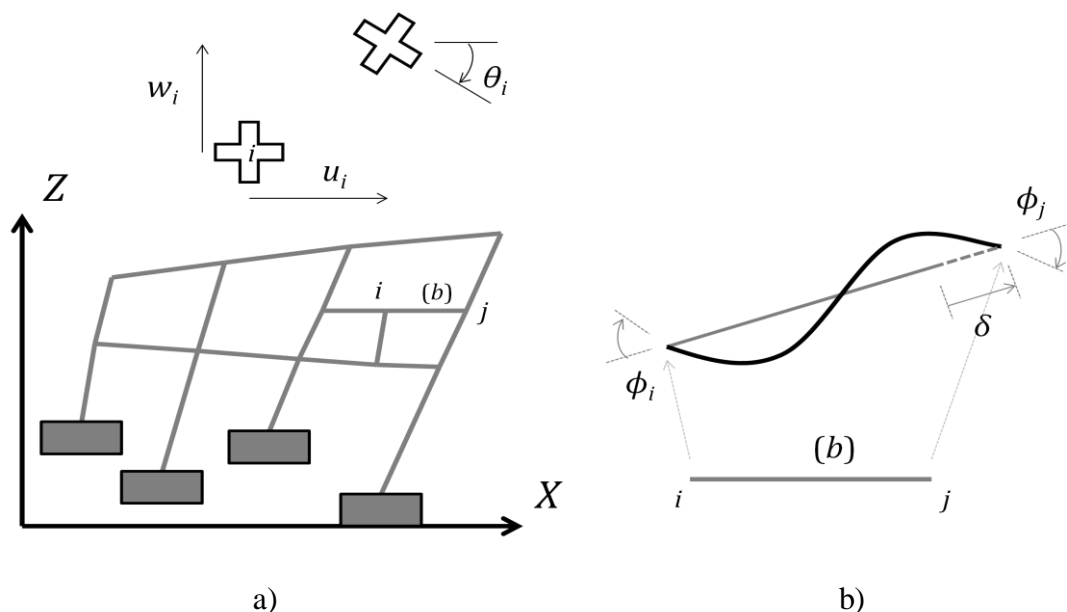
$$\{\mathbf{U}\} = \{ \{\mathbf{u}\}_1^T \quad \{\mathbf{u}\}_2^T \quad \dots \quad \{\mathbf{u}\}_n^T \}^T = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n \quad w_n \quad \theta_n\}^T \quad (32)$$

As matrizes de deslocamentos nodais generalizados não fornecem informações a respeito do comportamento do material ou sobre modificações ocorridas na estrutura, seus componentes descrevem apenas o movimento de corpo rígido. As deformações do elemento estrutural (elemento  $b$ , entre os nós  $i$  e  $j$ ) são descritas a partir da matriz de deformações generalizadas, dada por:

$$\{\Phi\}_b = \{ \phi_i \quad \phi_j \quad \delta \}^T \quad (33)$$

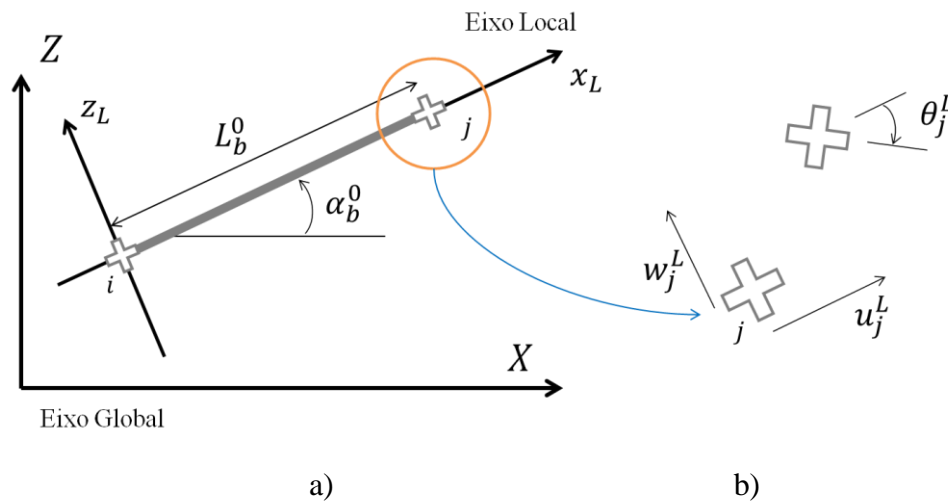
onde  $\phi_i$  e  $\phi_j$  correspondem, respectivamente, às rotações em  $i$  e  $j$  em relação à corda do elemento e  $\delta$  corresponde ao alongamento ou encurtamento do elemento (Figura 7b).

**Figura 7 - a) Pórtico plano e deslocamentos generalizados do nó  $i$  e b) deformações generalizadas do elemento  $b$  entre os nós  $i$  e  $j$ .**



Considere o elemento de pórtico  $b$  ligado aos nós  $i$  e  $j$  que possui os eixos das coordenadas globais ( $XZ$ ) e locais ( $x_L z_L$ ) mostrado na Figura 8. Para o eixo local o elemento é posicionado de tal forma que o nó  $i$  esteja localizado na origem e o elemento esteja sob o eixo  $x_L$ . A configuração inicial do elemento forma um ângulo  $\alpha_b^0$  e apresenta comprimento inicial de  $L_b^0$ . Quando ocorre a movimentação nodal o ângulo  $\alpha_b^0$  e o comprimento do elemento são modificados, sendo descrito pelos deslocamentos generalizados do elemento. Logo, o ângulo entre o eixo global e o eixo local ( $\alpha_b^0$ ) e o comprimento da barra ( $L_b^0$ ) dependem da matriz nodal de deslocamentos generalizada do elemento.

**Figura 8 - a) Coordenadas locais e globais do elemento  $b$  do pórtico b) deslocamentos generalizados no eixo de coordenadas locais**



Fonte: Adaptado de AMORIM, 2016.

Os deslocamentos generalizados podem ser representados em termos de coordenadas globais ou locais, e ambas estão relacionadas entre si a partir das seguintes equações:

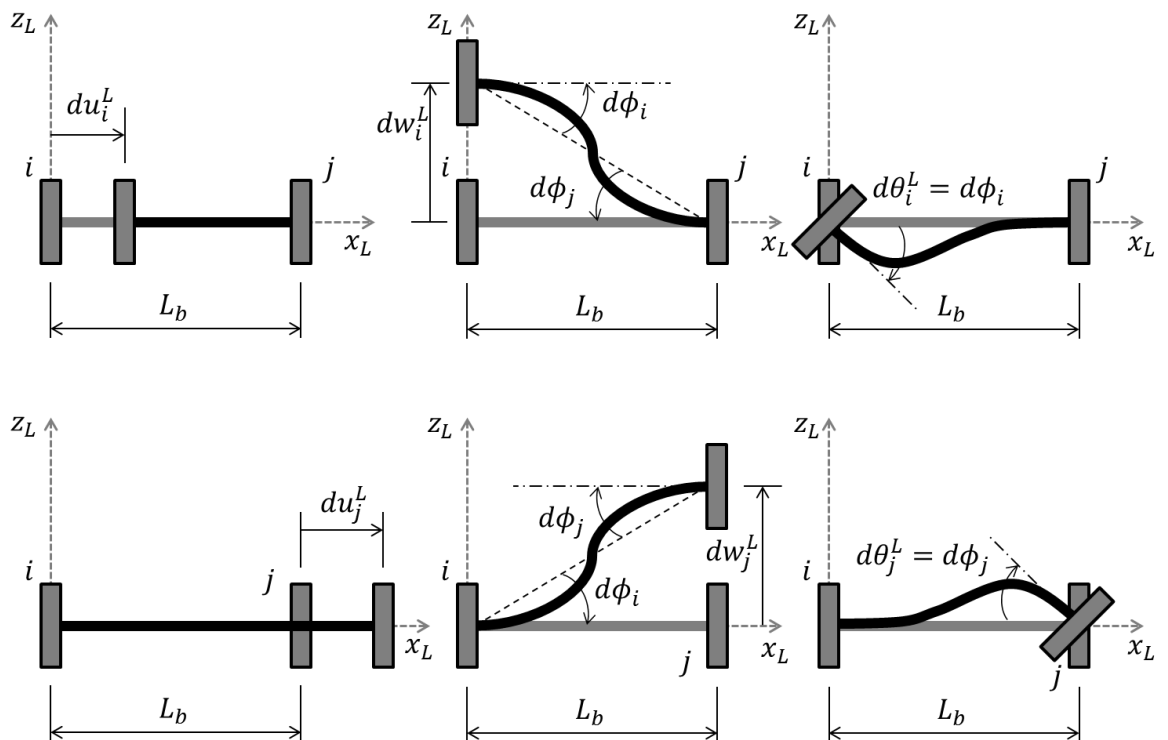
$$\begin{aligned}
 u_i^L &= u_i \cos \alpha_b + w_i \sin \alpha_b \\
 w_i^L &= -u_i \sin \alpha_b + w_i \cos \alpha_b \\
 \theta_i^L &= \theta_i \\
 u_j^L &= u_j \cos \alpha_b + w_j \sin \alpha_b \\
 w_j^L &= -u_j \sin \alpha_b + w_j \cos \alpha_b \\
 \theta_j^L &= \theta_j
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\{\mathbf{q}^L\}_b = [\mathbf{T}]_b \{\mathbf{q}\}_b \quad \therefore [\mathbf{T}]_b = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde  $[\mathbf{T}]_b$  corresponde a matriz de transformação.

A partir do sistema de coordenadas locais é possível relacionar os deslocamentos generalizados com as deformações generalizadas. Para cada deslocamento generalizado infinitesimal aplicado ao nó,  $i$  ou  $j$ , o elemento apresenta uma configuração deformada específica, dada pelo incremento de deformações generalizadas (Figura 9).

**Figura 9 - Incremento das deformações generalizadas do elemento  $b$  do pórtico devido ao deslocamento generalizado nos nós  $i$  e  $j$ .**



Fonte: AMORIM, 2016.

Considerando todas as formas de deslocamentos generalizados infinitesimais, deslocamentos horizontais, deslocamentos verticais e rotações, o incremento de deformações generalizadas é dado por:

$$\begin{cases} d\phi_i = -\frac{dw_i^L}{L_b} + d\theta_i^L + \frac{dw_j^L}{L_b} \\ d\phi_j = -\frac{dw_i^L}{L_b} + \frac{dw_j^L}{L_b} + d\theta_j^L \\ d\delta = -du_i^L + du_j^L \end{cases} \Rightarrow \{d\boldsymbol{\Phi}\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b \{d\mathbf{q}^L\}_b \quad (36)$$

$$\therefore [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_b} & 1 & 0 & \frac{1}{L_b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_b} & 0 & 0 & \frac{1}{L_b} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

onde  $[\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b$  corresponde à matriz de transformação cinemática do elemento  $b$  no sistema de coordenadas locais. Logo, o incremento de deformações generalizadas pode ser escrito como:

$$\{d\boldsymbol{\Phi}\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^L)]_b [\mathbf{T}]_b \{d\mathbf{q}\}_b = [\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b \{d\mathbf{q}\}_b \quad (38)$$

$$\therefore [\mathbf{B}(\mathbf{q})]_b = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 \\ \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 \\ -\cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

A equação supracitada é válida para casos cujos efeitos de não-linearidade geométrica são considerados. Pelo fato de as estruturas apresentarem pequenos deslocamentos e pequenas deformações na maioria das vezes, tais efeitos de não-linearidade podem ser negligenciados, com isso a equação cinemática pode ser expressada considerando  $\alpha_b \cong \alpha_b^0$ ,  $L_b = L_b^0$  e  $\{\boldsymbol{\Phi}\}_b \cong [\mathbf{B}^0]_b \{\mathbf{q}\}_b$ .

onde  $[\mathbf{B}^0]_b$  é a matriz de transformação cinemática da configuração inicial do elemento.

A equação cinemática expressa em termos da matriz de deslocamento da estrutura é dada por:

$$\{d\boldsymbol{\Phi}\}_b = [\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b \{d\mathbf{U}\} \quad \text{ou} \quad \{\boldsymbol{\Phi}\}_b \cong [\mathbf{B}_E^0]_b \{\mathbf{U}\} \quad (40)$$

onde  $[\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b = [\mathbf{B}_E^0]_b$  corresponde a matriz de transformação cinemática acrescida de zeros nas colunas relativas as posições dos nós que não fazem parte do elemento.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}_E(\mathbf{U})]_b &= \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & 0 & \dots & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (41) \\
 &\quad \downarrow \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 &u_1 w_1 \dots \quad \quad \quad u_i w_i \theta_i u_{i+1} \dots \quad \quad \quad u_j w_j \theta_j \dots \quad \quad \quad \theta_n
 \end{aligned}$$

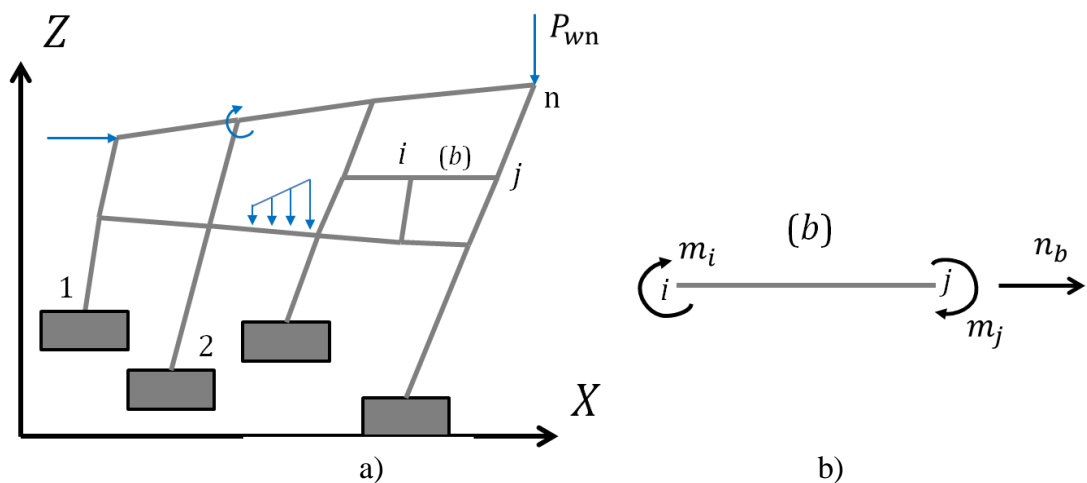
### 2.3.2 Estática de pórticos planos

Para obter a equação de equilíbrio da estrutura parte-se do princípio dos trabalhos virtuais, onde o equilíbrio estático da estrutura pode ser descrito igualando o trabalho virtual externo com o interno. O trabalho virtual externo é descrito pelas forças externas, enquanto o trabalho virtual interno é descrito pelas deformações generalizadas:

$$W^*_{def} = W^*_{ext} \quad (42)$$

Ao observar o pórtico da Figura 10 são encontradas forças e momentos concentrados nos nós e carregamento distribuído nos elementos. Em problemas de análise estrutural é comum substituir o carregamento distribuído por forças equivalentes aplicadas aos nós.

Figura 10 - a) Forças externas aplicadas ao pórtico estrutural b) esforços generalizados de um elemento do pórtico.



Fonte: AMORIM, 2016.

Os carregamentos externos podem ser armazenados em uma matriz de forças nodais generalizadas externas:

$$\{\mathbf{P}\} = \{P_{u1}P_{w1}P_{\theta1} \dots P_{u2}P_{w2}P_{\theta2} \dots P_{ui}P_{wi}P_{\theta i} \dots P_{wn}P_{\theta n}\}^T \quad (43)$$

O primeiro índice das forças nodais externas refere-se às direções globais das forças:  $u$  para força horizontal,  $w$  para força vertical e  $\theta$  para momentos fletores. O segundo índice corresponde ao nó (1,2,3..., $i,j$ ,... $n$ ).

O trabalho virtual externo é definido como:

$$W^*_{ext} = \{\mathbf{U}^*\}^T \{\mathbf{P}\} \quad (44)$$

onde  $\{\mathbf{U}^*\}^T$  é a matriz dos deslocamentos virtuais globais.

Para obter a expressão do trabalho virtual interno para o elemento de pórtico, faz-se necessária a introdução da matriz de esforços generalizados, que é conjugada da matriz de deformações generalizadas:

$$\{\mathbf{M}\}_b^T = \{m_i, m_j, n_b\} \quad (45)$$

onde  $m_i$  e  $m_j$  são os momentos fletores nas extremidades do elemento e  $n_b$  a força axial (Figura 10).

Considerando a matriz de deformação generalizada virtual  $\{\Phi^*\}_b$ , o trabalho virtual das deformações vale:

$$W^*_{def} = \sum_{b=1}^m \{\Phi^*\}_b^T \{\mathbf{M}\}_b \quad (46)$$

Logo, a equação de equilíbrio é:

$$\sum_{b=1}^m [\mathbf{B}_E^0]_b^T \{\mathbf{M}\}_b = \{\mathbf{P}\} \quad (47)$$

### 2.3.3 Relação constitutiva

A obtenção da lei elástica para materiais elásticos lineares é realizada a partir da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Daí, tem-se a relação constitutiva expressa como (PERDOMO *et al.*, 1999):

$$\{\Phi\}_b = [F_0]_b \{M\}_b \quad (48)$$

onde  $[F_0]_b$  corresponde à matriz de flexibilidade elástica do elemento  $b$ :

$$[F_0]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b} & -\frac{L_b}{6EI_b} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{AE_b} \end{bmatrix} \quad (49)$$

## 4.2 Teoria do Dano Concentrado para Pórtico de Concreto

Dentre os modelos constitutivos simplificados, o presente trabalho aborda a TDC, originalmente desenvolvida por Flórez-López (1993), que considera aspectos das mecânicas do dano e da fratura, com conceitos de rótulas plásticas advindos da teoria geral da plasticidade. Flórez-López (1993) desenvolveu esta teoria baseado nos modelos de plasticidade concentrada (*Lumped Plasticity Models*), que considera a plasticidade como um efeito localizado em pontos chamados de "rótulas plásticas".

A TDC é um método simplificado que consiste na utilização de rótulas plásticas, ou inelásticas, associadas ao dano localizado. As rótulas com dano podem ser utilizadas para modelagem da fissuração do concreto em estruturas de concreto armado, considerando casos de pórticos com elementos retos, porém já existem estudos aplicados a pórticos parabólicos (AMORIM *et al.*, 2014).

Os efeitos inelásticos do dano são considerados admitindo-se a hipótese de dissipação de energia concentrada. Tal hipótese supõe que todos os efeitos inelásticos são concentrados nas rótulas com dano, de comprimento nulo, cujo elemento de barra passa a ser composto por rótulas inelásticas em suas extremidades e por uma barra elástica (vide figura 11). A



dissipação de energia em elementos de barra ocorre tanto devido à plastificação da armadura, quanto a fissuração do concreto (AMORIM *et al*, 2014).

A função das rótulas plásticas ou inelásticas é a quebra da condição de compatibilidade das deformações na região onde estão localizadas.

**Figura 11 - Elemento com rótulas inelásticas**



Fonte: Adaptado de FLÓREZ-LÓPEZ *et al*, 2015.

Uma diferença entre os modelos de dano concentrado e de plasticidade concentrada é o fato de o modelo de dano concentrado ser acrescido de uma variável de dano na rótula plástica capaz de quantificar o processo de fissuração no concreto. Segundo Flórez-López (1993), o dano quantifica a fissuração no concreto, tendo em vista que a fissuração acarreta a perda de rigidez à flexão do elemento estrutural.

A TDC é uma forma alternativa da mecânica do dano, porém é limitada para casos uniaxiais, tais como vigas, colunas pórticos e arcos. A TDC não faz uso de conceitos de curvatura ou de deformações como nos modelos de viga, mas considera rotações inelásticas em rótulas concentradas. Esta teoria foi desenvolvida para descrever de melhor maneira a deterioração em estruturas da construção civil (AMORIM, 2016).

Diversos estudos desenvolvidos utilizando a TDC apresentaram bons resultados, tais como a aplicação da teoria em pórticos planos (CIPOLINA *et al*., 1995, FLÓREZ-LÓPEZ, 1998 e RAJASANKAR ET AL., 2009), pórticos espaciais (MARANTE E FLÓREZ-LÓPEZ, 2003) e arcos (AMORIM, 2014, 2016). Coelho (2017) utilizou a TDC para definição de uma nova variável, a variável de estado de corrosão.

#### **2.4.1 Relação constitutiva para pórticos rotulados**

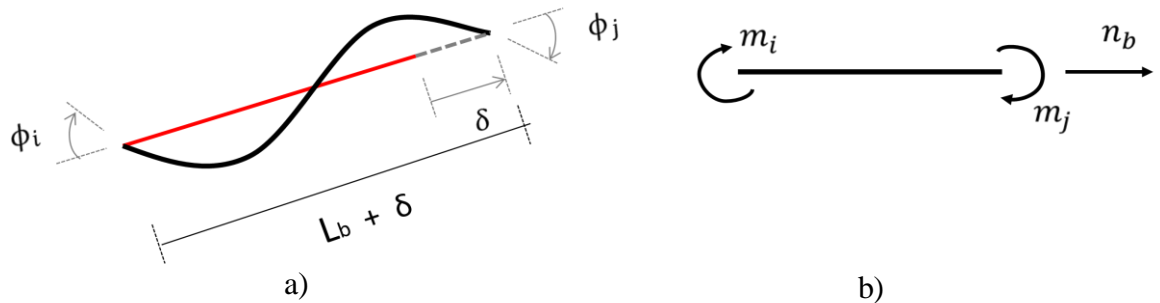
Considerando a hipótese de equivalência em deformações da mecânica do dano contínuo, as deformações generalizadas podem ser descritas como:

$$\{\Phi\}_b = \{\Phi_e\}_b + \{\Phi_d\}_b + \{\Phi_p\}_b \quad (50)$$

onde  $\{\Phi_e\}_b, \{\Phi_d\}_b, \{\Phi_p\}_b$  correspondem à matriz de deformações generalizadas elástica, matriz de deformação devido ao dano e matriz de deformação plástica, respectivamente.

O esquema representativo das deformações generalizadas totais e dos esforços correspondentes nas extremidades rotuladas do elemento de pórtico é fornecido na Figura 12.

**Figura 12 - Teoria do dano concentrado para pórticos a) deformações generalizadas b) esforços generalizados**



Fonte: Adaptado de AMORIM, 2016.

A matriz de deformações nodais generalizadas elásticas de um elemento, fornecida no item 2.2.3, é aqui reescrita:

$$\{\Phi\}_b = [F_0]_b \{M\}_b \quad (51)$$

Para a parcela de deformações plásticas é comum negligenciar o alongamento em estruturas de concreto armado, dessa maneira tal parcela é constituída apenas por rotações plásticas nas rótulas do elemento do pórtico:

$$\{\Phi_p\}_b = \{\phi_i^p \ \phi_j^p \ 0\}^T \quad (52)$$

A fissuração do concreto é contabilizada pelas variáveis de dano nas rótulas ( $d_i, d_j$ ). A matriz de deformação do dano pode ser expressa como (FLÓREZ-LÓPEZ, 1993):

$$\{\Phi_d\}_b = [C(d)]_b \{M\}_b \quad (53)$$

$$[\mathbf{C}(\mathbf{d})]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b d_i}{3EI_b(1-d_i)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_b d_j}{3EI_b(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

onde  $[\mathbf{C}(\mathbf{d})]_b$  é a matriz adicional de flexibilidade devido ao concreto fissurado, relacionada com o dano. Nota-se que se  $d_i = 0$  e  $d_j = 0$  a matriz adicional de flexibilidade é nula, portanto não há fissuração no concreto, se  $d_i$  tender a 1 e  $d_j$  também tender a 1 as rótulas inelásticas passam a apresentar o comportamento de rótulas perfeitas, o que significa que o concreto encontra-se extremamente fissurado. Ainda vale ressaltar que os termos ‘12’ e ‘21’ da matriz adicional de flexibilidade são nulos devido à desconsideração de processos de fissuração por força cortante (vide, por exemplo, Flórez-López, *et al* (2015) para uma revisão sobre modelos de dano concentrado com a consideração de fissuração por força cortante).

Realizando as corretas substituições, têm-se as deformações devidas às parcelas elásticas e parcelas danificadas como sendo:

$$\{\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_p\}_b = [\mathbf{F}(\mathbf{d})]_b \{\mathbf{M}\}_b \quad (55)$$

onde  $[\mathbf{F}(\mathbf{D})]_b$  corresponde à matriz de flexibilidade do elemento danificado:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{d})]_b = [\mathbf{F}_0]_b + [\mathbf{C}(\mathbf{d})]_b \quad (56)$$

$$[\mathbf{F}(\mathbf{d})]_b = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b(1-d_i)} & \frac{-L_b}{6EI_b} & 0 \\ \frac{-L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{AE_b} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Neste trabalho as estruturas de interesse são de concreto simples e com isso é possível desconsiderar a deformação plástica ( $\{\boldsymbol{\Phi}_p\}_b = \mathbf{0}$ ), que quantifica o escoamento da armadura. Também é desconsiderada a deformação plástica do concreto comprimido. Dessa forma, além das deformações elásticas, as deformações decorrente o dano, que quantificam a fissuração no concreto, são consideradas.

## 5.2 Critério de Griffith Generalizado

A evolução do dano pode ser descrita através do critério de Griffith, visto que a quantificação do dano é obtida a partir da presença de fissuras, cuja energia complementar de deformação de um elemento danificado de um pórtico é dado por (FLÓREZ-LÓPEZ *et al.*, 2015):

$$W_b = \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}_b^T \{\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi}_p\}_b = \frac{1}{2} \{\mathbf{M}\}_b^T [\mathbf{F}(\mathbf{D})]_b \{\mathbf{M}\}_b \quad (58)$$

Portanto, a taxa de liberação de energia nas rótulas  $i$  e  $j$  pode ser expressa considerando a variável dano. A taxa de liberação de energia nas rótulas é chamada de "Momentos de danificação" e dada por:

$$G_i^d = \frac{\partial W_b}{\partial d_i} = \frac{F_{11}^0 m_i^2}{2(1-d_i)^2} = \frac{L_b m_i^2}{6EI_b (1-d_i)^2} \quad (59)$$

$$G_j^d = \frac{\partial W_b}{\partial d_j} = \frac{F_{22}^0 m_j^2}{2(1-d_j)^2} = \frac{L_b m_j^2}{6EI_b (1-d_j)^2} \quad (60)$$

E as leis de evolução do dano baseadas no critério de Griffith são:

$$\begin{cases} \Delta d_i = 0 & \text{se } G_i^d < R_i^d \\ G_i^d = R_i^d & \text{se } \Delta d_i > 0 \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} \Delta d_j = 0 & \text{se } G_j^d < R_j^d \\ G_j^d = R_j^d & \text{se } \Delta d_j > 0 \end{cases} \quad (62)$$

onde,  $R_i^d$  e  $R_j^d$  correspondem às funções de resistência à fissuração nas rótulas inelásticas.

## 6.2 Abertura de Fissuras como uma Função do Dano em Rótulas Inelásticas

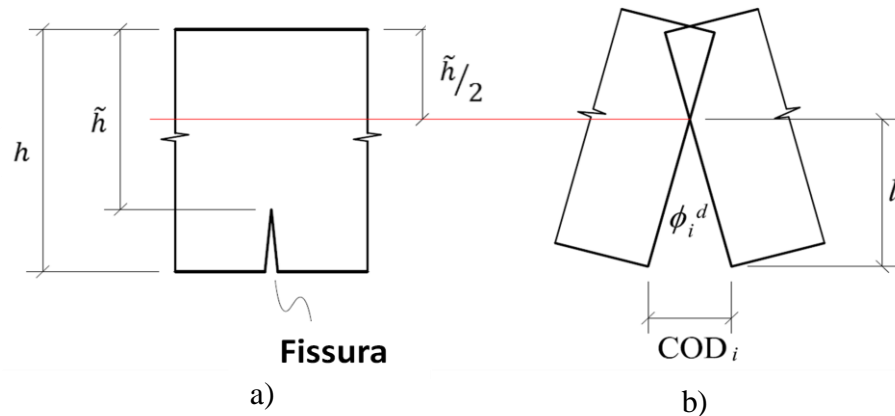
Diferente das estruturas em concreto armado, quando se ativa uma rótula inelástica, em estruturas de concreto simples, existe a predominância de uma fissura principal que pode se propagar até o colapso da seção transversal. Ao considerar esse comportamento particular, a abertura da fissura (*Crack Opening Displacement (COD)*) pode ser estimada a partir de seu ângulo de abertura ( $\phi_i^d$ ) nas rótulas inelásticas .

Considerando a região fissurada em um dado elemento estrutural, a resistência da seção transversal com altura  $\tilde{h}$  é menor que a resistência da seção transversal com sua altura

total  $h$ , devido a presença da fissura. Na TDC a fissura é descrita por meio da variável dano, resultando em uma rotação decorrente do dano na rótula inelástica (Figura 13). Tomando  $l$  como a distância entre a base da fissura e o eixo neutro, a  $COD_i$  pode ser calculada como o comprimento de um arco de circunferência com ângulo de abertura correspondente a  $\phi_i^d$  (AMORIM, 2016):

$$COD_i \cong \phi_i^d l = \phi_i^d \left( h - \frac{\tilde{h}}{2} \right) \quad (63)$$

Figura 13 - Abertura de fissura: a) fissura física b) rótula inelástica



Fonte: Adaptado de AMORIM, 2016.

Amorim *et al.* (2014) assumiram que o momento de inércia é diretamente afetado pelo dano. Com isso, em uma rótula inelástica, existe um momento de inércia efetivo cuja aproximação pode ser dada por:

$$\tilde{I}_b \cong I_b (1 - d_i) \quad (64)$$

Logo,

$$\frac{b\tilde{h}^3}{12} \cong \frac{bh^3}{12} (1 - d_i) \quad \therefore \tilde{h} = h \sqrt[3]{1 - d_i} \quad (65)$$

Por fim,  $COD_i$  é dado por:

$$COD_i \cong \phi_i^d h \left( 1 - \frac{\sqrt[3]{1 - d_i}}{2} \right) \quad (66)$$

onde  $d_i$  corresponde à variável dano na rótula inelástica.

## 7.2 Modelagem da evolução de fissura através da TDC

Em estruturas de concreto armado o dano apresenta-se em forma de múltiplas fissuras na região de rótulas plásticas ou inelásticas. No entanto, no caso do concreto simples submetido a um carregamento monotônico, pode-se assumir que o dano está associado a uma fissura singular, além de que, nessa condição, as rotações plásticas podem ser desconsideradas. Dessa forma, o problema de mecânica da fratura pode ser tratado com ferramentas da TDC (AMORIM, 2016).

A partir da mecânica da fratura, equação 14, o fator de intensidade de tensão  $K_I$  pode ser expresso em termos da taxa de liberação de energia:

$$K_I = \sqrt{EG} \quad (67)$$

Amorim (2016) mostra que a taxa de liberação de energia oriunda do problema fundamental de Griffith está relacionada com o momento de danificação através da seguinte expressão:

$$G_i = G_i^d \frac{\partial d}{\partial \Omega} \quad (68)$$

onde  $\Omega$  corresponde a área da superfície fissurada. Logo,

$$K_I = \sqrt{EG_i^d \frac{\partial d}{\partial \Omega}} \quad (69)$$

A fim de calcular a taxa de liberação de energia é preciso relacionar o dano com a superfície fissurada:

$$d = d(\Omega) \quad (70)$$

Tal função do dano precisa atender às seguintes condições de contorno:

$$d(0) = 0 \quad d(A) = 1 \quad \left. \frac{\partial d}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=0} = 0 \quad (71)$$

onde  $A$  corresponde à área da seção transversal. As duas primeiras condições de contorno podem ser entendidas diretamente, pois quando  $\Omega = 0$  não há dano e quando  $\Omega = A$  a seção encontra-se totalmente fissurada. A terceira condição de contorno é oriunda de  $K_I$ , pois quando a superfície fissurada é nula  $K_I$  também é nulo, visto que  $K_I$  só possui valor diferente de zero quando já existe fissura.

Ao estudar um elemento estrutural de seção transversal retangular, Amorim (2016) obteve a seguinte expressão para a função de dano:

$$d(\Omega) = 1 - \left(1 - \frac{\Omega}{A}\right)^3 \quad (72)$$

Como a equação 72 não satisfaz todas as condições de contorno do problema, o autor adotou uma nova expressão para o dano a partir de uma modificação empírica, multiplicando o segundo membro da equação 72 por uma função linear:

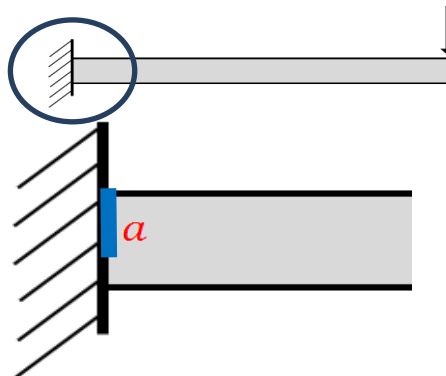
$$d(\Omega) = \frac{\Omega}{A} - \frac{\Omega}{A} \left(1 - \frac{\Omega}{A}\right)^3 \quad (73)$$

Amorim (2016) realizou uma análise para validar a equação 73 e constatou que a solução para a TDC pode ser dada considerando esta equação de forma direta. Em sua tese, o autor confrontou numericamente a TDC com a mecânica da fratura, aplicando a teoria em uma viga em balanço (Figura 14) e obteve a seguinte expressão para a função de dano:

$$d(a) = \frac{a}{h} - \frac{a}{h} \left(1 - \frac{a}{h}\right)^3 \quad (74)$$

onde  $a$  corresponde ao comprimento do entalhe ou da fissura (Figura 14).

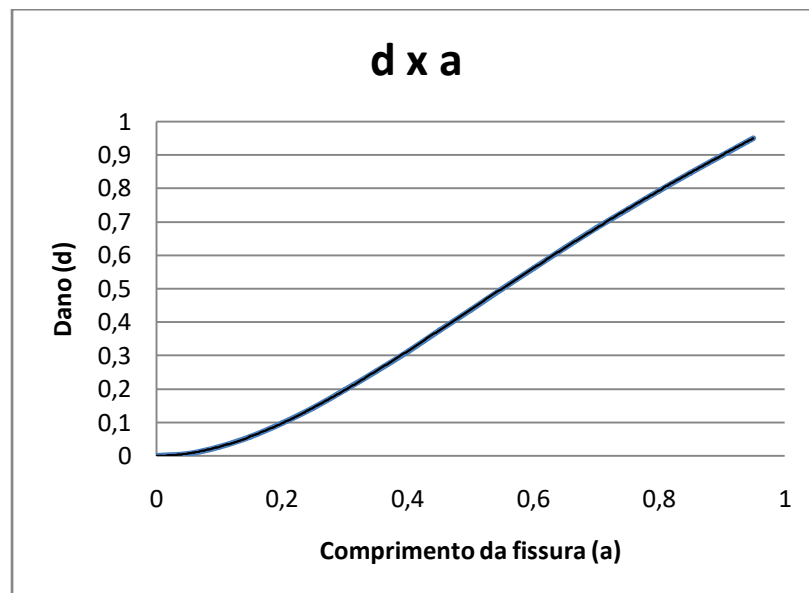
**Figura 14 - Entalhe da viga engastada**



Além desta aplicação em viga engastada, o autor realizou a comparação entre valores de  $K_I$  adimensionais obtidos através da mecânica da fratura e TDC para uma viga submetida à flexão em um ensaio de flexão de três pontos, obtendo por meio da expressão 74 da TDC resultados próximos àquele obtidos por meio da mecânica da fratura.

A figura 15 apresenta o gráfico correspondente a expressão 74, ilustrando o comportamento do dano em função do comprimento da fissura, para um comprimento de fissura variando de 0 até 95% da altura da seção transversal da viga.

**Figura 15 - Dano em função do comprimento da fissura**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.



### 3 APLICAÇÃO EM VIGA DE CONCRETO SIMPLES

O presente trabalho fez uso de resultados experimentais obtidos por Carvalho (2015), com isso, este capítulo visa apresentar o procedimento experimental adotado, as características dos corpos de prova (vigas em concreto simples) ensaiados e a formulação utilizada para obtenção dos valores de rigidez pelo autor.

Neste capítulo também será mostrada a modelagem da TDC para a situação do ensaio experimental.

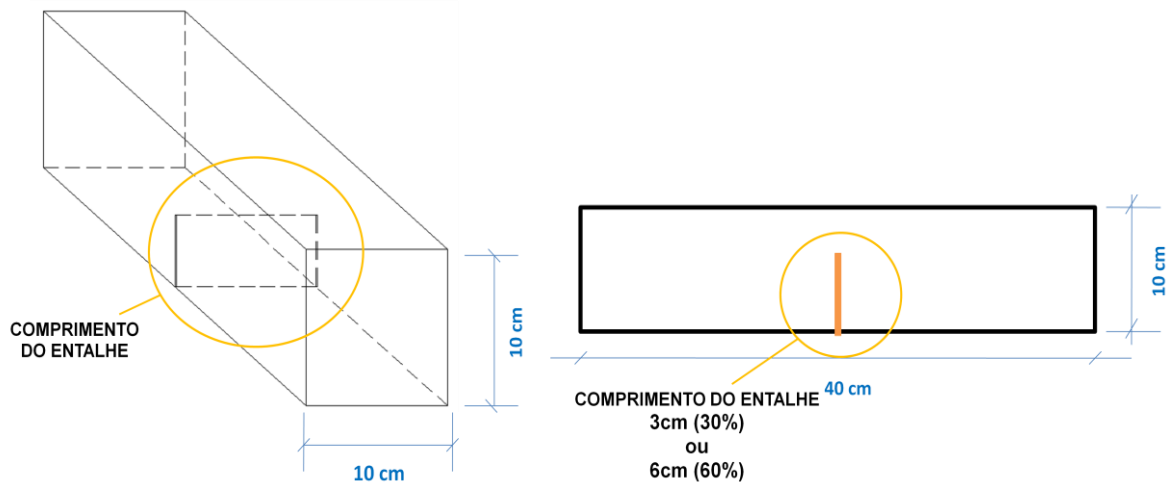
#### 1.2 Apresentação do problema

Carvalho (2015) realizou um estudo teórico-experimental com o objetivo de verificar indícios da existência do dano, utilizando a rigidez à flexão ( $EI$ ) como parâmetro, por meio da comparação entre os valores de rigidez das vigas no estado íntegro e danificado. Em seguida foi realizada uma análise estatística para avaliar a eficiência do parâmetro adotado, análise esta que mostrou que para as vigas estudadas a rigidez pode ser considerada um bom parâmetro para avaliar a presença de dano. No presente trabalho o dano considerado por Carvalho (2015) equivale ao comprimento de entalhe, ou seja, o comprimento da fissura.

O ensaio de quatro pontos realizado por Carvalho (2015) foi realizado em dois lotes de vigas de concreto simples, cada lote apresentou três situações distintas, na primeira situação as vigas não possuíam entalhes concentradas no meio do vão, nas outras situações o autor introduziu fissuras com comprimentos distintos.

Foram ensaiadas 10 vigas de 40 cm por 10 cm, distribuídas em dois lotes, sendo 4 (quatro) vigas íntegras, 3 (três) submetidas a uma fissura quantificada pelo autor em 30%, referente a um entalhe de 3 cm, e 3 (três) vigas submetidas a uma fissura de 60%, referente a um entalhe de 6 cm (Figura 16). O entalhe introduzido apresenta uma espessura de 5 mm e possui direção perpendicular ao eixo da viga.

**Figura 16 - Ilustração do comprimento do entalhe**



Fonte: Adaptado de CARVALHO, 2015.

Carvalho (2015) obteve três lotes de vigas em concreto simples para sua dissertação, entretanto, para o presente trabalho, foi de interesse o uso dos ensaios realizados em dois lotes (Lote II e Lote III), pois o primeiro lote do autor tratava-se de ensaio de flexão de vigas em concreto simples em três pontos.

Os valores da resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) foram obtidos através do ensaio de resistência à compressão axial conforme prescrito na NBR 5739:2007, ao passo que o módulo estático de elasticidade à compressão foi obtido a partir do ensaio de módulo de elasticidade longitudinal prescrito na NBR 8522:2008. Os resultados encontrados são apresentados no Quadro 1.

**Quadro 1 - Resistência característica à compressão do concreto e Módulos de elasticidade longitudinal**

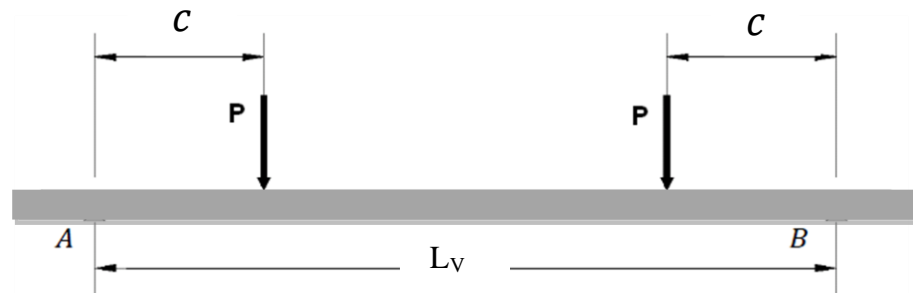
LOTE	Ensaio de resistência à compressão axial	Ensaio de Módulo de Elasticidade (E)
	$f_{ck}$ (MPa)	E (GPa)
Lote II	23,36	23,09
Lote III	19,96	19,19

Fonte: CARVALHO, 2015.

As vigas a serem avaliadas quanto ao início da presença de dano são simétricas e foram submetidas ao ensaio experimental de flexão em quatro pontos, neste tipo de ensaio as

vigas encontram-se simplesmente apoiadas e são solicitadas por duas cargas concentradas. As cargas impostas possuíam mesma intensidade ( $P$ ) e mesma distância ( $c$ ) em relação aos apoios A e B (Figura 17).

**Figura 17 - Esquematização do ensaio de Flexão de quatro pontos**



Fonte: Adaptado de CARVALHO, 2015.

onde:

$P$  é o valor da carga externa;

$c$  corresponde a distância entre o apoio mais próximo e a carga externa;

$L_v$  é o vão da viga;

A e B são os apoios.

Os apoios foram posicionadas na face superior da vigas a uma distância de 2,5 cm em relação as extremidades da viga, ficando o vão da viga sendo de 35 cm. Para a estimativa da rigidez à flexão, Carvalho (2015) fez uso do deslocamento vertical no meio do vão das vigas, o deslocamento foi medido em tempo real do início do ensaio até a ruína da viga com intervalos de tempo de 30 segundos, através de um relógio comparador analógico com precisão de 0,01 mm, posicionado na face inferior da vigas (Figuras 18 e 19). A velocidade de incremento de tensão foi de 0,09 MPa/min.

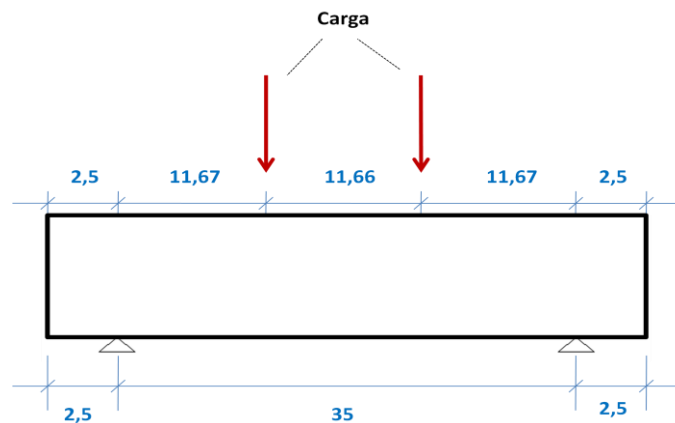
**Figura 18- Ilustração do aparato experimental para a realização do ensaio a flexão em quatro pontos com o posicionamento do relógio comparador analógico.**



Fonte: CARVALHO, 2015.

O modelo esquemático do ensaio é apresentado na Figura 19.

**Figura 19 - Posicionamento dos carregamentos aplicados. Dimensões em centímetros.**



Fonte: Adaptado de CARVALHO, 2015.

Carvalho (2015) obteve os valores de rigidez à flexão a partir da equação 73, a qual foi obtida através de conceitos relacionados com a curvatura da viga biapoiada com duas cargas concentradas distantes  $c$  dos apoios.

$$EI = P c \frac{\left(\frac{LV}{2}\right)^2 + w_r^2}{2 w_r} \quad (75)$$

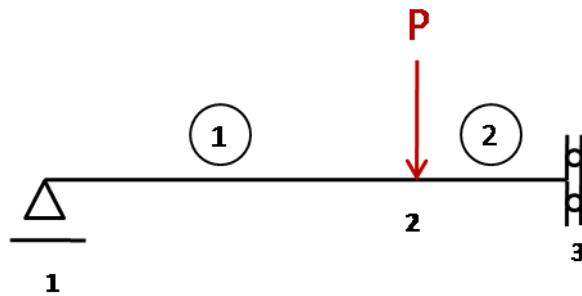
onde  $w_r$  corresponde ao deslocamento.

Partindo dos resultados experimentais obtidos por Carvalho (2015), o presente trabalho busca obter valores de rigidez à flexão através da TDC para comparar com os valores obtidos pela análise linear do autor e, dessa forma, estimar o dano para situações distintas das impostas nas vigas de concreto simples ensaiadas.

## 2.2 Modelagem via TDC

Seguindo as formulações apresentadas no item dois do presente trabalho foi desenvolvida uma rotina analítica para a estimativa da rigidez por meio da TDC. Para simplificar o problema, fez-se uso da simetria da viga ensaiada, realizando uma rotina para a primeira metade do vão da viga com apoios compatíveis com o problema, cujo modelo é constituído por três nós e dois elementos (Figura 20).

Figura 20 - Modelo implementado.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Inicialmente são montadas as matrizes de deslocamentos generalizados ( $\{\mathbf{U}\}$ ) e de forças externas generalizadas ( $\{\mathbf{P}\}$ ) dos nós para o sistema de referência mostrado na Figura 19:

$$\{\mathbf{U}\} = \{u_1 \ 0 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ 0 \ w_3 \ 0\}^T \quad (76)$$

$$\{\mathbf{P}\} = \{0 \ R_{w1} \ 0 \ 0 \ -p \ 0 \ R_{u3} \ 0 \ R_{\theta3}\}^T \quad (77)$$

Em seguida são montadas as matrizes de deformações ( $\{\Phi\}_b$ ) e esforços ( $\{M\}_b$ ) generalizados de cada elemento:

$$\{\Phi\}_1 = \{\phi_{11} \quad \phi_{12} \quad \delta_1\}^T \quad (78)$$

$$\{M\}_1 = \{m_{11} \quad m_{12} \quad n_1\}^T \quad (79)$$

$$\{\Phi\}_2 = \{\phi_{22} \quad \phi_{23} \quad \delta_2\}^T \quad (80)$$

$$\{M\}_2 = \{m_{22}m_{23} \quad n_2\}^T \quad (81)$$

Com uso da equação (41) obtém-se as matrizes de transformação cinemática para cada elemento acrescidas de zeros:

$$[B_E(\mathbf{U})]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1} & 1 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$[B_E(\mathbf{U})]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 1 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

A partir da equação 49 foram obtidas as matrizes de flexibilidade elástica de cada elemento:

$$[F_0]_1 = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{3EI} & -\frac{L_1}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_1}{6EI} & \frac{L_1}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_1}{AE} \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$[\mathbf{F}_0]_2 = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{3EI} & -\frac{L_2}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_2}{6EI} & \frac{L_2}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_2}{AE} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Com a aplicação da equação 54 foram obtidas as matrizes de flexibilidade adicional decorrentes da presença do dano de cada elemento. Visto que no problema proposto apenas o elemento 2 apresenta danificação, a matriz de flexibilidade adicional do elemento 1 torna-se nula e a matriz de flexibilidade do elemento 2 corresponde a:

$$[\mathbf{C}(\mathbf{d})]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2 d_{23}}{3EI(1-d_{23})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Pelo fato de o elemento 1 não apresentar danificação em nenhum de seus nós, a matriz de flexibilidade do elemento 1 total é igual a matriz de flexibilidade elástica. Diferente do ocorrido no elemento 1, o elemento 2 apresenta dano no nó 3, fazendo com que a matriz de flexibilidade total seja igual a soma das matrizes de flexibilidade elástica e adicional:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{d})]_2 = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{3EI} & -\frac{L_2}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_2}{6EI} & \frac{L_2}{3EI} + \frac{L_2 d_{23}}{3EI(1-d_{23})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_2}{AE} \end{bmatrix} \quad (87)$$

A última etapa consistiu na montagem das equações de equilíbrio (Equação 47), da relação constitutiva (Equação 48) e da equação cinemática (Equação 39).

## 4 RESULTADOS E ANÁLISES

No presente capítulo são mostrados os resultados e análises obtidos, estes foram divididos em duas etapas.

A primeira etapa consiste na comparação entre valores de rigidez obtidos no estudo de Carvalho (2015) e valores obtidos por meio da TDC. Na segunda etapa são apresentados os ábacos desenvolvidos através da TDC.

### 1.2 Comparação entre o modelo da TDC com o Modelo Linear

Para certificar que o modelo analítico desenvolvido a partir da TDC aplica-se para a estimativa da rigidez à flexão de vigas sujeitas a comprimentos de entalhe diferentes das vigas ensaiadas por Carvalho (2015), foi feita a análise dos resultados a partir da comparação entre os valores de rigidez obtidos por Carvalho (2015), ao longo do processo de carregamento, com os obtidos com o modelo analítico da TDC desenvolvido para as situações de corpo de prova íntegro (CP-SF) e para os corpos de prova com dano de 30% ( $d=0,1971$ ), como foi chamado pelo autor. Os corpos de prova íntegros são referenciados, no presente trabalho, como corpos de prova com dano igual a zero.

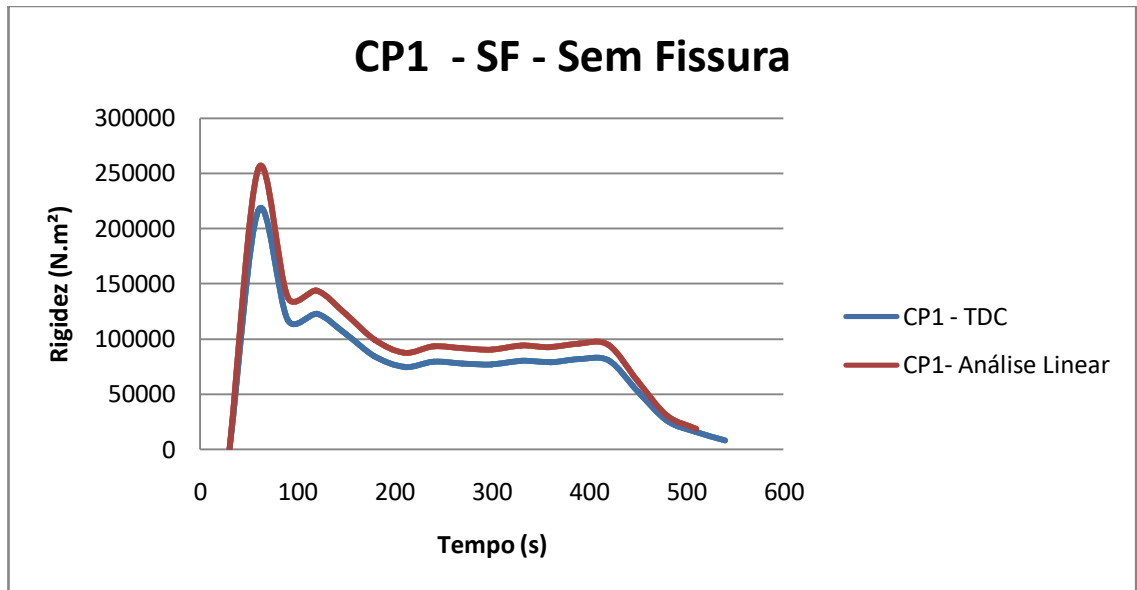
Os dados de entrada da TDC utilizados para obter os dados de saída correspondentes às rigidezes à flexão, foram as forças e deslocamentos medidos no ensaio experimental, como também o dano referente à situação de comprimento de entalhe imposto por Carvalho (2015), o valor do dano foi obtido através da equação 74 apresentada no item 2.7. A seguir, é apresentado o valor do dano conforme a TDC para situação de comprimento de entalhe de 3 cm, ou dano de 30%, segundo definido por Carvalho (2015), e altura da peça de 10 cm:

$$d(3) = \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \left(1 - \frac{3}{10}\right)^3 = 0,1971 \quad (88)$$

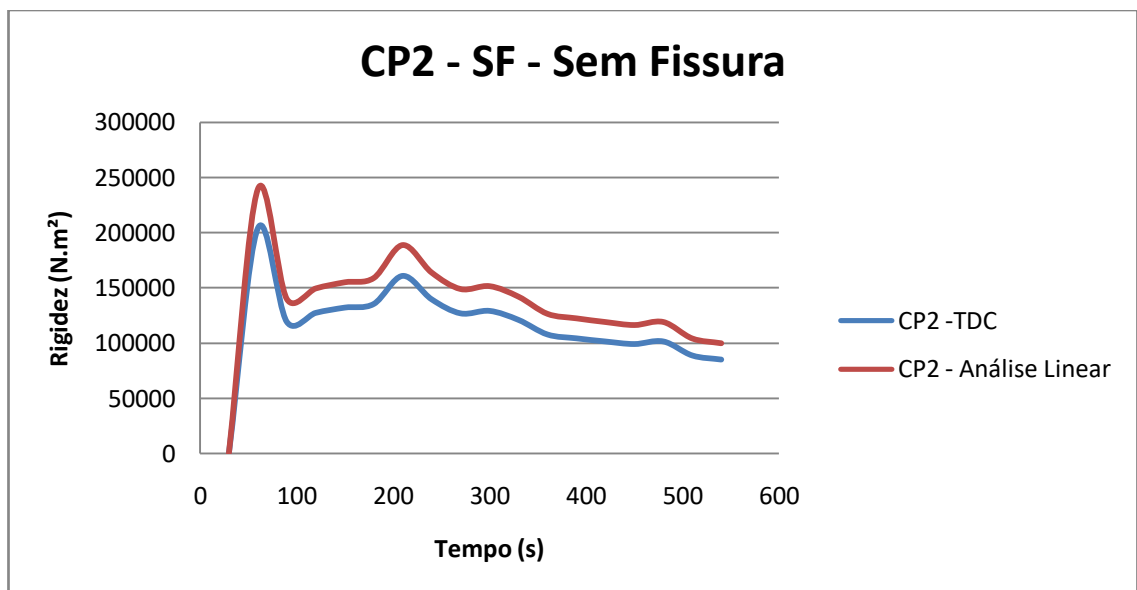
Os gráficos que fornecem a variação da rigidez à flexão com o tempo para as situações em que o dano da viga vale zero e 30%, são apresentados nas figuras 21 e 22. São mostradas as curvas obtidas por Carvalho (2015) e as obtidas por meio da TDC para cada corpo de prova do Lote II.



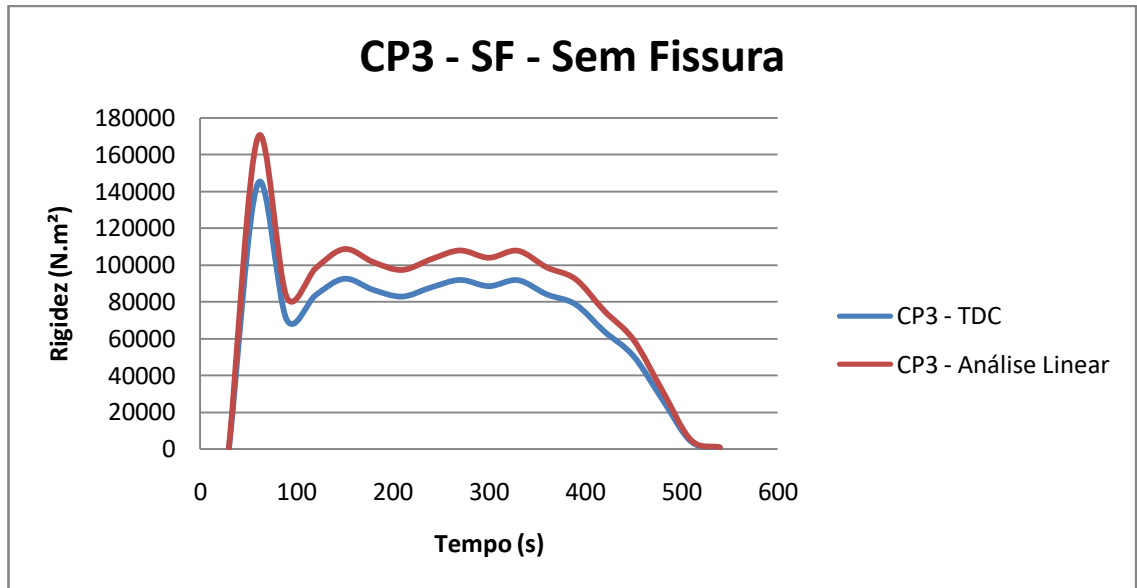
Figura 21 - Variação da rigidez à flexão com o tempo para cada corpo de prova com dano zero a) CP1-SF b) CP2-SF c) CP3-SF d) CP4-SF



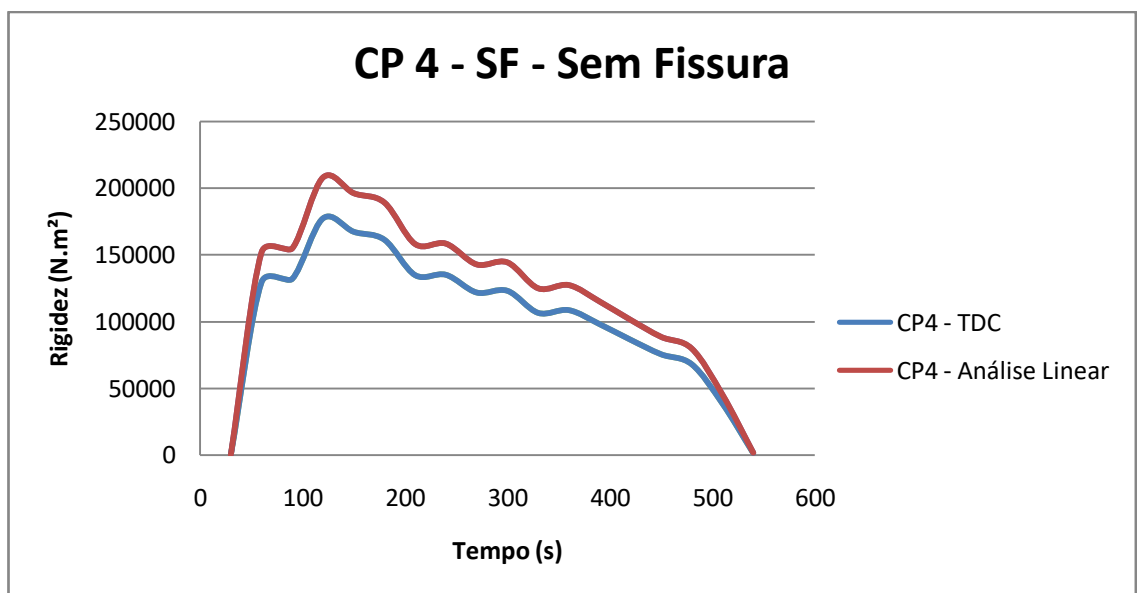
a)



b)

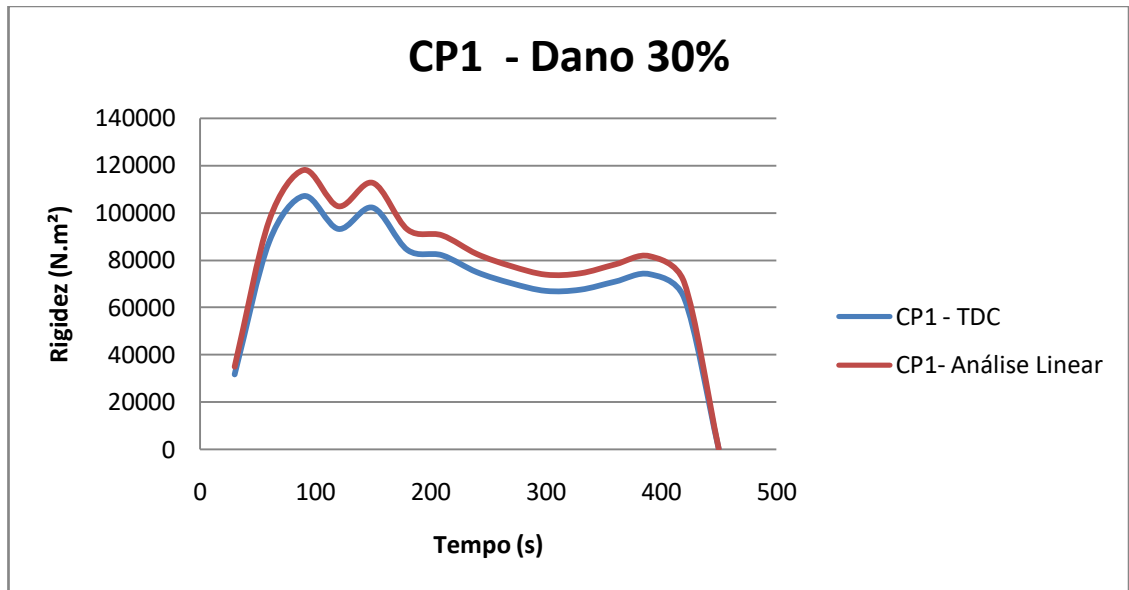


c)

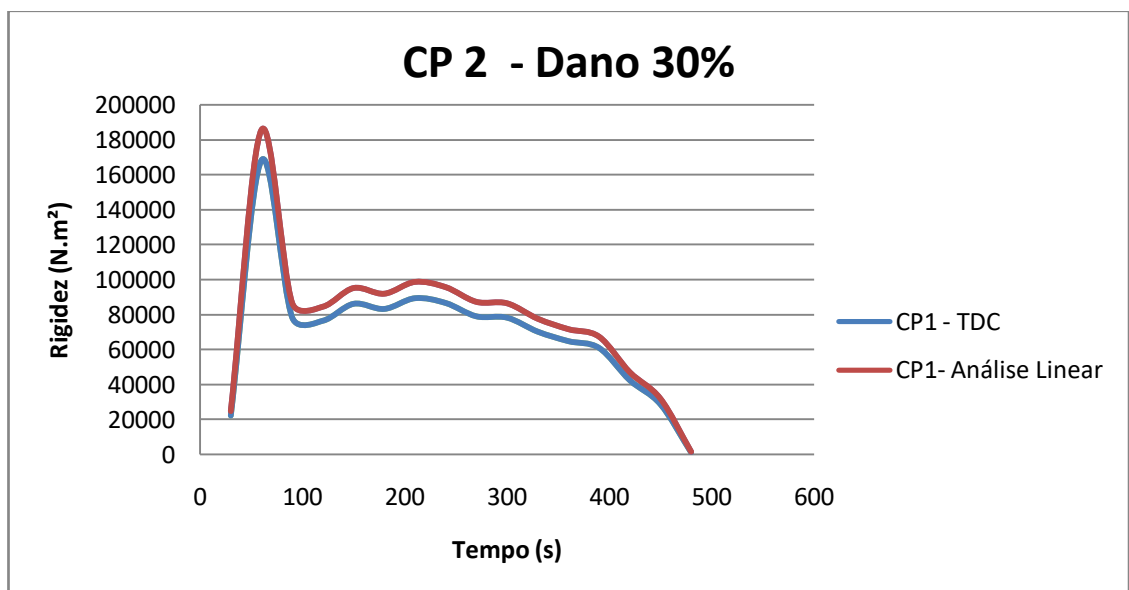


d)

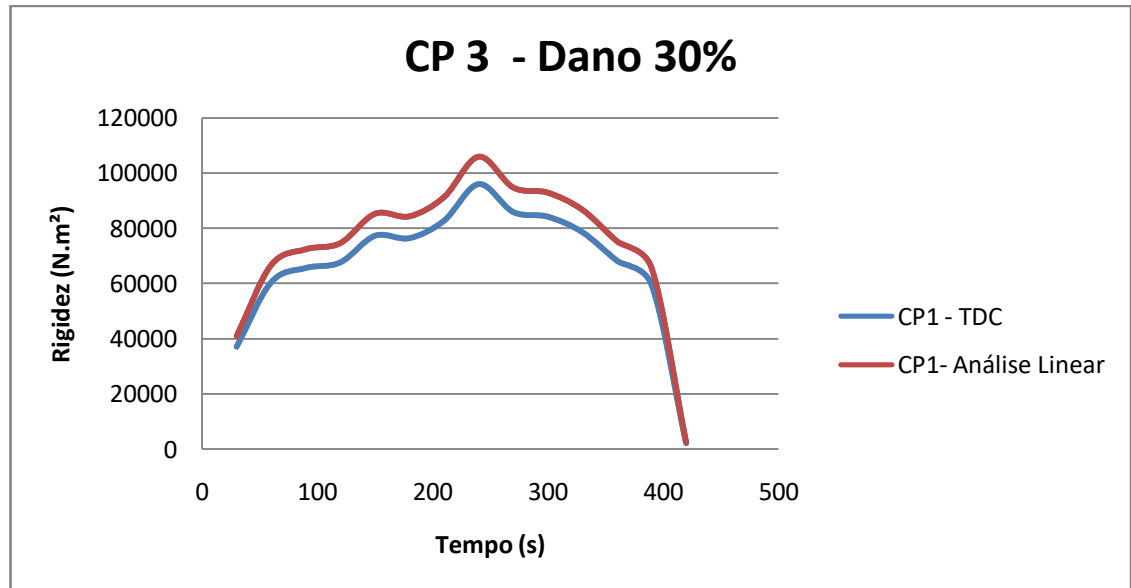
Figura 22 - Variação da rigidez à flexão com o tempo para cada corpo de prova com dano de 30% a) CP1-30 b) CP2-30 c)CP3-30



a)



b)



c)

Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

A análise dos gráficos das figuras 21 e 22, permite notar a semelhança qualitativa e quantitativa do comportamento dos corpos de prova nos dois métodos de análise.

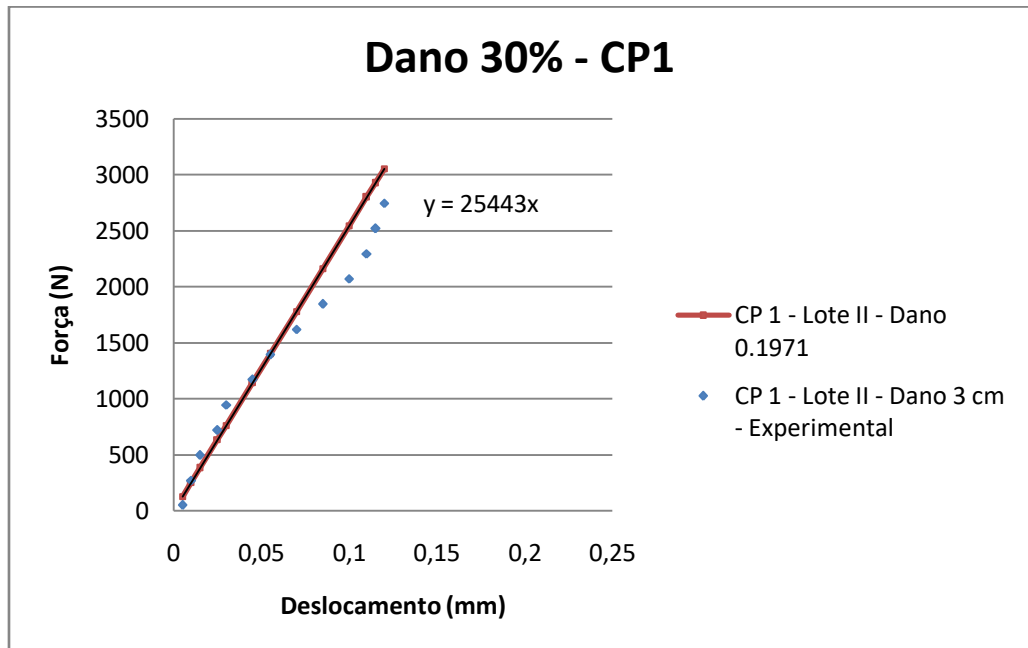
O comportamento obtido através da TDC apresentou valores de rigidez inferiores ao obtido através da análise linear. Um dos fatores que pode ter gerado este comportamento é o fato da TDC considerar a presença da rótula inelástica localizada onde existe fissuração, pois ao comparar a formulação elástica desenvolvida por Carvalho (2015) e o desenvolvimento da TDC a principal diferença entre elas é o fato da TDC considerar o comportamento inelástico do concreto através da rótula.

Com uso da TDC é possível utilizar diferentes valores de dano para obtenção da rigidez à flexão. Diferente da análise adotada por Carvalho (2015), a TDC permite a obtenção da rigidez sem haver a imposição de um comprimento de entalhe a ser submetido a um ensaio experimental.

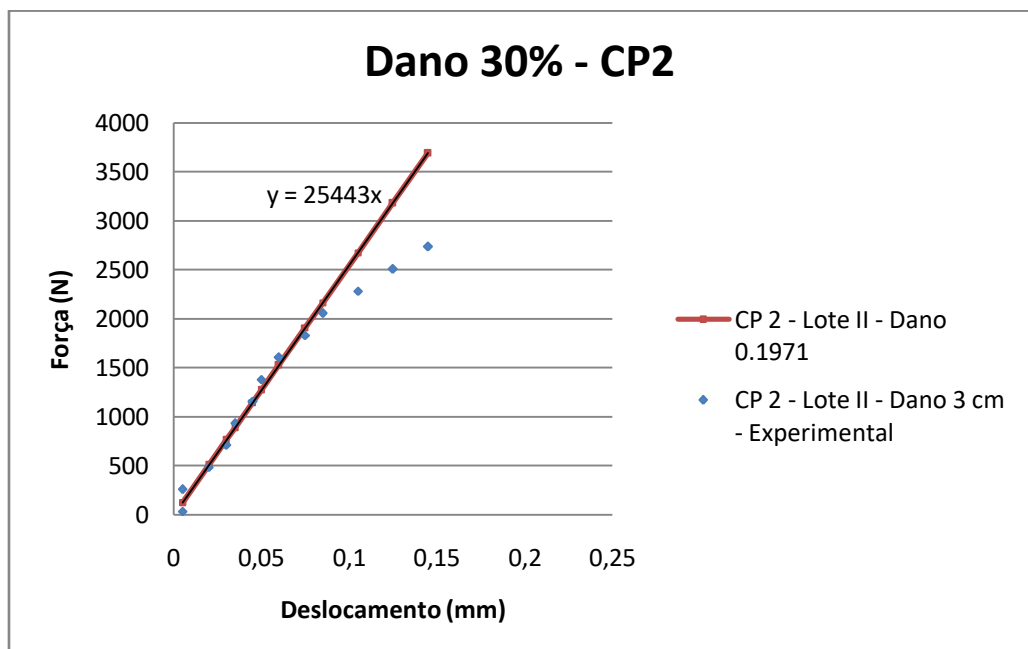
A partir dos valores de rigidez à flexão obtidos através TDC para o Lote II de vigas íntegras, foram estimados valores de forças, também por meio da TDC, para as vigas com dano de 0,1971. Os dados de entrada do modelo foram a rigidez média dos corpos de prova no estado íntegro, o dano da TDC referente às vigas com dano de 30% ( $d=0,1971$ ) e os deslocamentos obtidos experimentalmente, esta metodologia foi utilizada para os três corpos de prova.

A seguir são apresentados os gráficos força-deslocamento com valores obtidos experimentalmente e por meio da TDC.

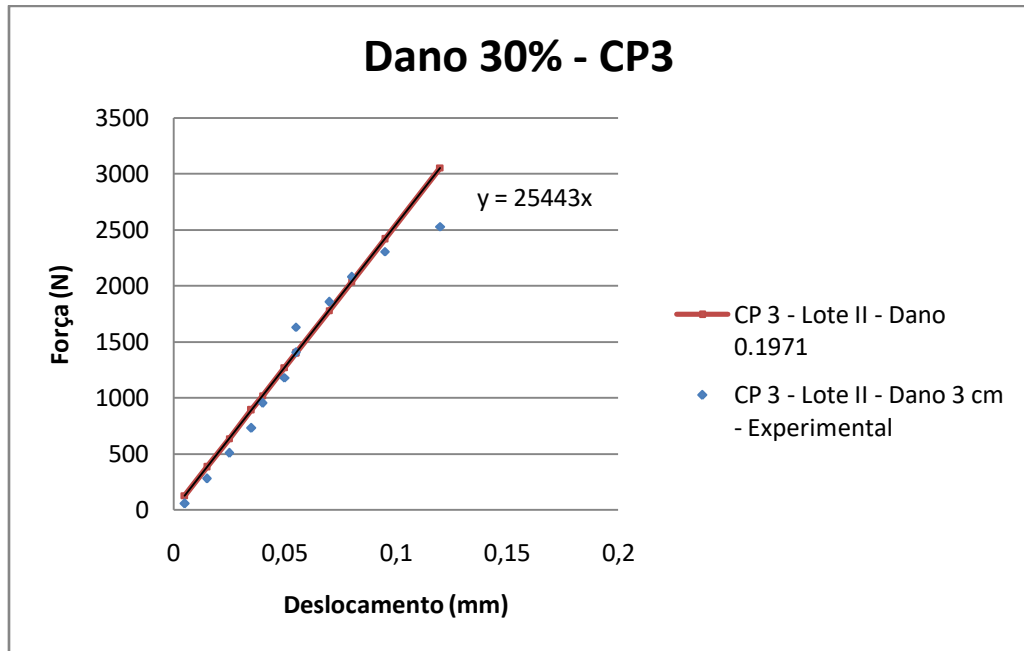
Figura 23 - Gráficos força-deslocamento a) CP1-3 cm b) CP2-3 cm c) CP3-3 cm



a)



b)



c)

Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Ao analisar os gráficos apresentados na Figura 23, nota-se que os valores obtidos a partir da TDC seguem um comportamento linear, podendo ser aproximado por uma reta com mesmo valor de coeficiente angular para os diferentes corpos de prova. Ao notar o comportamento do primeiro corpo de prova, a partir da TDC, era esperado que os corpos de prova restantes apresentassem o mesmo comportamento, pois a formulação analítica utilizada foi a mesma, alterando apenas os valores de deslocamento. A equação da reta que corresponde a TDC para a situação da viga apresentada nesse trabalho vale:

$$F = 25443 w \quad (89)$$

onde  $F$  corresponde à força em Newtons e  $w$  o deslocamento em milímetros.

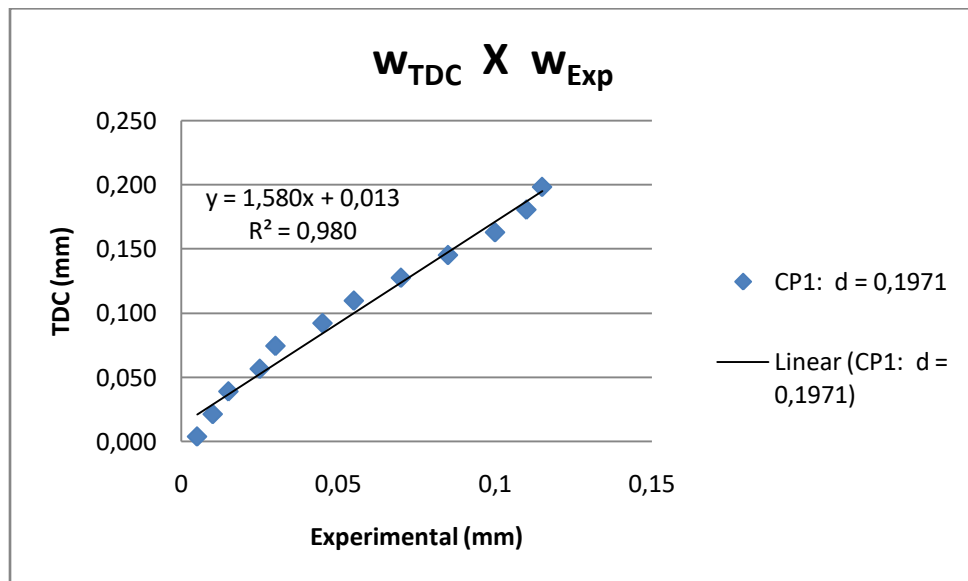
Ao comparar o comportamento dos dados experimentais com os obtidos através da TDC, percebe-se que os dados experimentais seguem a tendência da reta obtida a partir da TDC, afastando-se da mesma para valores maiores de deslocamentos, o que corresponde a uma situação próxima da ruptura.

Dentro desse contexto, a equação da reta obtida (equação 89), foi utilizada para encontrar valores de deslocamentos a partir das forças obtidas no ensaio de cada corpo de

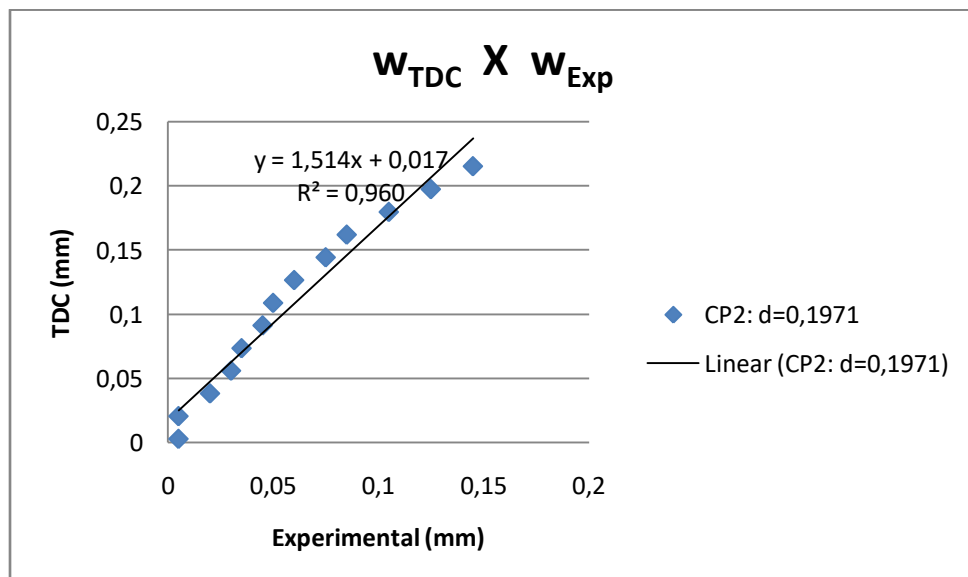
prova com dano de 0,1971, para que dessa forma os valores de deslocamentos experimentais fossem confrontados com os valores obtidos na TDC. Os gráficos deslocamentos experimentais - deslocamentos obtidos a partir da TDC para cada corpo de prova do Lote II são mostrados a seguir.

Figura 24 - Gráficos Deslocamento TDC - Deslocamento experimental a) CP1-3 cm b) CP2-3 cm

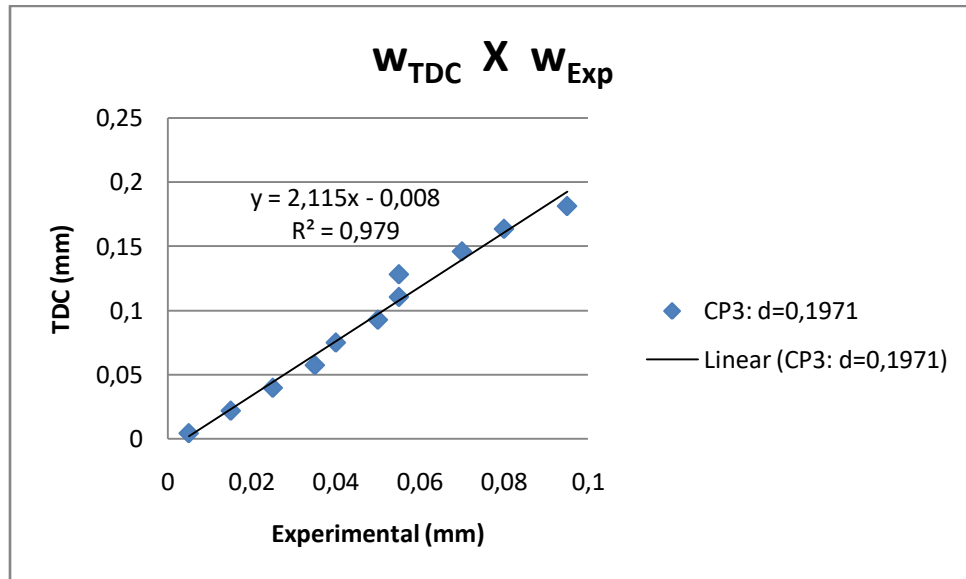
c) CP3-3 cm



a)



b)



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Os gráficos da Figura 24 mostram que os pontos relacionados aos valores de deslocamentos continuaram a seguir a tendência de uma reta. Para os três corpos de prova, as retas obtidas apresentam coeficiente de determinação ( $R^2$ ) próximos da unidade, o que indica que os deslocamentos obtidos através da TDC apresentam boa aderência em relação aos valores de deslocamentos obtidos experimentalmente.

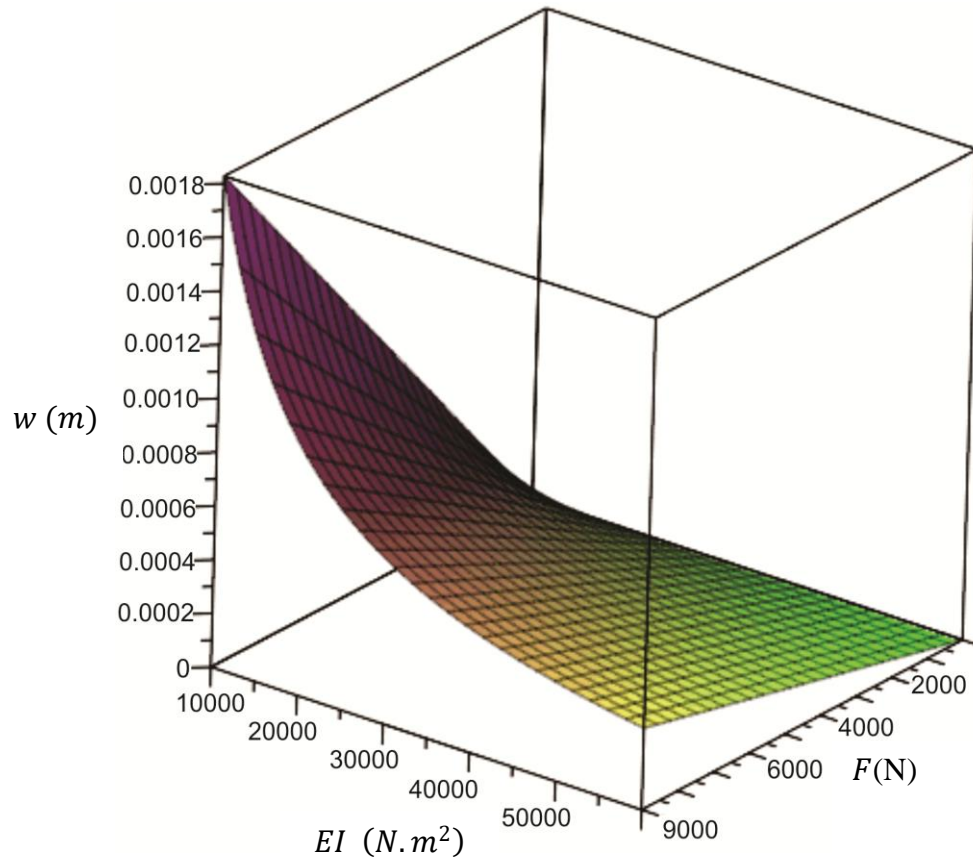
## 2.2 Ábacos

Para obtenção dos ábacos que consideram rigidez, deslocamento, dano e força foi realizada a implementação analítica, descrita no item 3.2 e avaliada a melhor maneira para relacionar as variáveis de interesse.

Tendo em vista que um gráfico tridimensional (Figura 25) permite observar a maneira como as variáveis se relacionam, considerou-se inicialmente sua montagem para a situação de dano fixada em 60% ( $d=0,5616$ ) e valores de rigidez, forças e deslocamentos variando de acordo com os dados obtidos no experimento de Carvalho (2015).



Figura 25 - Gráfico em 3D para curva de dano de 0,5616



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

O gráfico tridimensional mostra que forças e deslocamentos estão relacionados por uma reta para um valor de dano fixado, o mesmo comportamento observado no estudo inicial apresentado no item 4.1, o que era esperado, pois a teoria utilizada em ambos os casos foi a mesma, já deslocamentos e rigidez apresentaram a relação a partir de uma curva.

Os ábacos são obtidos através da seguinte expressão oriunda da TDC:

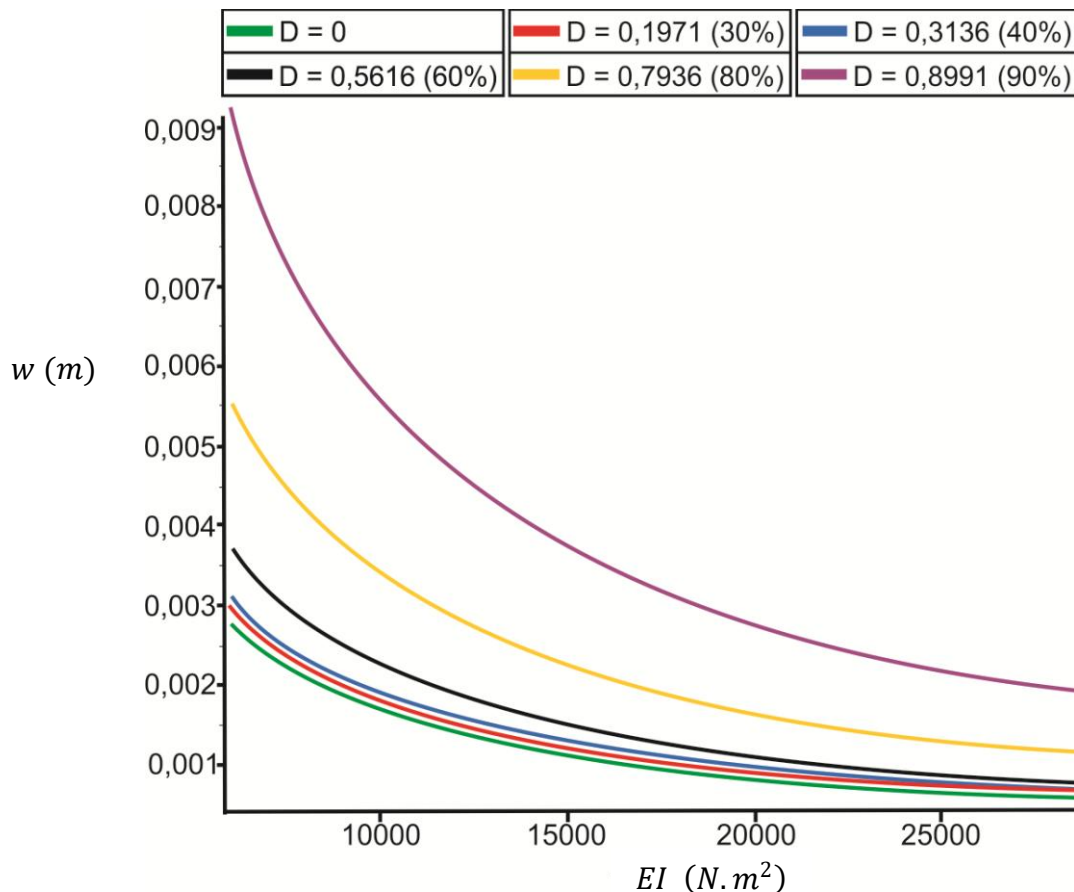
$$w = \frac{1,945 F (7,825611 - 5,785111 d)}{EI(1 - d)} \times 10^{-1} \quad (90)$$

onde o deslocamento  $w$  é dado em milímetros, a força  $F$  em Newtons e a rigidez  $EI$  em Newton metro quadrado.

A partir da observação do gráfico da Figura 25, optou-se por relacionar deslocamentos, rigidez e dano para carregamentos fixados, para que as curvas apresentadas

nos ábacos correspondessem ao dano. A figura 26 seguinte fornece o comportamento ilustrativo da relação, considerando diversas curvas de dano para uma força fixada.

**Figura 26 - Curvas ilustrativas com diferentes valores de dano para uma força fixada.**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

As curvas em verde, vermelho e azul correspondem aos danos 0, 0,1971 e 0,3136, respectivamente, valores relativamente baixos de dano, caracterizando uma estrutura pouco danificada, com configuração mais distante da ruptura. A curva em verde representa a seção transversal íntegra e as vermelha e azul são curvas cujo dano se encontra mais próximo da situação íntegra que da situação totalmente danificada, logo os valores de dano encontram-se mais afastados de 1,00. As curvas em amarelo e roxo são curvas cujo dano corresponde a 0,7936 e 0,8991, respectivamente, situações que indicam que a fissura ocupa boa parte da seção transversal, sugerindo o colapso da peça.

Ao analisar o gráfico da figura 26 percebe-se que para o mesmo valor de rigidez, à medida que o valor de dano aumenta o deslocamento também aumenta. Curvas com valores

de dano mais próximos a 1 apresentam deslocamentos muito maiores do que as demais (curvas amarela e roxa). Assim, a relação não linear entre a variável de dano e a resposta de deslocamento da viga fica evidente no gráfico apresentado. Para deslocamentos pequenos todas as curvas de dano tendem a valores de rigidez muito elevados, mostrando que independentemente do dano da viga, vigas mais rígidas tendem a apresentar deslocamentos menores.

Tendo em vista as curvas de dano obtidas a partir da TDC, foi realizada a comparação entre os dados oriundos do trabalho de Carvalho (2015) e as curvas de dano para os corpos de prova de ambos os lotes, considerando as situações de comprimento de entalhe de 3 cm e 6 cm.

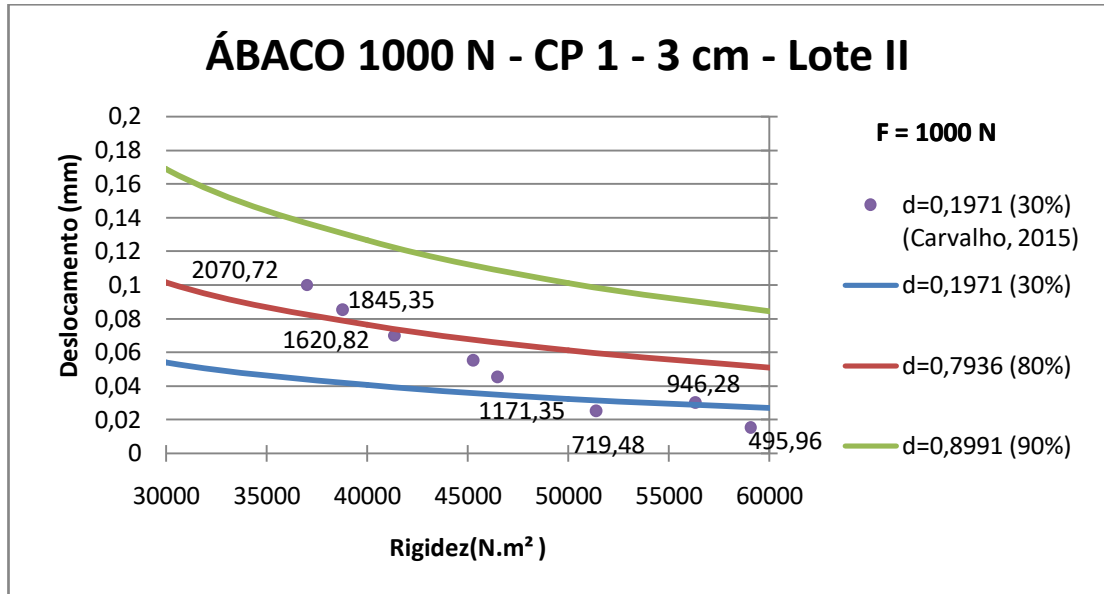
### **3.2 Ábacos TDC versus Análise Linear**

Parte dos ábacos advindos da TDC relacionados com dados experimentais oriundos da análise linear, referentes ao comprimento de entalhe de 3 cm e 6 cm do Lote II, são mostrados nas Figuras 27 à 34. Ábacos referentes ao Lote III são mostrados no Apêndice A.

As forças fixadas para os ábacos foram escolhidas de acordo com os valores obtidos através do ensaio experimental para que dessa forma fosse realizada a comparação. Vigas com o comprimento de entalhe de 3 cm tiveram os ábacos construídos com as forças fixadas em 1000 N e 2000 N. Vigas com o comprimento de entalhe de 6 cm tiveram as forças fixadas em 500 N e 1000 N.

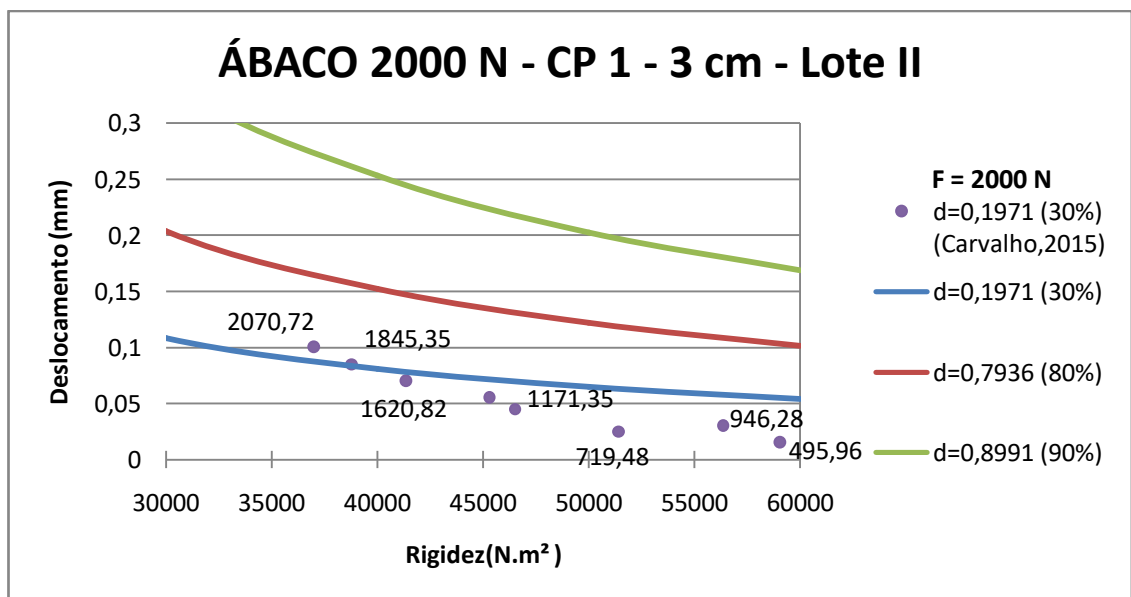
Os pontos referentes aos valores obtidos por Carvalho (2015) estão acompanhados pelos valores de forças em Newtons obtidos no ensaio experimental.

Figura 27 - Ábaco Força de 1000 N: CP 1 - 3 cm - Lote II.



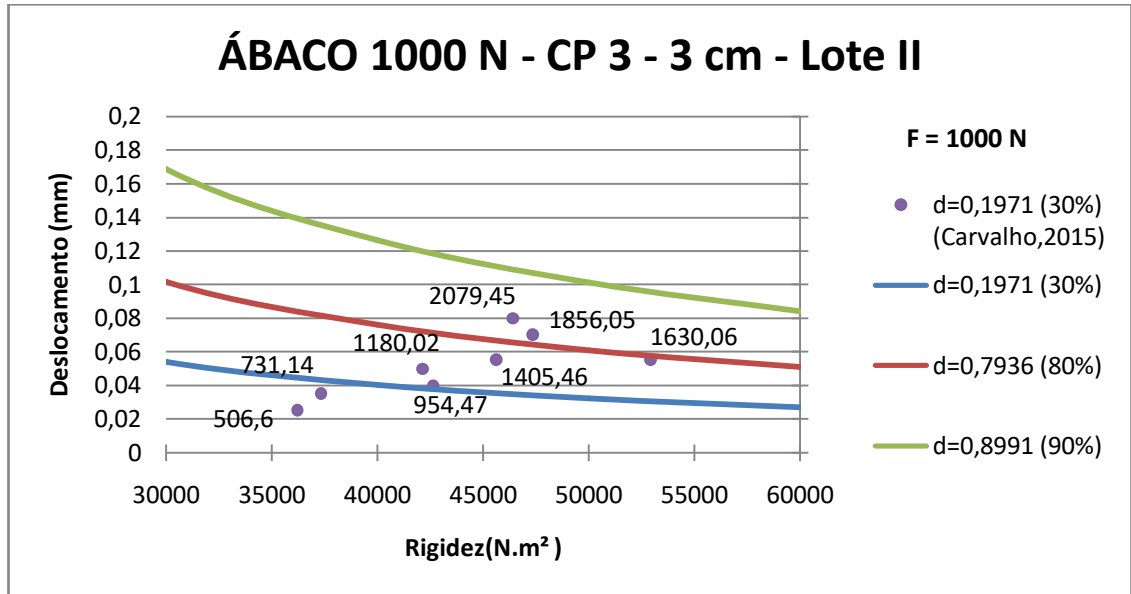
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 28 - Ábaco Força de 2000 N: CP 1 - 3 cm - Lote II.



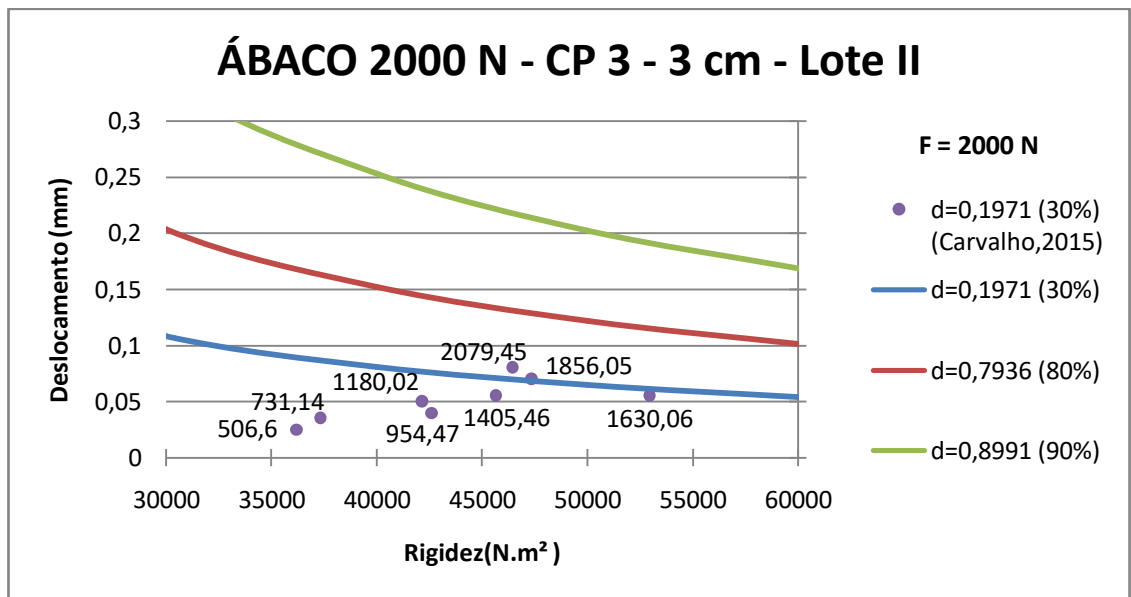
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 29 - Ábaco Força de 1000 N: CP 3 - 3 cm - Lote II.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 30 - Ábaco Força de 2000 N: CP 3 - 3 cm - Lote II.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Ao comparar os ábacos oriundos da TDC com os dados da análise analítica realizada por Carvalho (2015), notou-se que para as curvas de dano de 0,1971 (curvas azuis) da TDC os valores dos pontos que relacionam deslocamento e rigidez dos corpos de prova submetidos ao comprimento de entalhe de 3 cm cujas forças aplicadas às vigas encontram-se próximas a

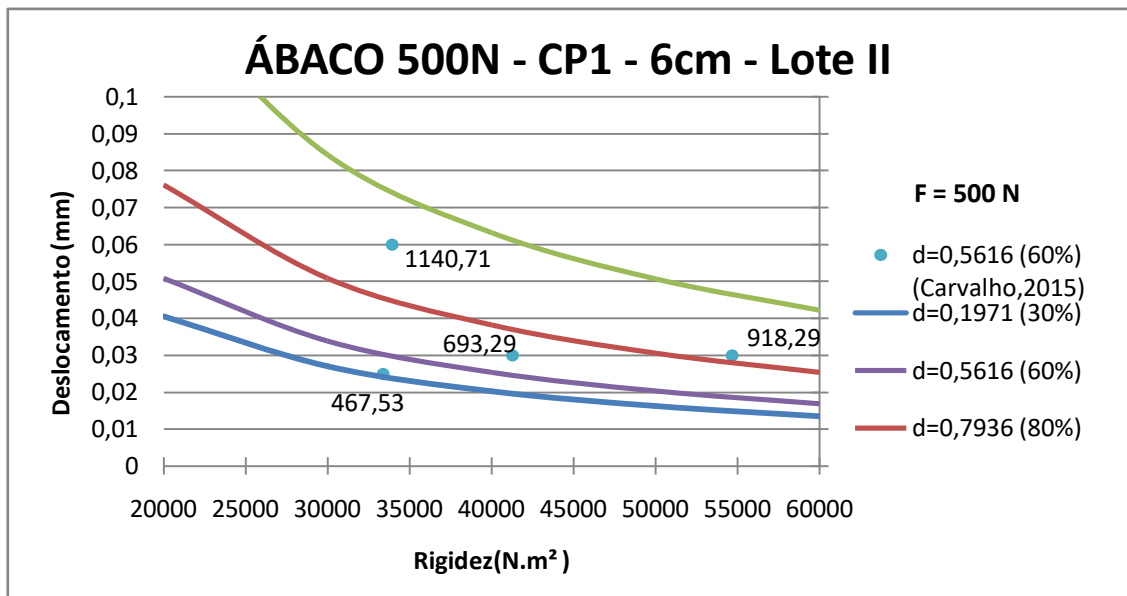
1000 N e 2000 N, estão próximos a estas curvas de dano. A proximidade dos pontos a curva mostra uma boa aproximação entre os valores da análise feita por Carvalho (2015) e as curvas da TDC (vide Figuras 27, 28, 29 e 30). Os valores das forças obtidos no experimento de Carvalho (2015) estão apresentados próximos aos pontos que relacionam deslocamento e rigidez.

Para exemplificação da aplicação do ábaco é admitida que uma viga bi apoiada com as mesmas dimensões das vigas ensaiadas precisa ser avaliada quanto à sua rigidez. Considerando-se que o deslocamento máximo no meio do vão da viga foi obtido com uso de algum equipamento experimental e corresponde a 0,04 mm e que a estimativa do carregamento concentrado ao qual está submetida equivale a 900 N e que o comprimento de entalhe da viga é aproximadamente 3 cm ( $d=0,1971$ ). A partir do ábaco referente à força de 1000 N (Figuras 27 e 29), pode-se dizer que rigidez dessa viga está em torno de 40000 N.m<sup>2</sup>.

Provavelmente o valor estimado encontra-se abaixo do valor real, pois a análise do ábaco da Figura 29 permite constatar a existência de um ponto cuja força corresponde a 954 N e um deslocamento em torno de 0,04 mm, a rigidez para este ponto equivale a aproximadamente 43000 N.mm<sup>2</sup>, maior que o valor da estimativa de rigidez do problema proposto. Para uma estimativa mais precisa, poderia ser montado um ábaco considerando uma força de 900 N.

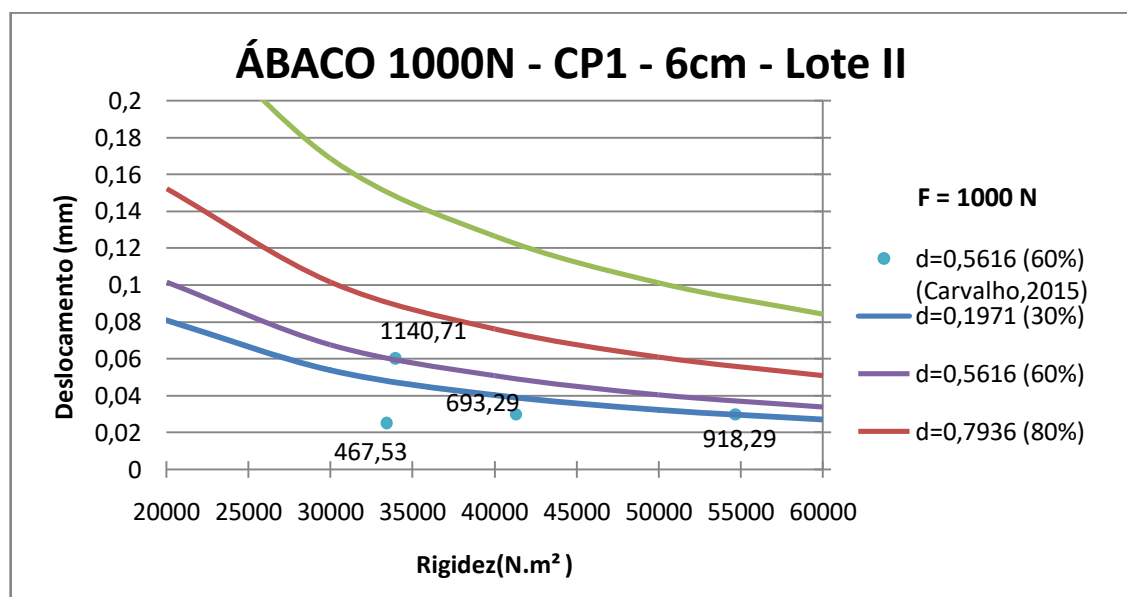
Os ábacos com os pontos experimentais referentes às vigas com comprimento de entalhe de 6 cm são mostrados nas Figuras 31, 32,33 e 34.

Figura 31 - Ábaco Força de 500 N: CP 1 - 6 cm - Lote II.



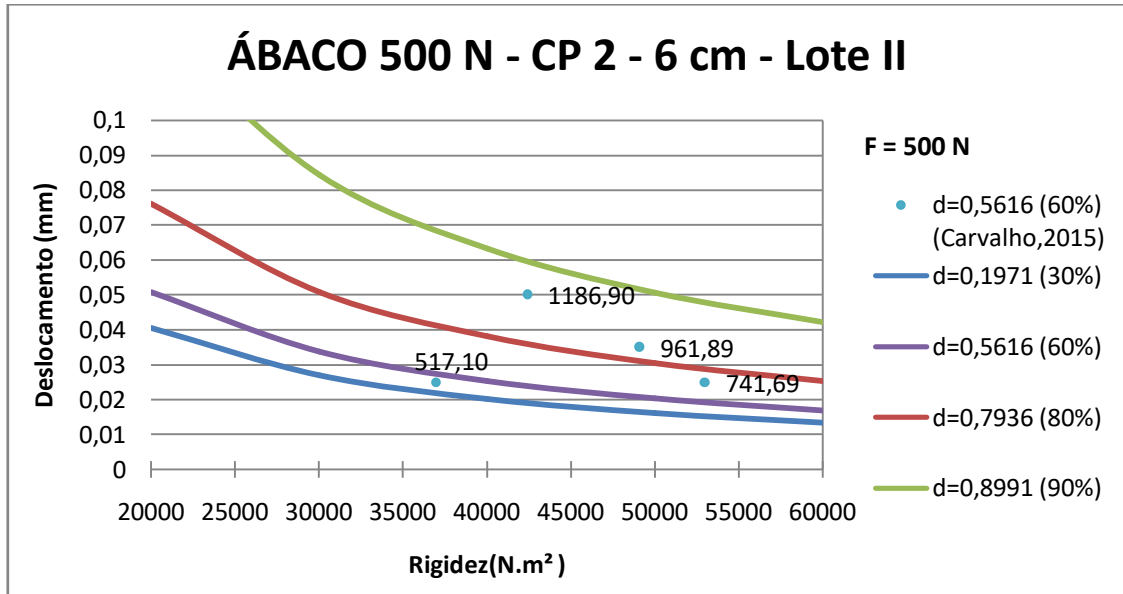
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 32 - Ábaco Força de 1000 N: CP 1 - 6 cm Lote II.



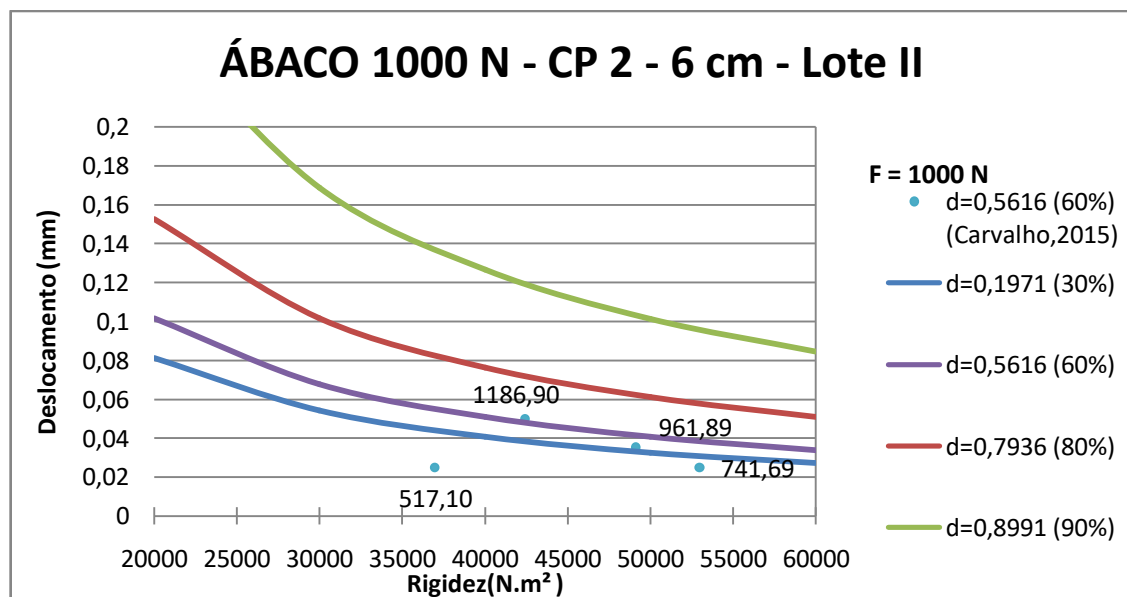
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 33 - Ábaco Força de 500 N: CP 2 - 6 cm Lote II.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 34 - Ábaco Força de 1000 N: CP 2 - 6 cm Lote II.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

A mesma análise realizada para as vigas com comprimento de entalhe de 3 cm é feita para as vigas com comprimento de entalhe de 6 cm. Nota-se que a conclusão da análise é semelhante, visto que as curvas de dano 0,5616 apresentam-se próximas aos pontos experimentais que relacionam deslocamento e rigidez. A força observada no experimento apresenta valor próximo ao da força fixada para a obtenção do ábaco.

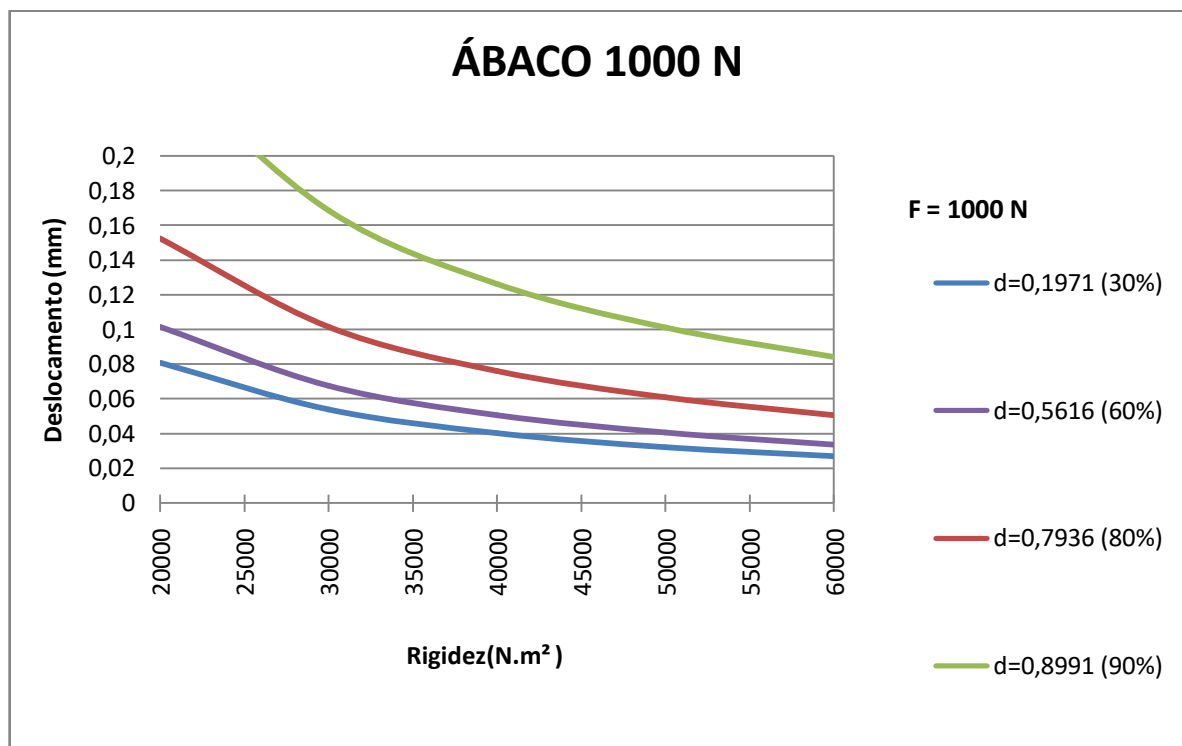


Para exemplificação, são considerados os mesmos valores de deslocamento máximo (0,04 mm) e força concentrada (900 N) do exemplo da viga com comprimento de entalhe igual a 3 cm, porém para a nova situação a viga apresenta um comprimento de entalhe no meio do vão de 6 cm.

O ábaco da Figura 32 mostra que para uma força próxima a 1000 N, deslocamento de 0,04 mm e dano igual a 0,5616 a rigidez da viga encontra-se abaixo de 50000 N.m<sup>2</sup>. Da mesma forma que para a análise com dano de 0,1971 para melhor aproximação da rigidez, um ábaco correspondente a uma força de 900 N seria mais indicado para o exemplo proposto.

A seguir é mostrado o ábaco correspondente a força de 1000 N sem a inclusão dos resultados de Carvalho (2015):

**Figura 35 - Ábaco Força de 1000 N**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Ao avaliar o ábaco da Figura 35, é possível perceber que para um mesmo deslocamento as rigidezes são diferentes a depender do dano, como mostrado no exemplo a rigidez obtida para o dano igual a 0,5616 foi maior que para o dano 0,1971, ou seja, para uma

viga mais danificada que outra apresentando o mesmo deslocamento a rigidez da viga com maior danificação é maior.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação foi desenvolvida visando estimar a rigidez à flexão de vigas em concreto simples utilizando TDC.

Os resultados obtidos para verificar a adequação da TDC para a estimativa da rigidez à flexão de vigas em concreto simples decorreu da comparação entre a variação da rigidez com o tempo e dos deslocamentos oriundos da aplicação da TDC, com os valores de deslocamentos experimentais do trabalho de Carvalho (2015), estes resultados mostraram-se satisfatórios, visto que as curvas apresentaram comportamento semelhante. Os valores de rigidez obtidos através da TDC foram inferiores aos valores obtidos a partir da aplicação da análise elástica de Carvalho (2015), constatou-se que essa ocorrência pode ter sido devido a consideração da rótula inelástica no local na fissuração.

Na segunda comparação, notou-se que os deslocamentos podem ser aproximados por uma reta com boa aderência, ou seja, os deslocamentos experimentais e os obtidos pela TDC estão próximos. Dessa forma, foi constatada a adequação da aplicação da TDC para a estimativa da rigidez à flexão em vigas de concreto simples submetidas ao ensaio de quatro realizado por Carvalho (2015). Para vigas em concreto simples, nas mesmas condições do ensaio experimental, a formulação desenvolvida permitiu obter resultados de rigidez à flexão para valores de dano distintos dos valores impostos por Carvalho (2015).

A forma escolhida para obter a estimativa da rigidez à flexão foi através do uso de ábacos com forças fixadas, pois os ábacos permitem a obtenção das variáveis de interesse de maneira rápida e prática, possibilitando seu uso prático em perícias e laboratórios. Os ábacos foram obtidos no presente trabalho através da expressão oriunda da TDC, para cada força fixada foram relacionadas rigidez à flexão, deslocamentos e diferentes valores de dano. Esta relação possibilita a obtenção de qualquer uma das variáveis relacionadas, a depender da necessidade da viga de concreto simples a ser avaliada e do interesse do avaliador. O mesmo comportamento dos resultados experimentais dos corpos de prova do Lote II de Carvalho (2015), quando confrontados com os ábacos com curvas de danos, pode ser observado para os corpos de prova do Lote III (Apêndice A).

Os ábacos foram construídos tendo como referência para os intervalos de deslocamentos e rigidezes os dados oriundos do trabalho de Carvalho (2015), para que as comparações pudessem ser realizadas. Porém os mesmos podem ser construídos com outros intervalos e com forças fixadas distintas das adotadas no presente trabalho.

Tendo em vista que TDC se fundamenta em aspectos da mecânica da fratura, mecânica do dano contínuo e conceitos de plasticidade concentrada, sua formulação final apresentou-se de modo a não exigir elevada complexidade, com bons resultados para situações onde haja a necessidade de avaliar a integridade de vigas.

Para aplicações futuras, sugere-se a utilização da TDC para a estimativa da rigidez à flexão em vigas de concreto simples, considerando uma abordagem teórico experimental incluindo análise dimensional.

Sugere-se também, a aplicação da TDC para a determinação de expressões capazes de estimar a rigidez à flexão em vigas de concreto armado.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 5739**: Concreto: Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro. 2007.

\_\_\_\_\_. **ABNT NBR 8522**: Concreto: Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2008.

ÁLVARES, M. S. **Contribuição ao Estudo e Emprego de Modelos Simplificados de Dano e Plasticidade para a Análise de Estruturas de Barras em Concreto Armado**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

AMORIM, D. L. N. F. **On the Lumped Damage Mechanics for Non linear Structural Analyses: new developments and applications**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. **Modelagem simplificada do processo de fissuração e colapso em pórticos e arcos de concreto armado**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 7, n.1, p. 100-137. 2014.

ARAÚJO, F. A. **Formulação de um Modelo de Dissipação Concentrada para a Análise Não-Linear de Estruturas Reticuladas Planas em Concreto Armado**. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

BITTENCOURT, T. N. **Faturamento do Concreto Estrutural: Aspectos Teóricos, Computacionais e Experimentais, e sua Aplicações**. Tese. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

CARRILLO, O. J. B. **Detecção de Dano a partir da Resposta Dinâmica da Estrutura: Estudo Analítico com Aplicação a Estruturas do Tipo Viga**. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

CARVALHO, P. P. M. **Estudo Teórico-Experimental do Dano em Vigas de Concreto**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. **A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames**. Computers & Structures, v. 54, n.6, p.1113-1126, 1995.

COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras.** Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

FERREIRA, L. E. T. **Elementos de mecânica da fratura aplicada à engenharia estrutural: aspectos analíticos, computacionais e experimentais.** São Paulo, Água da Prata, 2015.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. **Modelos de Daño Concentrado para la Simulación Numérica del Colapso de Pórticos Planos.** Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 09, n. 02, p. 123-139, 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. **Frame analysis and continuum damage mechanics.** European Journal of Mechanics-A/Solids, v. 17, n. 2, p. 269-283, 1998.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E; PICÓN, R. A. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Applications.** IGI Global, Hershey, 2015.

GDOUTOS, E. E. **Fracture Mechanics: An Introduction.** Springer, Norwell, 2005.

GRIFFITH, A. A. **The phenomena of rupture and flow in solids.** Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, v. 221, p. 163-198, 1921.

GRIFFITH, A. A. **The theory of rupture.** In: FIRST INTERNATIONAL CONGRESS OF APPLIED MECHANICS, Delft, p. 55-63, 1924.

INGLIS, C. E. **Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.** Transactions of the Institute of Naval Architects, v. 55, p. 219-230, 1913.

IRWIN, G. R. **Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate.** Journal of Applied Mechanics, n. 24, p. 361-364, 1957.

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. **Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk**, v. 08, p. 28-31, 1958.

KIRSCH, G. **Die Theorie der Elastizität and die Bedürfnisse der Festigkeitslehre.** **Z. Vereines Deutscher Ing.**, v. 42, p. 797-807, 1898.

LA BORDERIE, C. **Phenomenes unilateraux dans um materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton.** Tese de doutorado. L'Universite Paris. Paris, Paris, 1991.

- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. **Mécaniques des matériaux solides**. Duod, Paris. 1985.
- MARANTE, M.E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. **Three-Dimensional Analysis of Reinforced Concrete Frames Based on Lumped Damage Mechanics**. International Journal of Solids and Structures, v. 40,n. 19, p. 5109-5123, 2003.
- MARIGO, J J. **Modeling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids**. Engineering Fracture Mechanics, v.21, n.4, p. 861-874, 1985.
- MAZARS, J.; RAGUENEAU F.; PIJAUDIER-CABOT, G. **Continuum damage modelling for concrete structures in dynamic situations**. Damage Mechanics of materials and structures. Cachan, França, 2000.
- MECHOLSKY Jr, J. J. **Fracture Mechanics Principles**. Dent Mater 11, pg. 111-112, 1995.
- PERDOMO, M. E.; RAMÍREZ, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. **Simulation of damage in RC frames with variable axial force**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v. 28, p. 311-328, 1999.
- POWELL, H.G. **Theory for nonlinear elastic structures**. Journal of the Structural Division, ASCE, v. 95, ST12, p. 2687-2701, 1969.
- PROENÇA, S. P. B. **Introdução às Mecânicas do Dano e da Fratura**. Elementos de Mecânica da Fratura. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- PROENÇA, S. P. B. **Introdução às Mecânicas do Dano e da Fratura**. Mecânica do Dano (I). Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- QUINAN, M. A. D. **Uma metodologia para determinação do fator de intensidade de tensões causado por tensões térmicas utilizando a fotoelasticidade**. Tese de doutorado. Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2005.
- RABOTNOV, Y.N. **Creep rupture**, In: Hetényi, M.; Vincenti, W.G. Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, Berlin, p. 342–349, 1968.
- RAJASANKAR, J.; NAGESH, R.; PRASAD, A. **Modelling inelastic hinges using CDM for nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures**. Computers an Concrete, v. 6, n. 4, p. 319-341, 2009.

VAN MIER, J. G. M. **Concrete Fracture.** A Multiscale Approach. CRC Press, Boca Raton. 2013.

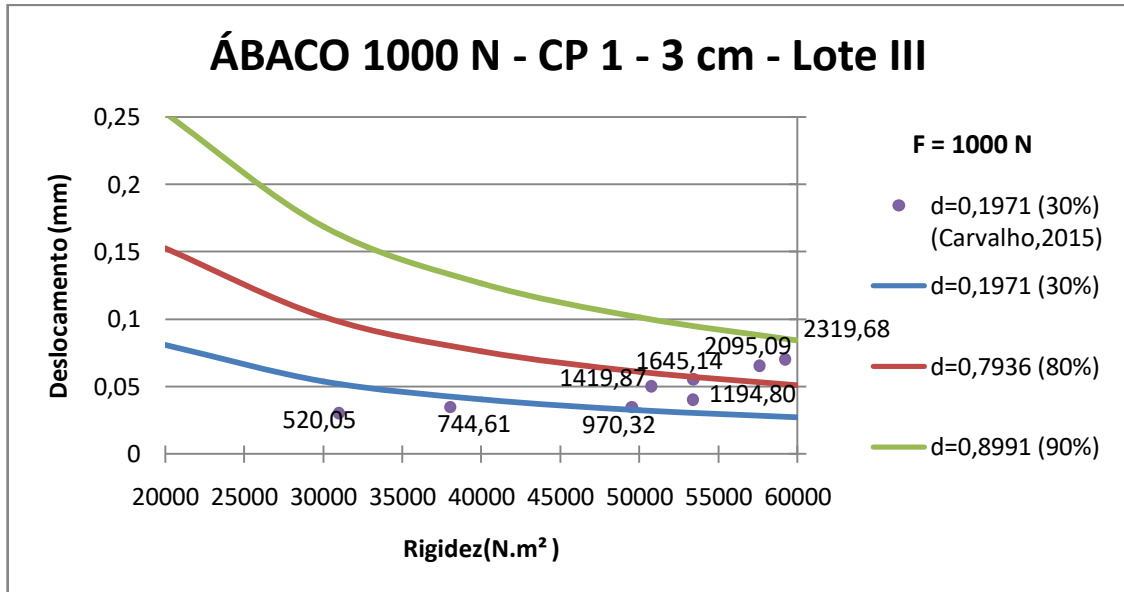


## APÊNDICE

### APÊNDICE A

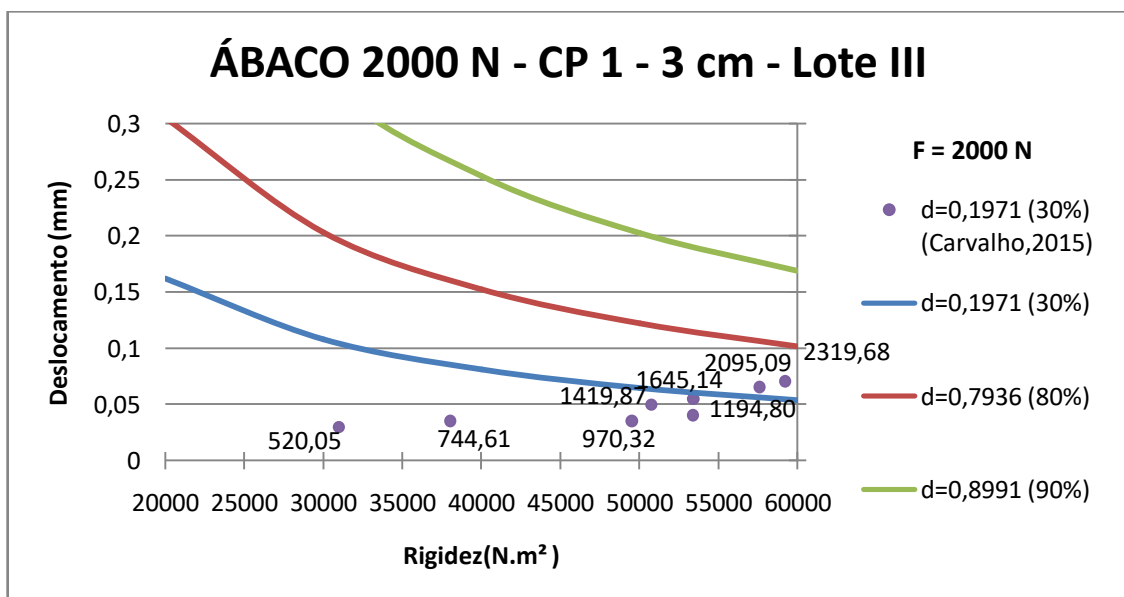
Este apêndice apresenta os ábacos referentes aos corpos de prova do Lote III do ensaio de flexão de quatro pontos de vigas.

Figura 36 - Ábaco Força de 1000 N: CP 1 - 3 cm - Lote III.



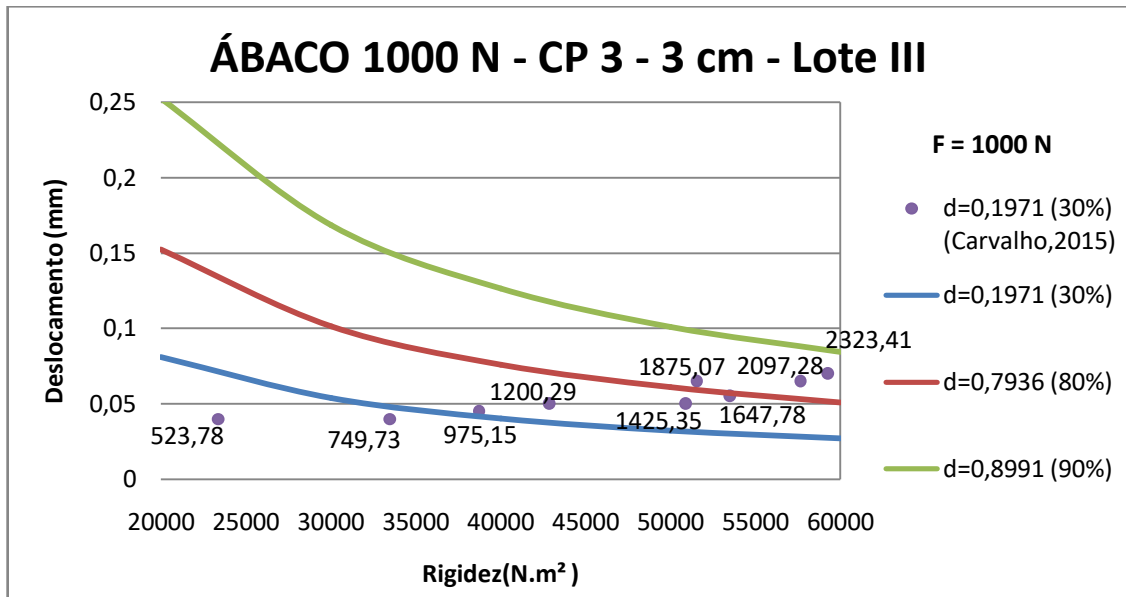
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 37 - Ábaco Força de 2000 N: CP 1 - 3 cm - Lote III.



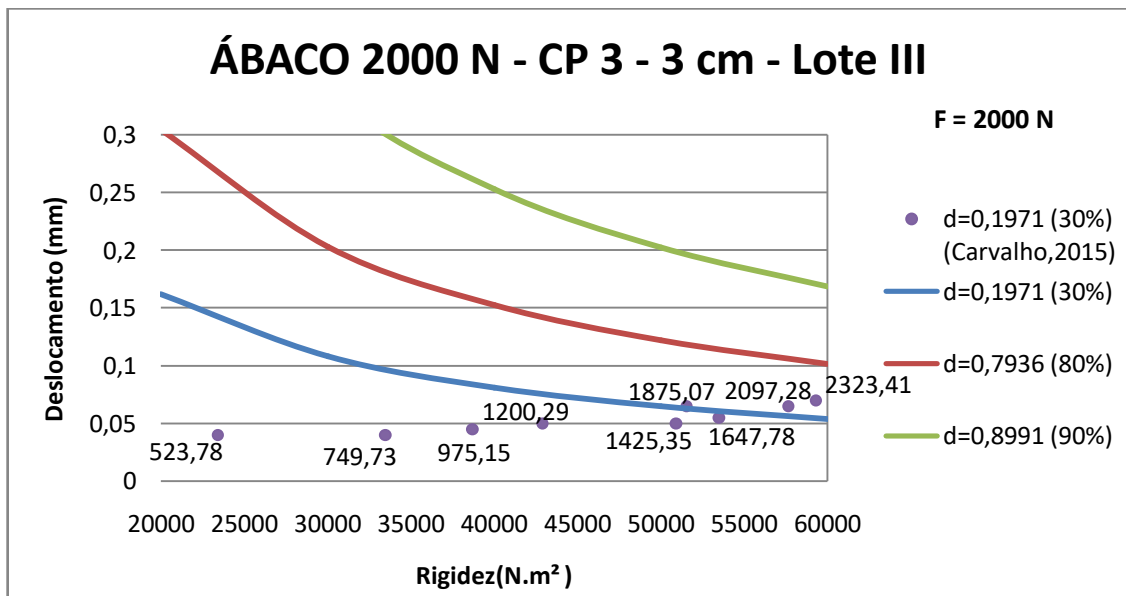
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 38 - Ábaco Força de 1000 N: CP 3 - 3 cm - Lote III.



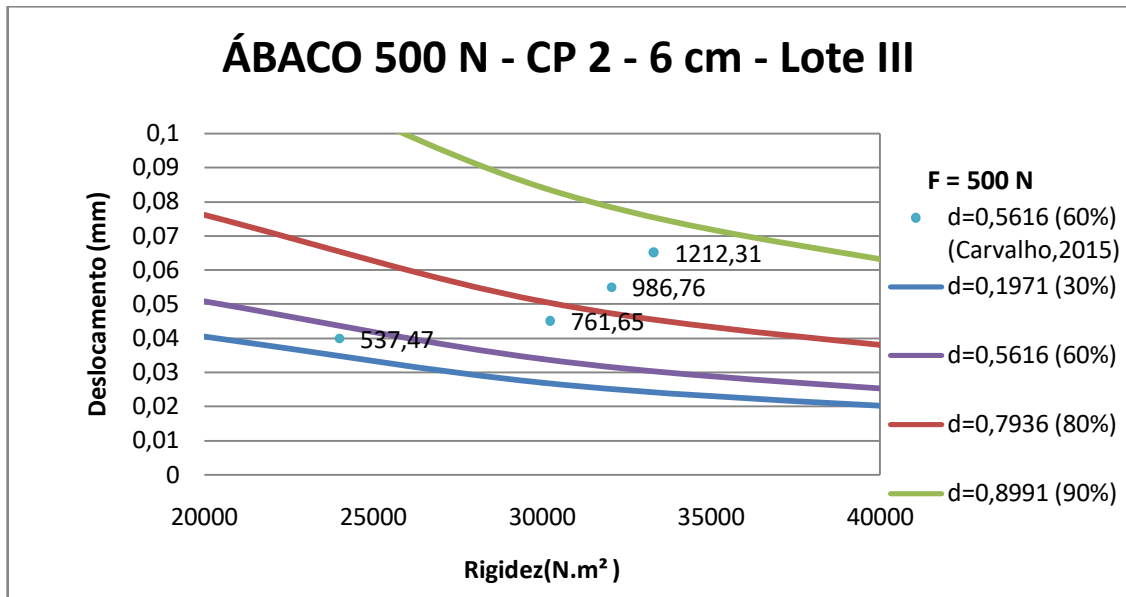
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 39 - Ábaco Força de 2000 N: CP 3 - 3 cm - Lote III.



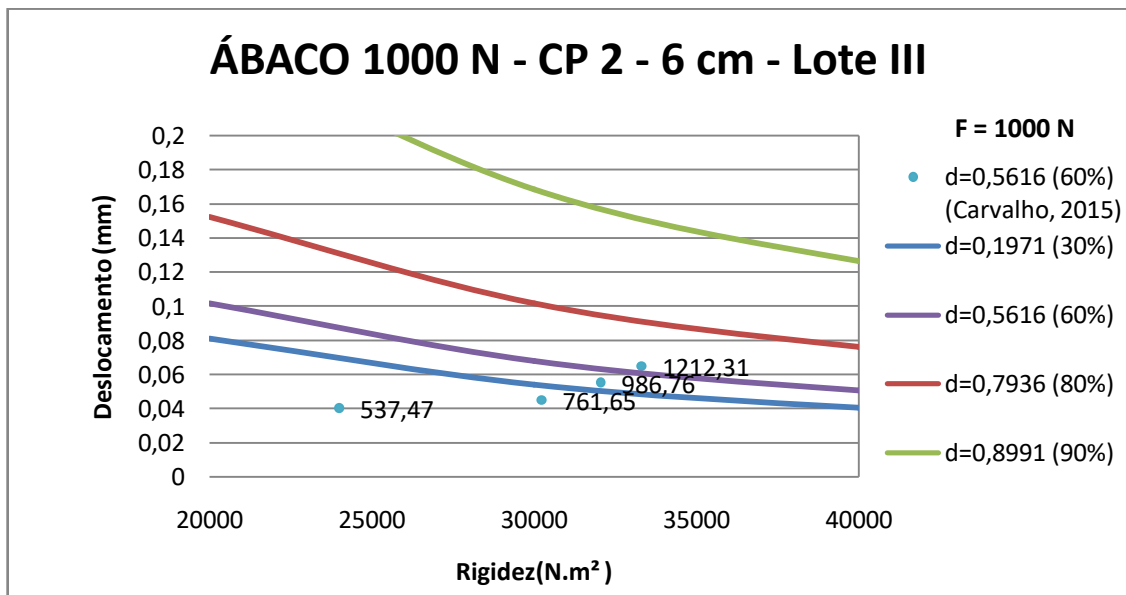
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 40 - Ábaco Força de 500 N: CP 2 - 6 cm - Lote III.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 41 - Ábaco Força de 1000 N: CP 2 - 6 cm - Lote III.



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.