UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL-PROFMAT

JOSIMAR JOSÉ DOS SANTOS

# A conceitualização dos números irracionais no primeiro ano do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado

Maceió
2014

JOSIMAR JOSÉ DOS SANTOS

# A conceitualização dos números irracionais no primeiro ano do Ensino Médio

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra*

Maceió
2014

**Catalogação na fonte**
**Universidade Federal de Alagoas**
**Biblioteca Central**
**Divisão de Tratamento Técnico**
**Bibliotecário Responsável: Maria Helena Mendes Lessa**

S237c Santos, Josimar José dos.
A conceitualização dos números irracionais no primeiro ano do ensino médio / Josimar José dos Santos. – Maceió, 2014.
43 f.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 42-43.

1. Número irracional. 2. Número real. 3. Irracionalidade $\sqrt{2}$. 4. Irracionalidade de $\pi$ (pi). I. Título.

CDU: 511.145:37.046.16

**JOSIMAR JOSÉ DOS SANTOS**

# A CONCEITUALIZAÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado submetida ao Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em matemática, aprovada aos 17 dias do mês de Outubro do ano de 2014.

Banca Examinadora:

Ediel Azevedo Guerra

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (Orientador)

Gregório Manoel da Silva Neto

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

Vinícius Moreira Mello

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello

*Aos meus pais Zeca e Zinha, à minha querida filha Talita Naomi e minha querida esposa Janaína Priscilla.*

# Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu bom e eterno Deus pela inspiração e sabedoria que me tem concedido para estudar esta ciência bela que é a Matemática. A ti, oh Deus, rendo o meu louvor e adoração, pois sem ti não teria conseguido. “Entrega o teu caminho ao Senhor, confia nEle, e o mais Ele fará (Sl 37.5)”.
Aos meus pais, José Sebastião (Zeca) e Luzinete (Zinha), pelo incentivo ao estudo mesmo em situações difíceis vivenciadas.
Sou grato, a minha querida esposa Janaína pelo seu amor, carinho e compreensão. Agradeço a Janaína pelos sábados, domingos e feriados que não saiu do meu lado enquanto estava estudando durante estes 2 anos de curso.
Também não poderia esquecer do meu maior presente que Deus me concedeu no dia 13/04/2013, o nascimento de minha linda filha Talita Naomi. Não tenho palavras para descrever tamanha alegria com sua chegada.
Aos meus irmãos Laodicéia, Jesiel e Laudjane pelo companheirismo e amizade. Ao meu cunhado Isac e a minha linda sobrinha Suzana Laiz, benção de Deus na minha vida.
Agradeço ao Prof. Dr. Ediel Guerra, pela sua amizade e apoio, pela paciência e cooperação na realização deste trabalho.
Agradeço aos professores Vânio Fragoso, Fernando Miscena, Gregório Manoel, André Flores, Luis Guilherme, Marcus Bronzi, Viviane Oliveira, Adina Rocha e Amauri Barros pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas lecionadas.
Aos professores do Instituto de Matemática, que de alguma maneira, contribuiram para a minha formação.
Agradeço aos amigos e colegas da turma 2012 do Profmat pelo apoio, compreensão e amizade durante esse curso. Não citarei no mes para não cometer nenhum equívoco.

# Resumo


Esta pesquisa tem por objetivo principal apresentar uma proposta didática direcionada a conceitualização dos números irracionais no 1º ano do Ensino Médio. A escolha do conceito de número irracional como elemento principal deste trabalho foi feita devido a pouca importância atribuída ao ensino e a conceitualização dos números irracionais na educação básica. Nosso trabalho está fundamentado no livro Números Irracionais e Transcendentes de Figueiredo (2002) e na dissertação de mestrado de Pommer (2012). Os procedimentos metodológicos desta pesquisa estão centrados na proposta didática em três temas: irracionalidade via representação decimal dos números reais, irracionalidade de $\sqrt{2}$ e irracionalidade de $\pi$.



**Palavras-chave:** número irracional, número real, irracionalidade de $\sqrt{2}$ e irracionalidade de $\pi$.

# Abstract

This research aim to present a proposal of activities (didactic proposal) directed to the conceptualization of irrational numbers in the 1st year of High School. The choice related to the concept of the irrational number as the main element of the current work has been done because of the non-importance assigned to the teaching and the conceptualization of irrational numbers in the basic education. This current work has the book Número Irracionais e Transcedentes de Figueiredo (2002) and the Pommer's master thesis dissertation (2012) as the main source. The methodological procedure of the current research are focused on the didactic proposal in three topics: irrationality via decimal representation of the real numbers, irrationality of $\sqrt{2}$ and the $\pi$ irrationality.

**Keywords:** irrational numbers, real number, irrationality of $\sqrt{2}$ and the $\pi$ irrationality.

# Lista de Ilustrações

# Sumário

# Introdução

A história da matemática revela que a ideia de número irracional é uma criação dos matemáticos da Grécia antiga e que, geralmente, a demonstração da irracionalidade de um número requer argumentos não triviais, em nível da educação básica. Por exemplo, como será visto no capítulo 1 desta dissertação, a irracionalidade do número $\sqrt{2}$ requer o método de redução ao absurdo. A irracionalidade do número $\pi$, por sua vez, só foi demonstrada no século XVIII, e as demonstrações mais simples que conhecemos envolve considerações acerca de convergência de sequências e o Teorema Fundamental do Cálculo. Vê-se, portanto, que o conceito de número irracional não é um conceito de completa assimilação no ensino médio.

Embora os números irracionais tenham ganhado um estatuto de conceito formal no âmbito da matemática, os professores se deparam a cada ano com o problema da transposição didática deste conceito para os estudantes do ensino fundamental e médio. A motivação desta dissertação nasceu da constatação dessa dificuldade e do desejo de contribuir mais efetivamente para a superação dessa dificuldade.

O objetivo principal desta dissertação é analisar aspectos matemáticos e didáticos envolvidos no trabalho de transformação do conceito científico de número irracional em um conceito assimilável nas salas de aula do ensino médio. Além disso, pretendemos também apresentar uma proposta de atividades que podem subsidiar o ensino do conceito de número irracional nesse nível de ensino.

Esta dissertação encontra-se estruturada do modo seguinte. No Capítulo 1 será demonstrado formalmente, em três seções, que $\sqrt{2}$, o número $e$ o número $\pi$ são números irracionais. Para isso, iremos utilizar noções do cálculo diferencial, como por exemplo, diferenciabilidade e continuidade de funções reais, convergência de sequências e séries numéricas e o Teorema Fundamental do Cálculo.

No Capítulo 2, abordamos alguns aspectos da origem histórica dos números irracionais e levantamos alguns aspectos das dificuldades do ensino desse conceito na educação básica.

Finalmente, no terceiro e último capítulo, apresentamos algumas atividades que podem subsidiar o ensino dos irracionais no ensino médio. As atividades didáticas encontram-se agrupadas em três seções. O objetivo da primeira seção é apresentar atividades que propiciam a compreensão da expressão decimal dos números irracionais. Em seguida, na segunda seção, são apresentadas atividades que visam esclarecer a irracionalidade de $\sqrt{2}$ por meio do método de redução ao absurdo. Por fim, a terceira seção, traz o cálculo de valores aproximados para $\pi$ por meio de aproximações sucessivas.

CAPÍTULO 1

# Fundamentação matemática

Neste capítulo apresentaremos as demonstrações formais da irracionalidade de $\sqrt{2}$, número de Euler $e$ e o número $\pi$.

## 1.1 A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Nesta seção vamos demonstrar por redução ao absurdo que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

**Teorema 1.1.1.** *Não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual a* 2.

*Demonstração.* Está afirmação é equivalente a dizer que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Então existem números inteiros $p$ e $q$, com $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Segue daí que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. O fator 2 aparece um número par de vezes na decomposição em fatores primos de $p^2$ e de $q^2$. Ora, $p^2$ contém um número par de fatores, enquanto que $2q^2$ contém um número ímpar de fatores. Portanto, isto é um absurdo. Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional. □

## 1.2 A irracionalidade de $e$

Nesta seção, vamos demonstrar que o número $e$ de Euler é irracional.

Antes de verificar a irracionalidade do número de Euler, iremos apresentar uma defінção do número $e$ por meio do limite de sequências. Em seguida, enunciamos e demonstramos o teorema que garante a irracionalidade do número $e$.

Figueiredo (2002, p. 7) define o número $e$ do seguinte modo

**Definição 1.2.1.** *O número $e$, é definido como o número tal que a área hachurada abaixo é igual a 1.*

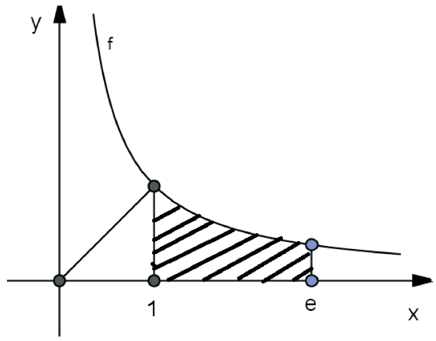
Utilizando argumentos de cálculo pode-se demonstrar que o número $e$ é o número real tal que $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

**Teorema 1.2.1.** *O número $e$ de Euler é irracional.*

*Demonstração.* Primeiro, note que o número de Euler é definido por meio da sequência:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

**Figura 1.1** A curva acima é o gráfico da função $f(x) = 1/x$ para $x > 0$.




Fonte: Figueiredo (2002)

Suponha, por absurdo, que $e$ é um número racional não-inteiro, ou seja, $e = \dfrac{p}{q}$, com $p$, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Sendo assim, como cada termo da série dada acima é racional, temos que a diferença

$$e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \tag{1.1}$$

também é um número racional, já que a soma de dois números racionais é racional.
Consideremos agora a seguinte desigualdade para $n \geq q+1$:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n \cdots (q+1) \cdot q!} = \frac{1}{n} \cdots \frac{1}{(q+1)} \cdot \frac{1}{q!} \leq \underbrace{\frac{1}{(q+1)} \cdots \frac{1}{(q+1)}}_{n-q \text{ vezes}} \cdot \frac{1}{q!}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{(q+1)^{n-q}}. \tag{1.2}$$

Segue da última desigualdade que

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!} \cdot \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{n-q}}.$$

Fazendo $n - q = k$ obtemos

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} = \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}, \tag{1.3}$$

onde a última igualdade decorre da fórmula para a soma de uma progressão geométrica infinita (série geométrica) com $a_1 = \frac{1}{q+1}$ e razão $r = \frac{1}{q+1}$. Resulta de $(1.1)$ e $(1.3)$ que

$$0 < e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

e, assim

$$0 < q!\left(e - \sum_{n=0}^{q}\frac{1}{n!}\right) \le \frac{1}{q} < 1.$$

Note que o segundo membro na desigualdade acima, pela nossa hipótese, é inteiro, pois todos os denominadores da expressão entre parênteses são cancelados pelo $q!$. Mas isso é um absurdo, pois não existe nenhum número inteiro entre 0 e 1. Assim, concluímos que o número de Euler $e$ é irracional. $\square$

## 1.3 A irracionalidade de $\pi$

Nesta seção iremos demonstrar a irracionalidade do número $\pi$. A irracionalidade de $\pi$ foi demonstrada pela primeira vez pelo matemático francês Johann Heinrich Lambert, em 1761. Alguns anos mais tarde Legendre demonstrou um resultado mais forte, que $\pi^2$ é irracional. "A demonstração de irracionalidade de $\pi$, que daremos a seguir, é devida a I. Niven [...] $(1947)$, o qual usou um método desenvolvido por Hermite para provar a transcedência do número $e$; [...]" (FIGUEIREDO, 2002, p. 9).

Eves (2004, p. 141) define $\pi$ da seguinte maneira:

**Definição 1.3.1.** *$\pi$ é a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.*

Antes da demonstração iremos demonstrar dois lemas fundamentais para nosso objetivo.

**Lema 1.3.1.** *Seja $f_n$ uma função tal que*

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

*onde $n$ é um número inteiro positivo. Então a $k-$ésima derivada de $f_n$ em zero, isto é, $f_n^{(k)}(0)$, é inteiro para todo $k$.*

*Demonstração.* Primeiro, note que $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$, para todo $x \in (0,1)$. Expandindo o produto $x^n(1-x)^n$ pelo Binômio de Newton obtemos

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\cdot\left[c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \cdots + c_{2n}x^{2n}\right].$$

Observe que a menor potência de $x$ que aparece é $n$ e a maior potência é $2n$. Logo $f_n$ pode ser escrita da forma

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

onde os número $c_i$ são inteiros. Segue desta expressão que $f_n^{(k)}(0) = 0$ se $k < n$ ou $k > 2n$. Ora, derivando $f_n$ em relação a $x$ temos

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!} \cdot \left[ nc_n x^{n-1} + (n+1)c_{n+1}x^n + \cdots 2nc_{2n}x^{2n-1} \right]$$
$$f_n''(x) = \frac{1}{n!} \cdot \left[ n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots + 2n(2n-1)c_{2n}x^{2n-2} \right]$$
$$\vdots$$
$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot [n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot c_n + \text{termos dependentes de } x].$$

Segue daí que

$$f_n^{(n)}(0) = c_n$$

é um número inteiro. De modo análogo, concluí-se que $f_n^{(n+1)}(0), \ldots, f_n^{2n}(0)$ são números inteiros. Portanto,

$$f_n^{(k)}(0)$$

é um número inteiro para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

**Observação 1.3.1.** *$f_n(x) = f_n(1-x)$, para todo $x$ no domínio de $f_n$.*

Resulta da observação acima que $f_n^{(k)}(1)$ é um número inteiro para todo valor de $k$. De fato,

$$f_n(x) = f_n(1-x) \implies f_n^{(k)}(x) = f_n^{(k)}(1-x) \cdot (-1)^k.$$

Portanto, para $x = 1$ tem-se

$$f_n^{(k)}(1) = f_n^{(k)}(1-1) \cdot (-1)^k = f_n^{(k)}(0) \cdot (-1)^k.$$

Logo, $f_n^{(k)}(1)$ é um número inteiro para todo valor de $k$.

**Lema 1.3.2.** *Seja $a$ um número qualquer, então*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

*Demonstração.* Provar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

é equivalente a provar que dado $\varepsilon > 0$, então para $n$ suficientemente grande temos

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

Segue daí que se $n \geq 2a$, então

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Agora, considere $n_0$ um número natural qualquer tal que $n_0 \geq 2a$. Então tomando valores sucessivos a $n_0$ vemos que eles satisfazem

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n+2)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.$$

Fazendo $k$ tão grande tal que $\frac{a^{n_0}}{(n_0)!\varepsilon} < 2^k$, então $\frac{(n_0)!\varepsilon}{a^{n_0}} > \frac{1}{2^k}$, ou seja, $\frac{1}{2^k} < \frac{(n_0)!\varepsilon}{a^{n_0}}$. Logo,

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{(n_0)!\varepsilon}{a^{n_0}} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} = \varepsilon.$$

□

De posse destes lemas, estamos prontos para demonstrar a irracionalidade de $\pi$.

**Teorema 1.3.1.** *O número $\pi$ é irracional.*

*Demonstração.* Vamor provar que $\pi^2$ é um número irrracional e, assim concluir que $\pi$ é irracional. Note que se $\pi$ fosse racional, então $\pi^2$ também seria racional. Suponha, por absurdo, que $\pi^2$ é racional. Então teríamos $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ para alguns números inteiros positivos $a$ e $b$. Seja $G$ uma função definida por

$$G(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right],$$

onde $f_n(x)$ é definida de acordo como o Lema 1.3.1. Note que na função $G$ cada fator

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n (\frac{a}{b})^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

é um número inteiro. Ora, como $f_n^{(k)}(0)$ e $f_n^{(k)}(1)$ são números inteiros pelo Lema 1.3.1, conclui-se que $G(0)$ e $G(1)$ são inteiros. Derivando $G$ duas vezes obtemos

$$G''(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right]. \tag{1.4}$$

Observe que o último termo $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$ é zero. Multiplicando $G$ por $\pi^2$ e somando com (1.4) obtemos

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x). \tag{1.5}$$

Agora seja $H$ uma função tal que

$$H(x) = G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x).$$

Derivando a função $H$ e usando (1.5) obtém-se

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x)\cos(\pi x) + G''(x)\sin(\pi x) - \pi G'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 G(x)\sin(\pi x) \\ &= \left[G''(x) + \pi^2 G(x)\right]\sin(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo nesta última igualdade temos

$$\pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx = H(1) - H(0).$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} H(1) - H(0) &= G'(1)\sin\pi - \pi G(1)\cos\pi - G'(0)\sin 0 + \pi G(0)\cos 0 \\ &= \pi\left[G(1) + G(0)\right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx = G(1) + G(0)$$

é um número inteiro.

Por outro lado, sabemos que $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ para $0 < x < 1$ e, assim $0 < \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!}$ para $0 < x < 1$. Resulta daí que

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Agora, se $n$ for suficientemente grande, então

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

de acordo com o lema 1.3.2.

Ora, isso é um absurdo, pois a integral é um número inteiro e não existe nenhum inteiro entre 0 e 1. Assim, o erro é devido a supor que $\pi^2$ é racional, logo $\pi^2$ é irracional e, portanto $\pi$ é irracional. □

## 1.4 Algumas considerações

Nas seções anteriores deste capítulo descrevemos as demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$, do número de Euler $e$ e do número $\pi$.

Diante disso, podemos observar que a compreensão do ponto de vista formal da irracionalidade destes números exige conhecimentos que estão além do nível cognitivo de quase a totalidade dos estudantes do ensino médio. Desse modo, cabe levantar as seguintes questões:

até que ponto o conceito de irracionalidade é importante para o estudante do ensino médio? De que modo esse conceito pode ser apresentado para esses estudantes de forma aceitável de um ponto de vista de uma formação matemática crítica dos estudantes?

Capítulo 2

# Fundamentação didática

Neste capítulo, apresentamos algumas características referente aos números irracionais. Na primeira seção, trazemos alguns fatos históricos que retratam a possível origem dos números irracionais. Por fim, na segunda seção é descrito alguns métodos relacionados ao ensino dos irracionais.

## 2.1 A origem dos números irracionais

Atualmente existem algumas lendas e mitos relacionados à origem dos números irracionais. Uma delas garante que o surgimento dos segmentos incomensuráveis provocou uma crise na matemática grega naquela época. Pitombeira e Roque (2013, p. 60) afirmam que "estes mitos vem sendo profundamente questionados pela história da Matemática nas últimas décadas".

Segundo Roque e Pitombeira (2013, p. 61) "não encontramos alusão a um escândalo em nenhuma passagem dos escritos a que temos acesso e que citam o problema dos incomensuráveis, como os de Platão ou Aristóteles". Assim, estes fatos parecem indicar que a descoberta da incomensurabilidade não provou nenhuma crise na matemática grega, mas foi uma descoberta interessante que levou ao desenvolvimento do conceito dos números irracionais.

Passaremos agora a descrever algumas observações históricas sobre a incomensurabilidade, ou seja, sobre a origem da noção de números irracionais.

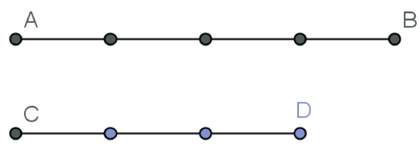
Roque e Pitombeira destacam que:

> Como "medir" significa, essencialmente,"comparar", precisamos, na maioria das vezes, subdividir uma das grandezas a serem comparadas para obter uma unidade que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas. (2013, p. 59).

Considere dois segmentos $AB$ e $CD$. Para comparar esses segmentos, observe que $CD$ não cabe um número inteiro de vezes em $AB$. Assim, podemos dividir $CD$ em 3 e tomar a unidade como sendo $\frac{1}{3}$ de $CD$. Segue daí que esta unidade cabe 4 vezes em $AB$ e, consequentemente, a comparação de $AB$ com $CD$ resulta na razão $4:3$ e, daí, surgem medidas expressas por relações entre números inteiros, que atualmente chamamos de números racionais, pelo fato de estarem relacionados a uma razão.

Se prosseguirmos dessa maneira é natural perguntar: Dadas duas grandezas, é sempre possível subdividir uma delas em um número finito de partes, de modo que uma destas partes caiba

**Figura 2.1** Segmento *AB* e segmento *CD*.




Fonte: Pitombeira e Roque (2013)

um número inteiro de vezes na outra? Roque e Pitombeira (2013, p. 60) afirmam que "Intuitivamente, se pensamos em grandezas físicas, podemos imaginar que sim. [...] A descoberta das grandezas incomensuráveis mostra que isto não é verdade, logo nossa intuição nos engana".

Um dos primeiros exemplos envolvendo duas grandezas incomensuráveis teria sido o problema de usar o lado de um quadrado para medir sua diagonal. Este fato é demonstrado por Aristóteles utilizando uma técnica de raciocínio por absurdo.

> [...] se o lado e o diâmetro são considerados comensuráveis um em relação ao outro, pode-se deduzir que os números ímpares são iguais aos pares; esta contradição afirma, portanto, a incomensurabilidade das duas grandezas. (ARISTÓTELES, apud ROQUE E PITOMBEIRA, 2013, p. 62).

Para finalizar, outro procedimento que parece estar relacionado ao estudo das grandezas incomensuráveis é o processo da antifairese ou subtrações sucessivas. Nesse processo, objetivo da antifairese era o de aproximar razões entre segmentos incomensuráveis. Roque e Pitombeira (2013, p. 61) garante que "Os matemáticos gregos que trabalhavam com aritmética no final do século V a.C. conheciam o procedimento da antifairese, bem como o modo de empregá-lo no tratamento de alguns segmentos incomensuráveis".

Segundo Miguel et al, o método das subtrações sucessivas ou antifairese é descrito da seguinte forma:

> 1. Subtraímos o segmento menor do segmento maior o maior número possível de vezes. Caso essa diferença seja zero, isto é, caso o segmento menor caiba um número exato de vezes no maior, então, o m.d.c. entre eles será o segmento menor. 2. Caso a diferença anterior não seja zero, isto é, caso haja sobra, subtraímos o segmento correspondente a essa sobra do segmento menor, o maior número possível de vezes. Caso o segmento correspondente a essa sobra caiba um número exato de vezes no segmento menor, então, o m.d.c. entre os segmentos dados será essa primeira sobra encontrada. 3. Caso isso não se verifique repete-se o processo até encontrar uma diferença zero (2009, p. 219).

Assim, baseado nesse método encontraremos segmentos comensuráveis, sempre que for possível determinar o maior divisor comum entre dois segmentos. Este fato acontece, pois é possível expressar a medida de um dos segmentos utilizando a medida do outro como unidade de medida. Caso este processo continue indefinidamente, ou seja, sem encontrar uma diferença igual à zero, podemos concluir que esses são segmentos incomensuráveis.

Após a descoberta da existência dos segmentos incomensuráveis, os números irracionais ficaram incompreendidos por muitos anos. Há pouco mais de 100 anos, o conjunto dos números reais foi objeto de estudo no campo do saber matemático. George Cantor foi um dos matemáticos responsáveis pelo estabelecimento, sistematização e organização dos números reais. Nesse período os números irracionais se consolidaram rapidamente como número. Ressaltamos aqui que esse avanço no campo do saber matemático não ocorreu concomitante com o avanço no campo da educação básica da Matemática.

Portanto, constatamos a partir de observações históricas que o surgimento do conceito de números irracionais está relacionado à noção de segmentos incomensuráveis. Também verificamos que a descoberta desses segmentos não provou nenhuma crise na matemática grega, pelo contrário, essa descoberta trouxe grandes contribuições para o desenvolvimento da matemática naquela época.

## 2.2 O ensino dos números irracionais

Segundo Chevallard, Bosch e Gascón, citado por Pommer (2012, p. 21), transposição didática é o conjunto das transformações que sofre um saber científico para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz. Como o conhecimento dos números irracionais, no campo da educação básica da Matemática, não teve o mesmo avanço que no campo do saber científico, o mesmo passou por uma transposição didática de modo que fosse ensinado em sala de aula.

É comum, no Ensino Fundamental II, os livros didáticos introduzirem os números irracionais após a abordagem dos números racionais. Em seguida, o conjunto dos números reais é apresentado como a união de dois conjuntos disjuntos, ou seja, os números racionais e os números irracionais ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$), onde $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ designa o conjunto dos números irracionais. Por outro lado, os números irracionais também são apresentados como os números reais que não são racionais. Assim, esse ciclo de caracterizações dos números irracionais não permite que os alunos diferenciem os números reais dos números irracionais. Segue daí, que a introdução e tratamentos dos números irracionais exigem "[...] um trabalho investigativo que abrange uma reflexão sobre como ensinar e como ensinar a ensinar números reais, uma das ideias fundamentais da matemática" (PALIS, apud POMMER, 2012, p. 23).

Ressaltamos que a compreensão dos números irracionais, por exemplo, $\sqrt{2}$, o número $\pi$ e o número $e$, representa um pensamento matemático elaborado e pouco intuitivo. Desse modo, essa característica intrínseca dos números irracionais dificulta a abordagem deste tema em sala de aula. Pommer (2012, p.24), destaca que "esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos didáticos e epistemológicos para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico de modo significativo, no ensino básico."

A seguir, apresentamos os resultados obtidos nas principais pesquisas envolvendo os números irracionais e reais, visando situar as contribuições para o ensino básico.

Um levantamento bibliográfico realizado por Pommer (2012, p. 25) expõe a pouca importância atribuída ao ensino dos irracionais e também a carência de estudos e pesquisas voltadas para a conceituação de números irracionais na educação básica.

Baseado na pesquisa feita por Fischbein, Jehian e Cohen (1995), Pommer afirma que:

> A pesquisa diagnosticou que a maioria dos estudantes apresentou concepções erradas com relação ao tema, descrevendo número irracional como sendo aquele que possui uma representação decimal infinita, porém periódica, ou como um número negativo, ou um número que não é inteiro (2012, p.25).

Seguindo nessa linha de pensamento, a pouca ênfase dada ao ensino dos números irracionais e sua conceituação parece indicar que os estudantes concluem o ciclo básico e não conseguem fazer a distinção entre números racionais e irracionais. Por outro lado, Fischbein, Jehian, Cohen (1995) citado por Pommer destacam que o currículo de

> [...]Matemática para o Ensino Fundamental e Médio não provém o conhecimento necessário em relação aos sistemas numéricos. Em nossa opinião, os conceitos de números naturais, racionais, irracionais e reais devem ser explicitados e sistematicamente ensinados. Mas não estamos nos referindo somente aos conhecimentos técnicos, definições e procedimentos operativos. Também consideramos que a resolução de problemas propicia aflorar o pensamento intuitivo, sem o qual a Matemática se torna um mero esqueleto. (2012, p. 25).

Pommer (2012, p. 27) baseando-se na pesquisa de Voskoglou e Kosyvyas realizada com alunos do ensino fundamental, afirma que os autores tiveram "[...] como hipótese que as dificuldades intuitivas com relação ao entendimento e compreensão dos números irracionais estavam vinculadas às representações semióticas[1]".

Souto (2010) realizou uma pesquisa sobre os números irracionais e os números reais em livros didáticos. O objetivo consistia na análise de como o conceito de número irracional e

[1]"Geralmente consideram-se as representações semióticas como um suporte para as representações mentais: as representações semióticas teriam a função de comunicar as representações mentais" (DAMM, 1999, p. 143)

de número real é desenvolvido nos livros didáticos utilizados na educação básica, no Brasil. O fundamento metodológico, da referida pesquisa, baseou-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003), para verificar como os registros e representações são organizados, e na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999), a fim de verificar como a organização do livro didático propõe a obtenção dos conhecimentos dos números irracionais e dos números reais.

A pesquisa em questão destaca a posição de Chevallard (1999), onde a obtenção de conhecimento é condicionada a uma vivência de organização praxeológica[2]. Assim, esta perspectiva considera que:

> [...] é essencial que as tarefas propostas nos livros didáticos valorizem não somente técnicas de solução, mas algum discurso racional que justifique e que esclareça tais técnicas, e que tal discurso racional esteja fundamentado em um discurso teórico, possibilitando assim a construção de uma organização praxeológica completa (SOUTO, 2010, p. 40).

Souto (2010) observa que a elevada frequência da exposição de exemplos visando justificar conceitos e propriedades, ferramenta muito utilizada na apresentação dos números irracionais, pode levar a uma falha de entendimento e conceitualização. Souto (2010, p.100) também relata que "[...] a praxeologia relacionada às tarefas envolvendo os números irracionais e reais é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber fazer".

Dessa forma, podemos destacar que as dificuldades apresentadas pelos alunos na identificação dos números irracionais estão relacionadas, a pouca ênfase dada a esse tema na educação básica. Outro fator preponderante é a forma como é feita a abordagem dos números irracionais nos livros didáticos, onde é valorizada a exposição de exemplos para justificar os conceitos e propriedades, deixando-se de lado o significado real do conceito de número irracional. Bruner, citado por Pommer (2012, p.32), destaca que nos dias de hoje o processo de educação "[...] afastou-se da ênfase na compreensão geral para a ênfase na aquisição de habilidades específica".

Diante das dificuldades e obstáculos destacados, com relação ao ensino dos números irracionais na educação básica, nas linhas acima, agora iremos descrever alguns resultados obtidos na pesquisa realizada por Pommer (2012) acerca do livro didático de matemática utilizado pelo professor em sala de aula. Nesta pesquisa o autor tem por objetivo analisar como é desenvolvida a construção e significação do conjunto dos números irracionais e dos números reais.

[2]Uma organização praxeológica é um conjunto de tarefas que através de uma técnica, é justificada por uma tecnologia e também é justificada por uma teoria.

No Brasil o livro didático é um instrumento utilizado pelo professor no processo de ensino e aprendizagem na educação básica.

Em geral, o livro didático de matemática apresenta um discurso através da exposição de definições, conceitos, propriedades, provas, justificativas vinculados a exemplos e uma gama de exercícios objetivando a verificação dos conteúdos apresentados. Assim, essa forma de abordagem encontrada nos livros didáticos dificilmente desvia da apresentação convencional, que:

> [...] distingue com nitidez o momento da teoria do momento dos exercícios de aplicação; estes, por sua vez, quase sempre se limitam a problemas estereotipados, onde também se distingue com nitidez os dados − sempre os necessários e suficientes para a resolução − dos pedidos a serem determinados com a utilização dos dados. Tanto o momento da formulação do problema, a partir de uma situação concreta onde a questão a ser respondida ainda não está nitidamente formulada, quanto a etapa do reconhecimento dos dados que serão necessários para a resposta a tal questão costumam ser subestimados e simplificados excessivamente, fornecendo-se o problema pronto, bem formulado − às vezes, até equacionado −, carecendo apenas da aplicação da 'teoria' aprendida (MACHADO, apud POMMER, 2012, p. 41).

Neste sentido, destacamos que os assuntos apresentados no livro didático são desenvolvidos segundo uma sequência lógica, onde geralmente é delimitada e indicada por currículos e documentos ligados a algum órgão ou entidade governamental. Segundo Pommer (2012, p.41) "os assuntos constantes dos manuais são influenciados ou algumas vezes até definidos por uma comunidade constituída de instituições reguladora (geralmente governamentais), editores, autores e pesquisadores, constituindo saberes a serem ensinados".

Deste modo, na ação

> [...] pedagógica de transformar o saber científico em saber a ser ensinado, o principal apoio do professor é o livro didático, pois, entre outros aspectos, de maneira geral, estes apresentam, de forma mais ou menos organizada, aquilo que foram definidos como saberes a serem ensinados (COSTA, apud POMMER, 2012, p. 41).

Assim, esse modo como é desenvolvida a ação pedagógica tem como consequência uma institucionalização do livro didático como principal meio que se encontra à disposição do professor para organizar a ação pedagógica em sala de aula.

Neste momento passamos a descrever alguns resultados da pesquisa realizada por Pommer (2012), que descreve como é feita a abordagem dos números irracionais nos livros didáticos na educação básica das escolas brasileiras.

Na pesquisa feita por Pommer (2012) em livros didáticos um dos temas pesquisados foi o surgimento das raízes enésimas irracionais. Dentre os resultados iremos pontuar aqueles que se referem à irracionalidade da $\sqrt{2}$.

A $\sqrt{2}$ é um número irracional. Sua irracionalidade como foi descrita no Capítulo 1 é simples de ser compreendida, porém o significado do conceito de $\sqrt{2}$ ser um número irracional não fica tão claro para os alunos da educação básica. Segundo a pesquisa realizada por Pommer

> [...] este conceito é inicializado por meio da geometria e motivado pela questão: "Qual é a área de um quadrado em que cada lado mede 7 cm?"(p. 123). Após a apresentação do resultado (49 cm$^2$), introduz-se a pergunta "Quanto mede o lado do quadrado que tem área igual a 81 cm$^2$?" (p. 123), com a intenção de introduzir a raiz quadrada por analogia com aspectos geométricos. (2012, p. 52).

Portanto, os fatos apresentados acima mostram que o conceito de raiz quadrada é intoduzido por meio de observações geométricas relacionando a determinação do lado do quadrado quando é dado a área ou na determinação da área do quadrado quando é dada a medida do lado. Seguindo este raciocínio, pretende-se obter o valor do lado do quadrado, cuja área é igual a 2 $u.a.$

Também podemos destacar na referida pesquisa que "historicamente, a descoberta dos números irracionais parece estar ligada à utilização do teorema de Pitágoras" (p. 61) aplicado em um quadrado unitário obtendo $\sqrt{2}$ como hipotenusa.

Entretanto, ressaltamos que não existem evidências históricas que caracterizem que a descoberta da irracionalidade tenha alguma ligação com o teorema de Pitágoras aplicado no cálculo da diagonal de um quadrado unitário. Por outro lado, observamos que o texto enfatiza o conceito da irracionalidade baseado no conhecimento empírico, quando associa este conceito no contexto geométrico a partir da área de um quadrado determina-se o lado desta figura geométrica. Caracterizar a irracionalidade de um número com fatos geométricos não é suficiente para estabelecer o conceito de números irracionais, uma vez que, este processo dedica-se a casos particulares.

Sabe-se que historicamente a descoberta dos números irracionais está ligada à descoberta de segmentos incomensuráveis. Acreditamos que uma maneira possível de construir o conceito dos números irracionais pode ser desenvolvida a partir das consequências oriundas desse fato histórico. Dos argumentos de Pommer (2012, p. 66) podemos concluir que a descoberta da incomensurabilidade é "[...] base essencial para o entendimento e possível modo de introduzir os números irracionais no ciclo básico".

Outro número irracional de grande importância na educação básica é o número $\pi$. Na pesquisa de Pommer (2012), verificamos que o número $\pi$ é introduzido em muitos livros didáticos pelo conhecimento empírico, modo semelhante àquele de abordar $\sqrt{2}$. Este fato é constatado na referida pesquisa, quando:

> [...] o texto sugere o desenho de uma circunferência com o compasso, contorná-la com um barbante e dividir o comprimento do barbante pela medida do diâmetro, o qual resulta 3,1 (um valor aproximado de PI). Sugerindo que a razão entre o perímetro da circunferência e o diâmetro de uma circunferência é invariável, sem maiores explicações, afirmam que métodos dedutivos permitem obter o valor de PI com maior precisão, expondo o valor de $\pi = 3,1415926$. (POMMER, 2012, p. 69).

Também pontuamos nesta pesquisa a questão da inscrição e circunscrição de polígonos regulares a uma circunferência de raio R associada à definição do "número PI como sendo a razão entre o perímetro do círculo e o diâmetro correspondente" (p. 69). O processo de inscrição e circunscrição de polígonos em uma circunferência de raio R é feito para o caso particular de um quadrado.

Para dar continuidade na inscrição e circunscrição de polígonos numa circunferência Pommer destaca um trecho de um livro didático transcrito a seguir:

> [...] o processo consiste em subdividir o número de lados, para se obter polígonos inscritos e circunscritos de lados 16, 32, 64 e 128. A seguir, comenta que para um polígono inscrito e circunscrito de 180 lados o valor de PI fica delimitado entre $3,140 < \pi < 3,144$. Porém, o texto não explica como obter este intervalo, justificando: "Os cálculos são complicados, mas não é necessário que você os faça sozinho. Importante é compreender as ideias" (2012, p. 69).

Diante desses fatos constatamos que o modo como é apresentado o número $\pi$ não contribui para a construção de significados para este número irracional. A pesquisa confirma uma ênfase apenas em meios técnicos na abordagem deste número, quando é proposta a determinação do valor de $\pi$ por meio da razão entre o comprimento do círculo e o diâmetro do mesmo. Por outro lado, a questão da inscrição e circunscrição de polígonos regulares em circunferências é um caminho possível para a construção do significado da irracionalidade de $\pi$. Porém, o modo como é proposto não é adequado, uma vez que, não fica bem claro o intervalo de aproximação do número $\pi$ apresentado na pesquisa. Portanto, para construir uma significação do número irracional $\pi$, acreditamos que o processo de inscrição e circunscrição de polígonos regulares em uma circunferência seja um caminho adequado para trabalhar a significação da irracionalidade de $\pi$, desde que seja utilizada "[...] uma planilha eletrônica e delimitando valores racionais para PI, por excesso e por falta [...]" (POMMER, 2012, p. 70).

> Isto possibilitaria um caminho trilhando patamares de evolução da significação do conceito de PI, viabilizando o acesso ao conceito teórico de um número irracional, a relação com o infinito e o contínuo, através da operação de aproximação. (POMMER, 2012, p. 70).

Para finalizar, destacamos outro número irracional apresentado na pesquisa de Pommer (2012), o número de Euler, conhecido pelo número e. Constatamos na pesquisa em questão, que o número e é apresentado de maneira informativa ou de modo complementar ao assunto logaritmos. Destacamos também que é deixada de lado a significação da irracionalidade deste número. Segundo Pommer

> [...] existe um sistema de logaritmos na base 'e', descrevendo o valor aproximado 2,7182818, sem explicar que o mesmo é um número irracional. Ainda, o manual relata que os logaritmos na base 'e' são denominados logaritmos naturais ou neperianos, em homenagem a John Napier. (2012, p. 73).

Por outro lado, a referida pesquisa também destaca que o número $e$ é apresentado por outro manual utilizando uma linguagem matemática formal. Ou seja, o número irracional $e$ é apresentado a partir da construção do gráfico da função $f(x) = e^x$, onde $e$ representa o número de Euler, dado por $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, com $x \in \mathbb{R}$. Na construção do gráfico, os dados são dispostos em uma tabela contendo alguns valores de $x$ no intervalo $[-3,3]$ e representados no plano cartesiano. Pommer (2012, p. 75) afirma que "[...] para $x = 1$, o valor numérico da função $f(x) = e^x$ corresponde ao número de Euler $(e = 2,7183)$, sem explicar que este valor apresentado é uma aproximação". O número $e$ também é definido como $\lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, conhecido como limite exponencial fundamental.

Pommer enfatiza que

> A introdução formal tem contribuição limitada pelo uso de linguagem algébrica e exposição de conceitos sofisticados, principalmente ligados ao limite de uma função, tema cuja apresentação no Ensino Médio exige grande cuidado. (POMMER, 2012, p. 75).

Portanto, vimos que o número irracional e é apresentado de modo formal. Acreditamos que este meio utilizado na apresentação não é o mais adequado, pois esta opção não contribui para a significação da irracionalidade do número de Euler. Também destacamos que esta forma privilegia apenas a escrita algébrica. Uma possibilidade de apresentar o número e é enfatizado por Pommer (2012, p. 76) quando diz que o assunto "poderia ser realizado por meio de uma abordagem didática que expressasse ideias, utilizando maior diversidade de linguagens e meios didáticos para dar continuidade ao tratamento do tema".

No capítulo seguinte, iremos apresentar uma proposta didática, para alunos do $1^0$ ano do Ensino Médio, cujo objetivo é estabelecer significado para os números irracionais $\sqrt{2}$, número $\pi$ e, além disso, a compreensão da irracionalidade de um número através de sua expressão decimal.

CAPÍTULO 3

# Proposta didática

O presente capítulo, apresenta algumas propostas de atividades direcionadas a abordar o conceito de números irracionais, e está dividido em três seções. Na primeira seção são desenvolvidas atividades voltadas para a irracionalidade via representação decimal dos números reais, a segunda procura esclarecer a irracionalidade de $\sqrt{2}$ por meio do método redução ao absurdo e, finalmente a terceira nos traz alguns métodos que determinam a aproximação do número irracional $\pi$ por números racionais.

## 3.1 A irracionalidade via representação decimal dos números reais

A maneira mais comum de representar os números reais é através de sua representação decimal. Aqui iremos considerar os números reais positivos, já que os números negativos é tratado de modo análogo.

**Definição 3.1.1.** *Uma* **expressão decimal** *é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...,$$

*em que* $a_0$ *é um número inteiro* $\geq 0$ *e* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *são* **dígitos**, *isto é, números inteiros tais que* $0 \leq a_n < 10$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se um dígito* $a_n$, *chamado o* $n$*-ésimo dígito da expressão decimal de* $\alpha$. *O número natural* $a_0$ *chama-se a parte inteira de* $\alpha$.

**Exemplo 3.1.1.** $\alpha = 9,24500...$, $\beta = 14,121212...$ *e* $\theta = 2,010020003...$ *são expressões decimais.*

Observe que a expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, representa um número real e, além disso, a expressão decimal $\alpha$ corresponde a uma forma de representar a soma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots. \tag{3.1}$$

Observe também que as reticências no final da expressão decimal parece indicar uma soma com infinitas paracelas. Porém, o significado preciso dessa soma diz que o número real $\alpha$ tem por valores aproximados os números racionais

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \quad n = 1, 2, .... \tag{3.2}$$

A seguir apresentamos o axioma que caracteriza os números reais com as expressões decimais.

**Axioma 3.1.1.** *Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.*

**Definição 3.1.2.** *O conjuntos dos números racionais é definido por*

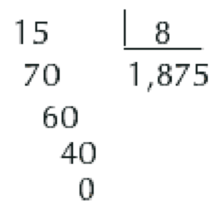
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

**Observação 3.1.1.** *Também podemos dizer que* **número racional** *é todo número que pode ser representado por uma razão ou fração entre dois números inteiros.*

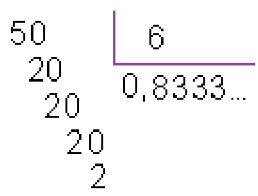
**Exemplo 3.1.2.** *Vamos determinar algumas expressões decimais de alguns números racionais.*

*a)* $8 = 8,000\ldots0\ldots$

*b)* $\dfrac{15}{8} = 1,875000\ldots$




*c)* $\dfrac{50}{6} = 0,8333...$




Neste momento, passaremos a descrever algumas atividades direcionadas a promover o conhecimento dos números irracionais.

ATIVIDADE 1: Obtenha as expressões decimais dos números reais abaixo.

a) 2.

b) -5.

c) 1,45.

d) $\dfrac{12}{5}$.

e) $\dfrac{5}{8}$.

f) $\dfrac{12}{9}$.

g) $\dfrac{4}{9}$.

h) $\dfrac{23}{90}$.

i) Quais conclusões podemos obter a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

j) Como classificar as expressões decimais acima observando a sua formação?

A partir da atividade 1 necessitamos de algumas definições.

**Definição 3.1.3.** *Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 \dots a_p \dots$ é dita* **finita** *quando, a partir de um certo ponto, todos os dígitos $a_n$ se tornam iguais a zero, ou seja, $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$. Assim $\alpha$ se escreve da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n.$$

**Definição 3.1.4.** *Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 \dots a_p \dots$ chama-se uma* **dízima periódica simples**, *de período $a_1 a_2 \dots a_p$ , se os primeiros $p$ dígitos após a vírgula repetem-se na mesma ordem. Empregamos também a notação $\alpha = a_0, \overline{a_1 \dots a_p}$. Neste caso, temos uma expressão decimal* **infinita**.

**Definição 3.1.5.** *Uma expressão decimal $\alpha = a_0, b_1 \dots b_m \overline{a_1 \dots a_p}$ chama-se* **dízima periódica composta**, *de período $a_1 a_2 \dots a_p$, se os $p$ dígitos, de posições $m+1$ a $m+p$, após a vírgula repetem-se na mesma ordem.*

ATIVIDADE 2: Escreva, quando possível, as expressões decimais finitas abaixo como uma fração.

a) $3,00\dots0\dots$.

b) $2,1$.

c) $3,21$.

d) $7,162$.

e) $9,5283$.

ATIVIDADE 3: Considere a dízima periódica $\alpha = 0,444\dots$. Responda:

a)Essa dízima é simples ou composta? Justifique sua resposta.

b) Qual é o período dessa dízima periódica?

c) Escreva a expressão decimal $\alpha = 0,444\ldots$ como uma soma de infinitas parcelas.

d)Fatore o resultado anterior e obtenha uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica. Calcule o valor desta soma.

e)Finalize obtendo uma fração que é equivalente a expressão decimal de $\alpha$.

ATIVIDADE 4: Considere a dízima periódica $\alpha = 0,212121\ldots$. Responda:

a) Essa dízima é simples ou composta?

b) Qual é o período dessa dízima periódica?

c) Escreva a expressão decimal $\alpha = 0,212121\ldots$ como uma soma de infinitas parcelas.

d)Fatore o resultado anterior e obtenha uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica. Calcule o valor desta soma.

e)Finalize obtendo uma fração que é equivalente a expressão decimal de $\alpha$.

ATIVIDADE 5: Considere a dízima periódica $\alpha = 0,18777\ldots$. Responda:

a)Essa dízima é simples ou composta?

b)Caso a dízima periódica seja composta, transforme-a em uma dízima periódica simples?

c)Qual é o período dessa dízima periódica?

d)Escreva a expressão decimal $\alpha = 0,18777\ldots$ como uma soma de infinitas parcelas.

e)Fatore o resultado anterior e obtenha uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica. Calcule o valor desta soma.

f)Finalize obtendo uma fração que é equivalente a expressão decimal de $\alpha$.

ATIVIDADE 6: Considere a dízima periódica $\alpha = 0,27464646\ldots$. Responda:

a)Essa dízima é simples ou composta?

b)Caso a dízima periódica seja composta, transforme-a em uma dízima periódica simples?

c)Qual é o período dessa dízima periódica?

d)Escreva a expressão decimal $\alpha = 0,27464646\ldots$ como uma soma de infinitas parcelas.

e)Fatore o resultado anterior e obtenha uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica. Calcule o valor desta soma.

f)Finalize obtendo uma fração que é equivalente a expressão decimal de $\alpha$.

Em suma, após concluir essas atividades somos induzidos a pensar que expressões decimais finitas ou infinitas(dízimas periódica simples ou compostas) representam números racionais. Reciprocamente, os números racionais são representados por expressões decimais. O teorema que mostraremos a seguir confirma esse fato.

Para a demonstração do teorema precisaremos de dois lemas. Nos lemas abaixo considere $m$ e $n$ números naturais primos entre si.

**Lema 3.1.1.** *Um número racional $\frac{m}{n}$ é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador de potência de* 10*) se, e somente se, $n$ não tem fatores primos diferentes de* 2 *ou* 5*.*

*Demonstração.* Sendo $m$ e $n$ primos entre si, uma fração equivalente a $\frac{m}{n}$ deve ter a forma $\frac{mp}{np}$ (obtida multiplicando-se $m$ e $n$ pelo mesmo número natural $p$). Os fatores primos de uma potência de base 10 são 2 e 5. Se $\frac{mp}{np}$ é uma fração decimal para algum $p$ então $np = 10^r$. Logo, $np$ só admite fatores primos iguais a 2 ou a 5, e, portanto, $n$ também.

Reciprocamente, se $n$ possui apenas fatores primos iguais a 2 ou a 5, então podemos multiplicar $n$ por $p$ de uma forma que o resultado seja uma potência de 10 ($p$ pode ser uma potência de 2 ou uma potência de 5). Com esse $p$, $\frac{mp}{np}$ é uma fração decimal. □

**Lema 3.1.2.** *Se $n$ tem outros fatores primos além de* 2 *ou* 5 *então a expressão decimal é, a partir de um certo ponto, periódica.*

*Demonstração.* Usando o processo tradicional da divisão continuada para transformar $\frac{m}{n}$ em fração decimal, como há fatores de $n$ diferentes de 2 ou 5, em nenhuma etapa o resto da divisão é zero, logo a expansão nunca termina, ou seja, é infinita. Além disso, os diferentes restos (diferentes de zero) que ocorrem são todos menores que $n$, portanto o número deles é no máximo $n-1$. Assim, algum resto deve repetir-se e, a partir daí, o processo se repete: os restos se sucedem na mesma ordem anterior e, portanto, os quociente também, o que fornece a periodicidade (observe que o período tem, no máximo, $n-1$ números). □

**Teorema 3.1.1.** *Um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, $\alpha$ tem expressão decimal finita ou infinita periódica.*

*Demonstração.* Suponha que o número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é racional. Então $\alpha = \dfrac{p}{q}$, onde $p$ e $q$ são números naturais primos entre si. Dividindo $p$ por $q$ obtém-se

$$p = a_0 q + r_0,$$

em que $a_0 \in \mathbb{N}$ é o quociente e $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < q$, é o resto. Ora, esta última igualdade é equivalente a escrever

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, a_0 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{r_0}{q} < 1. \tag{3.3}$$

Segue-se daí que $a_0$ é a parte inteira de $\dfrac{p}{q}$. No segundo passo, acrescenta-se um 0 à direita do resto $r_0$, o que corresponde a multiplicá-lo por 10, e divide-se o número obtido novamente por $q$. Assim, obtém-se $10r_0 = a_1 q + r_1$, onde $a_1 \in \mathbb{N}$ é o quociente e $r_1 \in \mathbb{N}$, $r_1 < q$, é o resto, o que equivale a

$$\frac{10r_0}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}, a_1 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{r_1}{q} < 1.$$

Resulta da expressão acima que $a_1 \leq \frac{10r_0}{q} < 10$. Assim, a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{r_0}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q}, \quad a_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq a_1 < 10, \quad 0 \leq \frac{r_1}{10q} < \frac{1}{10}. \tag{3.4}$$

Juntando (3.3) e (3.4), obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_1 < 10,\ 0 \leq \frac{r_1}{10q} < \frac{1}{10}. \tag{3.5}$$

Generalizando o raciocínio acima, podemos concluir que, se o processo de divisões sucessivas for continuado, obter-se-á a expressão decimal do número $\frac{p}{q}$.

Ora, se $q$ não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5, então pelo Lema 3.1.1 pode-se concluir que $\frac{p}{q}$ é equivalente a uma fração decimal e, portanto, sua expressão decimal é finita. Por outro lado, se $q$ tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expressão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica de acordo com o Lema 3.1.2.

Reciprocamente suponhamos que $\alpha$ tem uma expressão decimal periódica. Sem perda de generalidade, considere uma dizíma periódica composta

$$\alpha = 0, b_1 \ldots b_m \overline{a_1 \ldots a_p},$$

cujo período tem $p$ dígitos. Os caso em que $\alpha$, ou tem expressão decimal finita ou é uma dízima periódica simples, é obtida de modo análogo.

Seja $\alpha = 0, b_1 \ldots b_m \overline{a_1 \ldots a_p}$ uma dízima periódica composta. Multiplicando $\alpha$ por $10^m$ obtemos a dízima periódica simles

$$10^m \alpha = b_1 \ldots b_m, \overline{a_1 \ldots a_p}$$

Assim,

$$10^m \alpha = b_1 \ldots b_m + \frac{a_1 \ldots a_p}{10^p} + \frac{a_1 \ldots a_p}{10^{2p}} + \frac{a_1 \ldots a_p}{10^{3p}} \cdots$$

$$10^m \alpha = b_1 \ldots b_m + a_1 \ldots a_p \left( \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots \right).$$

Observe que $\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots$ representa a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, cujo primeiro termo é $\frac{1}{10^p}$ e razão $\frac{1}{10^p}$. Calculando esta soma obtém-se $\frac{1}{10^p - 1}$. Isso implica

$$10^m \alpha = b_1 \ldots b_m + a_1 \ldots a_p \cdot \frac{1}{10^p - 1} = b_1 \ldots b_m + \frac{a_1 \ldots a_p}{10^p - 1}$$

$$10^m\alpha = \frac{(10^p-1)b_1\dots b_m + a_1\dots a_p}{10^p-1}$$

Logo,

$$\alpha = \frac{(10^p-1)b_1\dots b_m + a_1\dots a_p}{10^m(10^p-1)}$$

e, portanto, $\alpha$ é um número racional. □

Como consequência deste resultado podemos definir os números irracionais.

**Definição 3.1.6.** *Um número $\beta \in \mathbb{R}$ é irracional, quando $\beta$ tem expressão decimal infinita não periódica.*

**Exemplo 3.1.3.** *Os números*

$$\alpha = 0,102003000400005\dots \; e \; \beta = 2,515115111511115111111\dots$$

*são exemplos de números irracionais, já que possuem expressões decimais infinitas e não periódicas.*

Vamos explorar um pouco este conceito com algumas atividades. Além de trabalhar o conceito de números irracionais, tais atividades vem desenvolver a idéia de que os números irracionais existem em grandes quantidades.

ATIVIDADE 7: Nesta atividade vocês serão detetives matemáticos. Encontrem cinco números irracionais usando sua expressão decimal.

ATIVIDADE 8: A partir dos resultados da atividade anterior na sua opnião, existe uma quantidade finita ou uma infinidade de números irracionais?

## 3.2 A irracionalidade de $\sqrt{2}$

A irracionalide da $\sqrt{2}$ é um tema abordado, em alguns livros didáticos, através da demonstração por redução ao absurdo. Porém, percebe-se que a demonstração é apresentada sem deixar claro as idéias que estão por trás nesse processo de demonstração. Assim, objetivando desenvolver nos alunos um pensamento matemático crítico dedicamos está seção para esclarecer as idéias que estão por trás da demonstração por redução ao absurdo, por meio de atividades sequênciadas.

Antes de descrever as atividades precisamos de alguns conceitos lógicos, por exemplo, o que é uma sentença matemática, como negar uma sentença matemática, como identificar o valor lógico de uma sentença matemática, etc. Isso é o que faremos a seguir.

**Definição 3.2.1.** *Chamamos de* **frase** *a um conjunto de palavras ou símbolos matemáticos, que se ralacionam pra comunicar uma idéia.*

**Definição 3.2.2.** *Uma* **sentença** *ou* **proposição** *é uma frase, (que no nosso caso pode, eventualmente, incluir apenas simbolos matemáticos) tal que:*

*1. Apresenta-se de forma estruturada como uma oração, com sujeito, verbo e predicado;*

*2. É afirmativa declarativa (não interrogativa, nem exclamativa);*

*3. Satisfaz o* **Princípio do Terceiro Excluído***, que garante que uma sentença ou é falsa ou é verdadeira, não havendo uma terceira alternativa; e o* **Princípio da Não-contradição***, que assegura que uma sentença não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo.*

Como exemplo, considere as frases a seguir:

$P_1 : 87 < 85^2$.

$P_2 : 3+9 = 11$.

$P_3$ : Todo número par é divisivel por 3.

**Observação 3.2.1.** *Dizemos que o* **valor lógico** *de uma sentença é* **verdadeiro** *quando a sentença é verdadeira, e* **falso***, caso contrário.*

Outro ponto importante que não podemos esquecer é a negação de uma sentença. A **negação de uma sentença** $P$ é a sentença **não** $P$, cuja notação é $\tilde{}P$.

Observe que, conforme o Principio da Não-contradição, temos:

$$P \text{ é verdadeiro} \Rightarrow \tilde{}P \text{ é falso}$$
$$\tilde{}P \text{ é verdadeiro} \Rightarrow P \text{ é falso.}$$

Resulta daí que, ou $P$ é verdadeiro ou $\tilde{}P$ é verdadeiro, excludentemente. Da mesma forma, $P$ é falso ou $\tilde{}P$ é falso, excludentemente.

A seguir apresentamos duas atividades, cujo objetivo é verificar a irracionalidade da $\sqrt{2}$ utilizando o método de redução ao absurdo como demonstração.

ATIVIDADE 1: Se $n \in \mathbb{N}$ e $n^2$ é divisível por dois (par), então $n$ é divisível por dois (é par).

a) Identifique a sentença que representa a hipótese($H$).

b) Identifique a sentença que representa a tese($T$).

c) Identifique a sentença que representa a negação da tese($\tilde{}T$).

d) Suponha que valem $H$ e $\tilde{}T$ e conclua que $n^2$ é ímpar.

e) Identifique o absurdo observando a sentença $H \wedge \tilde{}H$.

f) Conclua o resultado.

ATIVIDADE 2: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

a) Identifique a sentença que representa a tese($T$).

b) Identifique a sentença que representa a negação da tese($\tilde{}T$).

c) Suponha que˜$T$ é verdade e conclua que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ são primos entre si.

d) Conclua a partir daí que $p$ e $q$ são divisíveis por 2.(Use a atividade 1)

e) Identifique o absurdo acima.

f) Conclua o resultado.

Outra possibilidade de desenvolver a ideia que $\sqrt{2}$ seja um número irracional é através de aproximações por números racionais. Para isso, iremos procurar soluções para a equação $x^2 = 2$.

ATIVIDADE 3: Na atividade anterior, vimos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. O nosso objetivo é obter aproximações de $\sqrt{2}$ por uma sequência de números racionais.

a) Obtenha o maior inteiro $x$ tal que $x^2 < 2$.

b) Obtenha o maior número racional $x$, com uma casa decimal, tal que $x^2 < 2$.

c) Obtenha o maior número racional $x$, com duas casas decimais, tal que $x^2 < 2$.

d) Obtenha o maior número racional $x$, com três casas decimais, tal que $x^2 < 2$.

e) Obtenha o maior número racional $x$, com quatro casas decimais, tal que $x^2 < 2$.

f) Obtenha o maior número racional $x$, com cinco casas decimais, tal que $x^2 < 2$.

g) Que observações podemos fazer dos itens anteriores?

h) Podemos dizer que a quantidade de algarismo da expressão decimal de um número racional $x$, tal que $x^2 < 2$, pode ser finita ou ser periódica?

i) O conjunto de números $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ pode ser finito?

Uma atividade semelhante seria determinar uma sequência infinita de números racionais $x$ tais que $x^2 > 2$.

## 3.3 A irracionalidade de $\pi$

Finalmente, encerramos este capítulo apresentando um método de aproximações para o cálculo do número irracional $\pi$, por meio de atividades didáticas.

Dos Santos (2005, p. 8) garante que “É possível, no entanto, propor situações que permitam aos alunos várias aproximações sucessivas de $\pi$.” Sendo assim, iremos determinar aproximações para o $\pi$ utilizando o método de Ptolomeu.

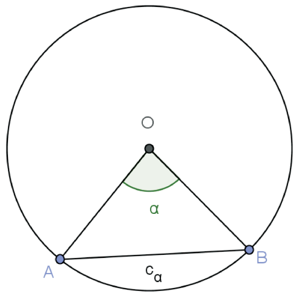
Ptolomeu determinou a aproximações do perímetro de uma dada circunferência utilizando uma sequência de polígonos inscritos e circunscritos, através da leitura da tábua de cordas trigonométricas (POMMER, 2012, p. 156).

Aqui iremos definir o número $\pi$ da seguinte maneira

$$\pi \simeq \frac{\text{perímetro do polígono}}{\text{diâmetro da circunferência}}.$$

Seja um polígono com $n$ lados, cada lado corresponde a corda de um ângulo central $\alpha$. A corda referente ao ângulo central $\alpha$ será representado pelo segmento de reta $c_\alpha$.

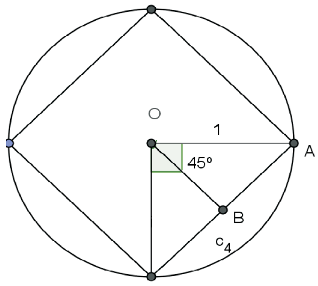
**Figura 3.1** Retificação do arco $AB$.




Fonte: A adaptado de Pommer (2012)

ATIVIDADE 1: Determinar um valor aproximado para $\pi$ utilizando um quadrado inscrito numa circunferência de raio 1. Veja figura abaixo.

**Figura 3.2** Quadrado inscrito numa circunferência raio 1.




Fonte: Adaptado de Pommer (2012)

a) Determine o valor de $\overline{AB}$.

b) Utilize o resultado anterior para obter o valor da corda $c_4$ ou $c_{90^\circ}$.

c) Multiplique este valor pela quantidade de lados do quadrado e obetenha seu perímetro.

d) Com uma calculadora científica determine uma aproximação para $\sqrt{2}$.

e) Conclua obtendo uma aproximação para $\pi$.

ATIVIDADE 2: Determinar um valor aproximado para $\pi$ utilizando um octógono inscrito numa circunferência de raio 1. Veja figura abaixo.

a) Com uma calculadora científica determine uma aproximação para $\sin(22,5^\circ)$.

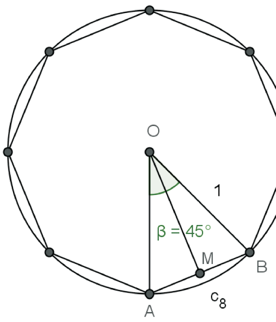
b) Determine o valor de $\overline{MB}$.

c) Utilize o resultado anterior para obter o valor da corda $c_8$ ou $c_{45^\circ}$.

d) Multiplique este valor pela quantidade de lados do octógono e obetenha seu perímetro.

e) Conclua obtendo uma aproximação para $\pi$.

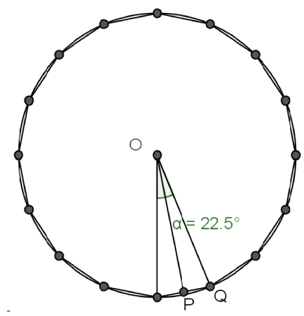
**Figura 3.3** Octógono inscrito na circunferência de raio 1.




Fonte: Autor (2014)

ATIVIDADE 3: Determinar um valor aproximado para $\pi$ utilizando um polígono de 16 lados inscrito numa circunferência de raio 1. Veja figura abaixo.

**Figura 3.4** Polígono de 16 lados inscrito na circunferência de raio 1.




Fonte: Autor (2014)

a) Com uma calculadora científica determine uma aproximação para $\sin(11,25°)$.

b) Determine o valor de $\overline{PQ}$.

c) Utilize o resultado anterior para obter o valor da corda $c_{16}$ ou $c_{22,5°}$.

d) Multiplique este valor pela quantidade de lados do polígono de 16 lados e obetenha seu perímetro.

e) Conclua obtendo uma aproximação para $\pi$.

ATIVIDADE 4: Determinar um valor aproximado para $\pi$ utilizando um polígono de 360 lados inscrito numa circunferência de raio 1.

a) Com uma calculadora científica determine uma aproximação para $\sin(0,5°)$.

b) Determine o valor de $\overline{PQ}$.

c) Utilize o resultado anterior para obter o valor da corda $c_{360}$ ou $c_{1°}$.

d) Multiplique este valor pela quantidade de lados do polígono de 360 lados e obetenha seu perímetro.

e) Conclua obtendo uma aproximação para $\pi$.

Seguindo este raciocínio, podemos de modo semelhante obter aproximações para $\pi$ utilizando polígonos circunscritos numa circunferência.

O método de Ptolomeu desenvolvido acima para a determinação da aproximação do número irracional $\pi$ requer noções de Geometria e Trigonometria. Assim, acredito que este método é uma ferramenta adequada a ser trabalhada em sala de aula na abordagem do número irracional $\pi$.

Por outro lado, este método não deixa claro acerca da irracionalidade do número $\pi$. Porém, Dos Santos (2005, p. 8) destaca que "Ao trabalhar com essas aproximações, é interessante usar diferentes calculadoras e informar os alunos a respeito dos cálculos que são feitos em computadores de grande porte, que produzem o valor de $\pi$ com milhões de dígitos sem que haja o aparecimento de um período em sua expressão decimal." Portanto, ao verificarmos este fato é possível intuir que $\pi$ é um número irracional.

# Considerações finais

Passamos a delinear as conclusões deste trabalho, analisando as propostas didáticas desenvolvidas sobre o conceito dos números irracionais com as considerações levantadas nos capítulos 1 e 2.

O conceito de número irracional é o nosso primeiro fato a ser analisado. Vimos no decorrer do trabalho que a maioria dos alunos apresentam concepções erradas acerca dos números irracionais. Tais concepções adquiridas pelos alunos parecem estar relacionadas ao modo como é introduzido os números irracionais nos livros didáticos no Ensino Fundamental II. Por um lado, o conjunto dos números reais é apresentado como a união de dois conjuntos disjuntos, ou seja, os números racionais e os números irracionais ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$), onde $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ designa o conjunto dos números irracionais. Por outro lado, os números irracionais também são apresentados como os números reais que não são racionais. Assim, essas diferentes caracterizações dos números irracionais não permitem que os alunos diferenciem os números reais dos números irracionais.

Dessa forma, em nossa proposta didática, o conceito de número irracional é descrito via representação decimal dos números reais. Souto (2010, p. 40) enfatiza que "[...] é essencial que as tarefas propostas nos livros didáticos valorizem não somente técnicas de solução, mas algum discurso racional que justifique e que esclareça tais técnicas, e que tal discurso racional esteja fundamentado em um discurso teórico, possibilitando assim a construção de uma organização praxeológica completa."

Assim, nossa primeira proposta didática é direcionada de modo investigativo para a conceitualização de números irracionais, por meio de atividades que compreendem tarefas, técnicas e teorias.

A irracionalidade de $\sqrt{2}$ é o segundo ponto a ser analisado. Este conceito geralmente é introduzido em muitos livros didáticos por viés empírico. Porém, vimos que caracterizar a irracionalidade de um número com fatos geométricos não é suficiente para estabelecer o conceito de números irracionais, uma vez que, este processo dedica-se a casos particulares. Também destacamos que alguns livros didáticos demonstram a irracionalidade de $\sqrt{2}$ por redução ao absurdo. Todavia, esses livros não esclarecem as ideias existentes da lógica proposicional básica. Logo, a concepção de que $\sqrt{2}$ é um número irracional não é devidamente compreendido pelos alunos.

Portanto, nossa segunda proposta didática tem por objetivo esclarecer as técnicas existentes na demonstração, por redução ao absurdo, de que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Outro objetivo dessa proposta foi caracterizar $\sqrt{2}$ como um número irracional utilizando aproximações por sequências de números racionais.

A irracionalidade de $\pi$ é o terceiro e último ponto a ser analisado. Este conceito geralmente é introduzido em muitos livros didáticos pelo conhecimento empírico, modo semelhante àquele de abordar $\sqrt{2}$. Verifica-se este fato quando Pommer (2012, p. 69) enfatiza que "[...] o texto sugere o desenho de uma circunferência com o compasso, contorná-la com um barbante e dividir o comprimento do barbante pela medida do diâmetro, o qual resulta 3,1 (um valor aproximado de PI). Sugerindo que a razão entre o perímetro da circunferência e o diâmetro de uma circunferência é invariável, sem maiores explicações, afirmam que métodos dedutivos permitem obter o valor de PI com maior precisão, expondo o valor de $\pi = 3,1415926$. "

Dessa forma, nossa última proposta didática é direcionada de modo investigativo para o cálculo de $\pi$ utilizando aproximações sucessivas de polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência. Observe que utilizando esta proposta não identificamos a irracionalidade de $\pi$, apenas determinamos uma aproximação. Para concluir que $\pi$ é irracional recomenda-se o uso de uma calculadora científica e analisar o comportamento da expressão decimal de $\pi$.

Diante das dificuldades apresentadas a cerca do conceito e do ensino dos números irracionais, em particular, dos números irracionais $\sqrt{2}$ e $\pi$, acreditamos que esta proposta didática seja um caminho possível para se trabalhar a conceitualização dos números irracionais com alunos de 1º ano do Ensino Médio.

# Referências Bibliográficas


[DAM99] Regina F. DAMM. Registros de representação. In *MACHADO, Silvia D. A. (Org.). Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo, SP: EDUC, 1999.

[DS] Gilvaneide Lucena DOS SANTOS. *Número $\pi$: Histórico, sua Irracionalidade e Transcendência*. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/GilvaneideLucenadosSantos.pdf> Acesso em 16 de setembro de 2014.

[EVE04] Howard. EVES. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, São Paulo, 2004. Trad. Hygino H. Domingues.

[FIG02] Djario Guedes de. FIGUEIREDO. *Números Irracionais e Transcendentes, 3ª edição*. Coleção Iniciação Científica. SBM, Rio de Janeiro, 2002.

[LIM09a] Elon Lages LIMA. *Curso de análise volume 1, 12ª edição*. Coleção Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[LIM09b] Elon Lages et al. LIMA. *A Matemática do Ensino Médio volume 1, 9ª edição*. Coleção Professor de Matemática. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2009.

[MAI08] Cristini Kuerten MAIA. *A organização praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Cantarina - UFSC, Florianópolis, 2008.

[MIG09] Antônio et al. MIGUEL. *História da Matemática em Atividades Didáticas, 2ª edição*. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica). Editora Livraria da Física (UFRN), São Paulo, 2009.

[POM12] Wagner Marcelo POMMER. *A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais*. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

[ROQ12] Tatiana. ROQUE. *Tópicos de História da Matemática, 1ª edição*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[SOU10] Alexandre Machado. SOUTO. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2010.