

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ISADORA NOGUEIRA DE ARAÚJO**

**MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA DE COLUNAS DE CONCRETO CONFINADAS  
POR POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRA**

**MACEIÓ**

**2017**

ISADORA NOGUEIRA DE ARAÚJO

**MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA DE COLUNAS DE CONCRETO CONFINADAS  
POR POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti  
Marques

Maceió  
2017

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

A658m Araújo, Isadora Nogueira de.

Modelagem elastoplástica de colunas de concreto confinadas por polímeros reforçados com fibra / Isadora Nogueira de Araújo. – 2017.  
147 f.: il.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 134-141.

Apêndice: f. 142-147.

1. Concreto confinado – Tensão - deformação. 2. Teoria da plasticidade.  
3. Polímeros reforçados com fibras (PRF). I. Título.

CDU: 624.044





Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC



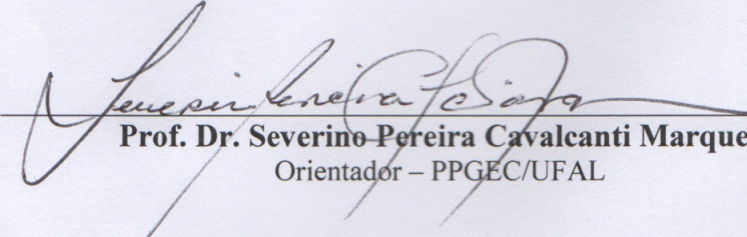
---

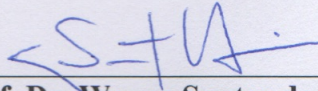
**MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA DE COLUNAS DE CONCRETO CONFINADAS POR  
POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRA**

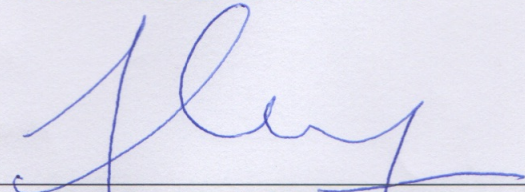
**ISADORA NOGUEIRA DE ARAÚJO**

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 27 do mês de novembro do ano de 2017.

Banca Examinadora:

  
**Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques**  
Orientador – PPGEC/UFAL

  
**Prof. Dr. Wayne Santos de Assis**  
Avaliador Interno - PPGEC/UFAL

  
**Prof. Dr. Samir Maghous**  
Avaliador Externo – PPGEC/UFRGS



## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus. Sempre guiando minhas escolhas e iluminando meu caminho.

Agradeço enormemente a meus pais, Paulo e Edith, por todo o empenho que tiveram em minha criação, colocando sempre minha educação em primeiro lugar, por todo o apoio que sempre tive em minhas escolhas, por todos os conselhos que tanto me ajudaram e, principalmente, por serem meus maiores exemplos.

Aos meus irmãos, João Paulo, Catarina e Luana, por todo o companheirismo, por sempre me ajudarem em tudo, por serem meus amigos e, também, por serem grandes exemplos para mim em todas as fases da minha vida. Agradeço também a meus cunhados, Ricardo e Pedro, e a minha cunhada, Cida, pelos anos de convivência, estando presentes nos momentos importantes.

Ao meu querido namorado, Vítor, pelo apoio incondicional, por toda a paciência, por sempre acreditar em mim, por toda a ajuda e por estar sempre presente, dividindo tudo comigo. Agradeço, também, à sua família, Stela, Domingos, Lucas e Mariana, por serem, para mim, extensão da minha própria família.

Agradeço a meus avós, Elza (in memoriam), Paulo (in memoriam), Bartyra (in memoriam) e João, a minha família e a meus amigos, que sempre estiveram presentes, acreditando em mim e torcendo para que tudo desse certo.

Agradeço enormemente meu orientador Severino, que, como professor e como orientador compartilhou seus conhecimentos de forma inspiradora, sempre com muita dedicação, e que não mediu esforços para me ajudar na elaboração deste trabalho, sempre se mostrando muito paciente e disponível.

À todos os professores que fazem o PPGEC, que brilhantemente transmitiram seus conhecimentos com a turma, e se mostravam disponíveis sempre que precisávamos.

Aos meus colegas de turma, por dividirem toda a caminhada do mestrado, por compartilharem seus conhecimentos e ajudarem sempre que possível. Agradeço, especialmente, à amiga e colega Bruna, pelo companheirismo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e ao Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV) pela disponibilidade do espaço físico para trabalhar durante o mestrado.

## RESUMO

O efeito do confinamento contribui para o aumento da resistência e da ductilidade de colunas de concreto. Boa parte dos modelos preditivos do diagrama tensão-deformação do concreto confinado existentes é de natureza semiempírica, não permitindo uma direta extrapolação para materiais com propriedades distintas daquelas utilizadas para suas formulações. Para contornar este fato, buscam-se modelos que sejam baseados em teorias fundamentadas na mecânica do contínuo, como a Teoria da Plasticidade, visando uma maior eficiência e mais ampla aplicabilidade. O presente trabalho realiza um estudo sobre o comportamento de colunas de concreto com seção transversal circular ou quadrada, confinadas lateralmente por mantas de polímeros reforçados por fibras (PRF) e submetidas a carregamento de compressão monotônico centrado, utilizando como base a Teoria da Plasticidade. Nesse estudo, o comportamento do concreto confinado é simulado através de um modelo de plasticidade de Drucker-Prager, enquanto que o material confinante é admitido como elástico linear. As análises foram desenvolvidas através de um procedimento incremental-iterativo semianalítico, que permite a descrição do comportamento tensão deformação das referidas colunas. Para consideração de colunas de seção transversal quadrada, emprega-se uma estratégia de uniformização dos campos de tensão e de deformação ao longo da seção transversal da coluna, de maneira que o procedimento de análise é unificado e empregado para descrição do comportamento das colunas de seção transversal circular e quadrada. Para verificação e validação do modelo proposto, resultados obtidos com o mesmo são comparados com aqueles obtidos experimentalmente ou por outros modelos existentes na literatura. As comparações de resultados são feitas entre curvas tensão-deformação de colunas de concreto encamisadas. Os resultados mostram um desempenho satisfatório do modelo proposto, tanto para descrição do comportamento de colunas de seção circular quanto quadradas.

**Palavras-chave:** Concreto confinado. Polímeros Reforçados com Fibras (PRF). Teoria da Plasticidade. Drucker-Prager. Modelagem. Tensão-Deformação.

## ABSTRACT

The effect of confinement improves the strength and ductility of concrete columns. Most of the existing predictive models of the stress-strain diagram of confined concrete are semi empirical and do not allow a direct extrapolation to materials with distinct properties of the ones used in tests. Therefore, a search for models based in rational theories such as continuum mechanics, as is the Plasticity Theory, is conducted, targeting a more efficient performance and ample applicability. In this work, a study of the behavior of confined concrete columns with circular or square sections, laterally confined by sheets of fiber reinforced polymers (FRP) and submitted to concentric and monotonic compression axial load, is carried out, based on Plasticity Theory. In this study, the behavior of confined concrete is assumed as a Drucker-Prager plasticity model, while the confining material is considered linear elastic. The analysis is developed through a semi analytical incremental-iterative procedure that allows the description of the stress-strain behavior of the mentioned columns. To consider columns with square sections, a strategy of homogenization of the stress and strain fields throughout the section is applied, so that the procedure of analysis is unified and used to describe the behavior of columns with circular or square sections. To validate and verify the proposed model, comparisons of stress-strain diagrams are made with the results of the proposed model and other existing models and experimental data. These results show a satisfactory performance of the proposed model in describing the behavior of circular and square columns.

**Keywords:** Confined Concrete. Fiber Reinforced Polymers (FRP). Plasticity Theory. Drucker-Prager. Modeling. Stress-Strain.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Comportamento sob tensão uniaxial .....	24
Figura 2 – Diagramas tensão-deformação típicos de materiais .....	26
Figura 3 – Curvas tensão-deformação para concretos submetidos à compressão uniaxial .....	28
Figura 4 – Curvas típicas de tensão-deformação lateral e axial .....	29
Figura 5 – Curva típica tensão-deformação volumétrica.....	30
Figura 6 – Espaço de tensões de Haigh-Westergaard .....	36
Figura 7 – Estado de tensões de um ponto projetado no plano desviatório .....	38
Figura 8 – Envoltória de Mohr-Coulomb .....	40
Figura 9 – Interseção das pirâmides de Mohr-Coulomb com plano $\sigma_3 = 0$ .....	41
Figura 10 – Meridianos das pirâmides de Mohr-Coulomb.....	41
Figura 11 – Seção meridiana do critério de Drucker-Prager .....	42
Figura 12 – Seção transversal ao plano $\pi$ do critério de Drucker-Prager.....	43
Figura 13 – Curva tensão-deformação teórica.....	44
Figura 14 – Material elastoplástico perfeito .....	46
Figura 15 – Ilustração bidimensional da superfície de escoamento .....	47
Figura 16 – Comportamento tensão-deformação do concreto confinado.....	50
Figura 17 – Mecanismo de confinamento no concreto.....	51
Figura 18 – Diagrama tensão-deformação do concreto confinado com aço e com PRF .....	54
Figura 19 – Taxa de dilatação lateral.....	55
Figura 20 – Regiões com condições de confinamento distintas em colunas de seção retangular.....	58
Figura 21 – Comportamento tensão-deformação do concreto confinado.....	61
Figura 22 – Esquema de esforços atuantes no elemento confinante .....	66
Figura 23 - Variação do fator de eficiência para um PRF com Fibra de Carbono.....	70
Figura 24 - Variação do fator de eficiência para um PRF com Fibra de Vidro .....	71
Figura 25 – Algoritmo do programa.....	73
Figura 26 – Comparações de resultados para concreto não confinado com resistência de 31,7 MPa.....	74
Figura 27 – Comparações de resultados para concreto não confinado com resistência de 52,1 MPa.....	75
Figura 28 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 23,14$ (axial).....	76
Figura 29 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 23,14$ (lateral) .....	76
Figura 30 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 46,29$ (axial).....	77
Figura 31 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 46,29$ (lateral) .....	77

Figura 32 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 69,43$ (axial).....	78
Figura 33 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 69,43$ (lateral) .....	78
Figura 34 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 27,86$ (axial).....	79
Figura 35 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 27,86$ (lateral) .....	79
Figura 36 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 41,80$ (axial).....	80
Figura 37 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e $\rho = 41,80$ (lateral) .....	80
Figura 38 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 20,44$ (axial).....	81
Figura 39 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 20,44$ (lateral) .....	82
Figura 40 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 40,88$ (axial).....	82
Figura 41 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 40,88$ (lateral) .....	83
Figura 42 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 61,33$ (axial).....	83
Figura 43 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 61,33$ (lateral) .....	84
Figura 44 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 43,65$ (axial).....	84
Figura 45 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e $\rho = 43,65$ (lateral) .....	85
Figura 46 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e $\rho = 7,73$ (axial).....	86
Figura 47 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e $\rho = 7,73$ (lateral).....	86
Figura 48 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e $\rho = 15,47$ (axial).....	87
Figura 49 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e $\rho = 15,47$ (lateral) .....	87
Figura 50 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e $\rho = 23,20$ (axial).....	88
Figura 51 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e $\rho = 23,20$ (lateral) .....	88

Figura 52 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e $\rho = 7,42$ (axial).....	89
Figura 53 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e $\rho = 7,42$ (lateral).....	90
Figura 54 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e $\rho = 14,84$ (axial).....	90
Figura 55 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e $\rho = 14,84$ (lateral) .....	91
Figura 56 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e $\rho = 22,26$ (axial).....	91
Figura 57 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e $\rho = 22,26$ (lateral) .....	92
Figura 58 – Comparação com resultados de YONGCHANG et al. (2016) e $\rho = 10,69$ .....	93
Figura 59 – Comparação com resultados de YONGCHANG et al. (2016) e $\rho = 21,39$ .....	94
Figura 60 – Comparação com resultados de YONGCHANG et al. (2016) e $\rho = 32,08$ .....	94
Figura 61 – Comparação com resultados de YONGCHANG et al. (2016) e $\rho = 6,95$ .....	95
Figura 62 – Comparação com resultados de YONGCHANG et al. (2016) e $\rho = 13,89$ .....	96
Figura 63 – Comparação com resultados de YONGCHANG et al. (2016) e $\rho = 20,84$ .....	96
Figura 64 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e $\rho = 10,41$ .....	97
Figura 65 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e $\rho = 19,76$ .....	98
Figura 66 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e $\rho = 11,60$ .....	99
Figura 67 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e $\rho = 17,18$ .....	99
Figura 68 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e $\rho = 22,98$ .....	100
Figura 69 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFC .....	101
Figura 70 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFA .....	102
Figura 71 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFG .....	102
Figura 72 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFP.....	103
Figura 73 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFC com <i>Eexp</i> .....	104
Figura 74 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFA com <i>Eexp</i> .....	104
Figura 75 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFG com <i>Eexp</i> .....	105
Figura 76 – Comparação com resultados de WU et al. (2008) e camisa de PRFP com <i>Eexp</i> .....	105



Figura 77 – Confinamento em colunas de seção quadrada .....	108
Figura 78 – Taxa de rigidez equivalente para o confinamento.....	109
Figura 79 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para $\rho = 11,15$ e $\mu = 1,0$ .....	110
Figura 80 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para $\rho = 22,29$ e $\mu = 1,0$ .....	111
Figura 81 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para $\rho = 22,29$ e $\mu = 0,13$ .....	112
Figura 82 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para $\rho = 11,15$ e $\mu = 0,4$ .....	112
Figura 83 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para $\rho = 22,29$ e $\mu = 0,4$ .....	113
Figura 84 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para $\rho = 15,23$ e $\mu = 0,4$ .....	113
Figura 85 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) para $\rho = 37,18$ e $\mu = 0,07$ .....	114
Figura 86 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) para $\rho = 23,32$ e $\mu = 0,33$ .....	115
Figura 87 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) para $\rho = 29,74$ e $\mu = 0,33$ .....	115
Figura 88 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) para $\rho = 23,32$ e $\mu = 0,50$ .....	116
Figura 89 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 15,20$ e $\mu = 0$ .....	117
Figura 90 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 15,10$ e $\mu = 0,2$ .....	117
Figura 91 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 14,92$ e $\mu = 0,4$ .....	118
Figura 92 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 15,69$ e $\mu = 0,6$ .....	118
Figura 93 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 15,15$ e $\mu = 0,8$ .....	119
Figura 94 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 15,59$ e $\mu = 1,0$ .....	119
Figura 95 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 30,40$ e $\mu = 0$ .....	120
Figura 96 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 30,21$ e $\mu = 0,2$ .....	121
Figura 97 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 29,83$ e $\mu = 0,4$ .....	121

Figura 98 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 31,39$ e $\mu = 0,6$ .....	122
Figura 99 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 30,30$ e $\mu = 0,8$ .....	122
Figura 100 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 31,18$ e $\mu = 1,0$ .....	123
Figura 101 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 9,53$ e $\mu = 0$ .....	124
Figura 102 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 9,18$ e $\mu = 0,2$ .....	124
Figura 103 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 9,55$ e $\mu = 0,4$ .....	125
Figura 104 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 9,42$ e $\mu = 0,6$ .....	125
Figura 105 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 9,42$ e $\mu = 0,8$ .....	126
Figura 106 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 9,53$ e $\mu = 1,0$ .....	126
Figura 107 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 19,06$ e $\mu = 0$ .....	127
Figura 108 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 18,36$ e $\mu = 0,2$ .....	128
Figura 109 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 19,10$ e $\mu = 0,4$ .....	128
Figura 110 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 18,84$ e $\mu = 0,6$ .....	129
Figura 111 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 18,84$ e $\mu = 0,8$ .....	129
Figura 112 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para $\rho = 19,06$ e $\mu = 1,0$ .....	130

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PRF	Polímeros Reforçados com Fibra
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
D-P	Drucker-Prager
PRFC	Polímeros Reforçados com Fibra de Carbono
PRFST	Polímeros Reforçados com Fibra de Carbono (tipo ST200)
PRFHM	Polímeros Reforçados com Fibra de Carbono (tipo HM300S)
PRFG	Polímeros Reforçados com Fibra de Vidro
PRFA	Polímeros Reforçados com Fibra de Aramida
PBO	Tipo de Fibra Sintética de Alto Rendimento
PRFP	Polímeros Reforçados com Fibra de PBO



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$b$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$c$	Coesão do concreto
$d$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$d\lambda$	Fator de proporcionalidade positivo
$e_{ij}$	Distorção
$f_{cc}$	Resistência do concreto confinado
$f_l$	Tensão lateral atuando no concreto
$f_1$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$f_{11}$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$f_{12}$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$f_2$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$f_{22}$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$f'_c$	Resistência do concreto à compressão
$f'_t$	Resistência do concreto à tração
$h$	Parâmetro da matriz constitutiva elastoplástica
$i_o$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$k_o$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$k_1$	Coefficiente do modelo de RICHART <i>et al.</i> (1929)
$r$	Raio de arredondamento da coluna
$s_{ij}$	Tensor desviatório de tensões
$t$	Espessura do PRF
$B$	Lado da coluna
$C_{ijkl}$	Matriz constitutiva
$[D]$	Matriz constitutiva elastoplástica
$D$	Diâmetro da coluna circular
$[E]$	Matriz constitutiva elástica
$E$	Módulo de elasticidade do concreto

$E_f$	Módulo de elasticidade do PRF na direção das fibras
$E_p$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$E_x$	Módulo de elasticidade do PRF longitudinal às fibras
$E_y$	Módulo de elasticidade do PRF transversal às fibras
$F$	Função de escoamento
$F_{1c}$	Resistência do PRF à compressão longitudinal às fibras
$F_{1t}$	Resistência do PRF à tração longitudinal às fibras
$F_{2c}$	Resistência do PRF à compressão transversal às fibras
$F_{2t}$	Resistência do PRF à tração transversal às fibras
$G$	Função potencial
$I_1$	Primeiro invariante do tensor de tensão
$I_2$	Segundo invariante do tensor de tensão
$I_3$	Terceiro invariante do tensor de tensão
$J_1$	Primeiro invariante do tensor desviatório de tensão
$J_2$	Segundo invariante do tensor desviatório de tensão
$J_3$	Terceiro invariante do tensor desviatório de tensão
$K$	Módulo Volumétrico
$M_o$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$N$	Número de passos do programa
$P$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$Q$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$R$	Coefficiente do critério Tsai-Wu
$\alpha$	Parâmetro de Drucker-Prager
$\beta$	Ângulo de dilatação plástica do concreto
$\beta_o$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\beta_u$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon$	Deformação específica
$\varepsilon_e$	Deformação elástica
$\varepsilon_f$	Deformação circunferencial do PRF

$\varepsilon_{fr}$	Deformação de ruptura do PRF aplicado ao concreto
$\varepsilon_{fu}$	Deformação ensaiada de ruptura do PRF
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformação
$\varepsilon_o$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\varepsilon_p$	Deformação plástica
$\varepsilon_r$	Deformação lateral da coluna
$\varepsilon_u$	Deformação de ruptura
$\varepsilon_v$	Deformação volumétrica
$\varepsilon_1$	Deformação axial da coluna
$\varepsilon_1^p$	Deformação axial plástica
$\tilde{\varepsilon}^p$	Deformação plástica acumulada
$\zeta$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\eta$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\theta$	Coordenada no espaço de tensões de Haigh-Westergaard
$\kappa$	Parâmetro de Drucker-Prager de endurecimento
$\kappa_\varepsilon$	Fator de eficiência da camisa
$\lambda_1$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\lambda_2$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\mu$	Fator de forma
$\nu$	Coefficiente de Poisson do concreto
$\nu_{xy}$	Coefficiente de Poisson do PRF maior
$\nu_{yx}$	Coefficiente de Poisson do PRF menor
$\xi$	Coordenada no espaço de tensões de Haigh-Westergaard
$\rho$	Taxa de rigidez do confinamento
$\sigma$	Tensão Normal
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensão
$\sigma_m$	Tensão hidrostática
$\sigma_y$	Tensão de escoamento
$\sigma_{3f}$	Tensão radial no PRF
$\tau$	Tensão de cisalhamento

$\phi$	Ângulo de atrito interno do concreto
$\phi_r$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\chi$	Coordenada no espaço de tensões de Haigh-Westergaard
$\psi$	Parâmetro da função potencial de Drucker-Prager
$\omega$	Parâmetro do modelo de JIANG e WU (2014)
$\Delta\varepsilon_r$	Incremento de deformação lateral na coluna
$\Delta\varepsilon_1$	Incremento de deformação axial na coluna
$\Delta\sigma_r$	Incremento de tensão lateral na coluna
$\Delta\sigma_1$	Incremento de tensão axial na coluna

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	Comentários Iniciais.....	18
1.2	Objetivos .....	20
1.3	Justificativa.....	21
1.4	Metodologia.....	22
1.5	Organização do Texto.....	23
2	TEORIA DA PLASTICIDADE APLICADA AO CONCRETO.....	24
2.1	Comentários Iniciais.....	24
2.2	Propriedades Mecânicas do Concreto .....	26
2.3	Critérios de Ruptura do Concreto.....	31
2.4	Relações Constitutivas Elastoplásticas.....	43
3	COMPORTAMENTO DE COLUNAS DE CONCRETO CONFINADO.....	50
3.1	Comentários Iniciais.....	50
3.2	Tipos de Confinamento .....	51
3.3	Modelos de Previsão de Comportamento.....	55
3.4	Colunas com Seção Transversal Quadrada.....	57
4	MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA DE COLUNAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR CONFINADAS .....	59
4.1	Comentários Iniciais.....	59
4.2	Modelo de ROUSAKIS <i>et al.</i> (2008).....	60
4.3	Modelo de JIANG e WU (2014) .....	61
4.4	Relação Constitutiva Elastoplástica Incremental .....	64
4.5	Esforços atuantes no elemento confinante .....	65
4.6	Fator de Eficiência da Camisa.....	67
4.7	Implementação do Modelo .....	71

4.8 Resultados para Colunas de Seção Circular .....	74
5 MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA UNIFICADA DE COLUNAS CONFINADAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL QUADRADA E CIRCULAR .....	107
5.1 Comentários Iniciais .....	107
5.2 Procedimento de Unificação do Modelo .....	107
5.3 Resultados Obtidos com o Modelo Unificado .....	109
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	132
6.1 Conclusões.....	132
6.2 Sugestões de Trabalhos Futuros .....	133
REFERÊNCIAS .....	134
APÊNDICE A.....	141

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Comentários Iniciais

Colunas de concreto são elementos estruturais que trabalham predominantemente comprimidos e, por isso, a resistência à compressão do concreto tem grande relevância sobre o comportamento dos mesmos. A ductilidade das colunas pode ser tão ou mais importante que sua resistência, especialmente quando se trata de regiões sujeitas a ações sísmicas. Já se encontra bastante difundido na literatura que uma coluna de concreto comprimida possui um melhor desempenho quando submetida a tensões laterais de confinamento, tanto na resistência quanto na ductilidade.

Uma aplicabilidade do estudo do confinamento do concreto se dá quando há necessidade de se reforçar uma coluna de concreto armado. Apesar de todos os avanços em projetos e execução de estruturas, é frequente a necessidade de reforçar colunas de concreto, devido à deterioração, erros de projeto ou executivos, falta de manutenção, acidentes, ou ainda mudanças na utilização da estrutura que resultam num aumento das cargas. Existem diversos materiais e métodos para reforçar uma coluna e, segundo CARRAZEDO (2002), notam-se algumas vantagens nas técnicas que mobilizam o efeito de confinamento do concreto.

Uma maneira eficiente de realizar o confinamento de colunas de concreto consiste no encamisamento das mesmas com polímeros reforçados com fibras (PRF). As fibras mais usadas nos compósitos de PRF são de carbono, aramida ou vidro, embora fibras de boro, polietileno, poliéster, poliamida e basálticas já tenham, também, sido utilizadas (GARCEZ, 2007). O PRF é um material bastante competitivo, principalmente devido à sua alta resistência para um baixo peso específico, à boa durabilidade e resistência a ambientes agressivos e à rápida e prática aplicação. A principal limitação desse material é ainda seu elevado custo em relação às demais soluções.

O confinamento do concreto é caracterizado pela existência de tensões laterais de compressão no concreto, transversais ao eixo da coluna, gerando um estado multiaxial de tensões. O confinamento pode ser ativo, no caso em que há uma tensão lateral constante atuando, ou passivo, quando o confinamento é motivado por restrição da deformação lateral da coluna, produzindo tensões laterais dependentes dessa deformação.

Inicialmente, os modelos de previsão do concreto confinado consideravam o confinamento gerado por armaduras. Pode ser considerado como modelo pioneiro o elaborado por RICHART *et al.* (1929), que foi resultado de seus estudos experimentais. Depois, surgiram alguns outros modelos, como MANDER *et al.* (1988), EL-DASH e AHMAD (1994), CUSSON e PAULTRE (1995) e RAZVI e SAATCIOGLU (1999), todos tratando do confinamento com armadura.

Com o aumento do uso de PRF no confinamento do concreto, foram surgindo modelos de previsão de comportamento do concreto confinado com este material. OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) fizeram uma extensa revisão de modelos existentes de tensão-deformação para colunas de concreto circulares confinadas com PRF e encontraram 88 modelos existentes. Os autores classificaram os modelos em orientados para projeto, que são caracterizados por equações empíricas para a curva tensão-deformação, calibradas com resultados experimentais; e modelos orientados para análise, que são caracterizados por considerar a interação entre o material confinante e o núcleo de concreto, utilizando equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações.

Alguns modelos orientados para projeto são FARDIS e KHALILI (1982), SAADATMANESH *et al.* (1994), NANNI e BRADFORD (1995), SAMAAAN *et al.* (1998), LAM e TENG (2003a) e YOUSSEF *et al.* (2007).

Exemplos de modelos orientados para análise são MIRMIRAN e SHAHAWY (1997), SPOELSTRA e MONTI (1999), MORAN e PANTELIDES (2002), MARQUES *et al.* (2004), TENG *et al.* (2007), AIRE *et al.* (2010) e XIAO *et al.* (2010).

Os modelos orientados para projeto são elaborados unicamente baseando-se em observações experimentais e, conseqüentemente, a eficiência dos mesmos depende totalmente da qualidade do banco de dados experimental, e fica limitada ao intervalo de parâmetros dos ensaios, como resistência do concreto, características da camisa, etc.

Vários modelos orientados para análise baseiam-se na hipótese que a tensão e deformação axiais do concreto confinado com PRF com certo nível de tensão lateral são equivalentes às do concreto confinado ativamente com uma tensão constante igual à gerada pelo encamisamento de PRF. OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) citam estudos (XIAO *et al.*, 2010; OZBAKKALOGLU e AKIN, 2011) que indicam que essa hipótese não condiz com os resultados experimentais e atenta para a importância de se reconhecer as limitações desse tipo de modelo.



Além dos modelos orientados para projeto e para análise, OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) comentam que existem outros tipos de modelos, que abordam o problema de maneira diferente. Podemos incluir aqui modelos baseados na Teoria da Plasticidade e na Teoria do Dano Contínuo. A busca de modelos que sejam baseados em teorias fundamentadas na mecânica do contínuo, como a Teoria da Plasticidade, visa uma maior eficiência e mais ampla aplicabilidade, especialmente no que diz respeito às características do concreto não confinado.

A Teoria da Plasticidade representa uma extensão necessária da teoria da elasticidade, e se preocupa com a análise de tensões e deformações em estruturas nos domínios elástico e plástico. Para elementos estruturais de concreto, uma análise elastoplástica tende a proporcionar uma melhor compreensão das respostas do elemento estrutural às solicitações (CHEN e HAN, 1988).

Vários autores têm utilizado a Teoria da Plasticidade para estudar o comportamento de colunas de concreto confinado. Dentre eles, podem ser citados: KARABINIS e KIOUSIS (1996a; 1996b), MIRMIRAN *et al.* (2000), BARROS (2001), EID e PAULTRE (2007), ROUSAKIS *et al.* (2008), YU *et al.* (2010a), JIANG e WU (2012; 2014) e WOLF (2008).

Além do uso da Teoria da Plasticidade, alguns autores têm incluído conceitos e procedimentos da Teoria do Dano Contínuo, tais como: YU *et al.* (2010b), KABIR e SHAFEI (2012), GRASSL *et al.* (2013), para a descrição da resposta dos mencionados elementos estruturais.

Vale ressaltar que o presente trabalho é continuação de outros previamente desenvolvidos no PPGEC (Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil) e no curso de graduação em Engenharia Civil da UFAL, como: RIVETTI (2013), COELHO (2014) e MARQUES *et al.* (2004).

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo Geral**

Este trabalho tem como objetivo geral o desenvolvimento de um estudo sobre o comportamento de colunas de concreto com seção transversal circular ou quadrada, confinadas lateralmente por mantas de polímeros reforçados por fibras (PRF) e submetidas a carregamento de compressão monotônico centrado, utilizando como base a Teoria da Plasticidade.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Especificamente, o presente trabalho tem os seguintes objetivos:

- a) Estudar o modelo de plasticidade de Drucker-Prager aplicado ao concreto confinado, com modelos existentes na literatura;
- b) Comparar os comportamentos de concretos de alta e moderada resistências sob efeito de confinamento;
- c) Comparar os comportamentos de colunas confinadas de seção transversal circular e quadrada;
- d) Validação e verificação de modelos preditivos do diagrama tensão-deformação de colunas de concreto confinado de seção transversal circular e quadrada, através de comparações com resultados experimentais existentes na literatura e resultados obtidos com modelos de outros autores.

### 1.3 Justificativa

O concreto armado é, atualmente, o material mais utilizado em estruturas da área de engenharia civil, o que justifica o constante e árduo esforço no sentido de entender melhor o seu comportamento, visando a melhoria e economia nos projetos. A precisa consideração do efeito do confinamento proporcionado pelas armaduras em colunas de concreto é ainda um desafio para os projetistas, pela complexidade dos mecanismos de falha do concreto sob estado multiaxial de tensão.

Além disso, técnicas de reforço de estruturas com encamisamento da seção vêm sendo cada vez mais utilizadas, entre outros motivos, pela eficiência, rapidez e velocidade de execução. Ressalta-se que a falta de modelos que descrevam com realismo o comportamento do concreto confinado é um fator limitante do uso destas técnicas.

Existem muitas pesquisas a respeito do comportamento de colunas de concreto confinado e há diversos modelos disponíveis na literatura, sendo boa parte deles de natureza semiempírica. A dificuldade maior se encontra na extrapolação desses modelos, para materiais com propriedades distintas além de geometrias e condições de carregamento distintas. Como os modelos obtidos são

baseados em ensaios, quanto mais distante das condições do ensaio, maiores as chances do modelo não se ajustar bem à realidade. Os resultados desses modelos, quando comparados com resultados experimentais, geralmente mostram que mesmo quando se consegue prever com razoável exatidão a carga última de ensaio, raramente se observa uma boa descrição da deformação das colunas.

Considerando essa usual deficiência dos modelos semiempíricos justifica-se a ideia de utilizar modelos mais racionais, baseados em Mecânica do Contínuo, tal como a Teoria de Plasticidade, que pode ser considerada em conjunto com a Mecânica do Dano. Espera-se, com os modelos de base racional, obter uma boa descrição da capacidade de carga e deformações das colunas.

#### 1.4 Metodologia

A elaboração do trabalho foi iniciada com uma revisão bibliográfica da Teoria de Plasticidade aplicada ao concreto, estudando modelos de plasticidade dependente da pressão hidrostática e com plasticidade não associada.

Foi estudado, então, o problema de colunas de concreto confinadas, como se comportam, a dificuldade de prever seu comportamento, e o panorama dos modelos existentes. Buscaram-se então, trabalhos que aplicassem o modelo de plasticidade de Drucker-Prager ao estudo de colunas confinadas.

O trabalho de KARABINIS e KIOUSIS (1996) foi o primeiro a ser estudado e implementado com o *software* MATLAB. O modelo destes autores foi desenvolvido para concreto confinado com armaduras de aço, portanto seus parâmetros eram inadequados ao estudo de colunas com camisa de PRF. A implementação realizada foi, então, adaptada aos estudos de ROUSAKIS *et al.* (2008), que realizaram uma calibração dos parâmetros encontrados no modelo de KARABINIS e KIOUSIS (1996) para o caso de colunas encamisadas com PRF. Entretanto, a grande quantidade de parâmetros desse modelo, aliada com a ausência de interpretação física direta dos mesmos, motivou a busca por outro modelo da literatura, e foi escolhido o trabalho de JIANG e WU (2014), que fizeram um estudo e calibração dos parâmetros de um modelo de plasticidade Drucker-Prager linear estendido aplicado a colunas encamisadas com PRF.

Foi elaborado, então, um programa no *software* MATLAB que, com incrementos de deformação axial, calcula as tensões e deformações atuantes em uma coluna de concreto de seção

circular encamisada com PRF. O programa utiliza o algoritmo de KARABINIS e KIOUSIS (1996) para o cálculo de tensões, aliado ao modelo de plasticidade Drucker-Prager com os parâmetros definidos em JIANG e WU (2014) para definição da matriz constitutiva elastoplástica. Então, seus resultados foram comparados com dados experimentais disponíveis na literatura e de outros modelos existentes.

Em seguida, foram desenvolvidos ajustes no programa existente, para que ele pudesse prever o comportamento tanto de colunas de seção circular quanto de colunas de seção quadrada. Com o programa unificado, então, foram realizados testes de aderência com resultados experimentais encontrados na literatura, além de resultados obtidos com outro modelo existente.

## **1.5 Organização do Texto**

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. Os conteúdos do segundo ao sexto capítulo são descritos a seguir.

O capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica sobre a Teoria de Plasticidade aplicada ao concreto. São explanados os conceitos básicos de plasticidade, além do comportamento mecânico do concreto não confinado.

O capítulo 3 aborda o comportamento do concreto quando confinado, considerando diferentes materiais confinantes. Além disso, esse capítulo traz uma breve revisão de modelos existentes na literatura para previsão do comportamento do concreto confinado.

O capítulo 4 refere-se à modelagem realizada neste trabalho de colunas de concreto de seção circular confinadas com encamisamento externo de PRF. São apresentados os procedimentos de modelagem, além de testes de aderência do modelo desenvolvido com resultados experimentais e outros modelos tradicionais existentes.

O capítulo 5 apresenta os ajustes realizados no modelo descrito no capítulo 4, para que se possa prever o comportamento de colunas de concreto de seção transversal quadrada confinadas com encamisamento externo de PRF. São apresentados, também, testes de aderência do referido modelo com resultados experimentais e com outro modelo existente na literatura.

O capítulo 6 traz as considerações finais do trabalho; as conclusões que se pode tirar do estudo, além de sugestões para trabalhos futuros.

## 2 TEORIA DA PLASTICIDADE APLICADA AO CONCRETO

### 2.1 Comentários Iniciais

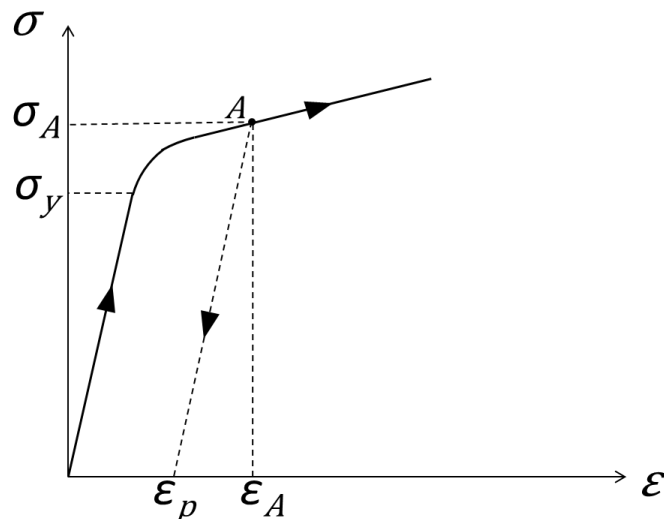
Neste capítulo apresentam-se os conceitos básicos necessários para entendimento dos modelos de comportamento do concreto baseados na Teoria de Plasticidade.

Alguns comportamentos complexos do concreto armado, tais como, tensão-deformação não linear, fissuração, engrenamento de agregados e outros efeitos antes ignorados ou tratados de maneira simplificada podem ser modelados e estudados de uma maneira mais racional com o uso da plasticidade (CHEN e HAN, 1988).

A Teoria da Plasticidade representa uma extensão necessária da teoria da elasticidade, e se preocupa com a análise de tensões e deformações em estruturas nos domínios elástico e plástico. Para elementos estruturais de concreto, uma análise elastoplástica tende a proporcionar uma melhor compreensão das respostas do elemento estrutural às solicitações (CHEN e HAN, 1988).

O diagrama tensão-deformação ilustrado na Figura 1 descreve o comportamento de um material genérico elastoplástico submetido à tensão uniaxial. O regime de comportamento plástico de um material fica evidenciado pelo aparecimento de deformações irreversíveis, o que acontece quando as tensões ultrapassam um determinado limite, denominado limite de escoamento. Na Figura 1 esse limite é dado pela tensão de escoamento  $\sigma_y$ .

**Figura 1 – Comportamento sob tensão uniaxial**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Para tensões inferiores à tensão de escoamento, o material encontra-se regime elástico linear, caracterizado por uma relação linear de tensão e deformação (Equação 2.1) e pela ausência de deformações residuais em ciclos de carga e descarga. Na Equação 2.1,  $\sigma$  é a tensão,  $\varepsilon$  é a deformação específica e  $E$  é o módulo de elasticidade.

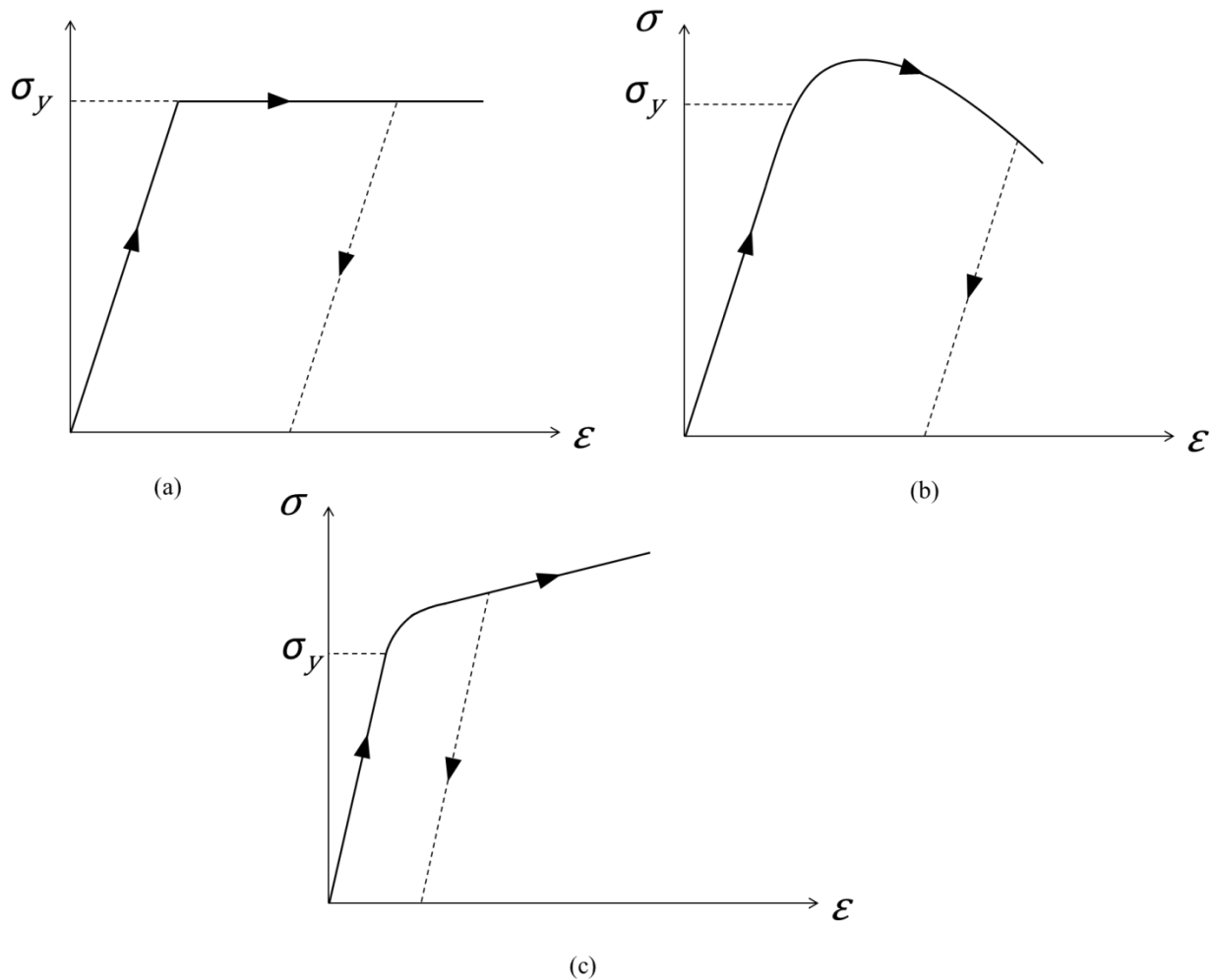
$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1)$$

Quando o material entra no regime plástico, a descarga não se dá mais pelo mesmo caminho percorrido durante o processo de carregamento, mas por um trajeto aproximadamente paralelo ao do regime elástico, como se pode observar no descarregamento iniciado no ponto A da Figura 1. Para uma tensão  $\sigma_A > \sigma_y$  tem-se, então, uma deformação residual quando o processo de descarregamento é completado, denominada deformação plástica. Desse modo, pode-se concluir que a deformação total  $\varepsilon_A$ , correspondente ao nível de tensão  $\sigma_A$ , é composta por uma parcela elástica  $\varepsilon_e$  (Equação 2.2), recuperável, e outra plástica  $\varepsilon_p$ , irrecuperável.

$$\varepsilon_e = \varepsilon_A - \varepsilon_p \quad (2.2)$$

Os materiais com comportamento denominado elastoplástico perfeito possuem um patamar de escoamento, ou seja, um estágio em que a tensão permanece constante e a deformação cresce continuamente (Figura 2a). Outros materiais apresentam, a partir de um determinado nível de tensão, um comportamento conhecido como *softening*, ou amolecimento, ou seja, acréscimos de deformação correspondentes a níveis cada vez menores de tensão. Uma representação deste comportamento pode ser observada na Figura 2b (PROENÇA, 1988). Há, ainda, os materiais que apresentam *hardening* ou endurecimento após o ponto de plastificação, o que corresponde a aumentos dos níveis de tensão acompanhados de acréscimos de deformação, como ilustrado na Figura 2c.

**Figura 2 – Diagramas tensão-deformação típicos de materiais**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

## 2.2 Propriedades Mecânicas do Concreto

O concreto é um material compósito que consiste de agregado graúdo imerso numa matriz contínua, a argamassa, que por sua vez é uma mistura de pasta de cimento com agregado miúdo. Seu comportamento é muito complexo, sendo predominantemente determinado pela estrutura do material compósito, como a quantidade de água e agregados, a forma e o tamanho dos agregados e o tipo de cimento utilizado.

O comportamento tensão-deformação do concreto é afetado pelo desenvolvimento de microfissuras e fissuras. A abertura de microfissuras começa mesmo antes da aplicação do

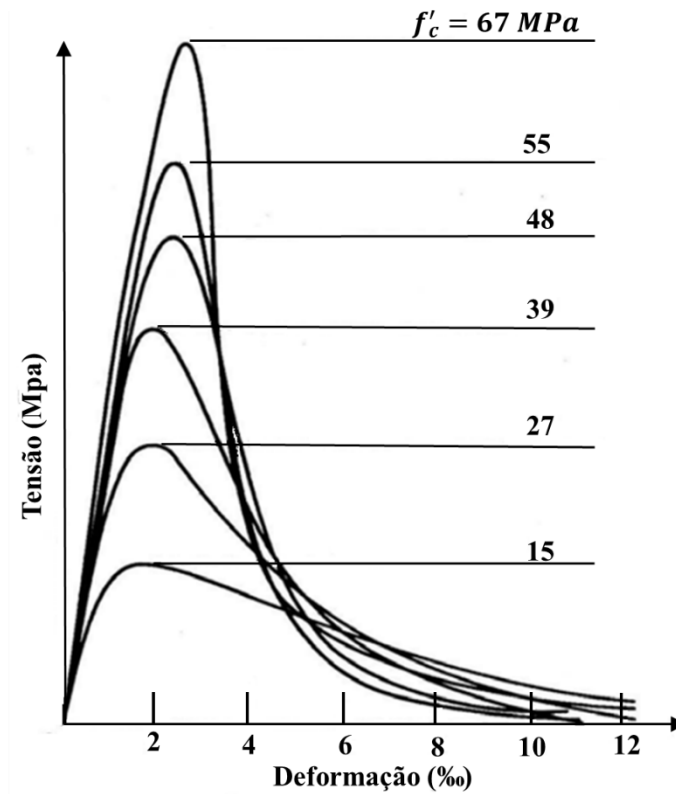
carregamento em uma peça de concreto, com a retração. A quantidade e a abertura dessas fissuras em uma amostra de concreto dependem, dentre outros fatores, das características de exsudação e do histórico de cura do concreto (MEHTA e MONTEIRO, 2014). Ao aplicar um carregamento no material, microfissuras adicionais podem aparecer na zona de transição, que é a região de menor resistência no concreto. A progressão dessas fissuras, que são inicialmente invisíveis a olho nu, para se tornarem fissuras visíveis ocorre com o aumento do carregamento, e isso contribui para o comportamento tensão-deformação não linear que geralmente ocorre no concreto (CHEN e HAN, 1988; CHEN, 1982).

### 2.2.1 Comportamento do concreto sob compressão uniaxial

Sob carregamento uniaxial, o concreto apresenta um comportamento tensão-deformação não linear altamente influenciado pela microfissuração. Concretos de resistência normal (da ordem de 30 MPa) apresentam considerável microfissuração, tendo conseqüentemente diagramas tensão-deformação com notável diminuição da rigidez com o crescimento da tensão. Concretos de alta resistência (acima de 50 MPa) têm diferenças significativas na microestrutura interna, apresentando menor microfissuração, de forma que o diagrama se aproxima do linear até próximo à ruptura como indica a Figura 3 (CARRAZEDO, 2002).



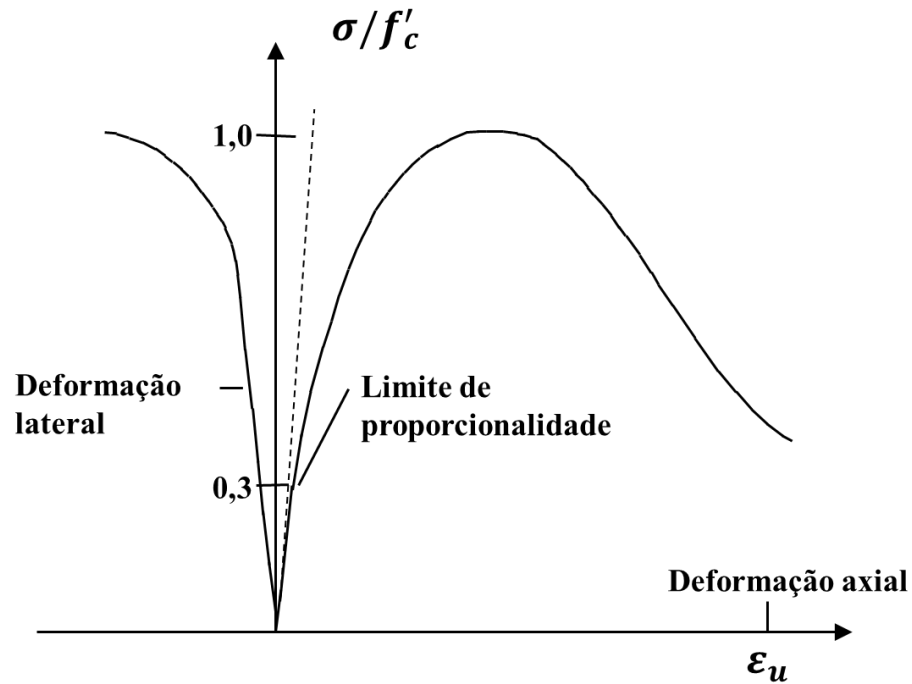
**Figura 3 – Curvas tensão-deformação para concretos submetidos à compressão uniaxial**



**Fonte:** Autora – Adaptado de CHEN e HAN, 1988.

Uma típica curva tensão-deformação para o concreto submetido à compressão axial é mostrada na Figura 4. A curva tensão-deformação tem um comportamento bem próximo do elástico-linear até atingir 30% da tensão máxima na compressão  $f'_c$ . Para tensões acima desse ponto, a curva mostra um incremento gradual na curvatura, até uma tensão que pode ser de  $0,75f'_c$  até  $0,9f'_c$ . A partir daí, há uma curvatura mais acentuada se aproximando do pico, onde a tensão é  $f'_c$ . Depois do pico, a curva tem uma parte descendente que se estende até a ruptura, para uma deformação última  $\varepsilon_u$  (CHEN, 1982).

Figura 4 – Curvas típicas de tensão-deformação lateral e axial



Fonte: Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

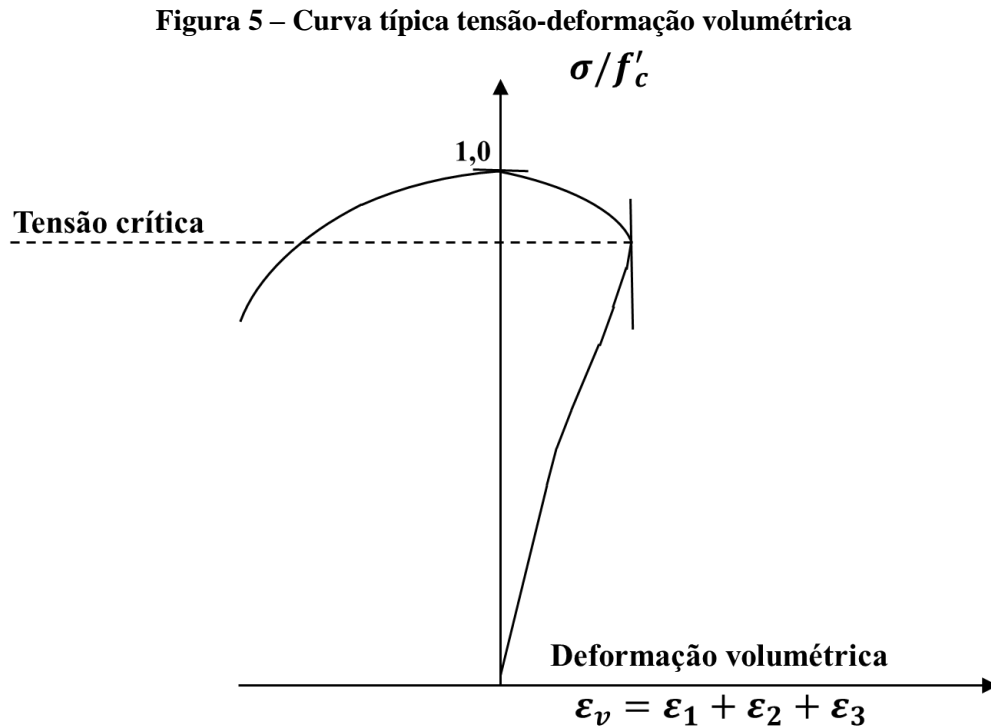
A forma do diagrama tensão-deformação ilustrado na Figura 4 é fortemente associada com o mecanismo de microfissuração interna progressiva. Para uma tensão na região até 30% de  $f'_c$  (limite elástico) as fissuras existentes no concreto antes do carregamento permanecem praticamente inalteradas. Isso indica que a energia interna disponível é menor que a energia necessária para criar novas superfícies de microfissuras (CHEN, 1982).

Para tensões entre 30% e 50% de  $f'_c$ , as fissuras na zona de transição começam a aumentar devido a concentrações de tensão em suas extremidades, enquanto que a fissuração na matriz é insignificante. Nesse estágio considera-se que a propagação de fissuras é estável uma vez que as fissuras rapidamente alcançam seus valores finais de comprimento se a tensão aplicada é mantida constante (CHEN, 1982; MEHTA e MONTEIRO, 2014).

Para tensões de 50 a 75% de  $f'_c$  novas fissuras começam a se formar na matriz e na zona de transição. Dentro desse intervalo de tensão, a propagação de fissuras ainda é considerada estável (MEHTA e MONTEIRO, 2014).

Aumentando a tensão, aumentará a energia interna disponível e a velocidade de propagação de fissuras, até que, para determinado nível de tensão, o sistema se tornará instável. A esse nível de tensão, que ocorrerá para uma tensão de compressão acima de 75% de  $f'_c$ , dá-se o nome de

tensão crítica, que corresponde também ao ponto de maior contração volumétrica, como observado na Figura 5 (MEHTA e MONTEIRO, 2014).



**Fonte:** Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

A instabilidade gerada com o aumento de tensão provoca um aumento assintótico da deformação lateral. Este aumento da deformação lateral é acompanhado de uma expansão volumétrica. A Figura 5 mostra como se comporta a deformação volumétrica que ocorre no concreto. É possível perceber que inicialmente a mudança no volume é quase linear até que se atinja a tensão crítica (CHEN, 1982).

### 2.2.2 Comportamento do concreto submetido à tração uniaxial

Em geral, para concreto submetido à tração uniaxial, o limite de proporcionalidade é observado no intervalo entre 60% a 80% da tensão última de tração e, a partir deste ponto, as microfissuras da zona de transição começam a crescer. É esperado que o intervalo de propagação estável de fissuras seja bem curto, e que uma propagação instável comece bem cedo. É por isso que o concreto tem um comportamento muito frágil quando tracionado (CHEN e HAN, 1988).

Como a zona de transição do concreto tem uma resistência à tração significativamente menor que a da argamassa, ela corresponde à região crítica do concreto. Essa é a principal razão para a baixa resistência à tração do concreto (CHEN, 1982).

### 2.2.3 Comportamento do concreto sob tensões triaxiais

De acordo com CHEN (1982), dependendo da tensão de confinamento atuante num concreto sob compressão triaxial, podem ser observados diferentes comportamentos na relação tensão-deformação. Por exemplo, pode ser observado um comportamento plástico com endurecimento ou amolecimento. Isso ocorre porque, quando submetido a altas tensões de confinamento, a ruptura pode não ocorrer por falha na zona de transição, e sim por esmagamento na pasta de cimento. Em geral, a resistência à carga axial aumenta com a presença das tensões confinantes, além de haver um ganho significativo na ductilidade do elemento.

## 2.3 Critérios de Ruptura do Concreto

Para que se formule um critério de ruptura para o concreto sob estados múltiplos de tensão, é preciso que primeiro se estabeleça o que é caracterizado como ruptura. Podem ser citados como critérios usados para caracterizar ruptura: escoamento, início da fissuração, esgotamento da capacidade de carga, e nível de deformação. Aqui, considera-se que a ruptura é caracterizada pelo esgotamento da capacidade de carregamento do elemento.

### 2.3.1 Invariantes de tensão

Quando se procura determinar a resistência de elementos de concreto, é fundamental que se considere as interações dos vários componentes do estado de tensão. Um critério de ruptura baseado em tensões deve ser função apenas do estado de tensão, não dependendo do sistema de coordenadas adotadas. Isso justifica a utilização dos invariantes de tensão nas expressões dos mencionados critérios, como será visto posteriormente. As definições dos invariantes de tensão são apresentadas a seguir.

Seja um ponto qualquer de um corpo, com estado de tensão representado por  $\sigma_{ij}$  dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sabe-se que, nesse e em qualquer ponto do corpo, haverá três planos, perpendiculares entre si, para os quais não haverá tensão cisalhante. Os vetores perpendiculares a esses planos indicarão as direções principais do estado de tensão, enquanto que suas tensões normais são chamadas tensões principais. Toma-se um vetor de tensão  $T_i$  desse ponto, que aponta para uma direção principal qualquer, de maneira que  $T_i = \sigma n_i$ , sendo  $n_i$  uma direção principal e  $\sigma$  uma tensão principal. Mas, sabendo que  $T_i = \sigma_{ij}n_j$ , será possível chegar a:

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0 \quad (2.4)$$

que é um sistema linear homogêneo de três equações para  $(n_1, n_2, n_3)$ . Esse sistema terá solução se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes for nulo.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

A Equação 2.5 corresponde a um polinômio cúbico em  $\sigma$  com três raízes reais, que são as tensões principais  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  (Equações 2.6 a 2.9).

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.6)$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} \quad (2.7)$$

$$I_2 = (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \frac{1}{2}I_1^2 - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} \quad (2.8)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3 \quad (2.9)$$

Se os eixos coordenados são escolhidos coincidindo com as direções principais, são encontradas as Equações 2.10, 2.11 e 2.12.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2.10)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad (2.11)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (2.12)$$

Como as tensões principais não dependem da escolha dos eixos coordenados, os valores de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  não mudarão se o sistema de coordenadas for redefinido e, por isso, eles são chamados de invariantes do tensor de tensão  $\sigma_{ij}$ .

Uma maneira alternativa de representar o estado de tensões em um ponto é pela soma de dois tensores, um com tensões puramente hidrostáticas ( $\sigma_m \delta_{ij}$ ) e um com tensões desviadoras ( $s_{ij}$ ), como mostrado na Equação 2.13. Para esse caso,  $\sigma_m$  representa a tensão média ou hidrostática (Equação 2.14) e  $s_{ij}$  é o tensor desviador de tensão, que representa um estado de cisalhamento puro (Equação 2.15).

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.13)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.14)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.15)$$

Para obter os invariantes do tensor desviador de tensões o procedimento é o mesmo já seguido, resultando no polinômio cúbico da Equação 2.16, que resultará nos invariantes do tensor desviador de tensões (Equações 2.17, 2.18 e 2.19).

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (2.16)$$

$$J_1 = s_{ii} = s_x + s_y + s_z = 0 \quad (2.17)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 \tau_{zx}^2 \quad (2.18)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

Como consequência da decomposição expressa pela Equação 2.15, as direções principais de  $\sigma_{ij}$  e  $s_{ij}$  são as mesmas. Se os eixos coordenados são escolhidos coincidindo com as direções principais, são encontradas as Equações 2.20, 2.21 e 2.22.

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (2.20)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.21)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3 \quad (2.22)$$

### 2.3.2 Espaço de tensões de Haigh-Westergaard

A representação geométrica do estado de tensão de um ponto no espaço de tensões de Haigh-Westergaard é muito útil para o estudo dos critérios de ruptura do concreto e da teoria da plasticidade. Neste trabalho, é feita uma breve explanação desse espaço de tensões, com base em CHEN e HAN (1988).

Como o tensor de tensões  $\sigma_{ij}$  tem seis componentes independentes, é possível considerar essas componentes como coordenadas posicionais num espaço com seis dimensões. Para que seja possível trabalhar com uma visibilidade geométrica, que não seria possível num espaço com seis dimensões, uma alternativa é tomar as três tensões principais ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) como coordenadas e

representar o estado de tensões de um ponto como um ponto nesse espaço de tensões tridimensional. Esse espaço é chamado de espaço de tensões de Haigh-Westergaard. Nele, todo ponto com coordenadas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  representa um estado de tensões. Quaisquer dois estados de tensão num ponto **P** que sejam diferentes na orientação de seus eixos principais, mas não nos valores das tensões principais, seriam então representados pelo mesmo ponto no espaço de tensões tridimensional.

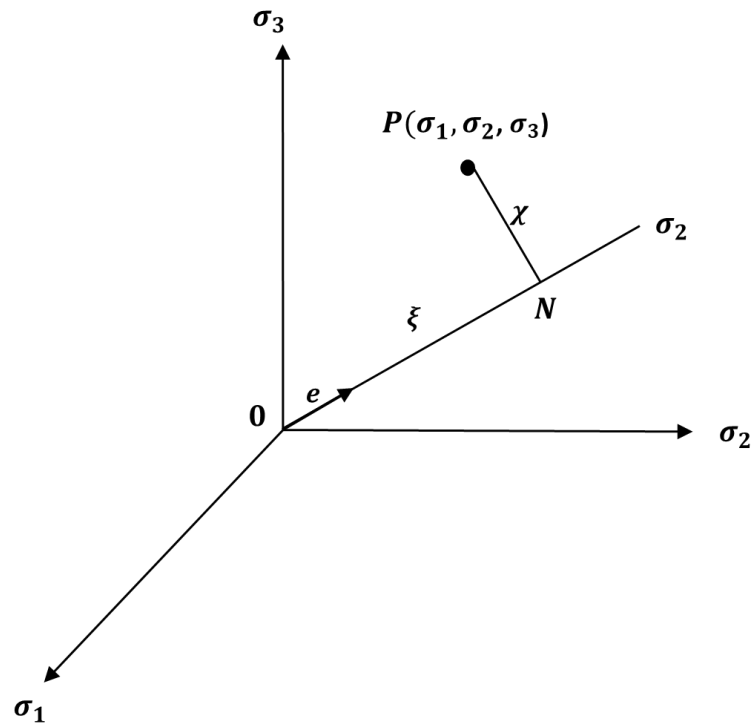
Considere a linha reta **ON** passando através da origem e fazendo o mesmo ângulo com cada um dos eixos coordenados, como mostra a Figura 6. Então, para cada ponto nessa linha o estado de tensões apresenta a condição  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Logo, todos os pontos dessa linha correspondem a um estado de tensões hidrostático, no qual as tensões desviadoras são nulas. Essa linha é, então, chamada de eixo hidrostático. Além do mais, qualquer plano perpendicular a **ON** é chamado de plano desviador. Esse plano é definido pela Equação 2.23, na qual  $\xi$  é a distância da origem ao plano, medida ao longo da normal **ON**. O plano desviador que passa na origem (Equação 2.24) é chamado de plano- $\pi$ .

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3}\xi \quad (2.23)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2.24)$$



Figura 6 – Espaço de tensões de Haigh-Westergaard



Fonte: Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

Considere um estado de tensão arbitrário num ponto com componentes de tensão  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Esse estado de tensão é representado pelo ponto  $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  no espaço das tensões principais da Figura 6. O vetor de tensão  $OP$  pode ser decomposto em duas componentes, a componente  $ON$  na direção do vetor unitário  $e = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  e a componente  $NP$  perpendicular a  $ON$  (paralela ao plano- $\pi$ ). As equações 2.25 a 2.29 definem os vetores  $ON$  e  $NP$ , componentes de  $OP$ .

$$|ON| = OP \cdot e = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.25)$$

$$|ON| = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \xi \quad (2.26)$$

$$NP = OP - ON \quad (2.27)$$

$$NP = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - (p, p, p) = [(\sigma_1 - p), (\sigma_2 - p), (\sigma_3 - p)] = (s_1, s_2, s_3) \quad (2.28)$$

$$|\mathbf{NP}| = \chi = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2} = \sqrt{2J_2} \quad (2.29)$$

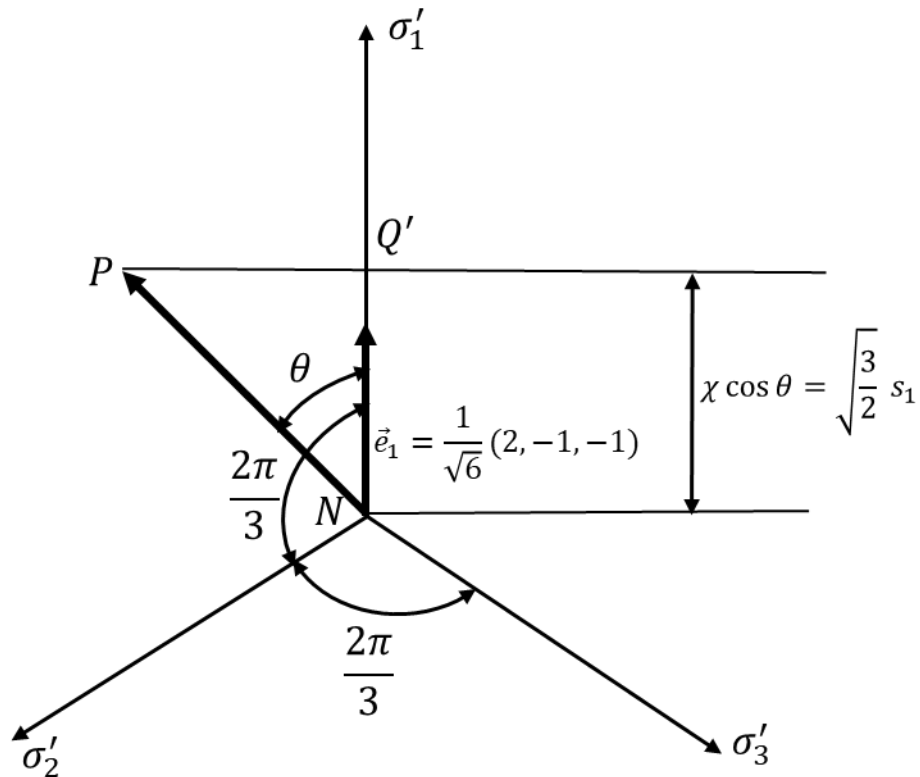
Os vetores  $\mathbf{ON}$  e  $\mathbf{NP}$  representam, respectivamente, o componente hidrostático e o componente desviador do estado de tensão representado pelo ponto  $\mathbf{P}$ .

Agora considere as projeções do vetor  $\mathbf{NP}$  e dos eixos coordenados no plano desviatório, como mostrado na Figura 7. Nessa figura os eixos  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  e  $\sigma'_3$  são projeções dos eixos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  no plano desviatório e  $\mathbf{NP}'$  é a projeção do vetor  $\mathbf{NP}$  no mesmo plano. Como o vetor unitário  $\mathbf{e}'_1$  na direção do eixo  $\sigma'_1$  tem componentes  $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$  em relação aos eixos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , então a projeção do vetor  $\mathbf{NP}$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{e}'_1$ , denotada por  $\mathbf{NQ}'$ , é dada pelas Equações 2.30 e 2.31.

$$\mathbf{NQ}' = \chi \cos\theta = \mathbf{NP} \cdot \mathbf{e}'_1 = (s_1, s_2, s_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1) \quad (2.30)$$

$$\chi \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}(2s_1 - s_2 - s_3) = \sqrt{\frac{3}{2}}s_1 \quad (2.31)$$

Figura 7 – Estado de tensões de um ponto projetado no plano desviatório



Fonte: Autora – Adaptado de CHEN e HAN, 1988.

Utilizando relações trigonométricas, e as relações previamente estabelecidas, podemos chegar ao resultado expresso pela Equação 2.32, que mostra que o valor de  $\cos 3\theta$  é um invariante relacionado aos invariantes do tensor desviatório de tensão  $J_2$  e  $J_3$ . Percebe-se que é possível, então, expressar um estado de tensão  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  pelas chamadas coordenadas de Haigh-Westergaard  $(\xi, \chi, \theta)$ .

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (2.32)$$

### 2.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

De acordo com CHEN (1982), o critério de Mohr (1900) estabelece que a ruptura no material é governada pela Equação 2.33, na qual a tensão cisalhante limitante  $\tau$  em um plano

depende somente da tensão normal  $\sigma$  atuante no plano. A Equação 2.33, determinada experimentalmente, é uma envoltória de ruptura para o círculo de Mohr das tensões. Pelo critério de Mohr, a ruptura do material ocorre para todos os estados de tensão para os quais o maior círculo de Mohr tangencia a envoltória.

$$|\tau| = f(\sigma) \quad (2.33)$$

A forma mais simples para a envoltória de Mohr é uma reta, como ilustrado na Figura 8. A equação para a reta da envoltória é conhecida como equação de Coulomb (1773), dada pela Equação 2.34, na qual  $c$  é a coesão e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno do material, que se relacionam com a resistência à compressão  $f'_c$  e a resistência à tração  $f'_t$  do concreto pelas Equações 2.35 e 2.36. O critério de ruptura baseado na Equação 2.34 é conhecido com critério de ruptura de Mohr-Coulomb e pode ser reescrito nas Equações 2.37 e 2.38 (CHEN, 1982).

$$|\tau| = c - \tan \phi \quad (2.34)$$

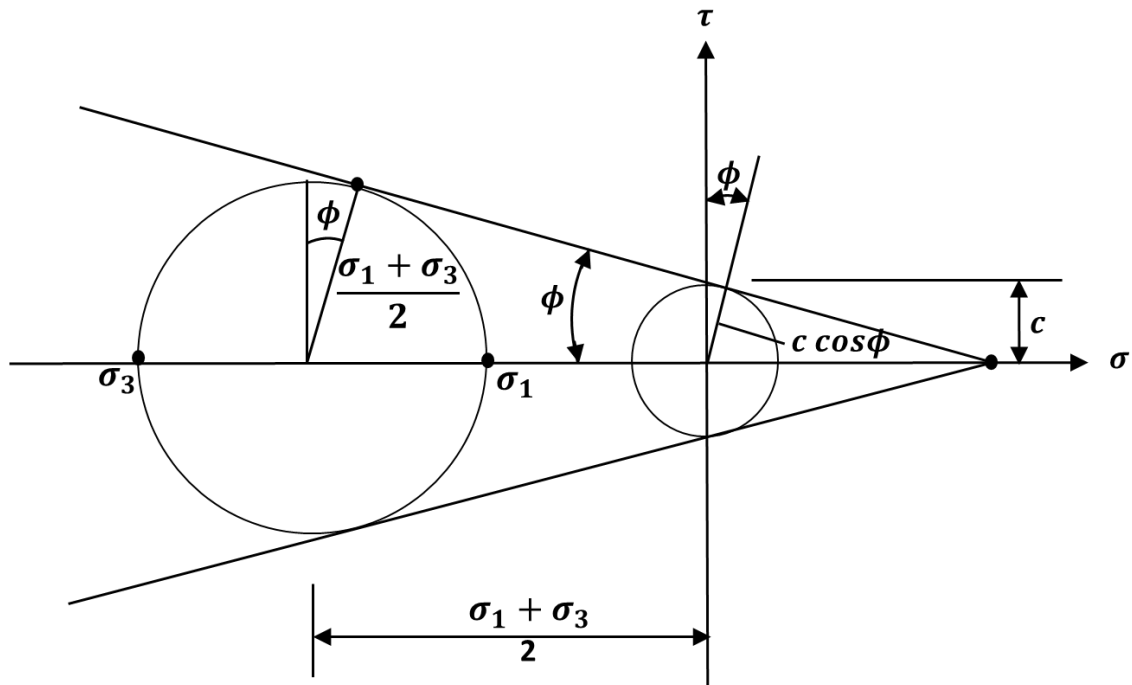
$$f'_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (2.35)$$

$$f'_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (2.36)$$

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (2.37)$$

$$F(\xi, \chi, \theta) = \sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} \chi \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \chi \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \phi - \sqrt{6} c \cos \phi = 0 \quad (2.38)$$

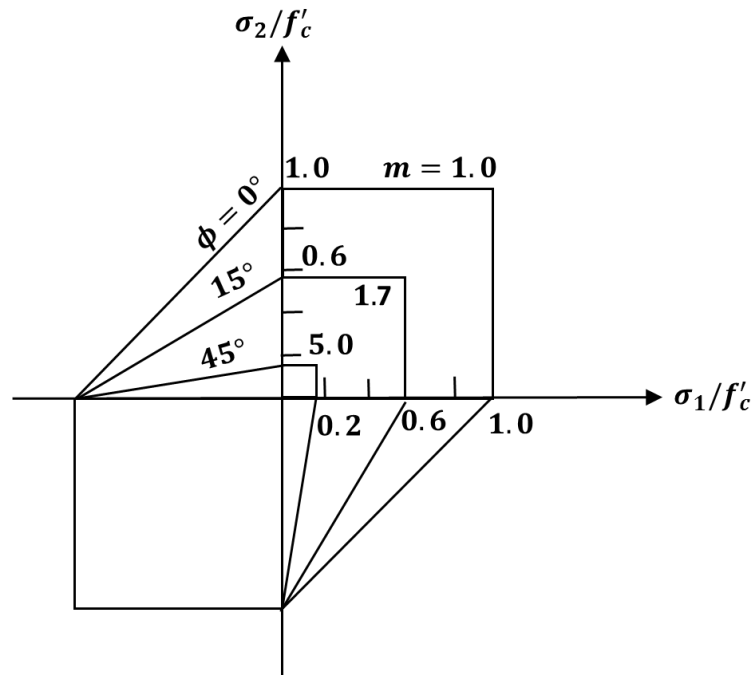
Figura 8 – Envoltória de Mohr-Coulomb



Fonte: Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

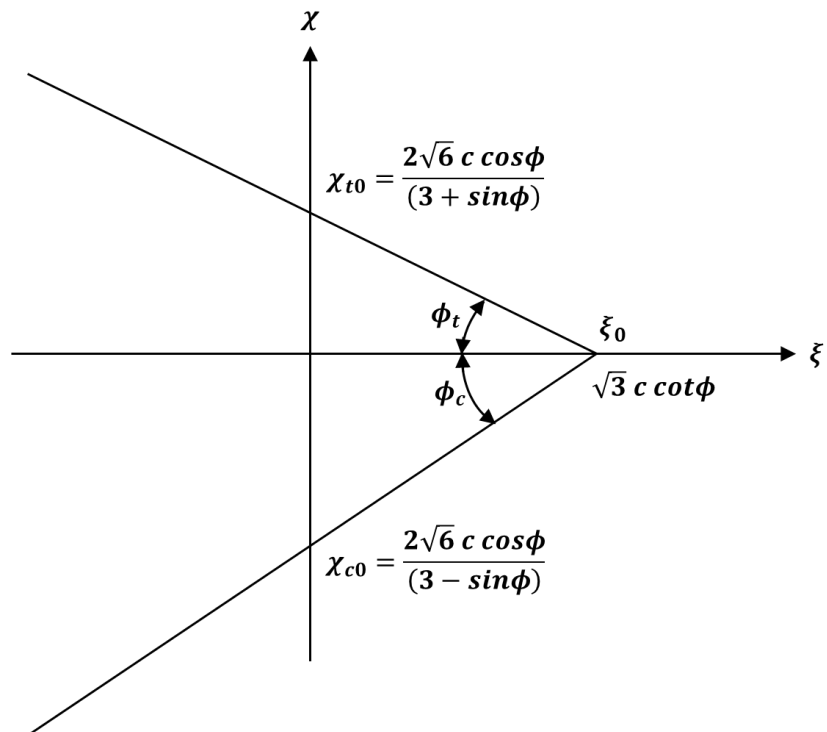
No espaço de tensões de Haigh-Westergaard a Equação 2.38 representa uma pirâmide de base hexagonal irregular, e sua interseção com o plano coordenado  $\sigma_3 = 0$  é um hexágono irregular, como mostra a Figura 9. Os meridianos das pirâmides são linhas retas, como mostra a Figura 10.

Figura 9 – Interseção das pirâmides de Mohr-Coulomb com plano  $\sigma_3 = 0$



Fonte: Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

Figura 10 – Meridianos das pirâmides de Mohr-Coulomb



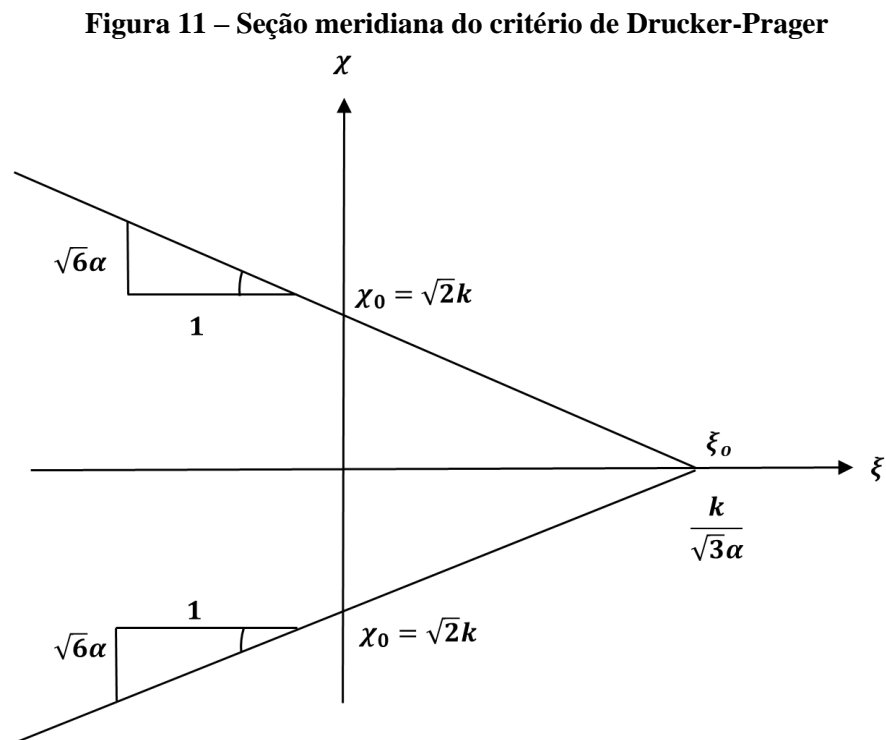
Fonte: Autora – Adaptado de CHEN, 1982

### 2.3.4 Critério de Drucker-Prager

A superfície hexagonal de ruptura de Mohr-Coulomb é matematicamente conveniente em problemas para os quais é óbvio qual dos seis lados deve ser utilizado. Quando isso não ocorre, as quinas do hexágono podem trazer dificuldades em se obter soluções numéricas (CHEN, 1982). Uma aproximação suave de Mohr-Coulomb é dada por Drucker e Prager (1952) pelas Equações 2.39 e 2.40, na qual  $\alpha$  e  $k$  são constantes positivas do material. A superfície de ruptura da Equação 2.40 no espaço de tensões de Haigh-Westergaard é um cone circular cuja seção meridiana é mostrada na Figura 11 e a seção transversal ao plano- $\pi$  é mostrada na Figura 12.

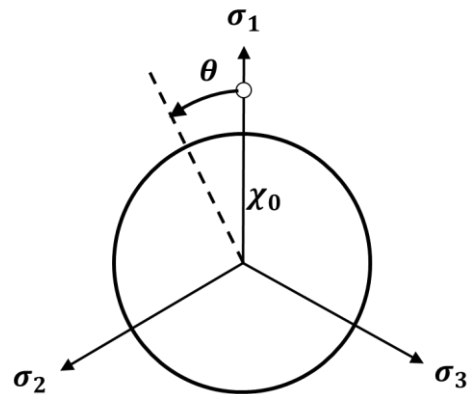
$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (2.39)$$

$$F(\xi, \chi) = \sqrt{6} \alpha \xi + \chi - \sqrt{2} k = 0 \quad (2.40)$$



**Fonte:** Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

Figura 12 – Seção transversal ao plano  $\pi$  do critério de Drucker-Prager



Fonte: Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

Há várias maneiras de aproximar a superfície hexagonal de Mohr-Coulomb do cone de Drucker-Prager. O tamanho do cone pode ser ajustado pelas constantes  $\alpha$  e  $k$ . Para as Equações 2.41 e 2.42 o cone ficará circunscrito ao hexágono, representando um limite superior à superfície de Mohr-Coulomb. Já o cone inscrito no hexágono, é obtido pelas relações das Equações 2.43 e 2.44.

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (2.41)$$

$$k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (2.42)$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad (2.43)$$

$$k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad (2.44)$$

## 2.4 Relações Constitutivas Elastoplásticas

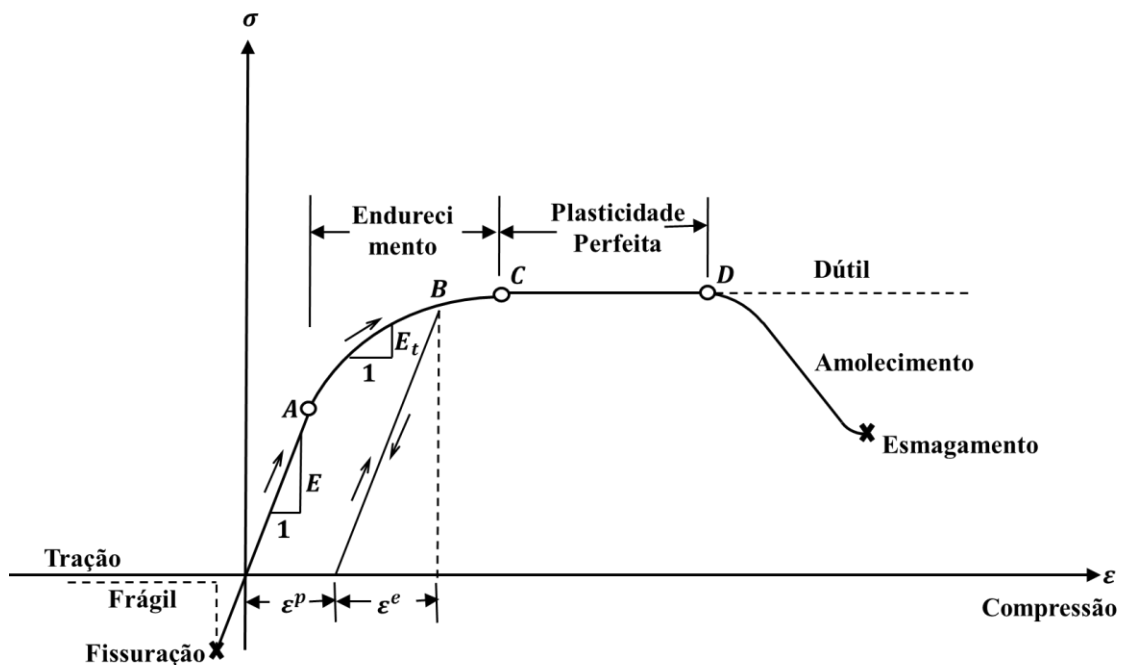
A Figura 13 mostra uma curva tensão-deformação teórica, para analisar como pode se comportar o concreto submetido a tensões de tração ou compressão. Para o caso de tração, o



comportamento é essencialmente elástico linear até a carga de ruptura. Para a compressão, o material exibe inicialmente um comportamento quase linear até o limite de proporcionalidade indicado pelo ponto A, depois do qual o material perde rigidez progressivamente até a ruptura.

Um material é chamado de plástico perfeito ou plástico com endurecimento dependendo se a deformação cresce incessantemente sem acréscimo de tensão. Fica claro que o fenômeno que ocorre na região AC da Figura 13 corresponde ao comportamento de um material elastoplástico com endurecimento, já a região CD corresponde a um comportamento elastoplástico perfeito.

**Figura 13 – Curva tensão-deformação teórica**



**Fonte:** Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

#### 2.4.1 Modelo elástico linear

Um modelo elástico é um modelo para o qual a tensão depende somente da deformação e não de seu histórico. Se a relação da Equação 2.45 for linear, com  $C_{ijkl}$  sendo um tensor de quarta ordem, com suas componentes construídas em função das constantes do material, o material é considerado elástico linear.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.45)$$

As relações tensão-deformação lineares para materiais isotrópicos podem ser representadas compactamente pela Equações 2.46 e 2.47.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.46)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.47)$$

Separando-se as parcelas hidrostática e desviatória das Equações 2.46 e 2.47, é possível obter os resultados das Equações 2.48 e 2.49. Essas equações mostram que tensão desviadora  $s_{ij}$  é responsável pela distorção  $e_{ij}$ , enquanto a tensão hidrostática  $\sigma_m$  é responsável pela mudança de volume, e os dois efeitos são independentes. Na Equação 2.49,  $K$  é o módulo volumétrico do material.

$$s_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} e_{ij} \quad (2.48)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = K \varepsilon_{kk} \quad (2.49)$$

A relação tensão-deformação para um elemento infinitesimal pode ser escrita na forma matricial como descrito na Equação 2.50, na qual  $\{\sigma\}$  é o vetor de tensões da Equação 2.51,  $\{\varepsilon\}$  é o vetor de deformações da Equação 2.52 e  $[E]$  é a matriz de rigidez elástica dada pela Equação 2.53.

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (2.50)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T \quad (2.51)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \quad (2.52)$$

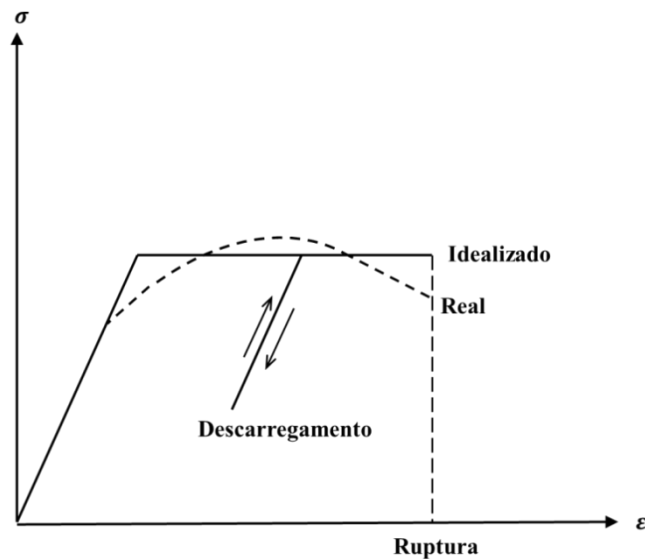
$$[E] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

### 2.4.2 Materiais perfeitamente plásticos

Para um material elastoplástico perfeito, como ilustrado pela curva da Figura 14, o material tem comportamento elástico até atingir o limite de escoamento, ou seja, quando uma determinada função dos componentes de tensão (que governa o comportamento do material) atinja o valor nulo. Essa função é conhecida como a função de escoamento, e pode ser definida pela Equação 2.54.

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.54)$$

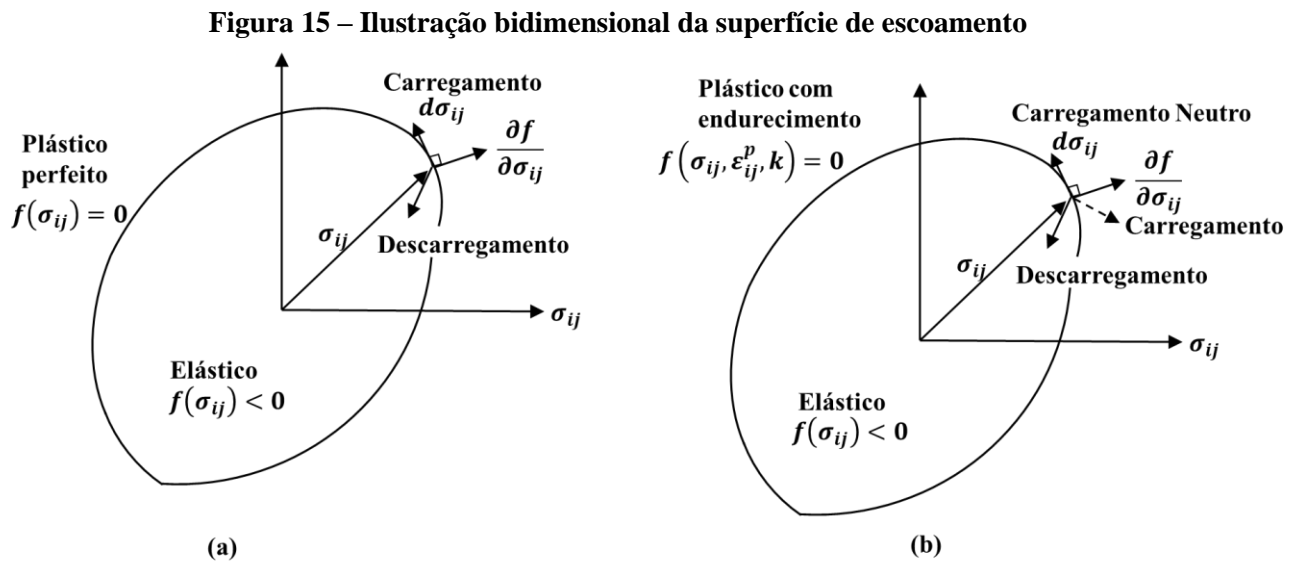
**Figura 14 – Material elastoplástico perfeito**



**Fonte:** Autora – Adaptado de CHEN,1982.

O significado da função de escoamento fica mais claro quando  $f(\sigma_{ij})$  é interpretado geometricamente como uma superfície no espaço de tensões. Para um material perfeitamente

plástico a função de escoamento  $f(\sigma_{ij}) = 0$  é uma superfície fixa no espaço de tensões; cada ponto dentro da superfície representa um estado elástico de tensão e cada ponto sobre a superfície representa um estado plástico de tensão. Em geral a função de escoamento representa uma hipersuperfície num espaço de tensões com nove dimensões. A Figura 15 é uma ilustração bidimensional do espaço de tensões, na qual a superfície de escoamento é representada por uma curva (CHEN, 1982).



**Fonte:** Autora – Adaptado de CHEN, 1982.

Os conceitos de carregamento e descarregamento para um estado complexo de tensão ficam mais claros quando a função é interpretada geometricamente como uma superfície, e  $\sigma_{ij}$  e  $d\sigma_{ij}$  como vetores de tensão e incremento de tensão no espaço de tensões (Figura 15a). Quando se tem um incremento de tensão  $d\sigma_{ij}$  em um ponto de tensão  $\sigma_{ij}$  na superfície de escoamento, se o material for perfeitamente plástico, o ponto de tensões não pode ir além da superfície de escoamento, e o regime plástico ocorre quando o ponto de tensão está na superfície e o incremento de tensão for tangente à superfície. Portanto, o critério de carregamento é dado pelas Equações 2.54 e 2.55, já o critério de descarregamento é dado pelas Equações 2.54 e 2.56.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (2.55)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (2.56)$$

Considerando um incremento de deformação  $d\varepsilon_{ij}$ , é possível afirmar que esse incremento será a soma dos incrementos elástico e plástico, de acordo com a Equação 2.57.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.57)$$

Não é óbvio que há uma conexão necessária entre a função de escoamento e o incremento de deformação plástica  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Em geral, podemos introduzir o conceito de função potencial plástica  $g(\sigma_{ij})$ , que nos permite escrever as equações de regime plástico na forma da Equação 2.58, na qual  $d\lambda$  é um fator de proporcionalidade positivo, que só é diferente de zero quando ocorre deformação plástica. A relação da Equação 2.58 implica que, no regime plástico, o vetor  $d\varepsilon_{ij}^p$  é normal à superfície da função potencial plástica.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.58)$$

Quando a função potencial coincide com a de escoamento, ela é chamada de função associada e, quando isso não ocorre, de função não associada.

### 2.4.3 Materiais com endurecimento

Para materiais elastoplásticos com endurecimento, um incremento de tensão  $d\sigma_{ij}$  a um ponto de tensão  $\sigma_{ij}$  na superfície de escoamento vai gerar somente deformação elástica se o vetor for direcionado para dentro da superfície de escoamento (descarregamento) ou tangente a ela (carregamento neutro), e vai gerar deformação elástica e plástica se o vetor for direcionado para fora da superfície (carregamento), de acordo com a Figura 15b.

Em cada estágio há uma função de tensões  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k)$  tal que não ocorre deformação plástica adicional quando  $f$  é inferior a zero. Em qualquer estágio do carregamento, a função de

escoamento pode ser representada geometricamente, de maneira similar à superfície de escoamento para o regime elastoplástico perfeito (Figura 15b). A superfície de escoamento muda sua configuração com o regime plástico de acordo com o parâmetro de endurecimento  $k$ , expressado em função de  $\varepsilon_{ij}^p$  (Equação 2.59). Estados de tensão com  $f = 0$  representam escoamento, e para  $f < 0$  há um comportamento elástico.

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) \quad (2.59)$$

### 3 COMPORTAMENTO DE COLUNAS DE CONCRETO CONFINADO

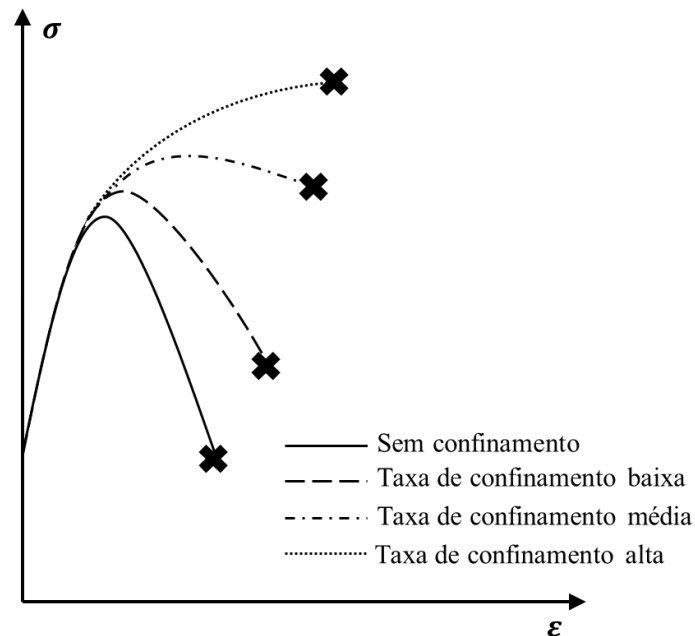
#### 3.1 Comentários Iniciais

As colunas, elementos estruturais sujeitos predominantemente a carregamentos de compressão, sempre exerceram fundamental importância para a segurança das estruturas. Além destes elementos serem dimensionados, principalmente, para resistir a esforços de compressão, pode ser importante também, para seu bom desempenho em diversas situações, que apresente uma boa ductilidade (SILVA, 2002).

Um estudo pioneiro do comportamento do concreto sujeito à compressão biaxial e triaxial foi realizado por RICHART *et al.* (1928;1929) no qual foram levadas à falha espécimes cilíndricos de concreto comprimidas axialmente e confinadas lateralmente com pressão hidrostática uniforme ou espiras de aço. Os resultados indicaram o efeito benéfico do confinamento em elementos de concreto comprimidos; há um aumento não só de resistência, mas também de ductilidade, que é a capacidade do elemento estrutural de se deformar antes que a ruptura ocorra.

Um típico comportamento do concreto confinado, com diferentes níveis de confinamento, está representado na Figura 16.

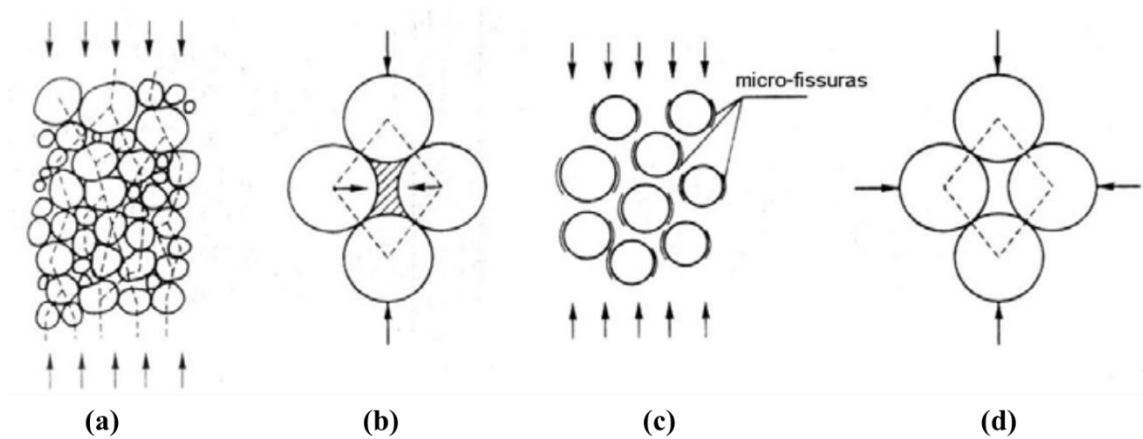
Figura 16 – Comportamento tensão-deformação do concreto confinado



Fonte: Autora – Adaptado de ROCCA *et al.*, 2008.

O efeito das tensões confinantes no concreto pode ser entendido analisando seu mecanismo de ruptura sob compressão uniaxial, como foi feito em FIB (1999). Concretos usuais possuem cerca de 75% de agregados, que são os componentes rígidos do concreto. As forças de compressão caminham através dos agregados (Figura 17a) sendo necessárias, para o equilíbrio, componentes laterais de tensão. Quando o concreto não está confinado as tensões laterais são provenientes da coesão da pasta de cimento (Figura 17b). A microfissuração entre agregados e pasta de cimento começa a ocorrer quando essa coesão não é mais suficiente para equilibrar os esforços de compressão axial (Figura 17c). A presença de tensões confinantes no concreto vai justamente aumentar a coesão, resultando num aumento da resistência (Figura 17d).

**Figura 17 – Mecanismo de confinamento no concreto**



Fonte: Autora – Adaptado de FIB, 1999.

### 3.2 Tipos de Confinamento

O confinamento pode ser exercido no concreto de maneira passiva ou ativa. O confinamento passivo é dependente da deformação lateral do elemento comprimido, ou seja, a tensão de confinamento cresce à medida que a deformação lateral aumenta e solicita o elemento confinante. Já no confinamento ativo, a tensão de confinamento é aplicada independentemente do nível de deformação lateral apresentada. É possível dizer que o confinamento passivo tem um efeito de contenção, enquanto que o confinamento ativo tem um efeito de pressão.

Os procedimentos mais comuns de se obter uma coluna de concreto confinado consistem na utilização de armaduras de aço longitudinais e transversais, camisas de aço ou camisas de PRF



(Polímeros Reforçados com Fibra). Todos os tipos de confinamento citados vão ser mobilizados com o aumento da deformação lateral, caracterizando-se como confinamento passivo. As diferenças observadas no comportamento de colunas confinadas com aço ou PRF são causadas, principalmente, pelo fato do aço ter comportamento próximo do elastoplástico perfeito, enquanto que o PRF tem comportamento próximo do elástico linear.

Observações de experimentos de CUSSON e PAULTRE (1994) sugerem que a rigidez lateral, não a intensidade da tensão lateral, é a causa da melhora no desempenho do concreto confinado. De acordo com PANTAZOPOULOU (1994) isso é evidenciado pelo fato que níveis similares de pressão lateral e tipos similares de concreto não resultam em desempenhos similares, há diferença na magnitude do aumento da resistência obtida de testes de espécimes de concreto em diferentes equipamentos de confinamento triaxial.

A partir destas observações, SAMAAAN *et al.* (1998) sugerem que o concreto tem maior sensibilidade à contenção do que a pressão. Segundo os autores, essa observação explica o porquê da diferença do concreto confinado passivamente para o confinado ativamente, e também porque o concreto confinado com camisa de aço se comporta de maneira tão diferente do concreto confinado com camisa PRF.

MANDER *et al.* (1988) afirmam que foi observado em testes que o confinamento do concreto com armaduras, desde que tenham um arranjo adequado, resulta em significativo aumento tanto da resistência quanto da ductilidade do concreto comprimido. Foi constatado, por diversas pesquisas, que confinamento com armaduras tem melhor desempenho quando:

- a) as armaduras transversais são arrançadas com espaçamento pequeno entre si;
- b) há maior densidade de armaduras transversais na seção;
- c) as barras longitudinais são bem distribuídas no perímetro da coluna;
- d) são utilizadas espiras ou estribos circulares, e quando isso não é possível, são adicionados estribos suplementares em boa quantidade aos estribos retangulares.

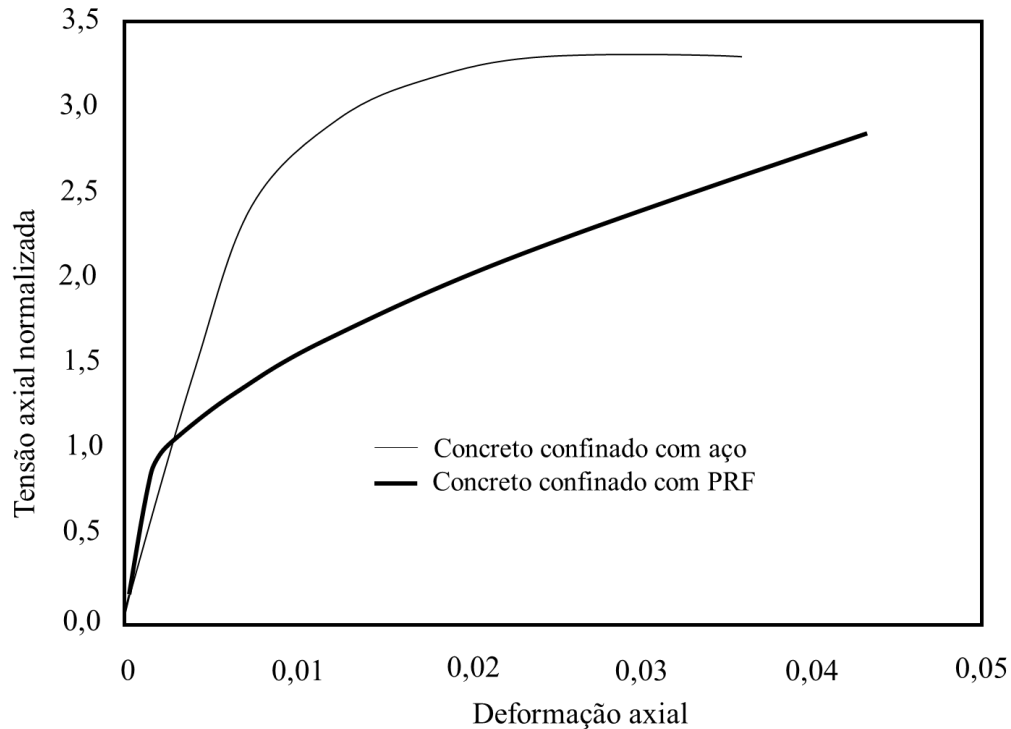
Sobre o uso de armaduras para confinar colunas retangulares CARRAZEDO (2002, p. 39) comenta: “Em pilares de seções transversais diferentes da circular os estribos retilíneos apresentam tensões não uniformes, com concentrações de tensão nos pontos de encontro com a armadura longitudinal. O arqueamento destes estribos, que possuem pequena rigidez, provoca considerável redução da pressão lateral. Porém com arranjos adequados das barras transversais e longitudinais pode-se atingir níveis de confinamento semelhantes aos de pilares circulares”.

De acordo com FARDIS e KHALILI (1981, apud CARRAZEDO, 2002), em colunas de concreto encamisadas com tubos de aço, o coeficiente de Poisson do concreto, inferior ao do aço, juntamente com os efeitos da retração no concreto, podem fazer com que exista uma folga entre o concreto e o aço, acarretando uma baixa interação entre os materiais.

SAMAAN *et al.* (1998) fizeram uma análise das diferenças no confinamento de colunas com tubo de aço e com camisa de PRF. Compararam resultados experimentais de colunas com o mesmo nível de confinamento e foi observado que a eficiência do confinamento, medida pela relação entre a resistência do concreto confinado e a resistência do concreto não confinado, é maior para o confinamento com aço. Entretanto, as deformações efetivas de ruptura são maiores para confinamento com PRF.

O gráfico da Figura 18 foi elaborado por SAMAAN *et al.* (1998) para observar o comportamento tensão-deformação do concreto confinado com aço e PRF. Ao observá-lo, percebe-se que a coluna confinada com aço tem apenas um suave amolecimento antes de atingir a tensão máxima, e depois tem um ramo decrescente. Já a coluna confinada com PRF mostra um comportamento linear, com uma transição em níveis de tensão próximos à resistência do concreto não confinado, e depois retorna ao comportamento linear, com rigidez diferente e um ramo ascendente.

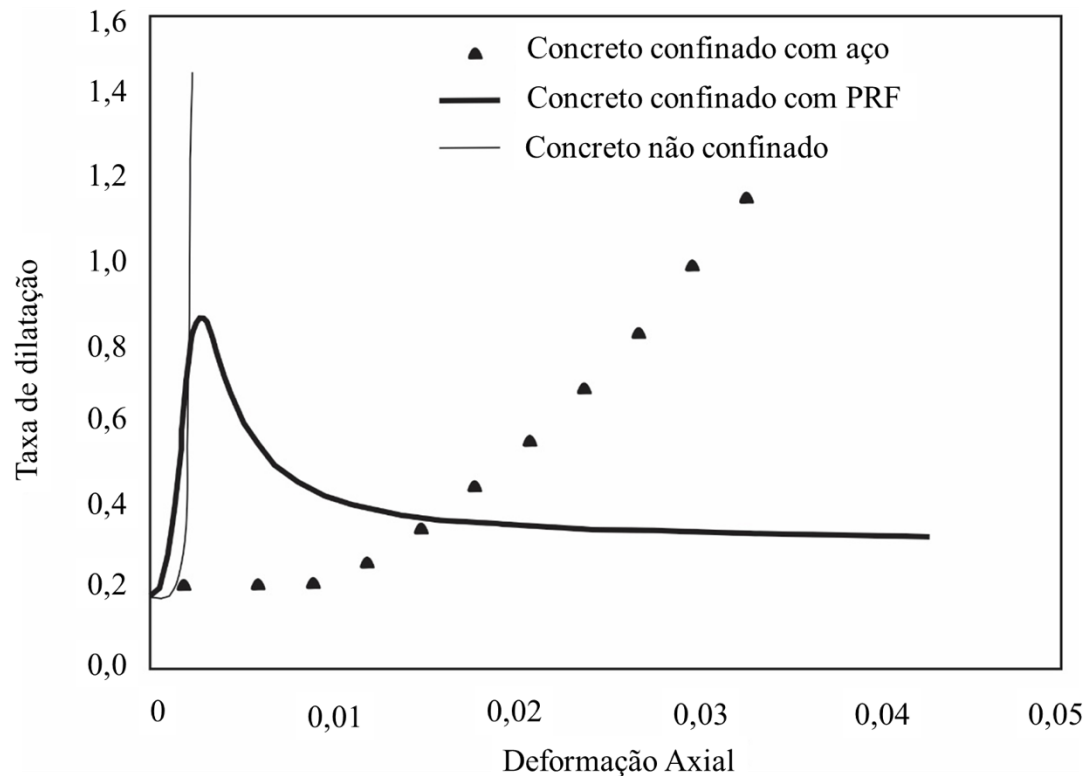
**Figura 18 – Diagrama tensão-deformação do concreto confinado com aço e com PRF**



**Fonte:** Autora – Adaptado de SAMAAAN *et al.*, 1998.

Uma análise adicional foi feita por SAMAAAN *et al.* (1998), através da Figura 19. Esse gráfico apresenta como varia a taxa de dilatação, que é a razão da variação da deformação lateral pela variação da deformação axial, em função da deformação axial. O valor da taxa de dilatação do concreto não confinado inicia em valores próximos ao coeficiente de Poisson e depois, com a evolução das microfissuras, aumenta drasticamente até a ruptura. O valor da taxa de dilatação do concreto confinado com aço inicia da mesma maneira, mas mantém-se com valores próximos ao coeficiente de Poisson até que o aço atinja a tensão do escoamento, depois disso se comporta basicamente como o concreto não confinado. Já no concreto confinado com PRF, apesar de iniciar de maneira semelhante ao concreto não confinado, com o crescimento das deformações a taxa de dilatação diminui rapidamente e no final se aproxima de certo valor, assintoticamente.

**Figura 19 – Taxa de dilatação lateral**



**Fonte:** Autora – Adaptado de SAMAN *et al.*, 1998.

No caso de confinamento passivo, CUSSON e PAULTRE (1994) observaram que a eficiência do confinamento do concreto de alta resistência é reduzida, em relação ao concreto de resistência normal. Isso ocorre porque, para o concreto de alta resistência, o material confinante demora mais para ser solicitado, já que esse concreto possui maior módulo de elasticidade e menor microfissuração, exibindo menor expansão lateral sob compressão axial.

### 3.3 Modelos de Previsão de Comportamento

Pode ser considerado o modelo pioneiro de previsão de comportamento do concreto confinado o elaborado por RICHART *et al.* (1929), que foi resultado de seus estudos experimentais. Os autores propuseram o uso da simples expressão da Equação 3.1, na qual o coeficiente  $k_1$  é considerado constante e igual a 4,1,  $f_{cc}$  é a resistência do concreto confinado,  $f'_c$  é a resistência do concreto não confinado e  $f_l$  é a tensão lateral atuante no concreto.

$$f_{cc} = f'_c + k_1 f_l \quad (3.1)$$

Posteriormente foram criados outros modelos de previsão de comportamento do concreto confinado e, inicialmente, tratava-se de concreto confinado com armaduras. Nesse caso, podem ser citados como pioneiros os trabalhos de MANDER *et al.* (1988), EL-DASH e AHMAD (1994), CUSSON e PAULTRE (1995) e RAZVI e SAATCIOGLU (1999).

OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) fizeram uma extensa revisão de modelos existentes de tensão-deformação para colunas de concreto circulares confinadas com PRF e encontraram 88 modelos existentes. Os autores classificaram esses modelos de acordo com a nomenclatura dada por LAM e TENG (2003a), ou seja modelos orientados para projeto e modelos orientados para análise. Os modelos orientados para projeto são caracterizados por equações empíricas para a curva tensão-deformação, calibradas com resultados experimentais. A capacidade de previsão desses modelos, então, depende totalmente da qualidade do banco de dados experimental, e fica limitada ao intervalo dos parâmetros dos ensaios. Já os modelos orientados para análise são caracterizados por considerar a interação entre o material confinante e o núcleo de concreto, utilizando equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações.

Dentre os modelos orientados para projeto analisados por OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) existem autores que aplicaram modelos anteriores, desenvolvidos para concreto confinado com armadura ou ativamente, para o caso do ensamamento com PRF (FARDIS e KHALILI, 1982; AHMAD *et al.*, 1991; SAADATMANESH *et al.*, 1994; LI *et al.*, 2003). As curvas tensão-deformação, nesse caso, têm formato parabólico. Outros modelos foram desenvolvidos diretamente para concreto confinado com PRF, e trazem uma curva com comportamento bilinear (NANNI e BRADFORD, 1995; KARBHARI e GAO, 1997; XIAO e WU, 2000; SAIIDI *et al.*, 2005; BINICI, 2008). Há, ainda, modelos que trazem uma combinação dos dois tipos de curva citados, como SAMAAN *et al.* (1998), LAM e TENG (2003a), XIAO e WU (2003), BERTHET *et al.* (2006), MATTHYS *et al.* (2006), YOUSSEF *et al.* (2007), TENG *et al.* (2009), WU *et al.* (2009), FAHMY e WU (2010) e YU e TENG (2011).

A maioria dos modelos orientados para análise baseia-se na hipótese de que a tensão axial e a deformação axial de uma coluna confinada com PRF, para certo nível de tensão lateral, serão iguais às de uma coluna confinada ativamente com tensão lateral constante igual à que está atuando naquele instante na coluna confinada com PRF. Essa hipótese é equivalente a dizer que a trajetória

de tensões no concreto confinado não afeta seu comportamento tensão-deformação (TENG e LAM, 2004). OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) citam alguns estudos desenvolvidos (XIAO *et al.*, 2010; OZBAKKALOGLU e AKIN, 2011) que indicam que essa hipótese não condiz com os resultados experimentais e atenta para a importância de se reconhecer as limitações desse tipo de modelo. Alguns modelos orientados para análise citados por OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) são: MIRMIRAN e SHAHAWY (1997), SPOELSTRA e MONTI (1999), MORAN e PANTELIDES (2002), MARQUES *et al.* (2004), BINICI (2005), ALBANESI *et al.* (2007), JIANG e TENG (2007), TENG *et al.* (2007), AIRE *et al.* (2010) e XIAO *et al.* (2010).

Além dos modelos orientados para projeto e para análise, OZBAKKALOGLU *et al.* (2013) comentam que existem outros tipos de modelos, que abordam o problema de maneira diferente. Incluem-se aqui modelos baseados na Teoria da Plasticidade e na Teoria do Dano Contínuo.

Autores que utilizaram Teoria da Plasticidade para estudar o comportamento de colunas de concreto confinado são: KARABINIS e KIOUSIS (1996a; 1996b), MIRMIRAN *et al.* (2000), BARROS (2001), EID e PAULTRE (2007), ROUSAKIS *et al.* (2008), YU *et al.* (2010a), JIANG e WU (2012; 2014) e WOLF (2008). Além do uso da Teoria da Plasticidade, vários trabalhos têm incluído conceitos e procedimentos da Teoria do Dano Contínuo, tais como: YU *et al.* (2010b), KABIR e SHAFEI (2012), GRASSL *et al.* (2013), para a descrição da resposta dos mencionados elementos estruturais.

Por vezes, modelos desenvolvidos pelos autores citados são utilizados por diretrizes de projetos de colunas com encamisamentos de PRF. Por exemplo, o ACI (2008) faz suas recomendações de projeto baseando-se no modelo de LAM e TENG (2003a) e o FIB (2001) utiliza o modelo de SPOELSTRA e MONTI (1999).

### **3.4 Colunas com Seção Transversal Quadrada**

O efeito de confinamento exibido em colunas com seção transversal circular é significativamente diferente nas colunas de seções quadradas, isso se dá pela distribuição não uniforme das tensões laterais neste tipo de coluna. MIRMIRAN *et al.* (1998) estudaram a influência da forma da seção transversal no confinamento e concluíram que o confinamento em seções quadradas é menos eficiente que em seções circulares. A tensão confinante em seções quadradas varia de um valor máximo nas quinas, a um valor mínimo no centro da aresta.

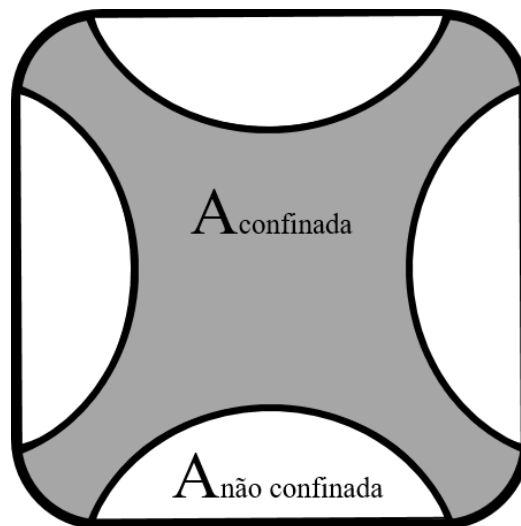
MIRMIRAN *et al.* (1998) sugerem que o arredondamento das quinas das colunas quadradas torna o confinamento mais efetivo, já que reduz a concentração de tensões nos vértices. De acordo com WU *et al.* (2006) e WANG e WU (2008), o ganho de resistência é diretamente proporcional ao chamado fator de forma (Equação 3.2), sendo  $r$  o raio de arredondamento e  $B$  o lado da coluna.

$$\mu = \frac{2r}{B} \quad (3.2)$$

WU *et al.* (2006) realizou uma análise teórica do problema de colunas de seção quadrada confinadas e concluiu que colunas com quinas vivas ( $r = 0$ ) praticamente não apresentam o efeito benéfico do confinamento, ou seja, comportam-se aproximadamente como colunas não encamisadas. Essa observação também foi feita por MIRMIRAN *et al.* (1998) e confirmada nos experimentos de WANG e WU (2008).

Comumente, o confinamento em colunas de seção retangular vem sendo tratado como foi sugerido por SHEIKH e UZUMERI (1982) para colunas confinadas com armadura, são consideradas duas regiões com condições de confinamento distintas, tal como é mostrado na Figura 20. Os modelos de LAM e TENG (2003b) e MARQUES *et al.* (2004), por exemplo, utilizam metodologias baseadas nas parábolas ilustradas na Figura 20.

**Figura 20 – Regiões com condições de confinamento distintas em colunas de seção retangular**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

## 4 MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA DE COLUNAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR CONFINADAS

### 4.1 Comentários Iniciais

Na busca de modelos do comportamento do concreto confinado que possam ser aplicados em diferentes configurações, para diferentes materiais e que tenham maior eficiência, foram estudados modelos elastoplásticos para o concreto. Serão apresentados a seguir os dois modelos selecionados durante esse estudo.

O modelo de plasticidade de Drucker-Prager (D-P) foi proposto por Drucker e Prager em 1952 e tem a capacidade de descrever materiais que são sensíveis a pressão hidrostática, como rochas, solos e concreto. O modelo de D-P tem sido bastante usado (KARABINIS e KIOUSIS, 1994 e 1996a; KARABINIS e KIOUSIS, 1996b; MIRMIRAN *et al.*, 2000; BARROS, 2001; EID e PAULTRE, 2007; ROUSAKIS *et al.*, 2008; JIANG e WU, 2014) para descrever o comportamento de colunas de concreto confinado. Isto pode ser justificado pela simplicidade e comprovada eficiência do modelo na simulação do comportamento do concreto com a utilização de apenas três parâmetros do material.

Em termos gerais, o modelo D-P possui uma função de escoamento definida pela Equação 4.1 e uma função potencial definida pela Equação 4.2. Seus parâmetros são, portanto, a função de endurecimento  $\kappa$ , o parâmetro  $\alpha$  da função de escoamento, que expressa a sensibilidade à pressão do material e o parâmetro  $\psi$  da função potencial.

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa \quad (4.1)$$

$$G = \psi I_1 + \sqrt{J_2} \quad (4.2)$$

KARABINIS e ROUSAKIS (2002) afirmam que o comportamento de elementos estruturais de concreto pode ser bem estimado usando um modelo D-P de plasticidade não associada no qual os parâmetros  $\alpha$  da função de escoamento,  $\psi$  da função potencial e a função de endurecimento  $\kappa$  relacionam-se com o ângulo de atrito, a dilatação plástica e a coesão, respectivamente.



YU *et al.* (2010) fizeram um estudo com o objetivo de esclarecer o efeito dos três parâmetros de um modelo de plasticidade D-P em sua capacidade de prever o comportamento do concreto confinado e identificar as principais características que um modelo desse tipo deve ter para obter resultados próximos dos experimentais. Entre outras coisas, estes últimos autores chegaram às seguintes conclusões: a) a função de endurecimento deve levar em conta o histórico de deformações plásticas e a taxa de confinamento; b) a função potencial deve ser não-associada e levar em conta, além da tensão de confinamento, a deformação plástica acumulada.

No presente trabalho, foram estudados e implementados dois modelos elastoplásticos para o concreto, o primeiro foi o modelo de ROUSAKIS *et al.* (2008) e o segundo foi o modelo de JIANG e WU (2014).

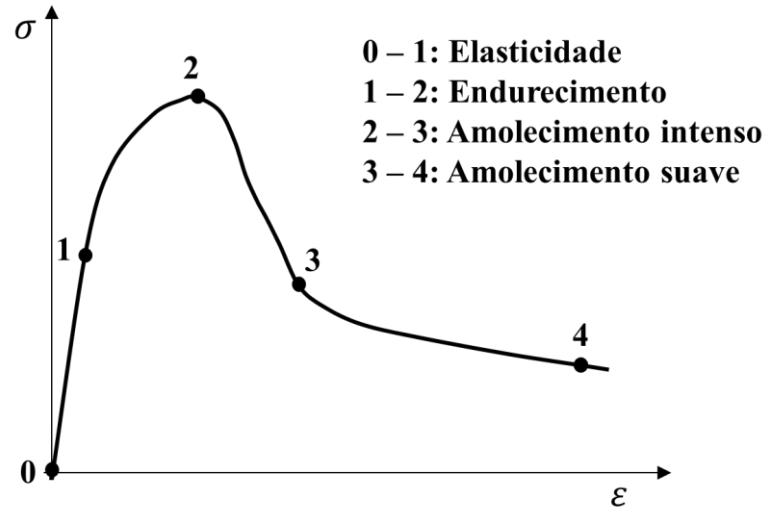
#### **4.2 Modelo de ROUSAKIS *et al.* (2008)**

O modelo de ROUSAKIS *et al.* (2008) é baseado em um modelo elastoplástico proposto por KARABINIS e KIOUSIS (1994; 1996a) para simular o comportamento de concreto confinado através de armaduras de aço. Este último modelo foi, então, adaptado para descrever a resposta de colunas de concreto confinadas por encamisamento de PRF mediante ajustes efetuados nos parâmetros do material envolvidos na modelagem.

Os autores modelaram o concreto como um material elastoplástico, empregando um modelo simples de D-P, não associado e com endurecimento. O modelo resultante é limitado aos casos de colunas circulares com carregamento monotônico centrado, tendo sido aplicado pelos autores para analisar colunas não confinadas e confinadas passivamente por camisa de material com comportamento elástico linear.

O modelo inicial (KARABINIS e KIOUSIS, 1994; 1996a) foi desenvolvido para descrever três características predominantes do concreto: a) a resistência da coluna de concreto aumenta com o confinamento; b) a relação tensão-deformação do concreto apresenta endurecimento inicial, seguido de amolecimento (Figura 21); c) o concreto apresenta dilatação sob compressão ou cisalhamento. Para modelagem desse comportamento são utilizadas a função de escoamento  $F$ , a função de endurecimento  $\kappa$  e a função potencial  $G$ , de acordo com as Equações 4.1 e 4.2.

**Figura 21 – Comportamento tensão-deformação do concreto confinado**



Fonte: Autora – Adaptado de KARABINIS e KIOUSIS, 1996a.

A função de endurecimento  $\kappa$  caracteriza a existência de endurecimento ou amolecimento, e sua expressão é resultado de algumas observações experimentais durante o aumento de deformação plástica, como: a) as tensões crescem devido ao endurecimento; b) as tensões são reduzidas devido ao dano; c) a taxa de dano do concreto é inicialmente alta e diminui com a deformação (Figura 21).

ROUSAKIS *et al.* (2008) consideraram a capacidade de previsão de seu modelo satisfatória, tanto na previsão do comportamento de tensão-deformação axial quanto na previsão do comportamento de tensão axial-deformação lateral, para concretos de diferentes níveis de resistência.

No presente trabalho, o modelo de ROUSAKIS *et al.* (2008) foi implementado e testado, entretanto, por se tratar de um modelo que envolve muito parâmetros, que não são facilmente interpretados fisicamente, buscou-se um modelo com interpretação mais direta.

### 4.3 Modelo de JIANG e WU (2014)

Em 2012, JIANG e WU desenvolveram um estudo aplicando o modelo D-P linear estendido, utilizado pelo *software* comercial ABAQUS, ao problema de colunas de concreto com seção transversal circular, confinadas com camisa de PRF e submetidas a carregamento monotônico de compressão. Os autores afirmam que um modelo de plasticidade adequado para

concreto confinado deve incluir, entre outras coisas, a dependência da pressão hidrostática, a dependência da trajetória, regra de fluxo não associada e endurecimento. Visando o aperfeiçoamento da descrição do comportamento de concreto confinado, os referidos autores elaboraram um estudo experimental para quantificação dos parâmetros do material que intervêm diretamente no modelo elastoplástico.

Em 2014, Jiang e Wu desenvolveram uma metodologia para determinar funções de escoamento do concreto e sua evolução em um espaço tridimensional de tensões, tendo como base resultados experimentais. Essa metodologia foi aplicada ao caso de colunas de concreto confinadas com PRF, com o intuito de determinar os parâmetros do mesmo modelo que tinha sido estudado por eles em 2012. Considera-se, então, que o modelo de 2014 é uma evolução de estudos anteriores dos autores. Os autores utilizaram o *software* ABAQUS tendo como dados de entrada os parâmetros citados no artigo.

O presente trabalho utiliza o modelo do material que foi resultado do estudo de JIANG e WU (2014), porém, desenvolve a análise incremental de tensões através de outro procedimento, o qual será explicado mais adiante. Para confinamento uniforme, como é o caso aqui tratado, a função de escoamento do modelo é dada pela Equação 4.3, enquanto que a função potencial é definida pela Equação 4.4. Os parâmetros envolvidos são o ângulo de atrito  $\phi$ , a coesão  $\kappa$  e o ângulo de dilatação plástica  $\beta$ .

$$F = \sqrt{3J_2} + \frac{\tan \phi}{3} I_1 - \kappa \quad (4.3)$$

$$G = \sqrt{3J_2} + \frac{\tan \beta}{3} I_1 \quad (4.4)$$

Para o concreto confinado uniformemente por camisas de PRF, o aumento de tensão lateral depende da taxa de rigidez do confinamento  $\rho$ , definida na Equação 4.5, na qual  $E_f$  representa o módulo de elasticidade da camisa,  $t$  indica a espessura da camisa,  $D$  é o diâmetro da coluna circular, e  $f'_c$  a resistência à compressão do concreto não confinado. Igualmente importante durante o cálculo incremental da curva tensão-deformação é a deformação plástica acumulada, representada pelo valor calculado pela Equação 4.06.

$$\rho = \frac{2E_f t}{Df'_c} \quad (4.5)$$

$$\tilde{\varepsilon}^p = \int \sqrt{d\varepsilon_k^p \cdot d\varepsilon_k^p} \quad (k = 1,2,3) \quad (4.6)$$

JIANG e WU (2012) realizaram uma análise do desempenho do modelo de D-P com resultados experimentais e concluíram que: a) a função de escoamento é governada pelas deformações plásticas e pela taxa de rigidez do confinamento; b) o ângulo de atrito diminui suavemente com um aumento na deformação plástica; c) o ângulo de dilatação plástica é uma função tanto da deformação plástica axial quanto da taxa de rigidez do confinamento.

A análise acima levou à expressão da Equação 4.7 que permite a avaliação do ângulo de atrito. As constantes dessa expressão foram calibradas utilizando um banco de dados de resultados experimentais, e os resultados estão apresentados na Tabela 1.

$$\phi = i_0 e^{-\omega \cdot \tilde{\varepsilon}^p} + \phi_r \quad (4.7)$$

Com relação ao comportamento da função de escoamento do modelo, com análise de resultados experimentais, os autores chegaram às expressões das Equações 4.8 e 4.9, suas constantes estão apresentadas na Tabela 1.

$$\zeta(\rho) = a - b \cdot e^{-d \cdot \rho} \quad (4.8)$$

$$\frac{\kappa(\tilde{\varepsilon}^p, \rho)}{f'_c} = k_0 + E_p \frac{\tilde{\varepsilon}^p}{1 + \eta \cdot \tilde{\varepsilon}^p} + \zeta(\rho) \cdot (\tilde{\varepsilon}^p)^2 \quad (4.9)$$

Ao estudarem o ângulo de dilatação plástica os autores chegaram às expressões das Equações 4.10 a 4.13. Suas constantes também estão apresentadas na Tabela 1.

$$\beta \left( \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\beta_0 + (M_0 + \lambda_1 \beta_0) \left( \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0} \right) + \lambda_2 \beta_u \left( \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0} \right)^2}{1 + \lambda_1 \left( \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\varepsilon_1^p}{\varepsilon_0} \right)^2} \quad (4.10)$$

$$\lambda_1 = 0,0011\rho^2 - 0,0277\rho + 11,022 \quad (4.11)$$

$$\lambda_2 = \frac{2,24\rho^2 + 29,86\rho + 253,6}{1 + 2,24\rho} \quad (4.12)$$

$$\beta_u = \frac{-41,3\rho + 1,146}{\rho + 18,38} \quad (4.13)$$

**Tabela 1 - Resultado da calibração do modelo (JIANG e WU, 2014)**

$\phi_r$	$i_0$	$\omega$	$k_0$	$E_p$	$\eta$	$a$	$b$	$d$	$M_0$	$\beta_0$	$\varepsilon_0$
42,20	13,84	21,73	0,125 $f_c$	2700	6,627	277	650,1	0,08299	1570°	-37°	0,01

Ressalta-se que os resultados obtidos por JIANG e WU (2014) com o *software* ABAQUS apresentaram uma boa concordância com os resultados experimentais.

#### 4.4 Relação Constitutiva Elastoplástica Incremental

Enquanto não ocorrer a plastificação do concreto, ou seja, o material ainda se comportar como elástico linear, a relação tensão-deformação incremental será definida pela Equação 4.14, na qual a matriz constitutiva elástica é dada pela Equação 4.15, para as direções principais. Nesta equação,  $E$  é o módulo de elasticidade do concreto em MPa (Equação 4.16) e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson (Equação 4.17). Na Equação 4.16,  $f_c$  é a resistência do concreto à compressão, em MPa.

$$\{d\sigma\} = [E]\{d\varepsilon\} \quad (4.14)$$

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$E = 4734\sqrt{f_c} \quad (4.16)$$

$$\nu = 0,2 \quad (4.17)$$

Após a plastificação do concreto, a relação tensão-deformação incremental é definida pela Equação 4.18, na qual  $[D]$  é a matriz constitutiva elastoplástica do concreto (Equações 4.19 e 4.20) (CHEN, 1982).

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} \quad (4.18)$$

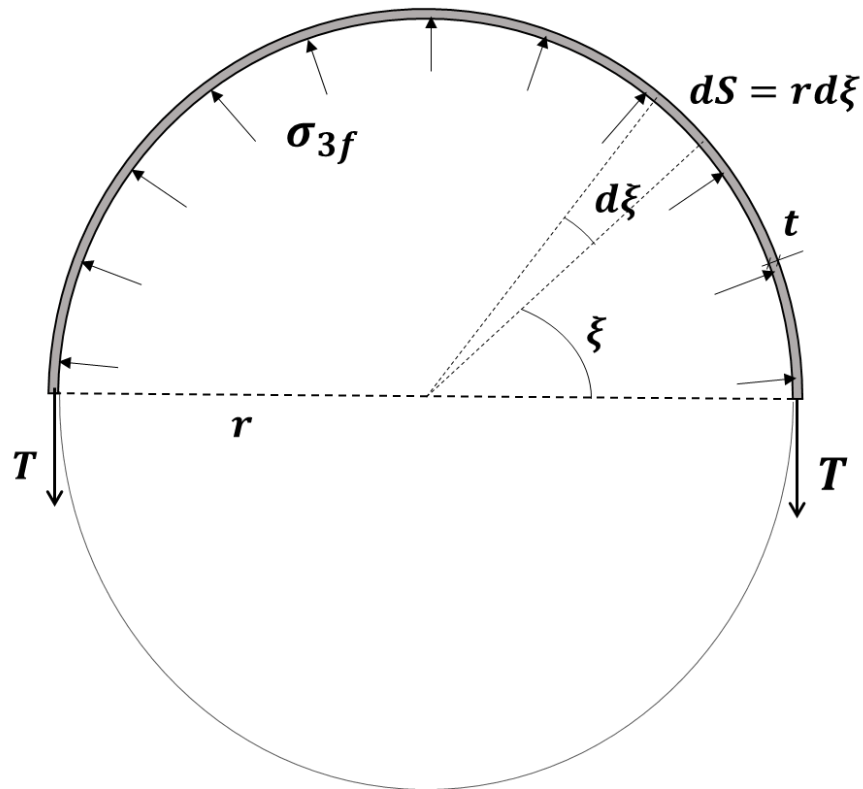
$$[D] = [E] - \frac{[E] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [E]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [E] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} + h} \quad (4.19)$$

$$h = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \sqrt{\left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\}} \quad (4.20)$$

#### 4.5 Esforços atuantes no elemento confinante

A Figura 22 mostra a força ( $T$ ) e a pressão lateral ( $\sigma_{3f}$ ) atuantes no elemento confinante de raio  $r$  e espessura  $t$ . Para esse caso, a força  $T$  pode ser determinada através do equilíbrio de forças atuando na camisa (Equação 4.21).

Figura 22 – Esquema de esforços atuantes no elemento confinante



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

$$2T = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_{3f} \sin(\xi) r d\xi \therefore T = \sigma_{3f} r \quad (4.21)$$

Considerando que essa força se distribui uniformemente na espessura da camisa (Equação 4.22) é possível determinar sua tensão circunferencial ( $\sigma_c$ ). E, assumindo seu material como elástico linear, essa tensão é dada pela expressão da Equação 4.23, na qual  $E_f$  é o módulo de elasticidade da camisa e  $\varepsilon_f$  sua deformação específica.

$$T = \sigma_c t \quad (4.22)$$

$$\sigma_c = E_f \varepsilon_f \quad (4.23)$$

Assumindo uma aderência perfeita entre a coluna de concreto e a camisa, a deformação circunferencial da camisa e da coluna serão iguais. Como a deformação circunferencial na coluna

é igual à sua deformação radial, é possível encontrar que a deformação radial da coluna é igual à deformação circunferencial do material confinante ( $\varepsilon_3 = \varepsilon_f$ ), e sabendo que a tensão radial atuante na coluna tem a mesma intensidade da pressão lateral exercida no material confinante ( $\sigma_{3f} = -\sigma_3$ ) é possível determinar a expressão da Equação 4.24 que relaciona a tensão e a deformação radial da coluna de concreto.

$$\sigma_3 = -\frac{E_f \varepsilon_3 t}{r} \quad (4.24)$$

#### 4.6 Fator de Eficiência da Camisa

Diversos autores (XIAO e WU, 2000; WANG e WU, 2008; CUI, 2009; AIRE *et al.*, 2010) observaram em seus experimentos que a ruptura em colunas de concreto encamisadas ocorre, normalmente, na camisa de PRF. LAM e TENG (2002) afirmam que a ruptura da camisa de PRF devido à tensão de tração circunferencial é praticamente a única forma possível de ruptura em uma coluna circular de concreto encamisada com PRF e submetida à compressão axial.

PESSIKI *et al.* (2001) sugerem que a deformação de ruptura observada nas camisas de PRF, quando aplicadas a colunas de concreto, é inferior à obtida nos testes de tração do material. Eles sugerem o uso de um fator de eficiência da camisa ( $\kappa_\varepsilon$ ), de acordo com a Equação 4.25 na qual  $\varepsilon_{fr}$  é a deformação de ruptura da camisa aplicada em colunas e  $\varepsilon_{fu}$  é a deformação específica de ruptura do material da camisa. A diferença observada pode ser explicada pela diferença do estado de tensões ao qual o material é submetido no ensaio e quando está envolvendo uma coluna, além de imprecisões que podem ser geradas durante o encamisamento.

$$\varepsilon_{fr} = \kappa_\varepsilon \varepsilon_{fu} \quad (4.25)$$

Alguns autores sugerem o uso de um valor fixo para o fator de eficiência, resultado de análises de testes experimentais. LAM e TENG (2003a) encontraram em seu trabalho experimental utilizando compósitos de fibra de carbono um valor médio de 0,586 para esse fator de eficiência, o ACI (2008) indica o uso do valor 0,55.



SADEGHIAN e FAM (2014) analisaram um banco de dados de 454 experimentos existentes na literatura de colunas com seção circular encamisadas com PRF. Foram reunidos resultados de compósitos com diferentes fibras, de carbono, vidro e aramida. De acordo com os autores a análise mostrou claramente que o fator de eficiência da deformação não é um valor fixo, que varia dependendo das propriedades geométricas e mecânicas do problema.

O trabalho de SADEGHIAN e FAM (2014) propõe uma análise simples e racional da ruptura da camisa aplicada ao concreto. A análise pode ser feita baseando-se em mecânica dos compósitos submetidos a um estado biaxial de tensões. Pode-se considerar que esse estado de tensões ocorre quando a camisa, além da tração circunferencial, também sofre compressão na direção axial da coluna, juntamente com o núcleo de concreto. Quando não fica caracterizado o estado biaxial de tensões, então a camisa está submetida apenas a tensão na direção circunferencial da coluna, pode-se considerar que a ruptura do compósito vai ocorrer com seu valor nominal, ou seja, o fator de eficiência será igual à unidade.

Existem alguns critérios de ruptura diferentes que podem ser aplicados em laminados de compósito e levarão em conta o estado de tensões biaxial ao qual está submetido. Um dos critérios mais utilizados é o de Tsai-Wu (TSAI e WU, 1971), que é descrito pela Equação 4.26, na qual  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  são tensões e  $f_i$  e  $f_{ij}$  são componentes do tensor de resistência. SADEGHIAN e FAM (2014) utilizam esse modelo para calcular o fator de eficiência.

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.26)$$

Para um PRF ortotrópico, submetido a um estado plano de tensões, com tensão cisalhante nula no plano, o critério se reduz à Equação 4.27. Os coeficientes da Equação 4.27 estão definidos nas Equações 4.28 a 4.32. Foi utilizada uma aproximação sugerida por COWIN (1979) para o coeficiente  $f_{12}$ , dada na Equação 4.32. Nestas equações,  $F_{1t}$  e  $F_{1c}$  são as resistências à tração e à compressão do PRF na direção das fibras e  $F_{2t}$  e  $F_{2c}$  são as resistências à tração e à compressão do PRF na direção transversal às fibras.

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (4.27)$$

$$f_1 = \frac{1}{F_{1t}} - \frac{1}{F_{1c}} \quad (4.28)$$

$$f_2 = \frac{1}{F_{2t}} - \frac{1}{F_{2c}} \quad (4.29)$$

$$f_{11} = \frac{1}{F_{1t}F_{1c}} \quad (4.30)$$

$$f_{22} = \frac{1}{F_{2t}F_{2c}} \quad (4.31)$$

$$f_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{f_{11}f_{22}} \quad (4.32)$$

SADEGHIAN e FAM (2014) utilizam, então, a relação constitutiva elástico-linear do PRF, juntamente com o modelo de Tsai-Wu (TSAI e WU, 1971), para desenvolver uma equação que permita avaliar o fator de eficiência, em função da deformação axial da coluna ( $\varepsilon_1$ ) e de parâmetros do material PRF, chegando às Equações 4.33, nas quais  $E_x$  é o módulo de elasticidade na direção das fibras,  $E_y$  é o módulo de elasticidade na direção transversal às fibras,  $\nu_{xy}$  e  $\nu_{yx}$  são os coeficientes de Poisson maior e menor, respectivamente.

$$\kappa_\varepsilon = \frac{Q}{2P\varepsilon_{fu}} \left( \sqrt{1 - \frac{4PR}{Q^2}} - 1 \right) \quad (4.33a)$$

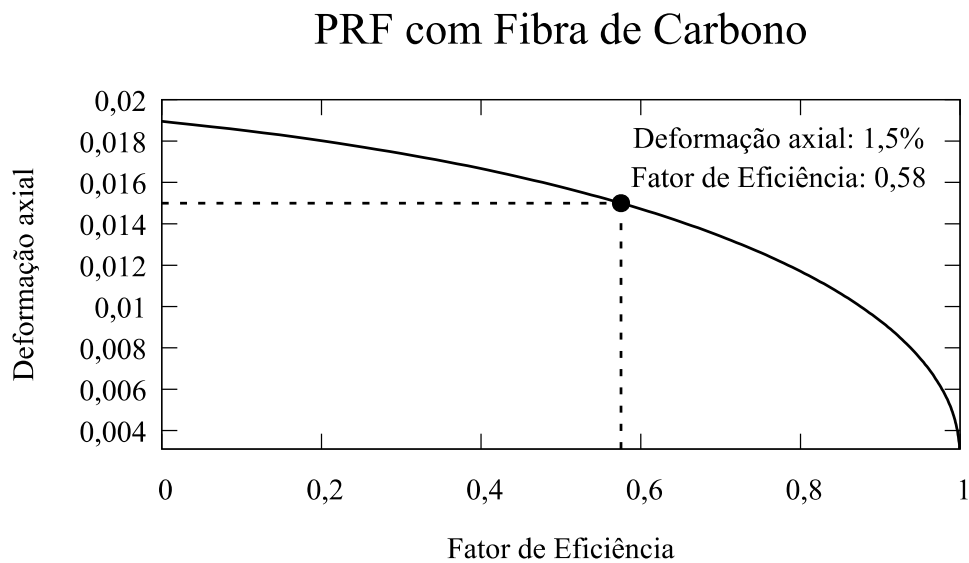
$$P = f_{11}E_x^2 + 2\nu_{xy}f_{12}E_xE_y + \nu_{xy}^2f_{22}E_y^2 \quad (4.33b)$$

$$Q = (f_1 + \nu_{xy}f_2)(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})E_x + 2(\nu_{xy}f_{22}E_y^2 + \nu_{yx}f_{11}E_x^2 + \nu_{xy}f_{12}E_x^2 + f_{12}E_xE_y)\varepsilon_1 \quad (4.33c)$$

$$R = (f_{22} + \nu_{xy}^2f_{11} + 2\nu_{xy}f_{12})E_y^2\varepsilon_1^2 + (\nu_{xy}f_1 + f_2)(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})E_y\varepsilon_1 - (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})^2 \quad (4.33d)$$

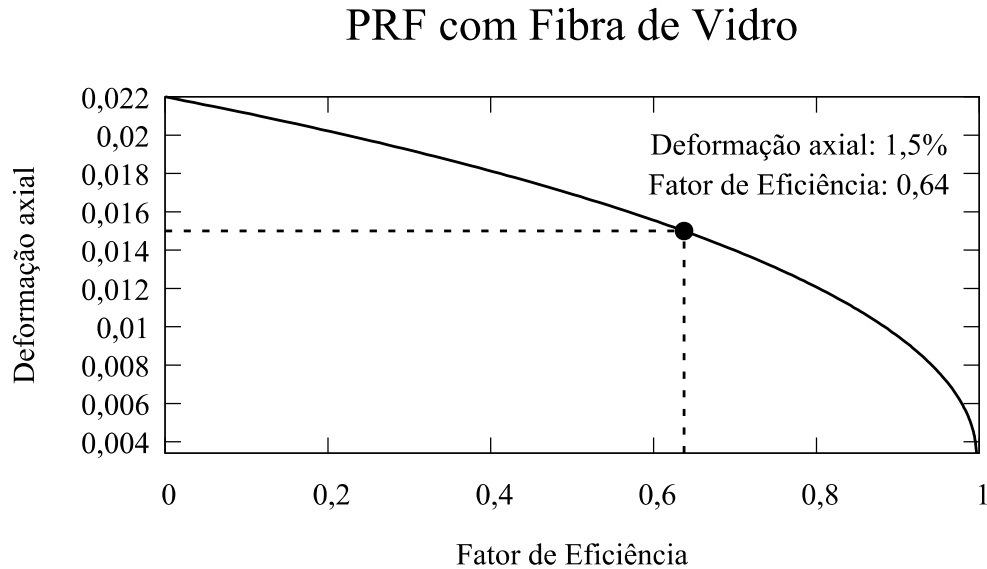
O modelo de Tsai-Wu necessita de muitos parâmetros do PRF, o que pode limitar seu uso. SADEGHIAN e FAM (2014) sugerem o uso de um modelo simplificado que fornece um resultado aproximado para o fator de eficiência, utilizando um número reduzido de parâmetros do material. Este modelo foi implementado no presente trabalho e utilizado para geração de curvas que representam como varia o fator de eficiência com a deformação axial na coluna (transversal às fibras) para dois tipos de PRF, um com fibra de carbono e outro com fibra de vidro, ambos com resina epóxi e volume de fibras de 70%. As curvas geradas estão mostradas nas Figuras 23 e 24. Como é possível observar, para uma deformação axial de 1,5% os valores do fator de eficiência são significativamente diferentes para os dois compósitos. Pelos resultados dos estudos de SADEGHIAN e FAM (2014) é possível perceber que ainda há muito que se avançar quando se trata da deformação de ruptura de colunas encamisadas com PRF.

**Figura 23 - Variação do fator de eficiência para um PRF com Fibra de Carbono**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 24 - Variação do fator de eficiência para um PRF com Fibra de Vidro**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

#### 4.7 Implementação do Modelo

Muito comumente, os estudos sobre o comportamento do concreto confinado são desenvolvidos através de métodos numéricos (Método dos Elementos Finitos, por exemplo), como foi feito por JIANG e WU (2014). Entretanto, como estamos tratando de um caso com tensões uniformes, foi adotado no presente trabalho um procedimento incremental-iterativo semianalítico para a análise de tensões e deformações baseado em KARABINIS e KIOUSIS (1996a). Este procedimento foi implementado em um programa computacional, desenvolvido na plataforma MATLAB, para análise de tensões e deformações em colunas de concreto simples, encamisadas com material elástico linear e submetidas à carregamento monotônico centrado.

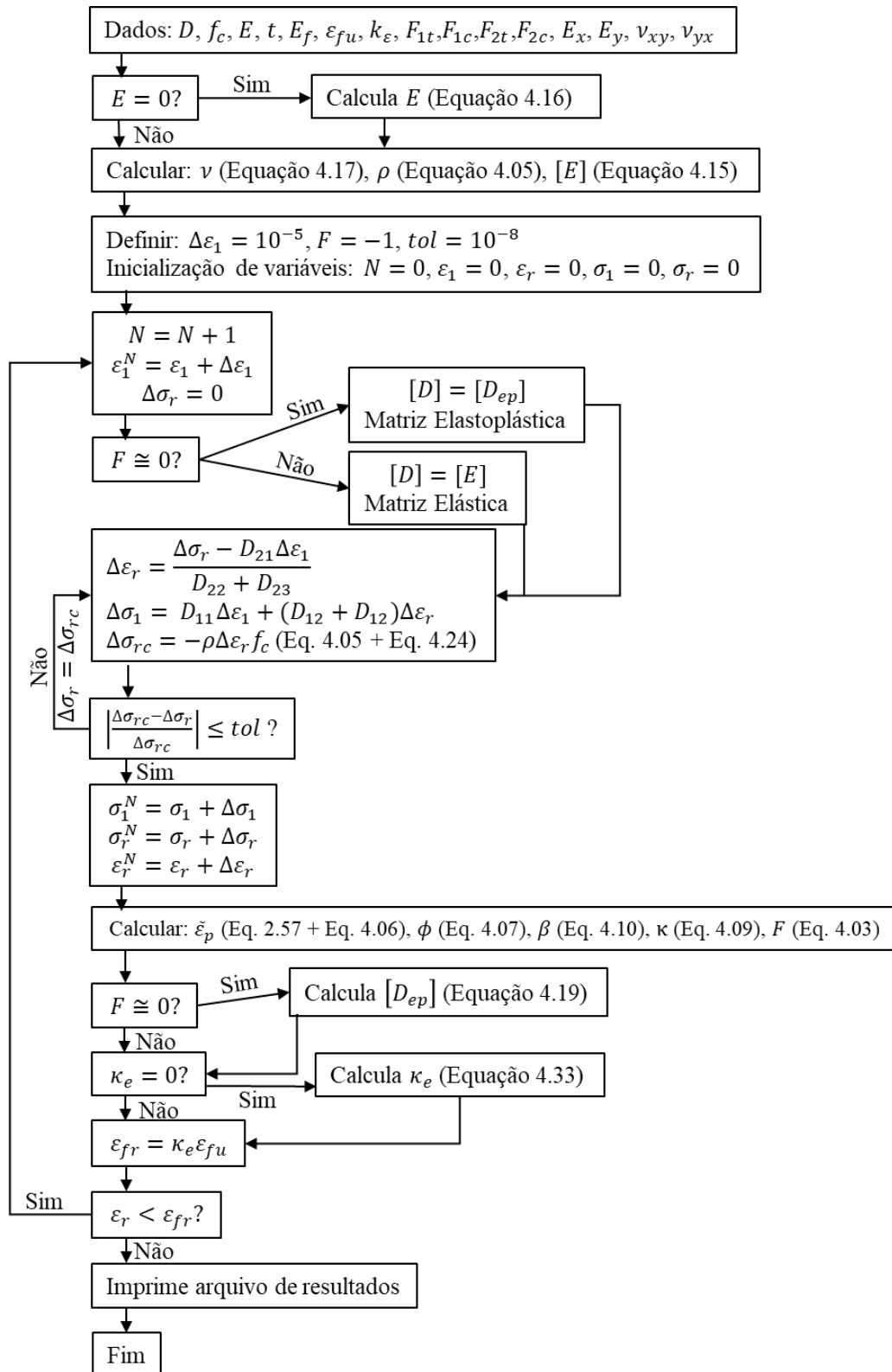
O procedimento utilizado é incremental, com deformação axial de compressão imposta na coluna, cada incremento com um acréscimo de deformação  $\Delta\varepsilon_1$  no valor recomendado de  $-10^{-5}$ . As informações necessárias para realização das análises são as seguintes: a) diâmetro da coluna, b) resistência do concreto não confinado, c) espessura da camisa, d) módulo de elasticidade da camisa e e) deformação específica de ruptura da camisa. O módulo de elasticidade do concreto pode ser calculado pela Equação 4.16 ou fornecido como dado de entrada, assim como o fator de eficiência, que pode ser calculado pela metodologia proposta no item 4.6 ou fornecido como dado de entrada.

A análise é iniciada com a leitura dos dados de entrada e o cálculo dos parâmetros fixos do problema (matriz constitutiva elástica e taxa de rigidez de confinamento). Os incrementos de deformação axial vão sendo, então, impostos na coluna, à medida que vão sendo calculados os incrementos de tensão (na direção axial e radial) e de deformação radial devidos à deformação axial imposta. O cálculo de tensões e deformações é realizado utilizando a relação constitutiva elastoplástica juntamente com um processo iterativo, que leva em conta a interação do núcleo de concreto com a camisa de PRF.

Uma esquematização geral do algoritmo é dada a seguir, enquanto que o algoritmo completo está descrito no fluxograma da Figura 25.

- (1) Leitura de Dados: parâmetros do concreto e da camisa, descrição geométrica da coluna;
- (2) Inicia o número de passos ( $N = 0$ );
- (3) Enquanto a tensão na camisa não iguala, ou ultrapassa a final ( $\varepsilon_f \leq \varepsilon_{fr}$ ):
  - (a) Atualiza o número do passo ( $N = N + 1$ );
  - (b) No passo ( $N - 1$ ) o núcleo de concreto está em equilíbrio com a camisa, e tem as tensões  $\sigma_1^{N-1}$  e  $\sigma_3^{N-1}$ ;
  - (c) Um incremento de deformação axial ( $\Delta\varepsilon_1$ ) é aplicado na coluna de concreto, e assume-se que  $\Delta\sigma_3 = 0$ , ou seja,  $\sigma_3^N = \sigma_3^{N-1}$ ;
  - (d) O incremento de tensão axial ( $\Delta\sigma_1$ ) e o incremento de deformação lateral ( $\Delta\varepsilon_3$ ) são calculados apropriadamente, pela relação constitutiva elástica ou elastoplástica;
  - (e) A deformação lateral encontrada no passo (d) é utilizada com a Equação 4.24 para calcular a variação da tensão lateral correspondente ( $\Delta\sigma_3$ );
  - (f) Ir para (d) e repetir até haver uma convergência do valor de  $\Delta\sigma_3$ , de acordo com uma tolerância;
  - (g) Atualizar valores de tensões e deformações de acordo com incrementos encontrados;
  - (h) Calcular a matriz constitutiva elastoplástica com os valores de tensão do passo  $N$  para ser utilizada no passo  $N + 1$ ;

Figura 25 – Algoritmo do programa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

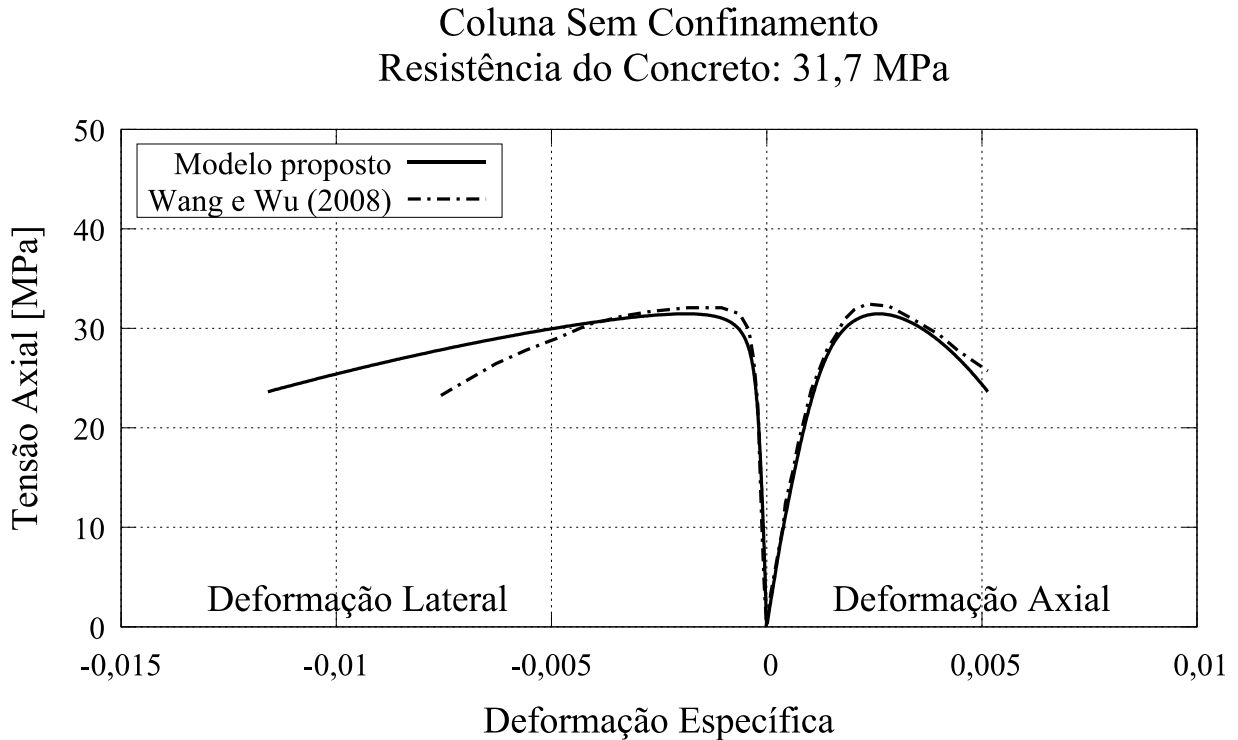
## 4.8 Resultados para Colunas de Seção Circular

Para avaliar o desempenho do modelo implementado, seus resultados foram comparados com dados experimentais de diferentes autores, e também com outros modelos existentes na literatura.

### 4.8.1 Resultados para concreto não confinado

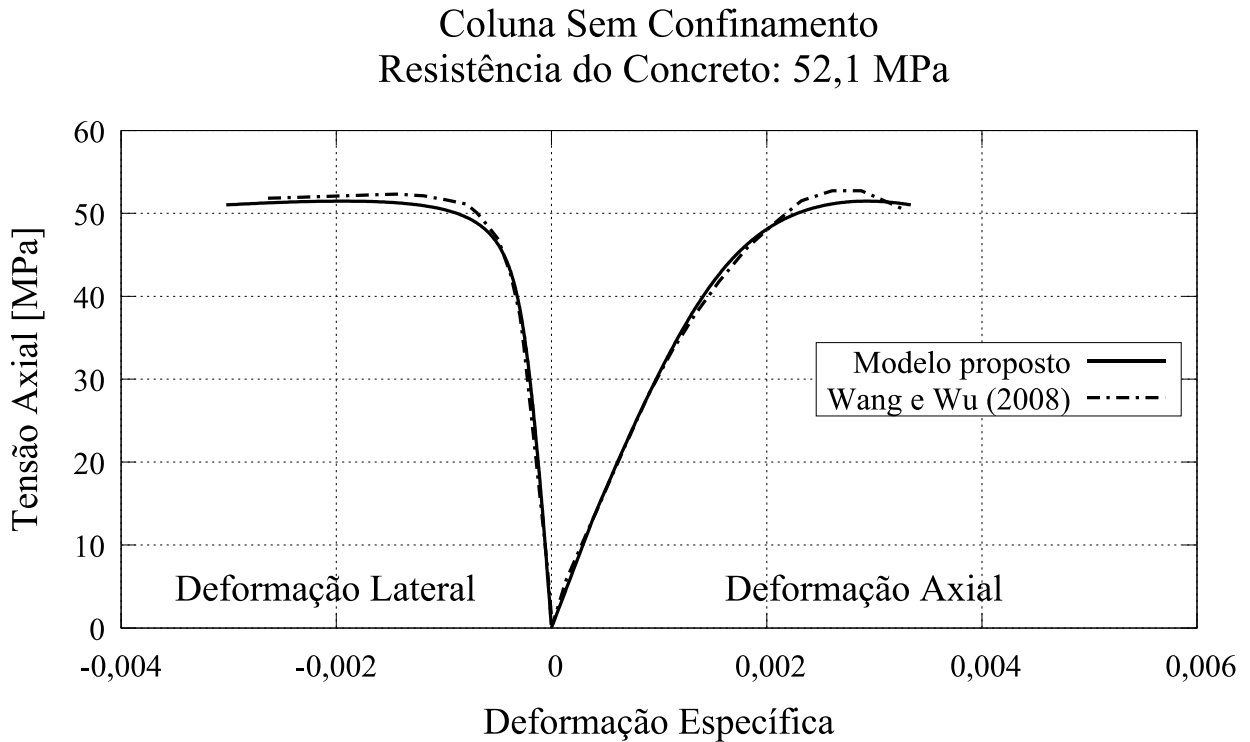
Foram comparados gráficos tensão-deformação para cilindros de concreto comprimidos axialmente e sem confinamento utilizando-se dados experimentais de WANG e WU (2008) com dois níveis de resistência do concreto e resultados gerados com o modelo implementado. As curvas tensão axial-deformação axial e tensão axial-deformação lateral obtidas no estudo estão ilustradas nas Figuras 26 e 27.

**Figura 26 – Comparações de resultados para concreto não confinado com resistência de 31,7 MPa**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 27 – Comparações de resultados para concreto não confinado com resistência de 52,1 MPa**



Como se observa pelos gráficos acima, existe uma boa aderência entre os resultados teóricos e experimentais.

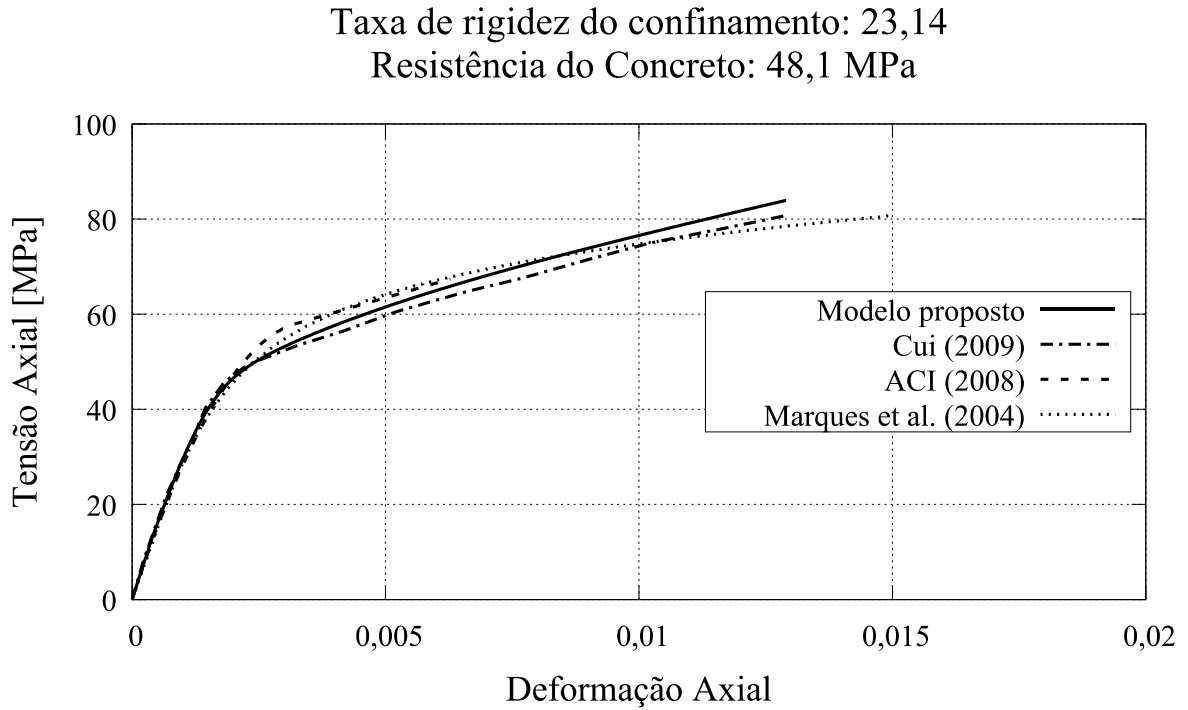
#### 4.8.2 Comparações com resultados de CUI (2009)

CUI (2009) testou 112 espécimes cilíndricas de concreto comprimidas axialmente com carregamento centrado e monotônico. Foram testados espécimes encamisados com quatro tipos diferentes de fibras (Fibra de Carbono – PRFC, PRFST ou PRFHM e Fibra de Vidro – PRFG), variando o número de camadas e o nível de resistência do concreto.

As Figuras 28 a 37 mostram as comparações de dados experimentais de CUI (2009) para material confinante de PRFC e dois tipos de concreto, com aqueles obtidos com o modelo proposto no presente trabalho, juntamente com resultados determinados através dos modelos apresentados pelo ACI (2008) e por MARQUES *et al.* (2004).

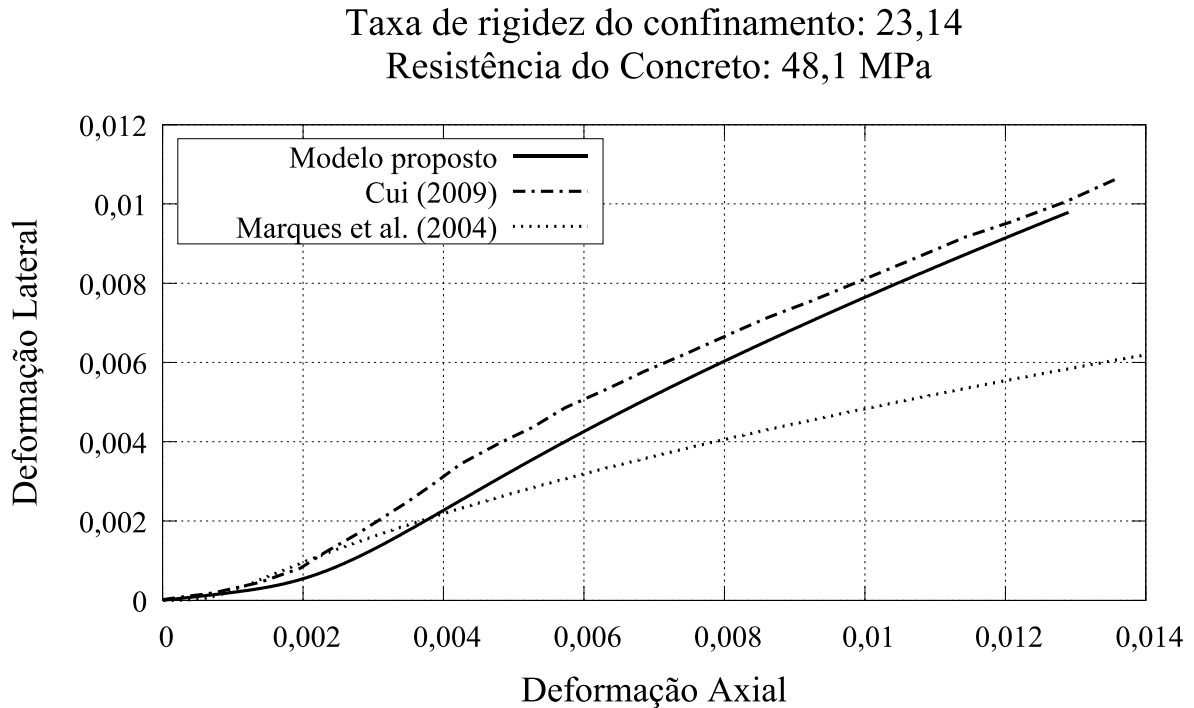


Figura 28 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 23,14$  (axial)



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 29 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 23,14$  (lateral)



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 30 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 46,29$  (axial)

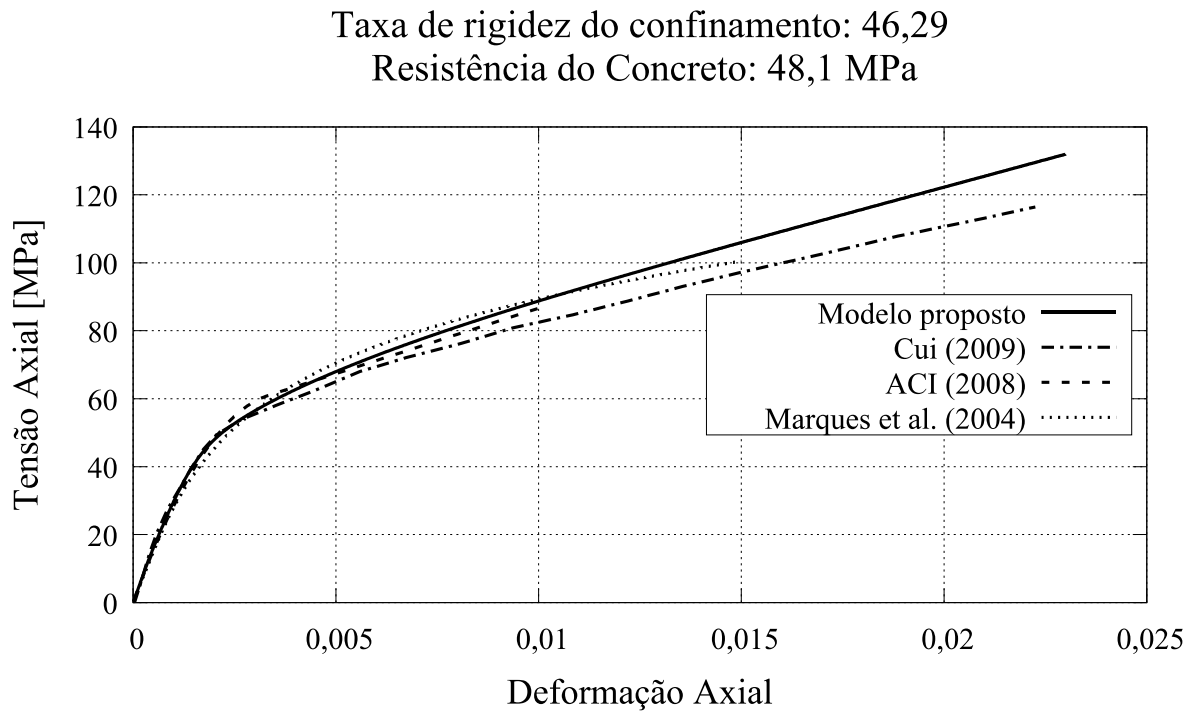


Figura 31 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 46,29$  (lateral)

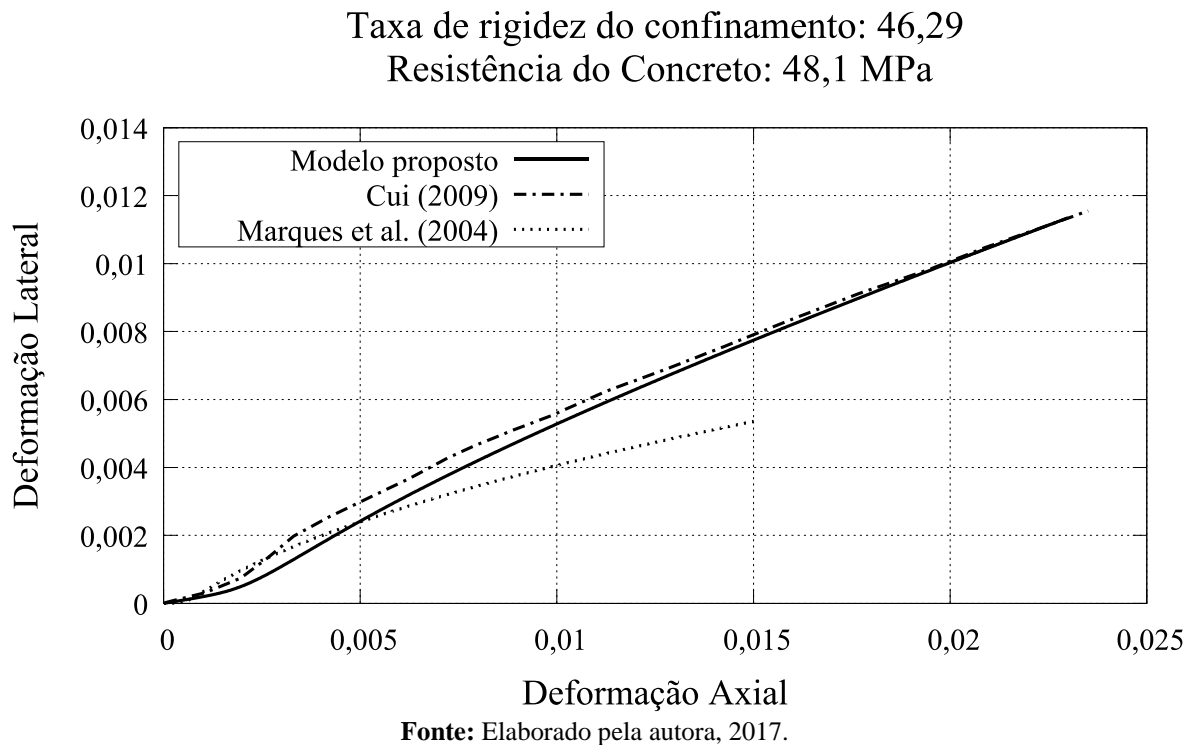
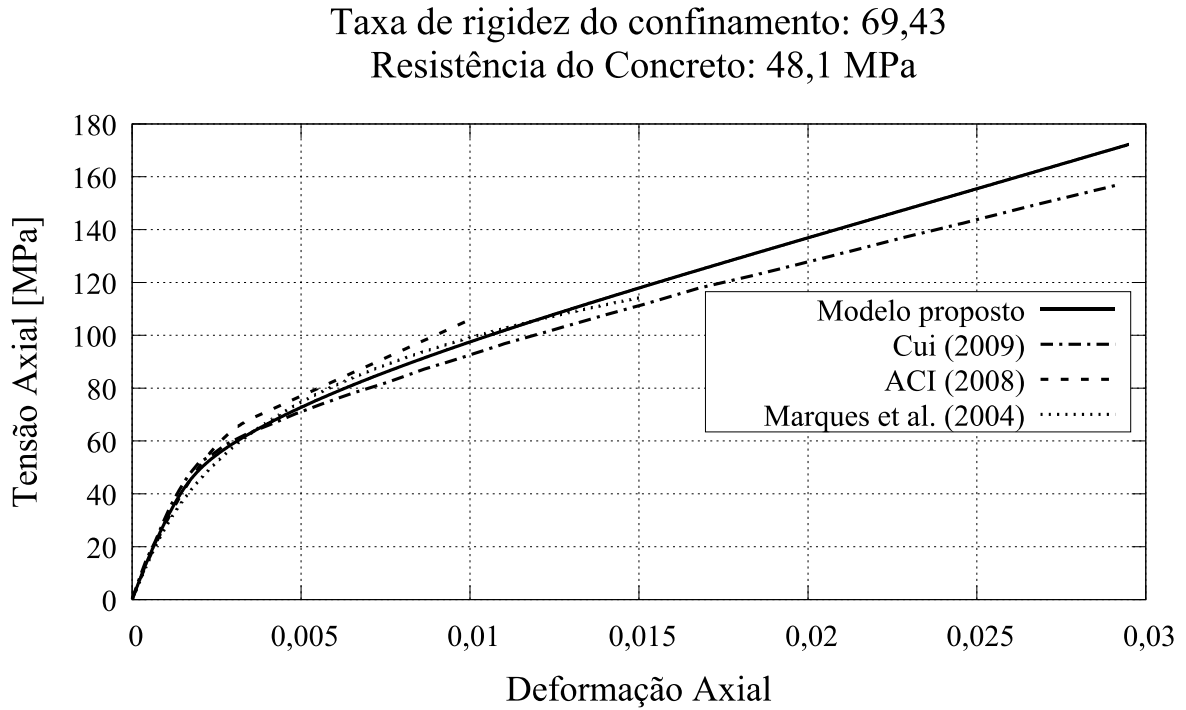
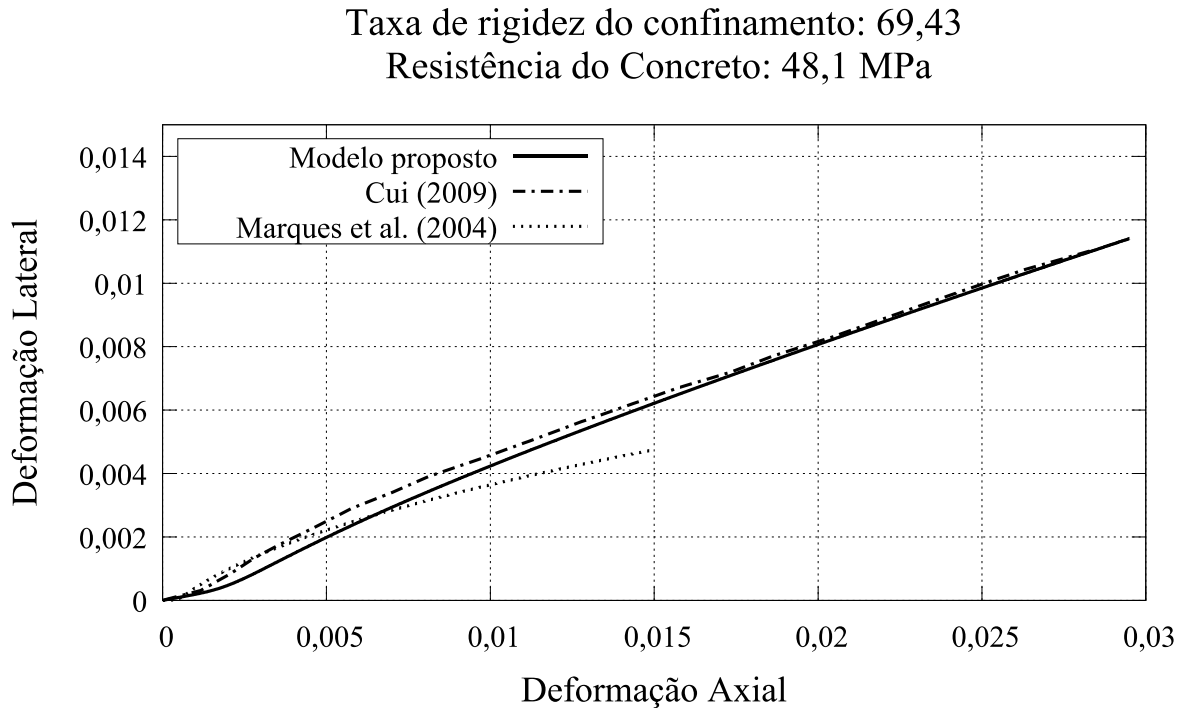


Figura 32 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 69,43$  (axial)



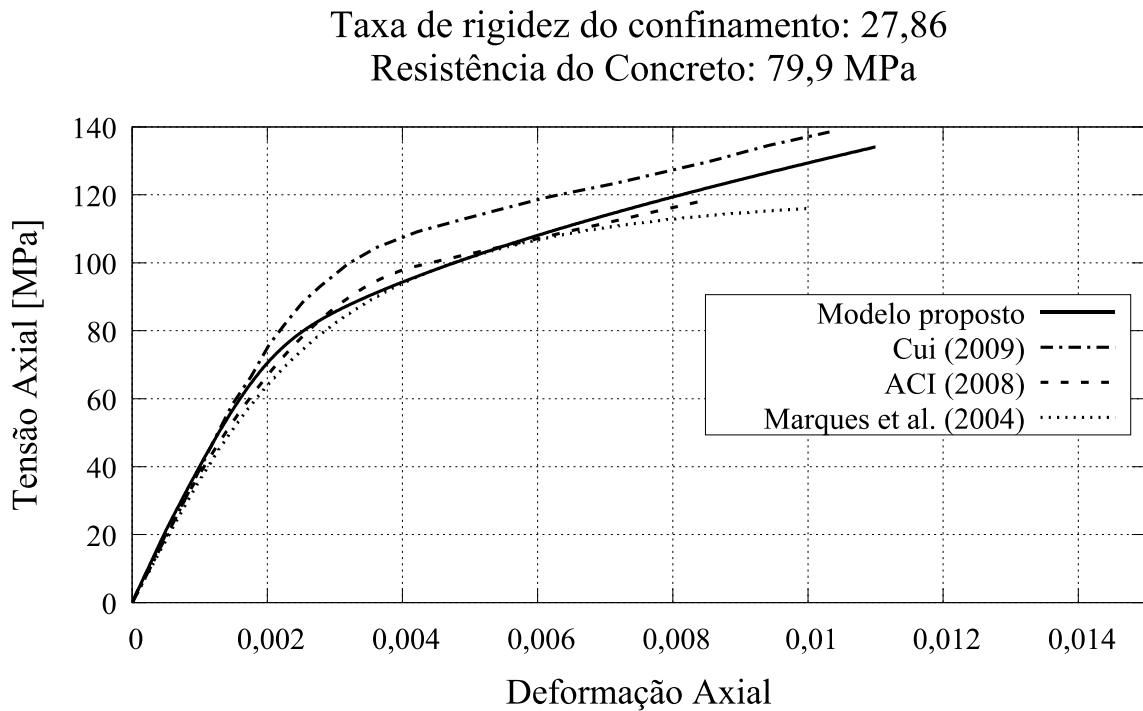
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 33 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 69,43$  (lateral)



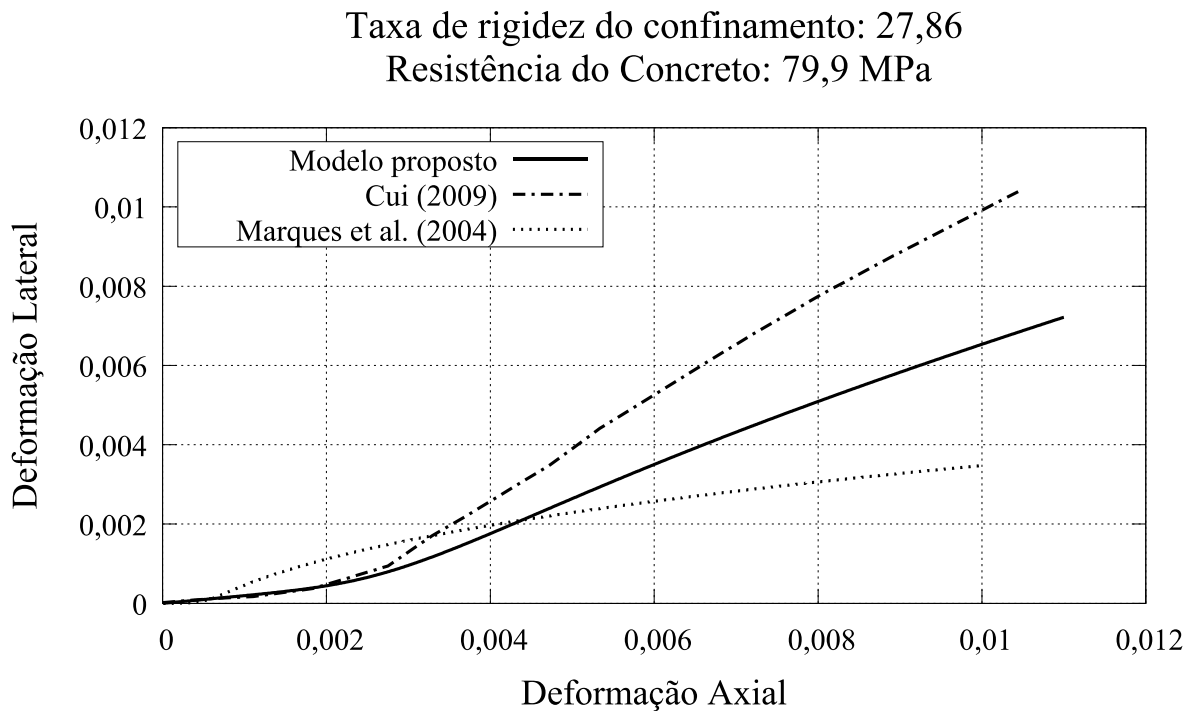
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 34 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 27,86$  (axial)



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 35 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 27,86$  (lateral)



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 36 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 41,80$  (axial)

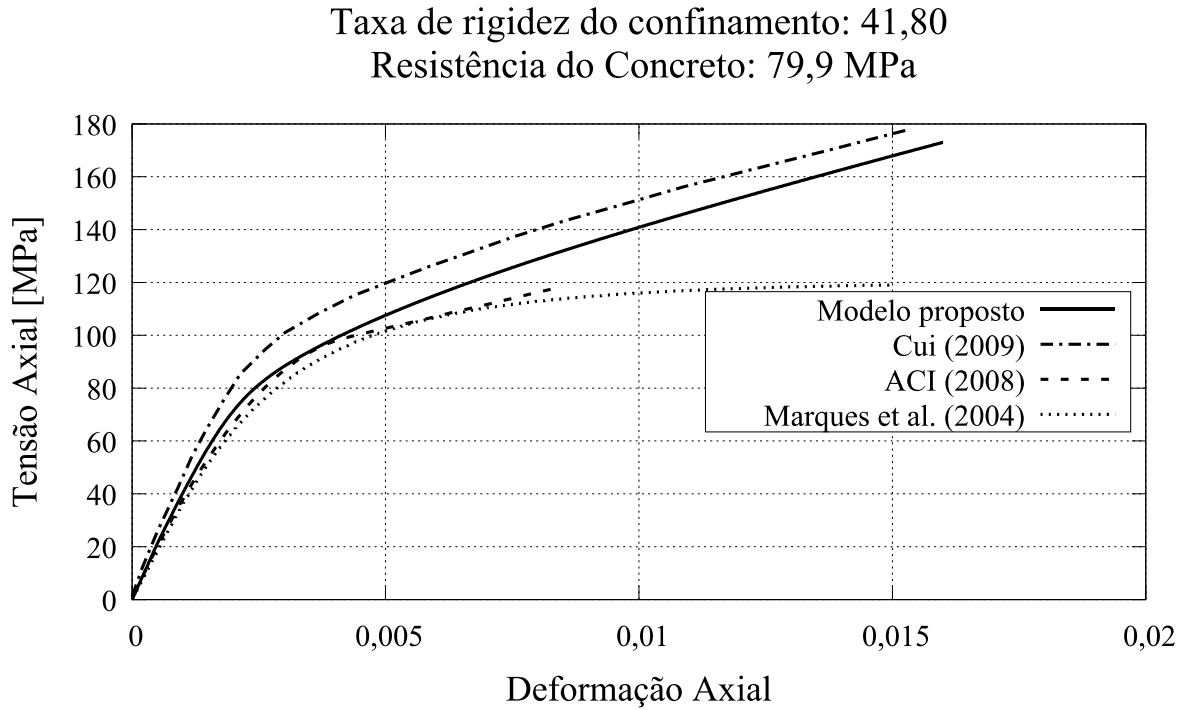
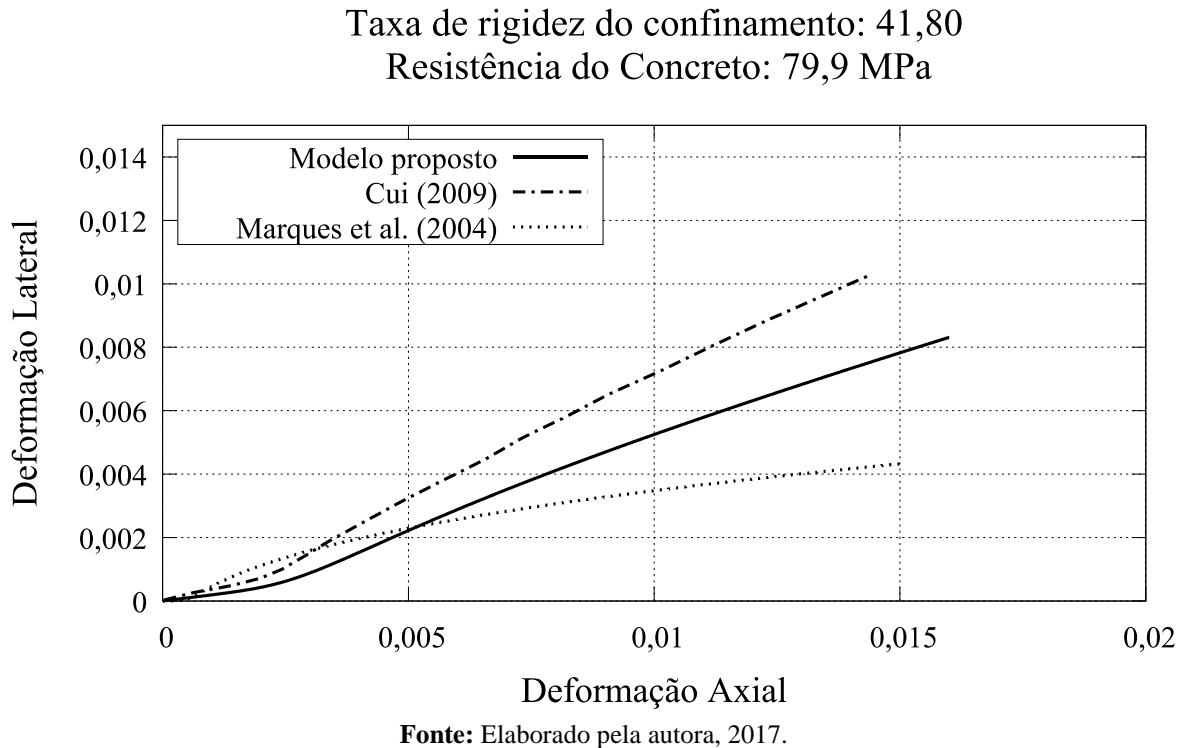


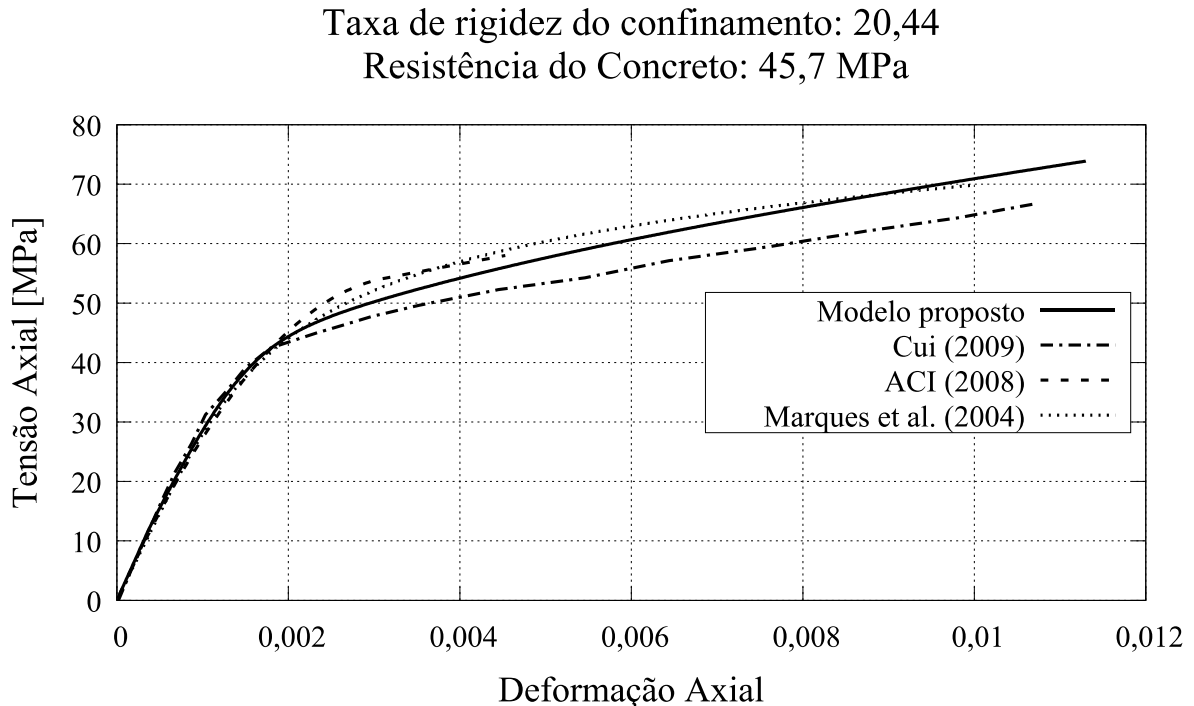
Figura 37 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFC e  $\rho = 41,80$  (lateral)



Para o concreto de resistência média, observa-se uma boa concordância dos resultados experimentais com o modelo proposto e com os demais modelos analisados. Para o concreto com maior resistência observa-se uma menor aproximação entre os resultados experimentais e os modelos teóricos. Considera-se o nível de aproximação obtido nestes exemplos, pelo modelo proposto, como aceitáveis, considerando as aproximações inerentes ao tipo de problema e à obtenção dos resultados experimentais.

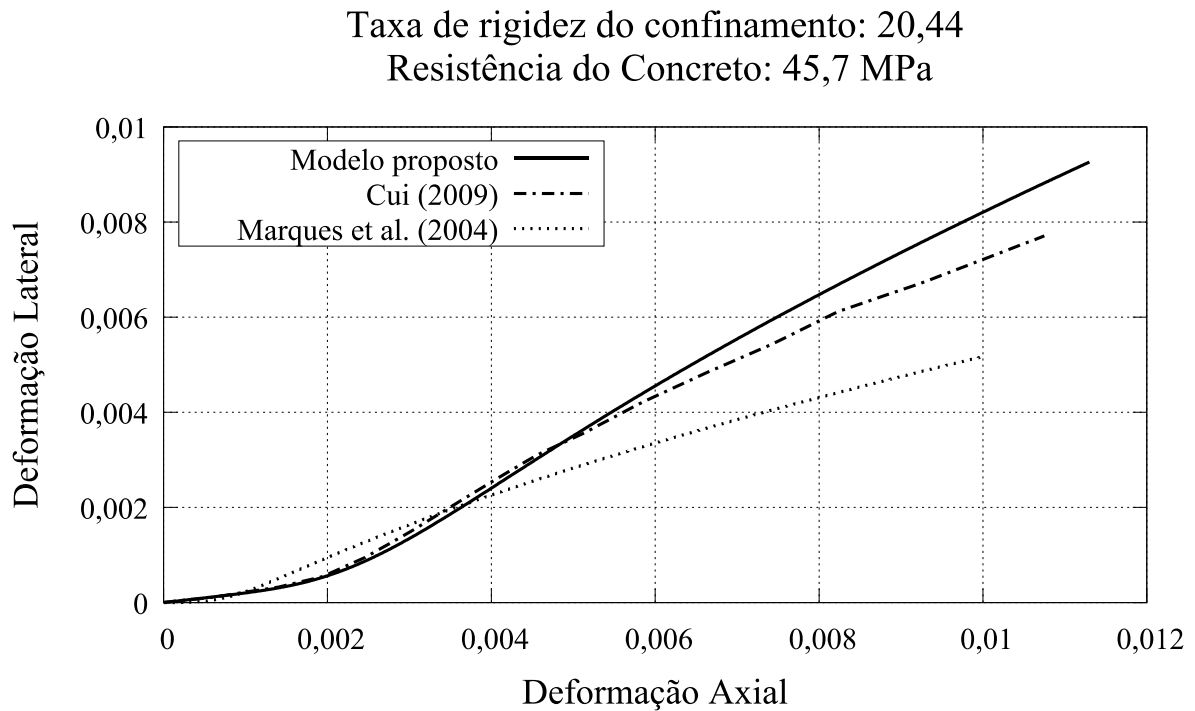
As Figuras 38 a 45 apresentam comparações entre resultados dos modelos teóricos e experimentais para os casos de encamisamento com PRFHM.

**Figura 38 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 20,44$  (axial)**



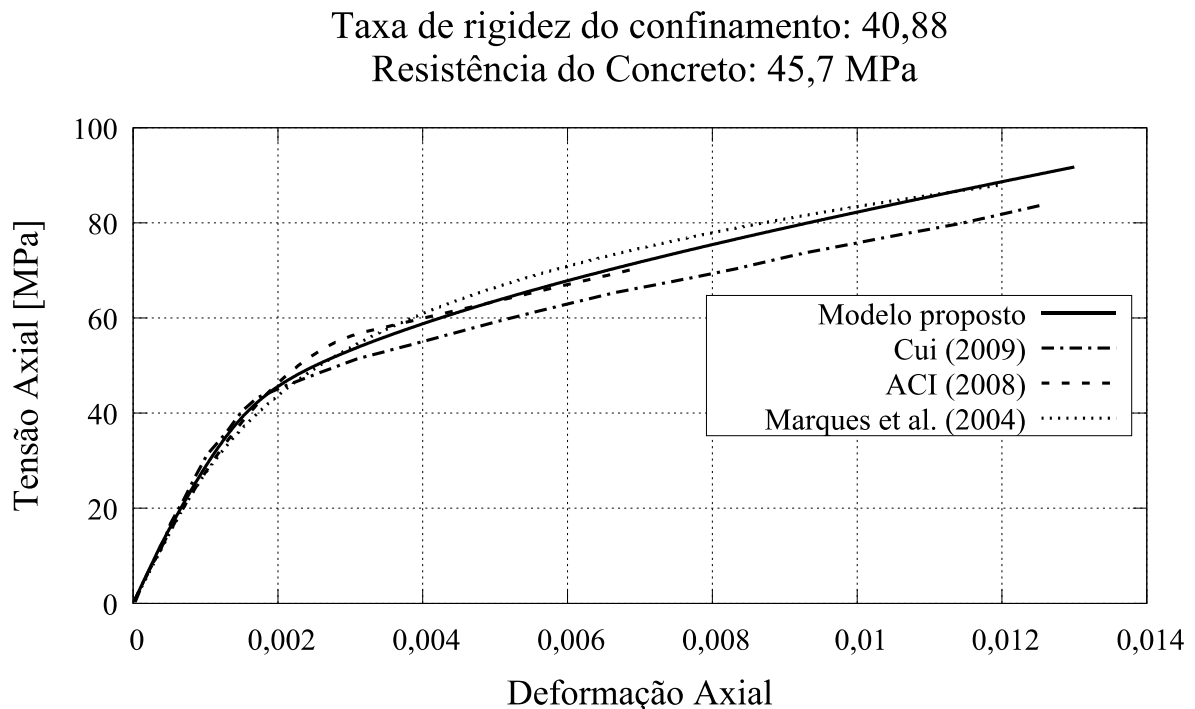
**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 39 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 20,44$  (lateral)**



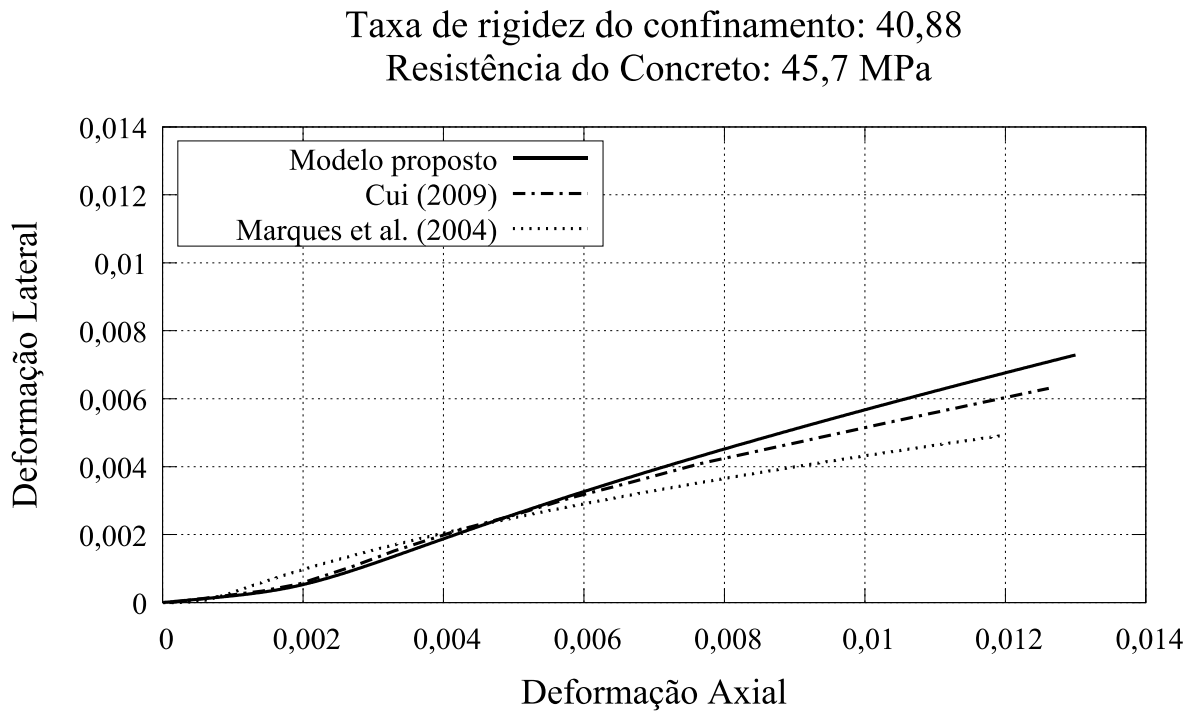
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 40 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 40,88$  (axial)**

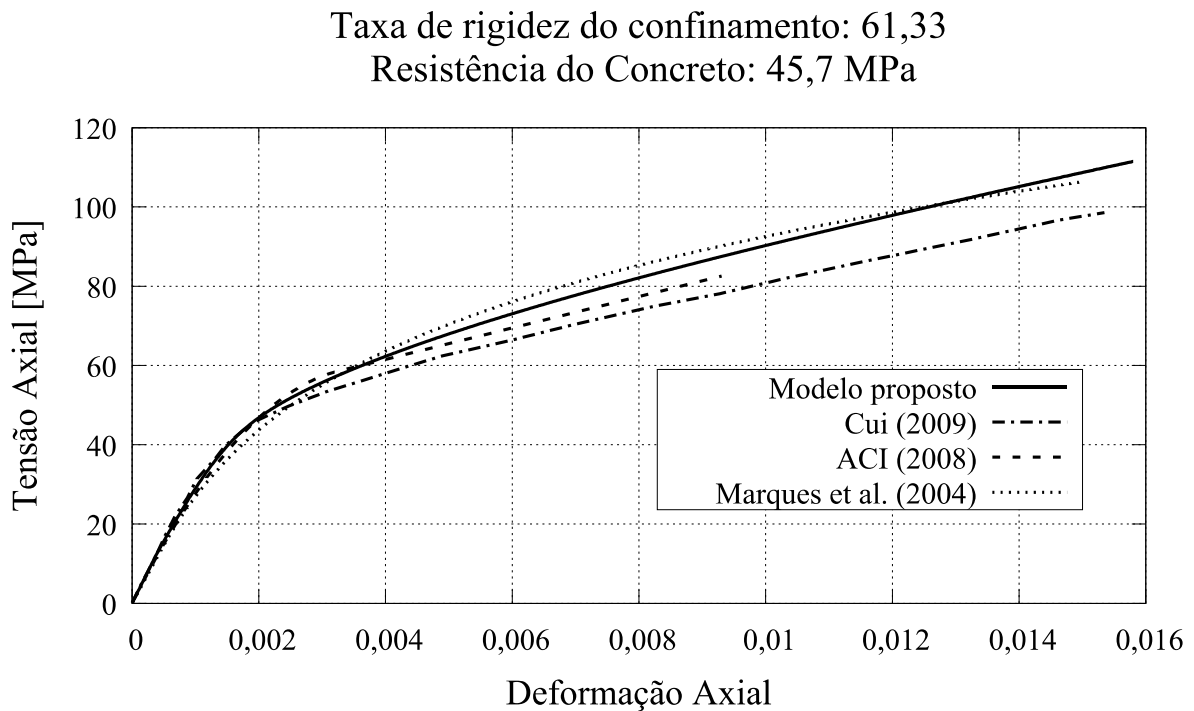


Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 41 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 40,88$  (lateral)**

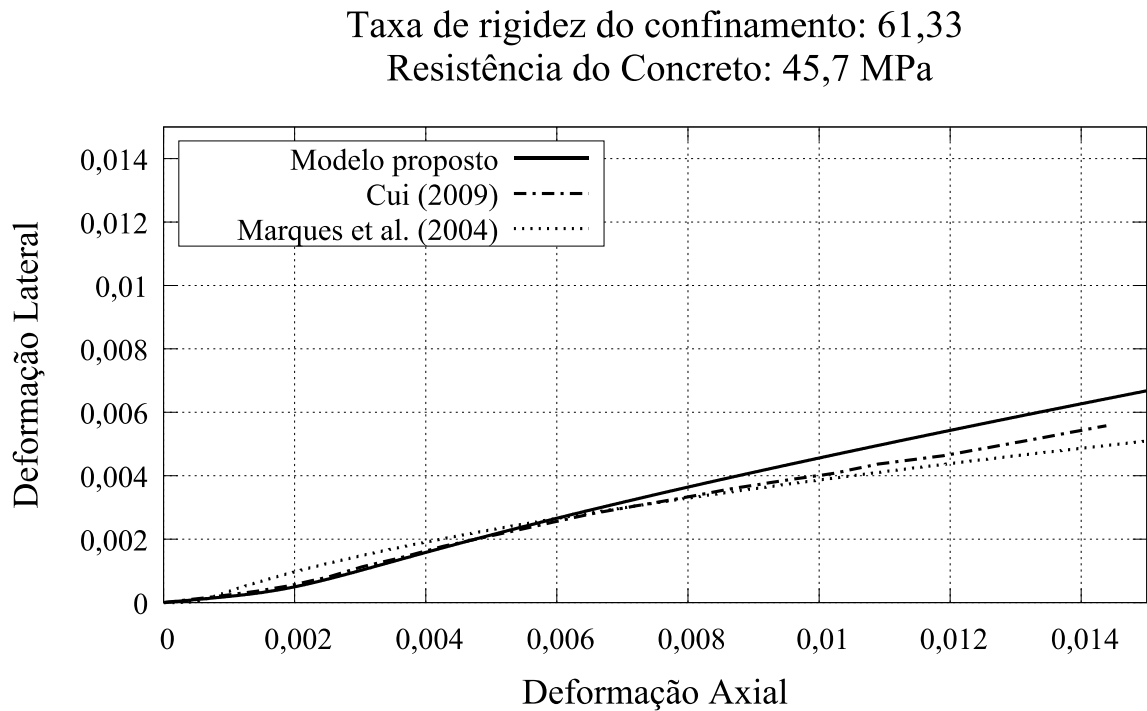


**Figura 42 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 61,33$  (axial)**



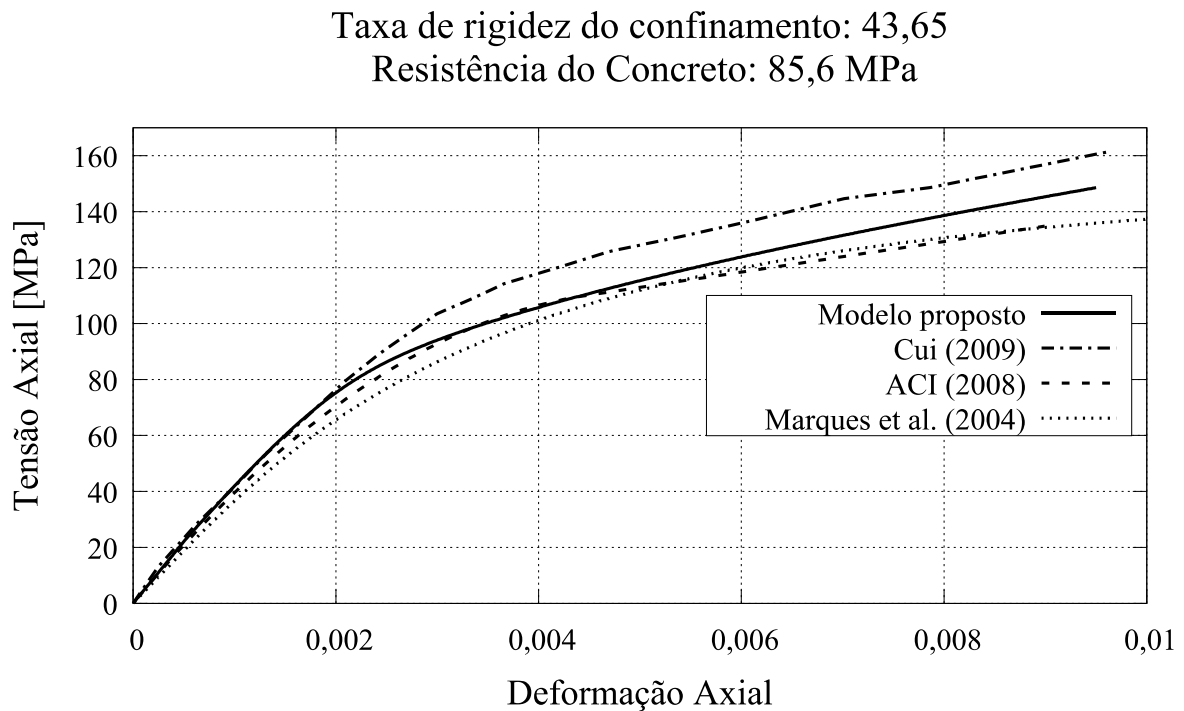


**Figura 43 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 61,33$  (lateral)**



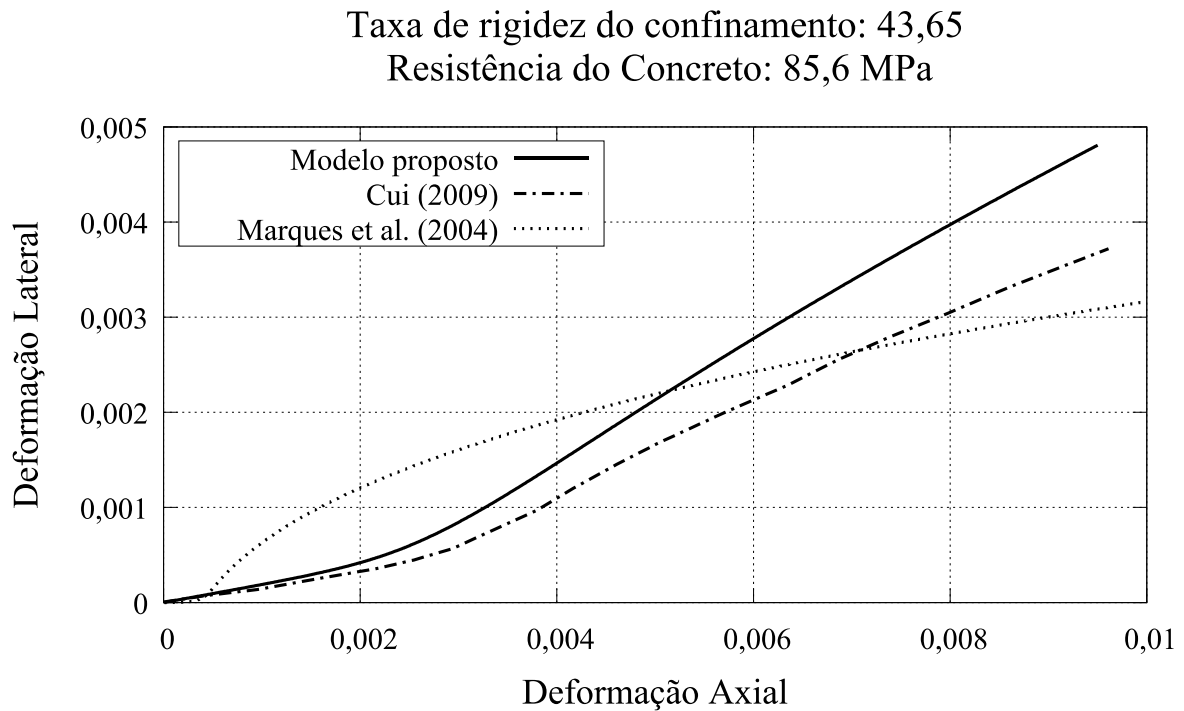
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 44 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 43,65$  (axial)**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 45 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFHM e  $\rho = 43,65$  (lateral)**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

Para o concreto de resistência média, observa-se que existe uma aproximação razoável dos resultados experimentais com aqueles fornecidos pelo modelo proposto, tanto para a curva tensão axial-deformação axial quanto para a curva deformação lateral-deformação axial. Os modelos de MARQUES *et al.* (2004) e ACI (2008) também apresentaram resultados razoavelmente próximos aos valores experimentais.

Para o concreto de alta resistência notou-se um comportamento similar ao observado para o PRFC, o resultado experimental se afastou um pouco dos modelos analisados, enquanto eles ficaram próximos entre si.

As Figuras 46 a 51 referem-se às análises feitas com os resultados de CUI (2009) para as colunas encamisadas com PRFST.

Figura 46 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e  $\rho = 7,73$  (axial)

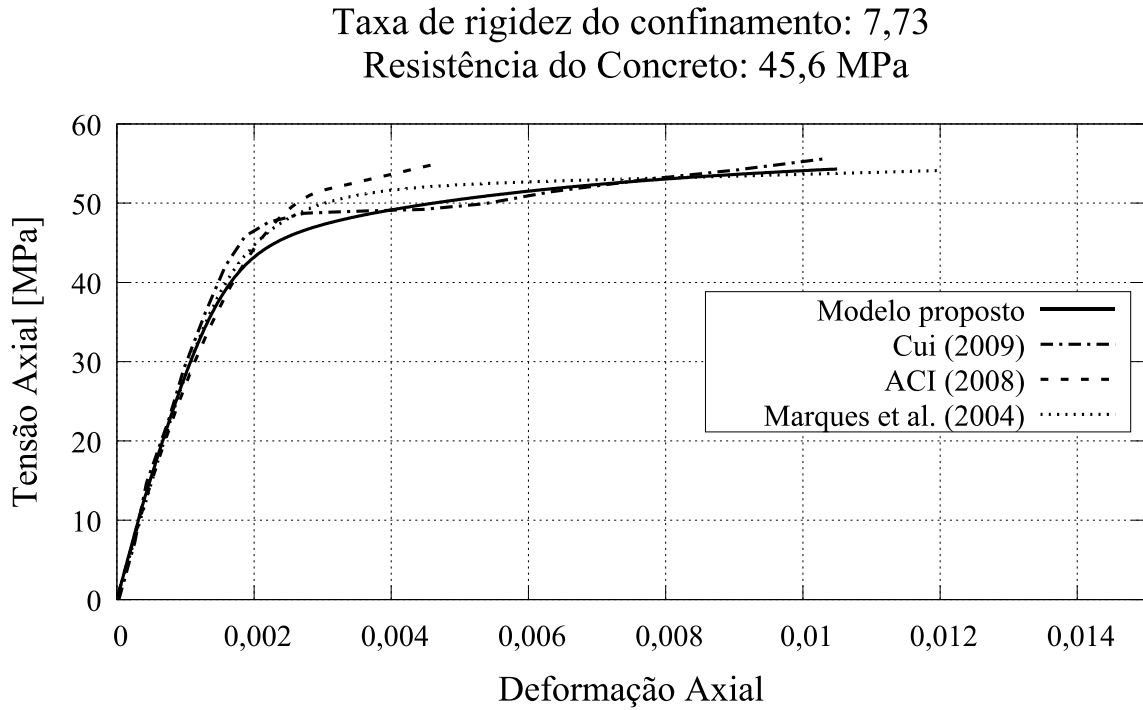
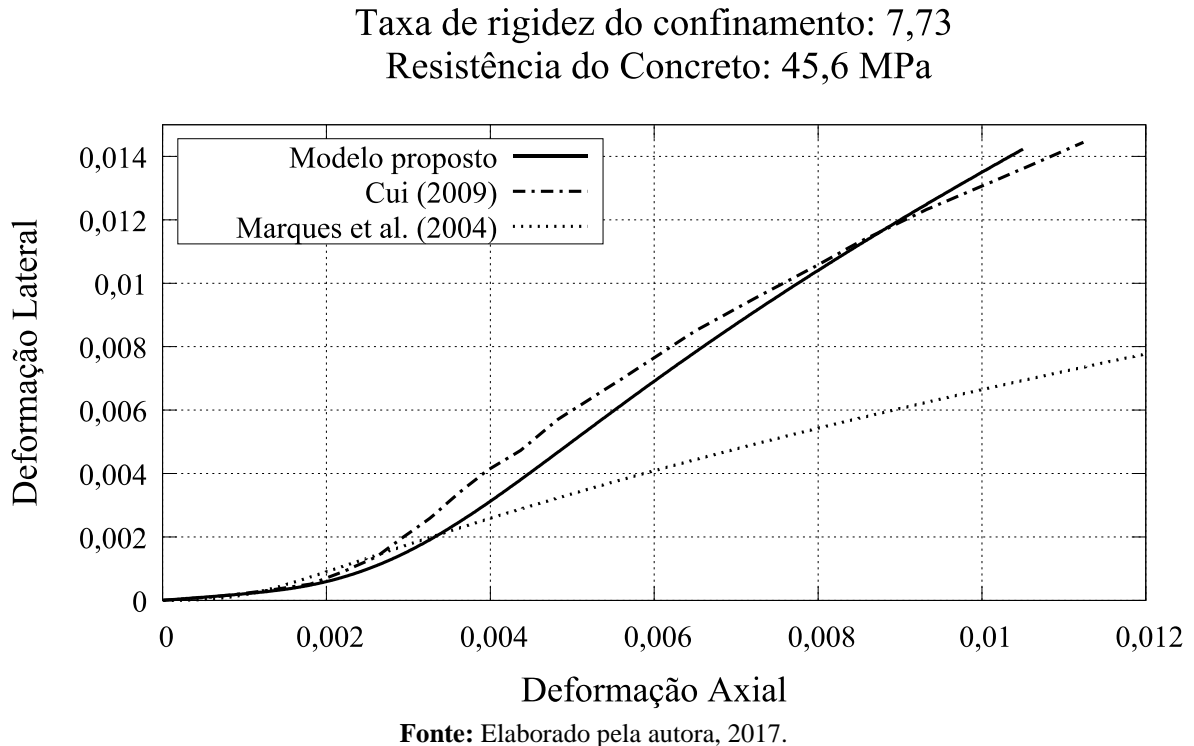
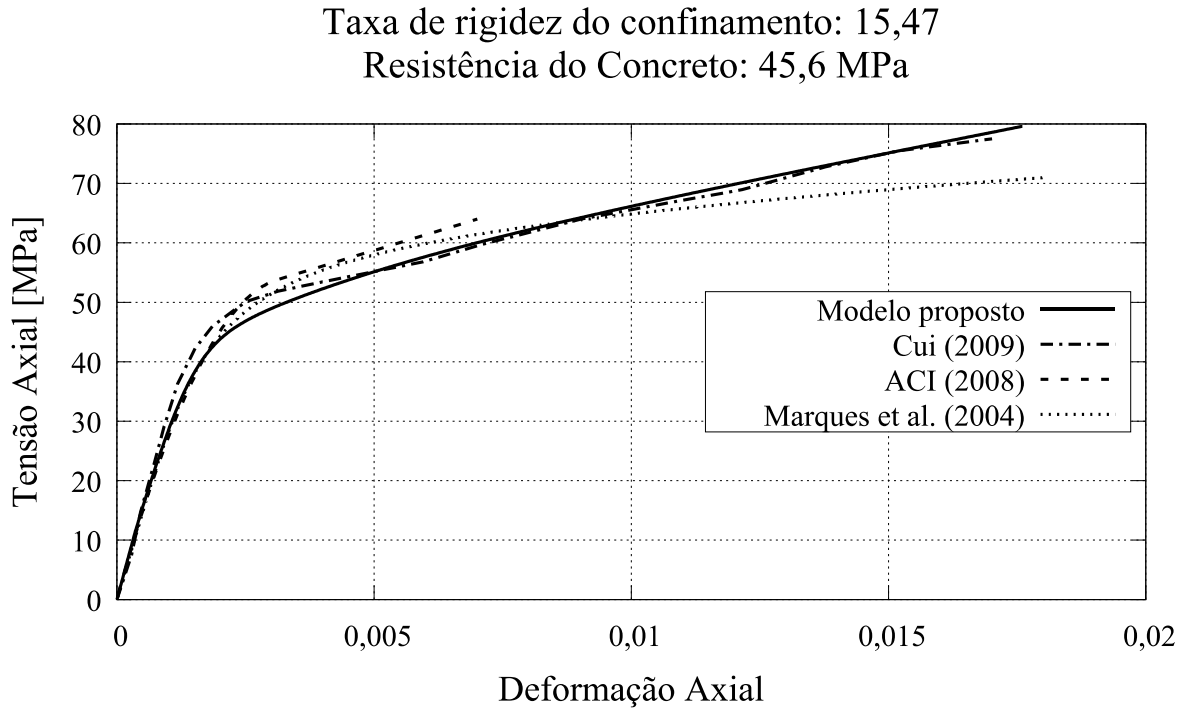


Figura 47 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e  $\rho = 7,73$  (lateral)

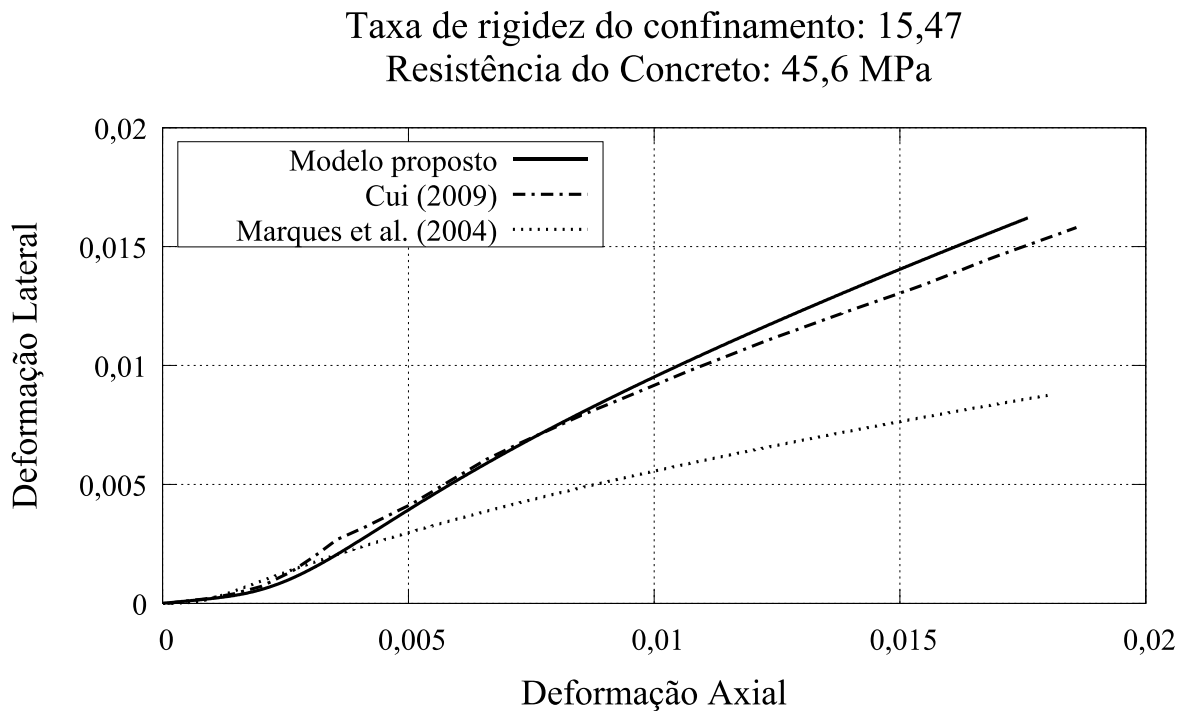


**Figura 48 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e  $\rho = 15,47$  (axial)**



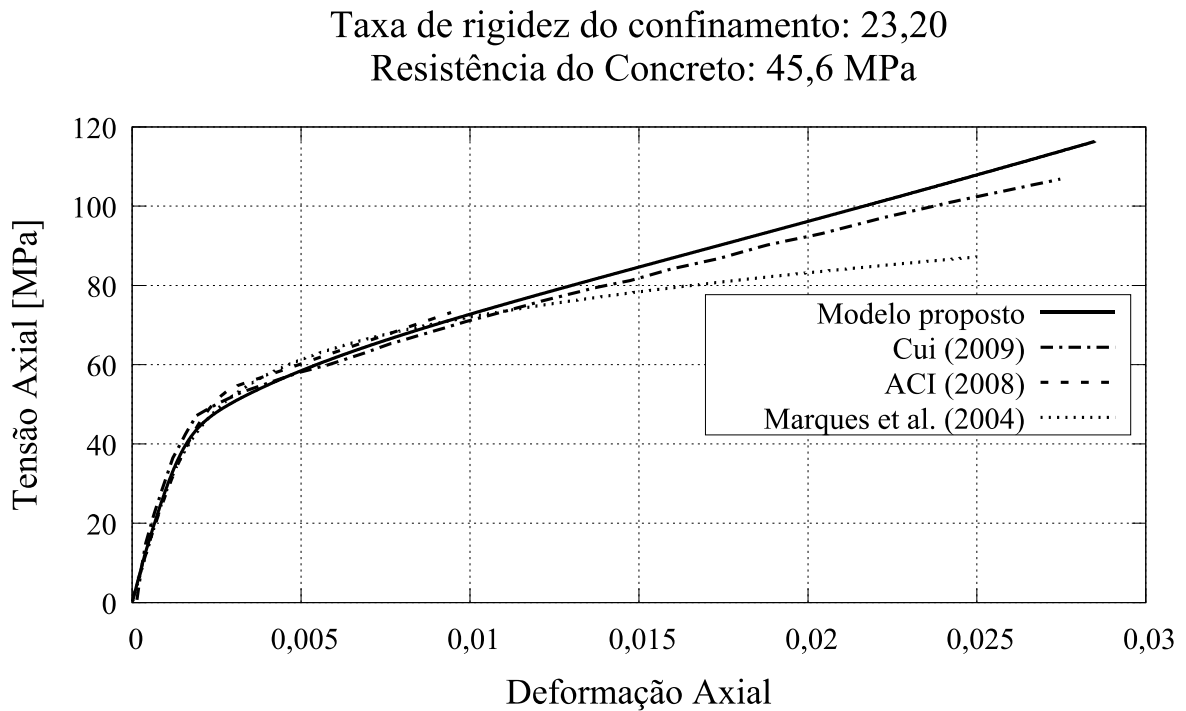
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 49 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e  $\rho = 15,47$  (lateral)**



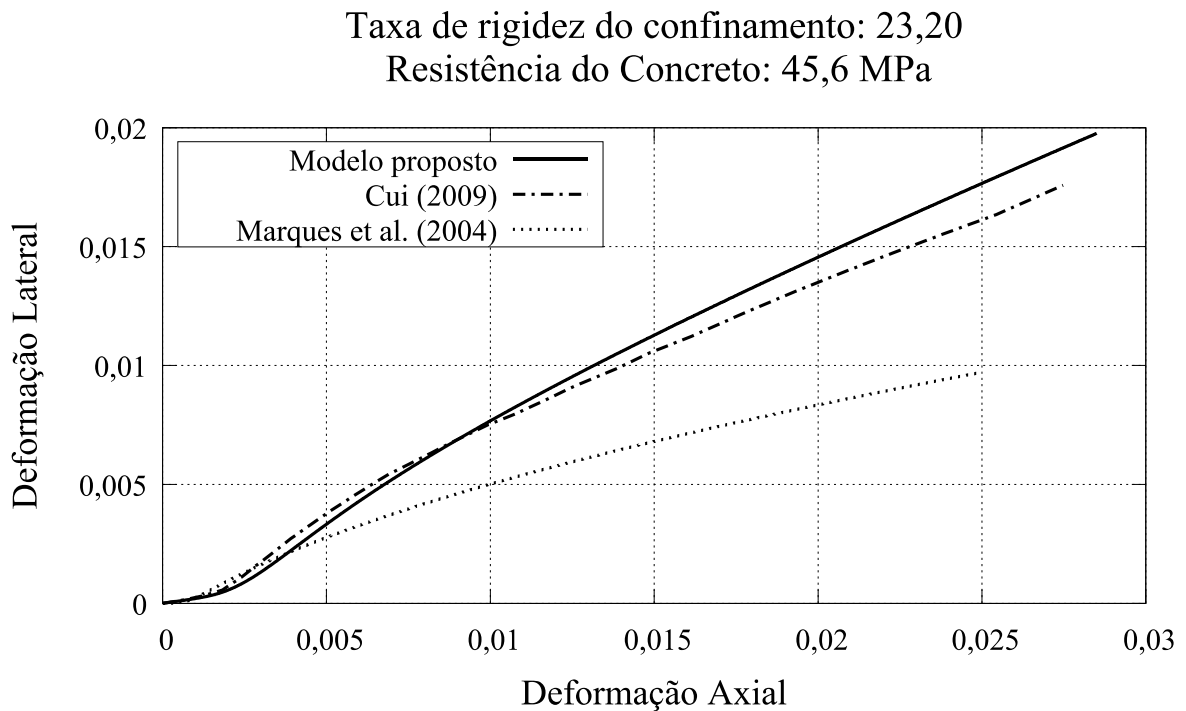
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 50 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e  $\rho = 23,20$  (axial)**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 51 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFST e  $\rho = 23,20$  (lateral)**

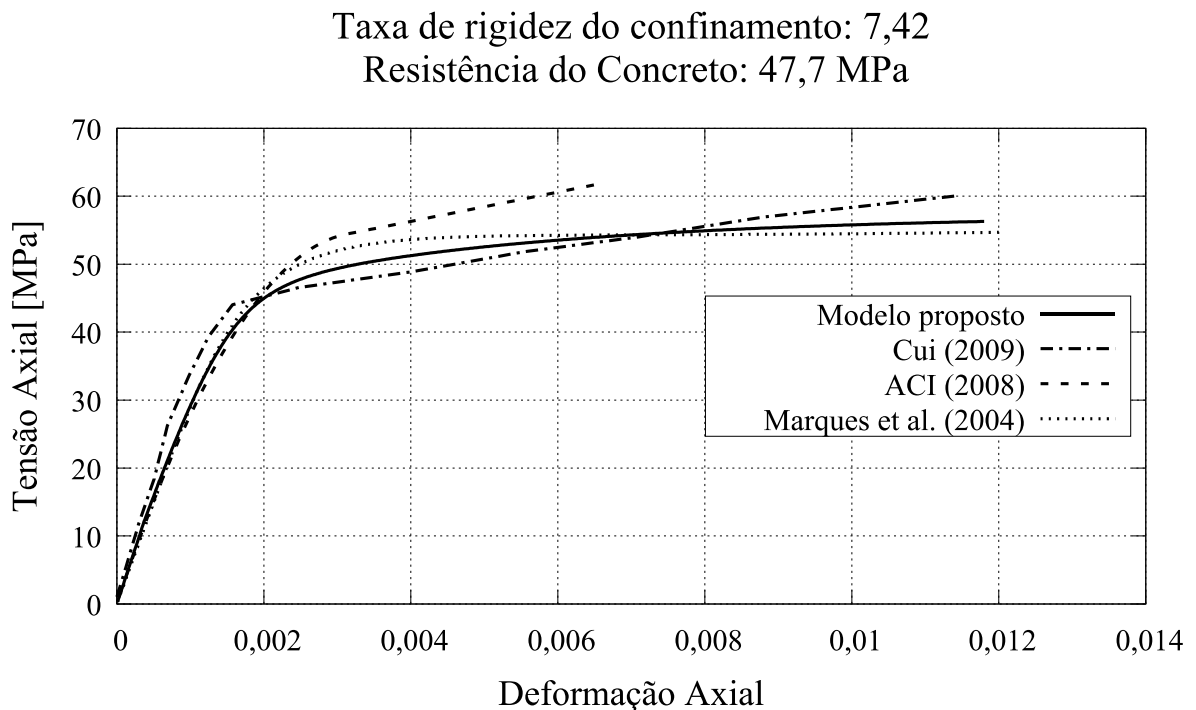


Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

As Figuras 46 a 51 mostram uma ótima concordância entre os resultados experimentais e o modelo proposto. Observa-se que os demais modelos analisados também apresentaram bons resultados em relação aos experimentais, todavia, o modelo proposto demonstrou ser mais eficiente na descrição do comportamento das citadas colunas.

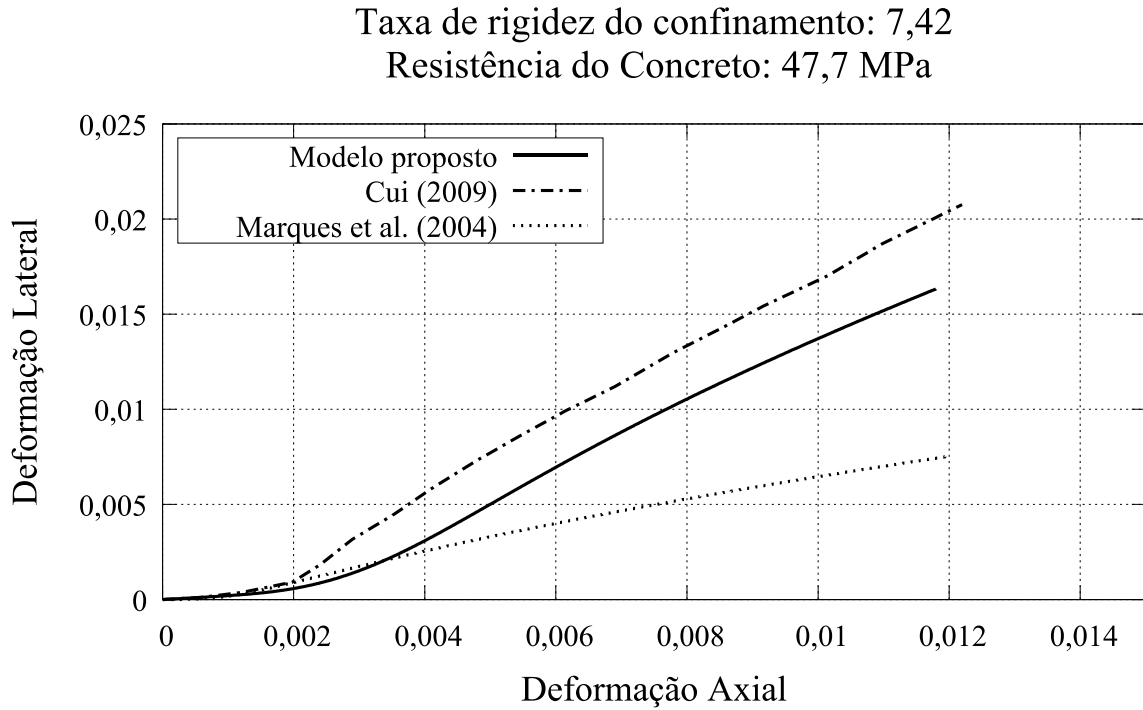
As Figuras 52 a 57 referem-se às análises feitas com os resultados de CUI (2009) para as camisas de PRFG.

**Figura 52 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e  $\rho = 7,42$  (axial)**



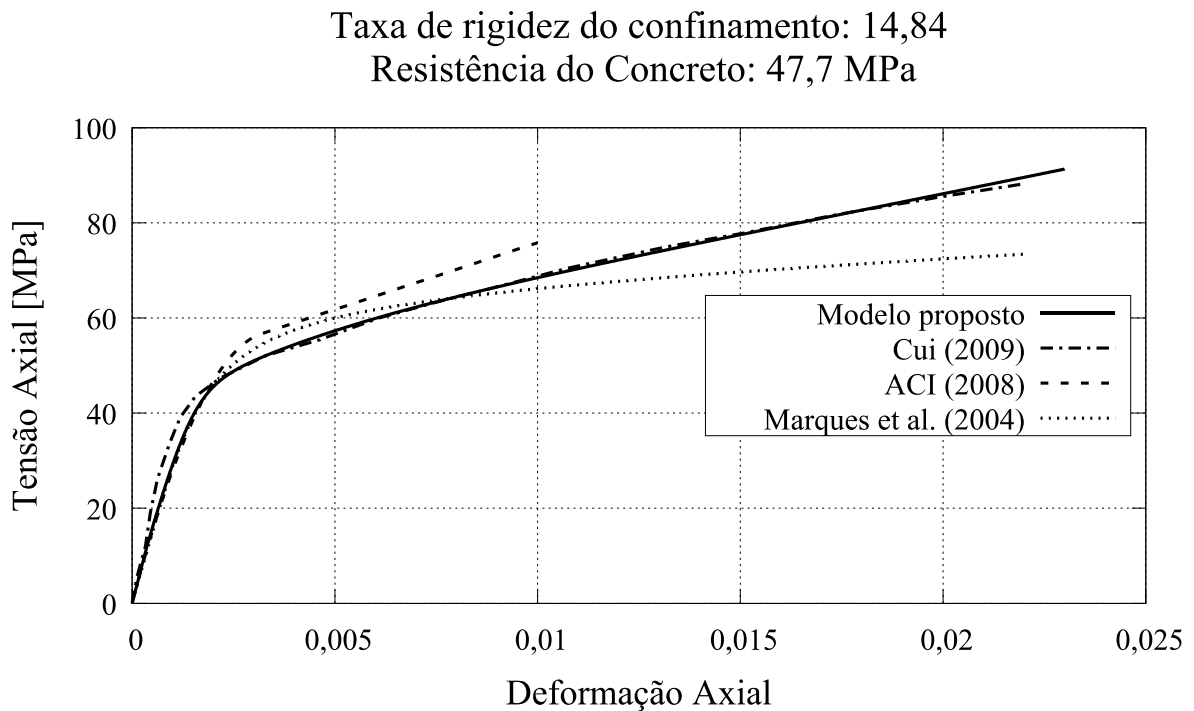
**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 53 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e  $\rho = 7,42$  (lateral)**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 54 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e  $\rho = 14,84$  (axial)**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 55 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e  $\rho = 14,84$  (lateral)

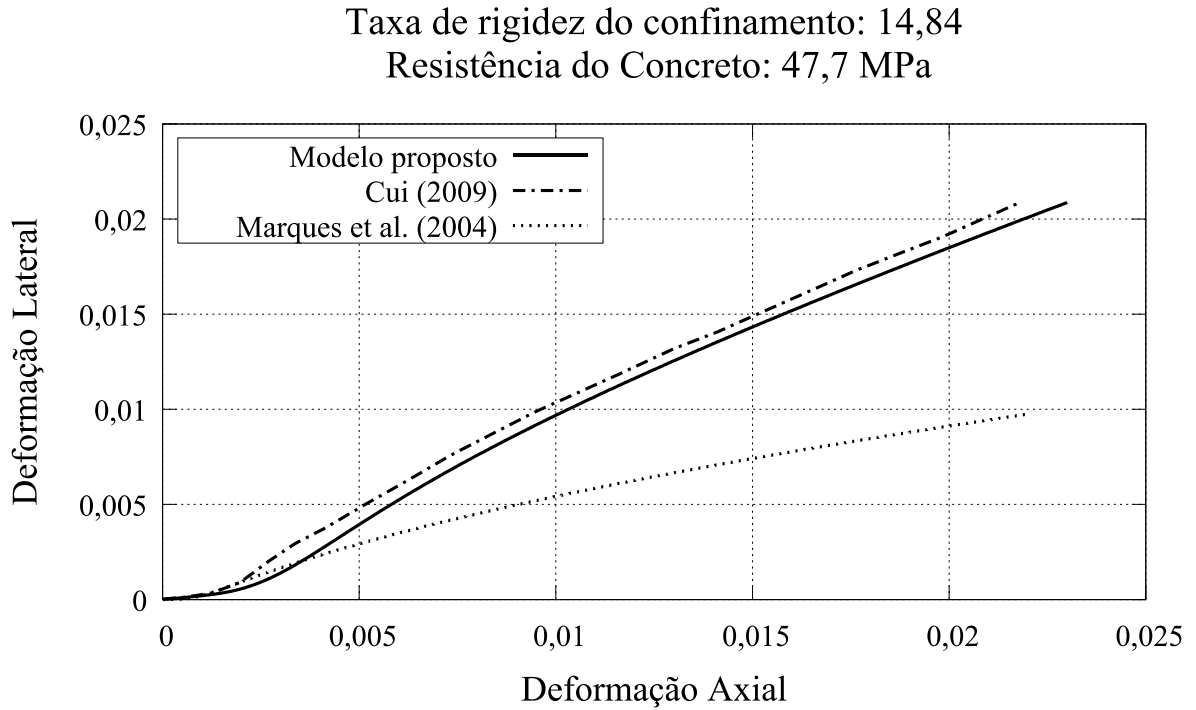
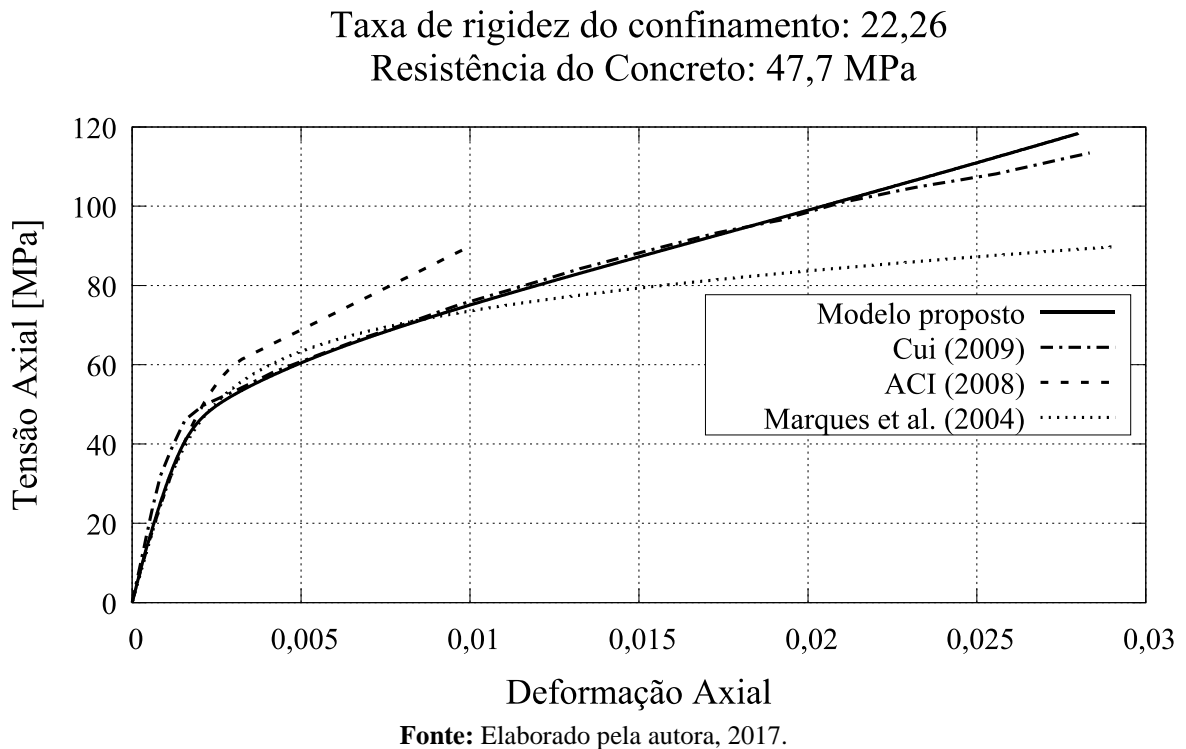
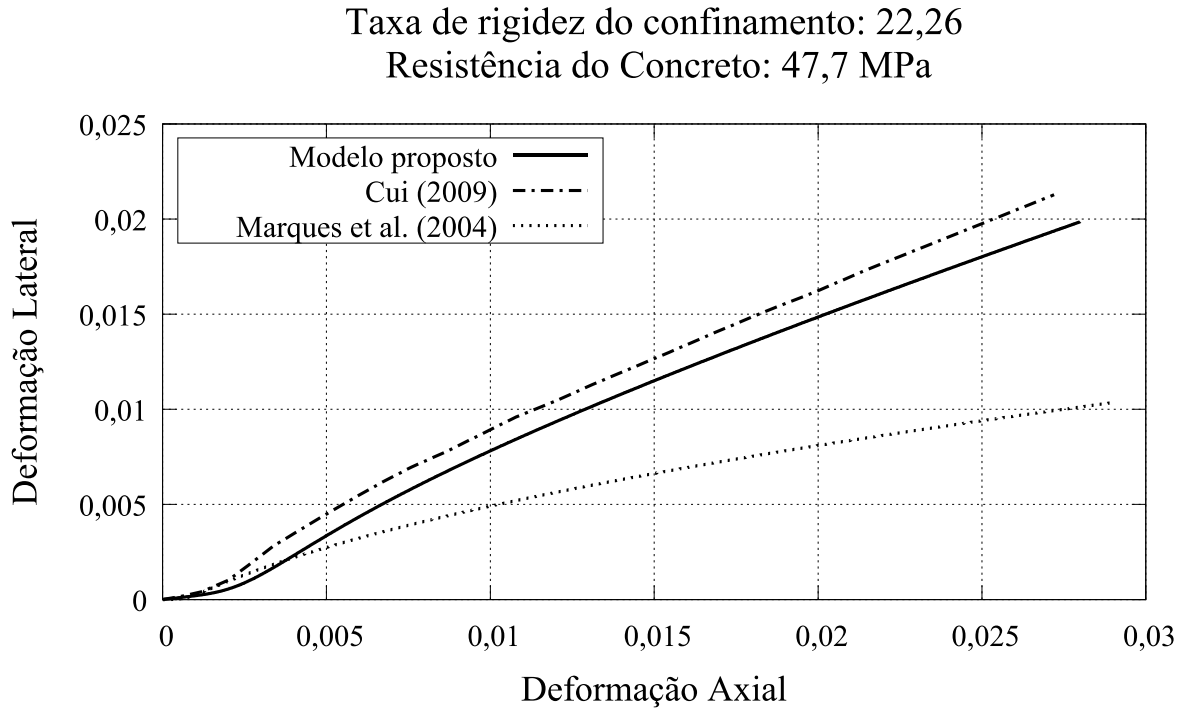


Figura 56 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e  $\rho = 22,26$  (axial)





**Figura 57 – Comparação com resultados de CUI (2009), camisa de PRFG e  $\rho = 22,26$  (lateral)**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

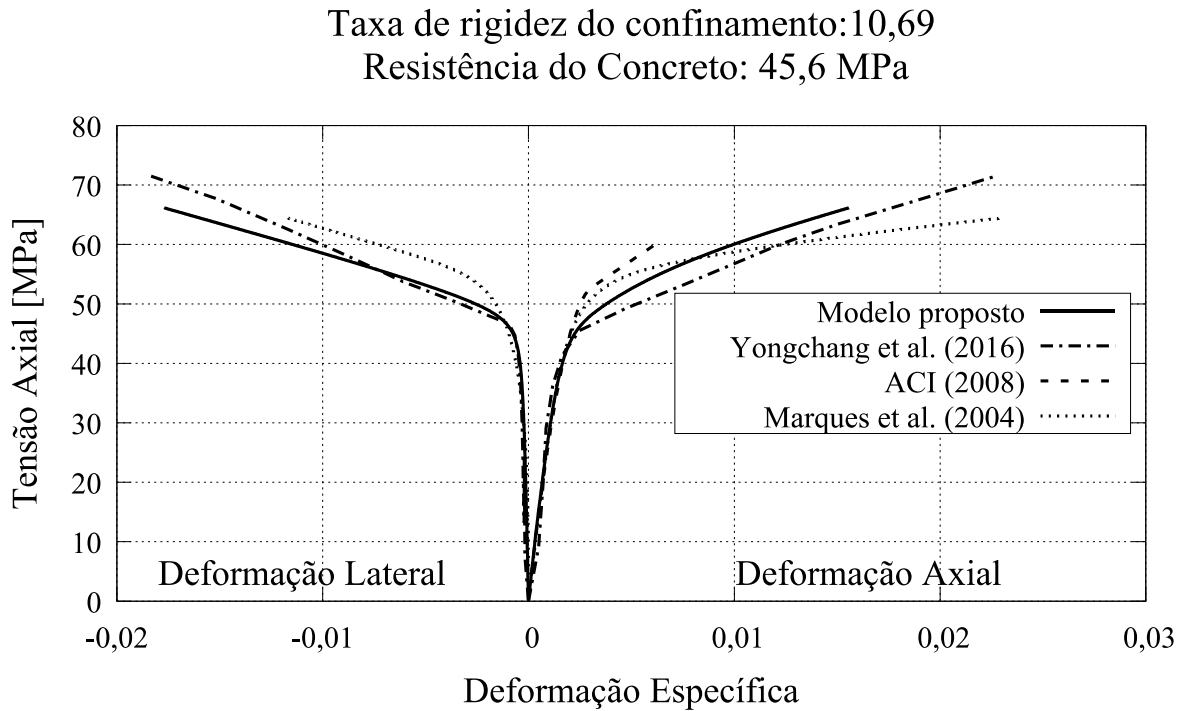
As Figuras 52 a 57 mostram uma ótima concordância entre os resultados experimentais e o modelo proposto, excetuando-se o caso da Figura 53, que essa concordância não foi tão grande como nos demais exemplos, mas a diferença ainda não foi muito acentuada. O modelo de MARQUES *et al.* (2004) apresentou melhores resultados para os testes com menor taxa de rigidez de confinamento.

#### 4.8.3 Resultados de YONGCHANG *et al.* (2016)

YONGCHANG *et al.* (2016) conduziram um estudo experimental sobre o efeito de dano pré-existente em peças de concreto confinado. Foram utilizados dois níveis de resistência de concreto e três níveis de confinamento com polímeros de fibras de carbono, variando o número de camadas. No presente trabalho, os resultados obtidos por esses autores com concreto sem dano pré-existente são comparados com aqueles gerados com o modelo proposto e com os modelos do ACI (2008) e MARQUES *et al.* (2004).

As Figuras 58 a 60 mostram os resultados obtidos para o concreto de menor resistência, e as Figuras 61 a 63 mostram os resultados obtidos para o concreto de maior resistência.

**Figura 58 – Comparação com resultados de YONGCHANG *et al.* (2016) e  $\rho = 10,69$**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

Figura 59 – Comparação com resultados de YONGCHANG *et al.* (2016) e  $\rho = 21,39$

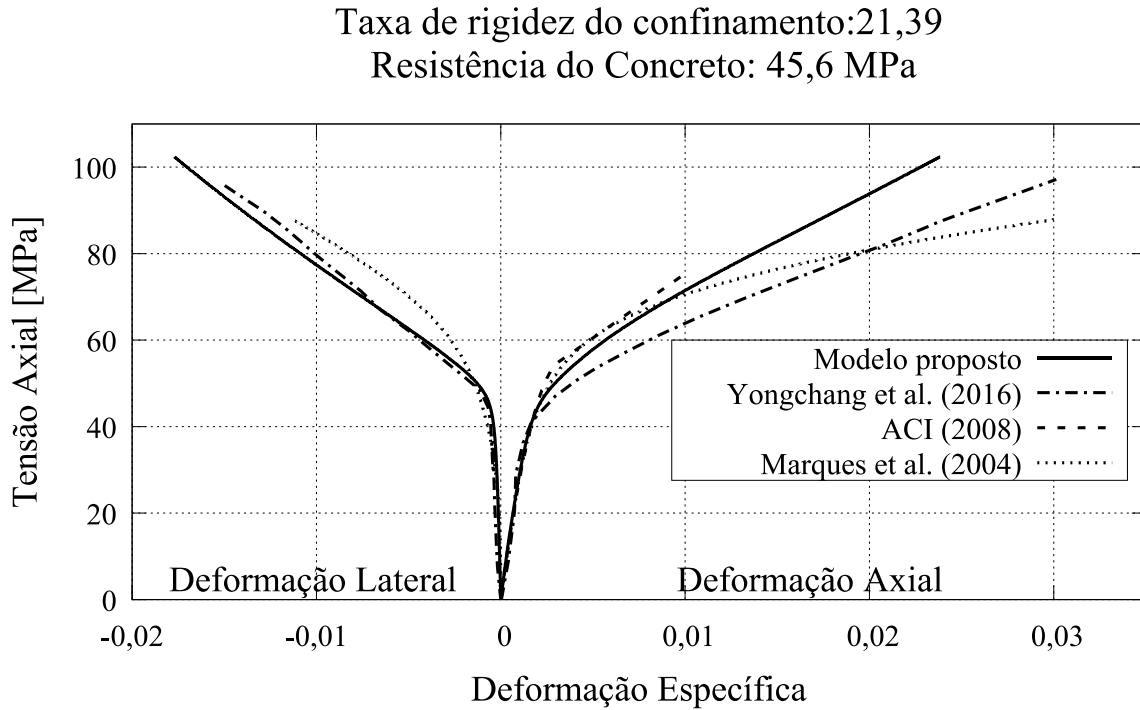
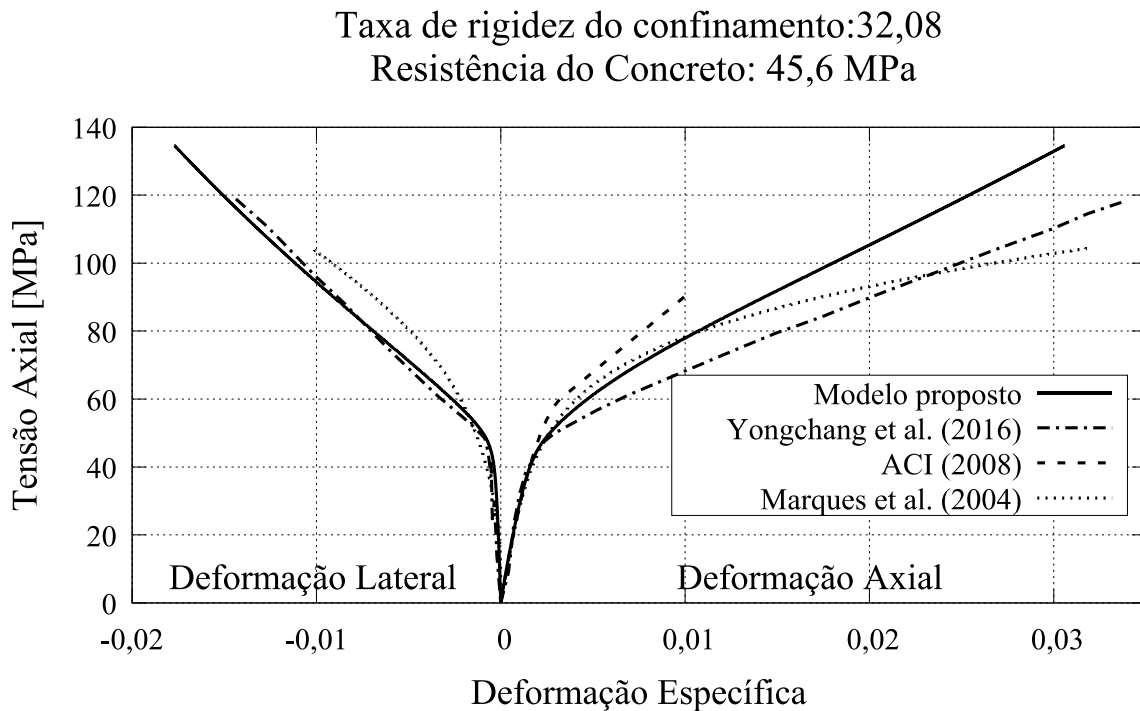
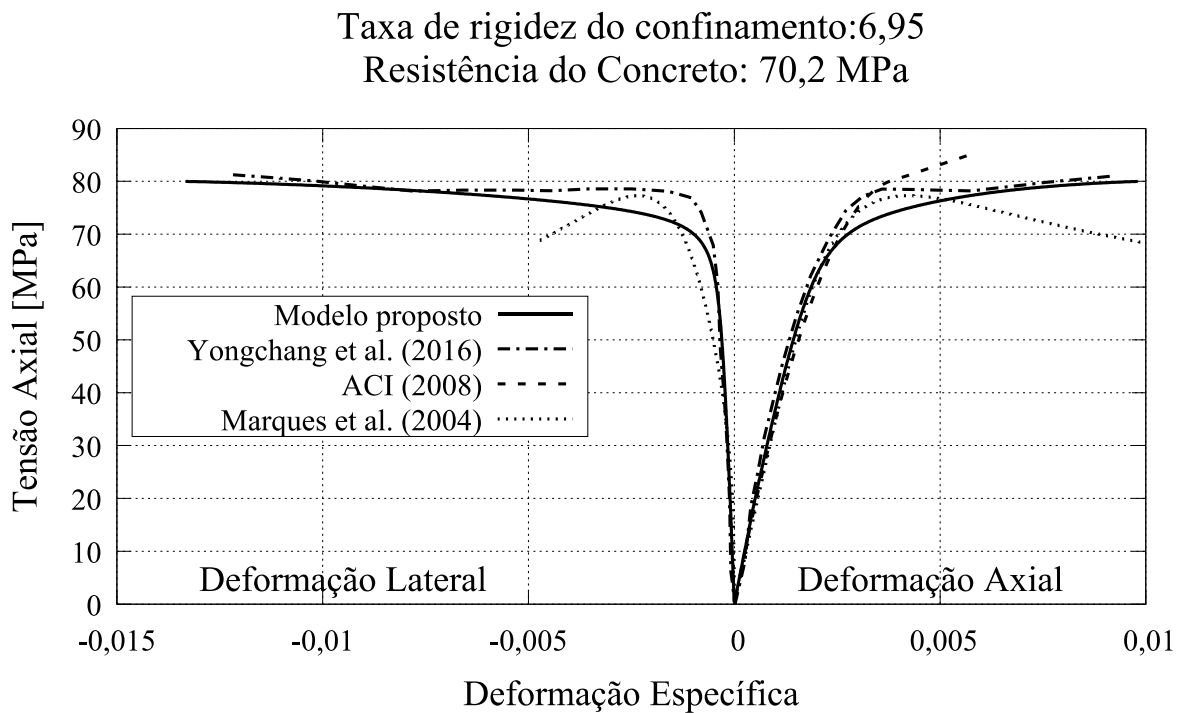


Figura 60 – Comparação com resultados de YONGCHANG *et al.* (2016) e  $\rho = 32,08$



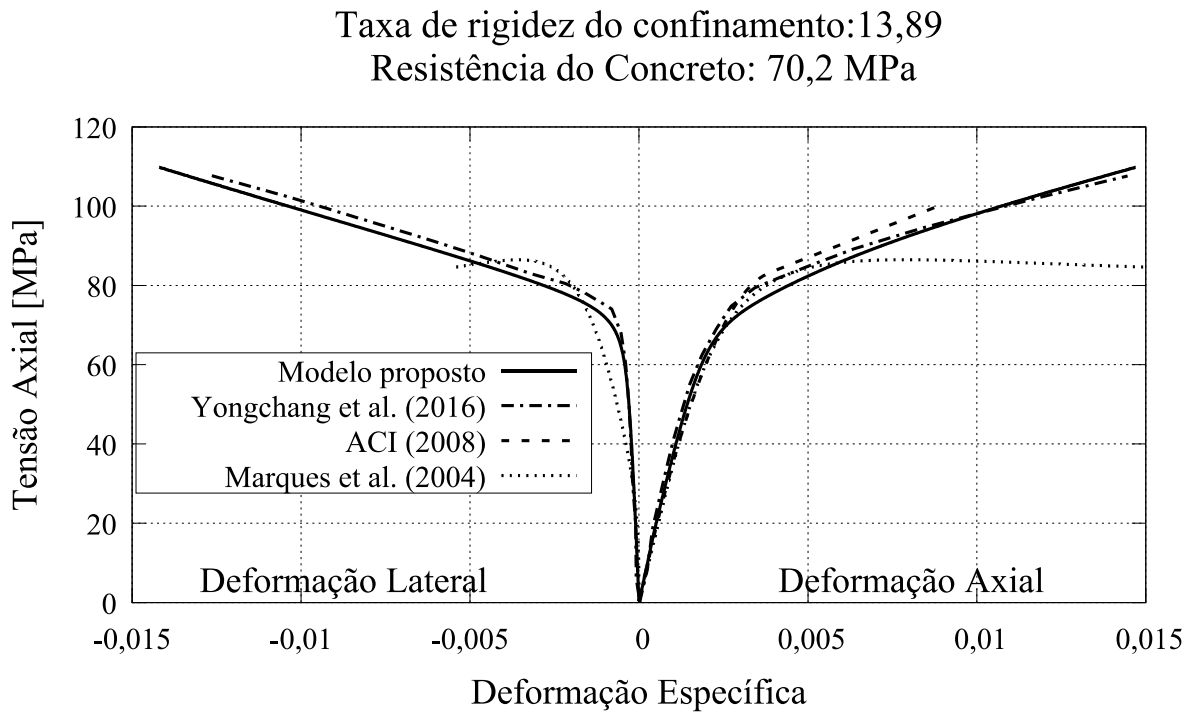
Para o concreto de menor resistência verifica-se uma concordância muito boa dos resultados do modelo proposto com os experimentais nas curvas tensão axial-deformação lateral. Para as curvas tensão axial-deformação axial houve um pequeno afastamento dos resultados, principalmente para os exemplos com duas e três camadas de compósitos. Os resultados do modelo de MARQUES *et al.* (2004) apresentaram discrepâncias tanto dos experimentais quanto dos demais modelos, enquanto que os do modelo do ACI (2008) se aproximaram um pouco mais dos resultados do modelo proposto.

**Figura 61 – Comparação com resultados de YONGCHANG *et al.* (2016) e  $\rho = 6,95$**



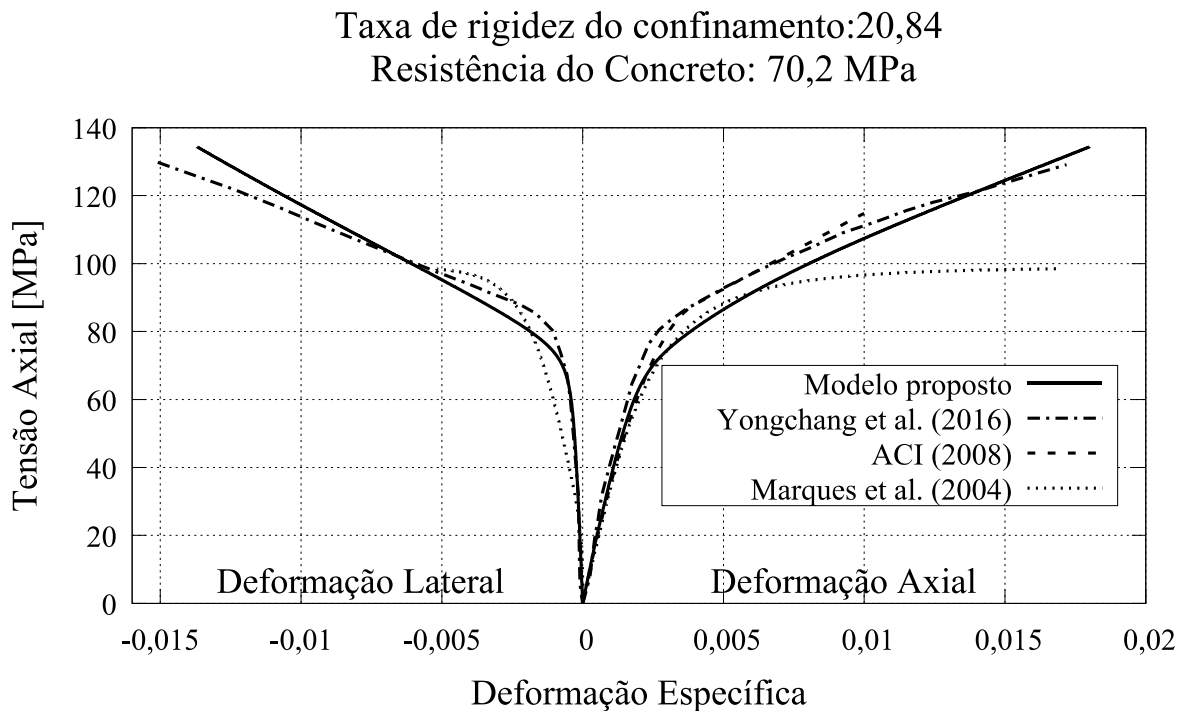
**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 62 – Comparação com resultados de YONGCHANG *et al.* (2016) e  $\rho = 13,89$**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 63 – Comparação com resultados de YONGCHANG *et al.* (2016) e  $\rho = 20,84$**



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Para o concreto de maior resistência verifica-se uma concordância muito boa dos resultados experimentais com os do modelo proposto, para as duas direções da deformação (axial e lateral). Novamente, os resultados do modelo de MARQUES *et al.* (2004) ficaram um pouco mais discordantes dos demais, enquanto que os do ACI (2008) se aproximaram dos resultados do modelo proposto e dos experimentais.

#### 4.8.4 Resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a)

VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) realizaram experimentos em colunas de concreto com diferentes níveis de resistência e de confinamento. No presente trabalho, os dados experimentais obtidos pelos referidos autores são utilizados para comparações com resultados obtidos com o modelo proposto e os modelos do ACI (2008) e de MARQUES *et al.* (2004). Os resultados estão mostrados nas Figuras 64 a 68.

**Figura 64 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e  $\rho = 10,41$**

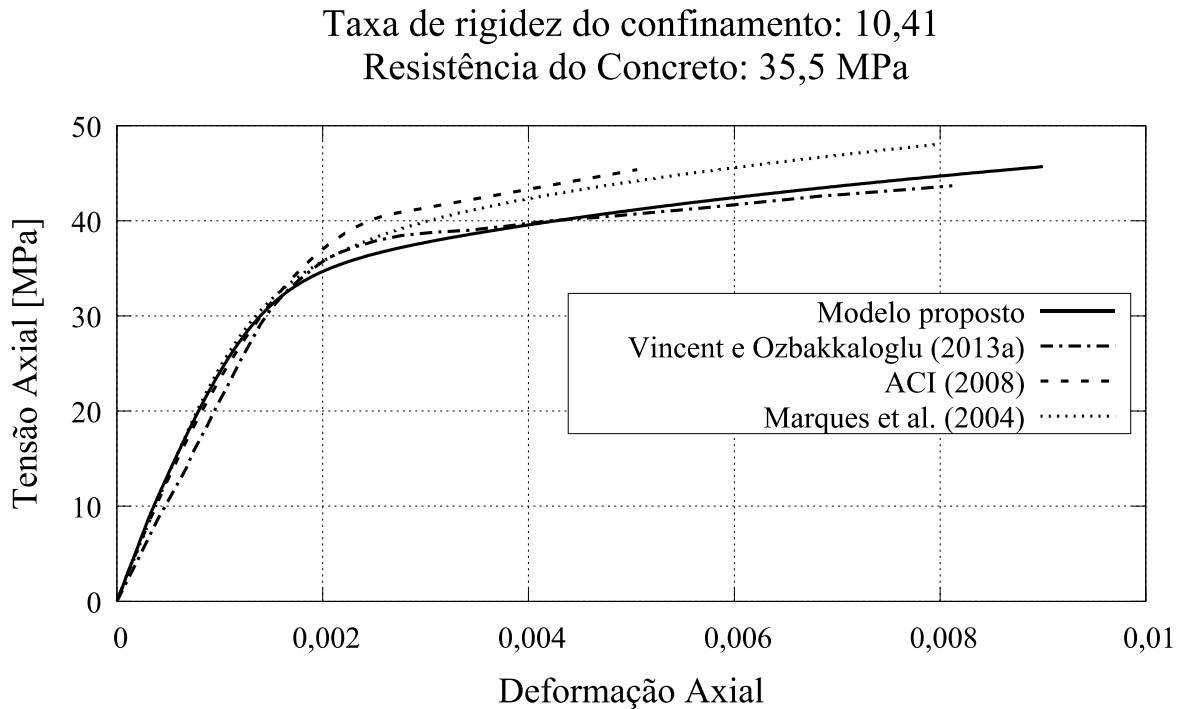
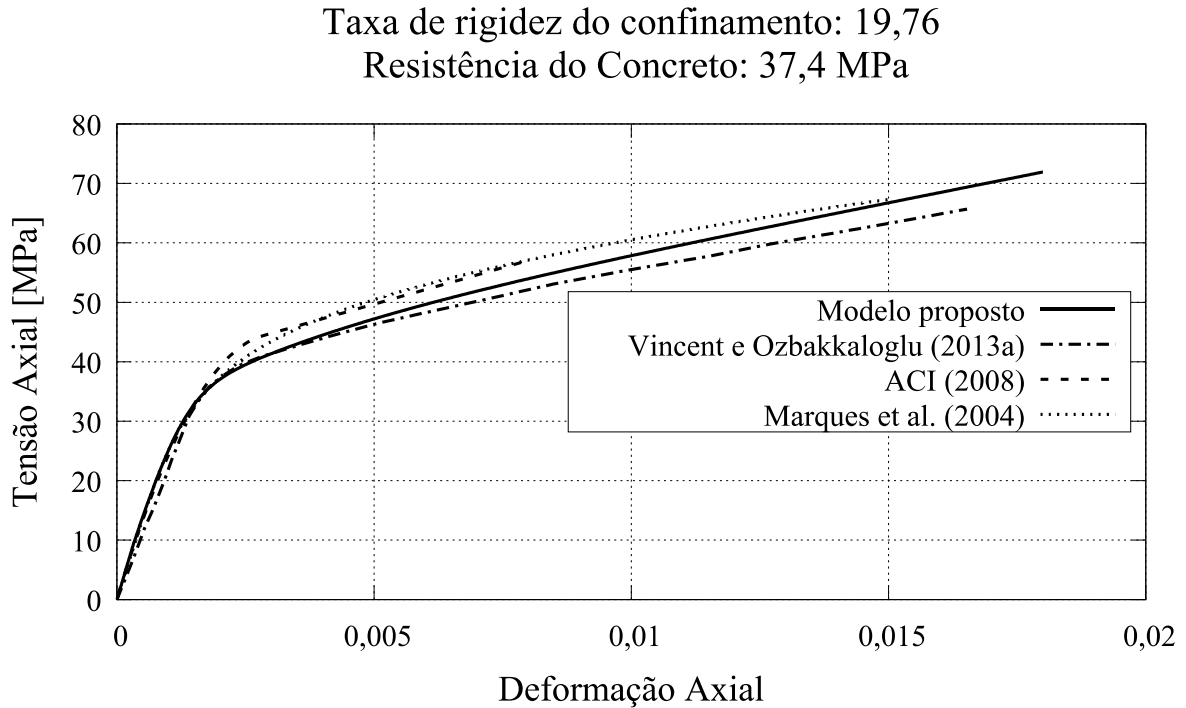


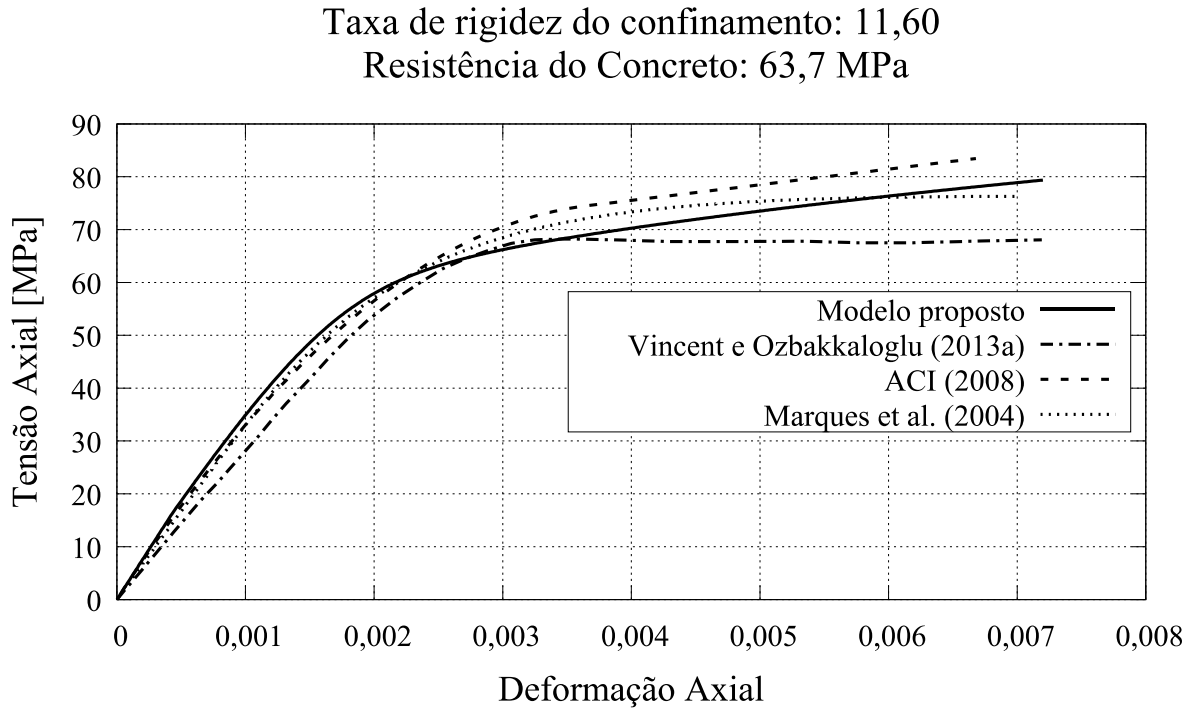
Figura 65 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e  $\rho = 19,76$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

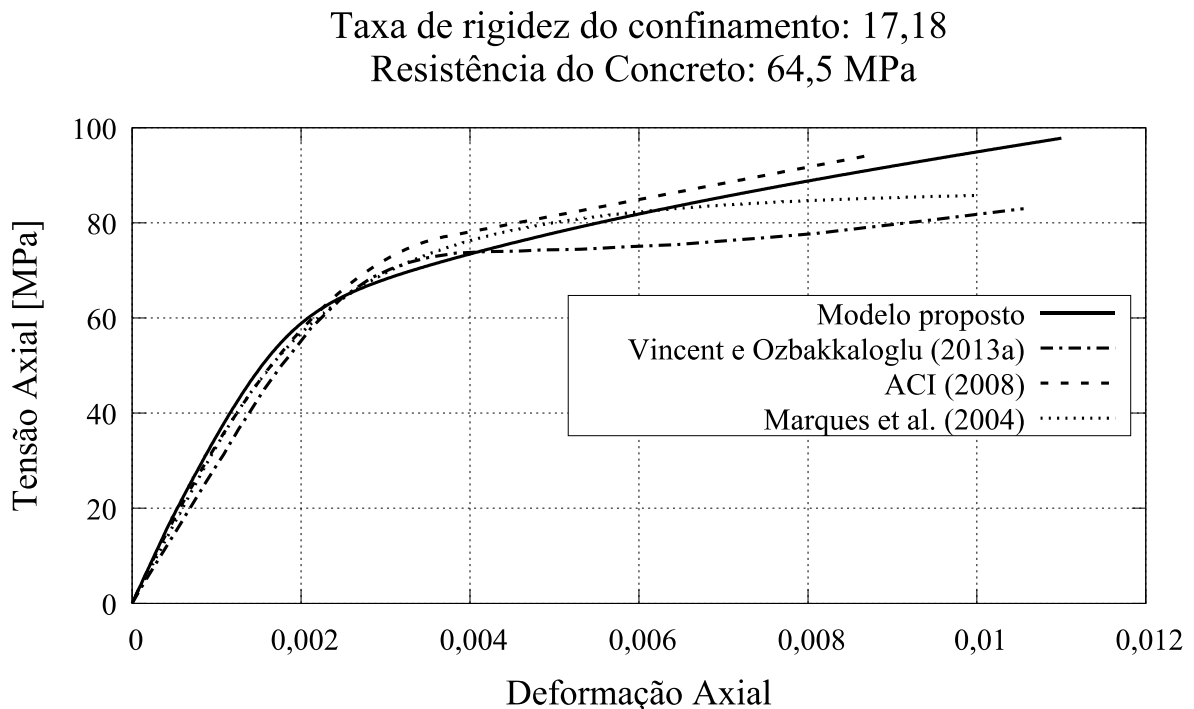
Para os dois níveis de confinamento observados no caso do concreto com menor resistência, observa-se uma boa concordância dos resultados obtidos para o modelo proposto com aqueles obtidos experimentalmente, assim como com os resultados dos modelos do ACI (2008) e MARQUES *et al.* (2004), sendo o modelo proposto o que teve melhor desempenho.

Figura 66 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e  $\rho = 11,60$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

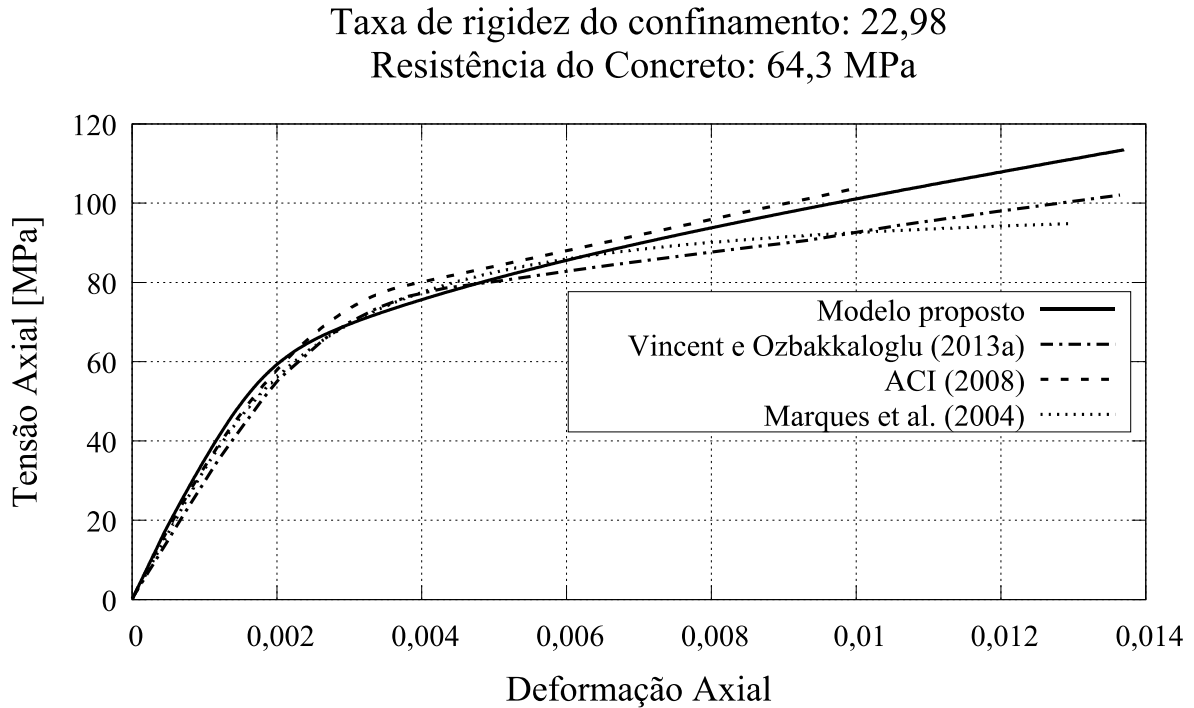
Figura 67 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e  $\rho = 17,18$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.



**Figura 68 – Comparação com resultados de VINCENT e OZBAKKALOGLU (2013a) e  $\rho = 22,98$**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

Para os casos de concreto de maior resistência observa-se uma ótima concordância dos resultados dos três modelos analisados, sendo que todos apresentaram um endurecimento superior ao observado nos experimentos. Verificou-se também que para o caso de confinamento com maior taxa de rigidez, o modelo de MARQUES *et al.* (2004) apresentou um melhor nível de aproximação em relação aos resultados experimentais quando comparado com os outros modelos.

#### 4.8.5 Resultados de WU *et al.* (2008)

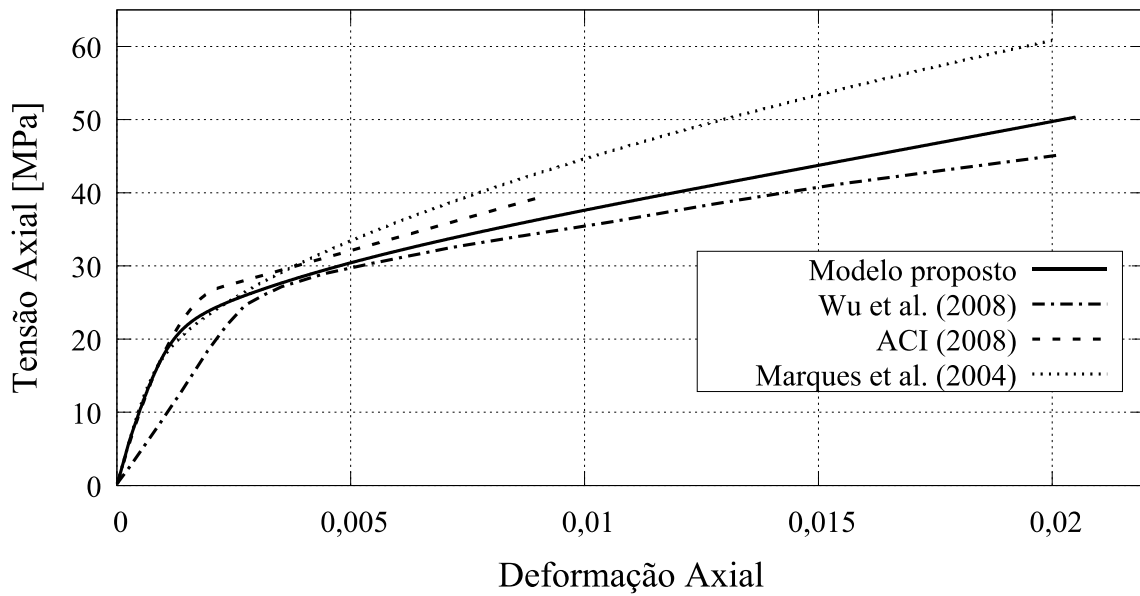
WU *et al.* (2008) fizeram um estudo experimental do desempenho de colunas de concreto confinadas com diferentes tipos de compósitos de PRF e também com compósitos híbridos de PRF. Foram utilizados nos experimentos quatro tipos diferentes de compósitos de PRF (com fibras de carbono de alta resistência – PRFC, fibras de aramida – PRFA, fibras de vidro – PRFG, e fibras de PBO – PRFP). As Figuras 69 a 72 ilustram a comparação de resultados obtidos nos experimentos desses últimos autores com os resultados obtidos com o modelo proposto e os modelos do ACI

(2008) e de MARQUES *et al.* (2004). Ressalta-se que no presente trabalho não foram utilizados resultados de colunas com compósitos híbridos.

**Figura 69 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFC**

Taxa de rigidez do confinamento: 23,42

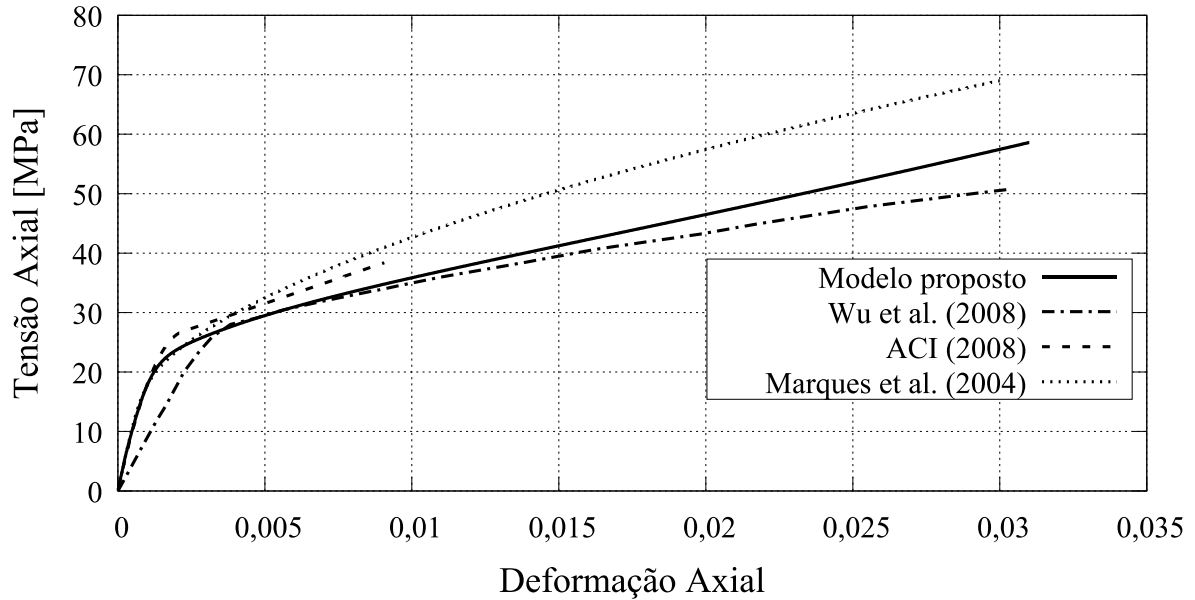
Resistência do Concreto: 23,1 MPa



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 70 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFA**

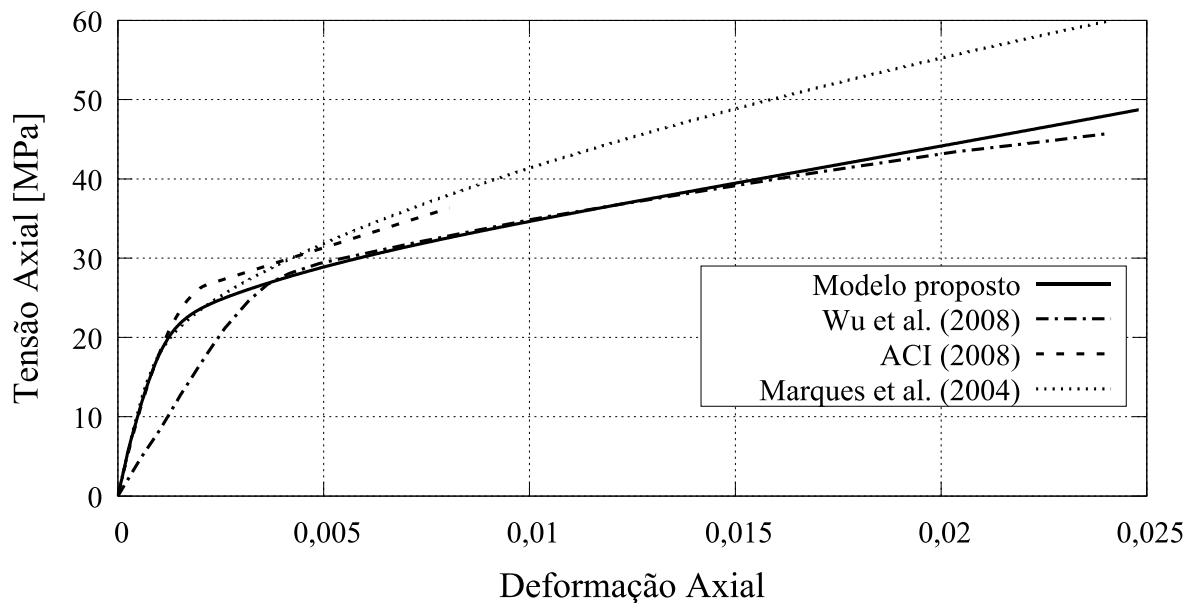
Taxa de rigidez do confinamento: 18,98  
Resistência do Concreto: 23,1 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 71 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFG**

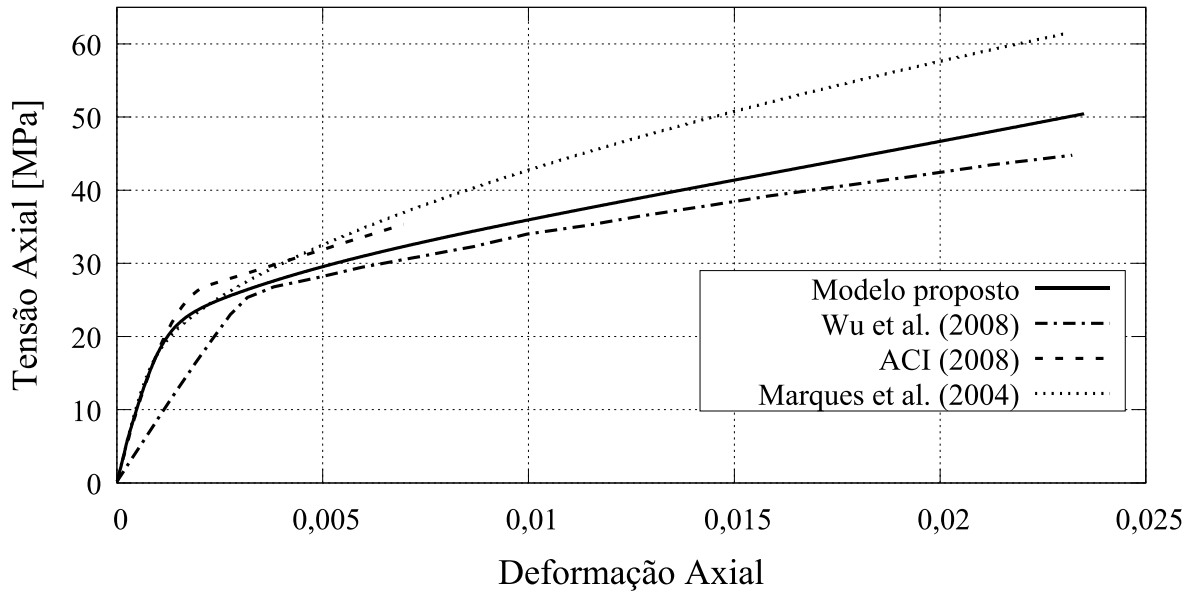
Taxa de rigidez do confinamento: 16,46  
Resistência do Concreto: 23,1 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 72 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFP**

Taxa de rigidez do confinamento: 19,21  
Resistência do Concreto: 23,1 MPa



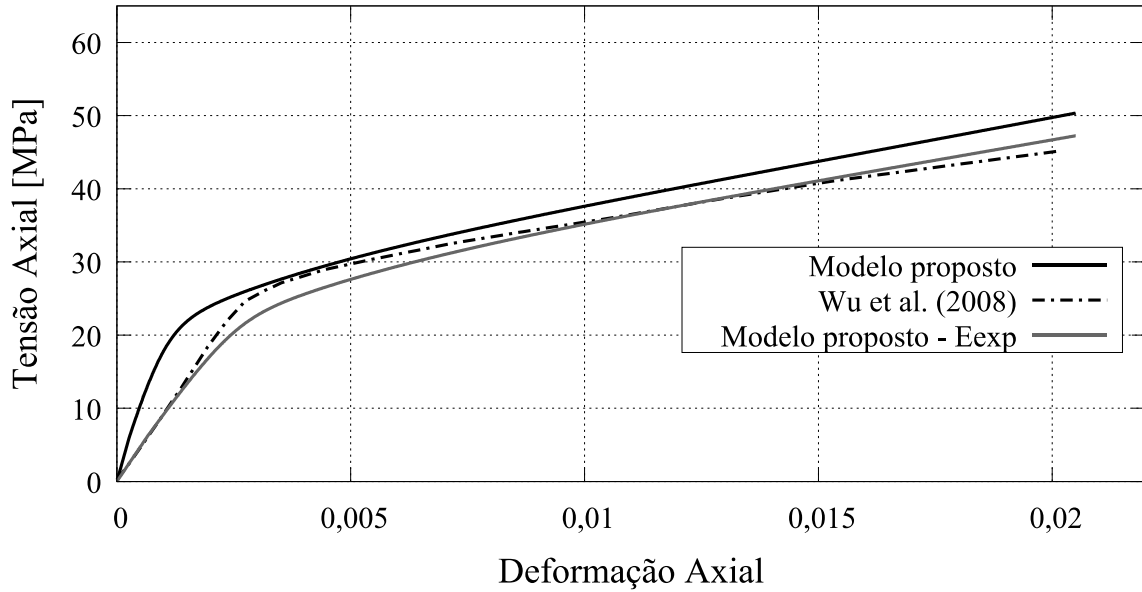
**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

Observando o segundo trecho aproximadamente linear dos gráficos, verifica-se uma maior aproximação dos resultados do modelo proposto com aqueles obtidos experimentalmente em comparação com os modelos do ACI (2008) e de MARQUES *et al.* (2004). Como se verifica pelas Figuras 69 a 72, o primeiro trecho das curvas experimentais apresenta uma menor inclinação em relação àquelas exibidas pelas curvas dos modelos teóricos. Isso pode ter sido motivado por diferença entre valores dos módulos de elasticidade teórico e experimental. O modelo proposto neste trabalho usa o módulo de elasticidade definido pela Equação (4.16), prescrita pelo ACI 318.

Para investigar melhor a diferença apresentada, foram gerados os gráficos das Figuras 73 a 76, que ilustram os resultados obtidos com o modelo proposto usando o módulo de elasticidade avaliado aproximadamente com base nos resultados experimentais. Com isso, foi possível verificar um bom desempenho do modelo proposto.

Figura 73 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFC com  $E_{exp}$

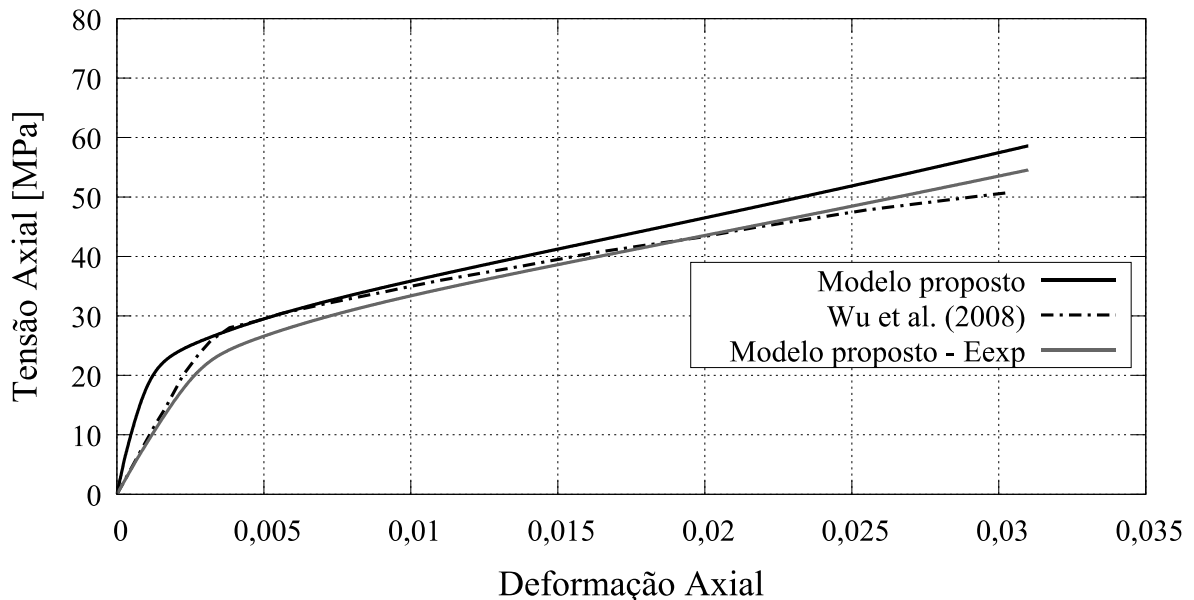
Taxa de rigidez do confinamento: 23,42  
Resistência do Concreto: 23,1 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

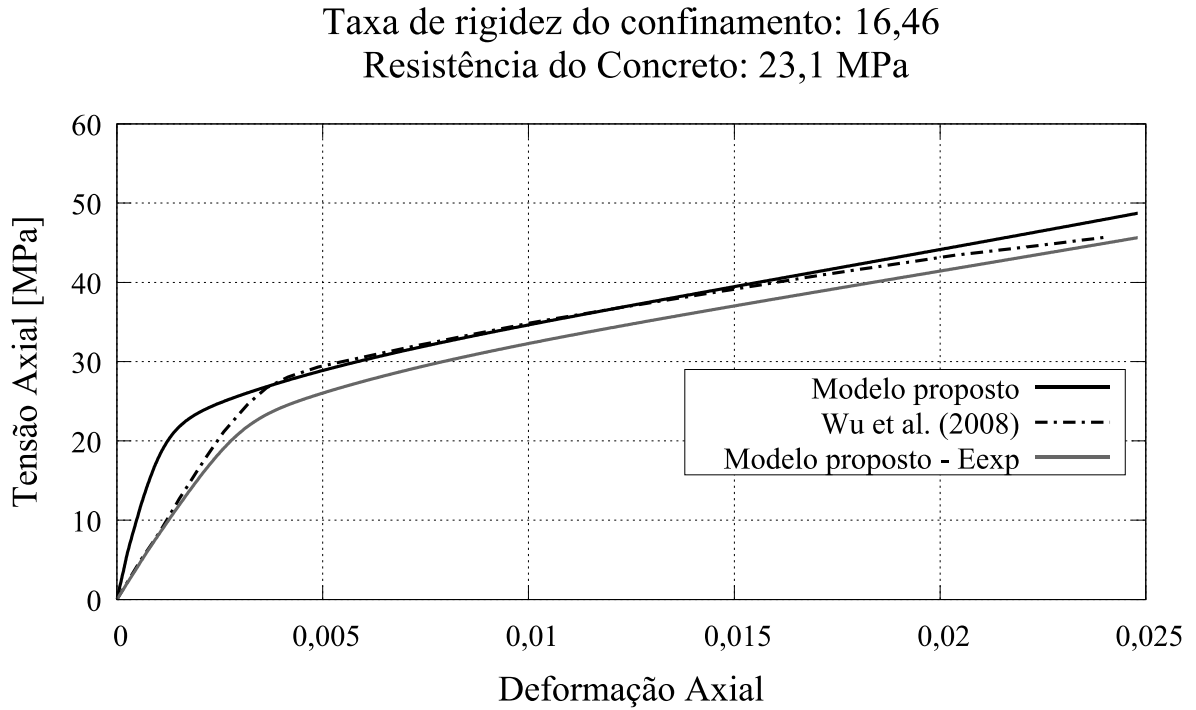
Figura 74 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFA com  $E_{exp}$

Taxa de rigidez do confinamento: 18,98  
Resistência do Concreto: 23,1 MPa



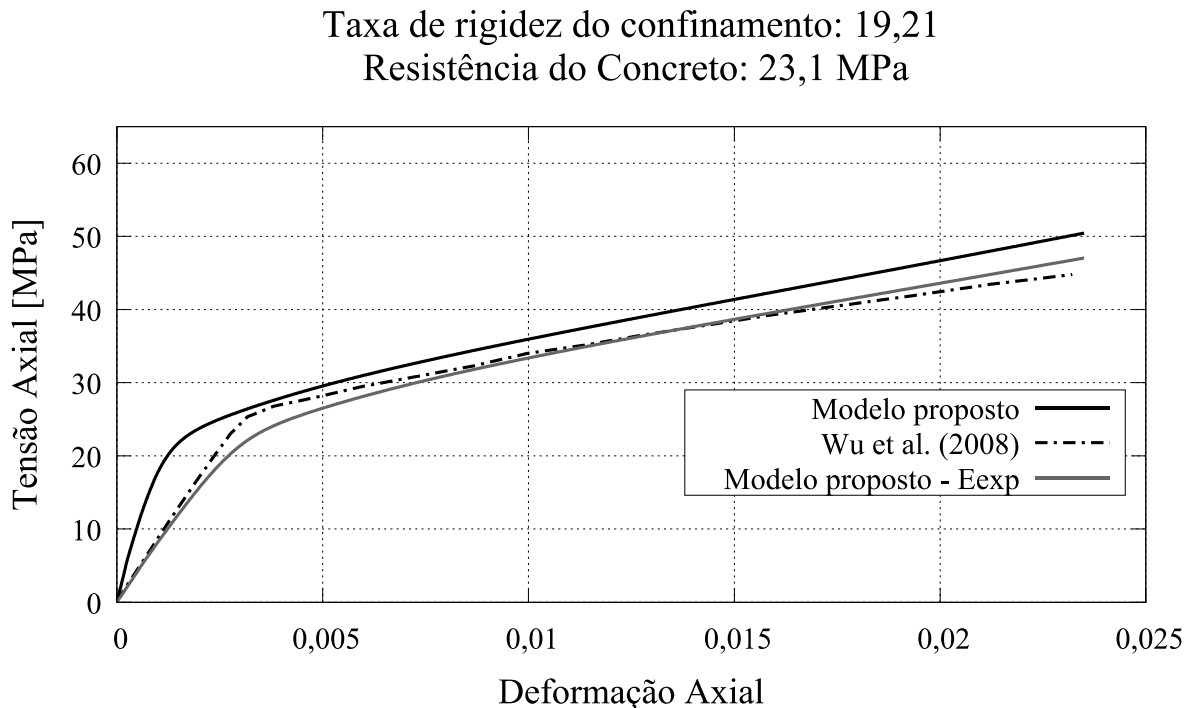
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 75 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFG com  $E_{exp}$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 76 – Comparação com resultados de WU *et al.* (2008) e camisa de PRFP com  $E_{exp}$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

#### 4.8.6 Análise dos resultados

Em geral, foi possível observar uma melhor concordância dos resultados experimentais com o modelo proposto, em relação aos demais modelos. O modelo de MARQUES et al. (2004) apresentou um desempenho razoável em boa parte dos resultados correspondentes ao comportamento tensão axial-deformação axial, enquanto que, para a descrição das deformações laterais não foi tão eficiente. Foi possível observar que, na maioria dos resultados, o modelo proposto superestimou a rigidez do concreto confinado.

Em relação à taxa de rigidez de confinamento das colunas analisadas neste trabalho, em geral, os testes em que essa taxa era menor que aproximadamente 20 apresentaram maior concordância entre os resultados do modelo proposto e dos experimentos, entretanto, para os testes analisados com maiores taxas (acima de 40) a concordância entre os resultados do modelo proposto e dos experimentos foi razoável.

Em relação ao nível de resistência do concreto, foi possível observar que as previsões do modelo proposto se aproximaram mais dos resultados experimentais quando se tratava de concreto de resistência normal, até aproximadamente 50 MPa. Para concretos com resistência mais elevada, apesar de alguns testes apresentarem uma concordância muito grande entre os resultados do modelo proposto e aqueles obtidos experimentalmente, em geral a concordância observada foi menor que a do concreto de menor resistência.

Analisando o material confinante, observou-se que a grande maioria dos exemplos analisados utiliza camisa de compósito de fibra de carbono, portanto não é possível se tirar conclusões sobre a capacidade do modelo de descrever o comportamento de colunas confinadas com outros materiais. No presente trabalho, nas comparações realizadas com resultados de colunas confinadas com compósitos de fibra de vidro, aramida e PBO observa-se excelente concordância do modelo proposto com os dados de experimentais.

## 5 MODELAGEM ELASTOPLÁSTICA UNIFICADA DE COLUNAS CONFINADAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL QUADRADA E CIRCULAR

### 5.1 Comentários Iniciais

De acordo com YU *et al.* (2010b), o comportamento de colunas de concreto confinadas com PRF de maneira não uniforme apresenta um considerável grau de complexidade. A maneira com a qual a camisa e o concreto interagem e como as tensões variam na seção ainda não são bem compreendidos.

Diversos autores elaboraram modelos para descrever o comportamento de colunas com seções transversais quadradas confinadas com PRF (LAM e TENG, 2003b; MARQUES *et al.*, 2004; YOUSSEF *et al.*, 2007). Usualmente, as colunas de seções transversais circulares e quadradas são analisadas através de modelos diferentes, os quais são formulados com base em estudos experimentais específicos. No presente trabalho, buscou-se uma unificação de procedimentos para a modelagem desses dois tipos de colunas, ou seja, a formulação de um modelo que permita a descrição do comportamento para as duas geometrias. Isto foi possível baseando-se no fator de forma definido no Capítulo 3 (Equação 5.1).

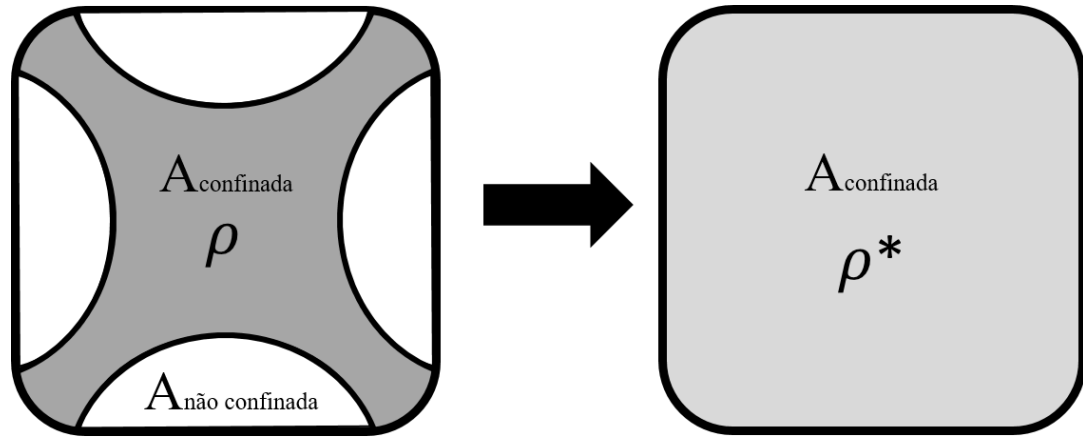
$$\mu = \frac{2r}{B} \quad (5.1)$$

### 5.2 Procedimento de Unificação do Modelo

No caso de colunas confinadas de seção transversal quadrada, o grau de confinamento varia ao longo da seção, ou seja, há regiões com confinamento maior e outras com confinamento menor. De acordo com SHEIKH e UZUMERI (1982), a seção de concreto confinado pode ser modelada usando curvas parabólicas delimitando regiões confinadas e não confinadas, de maneira que a seção é formada por uma região confinada no centro e quatro regiões não confinadas separadas por parábolas, como mostra a Figura 77. A ideia de formular o modelo unificado consiste em uma homogeneização do grau de confinamento na seção transversal, de maneira que todos os pontos da seção têm o mesmo grau de confinamento, como ocorre com colunas de seção circular.



**Figura 77 – Confinamento em colunas de seção quadrada**



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

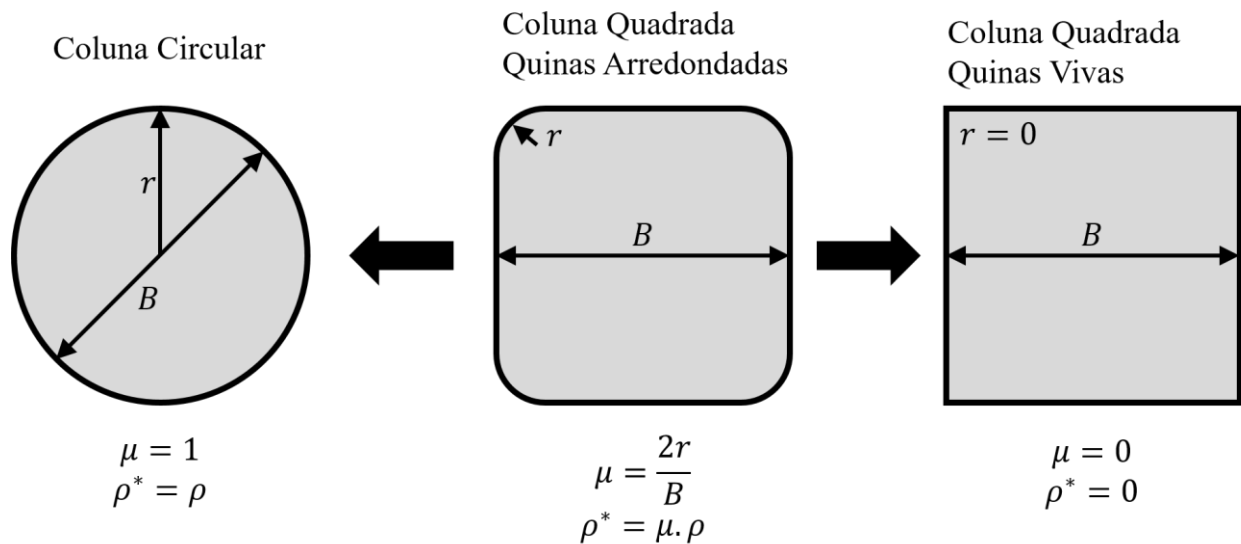
Como já foi mencionado anteriormente (Seção 3.4), os estudos de WU *et al.* (2006) e WANG e WU (2008) indicaram que, o fator de forma (Equação 5.1) é o parâmetro mais importante que influencia a efetividade do confinamento ao longo da seção quadrada e, além disso, a relação de ganho de resistência da coluna com esse fator de forma é aproximadamente linear. WU e WANG (2009) introduziram o fator de forma na modelagem de colunas confinadas, de maneira a obter um modelo unificado para análise de colunas de seção circular e quadrada. Os mencionados autores trabalharam com modelos semi-empíricos para análise colunas de seção transversal circular de concreto confinado que são encontrados na literatura.

No presente trabalho, foi feita uma homogeneização do grau de confinamento na seção transversal, através da introdução do fator de forma na taxa de rigidez do confinamento da coluna (Equação 5.2). Com isso, criou-se uma taxa de rigidez equivalente para o confinamento, na qual considera-se a influência do fator de forma, de maneira que o ganho de resistência da coluna pelo confinamento (que está relacionado com a taxa de rigidez do confinamento) aumenta com o crescimento do fator de forma. Assim, utilizando a taxa de rigidez equivalente para o confinamento, é possível aplicar a mesma metodologia incremental iterativa que foi utilizada no Capítulo 4 em colunas de seção transversal quadrada.

$$\rho^* = \rho \cdot \mu = \frac{4 \cdot E_f \cdot t \cdot r}{B^2 \cdot f_c} \quad (5.2)$$

O método proposto é interessante não somente pela simplicidade de se utilizar um único modelo, mas também porque permite a análise de colunas de seção transversal quadrada por um método semi-analítico, originalmente formulado para colunas de seção circular. A consideração da taxa de rigidez equivalente para o confinamento permite que o cálculo de colunas circulares seja realizado normalmente, já que o fator de forma será igual à unidade, e permite que colunas com quinas vivas sejam calculadas sem o efeito do confinamento, já que o fator de forma será nulo (Figura 78).

**Figura 78 – Taxa de rigidez equivalente para o confinamento**



Fonte: Autora – Adaptado de WU e ZHOU, 2010.

### 5.3 Resultados Obtidos com o Modelo Unificado

Para avaliar a eficiência do modelo proposto, seus resultados foram comparados com dados experimentais de diferentes autores, e também com outro modelo teórico disponível na literatura.

#### 5.3.1 Resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017)

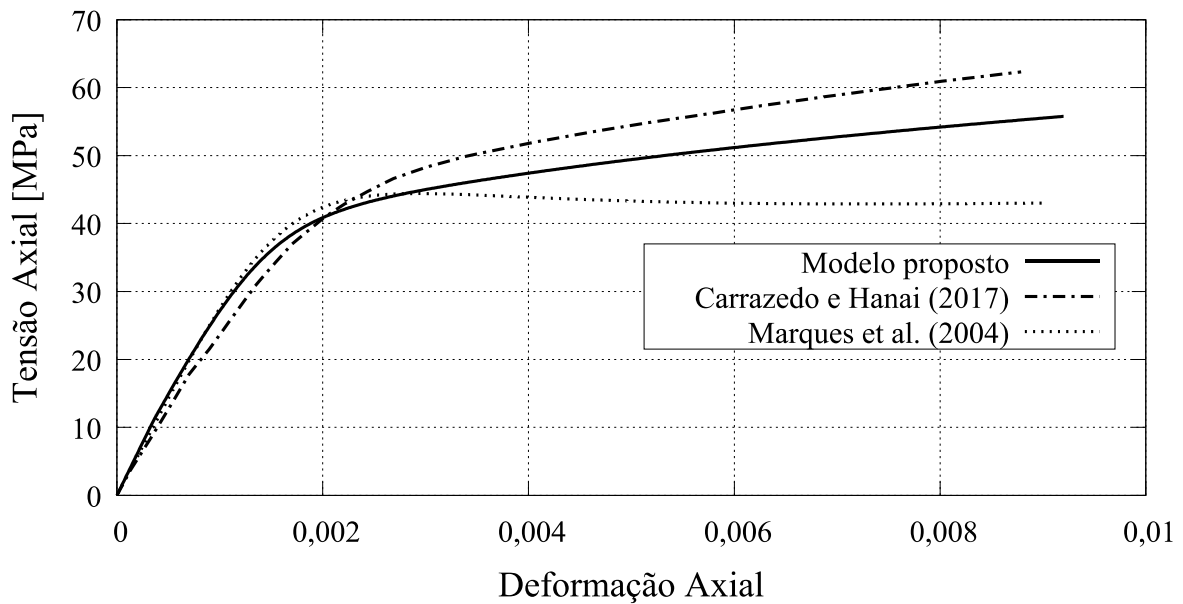
CARRAZEDO e HANAI (2017) realizaram experimentos em colunas de concreto encamisadas com compósitos de fibra de carbono, com seções transversais de diferentes geometrias e submetidas a carregamentos centrados e excêntricos. Nesta seção, apresentam-se comparações

de resultados obtidos pelo modelo proposto e aqueles apresentados pelos autores acima mencionados.

Os testes consistem em colunas com variadas resistências, variando também o nível de confinamento e o raio de arredondamento das quinas da seção, sempre com carregamento monotônico centrado. As Figuras 79 e 80 mostram os resultados para as colunas de seção transversal circular.

**Figura 79 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para  $\rho = 11,15$  e  $\mu = 1,0$**

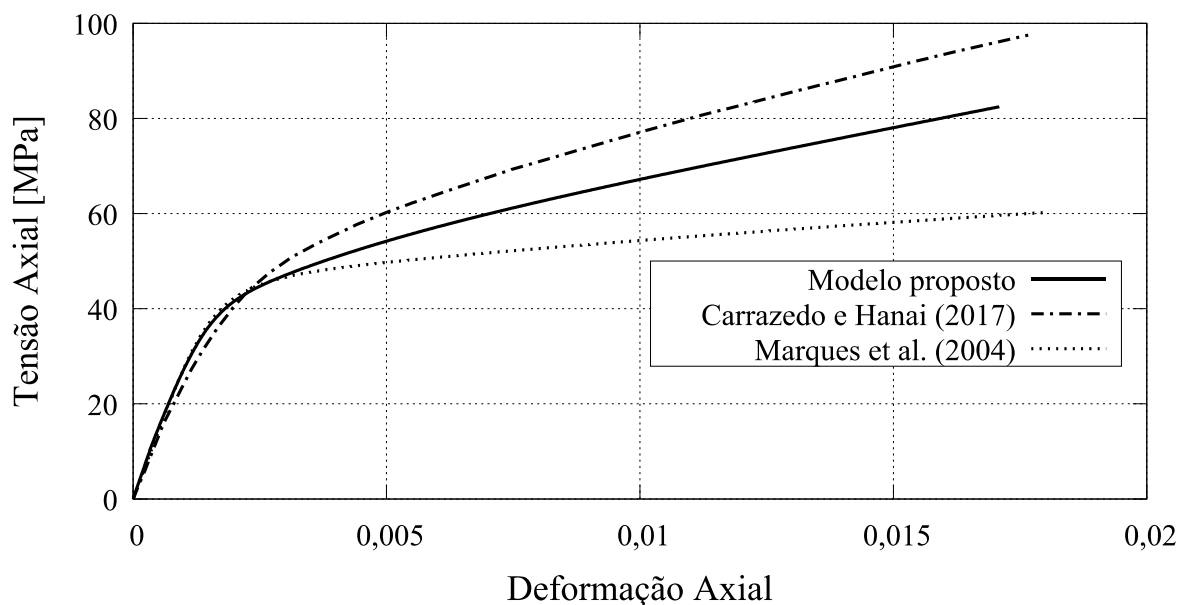
Taxa de rigidez do confinamento: 11,15; Fator de forma: 1,0  
Resistência do Concreto: 42,5 MPa



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 80 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para  $\rho = 22,29$  e  $\mu = 1,0$**

Taxa de rigidez do confinamento: 22,29; Fator de forma: 1,0  
Resistência do Concreto: 42,5 MPa



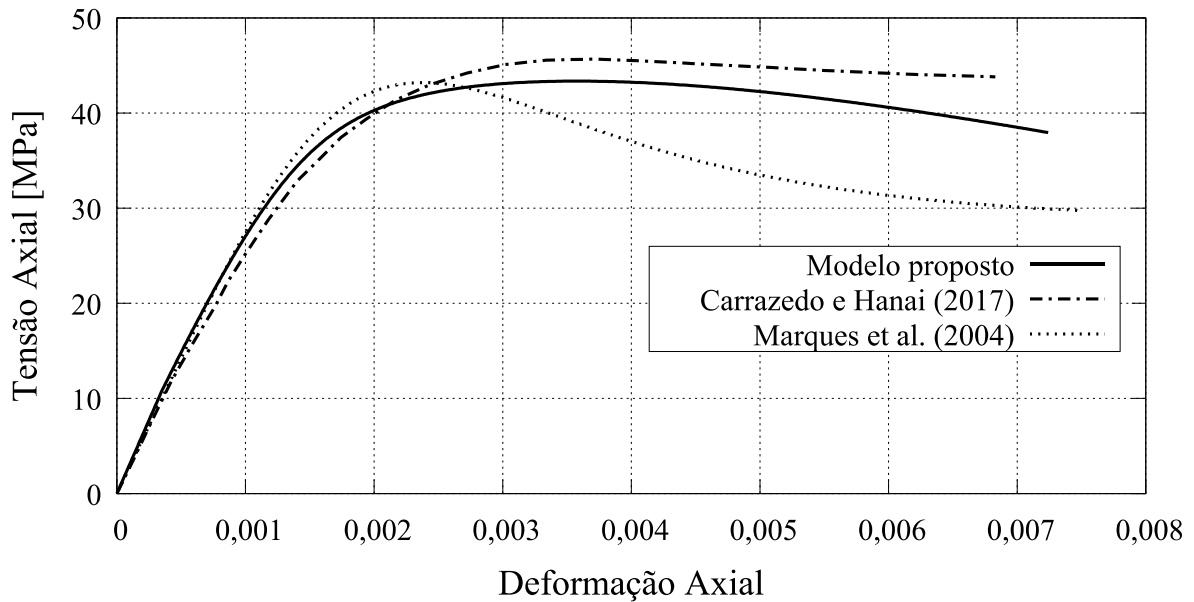
**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

Pelas figuras 78 e 80 verifica-se que os resultados obtidos com o modelo proposto não foram tão próximos dos dados experimentais, mas a diferença entre os dois não foi acentuada.

As Figuras 81 a 84 mostram os resultados para colunas de seção quadrada.

Figura 81 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para  $\rho = 22$  e  $\mu = 0,1$

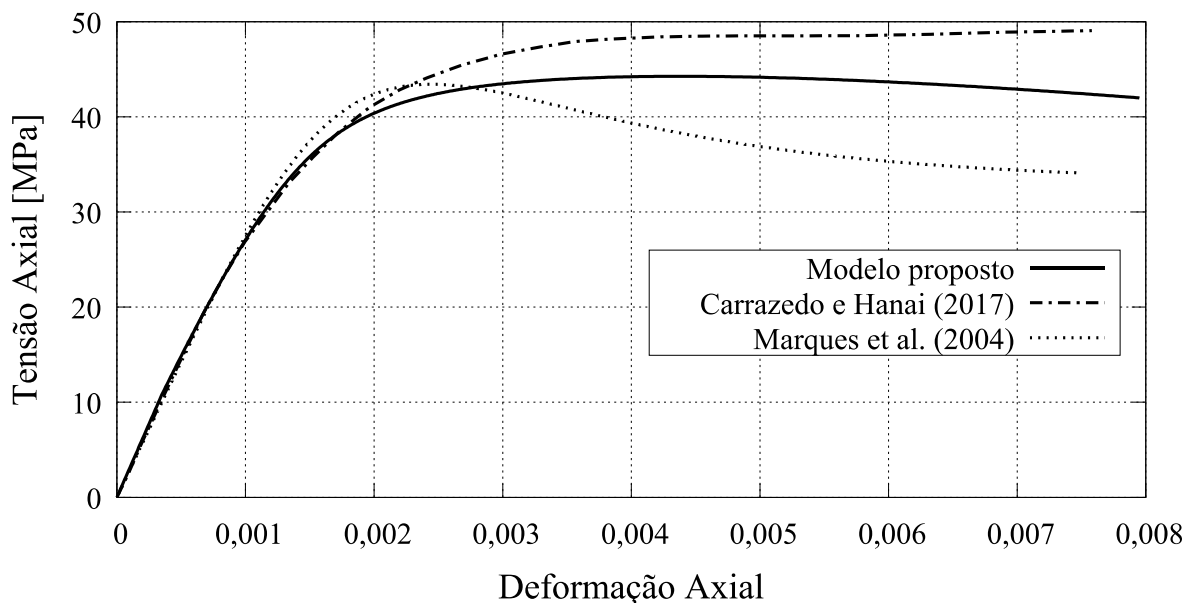
Taxa de rigidez do confinamento: 22,29; Fator de forma: 0,1333  
Resistência do Concreto: 42,5 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 82 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para  $\rho = 11$  e  $\mu = 0,4$

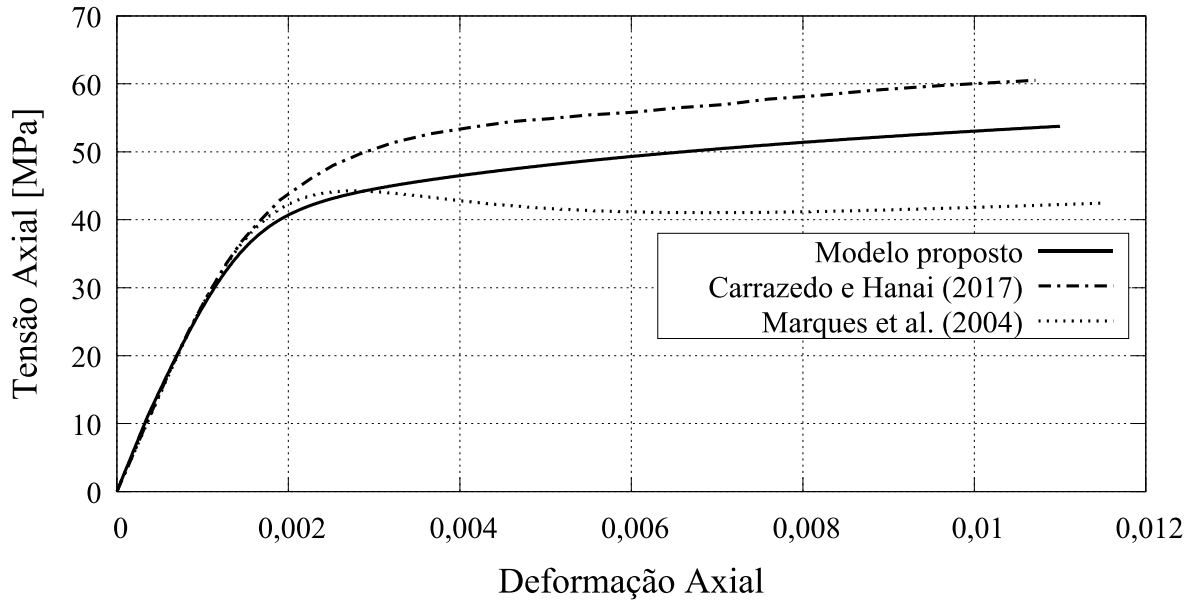
Taxa de rigidez do confinamento: 11,15; Fator de forma: 0,4  
Resistência do Concreto: 42,5 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 83 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para  $\rho = 22$  e  $\mu = 0,4$

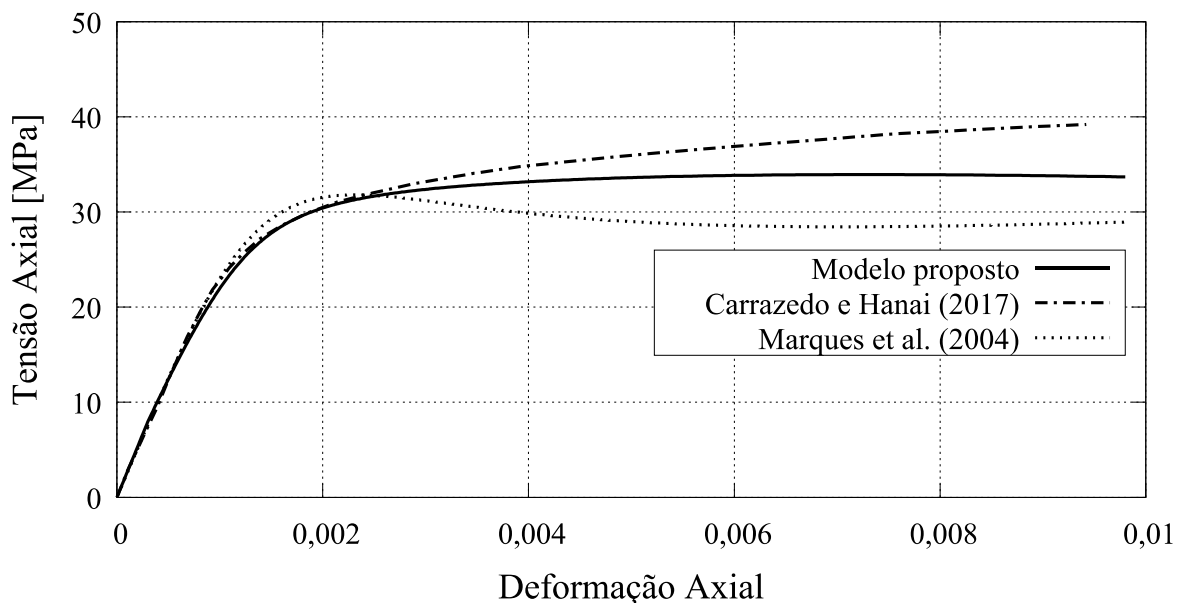
Taxa de rigidez do confinamento: 22,29; Fator de forma: 0,4  
Resistência do Concreto: 42,5 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 84 – Comparação com resultados de CARRAZEDO e HANAI (2017) para  $\rho = 15$  e  $\mu = 0,4$

Taxa de rigidez do confinamento: 15,23; Fator de forma: 0,4  
Resistência do Concreto: 31,1 MPa



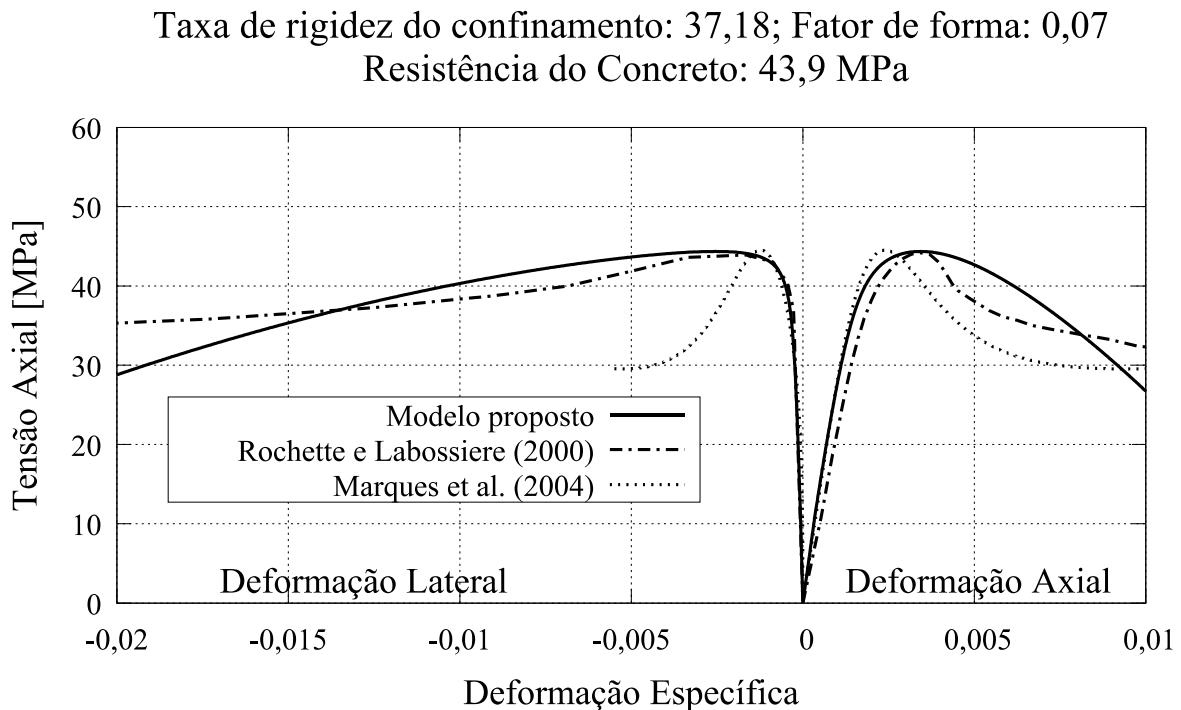
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Para os resultados de maior resistência do concreto (Figuras 81 a 83), observa-se que o gráfico que apresenta os resultados da coluna com um menor raio de arredondamento das quinas (menor fator de forma) mostra a melhor concordância dos resultados do modelo proposto com os experimentais, mas essa concordância nos casos de colunas com maior fator de forma foi razoável. Através da Figura 84, verifica-se que houve um bom desempenho do modelo proposto no teste com concreto de menor resistência.

### 5.3.2 Resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000)

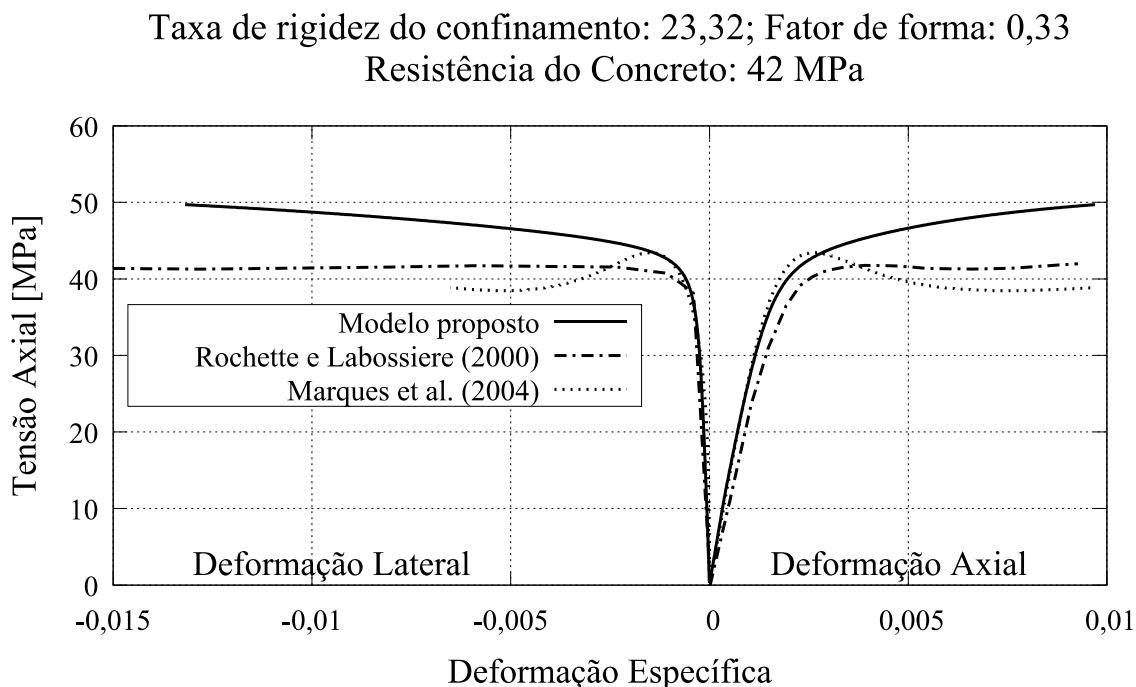
ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) realizaram ensaios com colunas de concreto de seção transversal circular, quadrada e retangular confinadas. Dados experimentais dos autores acima citados de colunas de seção quadrada, encamisadas com compósitos de fibra de carbono, e com diferentes raios de arredondamento das quinas foram utilizados para comparação com resultados obtidos com o modelo proposto e com o modelo de MARQUES *et al.* (2004). As Figuras 85 a 88 mostram os resultados obtidos das comparações.

**Figura 85 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) para  $\rho = 37,18$  e  $\mu = 0,07$**



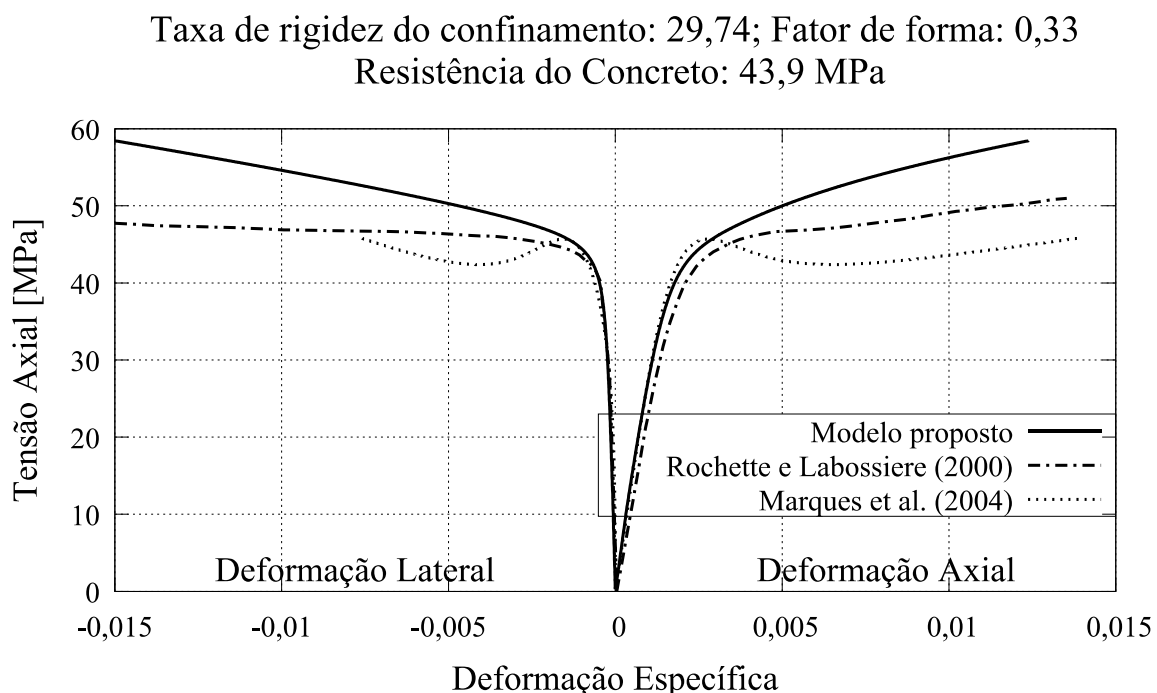
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 86 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIERE (2000) para  $\rho = 23,32$  e  $\mu = 0,33$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

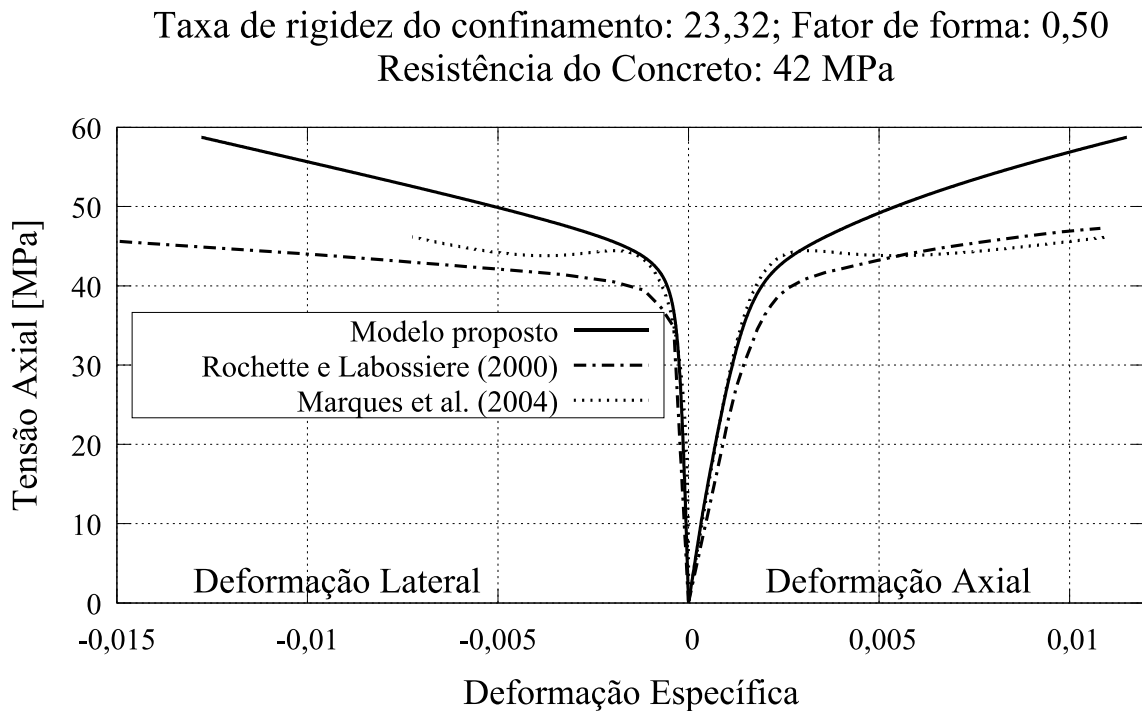
Figura 87 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIERE (2000) para  $\rho = 29,74$  e  $\mu = 0,33$



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.



**Figura 88 – Comparação com resultados de ROCHETTE e LABOSSIÈRE (2000) para  $\rho = 23,32$  e  $\mu = 0,50$**



Através das Figuras 85 a 88, verifica-se que existe uma aproximação razoável dos resultados experimentais com aqueles fornecidos pelo modelo proposto e pelo modelo de MARQUES *et al.* (2004), sendo que a aproximação é maior para colunas com fator de forma menor.

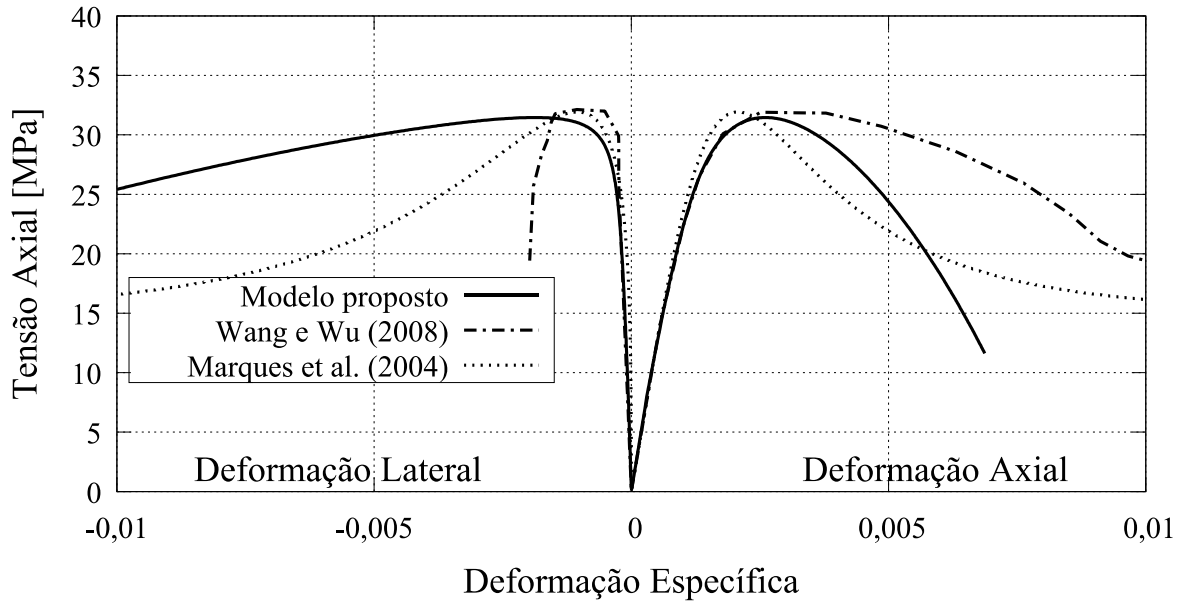
### 5.3.3 Resultados de WANG e WU (2008)

WANG e WU (2008) fizeram um estudo experimental com colunas de seção transversal quadrada confinadas com encamisamento de compósitos de fibra de carbono. Os mencionados autores utilizaram dois níveis de resistência do concreto, dois níveis de taxa de rigidez de confinamento (variando o número de camadas da camisa) e diferentes raios de arredondamento das quinas (o que varia o fator de forma).

Os resultados das comparações dos experimentos dos autores com o modelo proposto e com o modelo de MARQUES *et al.* (2004) estão ilustrados nos gráficos que seguem. As Figuras 89 a 94 mostram os resultados dos ensaios com uma camada de PRF e concreto com menor resistência, variando o fator de forma.

**Figura 89 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 15, 20$  e  $\mu = 0$**

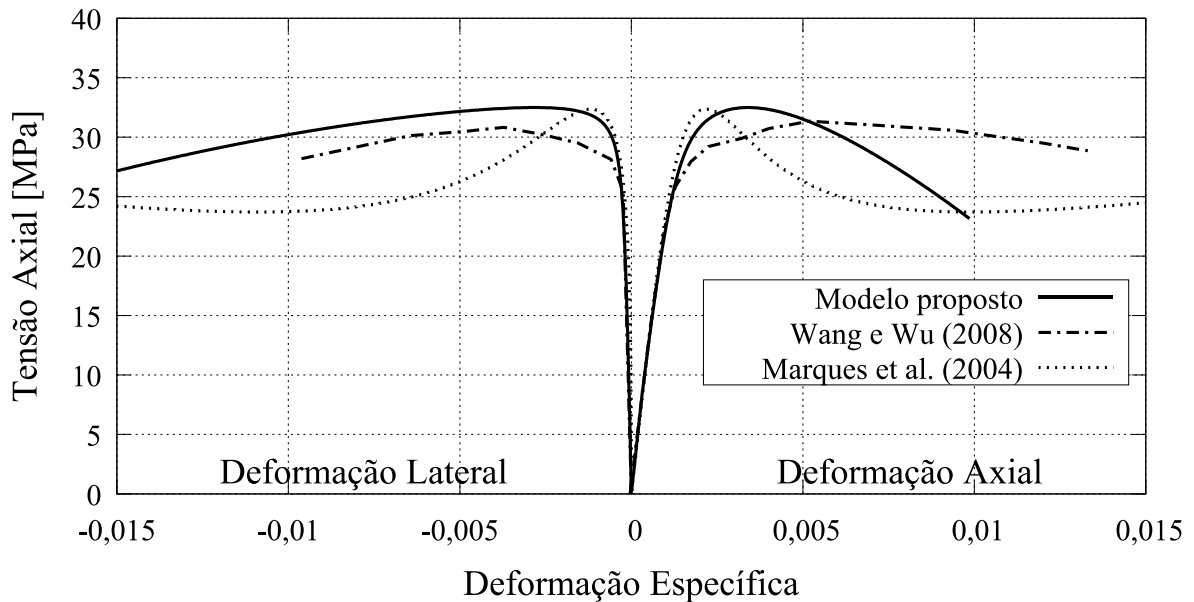
Taxa de rigidez do confinamento: 15,20; Fator de forma: 0  
Resistência do Concreto: 31,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 90 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 15, 10$  e  $\mu = 0, 2$**

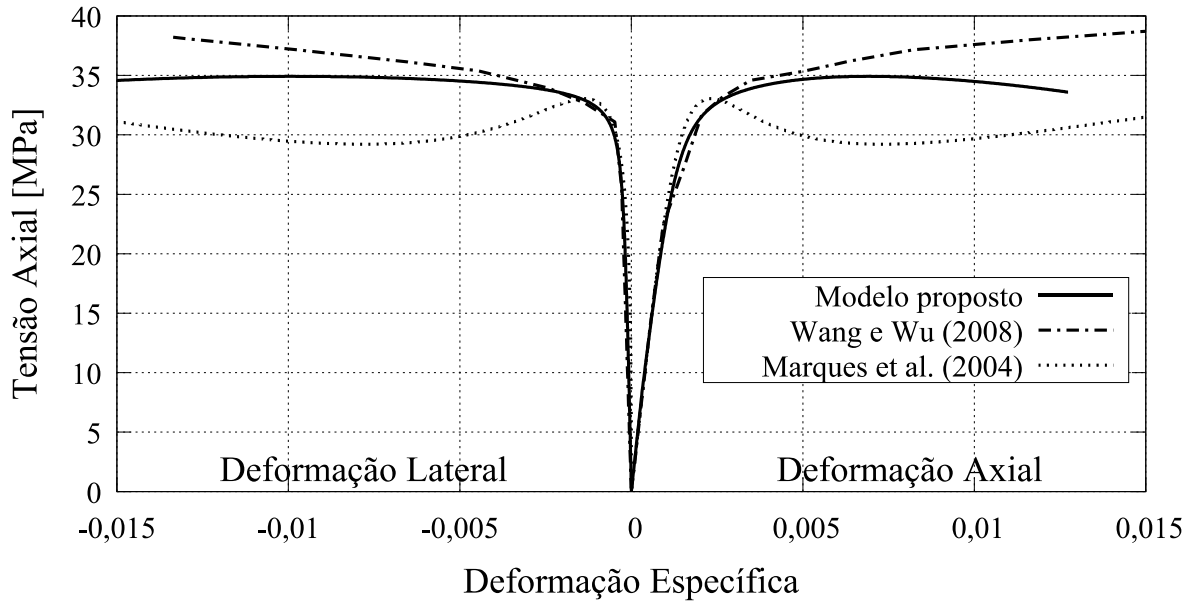
Taxa de rigidez do confinamento: 15,10; Fator de forma: 0,2  
Resistência do Concreto: 31,9 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 91 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 14,92$  e  $\mu = 0,4$**

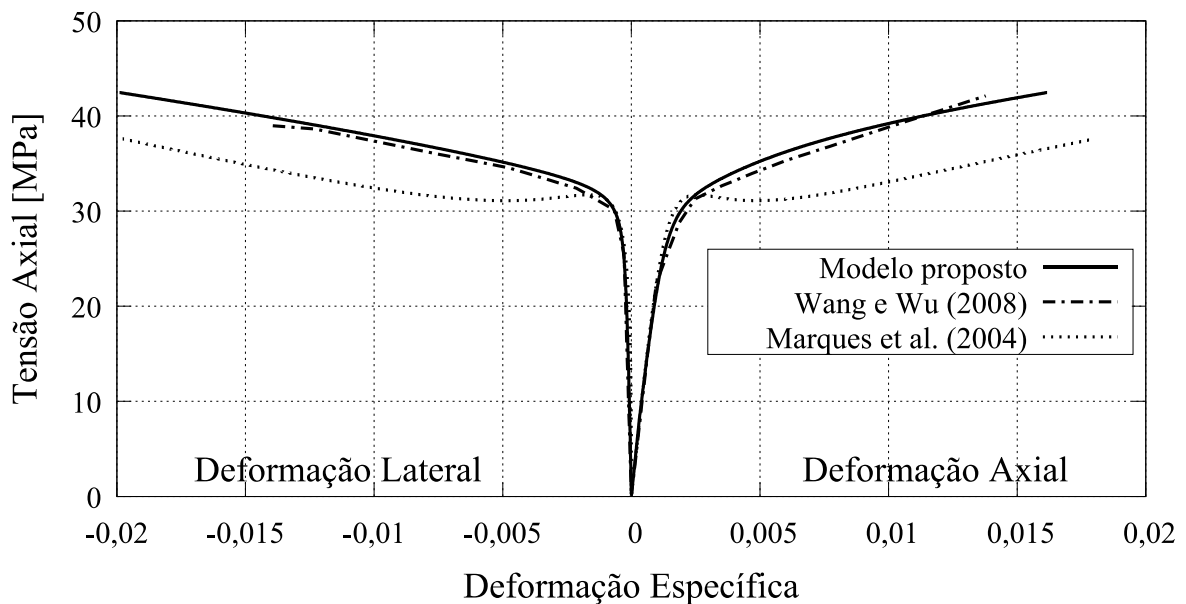
Taxa de rigidez do confinamento: 14,92; Fator de forma: 0,4  
Resistência do Concreto: 32,3 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 92 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 15,69$  e  $\mu = 0,6$**

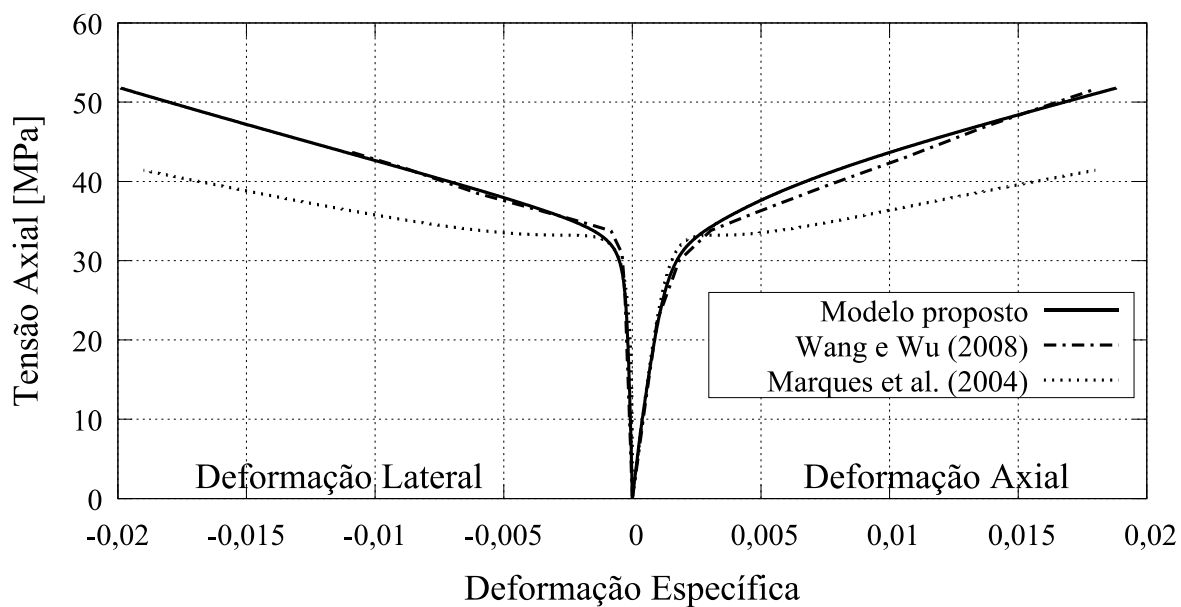
Taxa de rigidez do confinamento: 15,69; Fator de forma: 0,6  
Resistência do Concreto: 30,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 93 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 15,15$  e  $\mu = 0,8$**

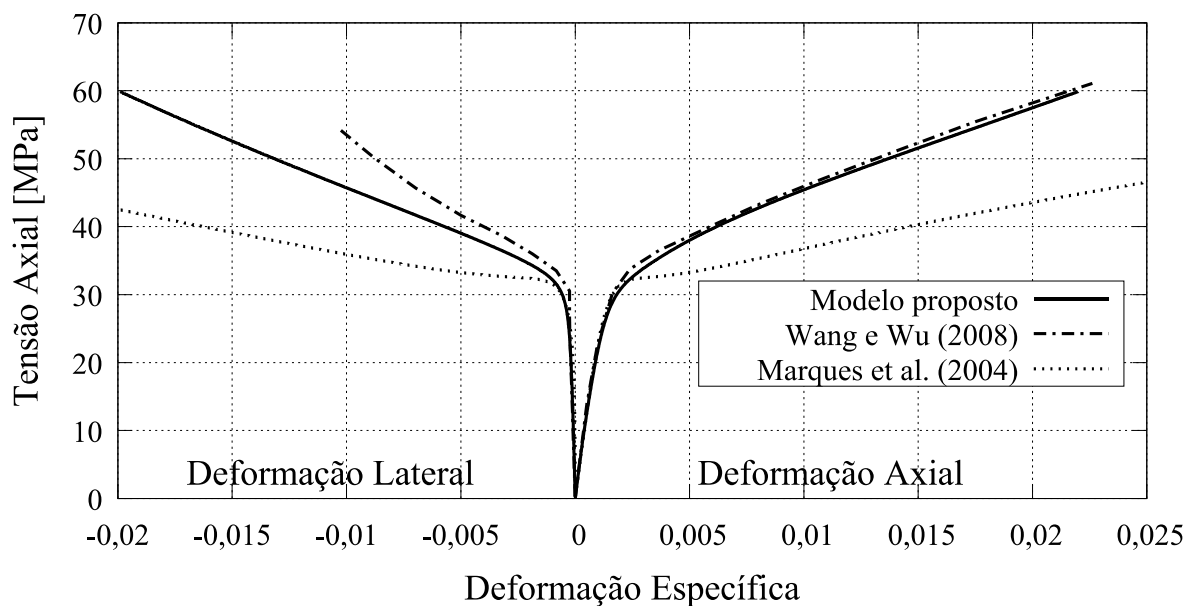
Taxa de rigidez do confinamento: 15,15; Fator de forma: 0,8  
Resistência do Concreto: 31,8 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 94 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 15,59$  e  $\mu = 1,0$**

Taxa de rigidez do confinamento: 15,59; Fator de forma: 1,0  
Resistência do Concreto: 30,9 MPa



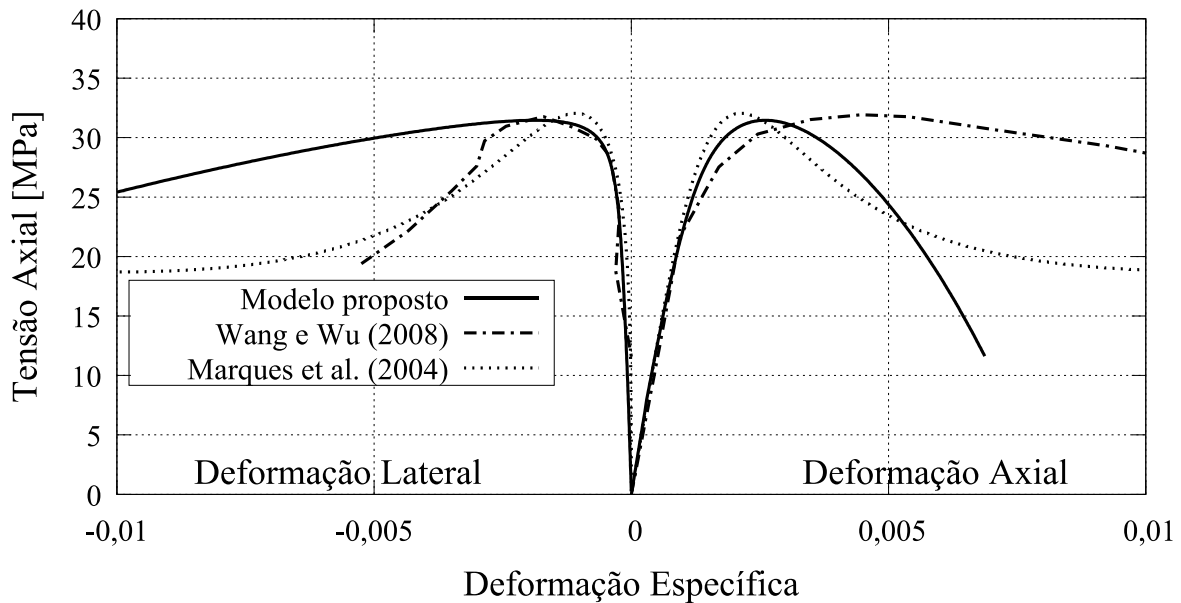
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Em geral, observou-se uma boa concordância do modelo proposto com os resultados experimentais. Para o exemplo em que não houve arredondamento das quinas, o resultado experimental se aproximou de um concreto não confinado, mas não teve um trecho descendente tão acentuado após o pico, como é de se esperar. Isso pode explicar a diferença que houve nesse trecho entre o modelo proposto e o resultado experimental, já que a modelagem proposta se iguala a de uma coluna não confinada nesses casos.

As Figuras 95 a 100 mostram os resultados das comparações com os ensaios do concreto com menor resistência e duas camadas de PRF, variando o fator de forma.

**Figura 95 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 30,40$  e  $\mu = 0$**

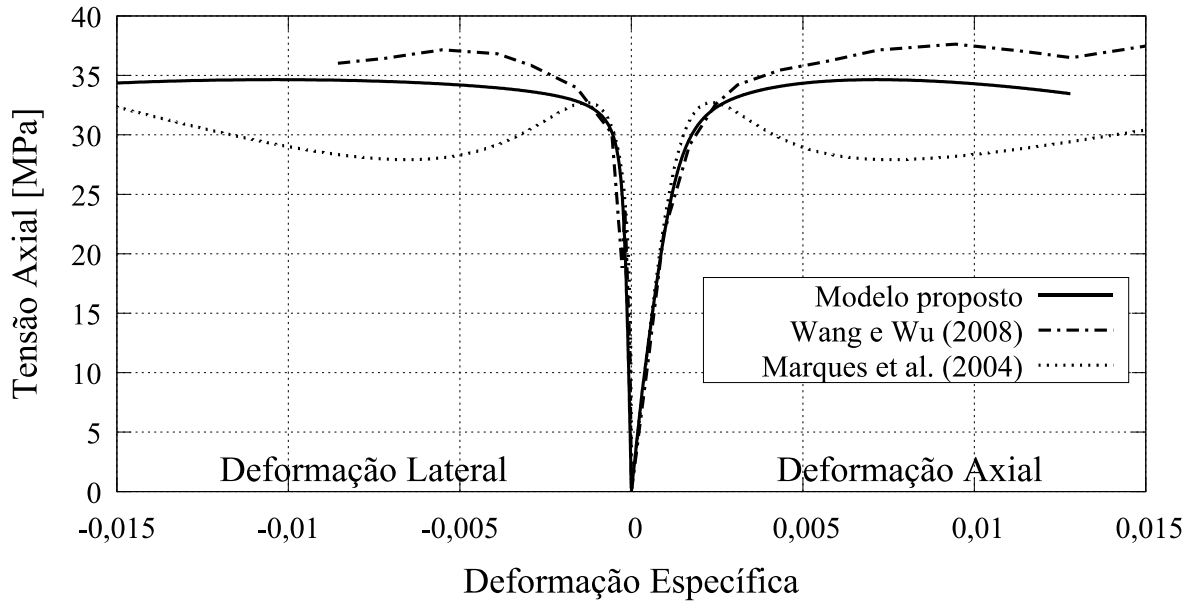
Taxa de rigidez do confinamento: 30,40; Fator de forma: 0  
Resistência do Concreto: 31,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 96 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 30,21$  e  $\mu = 0,2$**

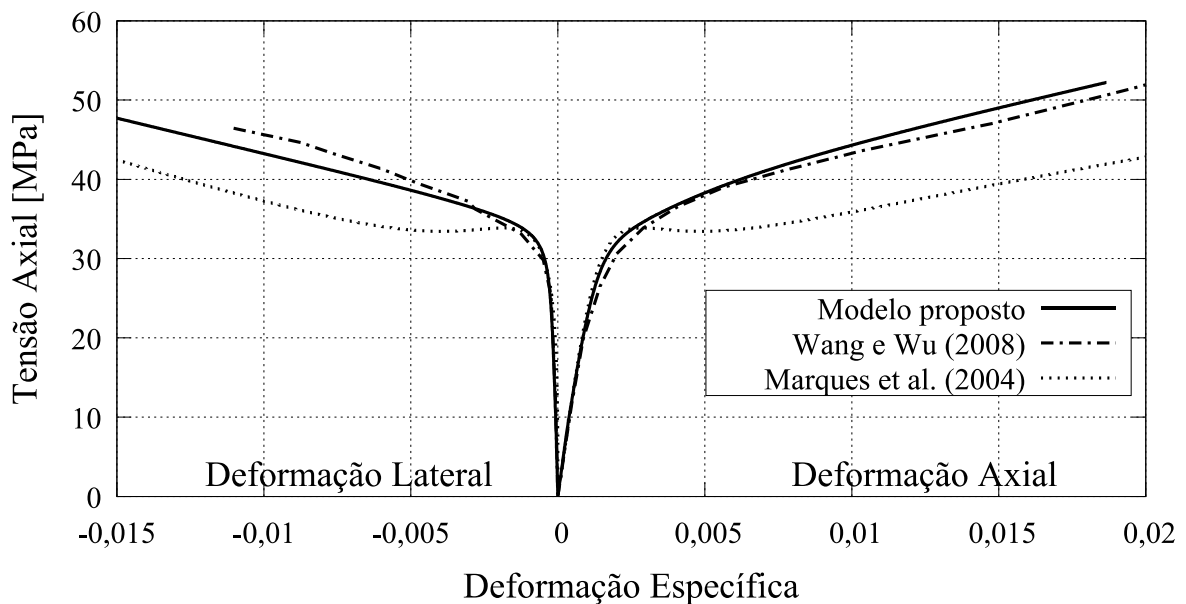
Taxa de rigidez do confinamento: 30,21; Fator de forma: 0,2  
Resistência do Concreto: 31,9 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 97 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 29,83$  e  $\mu = 0,4$**

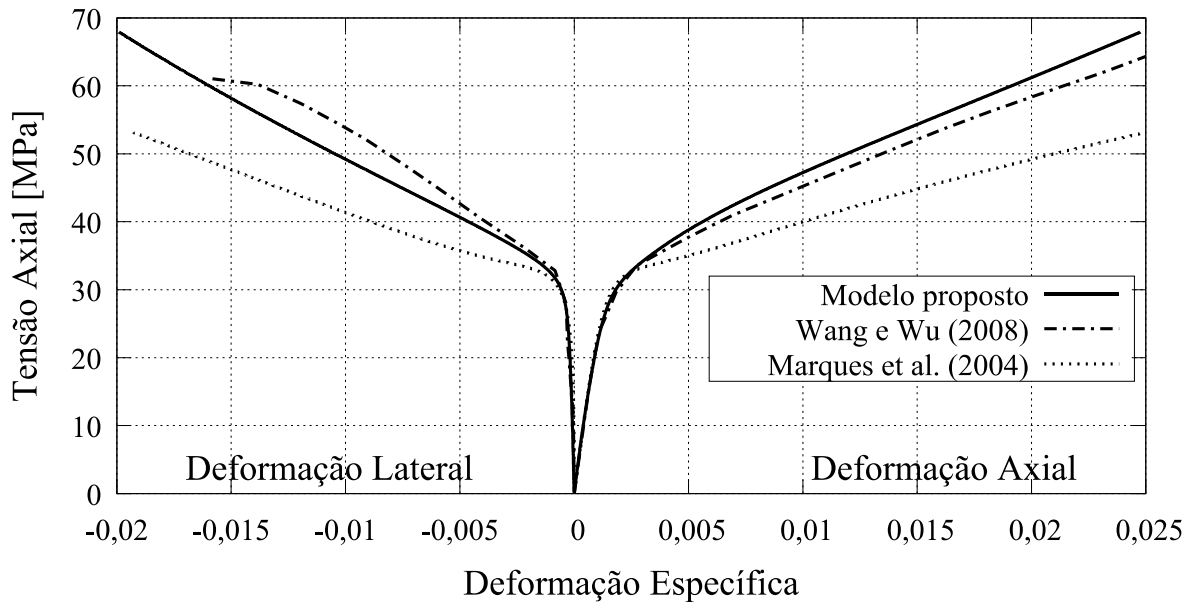
Taxa de rigidez do confinamento: 29,83; Fator de forma: 0,4  
Resistência do Concreto: 32,3 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 98 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 31,39$  e  $\mu = 0,6$**

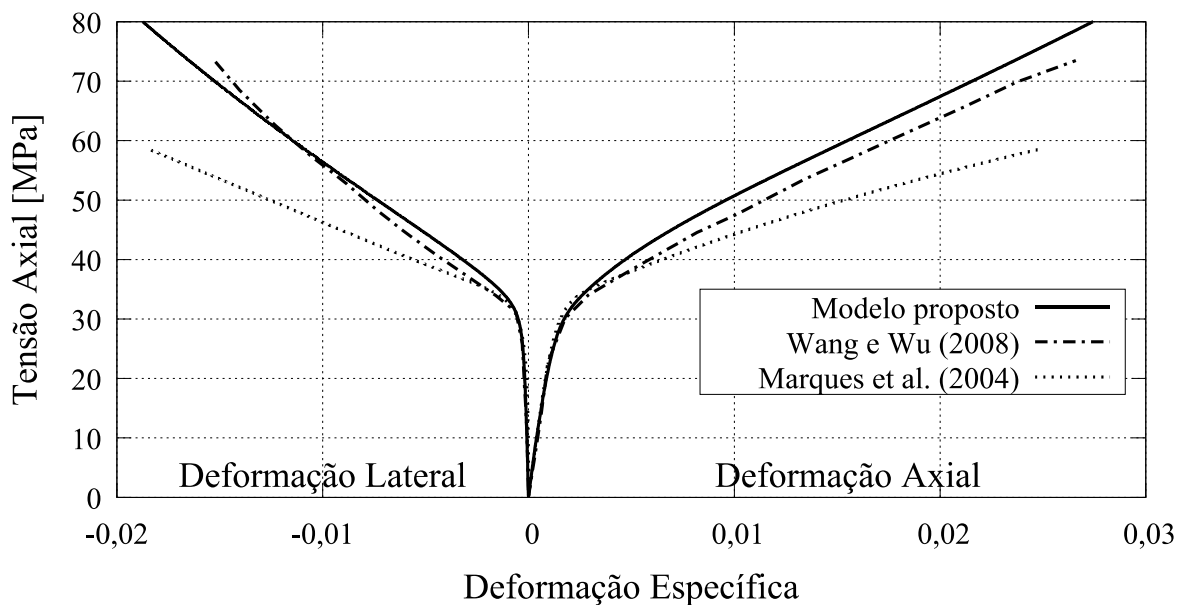
Taxa de rigidez do confinamento: 31,39; Fator de forma: 0,6  
Resistência do Concreto: 30,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 99 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 30,30$  e  $\mu = 0,8$**

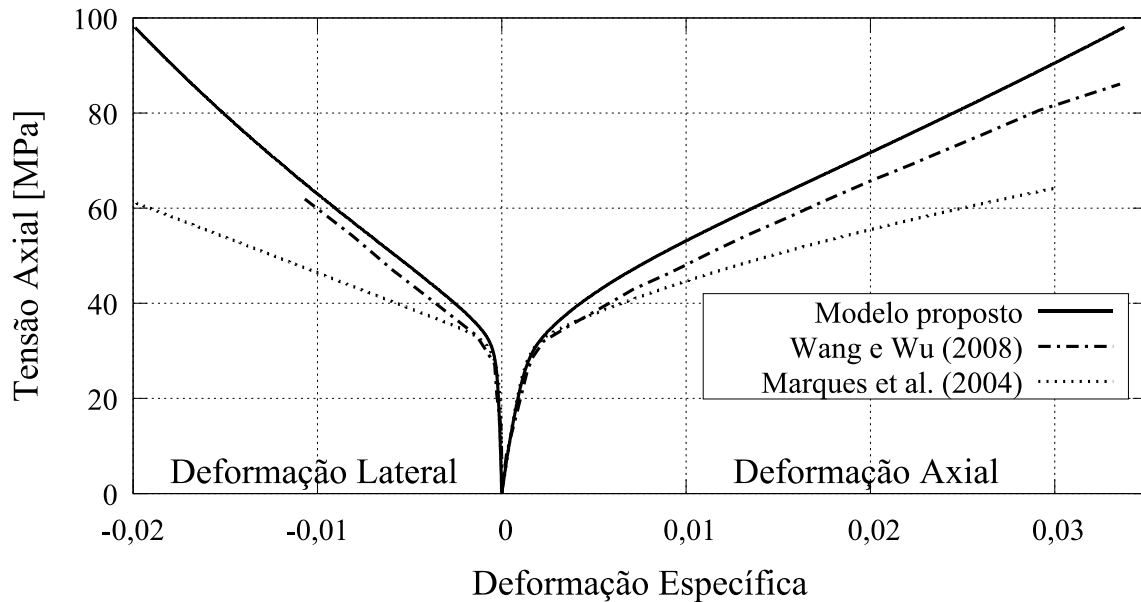
Taxa de rigidez do confinamento: 30,30; Fator de forma: 0,8  
Resistência do Concreto: 31,8 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 100 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 31,18$  e  $\mu = 1,0$**

Taxa de rigidez do confinamento: 31,18; Fator de forma: 1,0  
Resistência do Concreto: 30,9 MPa



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

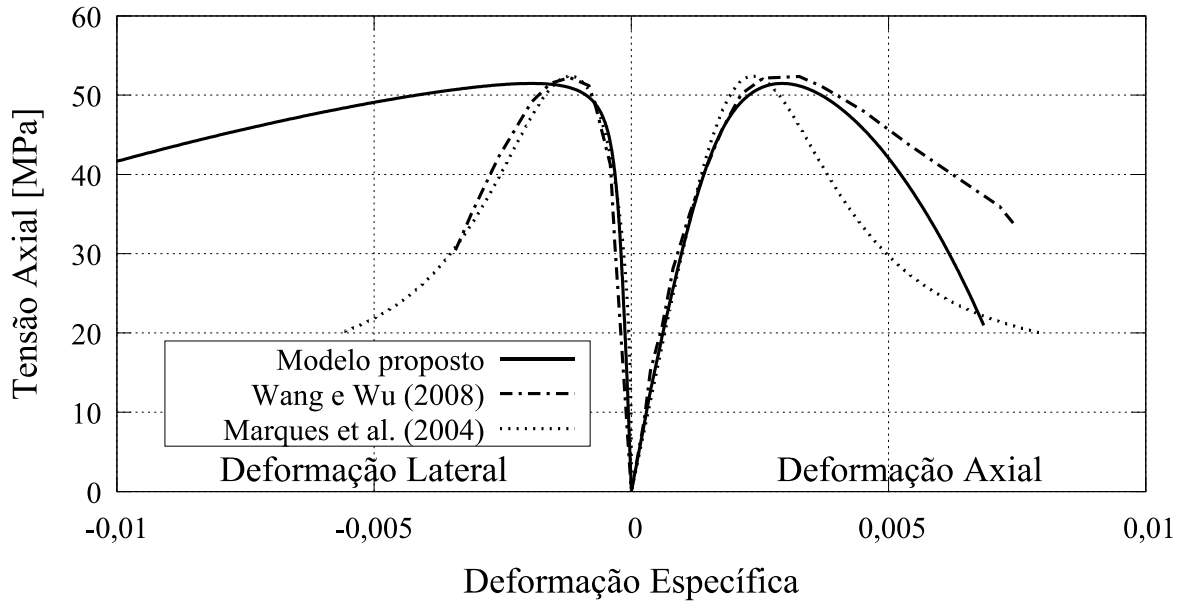
Os resultados dos testes com duas camadas de PRF foram similares aos de uma camada, o modelo proposto apresentou um bom desempenho em todos os casos, enquanto que o modelo de MARQUES *et al.* (2004) não teve desempenho tão bom.

As Figuras 101 a 106 mostram os resultados das comparações com os ensaios do concreto com maior resistência e uma camada de PRF, variando o fator de forma.



**Figura 101 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 9,53$  e  $\mu = 0$**

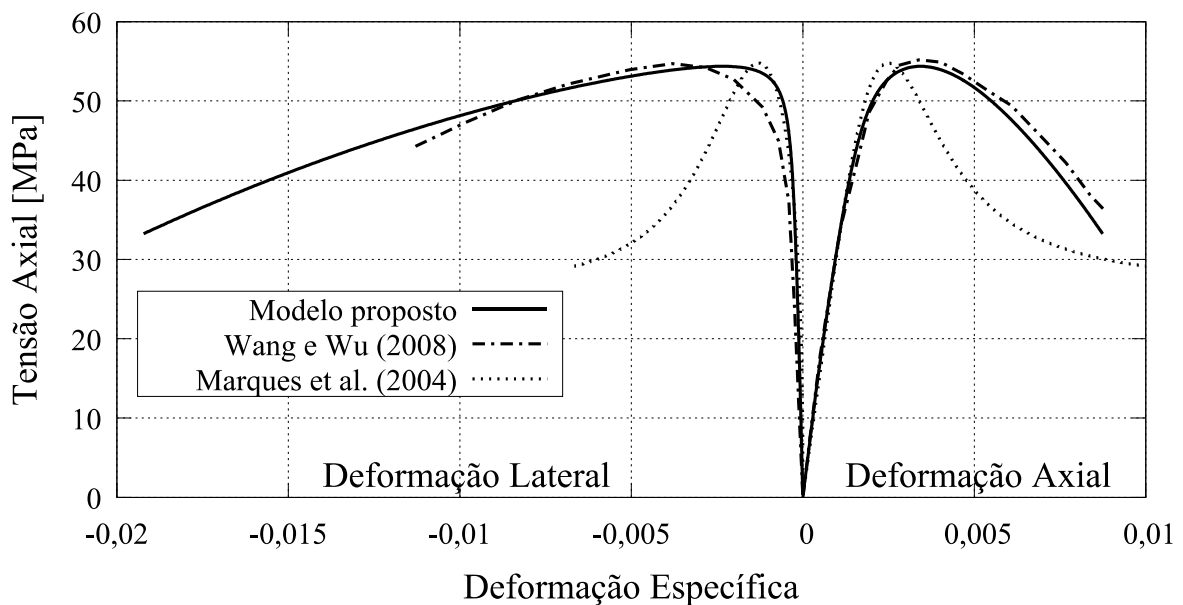
Taxa de rigidez do confinamento: 9,53; Fator de forma: 0  
Resistência do Concreto: 52,1 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 102 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 9,18$  e  $\mu = 0,2$**

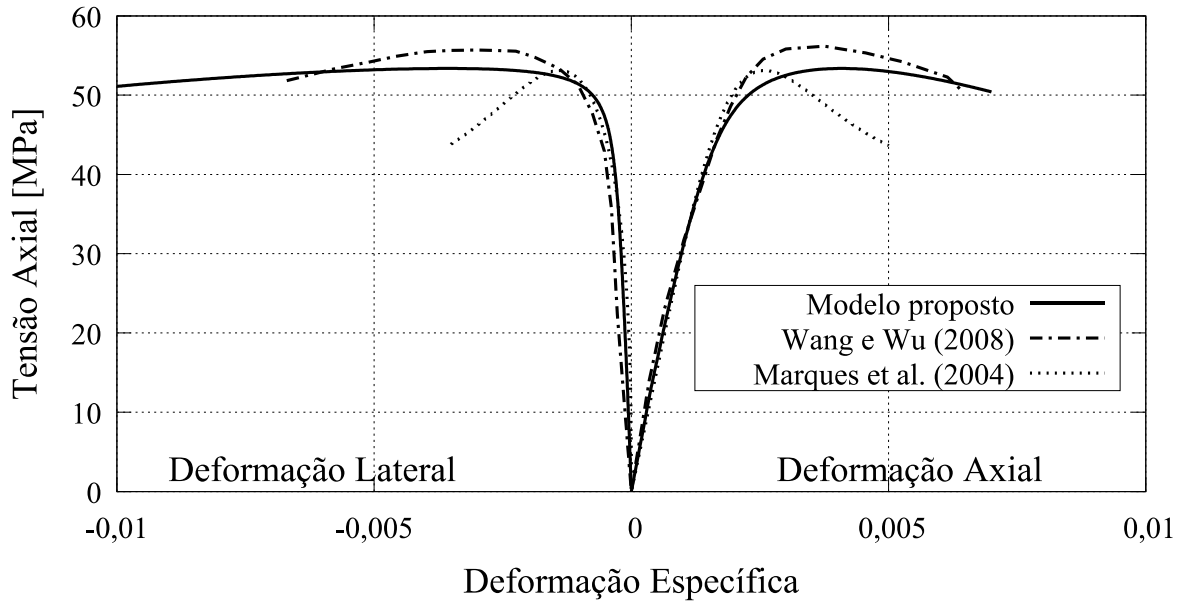
Taxa de rigidez do confinamento: 9,18; Fator de forma: 0,2  
Resistência do Concreto: 54,1 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 103 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 9,55$  e  $\mu = 0,4$**

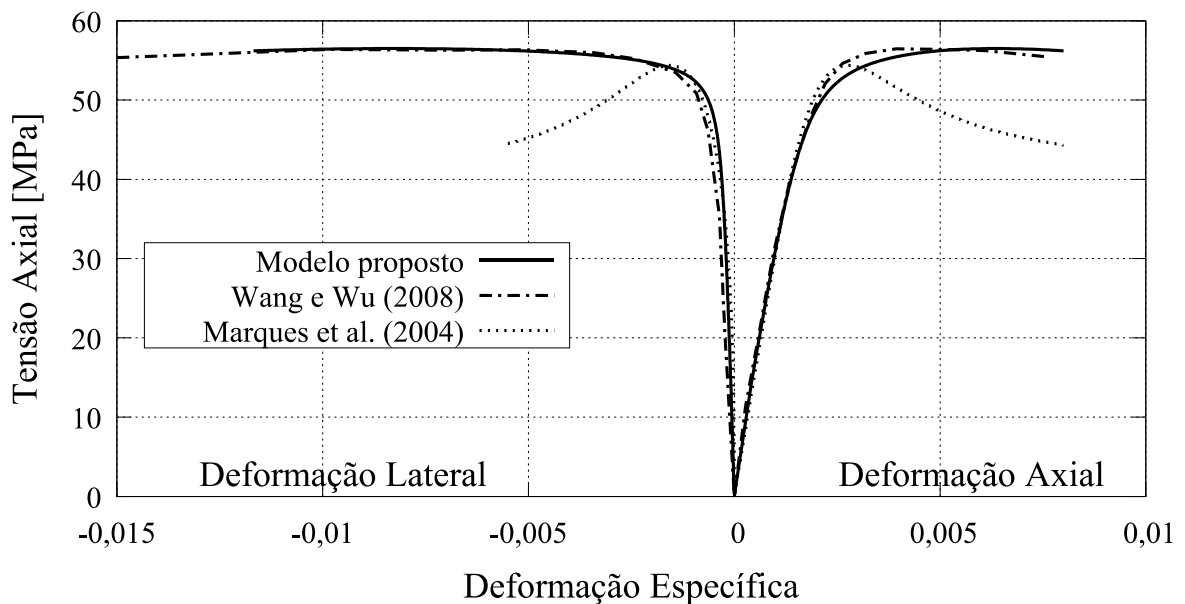
Taxa de rigidez do confinamento: 9,55; Fator de forma: 0,4  
Resistência do Concreto: 52,0 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 104 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 9,42$  e  $\mu = 0,6$**

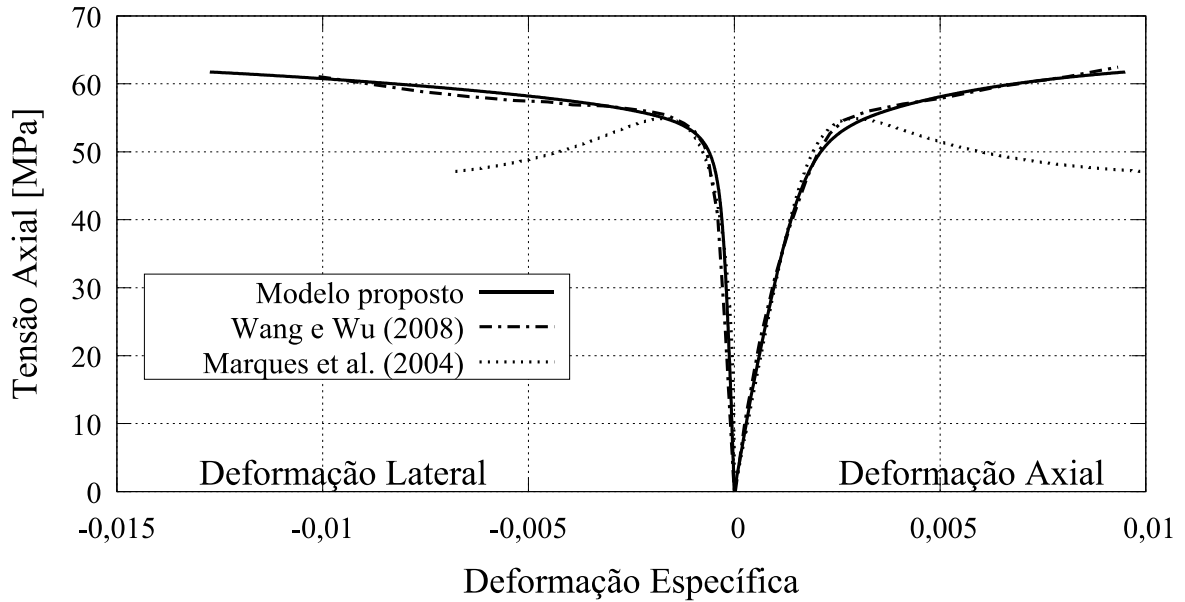
Taxa de rigidez do confinamento: 9,42; Fator de forma: 0,6  
Resistência do Concreto: 52,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 105 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 9,42$  e  $\mu = 0,8$**

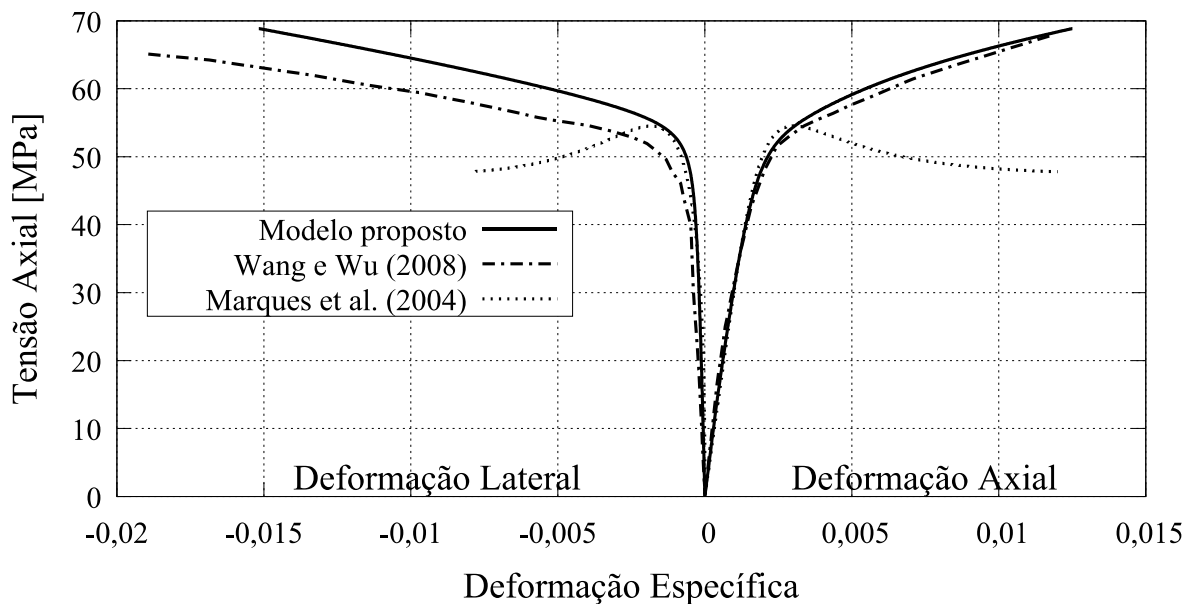
Taxa de rigidez do confinamento: 9,42; Fator de forma: 0,8  
Resistência do Concreto: 52,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 106 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 9,53$  e  $\mu = 1,0$**

Taxa de rigidez do confinamento: 9,53; Fator de forma: 1,0  
Resistência do Concreto: 52,1 MPa



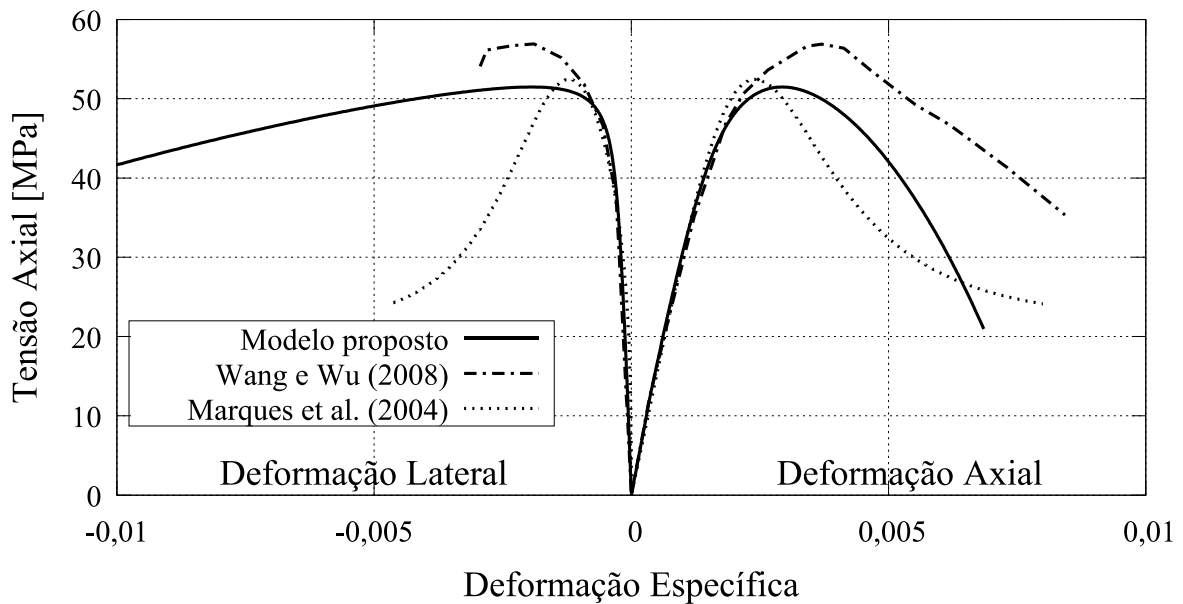
Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Para os exemplos com maior resistência do concreto e uma camada de PRF, observou-se que houve boa concordância entre os resultados do modelo proposto com os experimentais. Isso foi observado inclusive para o teste de quinas vivas, já que nesse caso os experimentos resultaram num gráfico com forma típica de concreto não confinado. Vale destacar que para a curva tensão axial-deformação lateral da Figura 101, o modelo proposto não apresentou bom desempenho.

As Figuras 107 a 112 mostram os resultados das comparações com os ensaios do concreto com maior resistência e duas camadas de PRF, variando o fator de forma.

**Figura 107 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 19,06$  e  $\mu = 0$**

Taxa de rigidez do confinamento: 19,06; Fator de forma: 0  
Resistência do Concreto: 52,1 MPa



**Fonte:** Elaborado pela autora, 2017.

Figura 108 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 18,36$  e  $\mu = 0,2$

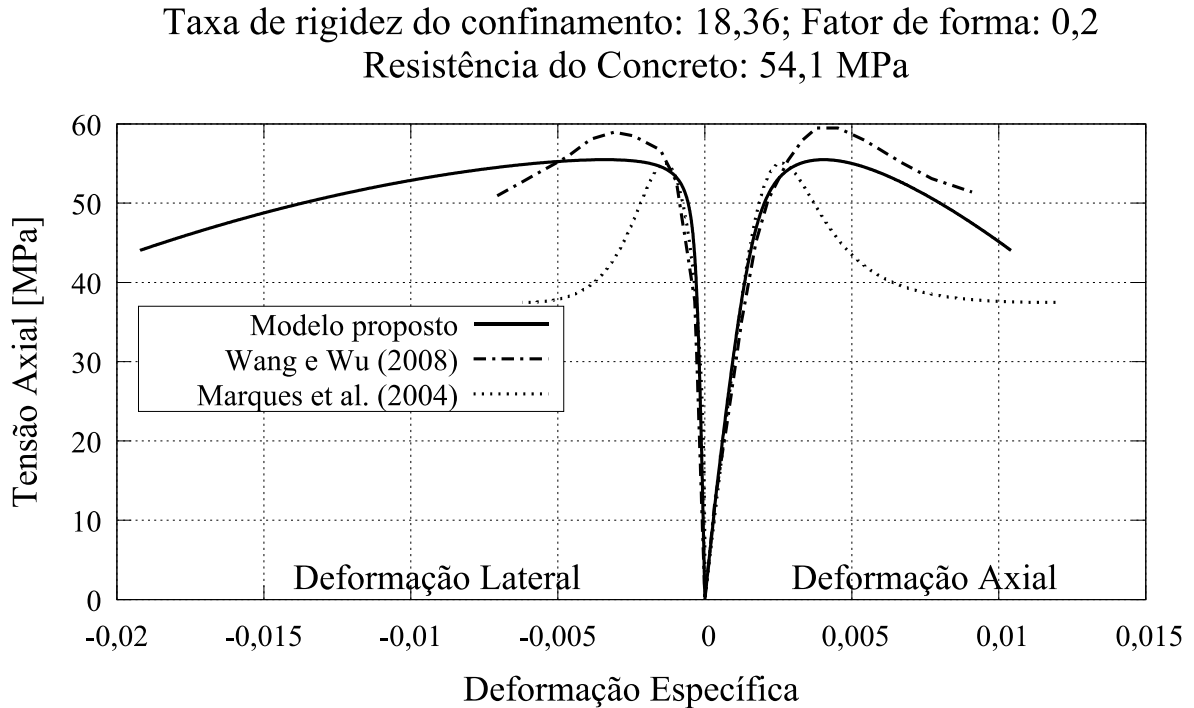


Figura 109 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 19,10$  e  $\mu = 0,4$

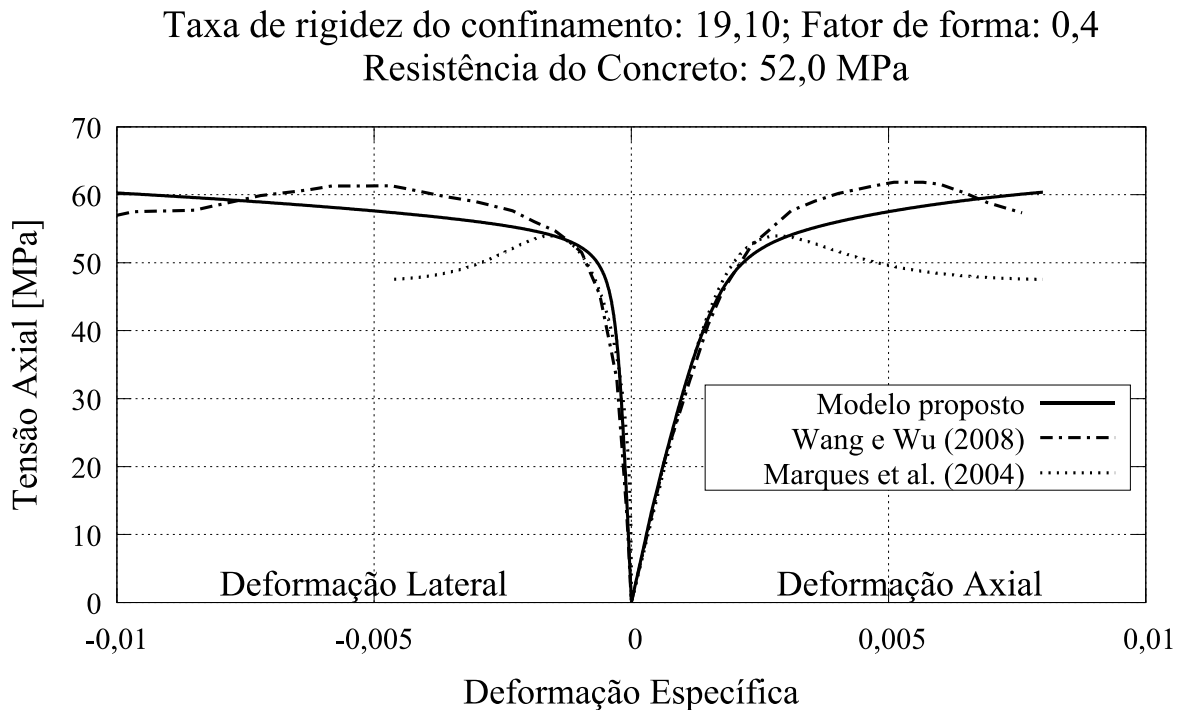
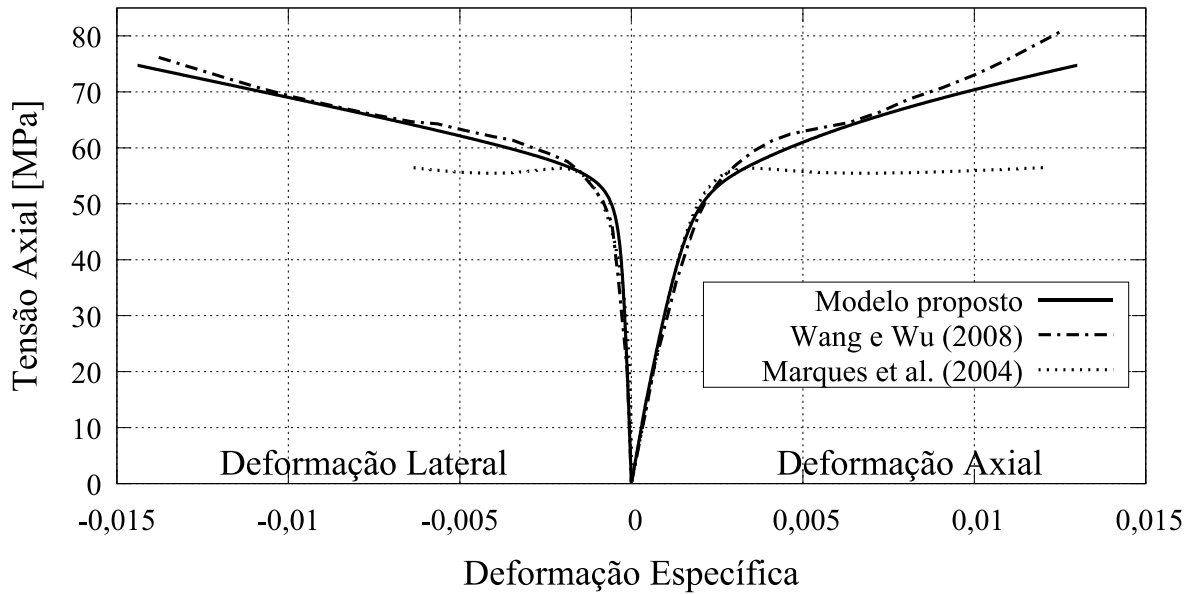


Figura 110 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 18,84$  e  $\mu = 0,6$

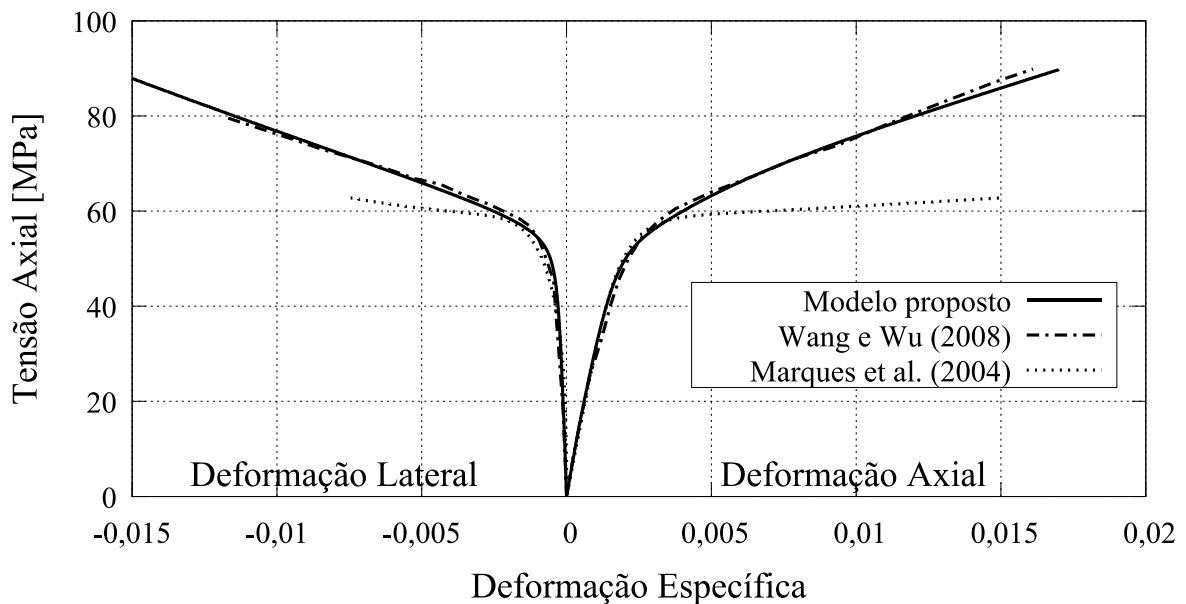
Taxa de rigidez do confinamento: 18,84; Fator de forma: 0,6  
Resistência do Concreto: 52,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Figura 111 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 18,84$  e  $\mu = 0,8$

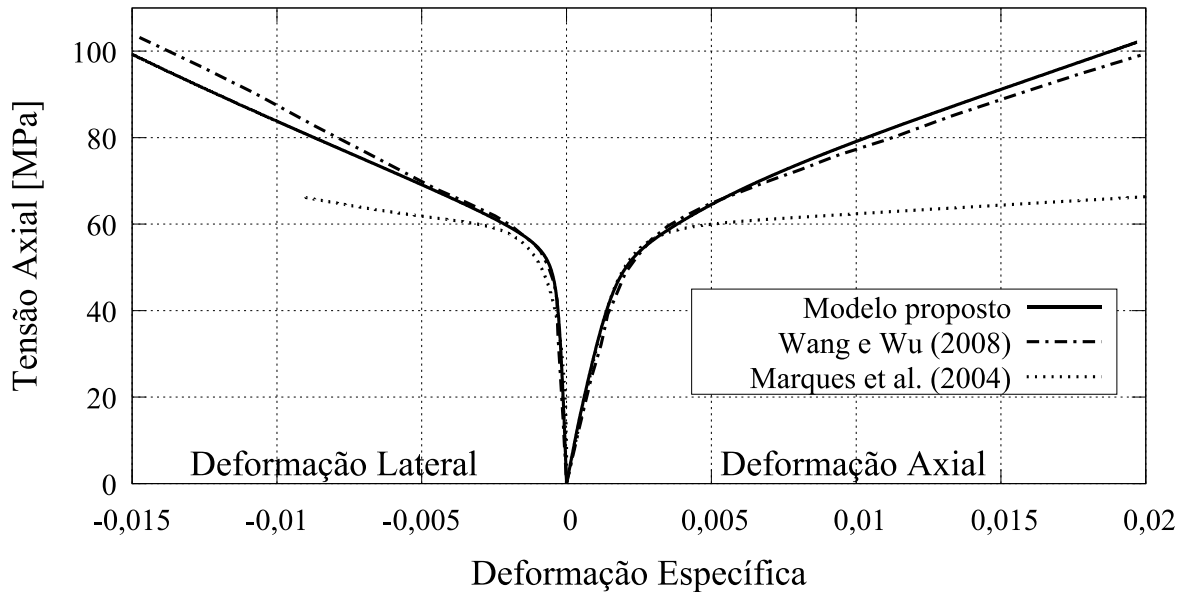
Taxa de rigidez do confinamento: 18,84; Fator de forma: 0,8  
Resistência do Concreto: 52,7 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

**Figura 112 – Comparação com resultados de WANG e WU (2008) para  $\rho = 19,06$  e  $\mu = 1,0$**

Taxa de rigidez do confinamento: 19,06; Fator de forma: 1,0  
Resistência do Concreto: 52,1 MPa



Fonte: Elaborado pela autora, 2017.

Para os exemplos com maior resistência do concreto e duas camadas de PRF, novamente observou-se um bom desempenho do modelo proposto, e quanto mais próximo da unidade estava o fator de forma, mais os resultados do modelo proposto se aproximavam dos dados experimentais. Novamente, o modelo de MARQUES *et al.* (2004) não apresentou um bom desempenho.

#### 5.3.4 Análise dos resultados

Em geral, observa-se que o modelo proposto gera resultados com uma concordância razoável com os experimentais, tanto para análises em relação à deformação axial da coluna quanto para a deformação lateral. Pelos resultados analisados, não é possível distinguir se o modelo tem melhor desempenho com fatores de forma maiores ou menores, nem se tende a superestimar ou subestimar a rigidez do concreto confinado. Observa-se, ainda, que o modelo de MARQUES *et al.* (2004) não apresentou um bom desempenho na comparação com resultados de experimentos em colunas quadradas.

Os gráficos apresentados no Capítulo 4, para colunas de seção transversal circular, em geral, mostram uma melhor concordância dos resultados modelo proposto com os dados experimentais que os gráficos deste capítulo, para colunas de seção transversal quadrada. Entretanto, vale ressaltar que os resultados obtidos com o modelo proposto apresentaram uma ótima concordância com os dados experimentais de WANG e WU (2008).



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 Conclusões

Este trabalho apresentou um estudo sobre o comportamento de colunas de concreto de seção transversal circular e quadrada confinadas lateralmente por mantas de PRF. Inicialmente foram consideradas as colunas com seção circular e, em seguida, aquelas de seção transversal quadrada. Em todos os casos as colunas foram admitidas com carregamento centrado. O estudo foi desenvolvido através de um procedimento incremental-iterativo construído com base na hipótese de que o concreto tem um comportamento elastoplástico não associado e o material confinante é elástico linear.

Para a modelagem das colunas de seção circular, o comportamento do concreto foi simulado por um modelo elastoplástico de Drucker – Prager com os parâmetros do material propostos por JIANG e WU (2014). Visando a verificação e validação do modelo implementado, seus resultados foram comparados com dados experimentais existentes na literatura e com resultados obtidos pelos modelos do ACI (2008) e MARQUES et al. (2004). Esta análise comparativa mostrou uma boa aproximação dos resultados encontrados pelo modelo em relação àqueles obtidos experimentalmente, apresentando, em geral, um desempenho superior quando comparado com os outros modelos utilizados. O bom desempenho dos resultados do modelo proposto foi observado tanto nas curvas referentes às análises com deformações axiais quanto nas que analisam a deformação lateral. Na maioria dos resultados apresentados, o modelo proposto superestimou a rigidez do concreto confinado.

A modelagem das colunas com seção transversal quadrada foi efetuada utilizando o mesmo algoritmo incremental – iterativo usados nas análises das colunas de seção circular. Isto foi possível devido ao emprego de uma estratégia de uniformização dos campos de tensão e de deformação ao longo da seção transversal da coluna, tendo como base o conceito de fator forma como o parâmetro de controle da taxa de rigidez do confinamento. Através desta estratégia o modelo de análise foi unificado e empregado para descrição do comportamento das colunas de seção transversal quadrada.

A verificação desse modelo proposto se deu com a comparação de resultados do mesmo com dados experimentais e com outro modelo existente na literatura. No geral observou-se uma

boa concordância dos resultados modelo implementado com os experimentais, e esse modelo teve desempenho superior ao modelo de MARQUES *et al.* (2004). Embora os resultados apresentados tenham se mostrado satisfatórios, são necessários estudos adicionais de comparação com diferentes parâmetros (como o de WANG e WU, 2008) para melhor avaliar o comportamento do modelo proposto em relação aos experimentos.

A modelagem de colunas confinadas é um tema que já foi e ainda vem sendo bastante estudado. A complexidade do problema, especialmente para colunas de seção transversal não circular, se mostra como um grande fator para que ainda não se tenha um procedimento que consiga descrever com precisão casos gerais de colunas confinadas. O presente trabalho consiste em uma contribuição a esse estudo, mostrando o potencial que pode ter um modelo de base mais racional.

## **6.2 Sugestões de Trabalhos Futuros**

Ainda há muitas questões que necessitam de mais estudo ao tratar de colunas confinadas. Algumas sugestões de trabalhos para tratar dessas questões são:

- a) Formular modelos baseados na teoria de plasticidade para analisar colunas de seção transversal retangular encamisadas;
- b) Inclusão dos efeitos das armaduras sobre o grau de confinamento de colunas de concreto armado encamisadas;
- c) Estudar colunas de concreto confinado submetidas a carregamento excêntrico.

## REFERÊNCIAS

- AHMAD, S. M.; KHALOO, A. R.; IRSHAID, A. Behaviour of Concrete Spirally Confined by Fiberglass Filaments. **Magazine of Concrete Research**, v. 43, n. 156, p. 143-148, Set., 1991.
- AIRE, C.; GETTU, R.; CASAS, J. R.; MARQUES, S.; MARQUES, D. Concrete Laterally Confined with Fibre-Reinforced Polymers (FRP): Experimental Study and Theoretical Model. **Materiales de Construcción**, v. 60, n. 297, p. 19-31, Jan.-Mar., 2010.
- ALBANESI, T.; NUTI, C.; VANZI, I. Closed Form Constitutive Relationship for Concrete Filled FRP Tubes Under Compression. **Construction and Building Materials**, v. 21, n. 2, p. 409-427, Fev., 2007.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 440.2R-08: **Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures**. Farmington Hills (Estados Unidos), 2008.
- BARROS, M.H.F.M. Elasto-Plastic Modelling of Confined Concrete Elements Following MC90 Equations. **Engineering Structures**, v. 23, n. 4, p. 311-318, Abr., 2001.
- BERTHET, J.F.; FERRIER, E.; HAMELIN, P. Compressive Behavior of Concrete Externally Confined by Composite Jackets. Part B: Modeling. **Construction and Building Materials**, v. 20, n. 5, p. 338-347, Jun., 2006.
- BINICI, B. An Analytical Model for Stress-Strain Behavior of Confined Concrete. **Engineering Structures**, v. 27, n. 7, p. 1040-1051, Jun., 2005.
- BINICI, B. Design of FRPs in Circular Bridge Column Retrofits for Ductility Enhancement. **Engineering Structures**, v. 30, n. 3, p. 766-776, Mar., 2008.
- CARRAZEDO, R. **Mecanismos de Confinamento e Suas Implicações no Reforço de Pilares de Concreto por Encamisamento com Compósito de Fibras de Carbono**. Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo. São Carlos, 2002.
- CARRAZEDO, R.; HANAI, J. B. Concrete Prisms and Cylinders Wrapped by FRP Loaded in Compression with Small Eccentricities. **Journal of Composites for Construction**, v. 21, n. 4, Ago., 2017.
- CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606 p.
- CHEN, W.F. **Plasticity in reinforced concrete**. reimpr. New York: McGraw-Hill, 1982. 474 p.
- COELHO, K. O. **Estudo de Modelos Representativos de Pilares Confinados com PRFC Submetidos a Carregamento Excêntrico**. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2014.

- COWIN, S.C. On the Strength Anisotropy of Bone and Wood. **Journal of Applied Mechanics**, v. 46, n. 4, p. 832-838, Dez., 1979.
- CUI, C. **Behaviour of Normal and High Strength Concrete Confined with Fibre Reinforced Polymers (FRP)**. Tese de Doutorado – Department of Civil Engineering, University of Toronto. Toronto, 2009.
- CUSSON, D.; PAULTRE, P. High-Strength Concrete Columns Confined by Rectangular Ties. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 3, p. 783-804, Mar., 1994.
- CUSSON, D.; PAULTRE, P. Stress-Strain Model for Confined High-Strength Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 3, p. 468-477, Mar., 1995.
- EID, R.; PAULTRE, P. Plasticity-Based Model for Circular Concrete Columns Confined with Fibre-Composite Sheets. **Engineering Structures**, v. 29, p. 3301-3311, 2007.
- EL-DASH, K.M.; AHMAD, S.H. A Model for the Stress-Strain Relationship of Rectangular Confined Normal and High Strength Concrete Columns. **Materials and Structures**, v. 27, n. 10, p. 572-579, Dez., 1994.
- FAHMY, M. F. M.; WU, Z. Evaluating and Proposing Models of Circular Concrete Columns Confined with Different FRP Composites. **Composites: Part B**, v. 41, n. 3, p. 199-213, Abr., 2010.
- FARDIS, M. N.; KHALILI, H. Concrete Encased in Fiberglass-Reinforced Plastic. **ACI Journal**, v. 78, p. 440-446, 1981.
- FARDIS, M. N.; KHALILI, H. FRP-Encased Concrete as a Structural Material. **Magazine of Concrete Research**, v. 34, n. 121, p. 191-202, Dez., 1982.
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON – FIB. **Structural concrete: textbook on behaviour, design and performance**. Bulletin 1, v.1. Lausanne: Sprint-Druck Stuttgart, 1999. 224 p.
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON – FIB. **Externally bonded FRP reinforcement for RC structures**. Bulletin 14 – Technical Report, Lausanne: Sprint-Druck Stuttgart, 2001. 130 p.
- GARCEZ, M. R., **Alternativas para Melhorias no Desempenho de Estruturas de Concreto Armado Reforçadas pela Colagem de Polímeros Reforçados com Fibras**. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2007.
- GRASSL P.; XENOS, D.; NYSTRÖM, U.; REMPLING, R.; GYLLTOFT, K. CDPM2: A Damage Plasticity Approach to Modelling the Failure of Concrete. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, p.3805-3816, 2013.

JIANG, J.; WU, Y. Identification of Material Parameters for Drucker-Prager Plasticity Model for FRP Confined Circular Concrete Columns. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, p. 445-456, 2012.

JIANG, J.; WU, Y. Characterization of Yield Surfaces for FRP-Confined Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 140, n. 12, Dez., 2014.

JIANG, T.; TENG, J.G. Analysis-Oriented Stress–Strain Models for FRP–Confined Concrete. **Engineering Structures**, v. 29, n. 11, p. 2968-2986, Nov., 2007.

KABIR, M.; SHAFEI, E. Plasticity Modeling of FRP-Confined Circular Reinforced Concrete Columns Subjected to Eccentric Axial Loading. **Composites: Part B**, v. 43, p.3497-3506, 2012.

KARABINIS, A. I.; KIOUSIS, P. D. Effects of Confinement on Concrete Columns: A Plasticity Theory Approach. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 9, p. 2747-2767, Set., 1994.

KARABINIS, A. I.; KIOUSIS, P. D. Plasticity Computations for the Design of the Ductility of Circular Concrete Columns. **Computers & Structures**, v. 60, n. 5, p. 825-835, Jul., 1996a.

KARABINIS, A. I.; KIOUSIS, P. D. Strength and Ductility of Rectangular Concrete Columns: A Plasticity Approach. **Journal of structural engineering**, v. 122, n. 3, p. 267-274, Mar., 1996b.

KARBHARI, V. M.; GAO, Y. Composite Jacketed Concrete Under Uniaxial Compression-Verification of Simple Design Equations. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 9, n. 4, p. 115-124, Nov., 1997.

LAM, L.; TENG, J. G. Strength Models for Fiber-Reinforced Plastic-Confined Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 128, p. 612-623, Mai., 2002.

LAM, L.; TENG, J. G. Design-Oriented Stress-Strain Model for FRP-Confined Concrete. **Construction and Building Materials**, v. 17, n. 6-7, p. 471-489, Set.-Out., 2003a.

LAM, L.; TENG, J. G. Design-Oriented Stress-Strain Model for FRP-Confined Concrete in Rectangular Columns. **Journal of reinforced plastics and composites**, v. 22, n. 13, p. 1149-1186, Set., 2003b.

LI, Y. F.; LIN, C. T.; SUNG, Y. Y. A Constitutive Model for Concrete Confined with Carbon Fiber Reinforced Plastics. **Mechanics of Materials**, v. 35, n. 3-6, p. 603-619, 2003.

MANDER, J.B.; PRIETSLEY, M.J.N; PARK, R.J.T. Theoretical Stress Strain Model for Confined Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v.114, n. 8, p.1804-1827, Set., 1988.

MARQUES, S. P. C.; MARQUES, D. C. S. C.; SILVA, J. L.; CAVALCANTE, M. A. A. Model for Analysis of Short Columns of Concrete Confined by Fiber-Reinforced Polymer. **Journal of Composites for Construction**, v. 8, n. 4, p. 332-340, Jul. 2004.

- MATTHYS, S.; TOUTANJI, H.; TAERWE, L. Stress-Strain Behavior of Large-Scale Circular Columns Confined with FRP Composites. **Journal of Structural Engineering**, v. 132, n. 1, p. 123-133, Jan., 2006.
- MEHTA, P. M.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. São Paulo: IBRACON, 2014. 782 p.
- MIRMIRAN, A.; SHAHAWY, M. Behavior of Concrete Columns Confined by Fiber Composites. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 5, p. 583-590, Mai., 1997.
- MIRMIRAN, A.; SHAHAWY, M.; SAMAAN, M.; ECHARY, H.E.; MASTRAPA, J.C.; PICO, O. Effect of Column Parameters on FRP-Confined Concrete. **Journal of Composites for Construction**, v. 2, n. 4, p. 175-185, Nov., 1998.
- MIRMIRAN, A.; ZAGERS, K.; YUAN, W. Nonlinear Finite Element Modeling of Concrete Confined by Fiber Composites. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 35, n. 1, p. 79-96, Abr., 2000.
- MORAN, D. A.; PANTELIDES, C. P. Stress-Strain Model for Fiber-Reinforced Polymer-Confined Concrete. **Journal of Composites for Construction**, v. 6, n. 4, p. 233-240, Nov., 2002.
- NANNI, A.; BRADFORD, N. M. FRP Jacketed Concrete Under Uniaxial Compression. **Construction and Building Materials**, v. 9, n. 2, p. 115-124, 1995.
- OZBAKKALOGLU, T.; LIM, J. C.; VINCENT, T., FRP-Confined Concrete in Circular Sections: Review and Assessment of Stress-Strain Models. **Engineering Structures**, v. 49, p. 1068-1088, Abr., 2013.
- PANTAZOPOULOU, S. J. Role of Expansion on Mechanical Behavior of Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 12, p. 1795-1805, Dez., 1995.
- PROENÇA, S. P. B., **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. Tese de Doutorado – Universidade de São Paulo. São Carlos, 1988.
- RAZVI, S.; SAATCIOGLU, M. Confinement Model for High-Strength Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 125, n. 3, p. 281-289, Mar., 1999.
- RIVETTI, M. L. S., **Estudo de Colunas Curtas de Concreto Armado Confinado com Polímeros Reforçados com Fibras**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2013.
- ROCCA, S.; GALATI, N.; NANNI, A. Review of Design Guidelines for FRP Confinement of Reinforced Concrete Columns of Noncircular Cross Sections. **Journal of Composites for Construction**, v. 12, n. 1, p. 80-92, Jan., 2008.

ROCHETTE, P.; LABOSSIERE, P. Axial Testing of Rectangular Column Models Confined with Composites. **Journal of Composites for Construction**, v. 4, n. 3, p. 129-136, Ago., 2000.

ROUSAKIS, T.C.; KARABINIS, A.I.; KIOUSIS, P.D.; TEPFERS, R. Analytical Modelling of Plastic Behaviour of Uniformly FRP Confined Concrete Members. **Composites: Part B**, v. 39, n. 7-8, p. 1104-1113, Out.-Dez., 2008.

SAADATMANESH, H.; EHSANI, M. R.; LI, M. W. Strength and Ductility of Concrete Columns Externally Reinforced with Fiber Composite Straps. **ACI Structural Journal**, v. 91, n. 4, p. 434-447, 1994.

SADEGHIAN, P.; FAM, A. A Rational Approach Toward Strain Efficiency Factor of Fiber-Reinforced Polymer-Wrapped Concrete Columns. **ACI Structural Journal**, v. 111, n. 1, p. 135-144, Jan.-Fev., 2014.

SAIIDI, M.S.; SURESHKUMAR, K.; PULIDO, C. Simple Carbon-Fiber-Reinforced-Plastic-Confined Concrete Model For Moment-Curvature Analysis. **Journal of Composites for Construction**, v.9, n. 1, p. 101-104, Jan.-Fev., 2005.

SAMAAN, M.; MIRMIRAN, A.; SHAHAWY, M. Model of Concrete Confined By Fiber Composites. **Journal of Structural Engineering**, v.124, p. 1025-1031, Set., 1998.

SHEIKH, S.A.; UZUMERI, S.M. Analytical Model for Concrete Confinement in Tied Columns. **Journal of the Structural Division**, v.108, p. 2703-2722, Dez., 1982.

SILVA, A.S. **Comportamento de pilares curtos confinados por compósitos de fibra de vidro e carbono**. Dissertação de Mestrado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

SPOELSTRA, M. R.; MONTI, G. FRP-Confined Concrete Model. **Journal of Composites for Construction**, v. 3, n. 3, p. 143-150, Ago., 1999.

TENG, J.G.; LAM, L. Behavior and Modeling of Fiber Reinforced Polymer-Confined Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 130, n. 11, p. 1713-1723, Nov., 2004.

TENG, J.G.; HUANG, Y.L.; LAM, L.; YE, L. Theoretical Model for Fiber-Reinforced Polymer-Confined Concrete. **Journal of Composites for Construction**, v. 11, n. 2, p. 201-210, Mar.-Abr., 2007.

TENG, J.G.; JIANG, T.; LAM, L.; LUO, Y.Z. Refinement of a Design-Oriented Stress-Strain Model for FRP-Confined Concrete. **Journal of Composites for Construction**, v. 13, n. 4, p. 269-278, Jul.-Ago., 2009.

TSAI, S.W.; WU, E.M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. **Journal of Composites Materials**, v. 5, n. 1, p. 58-80, Jan., 1971.

VINCENT, T.; OZBAKKALOGLU, T. Influence of Concrete Strength and Confinement Method on Axial Compressive Behavior of FRP Confined High- And Ultra High-Strength Concrete. **Composites: Part B**, v.50, p. 413-428, 2013.

WANG, L.; WU, Y. Effect of Corner Radius on the Performance of CFRP-Confined Square Concrete Columns: Test. **Engineering Structures**, v. 30, n. 2, p. 493-505, Fev., 2008.

WOLF, J. **A Plasticity Model to Predict the Effects of Confinement on Concrete**. Tese de Doutorado – California Institute of Technology. Pasadena, California, 2008.

WU, G.; WU, Z.S.; LU, Z. T.; ANDO, Y. B. Structural Performance of Concrete Confined with Hybrid FRP Composites. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 27, n. 12, p. 1323-1348, 2008.

WU, Y.; WANG, L. Unified Strength Model for Square and Circular Concrete Columns Confined by External Jacket. **Journal of Structural Engineering**, v. 135, n. 3, p. 253-261, Mar., 2009.

WU, H.; WANG, Y.; YU, L.; LI, X. Experimental and Computational Studies on High-Strength Concrete Circular Columns Confined By Aramid Fiber-Reinforced Polymer Sheets. **Journal of Composites for Construction**, v. 13, n. 2, p. 125-134, Abr., 2009.

WU, Y.; LIU, T.; OEHLERS, D.J. Fundamental Principles that Govern Retrofitting of Reinforced Concrete Columns by Steel and FRP Jacketing. **Advances in Structural Engineering**, v. 9, n. 4, p. 507-533, 2006.

WU, Y.; ZHOU, Y. Unified Strength Model Based on Hoek-Brown Failure Criterion for Circular and Square Concrete Columns Confined by FRP. **Journal of Composites for Construction**, v. 14, n. 2, p. 175-184, Mar.-Abr., 2010.

XIAO, Q.G.; TENG, J.G.; YU, T. Behavior and Modeling of Confined High-Strength Concrete. **Journal of Composites for Construction**, v. 14, n. 3, p. 249-259, Mai.-Jun., 2010.

XIAO, Y.; WU, H. Compressive Behavior of Concrete Confined by Carbon Fiber Composite Jackets. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 12, n. 2, p. 139-146, Mai., 2000.

XIAO, Y.; WU, H. Compressive Behavior of Concrete Confined by Various Types of FRP Composite Jackets. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 22, n. 13, p. 1187-1201, Set., 2003.

YONGCHANG, G.; JIANHE, X.; ZHIHONG, X.; JIAN, Z. Experimental Study on Compressive Behavior of Damaged Normaland High-Strength Concrete Confined With CFRP Laminates. **Construction and Building Materials**, v. 107, p. 411-425, 2016.

YOUSSEF, M. N.; FENG, M. Q.; MOSALLAM, A. S. Stress–Strain Model For Concrete Confined By Frp Composites. *Composites: Part B*, v. 38, n. 5-6, p. 614-628, Jul.-Set., 2007.



YU, T.; TENG, J. G. Design of Concrete-Filled FRP Tubular Columns: Provisions in the Chinese Technical Code for Infrastructure Application of FRP Composites. **Journal of Composites for Construction**, v. 15, n. 3, p. 451-461, Jun., 2011.

YU, T.; TENG, J. G.; WONG, Y. L.; DONG, S. L. Finite Element Modeling of Confined Concrete-I: Drucker-Prager Type Plasticity Model. **Engineering Structures**, v. 32, p. 665-679, 2010a.

YU, T.; TENG, J. G.; WONG, Y. L.; DONG, S. L. Finite Element Modeling of Confined Concrete-II: Plastic Damage Model. **Engineering Structures**, v. 32, p. 680-691, 2010b.

**APÊNDICE A**

### Código do modelo implementado em MATLAB

```

function ColunaConfPassivo
(B, rc, fc, E, t, Ef, efu, ke, F1t, F1c, F2t, F2c, Ex, Ey, Nxy, Nyx, arquivo)

% Dados de entrada
%
% B = Lado da coluna (m)
% rc = Raio de arredondamento dos cantos (m)
% fc = Resistência do Concreto (MPa)
% E = Módulo de elasticidade do concreto (MPa) (0 se for calcular)
% t = Espessura da camisa (m)
% Ef = Módulo de Elasticidade da Camisa (MPa)
% efu = Deformação específica de ruptura da camisa
% ke = Fator de Eficiência (0 se for calcular por Tsai-Wu)
% F1t = Resistência à tração longitudinal (MPa)
% F1c = Resistência à compressão longitudinal (MPa)
% F2t = Resistência à tração transversal (MPa)
% F2c = Resistência à compressão transversal (MPa)
% Ex = Módulo de elasticidade longitudinal (MPa)
% Ey = Módulo de elasticidade transversal (MPa)
% Nxy = Coeficiente de poisson maior
% Nyx = Coeficiente de poisson menor
% arquivo = Nome do arquivo de resultados

% E = Módulo de Elasticidade do Concreto
if (E == 0)
    E = 4734*sqrt(fc);
end

% Ni = Coeficiente de Poisson do Concreto
Ni = 0.2;

% Fator de forma
p = 2*rc/B;

% ro = taxa de confinamento
ro = (2*Ef*t*p)/(fc*B);

Del = -(10^(-5)); % Incrementos de deformação
tol = (10^(-8)); % Tolerância do cálculo de tensão
nMAXit = 100; % Número máximo de iterações para cálculo de tensão
s1 = 0; % Inicializando o valor de Tensão na direção longitudinal
e1 = 0; % Inicializando o valor de deformação na direção longitudinal
sr = 0; % Inicializando o valor de Tensão na direção radial
er = 0; % Inicializando o valor de deformação na direção radial
efr = 1; % Inicializando o valor de deformação de ruptura na camisa

plast = 0; % Inicializando o parâmetro que diz se o concreto
           % está ou não plastificado

% Matriz constitutiva elástica
Em = (E/((1+Ni)*(1-2*Ni)))*[1-Ni  Ni  Ni; Ni  1-Ni  Ni; Ni  Ni  1-Ni];

```

```

eec = 0; % Inicializando o valor da trajetória de deformação plástica

elp = 0; % Inicializando o valor da deformação axial plástica
erp = 0; % Inicializando o valor da deformação lateral plástica

N = 0; % Inicializando a contagem de incrementos de deformação

while er<=efr % Varre os incrementos de deformação
    N = N + 1; % Faz a contagem de incrementos de deformação
    err = 1; % Inicializa a variável que mede o erro nas iterações do
        % cálculo de tensão no concreto confinado
    e1 = e1 + Del; % Atualização do valor da deformação axial
    Dsr= 0; % Inicializa o valor da variação de tensão radial
    nit=0; % Inicializa a contagem de iterações do cálculo de tensões

    % Definição da matriz constitutiva do concreto
    if (plast ==1) % Testa se o concreto já plastificou
        Dm = Dm; % Se o concreto plastificou, a matriz constitutiva será D
            % que é a matriz constitutiva elastoplástica
    else
        Dm = Em; % Se o concreto não plastificou, a matriz constitutiva
            % será a elástica, E
    end

    % Atualização dos valores de tensão e deformação no concreto,
    % para nova deformação axial
    while (err>tol & nit<nMAXit) % Enquanto o erro for maior que a
        % tolerância e não se atinge o número
        % máximo de iterações
        nit=nit+1; % Contagem das iterações
        Der = (Dsr-Dm(2,1)*Del)/(Dm(2,2)+Dm(2,3)); % Cálculo da variação
            % da deformação radial

        Ds1 = Dm(1,1)*Del+(Dm(1,2)+Dm(1,3))*Der; % Cálculo da variação da
            % tensão axial

        Dsra=Dsr; % Guardando o valor da tensão radial da iteração anterior

        Dsr = -ro*Der*fc; % Cálculo da variação da tensão radial

        err = abs(Dsr-Dsra)/abs(Dsr); % Verificação da diferença relativa
            % da tensão radial nas iterações
            % anterior e corrente
    end

    s1 = s1+Ds1; % Atualização do valor de tensão na direção axial
    sr = sr+Dsr; % Atualização do valor de Tensão na direção radial
    er = er+Der; % Atualização do valor de deformação na direção radial

    % Cálculo da tensão de ruptura da camisa
    if (ke==0) % Cálculo pelo fator de eficiência de Tsai-Wu

```

```

f1 = (1/F1t)-(1/F1c);
f2 = (1/F2t)-(1/F2c);
f11 = 1/(F1t*F1c);
f22 = 1/(F2t*F2c);
f12 = (-1/2)*((f11*f22)^(1/2));
a = f11*Ex*Ex+2*Nxy*f12*Ex*Ey+Nxy*Nxy*f22*Ey*Ey;
b = (f1+Nxy*f2)*(1-
Nxy*Nyx)*Ex+2*(Nxy*f22*Ey*Ey+Nyx*f11*Ex*Ex+Nxy*Nxy*f12*Ex*Ex+f12*Ex*Ey)*e1;
c = (f22+Nxy*Nxy*f11+2*Nxy*f12)*Ey*Ey*e1*e1+(Nxy*f1+f2)*(1-
Nxy*Nyx)*Ey*e1-(1-Nxy*Nyx)*(1-Nxy*Nyx);

efr = (b/(2*a))*(((1-(4*a*c)/(b*b))^(1/2))-1);

else % Cálculo pelo fator de eficiência dado
    efr = ke*efu;
end

% Cálculo dos parâmetros plásticos

% Cálculo da trajetória de deformação plástica
Ds = [Ds1;Dsr;Dsr]; % Monta o vetor de variação de tensões
De = [Del;Der;Der]; % Monta o vetor de variação de deformações totais

Dee = inv(Em)*Ds; % Calcula o vetor de variação de deformações elásticas

Dep = De-Dee; % Calcula o vetor de variação de deformações plásticas

elp = elp + Dep(1); % Calcula a deformação plástica acumulada na direção
longitudinal
erp = erp + Dep(2); % Calcula a deformação plástica acumulada na direção
radial

Deec = norm(Dep); % Norma do vetor de variação de deformações plásticas
eec = eec + Deec; % Calcula o acumulado das normas dos vetores de
deformações plásticas

% fi = Ângulo de atrito interno do concreto (em Radianos)
io = 13.84;
w = 21.73;
fir = 42.20;
figrau = io*exp(-w*eec)+fir; % Ângulo de atrito interno do concreto em
graus
fi = figrau*pi/180;

% beta = Coeficiente de dilatação plástica
betao = -37;
Mo = 1570;
eo = 0.01;
lambda1 = 0.0011*ro*ro-0.0277*ro+11.022;
lambda2 = (253.6+29.86*ro+2.24*ro*ro)/(1+2.24*ro);
betau = (-41.3*ro+1146)/(ro+18.38);
betagrau = (betao+(Mo+lambda1*betao)*(-elp/eo)+(lambda2*betau)*(-
elp/eo)*(-elp/eo))/(1+lambda1*(-elp/eo)+lambda2*(-elp/eo)*(-elp/eo)); %
Coeficiente de dilatação plástica em graus

```

```

beta = betagrau*pi/180;

% Cálculo de Kappa
ko = 0.125;
Ep = 2700;
napa = 6627;
a = 277;
b = 650.1;
c = 0.083;
func = a-b*exp(-c*ro);
kappa = (ko*fc+Ep*fc*(eec/(1+napa*eec))+func*eec*eec*fc);

% Cálculo do valor da função de escoamento
J1 = s1+sr+sr; % Primeiro invariante de tensão
J2 = (1/6)*((sr-s1)*(sr-s1)+(s1-sr)*(s1-sr)+(sr-sr)*(sr-sr)); % Segundo
invariante de tensão

F = sqrt(3*J2)+tan(fi)*J1/3-kappa % Função de escoamento

% Chamada para cálculo da matriz elastoplástica
if(0<=F) % Testa se a função escoamento é nula
    plast=1; % Muda o valor do parâmetro que indica plastificação para
    % indicar que houve plastificação

    [Dm] = CalculaD(s1,sr,Em,fc,beta,ro,eec); % Chama a função
    % que calcula a matriz constitutiva elastoplástica

end

% Monta os vetores de tensão e deformação, com os valores de tensão e
% Deformação em todos os incrementos de deformação para as duas direções
Ts1(N)=s1;
Tsr(N)=sr;
Tel(N)=e1;
Ter(N)=er;
end

% Arquivo com as tensões e deformações (e1, s1, er, sr)
fid = fopen(arquivo,'wt');

fprintf(fid,'#DADOS:\n');
fprintf(fid,'#Lado da coluna: %.1f cm\n',100*B);
fprintf(fid,'#Raio de arredondamento dos cantos da coluna: %.1f
mm\n',1000*rc);
fprintf(fid,'#Resistência do concreto: %.2f MPa\n',fc);
fprintf(fid,'#Espessura da camisa: %.3f mm\n',1000*t);
fprintf(fid,'#Módulo de Elasticidade da camisa: %.0f MPa\n',Ef);
fprintf(fid,'#Deformação de ruptura da camisa: %.4f\n',efu);
fprintf(fid,'#Deformação longitudinal final: %.4f\n',Tel(N));
fprintf(fid,'#Número de incrementos: %d\n', N);
fprintf(fid,'#Fator de forma: %.2f\n',p);
fprintf(fid,'#Taxa de confinamento: %.2f\n\n',ro);

fprintf(fid,'#TENSÕES E DEFORMAÇÕES:\n');

```



```
% Derivada de F em relação à deformação plástica efetiva
dFe = diff(F,ec);

% Parcela de hardening
h = -(dFe)*sqrt(transpose(dG)*dG);

% Matriz constitutiva elastoplástica com valores simbólicos de tensão
Dt = E - (E*dG*transpose(dF)*E)/(transpose(dF)*E*dG+h);

% Atribuindo valores numéricos às tensões
s1 = s;
s2 = sr;
s3 = sr;
ec = eec;

% Matriz constitutiva elastoplástica
D=eval(Dt);
end
```