UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ETNOMATEMÁTICA: Abordagem dos Diversos Tipos de Unidades de Medidas e Sua Utilização no Sertão Alagoano

José Reinaldo Nogueira da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, maio de 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ REINALDO NOGUEIRA DA SILVA

ETNOMATEMÁTICA: ABORDAGEM DOS DIVERSOS TIPOS DE UNIDADES DE MEDIDAS E SUA UTILIZAÇÃO NO SERTÃO ALAGOANO

MACEIÓ

2016

JOSÉ REINALDO NOGUEIRA DA SILVA

ETNOMATEMÁTICA: ABORDAGEM DOS DIVERSOS TIPOS DE UNIDADES DE MEDIDAS E SUA UTILIZAÇÃO NO SERTÃO ALAGOANO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

MACEIÓ
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586e Silva, José Reinaldo Nogueira da.
Etnomatemática : abordagem dos diversos tipos de unidades de medidas e sua utilização no sertão alagoano / José Reinaldo Nogueira da Silva. – 2016.
101 f. ; il.

Orientador: Isnaldo Isaac.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 99-101.
Inclui apêndice.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Etnografia. 3. Conteúdo matemático – Ensino e aprendizagem. 4. Sistemas de medidas. 5. Cubação de terras. I. Título.

CDU: 514:371.315

Folha de Aprovação

JOSÉ REINALDO NOGUEIRA DA SILVA

ETNOMÁTICA: ABORDAGEM SOBRE OS DIVERSOS TIPOS DE UNIDADES DE MEDIDAS E SUA UTILIZAÇÃO NO SERTÃO ALAGOANO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 31 de março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa (Orientador)

Prof. Dr. André Luiz Flores

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández

AGRADECIMENTOS

A DEUS, acima de tudo, por todas as suas graças.

À minha esposa ÉLIKA e minha filha EVELLY, pelo incentivo, compreensão e paciência durante toda esta caminhada.

Aos meus pais, irmãos e minha avó MARIA, pela confiança e por elevar sempre minha auto-estima.

À minha sogra QUITÉRIA e meu cunhado DIEGO, por sempre mim dar uma palavra de incentivo e confiança.

A todos os meus amigos que colaboraram com o meu crescimento e aprendizagem durante todo o curso, em especial ao amigo JOSÉ CÍCERO, que sempre esteve à disposição para que este sonho se tornasse possível.

Ao professor Dr. ISNALDO ISAAC, pela orientação, apoio e paciência, por ter dedicado parte do seu tempo para que este trabalho tornasse possível, estando sempre disponível nos momento em que precisei.

A meu Pai e ao meu amigo JOSÉ SÍLVIO, pela entrevista concebida, enriquecendo ainda mais este trabalho.

À sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa do PROFMAT.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida durante o curso.

A todos os professores da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) que fizeram parte do curso, contribuindo para meu crescimento acadêmico.

Aos amigos e colegas da turma PROFMAT/UFAL – 2013, pelo incentivo na qualificação, em especial a amiga CLARICY ALVES.

A primeira regra do ensino é saber
o que se deve ensinar. A segunda, é saber um
pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.

POLYA, Georg

RESUMO

Este trabalho aborda a evolução do sistema de medidas, fazendo um comparativo das medidas usadas desde a antiguidade até os dias atuais, relatando e comparando as unidades de medidas que são tidas como não convencionais com as medidas do Sistema Internacional (SI). Trata com maior ênfase das unidades de comprimento e área, no entanto retrata alguns exemplos práticos sobre o cálculo do volume de alguns sólidos utilizados no cotidiano da região do autor. O principal objetivo deste trabalho é apresentar aos docentes e discentes uma proposta sobre conteúdos matemáticos para o ensino fundamental e médio que são muito utilizados no dia a dia das pessoas da região de convívio do autor (município de Olivença, sertão alagoano), mas que outrora não é trabalhado na sala de aula, por parte dos professores. Desse modo, espera-se que professores possam utilizar este material nas aulas de matemática, fazendo com que os alunos sintam-se mais motivados a resolver os problemas propostos, uma vez que o tipo do conteúdo trabalhado terá relação direta com a prática do seu dia a dia. Assim, o presente trabalho mostra uma alternativa para enriquecer o processo ensino – aprendizagem de matemática a partir do conhecimento trazido por parte do aluno, propiciando um desenvolvimento de competências e habilidades que serão úteis tanto na convivência do dia a dia quanto na formação acadêmica do aluno.

Palavras-chave: Sistema de medidas. Comprimento. Área. Volume. Conteúdo Matemático. Ensino-aprendizagem. Aluno. Etnomatemática. Cubação de terras. Tarefas de terra.

ABSTRACT

This work discusses the evolution of the system of measures, making a comparison of the measures used from ancient times to the present day, reporting and comparing the units of measurement that are considered unconventional measures with the International System (SI). Treat with greater emphasis the units of length and area, however portrays some practical examples on calculating the volume of some solids used in the author's area daily. The main objective of this work is to present teachers and students a proposal on mathematical content for elementary and secondary educations that are very used in day to day life of the author's interaction region(municipality of Olivenza, backcountry alagoano), but once is not working in the classroom, by teachers. Thus, it is expected that teachers can use this material in math classes, so that students feel more motivated to solve the problems posed, since the kind of worked content will have a direct relationship with the practice of the day the day. The present work shows an alternative to enrich teaching - math learning from the knowledge brought by the student, providing a skills development and skills that will be useful both in living day to day as the academic training of the student.

Keywords: Measures System. Length. Area. Volume. Mathematical Content. Teaching and Learning. Student. Ethnomathematics. Land Cubação. Land Tasks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho abordará os conceitos de medidas, relatando a evolução do sistema métrico desde a antiguidade até os dias atuais. Faremos ao longo deste, comparativo e conversões das unidades de medidas utilizadas pelos povos antigos, as chamadas unidades de medidas não convencionais, com as unidades de medidas do atual Sistema Internacional de Medidas (SI), desenvolvendo atividades que envolvam o cálculo de distâncias, áreas de superfície e também volume.

Como um dos objetivos do nosso trabalho é abordar o conceito de medida, antes de tudo devemos construir o conceito de medida, mesmo que de forma intuitiva, devemos nos preocupar com questões do tipo óbvias, como por exemplo: para medir, temos, previamente, de saber o que é susceptível de ser medido, ou seja, aquilo que se pode medir. Faz-se, pois, necessário debruçarmo-nos sobre as características, atributos ou qualidades que as pessoas e os objetos possuem e identificar os que são mensuráveis. Desta forma, algumas perguntas, tais como: O que é medir? E o que pode ser medido? Não poderão fugir do nosso contexto.

Sabemos que há vários tipos de justificativas ou definições para este tipo de questionamento, no entanto, fiquemos com algumas que consideremos plausíveis para o nosso contexto:

Baruk (2005) define medir como avaliar uma grandeza por comparação com uma unidade. Deste modo, medir é obter o resultado de uma contagem de unidades, de frações de unidades, de frações dessas frações de unidades, etc. (BARUK, 2005, p.747 e p.748).

Já Chamorro e Belmonte atestam para o seguinte:

Chamorro e Belmonte salientam que o processo de medir consiste em comparar uma quantidade dada de massa, comprimento, volume, etc., com a massa, o comprimento ou volume de um dado objeto a que chamamos unidade, permitindo associar um número a uma quantidade de grandeza (CHAMORRO e BELMONTE, 1994, p. 111)

Em síntese, medir é um processo que se inicia com a percepção do que se quer medir (identificação da grandeza a medir), passa pela seleção da unidade de medida mais apropriada para essa grandeza e termina com a verificação de quantas vezes a unidade de medida cabe na quantidade de grandeza a medir, com o objetivo de que a entes de igual quantidade de grandeza que corresponda o mesmo número.

No dia a dia, para medir, usamos diferentes instrumentos, como balanças, réguas, termômetros, fitas métricas, relógios, calendários, etc. O processo de medição pode ser direto ou indireto: por exemplo, no caso do comprimento, da área e do volume, estamos em presença de uma medição direta. Já no caso da temperatura ou do tempo, a medição é feita de uma forma indireta, pois num termômetro graduado mede-se o comprimento entre as marcas feitas nesse termômetro, e, para medir o tempo no relógio, medimos a amplitude do ângulo definido pelos seus ponteiros, ou então medimos a quantidade de areia que caiu, se o instrumento de medição for uma ampulheta.

Este material tem como objetivo principal apresentar aos docentes e discentes atividades matemáticas para o ensino fundamental e médio, combinando o conteúdo matemático sobre medidas de comprimento, área e volume com situações problemas que envolvam o cotidiano dos alunos da região onde o autor deste trabalho convive, a chamada etnomatemática, bem como repassar para os discentes conhecimentos onde os mesmos possam efetuar suas aplicações na prática de acordo com a região vivenciada por eles, fazendo assim um comparativo dos seus meios de medições com o Sistema SI, além de conhecer um pouco da história de algumas unidades de medidas.

A organização deste trabalho dar-se-á da seguinte maneira: no primeiro capítulo abordaremos o tema etnomatemática; no segundo, trataremos do contexto histórico do sistema métrico passando pelas unidades de medidas não convencionais até o nosso atual Sistema Internacional de Medidas (SI); no terceiro capítulo, daremos definições intuitivas e matemáticas das medidas de comprimento, área e volume, bem como das fórmulas matemáticas utilizadas para o cálculo de áreas e volumes; para o quarto, quinto e sexto capítulo faremos cálculos de distâncias, áreas e volumes, fazendo comparações em diversas unidades de medidas, como também a abordagem de algumas unidades de medidas não convencionais e sua utilidade nas regiões do Brasil; por fim, no sétimo e último capítulo, faremos a conclusão do nosso trabalho, apresentando reflexões sobre o processo de elaboração do mesmo. Deixaremos ainda, como anexo, uma cartilha prática mostrando o passo a passo de como se fazer a cubação de terras.

1 ETNOMATEMÁTICA

Desde o fim do século XIX os etnógrafos já se utilizavam do termo etnociências e conceitos a ele relacionados, como a etnolinguística, etnobotânica e etnoastronomia, por exemplo, mas com concepções muito diferentes da que utilizamos hoje para a etnomatemática. Inicialmente vamos tratar da etnomatemática seguindo sua história, pois assim poderemos ter um melhor entendimento deste tema que, de certa forma, é de muita discussão.

O prefixo ETNO procede do Grego *Éthnos* e em sua forma antiga *Éthos*, onde éthnos refere-se à identidade de origem e de condições, incluindo identidade de crenças, valores, símbolos, mitos, ritos, valores morais, de língua, de códigos e de práticas. Dessa identidade se formaram as vivências e os conceitos de raça, povo, nação, classe social e corporação. A palavra ETNO se refere à etnia, isto é, a um grupo de pessoas de mesma cultura, língua própria, costumes próprios e etc., ou seja, características culturais bem delimitadas para que possamos caracterizá-los como um grupo diferenciado.

O termo etnomatemática foi usado pela primeira vez por Ubiratan D'Ambrósio em 1975, mas somente em 1985, por ocasião do 5º congresso internacional de educação matemática, realizado na cidade de Adelaide, na Austrália, é que foi reconhecida como uma importante área de estudo dentro da matemática.

Desta forma foi defendida em 1985 no seu livro, *"Etnomathematics and is place in the history of mathematics"*, como sendo:

ETNO – referente ao contexto cultural, incluindo considerações como linguagem, códigos, comportamentos, mito, símbolos e histórias; MATEMA – referente a explicar, conhecer, entender, saber fazer, e TICA – (vem do *techne*) que é a mesma raiz da arte ou técnica de conhecer e explicar a matemática nos diversos contextos culturais (D'AMBRÓSIO, 1985, p.124).

A etnomatemática é vista hoje como uma subárea da história da matemática e da educação matemática, com uma relação muito natural com a antropologia[1] e as ciências da cognição. Podemos enxergá-la como a matemática praticada por grupos culturais, tais como

[1] Ciência que estuda a humanidade, sua origem, sua evolução, etc.

comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos.

Nesta linha de pensamento, D'Ambrósio (2001) também define a etnomatemática como uma meta definição etimológica, pois faz elaborações sobre os etnos, os matemas e as ticas, na tentativa de entender o ciclo do conhecimento, ou seja, a geração, a organização intelectual, a organização social e a difusão do conhecimento adquiridos pelos grupos culturais. Nesta dinâmica cultural, não existe uma história da matemática como um processo, mas sim como um registro seletivo dos fatos e das práticas, que serviram para esta apropriação.

E embora, D'Ambrósio seja considerado o principal pensador a respeito da etnomatemática, o primeiro pesquisador que tentou agrupar as várias tendências foi Hunting (1980), para ele a etnomatemática é "a matemática usada por um grupo cultural definido ao lidar com problemas e atividades em seu meio". Ainda se discute muito este tema, para os antropólogos é parte da etnologia de um grupo, para os educadores é um método educacional da matemática e para outros pesquisadores, como D'Ambrósio, por exemplo, é um subconjunto da educação que contém a matemática no seu contexto.

Apesar de toda discussão que se tem com relação à etnomatemática, muitas críticas ainda são dadas ao referido assunto, e um dos principais críticos é Taylor, ele a critica afirmando que ela tem um discurso político pedagógico, mas não epistêmico. Segundo ele, a etnomatemática tenta discutir epistemologicamente, mas seu discurso fica somente na relação político-pedagógica, ou seja, ela não se preocupa com o ato de aprender, esquece da cognição e privilegia tão somente o ato de ensinar.

No entanto, apesar das críticas de Taylor ter toda uma fundamentação teórica, entendemos que um dos princípios fundamentais da etnomatemática é o trazer para sala de aula o conhecimento social do aluno, fazer com que a matemática tenha um significado para ele, o que de fato é uma preocupação cognitiva. Desta forma podemos vê-la como a ciência que dá validade não apenas a conceitos matemáticos, mas sim a matemática em si, pois ela passa a ter uma aplicação prática na vida de um grupo social, seja ela uma sala de aula do ensino médio, uma sala de aula da universidade ou até mesmo de um mestrado, fazendo com que o ato de aprender seja mais pleno e o aluno se aproprie dele, incorporando-o na sua realidade subjetiva.

Sabendo que a utilização do conhecimento do cotidiano para ensinar matemática revela muitas vezes práticas aprendidas fora do ambiente escolar, e se as pessoas já possuem um determinado conhecimento matemático, como a escola e o professor podem agir no sentido de aproveitar de forma mais abrangente esse saber matemático, acrescentando conhecimentos formais de matemática e relacionar os mesmos com a realidade de convivência de cada indivíduo, que de certa forma os ajudarão a construir com sentido mais prático, competências e habilidades que serão úteis tanto na sua vida escolar quanto no seu dia a dia?

Vale ressaltar que este tipo de ensino-aprendizagem, o qual é proposto pela etnomatemática é exatamente o que hoje o ministério da educação em suas políticas educacionais de reestruturação tanto cobra na educação básica. Que o ensino não só de matemática como também das outras áreas seja voltado para o cotidiano e a realidade de cada indivíduo. Basta observarmos o que retratam as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e as propostas do desenvolvimento de habilidades descritas na matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Assim há a necessidade de reconhecer uma educação etnomatemática, ou seja, a necessidade de reconhecer uma educação diferenciada para cada grupo ou cada localidade, surgindo desta forma a idéia de currículo etnomatemático, que pode ser visto como um entre os vários aspectos culturais do ambiente o qual o grupo a ser educado está envolvido, havendo assim uma integração dos conceitos e práticas matemáticas da cultura dos povos da localidade com os conceitos da matemática convencional, que é mais ou menos universal em todas as salas de aula do mundo.

Utilizando este ponto de vista, os professores poderão adotar uma nova postura educacional e inserir os alunos na análise crítica da cultura dominante e da própria cultura, através da linguagem matemática, isto numa perspectiva sócio-político-transformadora. Investigando as concepções, tradições e práticas matemáticas de um determinado grupo social, com a intenção de incorporá-los ao currículo como um conhecimento social. Levando-os a identificar técnicas ou mesmo habilidades e práticas utilizadas por distintos grupos culturais, na busca de explicar, conhecer e entender o mundo que os cerca e a realidade a eles sensível, utilizando os conhecimentos desta realidade em seu benefício e em benefício de todo o grupo.

No entanto, recordemos o que enfatiza D'Ambrósio com relação a esta adoção da postura educacional, ele afirma que:

A adoção de uma nova postura educacional, na verdade a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino – aprendizagem, baseado numa ralação obsoleta de causa-efeito, é essencial para o desenvolvimento de criatividade desinibida e conducente a novas formas de relações interculturais, proporcionando o espaço adequado para preservar a diversidade e eliminar a desigualdade numa nova organização da sociedade (D'AMBRÓSIO, 1983.a, p.82).

De fato, entendemos que esta "nova postura educacional" é muito importante e que a necessidade de mudanças, sejam elas curriculares ou relacionadas às posturas de professores e alunos em sala de aula também contribuirá e muito, tanto na formação acadêmica dos alunos quanto na prática do seu dia a dia, uma vez que o professor poderá abordar e inserir no seu planejamento curricular assuntos e temas que farão parte do cotidiano dos alunos, fazendo com que os mesmos observem e apliquem na prática os conhecimentos adquiridos dentro da sala de aula.

Desta foram, se faz necessário que o professor e a escola observem com maior atenção o meio no qual estão inseridos, pois assim poderá utilizar com maior eficácia os conhecimentos das pessoas da sua comunidade, podendo adequá-los e englobá-los na sua proposta curricular, tornando desta forma o processo de ensino-aprendizagem algo mais próximo da realidade dos seus alunos. Isto sem contar que estes mesmos alunos utilizarão todo o conhecimento obtido na escola, na prática do seu dia a dia, seja no sentido de contar ou observar o peso de certa quantidade de aves ou animais, por exemplo, ou até mesmo de medir certas distâncias, calcular a área de suas propriedades, como também medir a capacidade que cabe em alguns instrumentos.

Portanto, a etnomatemática traz na sua essência uma proposta de mudança do currículo, não só no modo de enxergarmos a matemática das sociedades, mas também pede uma mudança no comportamento do professor diante do aluno e diante daquilo que o aluno conhece por matemática. E aí é importante ressaltar que ao trabalharmos a matemática numa perspectiva etnomatemática, devemos enriquecer nossa proposta educacional não apenas estudando o contexto histórico, cultural e social, mais também analisar como podemos ajudar as pessoas a usufruir desses conhecimentos para entender e aplicar no desenvolvimento das atividades cotidianas, pois é nesta linha de pensamento que reside a essência da educação.

Assim, entendemos que a etnomatemática é de grande importância e se faz necessário, e por que não obrigatório, ser inserida na proposta curricular de qualquer escola, pois desta forma a escola estará contribuindo em mais de uma vertente. Tanto no quesito de repassar aos alunos um conhecimento formal e prático, e do interesse de muitos deles, quanto também na perspectiva de mostrar para as pessoas que fazem parte da comunidade que os conhecimentos praticados por elas poderão ser melhorados e ser de maior utilidade para benefício de todos. É claro que não basta somente falar sobre etnomatemática ou de dizer que ela fará parte da proposta curricular da escola, para trabalhar os conteúdos programados de uma forma mais próxima com o cotidiano dos alunos, se o próprio professor não buscar conhecer os métodos e as habilidades adotadas pelos povos da comunidade, para a partir daí adequar sua proposta curricular e então observar de que maneira ele, o professor, poderá transformar, modificar e usar este conhecimento em beneficio de seus alunos e das pessoas da comunidade.

Tendo em vista a importância da etnomatmática na formação acadêmica dos alunos como também no enriquecimento de informações e conhecimentos de qualquer comunidade, deixamos o nosso trabalho, principalmente o assunto relacionado a áreas de superfícies, como uma proposta curricular para ser trabalhado nas escolas da região do sertão de Alagoas, especificamente nas turmas de 8º e 9º ano, onde este conteúdo poderá ser adequado e inserido na proposta curricular das escolas, sem fugir do que é proposto nos PCN's, que pede para ser trabalhado tanto nos eixos Espaço e Forma, e Grandezas e Medidas tópicos como:

- Representação de figuras geométricas;
- Identificação de grandezas mensuráveis no contexto diário: comprimento, massa, capacidade, superfície, etc.;
- Reconhecimento e utilização de unidades usuais de medida como metro, centímetro, quilômetro, grama, miligrama, quilograma, litro, mililitro, metro quadrado, alqueire, etc.;
- Reconhecimento dos sistemas de medida que são decimais e conversões usuais, utilizando-as nas regras desse sistema.

Portanto, após verificar que boa parte dos temas abordados no nosso trabalho fazem parte do cotidiano das pessoas das comunidades do sertão do estado de Alagoas, e que a maneira como estas pessoas a utilizam é às vezes equivocada, realizamos este trabalho também com intuito de despertar nas escolas o interesse e a importância de ser trabalhado e inserido na sua proposta curricular conteúdos que fazem parte do dia a dia das pessoas a qual ela está inserida, como também mostrar a todos da comunidade uma maneira correta e prática de usar os conhecimento que os mesmos já possuem.

Então, fica o nosso trabalho como um subsídio para que o professor o consulte e os adéque, fazendo as modificações necessárias de acordo com a realidade da turma a ser trabalhada, também deixamos como anexo uma cartilha mostrando uma forma simples e prática de fazer a cubação de terras, que diga-se de passagem e um assunto do interesse de muitas pessoas da região.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Em nossa civilização atual os processos de medição são bastante complexos a fim de satisfazerem às necessidades da ciência e da tecnologia. Em épocas remotas, o homem utilizou processos simples, suficientes para a sua técnica primitiva. Assim é inevitável surgirem perguntas do tipo: A final de contas, quando começou a se medir algo? O que é medir? Por que se faz necessário o processo de medição? Justificativas para estes tipos de perguntas foram dadas ao longo dos anos, no entanto, o que se pode afirmar é que se começou a medir algo desde a antiguidade, pois as civilizações desta época poderiam medir ou comparar um peixe com outro, por exemplo, para saber qual o maior ou menor, como também seria de seus conhecimentos que certa quantidade de alimento saciava sua fome. Obviamente, eram maneiras intuitivas de medir[2].

A partir do momento em que o homem passou a viver em grupos e à proporção que esses aglomerados cresciam consideravelmente, a necessidade de medir aumentava ainda mais. As maneiras como mediam as grandezas eram bastante simples: usavam partes do próprio corpo, como o comprimento do pé, a largura da mão ou a grossura do dedo, o palmo e a passada, por exemplo. Utilizavam ainda uma vara ou um bastão. Com o surgimento das primeiras civilizações, tais processos não mais satisfaziam às necessidades dos homens, pois os mesmos sabiam constatar as diferenças daquelas partes do corpo para cada indivíduo. As construções de casas a navios, a divisão de terras e o comércio com outros povos exigiam medidas padrões, que fossem as mesmas em qualquer lugar. Assim, um mercador de tecidos da Babilônia, por exemplo, poderia vender sua mercadoria em Jerusalém, usando uma vara padrão de tamanho aproximado ao tamanho adotado naquela região.

Os povos antigos possuíam padrões diferentes de comprimento. A unidade de comprimento dos Babilônios era o dedo, aproximadamente 16 milímetros. Usavam também o cúbito, que equivalia a 30 dedos. O pé e a polegada foram, em geral, para esses povos, as unidades padrões. Os egípcios usaram o “cúbitus” ou “côvados”, distância que ia do cotovelo às pontas dos dedos esticados, e que correspondia a 52,4 centímetros. Posteriormente os gregos usaram o “dígitus” ou dedo, que correspondia a 19,3 milímetros, a qual deu origem à atual polegada (medida esta adotada ao equivalente a 2,54 centímetros). Além das unidades de

---

[2] Do latim METIRI.

medida citadas anteriormente, destacamos mais algumas outras, com as respectivas civilizações e povos que as utilizaram. Vejamos a tabela abaixo:

Quadro 1 – Unidades de medida

UNIDADE	UTILIZAÇÃO
Braça	Portugueses
Côvado	Babilônios, Egípcios e Hebreus
Cúbito	Egípcios
Dígito (Polegadas)	Gregos
Jardas	Ingleses
Léguas	Portugueses, Espanhóis, Alemães e Franceses
Milhas	Povos Latinos
Palmos	Gregos e Egípcios
Passos	Gregos
Pés	Gregos

Fonte: Autor, 2015.

Com o passar dos tempos as medidas usadas nas civilizações antigas eram levadas a outras civilizações através do comércio ou da conquista. Assim, no início da Idade Média, as unidades adotadas eram as dos romanos, o último e maior império da antiguidade, que as levaram por toda a parte da Europa, oeste da Ásia e África. Sem dúvida, as medidas mais usadas eram ainda aquelas das dimensões humanas. Obviamente eram necessárias medidas mais precisas para certas atividades, como por exemplo, as construções bizantinas e árabes. Esses povos certamente possuíam seus padrões de medidas, embora fossem diferentes para cada região.

No entanto, havia a necessidade de um consenso no que se referia à padronização dos sistemas de medidas. E, diante da diversidade de medidas e medidores, a sociedade viu-se atingida por métodos arbitrários e causadores de prejuízos e injustiças nos mais diversos aspectos, isto porque os meios mais utilizados para medir tinham como ferramentas medidoras partes do corpo. E como havia variância de tamanho de pessoa para pessoa, jamais existiam medidas precisas, resultando em números arbitrários e causadores de "controvérsias matemáticas". Em fins do século XVIII, a diversificação de medidas era enorme, dificultando muito as transações comerciais.

Na França, a situação estava ainda pior e graças às novas ideias trazidas pela Revolução Francesa de 1789 e as imposições que fazia o florescimento da era industrial, foi criada uma comissão de homens que se dedicavam ao estudo das ciências para a determinação e construção de padrões de medidas, de tal modo que fossem universais. Estes padrões deveriam reproduzir os fenômenos naturais, para não dependerem de futuras mudanças. Após estudos e pesquisas, a comissão que incluía nomes famosos como Lagrange[3] e Laplace[4] concluíram que a unidade de comprimento deveria pertencer ao sistema decimal, de maior facilidade, e presa a um dos três seguintes fenômenos naturais:

- Comprimento de um pêndulo de período (2 oscilações) igual a 1 segundo, latitude 45°;
- Comprimento de 1/4 do círculo equatorial;
- Comprimento de 1/4 do meridiano terrestre do equador a um dos pólos.

Vendo que a primeira definição iria depender de grandezas alheias ao comprimento, como o tempo e o peso, e como medidas do equador (2ª definição) eram quase impossíveis, foi aceita a proposição do meridiano terrestre, pois, além de não apresentar os defeitos das anteriores, já contava com uma boa comparação. O meridiano que passa por Paris já havia sido medido precisamente e podia ser comparado com a nova determinação. Imediatamente foram tomadas as medidas necessárias para o trabalho e designadas cinco comissões para a execução, onde figuravam grandes nomes, como Lavoisier[5], Coulomb[6] e Legendre[7]. Devido à demora que o empreendimento levaria e a urgência da criação do sistema, foi proposto e aceito pela assembléia o metro provisório, baseado na medida antiga, verificando-se após a conclusão dos trabalhos que a diferença era mínima.

Surgiram assim as unidades de medidas padrões: o metro, o quilograma e o segundo. O metro foi definido como a décima milionésima parte do meridiano terrestre medido de Dunkerke/FRANÇA a Barcelona/ESPANHA. Por decreto-lei, as unidades tornaram-se oficiais na França e, passado alguns anos, vários países já as adotavam. Os padrões foram feitos, e cópias exatas foram enviadas aos países, que legalizaram o sistema métrico, dentre eles o Brasil.

Anualmente, por volta de 1870, reuniam-se em Paris os membros da Confederação Internacional de Pesos e Medidas e, em 1875, determinou-se a criação de Bureau Internacional de Medidas. Participaram 30 países, dentre os quais o Brasil, representado por

---

[3] Joseph Louis Lagrange (25/01/1736 – 10/04/1813), matemático italiano.
[4] Pierre Simon Laplace (23/03/1749 – 05/03/1827), matemático, astrônomo e físico francês.
[5] Antoine Laurent de Lavoisier (26/08/1743 – 08/05/1798), químico francês (considerado o pai da química).
[6] Charles Augustin de Coulomb (14/06/1736 – 23/08/1806), físico francês.
[7] Adrien Marie Legendre (18/09/1752 – 10/01/1833), matemático francês.

Visconde de Itajubá[8]. A Inglaterra resolveu não adotar o sistema decimal, mantendo até hoje suas unidades, juntamente com os Estados Unidos.

Com o desenvolvimento científico e tecnológico, verificou-se além de melhores maneiras de definir as unidades, a insuficiência destas, pois não havia um padrão para grandezas fundamentais como no caso da eletricidade.

Enfim, no ano de 1960, na XI Conferência Internacional de Pesos e Medidas, o sistema Francês foi adotado mundialmente como o Sistema Internacional de Medidas (SI). O novo sistema passou a ser utilizado por quase todos os países do mundo, com exceção de alguns, por sua praticidade e pela linguagem universal. No Brasil o SI tornou-se obrigatório no ano de 1962.

O Sistema Internacional – SI trata-se de um sistema constituído por sete unidades fundamentais (ditas de base), conforme tabela abaixo:

Quadro 2 – Unidades de medida base do SI

GRANDEZA DE BASE	**UNIDADE DE BASE SI**	
	NOME	**SÍMBOLO**
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Intensidade da corrente elétrica	ampere	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de matéria	mole	mol

Fonte: Autor, 2015.

Vale ressaltar ainda, que após a revolução francesa, as unidades de medida passaram a relacionar-se com as dimensões da terra, onde se dizia que um metro era a décima parte do quarto do meridiano terrestre, pelo o qual o meridiano mediria cerca de 40.000 quilômetros. Atualmente e desde 1983, essa relação passou a ser relacionada com a velocidade da luz, sendo um metro a distância percorrida pela luz no vácuo em (1/299.792.458) do segundo de tempo. Relativamente, as outras grandezas restantes (massa, tempo, intensidade da corrente elétrica, temperatura termodinâmica, intensidade luminosa e quantidade de matéria), não apresentaremos as definições das respectivas unidades de medida, uma vez que saem do âmbito deste trabalho.

[8] Marcos Antonio de Araújo (25/04/1805 – 06/02/1884), advogado, professor e diplomata brasileiro.

Para além das unidades de medida de base do SI referidas na Tabela 2, existem também as unidades de medidas derivadas correspondentes às grandezas derivadas, vejamos:

Quadro 3 – Unidades de medida derivada

GRANDEZA DERIVADA	**UNIDADE DERIVADA SI**	
	NOME	**SÍMBOLO**
Área	metro quadrado	m^2
Velocidade	metros por segundo	m/s
Aceleração	metro por segundo quadrado	m/s^2
Volume	metro cúbico	m^3
Amplitude de ângulo plano	radiano	rad
Temperatura	grau Celsius	°C
Potência	watt	W

Fonte: Autor, 2015.

Mais adiante, daremos definições intuitivas e matemáticas das grandezas comprimento área e volume, medidas estas que fazem parte deste trabalho e que serão abordadas na sequência do mesmo. No momento voltemos nossas atenções à unidade de medida, metro.

O metro é a unidade de medida utilizada cotidianamente em várias atividades humanas. Dele, deriva outras unidades das quais convencionou-se chamar de múltiplos (quando estas são resultados de uma multiplicação decimal a partir do metro), e de submúltiplos (quando são resultados de uma divisão decimal), desta forma, é possível fazer conversões entre as relações métricas das unidades de medida mais antigas com as unidades de medida do Sistema Internacional de Medidas, conforme veremos mais adiante. E como consequência, podemos usar todas estas unidades de medidas (não convencionais e do SI), para se fazer o cálculo de distâncias, áreas de uma superfície e também o volume, até porque esta parte da Geometria que estuda distâncias, áreas e volumes é usada desde os tempos da antiguidade. Como retrata o historiador grego Heródoto (século quinto a.C.)

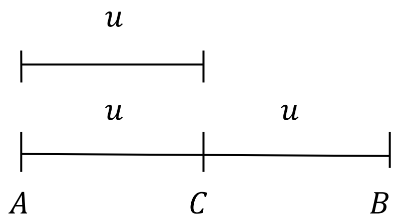
> *Geometria quer dizer medida da terra, o qual atribuiu aos egípcios a origem dessa ciência. Segundo ele, o imposto que pagavam os proprietários das terras no Egito era diretamente proporcional à área de cada lote. As cheias do rio Nilo muitas vezes faziam desaparecer parte das terras dos agricultores. Então os colaboradores de impostos do faraó tinham que recalcular cada área, a fim de que a cobrança fosse ajustada. Também era preciso, para efeitos de comércio, que se soubesse calcular o volume de cada depósito de grão. Assim, o cálculo de áreas e volume é um assunto milenar, cuja importância se revelou muito cedo, mesmo em civilizações organizadas de modo simples em relação aos padrões atuais. (ELON, 2006, introdução)*

3 MEDIDAS DE COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME

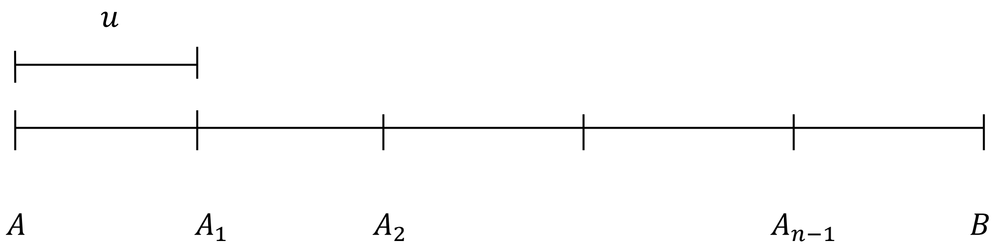
3.1 Comprimento

Intuitivamente, quando falamos em medir o comprimento de algo, estamos nos referindo em medir um segmento de reta compreendido por suas extremidades. Se temos em uma reta dois pontos A e B, então a região delimitada por estes pontos é a medida ou comprimento $\overline{AB}$, o qual indicaremos somente pelo símbolo AB. A medida $\overline{AB}$ é um número que deve exprimir quantas vezes o segmento AB contém um segmento u, fixado previamente, tomando este como uma unidade de comprimento ou como um segmento unitário. É claro que esta não é uma definição matemática precisa, mas serve somente para termos uma idéia do que seja medir o comprimento entre dois pontos.

Vejamos então, uma definição matemática precisa do comprimento entre dois pontos. Fixemos um segmento de reta u, que chamaremos de segmento unitário ou unidade de comprimento. Por definição, o comprimento de u será igual a 1. Temos ainda que todos os segmentos congruentes a u, terão, por definição, o comprimento 1. Assim, dado um segmento de reta AB, se existir um ponto intermediário C situado entre AB, tal que os segmentos AC e CB sejam congruentes a u, então AB será 2. E escreveremos $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2$.



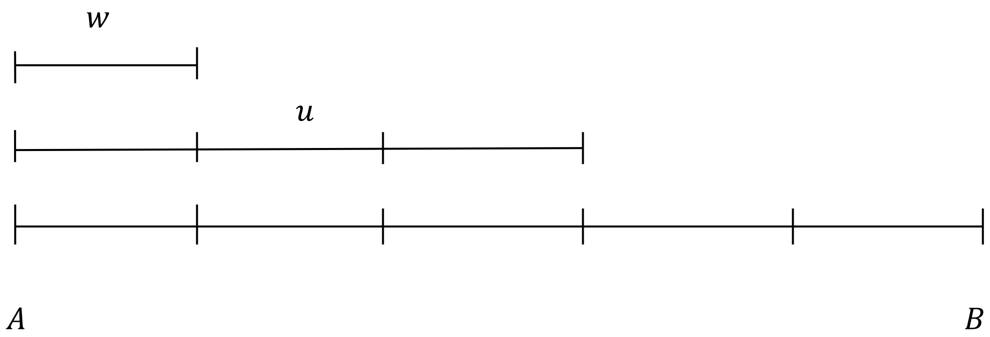
Assim, generalizando teremos: dado um número inteiro positivo n, se for possível obter $n-1$ pontos intermediários $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ no segmento AB, de tal modo que os n segmentos AA_1, A_1A_2,..., $A_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u, então o comprimento AB será n. E teremos $\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}B} = n$



Desta forma, diremos que $\overline{AB} = n$, pois AB se decompõe em n segmentos justapostos, todos de comprimento 1. E como n é inteiro é natural dizer que AB contém n vezes o segmento unitário u.

Mas poderíamos ter o segmento AB menor ou maior que o segmento unitário u, e neste caso a medida $\overline{AB}$ não pode ser um número inteiro. Então como poderemos definir o comprimento AB?

Façamos inicialmente uma hipótese. Suponhamos que, embora AB não contenha u um número inteiro de vezes, exista, entretanto um segmento menor, w, tal que w esteja n vezes contido em u e m vezes contido em AB, sendo m e n números inteiros. O segmento w é neste caso submúltiplo comum de AB e u, e diremos que os segmentos AB e u são comensuráveis. Como w está n vezes contido em u, é natural dizer que a medida de w é $1/n$ e, que o comprimento de AB é m vezes $1/n$, ou seja, $\overline{AB} = m/n$.



Vemos que o segmento unitário u contém três vezes o segmento w, enquanto AB contém cinco vezes w. Logo $\overline{AB} = 5/3$. Assim, fixado um segmento unitário u, o comprimento de um segmento AB é um número racional m/n quando existe um segmento w que esteja contido n vezes em u e m vezes em AB. Neste caso, w é um submúltiplo comum de AB e u, e estes dois segmentos se dizem comensuráveis.

Na prática, como nossos olhos têm um limite de precisão sendo incapazes de distinguir dois pontos que, embora distintos, achem-se situados a uma distância inferior a esse limite, tudo se passa como se dois segmentos quaisquer fossem sempre comensuráveis. E durante muito tempo se acreditava que, de fato, não existissem segmentos incomensuráveis (segmentos que não possuem um submúltiplo comum).

Inicialmente, Pitágoras e seus discípulos pensavam assim. Eles mesmos, porém, descobriram o primeiro exemplo de um par de segmentos incomensuráveis, causando assim um enorme impacto no desenvolvimento da matemática grega. O exemplo de Pitágoras é bastante simples: se tomarmos o lado de um quadrado como um segmento unitário, a medida da diagonal desse quadrado não tem comprimento racional, ou seja, o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis.

Se pegarmos um segmento AB, onde AB não é comensurável com a unidade de comprimento u, sua medida $\overline{AB}$ é, neste caso, um número irracional. Como poderemos descobrir os valores aproximados, por falta e por excesso, desse número irracional $\overline{AB}$?

Seja dado um número inteiro positivo n. Dividiremos o segmento unitário u em n partes iguais. Cada uma dessas partes é um segmento de comprimento $1/n$. Seja w uma dessas partes. Existe um inteiro positivo m tal que AB contém m segmentos congruentes a w e ainda sobra alguma coisa, mas $m+1$ segmentos congruentes a w, justapostos, formam um segmento maior do que AB. Quando isto ocorre, tem-se

$$\frac{m}{n} < AB < \frac{m+1}{n}$$

Ou seja, o número racional m/n é uma aproximação por falta para o comprimento de AB, com erro inferior a $1/n$. Da mesma forma, $(m+1)/n$ é uma aproximação por excesso do número irracional AB, com erro inferior a $1/n$.

Assim, concluímos nossa discussão sobre a medida de um comprimento $\overline{AB}$ ou de um segmento de reta AB. Essa medida pode ser inteira, fracionária ou irracional. Os primeiros casos ocorrem quando AB é comensurável com a unidade de comprimento escolhida. O último caso se dá quando AB e o segmento unitário são incomensuráveis. Neste caso, dado qualquer inteiro n, podemos obter aproximações racionais m/n e $(m+1)/n$, por falta e por excesso, para o comprimento $\overline{AB}$. O erro cometido é, portanto, inferior a $1/n$. Como $1/n$ pode se tornar um valor tão pequeno quanto o deseje (bastando para isso tomar n grande), vemos que é possível obter valores aproximados para AB com erro tão insignificante quanto se queira.

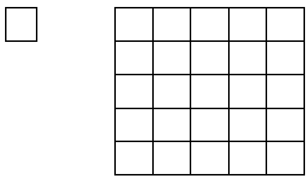
3.2 Área

Intuitivamente, a área de uma região no plano é a porção do plano ocupada por uma figura plana, esta área é um número inteiro positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado. Nosso propósito neste tópico é dar um significado preciso a esta idéia e estabelecer as fórmulas para as áreas das figuras geométricas mais conhecidas.

3.2.1 Área do quadrado e do retângulo

O quadrado é o quadrilátero que tem os quatros lados com medidas iguais e os quatro ângulos retos. Convencionaremos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento, ele será chamado de quadrado unitário. Assim qualquer quadrado cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

Um quadrado Q cujo lado tem para medida o número inteiro n pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n quadrados justapostos, cada um deles com o lado unitário e, portanto com área igual a 1. Segue-se que o quadrado Q deve ter área n^2.



Na figura temos um quadrado de lado 5, decomposto em $5^2 = 25$.

De modo análogo, se o lado de um quadrado Q tem por medida $1/n$, onde n é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe, mediante paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Estes n^2 quadrados congruentes a Q compondo um quadrado de área 1, segue-se que a área de Q deve satisfazer à condição $n^2 \times$ (área de Q) = 1 e, portanto, área de $Q = 1/n^2$.

Generalizando, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional m/n, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $1/n$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m quadrados, cada um dos quais tem lado $1/n$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $1/n^2$. Assim, a área de Q será

$$m^2 \times \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2},$$

ou seja,

$$\text{Área de } Q = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Desta forma, podemos concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem por medida um número racional $a = m/n$ é dada pela expressão:

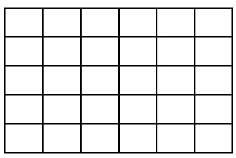
$$\text{Área de } Q = a^2$$

O retângulo é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos. Consideremos um retângulo R que tem como medida dos lados os números inteiros m e n, então, traçando paralelas aos lados podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que se deve ter área de $R = m \times n$.

Mais geralmente, se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b, podemos escrever estes números como duas frações $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$, com o mesmo denominador q. Dividimos cada lado de R em segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$. O lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $\frac{1}{q}$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $\frac{1}{q}$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em pr quadrados, cada um deles de lado $\frac{1}{q}$. A área de cada um desses quadradinhos é $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$. Logo a área de R deverá ser igual a

$$(p.r) \times \frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q},$$

ou seja, a área de $R = a \cdot b$



temos um retângulo R, cujos lados medem 5 e 6, subdividido em 5 × 6 = 30 quadrados unitários. Tem-se área de R = 5 × 6 = 30

Concluímos assim que, se um retângulo R tem como medidas dos lados os números racionais a e b, a área de R é expressa pela fórmula:

$$\text{área de } R = a \, . \, b$$

Ressaltamos que foi mostrado acima a validade da expressão apenas quando a e b são números racionais, mas é uma fórmula geral, válida mesmo que os números a e b sejam irracionais ou um deles seja racional e o outro irracional.

3.2.2 Área do paralelogramo, triângulo e trapézio

O paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos. Tomemos um lado do paralelogramo como base e chamemos de altura o segmento da perpendicular que liga a base ao lado oposto ou ao seu prolongamento. Assim a área de um paralelogramo P de base a e altura h é dada por:

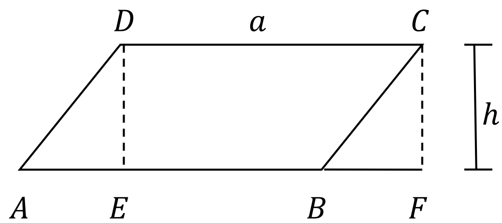
$$\text{área de } P = a \, . \, h$$

Consideremos P o paralelogramo $ABCD$ da figura abaixo. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de D e C a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $E \in AB$. É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso CH, de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e a área de $(ADE) =$ a área de (BCF). Então teremos:

$$P = \text{área } (ABCD) = \text{área } (ADE) + \text{área } (BEDC)$$

$$= \text{área } (BCF) + \text{área } (BEDC)$$

$$= \text{área } (EFCD)$$



por outro lado, $EFCD$ é um retângulo de altura h e base a, pois

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a$$

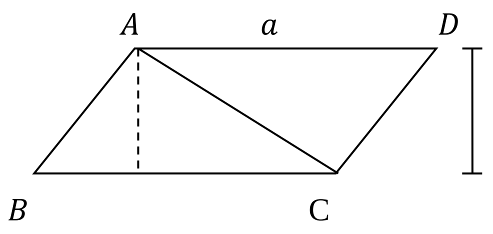
portanto, a área $(ABCD)$ = a área $(EFCD)$ = ah

Como todo triângulo é a metade de um paralelogramo. Então, é imediato que a área de um triângulo T é a metade da área do paralelogramo que o contém.

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e alturas h_a, h_b e h_c respectivamente aos lados a, b e c. Então

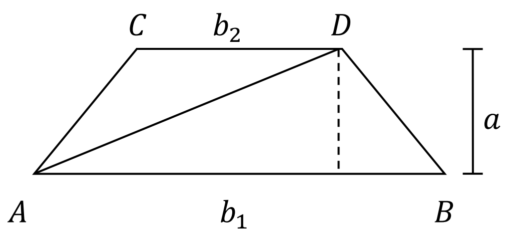
$$\text{área } (ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Seja T a área de (ABC) e D a interseção da paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por A com a paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ por C, conforme figura abaixo. É imediato verificar que $ABCD$ é um paralelogramo de área $2T$, uma vez que $ABC \equiv ACD$. Portanto, 2 vezes a área $(ABC) = 2T = ah_a$ e daí teremos, $T = \frac{ah_a}{2}$. Comprovando a primeira igualdade (as outras duas desigualdades são obtidas de modo análogo).



O trapézio é o quadrilátero em que há somente um único par de lados paralelos. Por exemplo, seja $ABCD$ um trapézio com os lados AB e CD paralelos, então a expressão que exprime sua área será obtida da seguinte forma:

Escrevamos $\overline{AB} = b_1$, $\overline{CD} = b_2$ e a a distância entre as paralelas AB e CD, isto é, o comprimento de qualquer perpendicular ligando um ponto da reta AB a um ponto da reta CD.



a diagonal AD decompõe o trapézio nos triângulos ABD e ACD, com bases b_1 e b_2, respectivamente, e mesma altura a. A área do trapézio $ABCD$ é a soma das áreas desses dois triângulos, logo a área de $ABCD$, será:

$$ABCD = \frac{ab_1}{2} + \frac{ab_2}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2} \times a$$

assim, a área do trapézio é igual à semi-soma das bases vezes a altura.

3.2.3 Área do círculo

O círculo é o conjunto de todos os pontos equidistantes de um ponto chamado centro do círculo. Temos que dois círculos com raios iguais são congruentes e, portanto têm a mesma área, ou seja, a área de um círculo de raio r é uma função desse raio. Ora, um círculo de raio r é semelhante ao círculo de raio 1, sendo r a razão de semelhança. Pelo que acabamos de ver, isto implica que a área de um círculo de raio r é r^2 vezes a área do círculo de raio 1.

Indicaremos, como é tradicional, com a letra grega π a área do círculo de raio 1. Sabe-se que π é um número irracional, cujo valor aproximado com seis algarismos decimais exatos é $\pi = 3{,}141592$.

Então a área A de um círculo de raio r é dada pela expressão

$$A = \pi \, . r^2$$

onde o número π é, por definição, a área de um círculo de raio 1.

3.2.4 Área do triângulo (Fórmula de Heron[9])

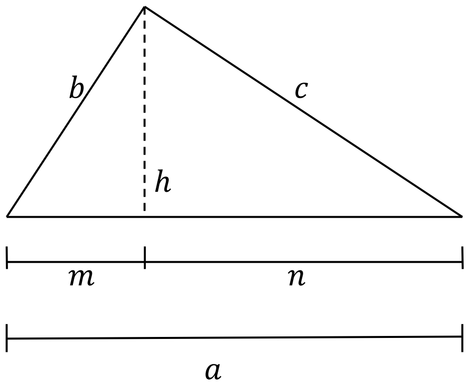
Mostraremos aqui uma outra maneira de se calcular a área de um triângulo. Para tal, usaremos a fórmula de Heron, visto que esta pode ser aplicada a qualquer tipo de triângulo e que necessita apenas das medidas dos lados. Ressaltamos que utilizaremos esta fórmula para calcular a área de terras com formato triangular.

Vejamos como podemos obter a expressão de Heron, usando apenas medidas de comprimento:

[9] Heron de Alexandria, ou ainda Hero ou Herão (10 d.C. – 80 d.C.) foi um sábio matemático e mecânico grego. É especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área de triângulos.

Consideremos um triângulo ABC, com lados medindo a, b e c, onde o semi-perímetro é indicado por $p = \frac{a+b+c}{2}$, então a área do triângulo A_t será dada por: $A_t = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Seja o triângulo ABC, com a base medindo a e os outros lados b e c. Os lados b e c tem projeções ortogonais indicadas por m e n, sobre o lado a, conforme figura a seguir.



tomando h como a medida da altura do triângulo, relativa ao lado a , segue que $A_t = \frac{a\ x\ h}{2}$. Temos ainda a formação de mais dois pequenos triângulos retângulos, donde podemos obter as seguintes relações:

$$b^2 = m^2 + h^2\ , \qquad c^2 = n^2 + h^2 \qquad \text{e} \qquad a = m + n$$

onde, subtraindo membro a membro a 2ª relação da 1ª e usando a 3ª, obtemos:

$$b^2 - c^2 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = a(m-n)$$

assim temos,

$$m + n = a \quad \text{e} \quad m - n = \frac{(b^2 - c^2)}{a}$$

que somando e subtraindo membro a membro estas expressões, teremos:

$$m = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2a} \quad \text{e} \quad n = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}$$

como $a + b + c = 2p$, aparecem as três relações:

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

$$a + c - b = a + c + b - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

sabemos que, $A_t = \frac{a\,x\,h}{2}$, onde temos $(A_t)^2 = \frac{a^2 x\,h^2}{4}$, e ainda $4(A_t)^2 = a^2 x\,h^2$. Mas,

$$a^2 x\,h^2 = a^2(b^2 - m^2)$$

$$= a^2(b + m)(b - m)$$

$$= a^2\left[b + \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2a}\right]\left[b - \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2a}\right]$$

$$= a^2\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a}\right)$$

$$= \left[\frac{(a+b)^2-c^2}{2}\right]\left[\frac{c^2-(a-b)^2}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}\right]\left[\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2p\;x\;2(p-c)}{2}\right]\left[\frac{2(p-b)x2(p-a)}{2}\right]$$

$$= 2p(p - c)x2(p - b)(p - a)$$

$$= 4p(p - a)(p - b)(p - c)$$

assim, $4(A_t)^2 = 4p(p - a)(p - b)(p - c)$

onde, finalmente teremos:

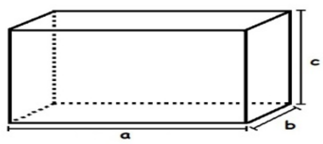
$$A_t = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

3.3 Volume

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa quantidade de espaço através de um número, devemos compará-la com uma unidade, sendo o resultado dessa comparação chamado de volume. Mostraremos as expressões mais utilizadas para calcular o volume dos principais sólidos. Partindo do princípio que a unidade de volume é o cubo de aresta 1.

3.3.1 Volume do paralelepípedo (bloco retangular)

O paralelepípedo é um poliedro formado por 6 (seis) retângulos. Ele fica determinado pelas três medidas: comprimento (a), largura (b) e altura (c). O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por $V(a, b, c)$ e, como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e altura medem 1, então, $V(a, b, c)$ = 1.



Observamos que o volume é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes, por exemplo, a largura e a altura e, se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, isto é,

$$V(na, b, c) = nV(a, b, c)$$

Este fato, constado para números naturais, é válido também para qualquer número real positivo e, isto significa dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a.1, b, c) = aV(1, b, c) = aV(1, b.1, c) \\ &= abV(1,1, c) = abV(1,1, c.1) = abcV(1,1,1) \\ &= abc.1 = abc \end{aligned}$$

portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida num plano horizontal, chamaremos essa face de base e a dimensão c de altura. Como o produto ab é a área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

NOTA: Para encontra o volume dos demais sólidos partiremos do seguinte princípio: *"São dados dois sólidos e um plano, Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm mesmo volume"* (Princípio de Cavaliere).

3.3.2 Volume do prisma

Com o Princípio de Cavaliere, podemos obter sem dificuldade o volume (V) de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, cuja base seja um polígono de área A_b, contido em um plano horizontal. Se construirmos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A_b e supondo que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente, teremos que: sendo o paralelepípedo também é um prisma e, sabendo que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base, e como figuras congruentes têm mesma área, temos $A_1 = A_b = A_2$ e, pelo Princípio de Cavaliere, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é (área da base) $\times$ (altura), o volume do prisma também é o produto da área de sua base pela sua altura, ou seja,

$$V = A_b \times h.$$

OBSERVAÇÃO: Não abordaremos o conceito de Pirâmide, uma vez que não foi abordado no conteúdo do nosso trabalho. No entanto, este conteúdo pode ser encontrado em [19] e [22].

3.3.3 Volume do cilindro, cone e esfera

Para definir um cilindro começamos com uma figura F, chamada a base do cilindro. Tomaremos o plano que contém F como horizontal. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g, não paralelo ao plano horizontal, chamado geratriz do cilindro, do seguinte modo: por cada ponto de F levantamos um segmento de reta paralelo a, e do mesmo comprimento que, g. A reunião desses segmentos é o cilindro C, de base F e geratriz g.

No cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo Princípio de Cavaliere, que o volume do cilindro (V_c) é o produto da área de sua base (círculo) pela sua altura.

Se o cilindro tem altura h e base de área A_b contida em um plano horizontal, imaginamos um prisma qualquer (ou em particular um paralelepípedo retângulo) de altura H, com base de área A_b contida no mesmo plano. Se um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então $A_1 = A_b = A_2$ e, por consequência, os dois têm mesmo volume. Logo, o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura, ou seja,

$$V_c = A_b \times h$$

Abordaremos agora, o conceito de cone e a fórmula para calcular o seu volume. Um cone fica definido da seguinte forma: Um cone K, tendo como base uma figura plana F, e com vértice um ponto P situado fora do plano F, é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F.

A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma entre a pirâmide e o cone, ou seja, o primeiro é caso particular do segundo. Como o volume de uma pirâmide (V_p) é: $V_p = \frac{\acute{a}rea\ da\ base\ (A_b) \times altura\ (h)}{3}$, (ver em [19] ou [22]), então para obter o volume de um cone, temos:

Se um cone tem altura H e base de área A_b contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A_b contida nesse mesmo plano. Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de área A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A_b} = (\frac{h}{H})^2 = \frac{A_2}{A_b}$$

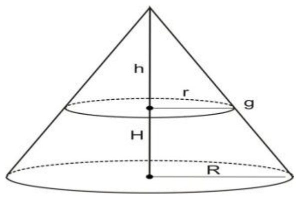
ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavaliere nos garante que os dois sólidos têm mesmo volume e, portanto, concluímos que o volume do cone (V_k) é igual a um terço do produto da área da base pela altura, ou seja,

$$V_k = \frac{\acute{a}rea\ da\ base\ (A_b)\ \times altura\ (h)}{3}$$

OBSERVAÇÃO: Temos ainda, sólidos que podem ter o formato de um tronco de cone. O volume deste tipo de sólido pode ser obtido subtraindo o volume do cone maior pelo volume do cone menor (retirado do cone maior, para obter o tronco do cone), como também pode ser calculado seu volume usando a seguinte expressão:

$$V_t = \frac{\pi \times H}{3}\ (R^2 + R\ \times r + r^2),$$

onde V_t é o volume do tronco, H a altura do tronco, R é o raio do círculo maior e r o raio do círculo menor do tronco. (NOTA: g é a medida da geratriz do cone)



Finalizamos esta seção com a abordagem sobre o volume da esfera e da calota esférica. Uma esfera de centro num ponto O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R. Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R.

O volume da esfera (V_e) será obtido também como aplicação do Princípio de Cavaliere. Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Lembre-se que, em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - r^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e r.

Consideremos, então, uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com bases também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido é chamado clépsidra, onde qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular, cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao volume da clépsidra.

O volume da clépsidra é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraido de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

que é o volume da esfera. Ou seja,

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Já a calota esférica (segmento esférico) é a parte de uma esfera cortada por um plano. Se tal plano passa pelo centro da esfera, então a altura da calota é igual ao raio da esfera, e ela será uma semi-esfera. Seu volume pode ser calculado usando a expressão:

$$V_s = \frac{\pi \times h^2}{3}(3r - h),$$

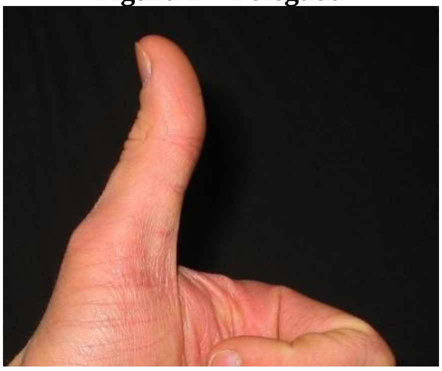
onde V_s é o volume do segmento esférico, r o raio do círculo onde o plano corta a esfera e h é a altura deste segmento.

4 CALCULANDO E COMPARANDO DISTÂNCIAS

Neste capítulo, faremos um breve relato das unidades de medidas não convencionais comparando-as com as unidades de medidas do Sistema Internacional, bem como o uso do cálculo de algumas distâncias usando as unidades do Sistema Internacional e também as unidades não convencionais, além de um comparativo entre elas.

4.1 A polegada e o palmo

Figura 1 – Polegada



Fonte: http: //www. Unidades de medidas históricas. Acesso em: 11 jul. 2015.

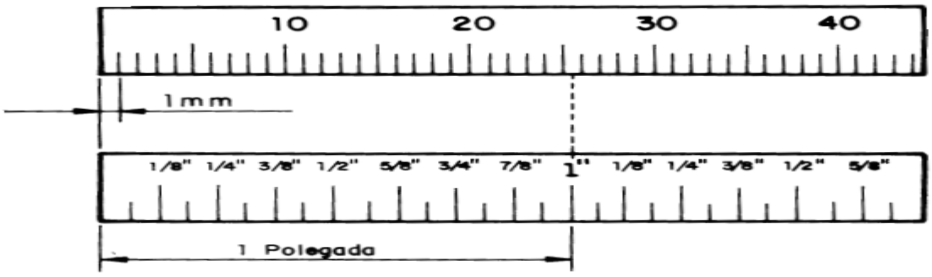
A polegada (ou *inch,* em inglês) é uma das unidades usuais do sistema de medições utilizado nos Estados Unidos. A palavra inglesa deriva do latim *uncia*, que significa "a duodécima parte" (ou "um doze avos") e define bem a unidade de medida: uma polegada corresponde a 1/12 de um *pé*, ou seja, 2,54 centímetros.

Trocando os pés pelas mãos, no Brasil o nome da unidade faz referência à medida média da falange distal dos polegares, ou em bom português, a extremidade do dedão da mão. E não é só aqui que o nome da unidade de medida está na ponta dos dedos: na língua catalã, chama-se *polzada*; em francês, *pouce*; em italiano, *pollice*; em sueco, *tum*; entre outros.

Esta unidade de medida é muito utilizada, estando presente, por exemplo, nas medições de telas de aparelhos eletrônicos, como as telas de televisões, de computadores, tablets e etc. Quem nunca ouviu frases do tipo: "fulano de tal comprou uma TV de 21 polegadas" ou "sicrano ganhou um computador de 14 polegadas" ou ainda "o tablet de beltrano é de 7 polegadas". Ela também é muito usada em mecânica, principalmente nos conjuntos mecânicos fabricados em países como os Estados Unidos e a Inglaterra, como também nas construções civis, especialmente nas medições dos diâmetros de ferro e cano.

A polegada, que pode ser fracionária ou decimal, é uma unidade de medida que corresponde a 2,54 centímetros (25,4 milímetros) e pode ser indicada por ” . Observemos na figura abaixo a medida de uma polegada (1”) e algumas subdivisões que podem ocorrer.

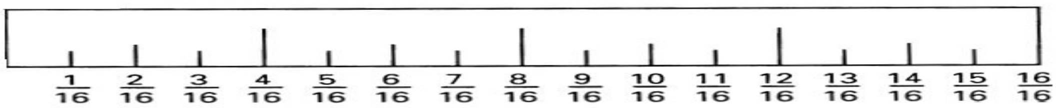
Figura 2 – Régua em polegadas



Fonte:http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfl-oAD/unidades-medidas. Acesso em: 12 fev. 2015.

A polegada foi dividida em 2, 4, 8, 16, 32, 64 e 128 partes iguais. Nas escalas graduadas em polegadas, normalmente a menor divisão corresponde a 1/16”. Essas subdivisões são chamadas de polegadas fracionárias. Como podemos visualizar melhor na figura abaixo.

Figura 3 – Subdivisão da polegada



Fonte:http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfl-oAD/unidades-medidas. Acesso em: 12 fev. 2015.

Observamos das figuras anteriores que a escala apresenta as frações 1/8”, 1/4”, 3/8”, e assim por diante, sempre com os numeradores das frações indicados por números ímpares, isto é claro e evidente devido as simplificações das frações.

A representação da polegada em forma decimal é tão usada na mecânica quanto à fracionária. Ela aparece em desenhos, aparelhos de medição como o paquímetro[10] e o micrômetro[11], e permite medidas menores do que a menor medida da polegada fracionária que é de 1/128”. No entanto vale ressaltar que uma polegada decimal equivale a uma polegada fracionária, ou seja, 25,4 mm. A diferença entre as duas está em suas subdivisões. Em vez de ser subdividida em frações ordinárias, a polegada decimal é dividida em partes iguais por 10, 100, 1000, e etc.

Citemos como exemplos:

[10] Instrumento para medir diâmetros.
[11] Instrumento que mede distância, espessura e ângulos diminutivos.

1) 1/2” corresponde a 0,5” ou (5 décimos de polegadas);
2) 1/4" corresponde a 0,25” ou (25 centésimos de polegadas);
3) 1/8” corresponde a 0,125” ou (125 milésimos de polegadas).

Para transformar uma medida dada em polegadas para milímetros, basta apenas multiplicar a fração dada por 25,4 mm.

Exemplo: Um torneiro mecânico recebeu um material cilíndrico com 3/8” de diâmetro e precisa torneá-lo de modo que fique medindo 8 mm de diâmetro. Quantos milímetro deste material deverá ser afinado?

Uma solução:

Transformando 3/8” em milímetros, temos : $3/8 \times 25,4$ mm = $(76,2/8)$ mm = 9,525 mm.

Logo, 3/8” corresponde a 9,525 mm. E como o diâmetro pedido é de 8 mm, então fazendo a subtração necessária , temos: $9,525 – 8 = 1,525$ mm.

Portanto, é necessário afinar 1,525 mm de diâmetro.

NOTA: O uso da polegada também é bastante comum nas construções civis, nas medições dos diâmetros de ferro e cano. Quando um engenheiro fala que a encanação de uma obra deve ser feita com canos de 3/4 e de meia, na verdade ele quer dizer que a medida dos diâmetros dos canos a serem utilizadas são de 19,05 e 12,7 milímetros, uma vez que 3/4 de polegadas é $3/4 \times 25,4 = 19,05$ milímetros, e meia (0,5) polegadas é $0,5 \times 25,4 = 12,7$ milímetros.

Para transformar uma medida cujo valor está em milímetros para polegadas, fazemos o seguinte procedimento:

1º passo: Multiplicamos o valor dado em milímetros por 128 (pois 1/128 é a menor medida da polegada fracionária);

2º passo: Dividimos este resultado por 25,4;

3º passo: Montamos a fração, cujo resultado da divisão é o numerador desta, enquanto o denominador será sempre 128;

4º passo: Simplificamos esta fração, caso seja possível.

<u>Exemplo:</u> Num almoxarifado de uma empresa há várias chapas de alumínio medindo 19,05mm de espessura cada. Determine a medida da espessura destas chapas em polegadas fracionárias.

Uma solução:

Seguindo os passos do procedimento dado, temos:

1º passo: $19{,}05 \times 128 = 2.438{,}4$

2º passo: $2.438{,}4 \div 25{,}4 = 96$

3º passo: 96/128

4º passo: 96/128 =3/4

Logo, a medida da espessura das chapas corresponde a 3/4 de polegadas.

Para converter uma medida de polegada fracionária para polegada decimal é bastante simples, para isto basta somente dividir o numerador da fração por seu denominador.

<u>Exemplo:</u> Converter para polegada decimal a medida 3/16”.

Uma solução:

Temos que, 3/16 = 0,1875. Logo, 3/16” corresponde a 0,1875”

Para converter polegada decimal em polegada fracionária, basta transformar a medida da polegada decimal em uma fração, na qual o numerador é o valor da medida da polegada decimal sem a vírgula e o denominador será obtido escrevendo o algarismo “1” seguido da quantidade de zeros correspondentes a quantidade de casas decimais de medida da polegada em decimal (simplificamos a fração, quando possível).

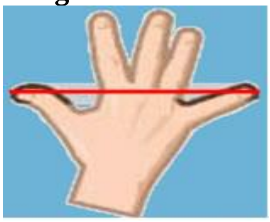
<u>Exemplo:</u> Converter a medida 0,125” em polegada fracionária.

Uma solução:

Temos que, 0,125 = 125/1000 = 1/8. Logo, 0,125” corresponde a 1/8 de polegada fracionária

Abordaremos agora, a medida palmo. O palmo também era uma unidade de medida muito utilizada pelos povos gregos e egípcios, essa medida consistia na utilização de quatro dedos juntos e correspondia a sétima parte do cúbito. Hoje o palmo é utilizado em medições caseiras, é medido pela distância em linha reta do polegar ao dedo midinho e sua medida é aceita hoje ao equivalente a 22 cm.

Figura 4 – Palmo



Fonte: http://www.ipem.sp.gov.br/5mt/unidade.asp?vpro=historia. Acesso em 13 jul. 2015

Para fazer a conversão de palmo para centímetros ou vice-versa, o procedimento é bem simples:

Para converter uma medida de palmo para centímetros, basta multiplicar a quantidade de palmos por 22.

Exemplo: Converter para centímetro a medida de 3,5 palmos.

Uma solução:

Temos 3,5 × 22 = 77. Logo, 3,5 palmos correspondem a 77 cm.

Para fazer o inverso, converter de centímetro para palmo, o procedimento também é bastante simples, para isto basta dividir a quantidade de centímetros por 22.

Exemplo: Uma fita métrica tem a medida 1,43 m. A quantos palmos corresponde esta medida?

Uma solução:

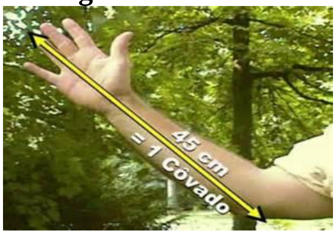
Como 1,43 m correspondem a 143 cm, então teremos:

143 ÷ 22 = 6,5. Logo, a medida da fita representa 6 palmos e meio.

4.2 O côvado, a braça e a jarda

Medida de comprimento muito utilizada em citações bíblicas e considerada a mais antiga das unidades de medidas que se tem registro (desde o antigo Egito), esta medida foi usada por diversas civilizações antigas, entre elas os Babilônios, Egípcios e Hebreus. Inicialmente sua medição era baseada no comprimento do antebraço, da ponta do dedo médio até o cotovelo, e por se tratar de uma medida antropométrica[12], seu comprimento variava de civilização para civilização. Por exemplo, o côvado real dos Egípcios media o equivalente hoje a 53 centímetros, o dos Romanos media 44,5 centímetros, já o côvado Hebreu media o equivalente a 44,7 centímetros. Importante ainda ressaltar que nos textos bíblicos de Ezequiel, um côvado é usado como uma medida equivalente a sete mãos, ou seja, a 52,5 centímetros, pois uma mão era equivalente a 7,5 centímetros.

Figura 5 – Côvado



Fonte: www.medida covado - imagens. Acesso em 19 ago. 2015.

A real medida de um côvado se perdeu no tempo, evidentemente era uma medida aproximada e dependia do porte físico do indivíduo o qual a media. O famoso matemático russo Yakov Perelman (1882 – 1942) estimava um valor médio de 45 centímetros para a medida de um côvado, valor “considerado” em comparação com o nosso atual Sistema Internacional de Medidas (SI). Há também hipóteses de medições equivalentes a 52,4 centímetros, esta baseada em verificações pertinentes à época de Anemenés I, que reinou no Egito entre 1991 – 1962 a.C..

Desta forma, se a considerarmos como o equivalente a 45 centímetros, poderemos fazer conversões de uma medida que está em côvado para metros, ou vice e versa, onde para esta primeira basta multiplicar a quantidade de côvados por 0,45.

<u>**Exemplo:**</u> Segundo a Bíblia, a arca de Noé, com três andares, tinha 300 côvados de comprimento, 50 côvados de largura e 30 de altura. Usando um côvado o equivalente a 45 centímetros, quais seriam as medições da arca, adotando o metro como medida?

---

[12] Medida do corpo humano ou de suas partes.

Uma solução:

Como um côvado equivale a 0,45 metros, então teremos:

- Comprimento = $300 \times 0,45 = 135$ metros
- Largura = $50 \times 0,45 = 22,5$ metros
- Altura = $30 \times 0,45 = 13,5$ metros

Assim, as medições da arca seriam de 135 metros de comprimento, 22 metros e meio de largura e 13 metros e meio de altura.

Faremos agora uma abordagem sobre a medida braça. Antiga unidade de medida de comprimento equivalente a 2,2 metros, esta medida consistia na distância de ponta a ponta de cada braço aberto dos dedos maiores das mãos. Apesar de antiga, atualmente ela ainda é usada e compreendida por muitos trabalhadores rurais e outras pessoas envolvidas com o meio rural. Até porque a braça estabelece uma relação muito importante entre o metro linear e a légua, medida esta que corresponde a 6000 metros (veremos com mais ênfase na próxima seção).

Figura 6 – A braça

Fonte: www.edsolique.com. Acesso em 24 ago. 2015.

Assim, usando a relação de equivalência entre a braça e o metro, poderemos fazer a conversão entre estas duas unidades de medidas, ou seja, para transformar uma medida que está em braça para metros, basta somente multiplicar o valor da medida por 2,2. Por outro lado, se quisermos fazer o inverso, passar para braça uma medida que esteja em metros, é preciso somente dividir por 2,2 o valor da medida que está em metros.

Exemplo 1: As dimensões de um terreno quadrado, medida por um agricultor, são de 125,5 braças em cada lado. Qual seriam as dimensões deste mesmo terreno em metros?

Uma solução:

Como uma braça corresponde a 2,2 metros, então teremos: $125,5 \times 2,2 = 276,1$

Assim, as dimensões de cada lado do terreno seriam de 276,1 metros.

Exemplo 2: A quantas braças corresponde uma medida cujo comprimento é de 990 metros?

Uma solução:

Neste caso teremos: $990 \div 2{,}2 = 450$. Assim, 990 metros correspondem a 450 braças.

Finalizamos esta seção falando sobre a medida jarda. Lembrou de futebol americano? Pois é, é muito comum ouvir neste esporte o comentarista falar que tal jogador avançou “xis” jardas. Esta unidade de medida, cujo símbolo é yd (*do inglês yard*), consiste de uma unidade de grandeza de comprimento do sistema de medidas utilizado no Reino Unido e adaptado nos Estados Unidos da América e alguns países da língua inglesa. A origem desta unidade de medida não é muito bem definida, mas acredita-se que sua primeira medição foi feita através da cintura masculina. Posteriormente, no século XII, o rei da Inglaterra, Henrique I (reinou de 1100 a 1135) fixou a jarda como a distância entre seu nariz e o polegar de seu braço estendido, medida adotada até os dias atuais. Atualmente, uma jarda corresponde a 0,9144 m.

Figura 7 – A jarda

Fonte: www.mundoeducacao.com/.../unidades-medida-ao-longo-historia.htm.Acessoem 03 jul. 2015

Desta forma, é muito simples fazer a conversão de uma medida que está em metros para jardas ou vice e versa, ou seja, para transformar uma medida de jardas para metros basta multiplicar o valor em jardas por 0,9144. E caso queiramos fazer o inverso, transformar uma medida de metros para jardas, é necessário somente dividir o valor em metros por 0,9144. Conforme veremos nos seguintes exemplos:

Exemplo 1: Em uma partida de futebol americano, um jogador percorreu 28 jardas em um lance. Determine quantos metros ele percorreu.

Uma solução:

Como 1 jarda corresponde a 0,9144 metros, então teremos: $28 \times 0{,}9144 = 25{,}6032$. Logo, o jogador percorreu aproximadamente 25,6 metros.

<u>Exemplo 2:</u> Em um determinado jogo de futebol, um jogador lançou a bola por, aproximadamente, 35 metros. Represente a distância atingida por esse lançamento, em jardas.

Uma solução:

Como 1 jarda corresponde a 0,9144 metros, então para 35 metros, teremos:

$35 \div 0{,}9144 \cong 38{,}2765$. Logo, 35 metros correspondem aproximadamente a 38,28 jardas.

4.3 O pé, a légua e a milha

O pé foi usado como unidade de medida durante a maior parte da história documentada, incluindo a Grécia antiga e o Império Romano, a origem do nome é geralmente aceita na relação com o tamanho médio de um pé de um adulto, pé masculino (ou possivelmente um sapato). Originalmente dividido em 16 unidades, os romanos também dividiram a medida do pé em 12 *uncia* (origem do termo moderno inglês, polegadas).

Figura 8 – O Pé

Fonte: www.medida pé - imagens. Acesso em 22 ago. 2015

Ele continuou a ser usado por toda a Europa durante a maior parte dos últimos dois mil anos, embora variações nacionais e regionais fossem comuns. Esta unidade de medida também passou a ser comumente utilizada em países da língua inglesa em todo mundo, sendo o uso desta medida se declinando no final do século 18 com a adoção do sistema métrico, pela maioria dos países, começando principalmente pela a França.

Em 1959, o acordo internacional sobre as unidades de medidas jardas e libras, entre os Estados unidos e os países commonwealth[13] definiram uma jarda como sendo exatamente 0,9144 metros, e como um pé representava um terço de uma jarda, esta por sua vez ficando definida como sendo exatamente 0,3048 metros (30,48 centímetros). Sendo o pé também subdividido em doze polegadas, assim ficou estabelecido as seguintes relações:

[13]Associação voluntária de 53 estados soberanos, a maioria ex-colônias britânicas, com exceção de Moçambique, pertencente à colônia portuguesa, e Ruanda que aderiu em 29 de novembro de 2009.

01 pé	=	12 polegadas
03 pés	=	01 jarda

Assim, consequentemente pode-se estabelecer o seguinte:

01 pé	=	0,3048 metros
01 metro	=	3,2808 pés.

Desta forma podemos fazer as conversões das unidades de medida de pés para metro ou vice-versa. Onde, se quisermos transformar uma medida que está em pés para metros, faremos a multiplicação da unidade em pés por 0,3048. Por outro lado se quisermos converter a medida metro em pés, basta somente dividir a unidade dada em metros por 0,3048.

Vejamos dois exemplos bem simples:

<u>Exemplo 1:</u> Atualmente vemos muito o uso da medida "pés" no sistema de aviação. Quando um piloto de uma aeronave precisa informar a sua altura ele utiliza essa unidade comunicando aos passageiros e informando a torre de comando a sua altura correta. Por exemplo, um avião que se encontra a 10.000 pés de altura está a 3.048 metros de altura (visto que, 10.000 pés × 0,3048 = 3.048 m).

<u>Exemplo 2</u>: A quantos pés se encontra uma aeronave que está a uma altura de 3810 metros do solo?

Uma solução:

Temos que, 3810 ÷ 0,3048 = 12.500. Logo, está aeronave se encontra a uma altura de 12.500 pés.

Já a légua é uma medida de distância de origem Celta, esta medida variava-se conforme a época, o país e a região. Dizia os portugueses ser, uma légua, o quanto se podia andar em linha reta durante uma hora, assim a légua terrestre seria diferente da légua marítima, já que um navio anda mais em uma hora do que uma pessoa. Além disso, como os navios cada vez mais foram ficando mais aperfeiçoados e mais rápidos a légua marítima teve diversos valores no decorrer dos tempos. Já a légua terrestre, unidade a qual trataremos neste tópico, sempre se manteve mais ou menos a mesma (6.000 metros). Como medida de distância, a légua terrestre portuguesa media 5.572 metros, no Brasil, esta unidade de medida era utilizada principalmente no nordeste do país, sendo sua equivalência com o metro correspondente a 6.000, ou seja, querendo-se fazer a conversão de léguas para metros ou quilômetros, era suficiente fazer a multiplicação desta medida por 6.000 ou 6, respectivamente. Consequentemente, uma distância que estava sendo usado o metro ou o quilômetro como unidade de medida, bastaria dividir esta medida, respectivamente, por 6.000 ou 6, para obter esta mesma distância em léguas.

Exemplo 1: A distância entre duas cidades do nordeste do Brasil é de 42,5 léguas. Qual é a distância entre estas duas cidades, usando o metro e o quilômetro como unidades de medidas?

Uma solução:

Como uma légua corresponde a 6.000 metros, temos:

$$42{,}5 \times 6.000 = 255.000$$

Assim, 42,5 léguas correspondem a 255.000 metros e consequentemente a 255 quilômetros, ou seja, a distância que separa as duas cidades é de 255.000 metros, que equivalem a 255 km.

Exemplo 2: Para se medir a distância entre duas placas de sinalização de trânsito, foi usado o metro como unidade de medida. Se a distância entre estas placas é de 7.200 metros, quantas léguas separam estas duas placas?

Uma solução:

Como, $7.200 \div 6.000 = 1{,}2$. Então 7.200 metros equivalem a 1,2 léguas, ou seja, a distância que separa as duas placas é de 1,2 léguas.

Trataremos agora de medida milha. Assim como a légua, a milha também tem uma unidade de medida equivalente terrestre e uma marítima (náutica). Daremos aqui maior ênfase à milha náutica, no entanto, faremos um breve relato sobre a milha terrestre.

A milha terrestre ainda está em uso nos Estados Unidos e na Inglaterra, sua origem é no mínimo curiosa. A unidade de medida milha surgiu na Roma antiga, onde valia 1.000

passos dados pelo centurião[14] ou 5.000 pés romanos. Vale ressaltar que essas medidas não eram muito precisas, já que o tamanho do passo variava de centurião para centurião, e no total dos 1.000 passos, essa diferença acumulada gerava uma grande diferença no valor da milha.

Historicamente, a milha usada pelos romanos variava aproximadamente entre 1.401 e 1.580 metros. Sendo, os romanos, os primeiros povos a usar uma unidade de longa distância definida deste modo, ficando esta unidade conhecida como milha romana. A milha terrestre moderna corresponde a cerca de um terço da antiga légua, derivou da milha romana e foi definida com caráter mais científico em 1952, no parlamento inglês, no tempo da rainha Elisabeth I. Valia, então, cerca de 1.609 metros. Em 1959, foi denominada milha internacional (símbolo mi) e fixada em 1.609,344 metros.

Por outro lado a milha náutica e uma unidade de medida de comprimento equivalente a 1.852 metros (adotada em 1929 pela I Conferência Hidrográfica Internacional Extraordinária – *First International Extraordinary Hydrographic Conference*, realizada em Mônaco na Franca), ela é utilizada quase exclusivamente em navegações marítima e aérea. Historicamente, a milha náutica foi definida como sendo o comprimento de um minuto de arco medido à superfície média do mar, ao longo de um qualquer grande círculo da terra.

Baseando-se na definição dada, a milha náutica seria utilizada como uma medida aproximada, usando os minutos medidos sobre um meridiano ou sobre o Equador. A sua não exatidão deriva de a terra não ser uma esfera perfeita, já que exibe, em resultado do seu movimento de rotação, achatamento nos pólos e alongamento do seu raio ao longo do Equador. Esse efeito faz variar o comprimento de um minuto de arco do grande círculo desde 1.843 metros nas zonas polares até 1.862 metros na zona equatorial. Outro fator que contribui para a inexatidão é a irregularidade da superfície terrestre, que embora a uma escala pequena, tem zonas deprimidas e levantadas, o que faz variar o comprimento de arco medido ao longo da superfície em algumas dezenas de metros.

Mas, afinal de contas, de onde vieram estes 1.852 metros? E por que utilizar este valor, um número nada redondo, ou seja, uma unidade aparentemente esquisita? A milha náutica (que passou a ser designada como milha marítima internacional) corresponde à distância medida sobre a superfície terrestre por cada minuto de latitude[15], ou de

[14] O centurião na hierarquia militar romana era o sexto na cadeia de comando numa legião.
[15] Distância, medida em graus, de um lugar a linha do Equador.

longitude[16]que nos desloquemos. Na verdade, medindo os raios equatorial de terra (6.378,137 km) e o polar (6.356,752 km), obtemos um raio terrestre médio de 6.367,444 km. Na terra, a diferença entre o raio polar e o raio equatorial vale apenas 21,385 km, o que representa 0,336% do raio terrestre médio. Por isso, em primeira aproximação, podemos tomar a terra como uma esfera com raio médio de 6.367,444 km. Assim, usando esse raio (r) terrestre médio e assumindo a terra como uma esfera, o seu perímetro (p) vale:

$$p = 2 \times \pi \times r \cong 40.007{,}83 \text{ km}$$

Esses 40.007,83 km correspondem a uma circulação completa em trono do globo (360°), ou seja, uma volta ao mundo segundo um círculo máximo. Em outras palavras, ao longo do equador ou segundo um meridiano qualquer, pois todos os meridianos são círculos máximos. Assim, fazendo as contas para cada grau, obtemos:

$$40.007{,}83 \text{ km} \div 360° \cong 111{,}133 \text{ km}$$

Desta forma, notamos que em média, um arco de um grau (1º) na superfície da terra corresponde a cerca de 111,133 km. Onde, calculando a distância que corresponde a cada minuto de arco (1’), sabendo que 1º = 60’, temos 111,133 km ÷ 60’ ≅ 1,8522 km, ou seja, 1.852,2 metros, sendo por este motivo que a milha náutica tem o referido valor. Lembremos, no entanto, que supusemos a terra perfeitamente esférica e tomamos a medida do seu raio médio. Devido ao ligeiro achatamento da terra, na realidade, um minuto de arco não corresponde a uma medida uniforme (constante). A superfície da terra vai aumentando à medida que nos afastamos do Equador. Por isso, o comprimento do arco correspondente a um minuto vale, mais precisamente, 1.861 metros nos pólos e 1.843 metros no Equador.

No âmbito da navegação marítima e aérea, a milha náutica com medida de 1.852 metros, é uma unidade de comprimento muito conveniente por poder ser medida diretamente sobre os mapas e as cartas náuticas, independentemente da sua escala, utilizando o minuto de meridiano como unidade. Daí a persistência do seu uso, vejamos:

Uma deslocação de uma milha em um navio a navegar na direção Norte-Sul, ou seja, ao longo do meridiano, traduz-se automaticamente em uma variação de latitude de 1 minuto de arco; se avançarmos 60 milhas, a nossa latitude terá variado 1 grau. Do mesmo modo,

[16] Distância compreendida entre o meridiano de Greenwich e qualquer outro ponto da terra.

navegando ao longo do Equador, a cada milha percorrida, a longitude do nosso navio terá se alterado em 1 minuto de arco; se o percurso for de 60 milhas, a longitude se altera em 1 grau.

Por outro lado, raciocinando no sentido inverso, uma variação de latitude de 1 minuto na posição do navio, significa que avançamos uma milha para Norte ou para Sul; uma variação de 1 grau significará que avançamos 60 milhas. Se viajarmos ao longo do Equador, por cada minuto de variação da longitude na nossa posição, teremos navegado uma milha para Leste ou para Oeste; e 60 milhas a cada grau.

Desta forma, observamos que se fosse utilizado o quilômetro, por exemplo, teríamos de fazer contas mais complexas, pois 1 km à superfície da terra significa um arco de 0,5399568 minutos, onde nota-se ser uma enorme vantagem. Navegando ao longo de círculos máximos, podemos fazer corresponder facilmente às distâncias percorridas, em milhas, com variações das coordenadas locais e vice-versa. Com relação à aeronáutica, podemos usar o mesmo raciocínio, pois a distância do avião ao centro da terra pouco difere (percentualmente) do raio terrestre médio, uma vez que a altitude a que os aviões comerciais voam (cerca de 11 km) é muito menor do que a medida do raio terrestre. Assim, torna-se clara a justificativa para que a milha náutica tenha um valor "irregular" de 1.852 metros. Ressaltando ainda, que podemos fazer a conversão de uma medida de milha para metros ou vice-versa de modo bem simples, onde para primeira conversão, milhas para metros, basta somente multiplicar a quantidade de milhas por 1.852. E caso queiramos fazer a conversão inversa, metros para milhas, é necessário somente dividir a quantidade de metros por 1.852. Conforme veremos nos exemplos a seguir:

Exemplo 1: Em uma determinada expedição um navio navegou uma distância de 155 milhas. Represente esta distância em km.

Uma solução:

Como 1 milha corresponde a 1.852 metros, então teremos: $155 \times 1.852 = 287.060$ m, ou seja, 287,06 km. Logo, 155 milhas equivalem a 287,06 km.

Exemplo 2: A distância entre duas cidades é cerca de 555,6 km. Determine a quantidade de milhas que separa estas duas cidades.

Uma solução:

Inicialmente temos que 555,6 km equivalem a 555.600 metros, assim teremos: $\frac{555.600}{1.852} = 300$. Logo a distância que separa as duas cidades e de cerca de 300 milhas.

4.4 O metro (múltiplos e submúltiplos)

Figura 9 – Fita métrica

Fonte:http://www.ipem.sp.gov.br/5mt/unidade.asp?vpro=historia. Acesso em 25 jul. 2015.

Até se chegar à definição, a qual é considerada atualmente e que data de 1983, o metro passou por algumas definições ao longo dos tempos. Foi definido pela primeira vez como sendo a décima milionésima parte do meridiano terrestre (dividiu-se o comprimento do meridiano por 40.000.000). A segunda definição foi tomada devido as imprecisões e imperfeições dos padrões de medidas, preestabelecendo que o padrão do metro deveria ter a forma de uma barra com perfil em X e ser do tipo traço, isto é, deveria ter gravados numa de suas faces dois traços paralelos, bastante finos, de modo que a distância entre eles fosse, tão aproximadamente quanto possível, igual ao comprimento do metro originalmente definido. O material empregado na construção desse padrão deveria ser aquele que permitisse preservá-lo contra a ação corrosiva da atmosfera. Como tal, a escolha recaiu sobre uma liga metálica com 90% de platina e 10% de irídio.

Figura 10 – Padrão do metro

Fonte: http://www.ipem.sp.gov.br/5mt/unidade.asp?vpro=historia. Acesso em 25 jul. 2015.

Desta forma, em 1889, a 1ª Conferência Geral de Pesos e Medidas – CGPM, após examinar os padrões assim construídos e considerá-los satisfazendo às recomendações anteriormente formuladas, sancionou-o como protótipo internacional de comprimento, e confiou sua guarda ao BIPM, sob cujos cuidados passaram a ser mantidos no pavilhão de Breteuil, no parque de Saint Cloud, em Paris. Assim em decorrência das decisões desta 1ª conferência, passou a vigorar a seguinte definição para o metro: comprimento internacional de comprimento, representado pela distância a zero grau Celsius (0 °C), entre dois traços transversais gravados numa barra com secção transversal em forma de X, feita com liga de platina e irídio. Guardada pelo Bureau Internacional de Pesos e Medidas, no pavilhão de Breteuil, em Sèvres, Paris.

No entanto, em 1960, ao homologar o Sistema Internacional – SI, a CGPM adotou o metro como unidade padrão de comprimento, e substitui sua definição até então baseada no protótipo internacional, ou seja, adotando-se que o metro fosse o comprimento igual a 1.650.176,73 comprimentos de onda, no vácuo, da radiação vermelho-alaranjada correspondente à transição de um elétron entre os níveis $2p_{10}$ e $5d_5$ do átomo de criptônio 86.

A mudança na definição do metro, até então aprovada pela CGPM, teve em vista não só manter a magnitude dessa unidade tão próxima quanto possível da distância entre os dois traços do protótipo internacional de comprimento, como também, evitar as consequências da deterioração a que está sujeito aquele protótipo em decorrência do envelhecimento do material. Além disso, Por ser um novo padrão invariável no tempo e no espaço, sempre seria possível compará-lo, mesmo que indiretamente, com qualquer outro comprimento.

Não obstante as razões que lhe deram origem, essa nova definição do metro não teve vida muito longa. Na 17ª CGPM, em 1983, tendo em vista que a definição em questão não permitia praticamente uma realização precisa dessa unidade para todas as necessidades e, ainda, que os progressos até então conseguidos no domínio dos lasers permitiam obter radiações mais reprodutíveis e de uso mais fácil que a radiação emitida por uma lâmpada de criptônio, além das vantagens que adviriam para a geodesia[17] e astronomia[18] com a revisão da então vigente definição do metro, esta unidade de comprimento ganhou uma nova definição, definição esta que é aceita atualmente: O metro (símbolo m) é o comprimento percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo 1/299.792.458 do segundo.

O metro é uma medida muito utilizada cotidianamente em várias atividades humanas. Dele, deriva outras unidades de comprimento, das quais se convencionou chamar de múltiplos (quando estas são resultados de uma multiplicação decimal a partir do metro) utilizadas para

[17] Ciência que estuda a forma e as dimensões da terra, ou de uma grande região dela.
[18]Estudo científico da origem, evolução e propriedades físicas e químicas dos corpos celestes, e dos processos que os envolvem.

medir grandes distâncias, e submúltiplos (quando forem resultados de uma divisão decimal) usados para medir pequenas distâncias. Vejamos a tabela seguir:

Quadro 4 – Múltiplos e submúltiplos do metro

MÚLTIPLO	NOME	SÍMBOLO	SUBMÚTIPLO	NOME	SÍMBOLO
	metro	m		metro	m
10^1	decâmetro	dam	10^{-1}	decímetro	dm
10^2	hectômetro	hm	10^{-2}	centímetro	cm
10^3	quilômetro	km	10^{-3}	milímetro	mm
10^6	megametro	Mm	10^{-6}	micrômetro	µm
10^9	gigametro	Gm	10^{-9}	nanômetro	nm
10^{12}	terametro	Tm	10^{-12}	picômetro	pm
10^{15}	petametro	Pm	10^{-15}	fentômetro	fm
10^{18}	exametro	Em	10^{-18}	attômetro	am
10^{21}	zettametro	Zm	10^{-21}	zeptômetro	zm
10^{24}	yotametro	Ym	10^{-24}	yoctômetro	ym

Fonte: Autor, 2015.

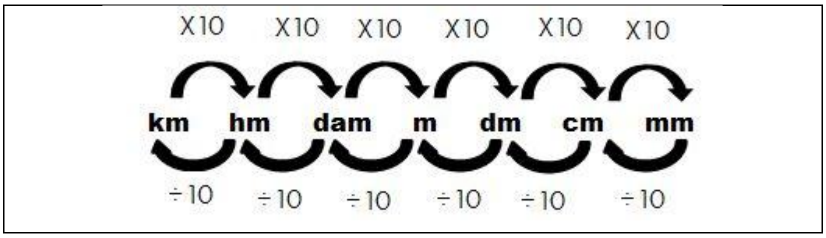
OBSERVAÇÃO: Convém ressaltar duas unidades de medidas de comprimento não mencionadas na tabela anterior: o angstrom (cujo símbolo é Â e que mede 10^{-10} metros) e o ano-luz (distancia percorrida pela luz em um ano e que vale $9{,}5\times10^{12}$ km).

Observamos na tabela dos múltiplos e submúltiplos do metro que cada unidade imediatamente após é dez vezes maior que a anterior, isto significa dizer que se quisermos fazer a conversão de uma unidade para uma imediatamente após, basta multiplicarmos o valor da unidade a ser convertida por dez, consequentemente, para transformar em uma unidade anterior divide-se o valor desta por dez.

Por exemplo, a astronomia define a distância da terra ao sol como sendo de aproximadamente 150 milhões de quilômetros. Convertendo a medida de km para outra unidade de medida, teremos: $150.000.000 = 150 \times 10^6$, como 10^6 equivale a medida de um megametro (Mm), então dizemos que esta distância é de aproximadamente 150 Mm.

Utilizaremos aqui, para efeito de conversão de medidas, três múltiplos e três submúltiplos do metro para fazermos alguns exemplos sobre a conversão destas unidades de medidas, ressaltando que para os outros múltiplos e submúltiplos o processo é igual. Usaremos a tabelinha abaixo como dispositivo prático de conversão.

Quadro 5 – Dispositivo de conversão



Fonte:www.infoescola.com/matematica/unidades-de-medidas-de-comprimento. Acesso em 21 ago. 2015

Exemplo 1: Converter 2,5 km em metro (m).

Uma solução: (faremos o passo a passo até chegarmos o resultado final)

1º Passo: Observa-se a distância (número de casas decimais) da unidade km à unidade m, que nesse caso são três casas.

2º Passo: Como m está à direita de km, escrevemos 2,5 × 1000 (resultado da multiplicação de 10 × 10 × 10, ou seja, a distância entre km e m).

3º Passo: Em 2,5 "deslocamos a vírgula" três vezes para a direita (número de zeros de mil) e os espaços em branco preenchemos com zeros.

25/ 0 / 0**,** 0 = 2500**,**0 m, ou seja, 2,5 km = 2500 m.

Exemplo 2: Se uma vela de 36 cm de comprimento diminui 1,8 mm por minuto, quanto tempo levará para ser totalmente consumida?

Uma solução:

Convertemos 36 cm para mm, pois a vela queima 1,8 mm por minuto. Faremos a divisão por 1,8 e determinaremos o tempo. Novamente, só podemos dividir grandezas na mesma unidade, assim 36 cm = 360 mm. Sabemos que em um minuto a vela queima 1,8 mm, então 360 mm serão queimados em 360 / 1,8 = 200 minutos = 3 h 20 min.

5 CALCAULANDO E COMPARANDO ÁREAS DE SUPERFÍCIES

A arte da medição de terras denomina-se agrimensura (termo originado do latim *agri* = campo, terra; e *mensura* que significa medida), daí o significado de medida de terras, o qual é um dos ofícios mais antigo praticado pela humanidade. Estudos comprovam que a arte de medir terras surgiu no antigo Egito, onde os egípcios precisavam delimitar as áreas de lavouras após as inundações anuais do rio Nilo. Para fins de arrecadações de impostos, sobre a produção agrícola de trigo e cevada, os faraós contratavam os harpedonaptas ou esticadores de corda, assim como eram chamados os agrimensores egípcios, estes acompanhavam os produtores desde as demarcações de suas terras inundadas até a época da colheita.

Heródoto (1.400 a.C.), historiador grego e Heron de Alexandria registraram detalhes das técnicas de medições de terras desses povos. Outras civilizações antigas que viveram na região da Mesopotâmia já dominavam essa técnica de medição agrária com a mesma finalidade.

Com o surgimento do sistema métrico decimal, na França (século XVIII), estabeleceu-se que o metro quadrado seria a unidade padrão para medir superfícies. Mas, no Brasil, desde a sua implementação, os agricultores brasileiros ligados as suas tradições culturais não se adaptaram totalmente a essas medidas métricas decimais, em suas atividades agrícolas. Desta forma, continuaram em uso, na agricultura familiar brasileira, as unidades de medidas agrárias utilizadas por diversas regiões do país, dentre estas medidas destacamos a tarefa (principal inspiração do nosso trabalho) ou a cubação de terras como é empregado por vários agricultores do interior de alguns estados brasileiros.

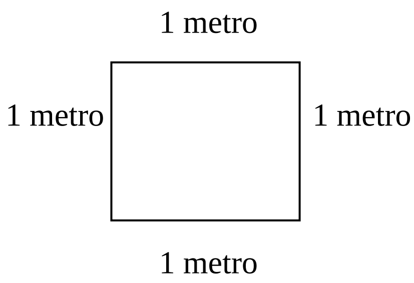
Sabemos que as medidas de superfície estão presentes em nosso cotidiano, principalmente em situações relacionadas, por exemplo, à compra de um terreno, aquisição de uma casa ou apartamento, pintura de paredes, ladrilhamento de pisos, entre outras situações. O metro quadrado (m^2) é a medida mais utilizada na medição de áreas, mas em algumas ocasiões, outras unidades de medidas como o quilômetro quadrado (km^2) também são utilizadas, esta se usa quando se deseja medir uma extensão de área muito grande. Por exemplo, na previsão da área de uma reserva florestal ou na medição de um lago de uma usina hidrelétrica, o quilômetro quadrado é considerado uma medida mais usual, pois expressa superfícies de grandes extensões. No entanto, existem várias outras unidades de medidas que também são usadas para expressar a área de uma determinada superfície.

Com relação as unidades de medidas, usaremos além das convencionais medidas como o metro quadrado e o quilômetro quadrado, por exemplo, trataremos também de outras unidades de medidas utilizadas para medir área, como o alqueire, o hectare e a tarefa. Ao longo da abordagem de cada uma destas medidas, falaremos da origem da mesma e aonde ainda se utiliza tal medida, como também faremos algumas conversões de valores destas medidas com as medidas convencionais.

5.1 O metro quadrado (múltiplos e submúltiplos)

O metro quadrado (m^2) é a medida padrão adotada no Sistema Internacional (SI) para se medir a área de uma região. No entanto, existem vários múltiplos e submúltiplos do metro quadrado que também utilizamos para expressar a área de uma superfície, que é a porção do plano ocupado por uma figura plana. Mas primeiro, vamos entender o que significa a medida m^2. Assim como medimos comprimento, também medimos superfícies planas. Quando falamos em medir uma superfície plana, temos que compará-la com outra tomada como unidade padrão e verificarmos quantas vezes essa unidade de medida cabe na superfície que se quer medir. O m^2 é à medida que corresponde a área de um quadrado que possui os lados com medida de 1 m cada (o quadrado da figura a seguir representa a área de 1 m^2).

Figura 11 – Quadrado de 1 metro de lado



Fonte: Autor, 2015.

Esta unidade de medida expressa qualquer superfície regular ou irregular, na forma de uma região quadrada. Se dissermos que uma área possui medida igual a 120 m^2, por exemplo, estamos ressaltando que esta superfície é composta de 120 quadrados, com lados medindo um metro cada. Da mesma forma, se usarmos os múltiplos ou submúltiplos do metro quadrado. Se a superfície de uma determinada região é de 80 quilômetros quadrados (km^2), significa dizer que, intuitivamente, a referida região é composta de 80 quadrados com medida de 1 km em cada lado.

Na tabela a seguir temos alguns múltiplos e submúltiplos do metro quadrado, com seus respectivos valores correspondentes. Lembremos ainda, que há vários outros múltiplos e submúltiplos do metro quadrado, semelhante à tabela de múltiplos e submúltiplos do metro (conforme visto na tabela 5).

Quadro 6 – Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado

SUBMÚLTIPLOS		**UNIDADE PADRÃO**	**MÚLTIPLOS**	
Decímetro quadrado (dm^2)	$0{,}01\ m^2$	m^2	Decâmetro quadrado (dam^2)	$100\ m^2$
Centímetro quadrado (cm^2)	$0{,}0001\ m^2$		Hectômetro quadrado (hm^2)	$10.000\ m^2$
Milímetro quadrado (mm^2)	$0{,}000001\ m^2$		Quilômetro quadrado (km^2)	$1.000.000\ m^2$

Fonte: Autor, 2015.

Observando a relação do metro quadrado com seus múltiplos e submúltiplos, vemos que é bastante simples fazer a conversão destas unidades de medidas. Observe que cada medida é 100 vezes maior que a medida que vem imediatamente anterior. Vejamos:

<u>**Exemplo 1:**</u> Converter:

a) $150.000\ m^2$em km^2; b) $0{,}025\ m^2$em cm^2; c) $4{,}5\ km^2$em m^2

Uma solução:

a) Como $1\ km^2$ corresponde a $1.000.000\ m^2$, então basta dividir 150.000 por 1.000.000. Ou seja, $150.000\ m^2$ equivalem a $0{,}15\ km^2$.

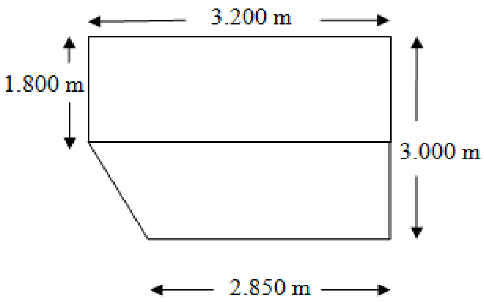
b) Como $1\ m^2$ são $10.000\ cm^2$, então basta multiplicar 0,025 por 10.000. Ou seja, $0{,}025\ m^2$ equivalem a $250\ cm^2$.

c) Como $1\ km^2$ corresponde a $1.000.000\ m^2$, então basta multiplicar 4,5 por 1.000.000. Ou seja, $4{,}5\ km^2$ equivalem a $4.500.000\ m^2$.

OBSERVAÇÃO: Veja que para converter m^2 em um de seus múltiplos, dividimos a quantidade de m^2 por 100, 10.000 ou 1.000.000. Caso queiramos fazer o inverso, converter dam^2, hm^2 ou km^2 em m^2, basta dividir respectivamente por 100, 10.000 ou 1.000.000. Da mesma forma podemos converter m^2 em um de seus submúltiplos, para isto, multiplica-se a quantidade de m^2 por 100, 10.000 ou 1.000.000. E o inverso, faz-se a divisão da quantidade de cm^2, dm^2 ou mm^2 por 100, 10.000 ou 1.000.000, respectivamente.

<u>Exemplo 2:</u> Determinar a área, em km^2, do terreno cuja forma e medidas estão descritas na figura abaixo:

Figura 12 – Propriedade rural



Fonte: Autor, 2015

Uma solução:

Como as medidas do terreno estão em metros, podemos calcular a área em m^2 e depois fazer a conversão para km^2. Assim teremos:

- Retângulo de 3.200 metros de comprimento por 1.800 metros de largura: área = 3.200×1.800 = 5.760.000 metros quadrados.
- Trapézio de 3.200 metros e 2.850 metros de comprimentos nas bases e 1.200 metros de largura (pois, 3.000 – 1.800 = 1.200): área = $\frac{(3.200 + 2.850) \times 1.200}{2} = \frac{6.050 \times 1.200}{2}$ = 3.630.000 metros quadrados.

Assim a área do terreno será: 5.760.000 + 3.630.00 = 9.390.000, ou seja, 9.390.000 metros quadrados. Convertendo para km^2, temos: $9.390.000 \div 1.000.000 = 9{,}39$ km^2.

Outra solução: Poderíamos converter de imediato as medidas do terreno para km e assim teríamos a área em km^2. (área do retângulo = 5,76 km^2, área do trapézio = 3,63 km^2 e área total = 9,39 km^2).

5.2 O alqueire

Inicialmente usada como medida de capacidade, o alqueire que tem origem árabe, designava originalmente uma das bolsas ou cestas de carga que se colocavam atadas sobre o dorso e pendente para ambos os lados dos animais, usados para transportar cargas. Tido pelos portugueses, como uma medida nova, pois acabara de ser importada das regiões das penínsulas, sob o domínio árabe, sua primeira referência data de 1.111 d.C.. No entanto, estudos comprovam que o sistema usado desde finais do século XI já incluíam o alqueire, sendo bem provável que nesta época o alqueire ainda designava uma medida única e bem conhecida. Anos depois, talvez já existissem diferentes alqueires, razão pela qual as posturas municipais de Coimbra, de 1.145 d.C., estipulassem que um alqueire (de cereal) deveria ter o peso de 6,5 arráteis[19], ou seja, uma capacidade equivalente em torno de 3,4 litros.

Ao longo da maior parte da dinastia portuguesa, nos reinados de Dom Afonso Henrique até Dom Afonso IV, o alqueire oficial foi usado ao equivalente a um módio[20] romano, ou seja, cerca de 8,7 litros, entretanto, estava longe de ser usado em todo o território. Mais tarde, no reinado de Dom Pedro I, em 1.357, foi introduzido um novo alqueire, com medida de 9,8 litros, medida esta imposta a todo reino. Essa medida teve uma maior divulgação do que a medida anterior, mesmo assim não chegou a generalizar-se por todo o território. Já no reinado de Dom Manuel I, em 1.499, a medida oficial passou a ser a de Lisboa, que equivalia a 13,1 litros. Em 1.575, no reinado de Dom Sebastião I, foi distribuído padrões do alqueire, feito de bronze, para as principais localidades de reino, contudo ainda sobreviveram diversos padrões regionais do alqueire. Somente mais adiante e que a capacidade do alqueire de Lisboa foi ajustada, aproximando-se dos 13,9 litros, permitindo maior facilidade de conversão com o sistema castelhano.

Desde a Idade Média, o alqueire foi usado também como unidade de superfície, o qual é o foco deste tópico do nosso trabalho. Normalmente um alqueire de superfície era a área de terreno que se semeava com um alqueire de semente. Quando o alqueire foi convertido para medida de área, primeiro foi subdividido em quatro partes iguais, chamadas de quartas (quarta do chão) e depois em unidades menores convertendo-as em litros, já com vistas à adoção do sistema métrico. No Brasil, o uso desta medida também é muito antigo, sendo adotada até hoje em algumas regiões, principalmente no meio rural, onde é tida como medida agrária.

No entanto, apesar desta medida ter sido muito usada, e ainda está em uso em diversas regiões do Brasil como medida agrária, suas medidas em conformidade com o metro quadrado, varia de região para região. Em São Paulo, adota-se de que esta medida agrária deveria representar apenas um dos alqueires originais, já em Minas Gerais prevaleceu o entendimento de que deveria representar o indissociável par de alqueires, razão pela qual até

[19]Antiga unidade de medida de peso equivalente a 459 gramas.
[20]Medida de capacidade, difundida e utilizada pelos Romanos, que equivalia aproximadamente ao alqueire.

hoje se conhecem como o alqueire paulista uma medida equivalente a 24.200 metros quadrados e o alqueire mineiro, o correspondente a uma área de 48.400 metros quadrados. Como se não bastasse, ainda existe o alqueire do norte, com 27.225 metros quadrados, o alqueire baiano com 96.800 metros quadrados e o alqueirão ou alqueire goiano com área de 193.600 metros quadrados. Com ressalvas que a partir de 1.956 o alqueire no centro-oeste padronizou-se a medida do alqueire mineiro.

Contudo, apesar da adoção e exigência do sistema métrico decimal, no Brasil rural ainda é comum quantificar a área de propriedades rurais e lavouras em alqueire, ao invés de usar o metro quadrado ou até mesmo o hectare, que também é uma medida agrária. Essas medições são um tanto arbitrárias, mais existem, e o próprio Ministério do Desenvolvimento Agrário realizou uma compilação das medidas existentes, conforme tabela a seguir:

Quadro 7 – Medida agrária alqueire

UNIDADE DE MEDIDA	MEDIDA EM BRAÇAS	MEDIDA EM METROS	ÁREA EM BRAÇAS QUADRADOS	ÁREA EM METROS QUADRADOS	ÁREA EM HECTARES	ESTADOS DE UTILIZAÇÃO
ALQUEIRE	50x50	110x110	2.500	12.100	1,21	SP e MG
ALQUEIRE	50x75	110x165	3.750	18.150	1,815	MG e MT
ALQUIERE PAULISTA	50x100	110x220	5.000	24.200	2,42	MA, ES, RJ, SP, MG, PE, SC, RS, MT, GO e PB
ALQUEIRE MINEIRO	100x100	220x220	10.000	48.400	4,48	VÁRIOS ESTADOS
ALQUEIRE DO NORTE	75x75	165x165	5.625	27.225	2,72	TODOS
ALQUEIRE BAIANO	100x200	220x440	20.000	96.800	9,68	MG e MT
ALQUIEIRE GOIANO ALQUIRÃO	-----	440x440	------	193.600	19,36	MG, BA e GO

Fonte:sistemas.mda.gov.br/arquivos/TABELA_MEDIDA_AGRARIA_NAO_DECIMAL.pdf
Acesso em 09 out. 2015

Para efeitos fiscais, registra-se que a dimensão adotada pelas antigas coletorias seria de 3,025 hectares, ou seja, 30.250 metros quadrados. Portanto, independente da fonte ou da denominação, o fato é que essa medida sempre deixou margem para dúvidas e questionamentos sobre a sua equivalência no sistema métrico. Mesmo assim, poderíamos tranquilamente fazer conversões de áreas que estejam em metros quadrados ou até mesmo em quilômetro quadrados para alqueire, ou vice e versa, tendo que observar é claro a qual alqueire regional estamos nos referindo.

Para converter uma área que está medida em alqueire para metros quadrados, primeiro temos que observar a qual tipo de alqueire estamos nos referindo, depois é só multiplicar a quantidade de alqueire da área pela área equivalente a um alqueire em metros quadrados.

Exemplo: Um determinado senhor, morador no interior de alagoas, possui uma propriedade rural cuja área é de 3,8 alqueires. Sabe-se que a medida de um alqueire usada nesta região é equivalente a 27.225 metros quadrados, nestas condições indique a área desta propriedade em metros quadrados.

Uma solução:

Como um alqueire representa 27.225 metros quadrados, desta forma teremos: $3{,}8 \times 27.225 = 103.455$. Logo, a área da propriedade é de 103.455 metros quadrados.

OBSERVAÇÃO: Ressaltamos que a conversão de alqueire para braças quadradas seguem o mesmo raciocínio da conversão de alqueire para metros quadrados, tendo somente que observar que tipo de alqueire está se trabalhando.

Para fazer o inverso, converter uma área que está em metros quadrados para alqueire, o processo também é muito simples, basta somente dividir a quantidade de metros quadrados da área pela quantidade de metros quadrados correspondente a um alqueire, observando o tipo de alqueire usado.

Exemplo: Segundo dados do IBGE[21], o município de Olivença, localizado no sertão de Alagoas, possui uma área de 175,709 quilômetros quadrados. Sabendo que nesta região adota-se um alqueire como medida equivalente a 27.225 metros quadrados, estime a área deste município em alqueire.

Uma solução:

Primeiramente vamos fazer a conversão da área que está em quilômetros quadrados para metros quadrados (assunto já abordado no início deste capítulo). Como um quilômetro quadrado representa 1.000.000 metros quadrados, então a área do município é de: $175{,}709 \times 1.000.000 = 175.709.000$ metros quadrados. Agora convertemos esta medida para alqueire, ou

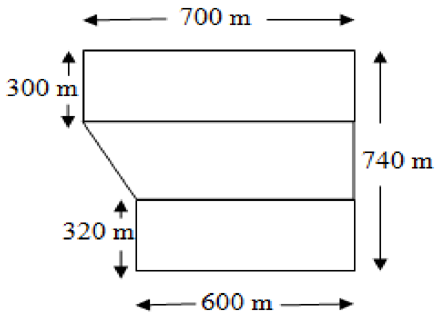
[21] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

seja, dividimos 175.709.000 por 27.225, onde encontraremos um valor aproximado de 6.453,958. Assim, a área do município de Olivença é de aproximadamente 6.453,96 alqueires.

OBSERVAÇÃO: Usamos nos exemplos, o fato de que já conhecemos a medida da área em metros quadrados, no entanto poderíamos, fazer a medição de uma propriedade qualquer em metros e depois fazer a conversão da área para alqueires. Para isto bastaria somente calcular a área da figura que representa a propriedade a ser calculada. Vejamos um exemplo:

Exemplo: Após fazer as medições de uma propriedade rural, constatou-se que tal propriedade tem o formato e as medições da figura abaixo:

Figura 13 – Propriedade rural



Fonte: Autor, 2015.

Admitindo que nesta região a medida de um alqueire representa 24.200 metros quadrados, represente a área desta propriedade em alqueire.

Uma solução:

Observamos que a propriedade é composta de três figuras: dois retângulos e um trapézio. Assim, calculando a área de cada figura separadamente temos:

- Retângulo de 700 metros de comprimento e 300 metros de largura: área = $700 \times 300 = 210.000$ metros quadrados
- Retângulo de 600 metros de comprimento e 320 metrosde largura: área = $600 \times 320 = 192.000$ metros quadrados
- Trapézio de 700 metros e 600 metros de comprimentos nas bases e 120 metros de largura (pois diminuindo o comprimento da largura total do terreno pela soma das larguras dos dois retângulos obtemos 120 metros, vide 740 – (320 + 300) = 120): área = $\frac{(320 + 300) \times 120}{2} = \frac{620 \times 120}{2}$ = 37.200 metros quadrados.

Portanto, a área total do terreno é a soma das três áreas calculadas, ou seja, 210.000 + 192.000 + 37.200 = 439.200 metros quadrados. Restando agora somente converter este valor para alqueire. Como um alqueire é o equivalente a 24.200 metros quadrados, então teremos 439.200 $\div$ 24.200 $\cong$ 18,149. Logo, a área total da propriedade é de aproximadamente 18,15 alqueires.

5.3 O hectare

Adotado como principal unidade de medida no meio agrário, o hectare, assim como também o centiare, ambas derivam da medida are[22], que é a unidade padrão e equivalente a 100 metros quadrados. O centiare é tido como um submúltiplo do are, cujo valor corresponde a 0,01 are, que convertendo para metros quadrados temos a seguinte relação: um centiare é equivalente a um metro quadrado. Já o hectare, o qual é o foco do nosso trabalho nesse tópico, é tido como um múltiplo do are, cujo valor representa 100 ares, ou seja, um hectare equivale a 10.000 metros quadrados.

A origem do nome hectare vem do grego *hecto* (cem) e *are* (do latim área, “área”). Ou seja, o hectare que é uma medida agrária de padrão nacional e internacional é equivalente a 100 ares. E como um are corresponde a 100 metros quadrados, consequentemente um hectare tem valor equivalente a 100 x 100 ares, que é igual a 10.000 metros quadrados. Desta forma, poderemos também fazer a seguinte relação: 1 are = 100 m^2 = 1 dam^2 e 1 hectare = 10.000 m^2 = 1 hm^2.

Apesar das exigências legais do sistema métrico decimal, no Brasil ainda é muito comum quantificar a área de propriedades rurais em unidades de medidas regionais, cujas definições e origem remontam ao Brasil colonial. O hectare, que possui abreviação (he), é uma destas unidades de medidas. Relacionada diretamente as áreas de fazendas, sítios, regiões de plantações e loteamentos rurais, sua correspondência com o sistema métrico decimal é feita com o metro quadrado, por se tratar de uma medida de superfície. Como já foi dito anteriormente, um hectare é equivalente a 10.000 metros quadrados, isto significa dizer que podemos fazer conversões de medidas de área que estejam em hectare para metros quadrados ou vice e versa. No entanto, nada impede também, que podemos converter uma medida de hectare para quilômetros quadrados, por exemplo, ou até mesmo para outra unidade de

[22] Medida agrária para superfícies, equivalente a 100 m^2.

medida de superfície, desde que esta possua uma relação de equivalência definida como o metro quadrado.

Como a relação entre o hectare e o metro quadrado é de 1 por 10.000, então se queremos converter uma medida em hectares para metros quadrados, basta somente multiplicar a quantidade de hectares da área por 10.000. Vejamos:

Exemplo: Ao registrar uma propriedade no cartório, o novo dono percebeu que na escritura antiga do terreno constava a metragem em hectares, sem saber, este tinha feito a compra do terreno em metros quadrados. Vendo que na escritura antiga constava uma propriedade de área de 12,6 hectares, o novo dono queira saber se teria sido enganado ao comprar a propriedade por um valor de R$ 630.000,00, sendo que o metro quadrado foi negociado a um valor de R$ 5,00.

Uma solução:

Convertendo, primeiramente a área para metros quadrados, temos: $12{,}6 \times 10.000 = 126.000$, ou seja, a área da propriedade é de 126.000 metros quadrados. Como o metro quadrado foi negociado a um valor de R$ 5,00, então teremos: $126.000 \times 5{,}00 = 630.000{,}00$. Portanto, o novo dono comprou a propriedade pelo preço correto.

Para fazer a conversão de uma medida que está em metros quadrados para hectares também é bastante simples. Como a relação entre o metro quadrado e o hectare é de 10.000 metros quadrados por um hectare, então para converter uma medida de metros quadrados para hectares, basta somente dividir a quantidade de metros quadrado da área por 10.000.

Exemplo: Segundo dados do IBGE, o município de Santana do Ipanema, localizado no sertão de Alagoas, possui uma área de 437,878 quilômetros quadrados. Usando o hectare, que uma das medidas de terras adotadas na região, estime a área deste município em hectares.

Uma solução:

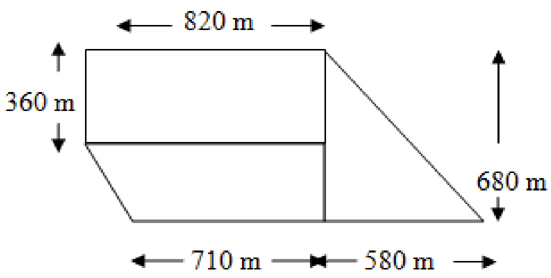
Vamos primeiro converter a medida da área do município para metros quadrados. Como um quilômetro quadrado equivale a 1.000.000 metros quadrados, então teremos: $437{,}878 \times 1.000.000 = 437.878.000$, ou seja, a área do município equivale a 437.878.000 metros quadrados. Convertendo agora este valor para hectares, temos: 437.878.000 ÷ 10.000 = 43.787,8. Logo, a área do município de Santana do Ipanema equivale a 43.787,8 hectares.

Outra solução: Poderíamos também fazer a conversão direta de quilômetros quadrados para hectares. Sabendo que um hectare equivale a 10.000 metros quadrados e que 1.000.000 metros quadrados corresponde a um quilômetro quadrado, então fazendo a multiplicação por 100, temos que 100 hectares são equivalentes a 1.000.000 metros quadrados, ou seja, um quilômetro quadrado é igual a 100 hectares. Portanto, basta somente multiplicar a quantidade de quilômetros quadrados da área por 100. ($437{,}878 \times 100 = 43.787{,}8$ hectares).

OBSERVAÇÃO: Caso não saibamos a área de tal região poderemos calcular esta área e depois fazer as conversões convenientes. Vejamos:

<u>Exemplo:</u> A propriedade rural, cujo formato e medidas estão na figura abaixo, está sendo vendida a R$ 20.000,00 o hectare. Determine o valor total a ser pago pela propriedade, sendo este o valor por hectare.

Figura 14 – Propriedade rural



Fonte: Autor, 2015.

Uma solução:

Vemos, através da figura que representa a propriedade, que o terreno é composto de três figuras: um retângulo, um triângulo e um trapézio. Isto significa dizer que a área do terreno é igual à soma das áreas das três figuras. Calculando a área de cada figura separadamente, temos:

- Retângulo de 820 metros de comprimento por 360 metros de largura: área = $820 \times 360 = 295.200$ metros quadrados.
- Triângulo de 580 metros de base e 680 metros de altura: área = $\frac{580 \times 680}{2} = \frac{394.400}{2} = 197.200$ metros quadrados.

- Trapézio de 820 metros e 710 metros de comprimentos nas bases e 320 metros de largura (pois diminuindo o comprimento da largura total do terreno pelo comprimento do retângulo obtemos 320 metros, vide 680 – 360 = 320): área = $\frac{(820 + 710) \times 320}{2} = \frac{1530 \times 320}{2}$ = 244.800 metros quadrados.

Então teremos: 295.200 + 197.200 + 244.800 = 737.200 metros quadrado. Convertendo agora a área total para hectare, temos: 737.200 ÷ 10.000 = 73,72, ou seja, a área total da propriedade é de 73,72 hectares. Sendo um hectare R$ 20.000,00, então o valor total a ser pago pela propriedade é de 73,72 × R$ 20.000,00 = 1.474.400,00 reais.

NOTA: O Acre é uma antiga unidade de medida usada para medir terras, do inglês antigo, "*æcer*", "camp lavrado", do proto-germânico, "*akraz*," de proto-indo-europeia, "*agro", "campo*". Confere latim, "*ager, agros*", grego, "*agros,*" e sânscrito "*agras*" (terra aberta). Durante a Idade Média, um acre foi a quantidade de terras que poderia ser arada em um dia com uma junta de bois, e medido por uma "cadeia" de largura 20,1 metros por um "*furlong*" ou 10 "cadeias" de comprimento 201 metros, equivalente a 4.042 metros quadrados. Atualmente, o acre é uma unidade de área utilizada no sistema imperial e no sistema tradicional dos Estados Unidos. Desde 1.959, quando foi ratificado o "*International Yard and Pound Agreement*" entre cinco países da *Commonwealth of Nations* (Comunidade de Nações) e os Estados Unidos de América (EUA), a jarda foi definida com 0,9144 metros, e, consequentemente, um acre com 4.046,8564224 metros quadrados, cerca de 40% de um hectare, e um pouco menor do que um campo de futebol americano. O acre não é mais usado na maioria dos países, apesar de algumas exceções notáveis, que incluem os EUA, Austrália, Índia, Paquistão e Birmânia. A partir de 2010, o acre deixou de ser oficialmente utilizado no Reino Unido, embora ainda seja usado em descrições de imóveis. Ele continua sendo usado, ainda, em certa medida, no Canadá. No Brasil e em Portugal, essa medida nunca foi utilizada, sendo que nestes países se utilizam o alqueire e o hectare (que seria a unidade mais simples de utilização) como unidades de medida em áreas rurais.

5.4 A tarefa

Usada como uma medida agrária por diversos agricultores, a medição de um terreno em tarefas ou cubação de terras como é empregado por vários agricultores do interior de alguns estados brasileiros é uma das formas de representar a área de uma propriedade em uma unidade de medida diferente das convencionais, mas que para eles esta medida é bastante comum.

A cubação de terras, que nada mais é do que calcular a área de um terreno ou propriedade rural é uma antiga técnica de medição de áreas de lavouras ou de pastagem, utilizada pelos agricultores brasileiros desde o período colonial, no século XVI. Esta técnica de demarcação de propriedades rurais, até hoje vigora na agricultura brasileira, sendo válida em todas as regiões do Brasil. Esta técnica utilizava-se de uma corda de comprimento linear em braças (medida adotada ao equivalente a 2,2 metros) e alguns pedaços de bambus para fazer as marcações das distâncias medidas. Media-se o perímetro de todo o terreno e depois calcularia sua área (mais adiante mostraremos como é feito o cálculo da área destas propriedades rurais, em algumas regiões do Brasil.

Voltemos agora para unidade de medida agrária tarefa. Esta antiga medida agrária é tida como a área de terra equivalente a um terreno de 55 metros de comprimento por 55 metros de largura, ou seja, uma área de 3.025 metros quadrados. No meio rural é muito utilizado a braça para se fazer as medições do perímetro de um terreno, e como adota-se a braça como medida equivalente a 2,2 metros, então poderíamos dizer que a área de uma tarefa é a área de um terreno com 25 braças de comprimento por 25 braças de largura, ou seja, uma área de 625 braças quadradas.

Convém ressaltar que a medida de uma tarefa varia em algumas regiões do país, porém, para efeito de registro das propriedades rurais, adota-se a tarefa como sendo a área de um quadrado de 55 metros de lado, ou como queira a área de um quadrado de 25 braças de lado. A seguir mostraremos uma tabela com as medições de uma tarefa em algumas regiões brasileiras, fazendo também o comparativo de medida com o hectare, que também é outra medida agrária muito usada no meio rural, conforme vimos no tópico anterior.

Tabela 8: Medida agrária tarefa

UNIDADE DE MEDIDA	MEDIDA EM BRAÇAS	MEDIDA EM METROS	ÁREA EM BRAÇAS QUADRADOS	ÁREA EM METROS QUADRADOS	ÁREA EM HECTARES	ESTADOS DE UTILIZAÇÃO
TAREFA	25x25	55x55	625	3.025	0,3025	TODOS
TAREFA BAIANA	30x30	66x66	900	4.356	0,4356	PB, PE, BA, SP, GO, MG
TAREFA	25x25	55x55	625	3.025	0,3025	AL, SE
TAREFA	7x7	15,4x15,4	49	237,16	0,024 (aproximado)	MG
TAREFA	8x8	17,6x17,6	64	309,76	0,031 (aproximado)	MG

TAREFA	12 x12	26,4x26,4	144	696,96	0,07 (aproximado)	SP, MT, MG
TAREFA	12,5x12,5	27,5x27,5	156,25	756,25	0,076 (aproximado)	SP, PR, MT, MG
TAREFA	14x14	30,8x30,8	196	948,64	0,095 (aproximado)	MT, MG
TAREFA	15x15	33,33	225	1089	0,11 (aproximado)	SP, MT, MG
TAREFA	16x16	35,2x35,2	256	1.239,04	0,124 (aproximado)	MT, MG
TAREFA	18x18	39,6x39,6	324	1.568,16	0,157 (aproximado)	MG
TAREFA	20x20	44x44	400	1936	0,1936	MG

Fonte:sistemas.mda.gov.br/arquivos/TABELA_MEDIDA_AGRARIA_NAO_DECIMAL.pdf
Acesso em 09 out. 2015

Daremos ênfase especial para a tarefa com medições de 25 por 25 braças, que a medida utilizada no nosso estado, principalmente no interior, com ressalvas que as conversões das medidas de áreas podem ser feitas com qualquer metragem da tarefa, tendo que observar somente qual tipo de tarefa está sendo trabalhada. No nosso estado, principalmente no interior, utiliza-se muito a braça para fazer as medições do perímetro de um terreno, sendo a área deste designado em tarefa, e como a tarefa, dita anteriormente, é tida como uma área de um quadrado de 25 braças de lado, onde sabemos que a medida de uma braça é adotada ao equivalente a 2,2 metros, podemos fazer as conversões das medidas tanto do perímetro quanto da área de qualquer propriedade rural.

Para se fazer a conversão de uma área que está em tarefas para metros quadrados o processo é bem simples: Se a medição do perímetro do terreno estiver em braças, poderemos fazer a conversão de braças para metros, onde é necessário somente multiplicar a quantidade de braças por 2,2 (uma vez que adota-se a braça como medida equivalente a 2,2 metros) e por último calcular a área da(s) figura(s) que compõe o terreno. Caso não queiramos fazer a conversão de braças para metros, usada para medir o perímetro do terreno, poderemos calcular a área do terreno com as medidas dos lados em braças e por último fazer a conversão para metros quadrados. Como é adotado um valor de 625 braças quadradas para uma tarefa, basta somente dividir o valor total da área por 625 e teremos a metragem da área em tarefas, e como para uma tarefa é adotado o valor equivalente a 3.025 metros quadrado, então, para converter a medida da área para metros quadrados, é necessário somente multiplicar a quantidade de tarefas por 3.025.

<u>Exemplo:</u> A área de uma propriedade rural é de 18,4 tarefas. Sabendo que o valor do metro quadrado desta propriedade está sendo vendido a R$ 4,00, determine o valor total a ser pago pela propriedade.

Uma solução:

Primeiramente vamos obter a área da propriedade em metros quadrados. Sabendo que para uma tarefa é adotado a medida de 3.025 metros quadrados, então para uma área de 18,4 tarefas teremos: $18{,}4 \times 3.025 = 55.660$ metros quadrados. Como um metro quadrado está sendo vendido a R$ 4,00, então teremos: $55.600 \times 4{,}00 = 222.640{,}00$. Logo, o valor a ser pago pela propriedade é de R$ 222.640,00.

A conversão de uma medida de área que está em metros quadrados para tarefas também é muito simples, levando em consideração que é adotado o valor de 3.025 metros quadrados para uma tarefa, então para converter metros quadrados para tarefa, basta somente dividir a quantidade de metros quadrados da área por 3.025. Vejamos:

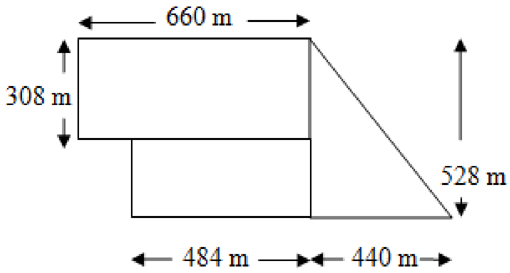
<u>Exemplo 1:</u> Um fazendeiro do alto sertão alagoano comprou uma propriedade cuja área era de 400.510 metros quadrados. Sem saber disso, o fazendeiro concordou em pagar pela propriedade um valor de R$ 330.000,00. Como o negócio foi feito a um valor R$ 2.500,00 por tarefa, o fazendeiro quer saber se foi "enganado" na compra da propriedade.

Uma solução:

Primeiro vamos estimara a área da propriedade em tarefas. Dividindo 400.510 por 3.025 temos 132,4, ou seja, a área da propriedade é de 132,4 tarefas. Como a tarefa foi comprada a um valor de R$ 2.500,00, então fazendo $132{,}4 \times 2.500{,}00$ temos 331.000,00. Portanto, o fazendeiro deveria ter pago pela propriedade um valor de R$ 331.000,00. Isto significa que o fazendeiro lucrou R$ 1.000,00 na compra.

<u>Exemplo 2:</u> Uma propriedade possui o formato e as medidas da figura abaixo. Deseja-se saber quantas tarefas de terras possui tal propriedade.

Figura 15 – Propriedade rural



Fonte: Autor, 2015.

Uma solução:

Percebemos inicialmente que a propriedade é formada por dois retângulos e um triângulo. Assim sua área é a soma das áreas das três figuras. Calculando a área de cada figura, temos:

- Retângulo de 660 metros de comprimento por 308 metros de largura: área = 660 × 308 = 203.280 metros quadrados.
- Retângulo de 484 metros de comprimento e 220 metros de largura (528 – 308): área = 484 × 220 = 106.480 metros quadrados.
- Triângulo de base 440 metros e 528 metros de altura: área = $\frac{440 \times 528}{2} = \frac{232.320}{2}$ = 116.160 metros quadrados.

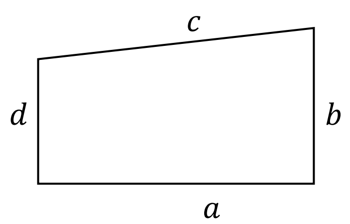
Portanto, a área da propriedade será: 203.280 + 106.480 + 116.160 = 425.920 metros quadrados, onde para converter para tarefas, basta dividir 425.920 por 3.025. Assim teremos uma área de 140,8 tarefas.

Outra solução: Poderíamos converter as medidas do terreno para braças, calcular a área e depois fazer a conversão da área em braças quadradas para tarefas. Desta forma teríamos os retângulos medindo áreas de 42.000 e 22.000 braças quadradas e o triângulo 24.000 braças quadradas, totalizando uma área de 88.000 braças quadradas. Que dividido por 625, pois para uma tarefa é adotado o valor de 625 braças quadradas, teríamos 140,8 tarefas.

5.4.1 Cubação de terras ou cubagem de terras

A cubação de terras é uma antiga técnica de medição de área de lavouras ou de pastagem, realizada pelos agricultores brasileiros desde o período colonial no século XVI. Historicamente, esta técnica de medição de terras, vem desde o antigo Egito (1.800 a.C.), onde nesta época os egípcios usavam uma espécie de matemática experimental para fazer as demarcações das terras destinadas às plantações após as enchentes do rio Nilo, isto porque os impostos cobrados pelo Faraó eram proporcionais as áreas de cada plantação. Como as plantações eram feitas à margem do rio e depois das enchentes havia mudanças na geografia dos terrenos, então era necessário sempre fazer novas demarcações dos mesmos.

Para fazer estas demarcações, ou seja, calcular a área de cada terreno, os egípcios usavam uma técnica bastante simples: dividiam as áreas de plantações em áreas quase retangulares e calculavam a área de cada uma, onde para encontrar esta área multiplicavam as médias aritméticas dos lados opostos. Digamos que uma plantação tinha o formato da figura abaixo, com as medidas dos lados sendo, respectivamente, a, b, c e d.



então, a área A era dada por:

$$A = \left(\frac{a + c}{2}\right) x \left(\frac{b + d}{2}\right)$$

Embora date de muitos anos, esta é basicamente a técnica que muitos agricultores, principalmente no interior do estado de Alagoas, utilizam para saber a área da cada propriedade, com ressalvas somente para a conversão das unidades de medidas, visto que nesta região usa-se muito a braça para medir os lados do terreno e a tarefa como medida de área, mas esta conversão já foi abordada anteriormente.

Na sequência mostraremos exemplos de como é feito o cálculo da área de terras por dois agricultores do interior de Alagoas e notaremos que o processo é muito semelhante à técnica utilizada pelos egípcios. Contudo, percebemos que tanto a técnica usada pelos egípcios quanto a usada pelos nossos entrevistados só expressa a área exata do terreno se o mesmo tiver o formato de um retângulo ou quadrado, ou seja, caso o terreno possua o formato de um quadrilátero qualquer (forma preferencial dos agricultores) então haverá sempre um erro entre a área real do terreno e a área calculada por eles.

Desta forma decidimos apresentar uma maneira simples e correta para calcular a área de uma propriedade, seja ela com formato de retângulo, quadrado, quadrilátero ou até mesmo de um polígono qualquer. Caso o terreno tenha o formato de um quadrilátero inscritível (soma dos ângulos opostos igual a 180º) o cálculo da área A pode ser feito usando a fórmula de Brahmagupta[23].

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

onde, a, b, c e d são as medidas dos lados do terreno e $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Mas, para evitar a verificação se o quadrilátero é inscritível ou não, preferimos apresentar uma solução onde se divide a região do terreno em regiões triangulares, pois qualquer tipo de terreno pode ser decomposto em triângulos, sendo o cálculo de cada região triangular feito usando a fórmula de Heron, conforme foi colocada na seção 3.2.4 e cujos exemplos estão na cartilha de anexos do nosso trabalho.

Decidimos colocar no nosso trabalho relatos de duas entrevistas feitas com dois agricultores a respeito da técnica de medição de terras utilizadas por eles:

SEGUE RESUMO DA 1ª ENTREVISTA:

AUTOR: Como é feito a medição da área de terras nesta região?

ENTREVISTADO 1: *Aqui, somamos os lados do terreno "frente com frente e fundo com fundo", multiplicamos os resultados das somas e por último dividimos tudo por 2.500.*

AUTOR: Por que dividir por 2.500?

ENTREVISTADO 1: *Dividimos por 2.500, porque 2.500 é a área de uma tarefa de terra de um quadrado que mede 25 braças em cada lado "(25 + 25) × (25 + 25)".*

AUTOR: Percebi que o senhor soma os lados "frente com frente e fundo com fundo". Este método é válido mesmo que o terreno possua os quatro lados de medidas diferentes?

ENTREVISTADO 1: *Acho que sim. Sempre fiz as contas desse jeito.*

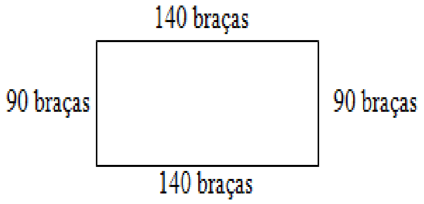
AUTOR: O senhor não se incomodaria se eu pedisse para "cubar" a área de dois terrenos para mim.

[23] Brahmagupta (589 – 668) – Matemático e Astrônomo indiano.

ENTREVISTADO 1: *Não. Claro que não, até porque no instante eu faço.*

ENTREVISTADO 1 (solução do entrevistado)

TERRENO A



Cálculos feito pelo entrevistado 1:

Lados: 90 + 90 = 180 e 140 + 140 = 280

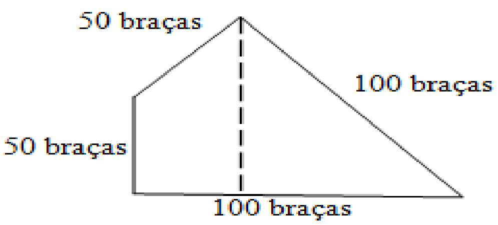
Multiplicando 180 por 280, dá 50.400.

Daí, dividindo 50.400 por 2.500 temos 20,16 (tarefas).

Para saber quantas braças passaram, tiramos a parte inteira de 20 tarefas e multiplicamos o restante por 25. Ou seja, $0,16 \times 25 = 4$ (braças)

Então a área do terreno é 20 tarefas e 4 braças.

TERRENO B



Lados: 50 + 100 = 150 e

50 + 100 = 150 Multiplicando 150 por 150, dá 22.500.

Daí, dividindo 22.500 por 2.500 temos 9 (tarefas).

Então a área do terreno é de 9 tarefas.

AUTOR: Percebi que o senhor, quando a quantidade de tarefa não é exata, multiplica o valor que passa por 25. Por quê?

ENTREVISTADO 1: *Por que 25 braças quadradas é uma tarefa.*

AUTOR: Como é feito o cálculo para saber quanto custa uma propriedade?

ENTREVISTADO 1: *Multiplico a quantidade de tarefas pelo preço de uma tarefa, depois vejo o preço de uma braça "dividindo o valor de uma tarefa por 25" e então multiplico este valor pela quantidade de braças que passa do terreno e por último somo tudo (os dois valores).*

AUTOR: O senhor poderia fazer os cálculos de uma propriedade?

ENTREVISTADO 1: *Sim. Poderia.*

AUTOR: Digamos que o preço de uma tarefa do primeiro terreno (terreno A) seja de R$ 2.000,00. Qual seria o valor da propriedade?

ENTREVISTADO 1: O cálculo é feito desta forma:

ENTREVISTADO 1

PRIMEIRO TERRENO (TERRENO A)

Cálculo feito pelo entrevistado 1:

Como já sabemos que o primeiro terreno tem uma área de 20 tarefas e 4 braças, então multiplicando as 20 tarefas por R$ 2.000,00 temos R$ 40.000,00.

Falta saber agora quanto custa as 4 braças. Para isso, dividimos R$ 2.000,00 por 25 e sabemos o preço de uma braça, que é de R$ 80,00. Então as quatro braças serão R$ 320,00.

Assim o valor do terreno será de R$ 40.320,00.

AUTOR: Pra finalizar. O senhor já cubou terras (calculou a área de terras) onde o terreno tinha o "formato irregular", de um círculo, por exemplo?

ENTREVISTADO1: *Não. Nunca fiz nenhuma cubação desse tipo, nem também sei como fazer. Nunca parei pra pensar como poderia cubar um terreno que fosse redondo, até por que como ia medir os lados do terreno?.*

SEGUE RESUMO DA 2ª ENTREVISTA:

AUTOR: Como é feito a medição da área de terras nesta região?

ENTREVISTADO 2: *Aqui, somamos os lados do terreno "frente com frente e fundo com fundo", dividimos cada soma por 2, multiplicamos os resultados e por último dividimos tudo por 625.*

AUTOR: Por que dividir por 625?

ENTREVISTADO 2: *Dividimos por 625, porque 625 é a área de uma tarefa de terra de um quadrado que mede 25 braças em cada lado "25 × 25".*

AUTOR: Percebi que o senhor soma os lados "frente com frente e fundo com fundo". Este método é válido mesmo que o terreno possua os quatro lados de medidas diferentes?

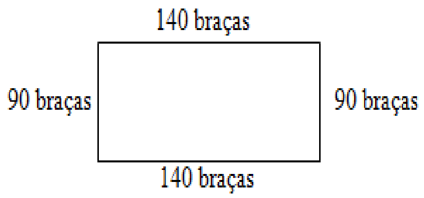
ENTREVISTADO 2: *Acho que seja válido, desde que o terreno tenha os quatro aceires (lados). Sempre fiz as contas da mesma forma.*

AUTOR: O senhor não se incomodaria se eu pedisse para "cubar" a área de dois terrenos para mim.

ENTREVISTADO 2: *Não.*

ENTREVISTADO 2 (soluções do entrevistado)

- TERRENO A



Cálculos feito pelo entrevistado 2:

Lados: 90 + 90 = 180 e 140 + 140 = 280

Fazendo a divisão: 180 ÷ 2 = 90 e 280 ÷ 2 = 140

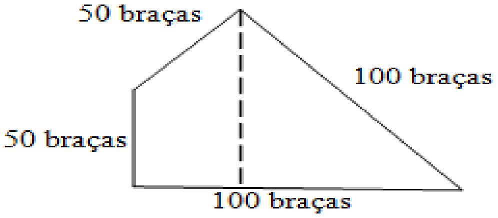
Multiplicando 90 por 140, temos 12.600.

Daí, dividindo 12.600 por 625 temos 20 tarefas e sobram 100 (cubos).

Para saber quanto representa estes 100 cubos, lembremos que uma tarefa são 625 cubos, então 100 cubos representa menos de um quarto de tarefa.

Assim a área do terreno é de 20 tarefas e 100 cubos.

TERRENO B



Lados: 50 + 100 = 150 e 50 + 100 = 150

Fazendo a divisão: 150 ÷ 2 = 75 e 150 ÷ 2 = 75

Multiplicando 75 por 75 temos 5.625.

Daí, dividindo 5.625 por 625 temos 9 tarefas. Então o terreno mede 9 tarefas.

AUTOR: O que representa os “100 cubos” que passa de 20 tarefas no primeiro terreno (terreno A)?

ENTREVISTADO 2: *Uma tarefa são 625 cubos, então 100 cubos representa menos do que um quarto de uma tarefa.*

AUTOR: Como é feito o cálculo para saber quanto custa uma propriedade?

ENTREVISTADO 2: *Divido o valor de uma tarefa por 625 e depois multiplico este valor pela quantidade de cubos do terreno.*

AUTOR: O senhor poderia fazer os cálculos de uma propriedade?

ENTREVISTADO 2: *Sim. Claro.*

AUTOR: Digamos que o preço de uma tarefa do primeiro terreno (terreno A) seja de R$ 2.000,00. Qual seria o valor da propriedade?

ENTREVISTADO 2: *O cálculo é feito assim:*

ENTREVISTADO 2

- PRIMEIRO TERRENO (TERRENO A)

Cálculo feito pelo entrevistado 2:

Como já sabemos que a área do primeiro terreno é de 20 tarefas e 100 cubos, ou seja, 12.600 cubos. Então precisamos saber qual o valor de um cubo. Para isto, dividimos o valor da tarefa, que é de R$ 2.000,00, por 625. Onde teremos um valor de R$ 3,20 por cubo.

Assim o valor do terreno será: 12.600 × R$ 3,20 = R$ 40.320,00.

AUTOR: Pra finalizar. O senhor já cubou terras (calculou a área de terras) onde o terreno tinha o “formato irregular”, de um círculo, por exemplo?

ENTREVISTADO 2: *Não. Não sei como poderia fazer, pois como pode medir os lados do terreno?.*

Após ouvir as entrevistas e analisar a forma como é calculada a medição de área pelos entrevistados, conclui que o método utilizado por eles só é válido se o terreno for um “terreno regular", como o quadrado e o retângulo. Porém se o terreno tiver outro formato, como por exemplo, do terreno 2 (terreno B) ou até mesmo de um trapézio, o método é falho, pois a área calculada da forma utilizada pelos entrevistados ficará maior do que a área real do terreno.

Vejamos como calcular corretamente a área de qualquer terreno, independente do formato dele. Pra obter a área de um terreno em tarefas, lembremos inicialmente que para uma tarefa é adotada o valor de 25 braças quadradas, ou seja, 625. Desta forma, calculamos a área do terreno usando as tradicionais formas matemáticas (quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, polígono regular, círculo, etc.) e por último dividimos o resultado por 625. Isto é claro com as medidas do terreno em braças.

A seguir mostraremos alguns exemplos, comparando o método correto de resolver com os métodos utilizados pelos entrevistados.

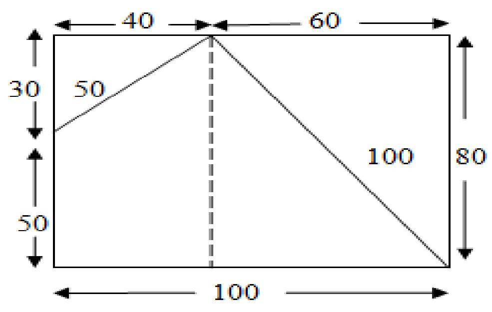
Exemplo 1: Neste primeiro exemplo vamos calcular a área do primeiro terreno (terreno A) usado na entrevista.

Uma solução:

Como o terreno se trata de um retângulo, então sua área será: $90 \times 140 = 12.600$. Dividindo 12.600 por 625 temos: 20,16. Portanto, a área do primeiro terreno é de 20,16 tarefas (observamos que confere com os resultados dos dois entrevistados).

Exemplo 2: Calculemos agora a área do segundo terreno (terreno B), também usado na entrevista (as medidas estão em braças).

Uma solução: (Obtendo um retângulo através da figura do terreno, temos):



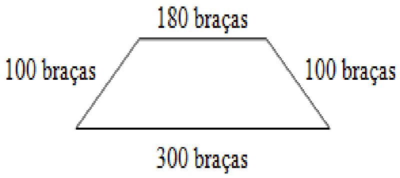
Veja que a área do terreno é a área do retângulo menos as áreas dos dois triângulos.

- Retângulo de 100 braças de comprimento por 80 braças de largura: área = 100 × 80 = 8.000. Dividido por 625, tem-se: 12,8 tarefas.
- Triângulo de base 60 braças e 80 braças de altura: área = $\frac{60 \times 80}{2} = \frac{4.800}{2}$ = 2.400. Dividido por 625, tem-se: 3,84 tarefas.
- Triângulo de base 40 braças e 30 braças de altura: área = $\frac{40 \times 30}{2} = \frac{1.200}{2}$ = 600. Dividido por 625, tem-se: 0,96 tarefas.

Portanto, a área real do segundo terreno será: 12,8 – (3,84 + 0,96), que igual a 8 tarefas. Observamos que pelos cálculos dos dois entrevistados, a área do terreno foi de 9 tarefas.

Exemplo 3: Uma propriedade, cuja forma e medidas estão na figura abaixo, está sendo vendida a R$ 3.500,00 por tarefa. Determine o valor a ser pago por esta propriedade.

Figura 16 – Propriedade rural



Fonte: Autor, 2015.

Uma solução:

Faremos inicialmente o cálculo da área da propriedade utilizando os métodos adotados pelos entrevistados:

ENTREVISTADO 1:

Lados: 100 + 100 = 200 e 180 + 300 = 480

Multiplicando 200 por 480, dá 96.000.

Daí, dividindo 96.000 por 2.500, temos: 38,4 tarefas.

Para saber quantas braças passaram, tiramos a parte inteira de 38 tarefas e multiplicamos o restante por 25. Ou seja, 0,4 × 25 = 10

Então a área da propriedade é 38 tarefas e 10 braças.

Assim, para este entrevistado o valor da propriedade seria:

38 × R$ 3.500,00 = R$ 133.000,00. Mais o valor das 10 braças. Sendo que uma braça, custaria R$ 140,00 (3.500 ÷ 25 = 140). Desta forma as 10 braças custariam R$ 1.400,00. E toda propriedade valeria R$ 134.400,00.

ENTREVISTADO 2:

Lados: 100 + 100 = 200 e 300 + 180 = 480

Fazendo a divisão: 200 ÷ 2 = 100 e 480 ÷ 2 = 240

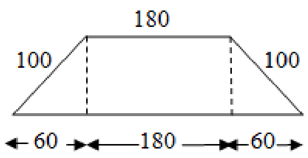
Multiplicando 100 por 240, temos 24.000.

Daí, dividindo 24.000 por 625, temos: 38,4 tarefas.

Assim a área do terreno é de 38 tarefas e 250 cubos.

Desta forma, para este entrevistado, o valor da propriedade seria: dividindo 3.500 por 625 obtemos 5,6, ou seja, o preço de um cubo de terra é R$ 5,60. Como a propriedade tem 24.000 cubos, então fazendo 24.000 × 5,6 temos: 134.400. Portanto, a propriedade valeria R$ 134.400,00.

Outra solução (solução correta): Como a propriedade tem o formato de um trapézio, então para calcular a área do trapézio. Primeiro vamos determinar a sua altura.



Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos, temos que a altura do trapézio é de 80 braças, desta forma, teremos:

Área do trapézio = $\frac{(300 + 180) \times 80}{2} = \frac{480 \times 80}{2}$ = 19.200.

Que em tarefas, teremos: 19.200 ÷ 625 = 30,72 tarefas. (observemos que há uma diferença de 7,68 tarefas usando o método calculado pelos entrevistados).

Assim, o valor da propriedade será: 30,72 × R$ 3.500,00 = R$ 107.520,00

Observamos que, se aplicarmos os métodos de medição usados pelos entrevistados, para calcular a área dos dois triângulos e do retângulo separadamente, encontraremos uma área de 30,72 tarefas. Provando mais uma vez que a técnica utilizada por eles é um tanto falha.

NOTA: Visto que as fórmulas matemáticas utilizadas para o cálculo de área não é do conhecimento de muitas pessoas da região de convívio do autor, deixamos como sugestão uma única maneira para se realizar a cubação de terras, sendo esta válida para todos os tipos de terrenos que possam ser medido seus lados. Esta técnica consiste em dividir o terreno em triângulos, calcular a área de cada triângulo e por último fazer a soma das áreas. Para calcular a área dos triângulos sugerimos usar a "fórmula de Heron", vista na seção 3.2.4, que é valida para todo tipo de triângulo e que se precisa saber, previamente, somente as medidas dos lados do terreno. Não mostraremos nenhum exemplo no desenvolvimento do nosso trabalho, mas deixaremos como anexo uma cartilha mostrando exemplos e o passo a passo de como fazer a cubação de terras para estes tipos de terrenos.

Finalizamos esta seção mostrando um exemplo como poderia ser feita a cubação de um terreno com formato circular.

Exemplo 4: Uma "barragem" circular será construída em uma determinada propriedade. O proprietário que saber quantas tarefas de terras ocupará esta "barragem", se a maior medida dela, de um lado até o outro, for 30 braças.

Uma solução:

Através das informações da questão, temos que 30 braças correspondem à medida do diâmetro da "barragem". Desta forma, adotando π = 3,14, temos que a área ocupada pela "barragem" será: $3{,}14 \times 15^2 = 3{,}14 \times 225 = 706{,}5$. Dividindo este valor por 625, obtemos 1,1304, ou seja, a "barragem" ocupará uma área de aproximadamente 1,13 tarefas de terra.

6 CALCAULANDO E COMPARANDO VOLUME DE SÓLIDOS

Segundo, Elon Lages Lima em seu livro “Medida e Forma em Geometria”, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada (sendo esta, não uma definição matemática, mas apenas uma idéia intuitiva de volume). O foco do nosso trabalho, neste capítulo, será calcular o volume de alguns sólidos, que são muito utilizados no dia a dia das pessoas, principalmente no interior, bem como fazer o comparativo do volume deste sólido, usando as unidades de medidas metros cúbicos, litros e peso. Por exemplo, como se faz a medição de uma cisterna ou de um tanque de carro pipa para saber quantos litros de água cabem? Qual relação do peso, entre um litro de água e um litro de feijão ou farinha, por exemplo? Qual o volume de um “balaio”, “vaso”, “filtro”, etc. (instrumentos utilizados no cotidiano dos povos do interior)?

6.1 Cisternas, Caixas plásticas (ou fibra de vidro) e Tanque de carro pipa

Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara, cisterna significa depósito de água potável abaixo do nível da superfície do solo, comum nos edifícios; ou depósito subterrâneo próprio para receber e manter a água das chuvas. É muito comum no interior, principalmente na zona rural, a utilização de cisternas como reservatórios de água, variando de tamanho e até de forma, desde as tradicionais em forma de um bloco retangular como também as circulares, em forma de um cilindro com cobertura na forma de cone, como por exemplo, as cisternas construídas pelo governo. Vejamos como é feito o cálculo.

Exemplo 1: A cisterna da Escola Estadual desembargador augusto costa, localizada em Olivença/AL, tem o formato de um bloco retangular, conforme figura abaixo. Suas medidas são: 4,15 metros de comprimento por 3,2 metros de largura e 2,2 metros de altura. Deseja-se saber a quantidade de litros de água que cabem nesta cisterna, sabendo que todas as medidas foram feitas no interior da mesma.

Figura 17 – Cisterna retangular

Foto: Autor, 2015.

Uma solução:

Como o volume de um bloco retangular é obtido multiplicando a área da base pela altura, então teremos:

Área da base: $4{,}15 \times 3{,}2 = 13{,}28$ m^2. E o Volume: $13{,}28 \times 2{,}2 = 29{,}216$ m^3

Fazendo agora a conversão de metros cúbicos para litros, temos: $29{,}216 \times 1.000 = 29.216$, visto que 1 m^{3}corresponde a 1.000 litros. Ou seja, a cisterna comporta uma quantidade de 29.216 litros de água.

<u>Exemplo 2:</u> Um dos tipos de cisterna construída pelo o governo é que tem capacidade de 16.000 litros de água, suas medidas são de 3,40 metros de diâmetro nas bases (fundo e tampa) por 1,80 metros de altura. Vamos verificar o volume desta cisterna.

Figura 18 – Cisterna circular

Foto: Autor, 2015.

Uma solução:

Como o volume de um cilindro é obtido multiplicando a área da base pela altura, então, adotando $\pi = 3{,}14$, teremos:

Área da base: $\pi \times r^2 = 3{,}14 \times 1{,}7^2 = 9{,}0746$ m^2. E o Volume: $9{,}0746 \times 1{,}8 = 16{,}33428$ m^3

Fazendo agora a conversão para litros, temos: $16{,}33428 \times 1.000 = 16.334{,}28$. Ou seja, a cisterna comporta uma quantidade de aproximadamente 16.335 litros de água.

As caixas de plástico ou de fibra de vidro também são muito utilizadas como depósito de água nas residências, elas podem variar de formas e tamanho. Faremos um exemplo de como calcular o volume ocupado por uma destas caixas, para tal usaremos um caixa com o formato da figura abaixo.

Figura 19 – Caixa de plástico

Fonte: Autor, 2015.

Exemplo: Um reservatório (caixa d'água) tem o formato de dois troncos de cone acoplados (conforme figura acima), com diâmetro de 1,54 metros no fundo, 1,64 metros na borda superior do tronco de cone menor e 1,76 metros na borda da caixa. Sabendo que a altura dos dois troncos de cone é de 48 centímetros cada, determine a quantidade de litros de água que esta caixa pode conter. (usaremos π = 3,14)

Uma solução:

Chamemos de V_I e V_{II} o volume dos troncos de cones menor e maior, respectivamente, aplicando diretamente a fórmula para o cálculo do volume de um tronco de cone, teremos:

$V_I = \frac{\pi \times h}{3}(R^2 + R \times r + r^2) = \frac{3{,}14 \times 0{,}48}{3}(0{,}82^2 + 0{,}82 \times 0{,}77 + 0{,}77^2) \cong 0{,}92089 \text{ m}^3$, onde R e r são as medidas do raio maior e menor e h a medida da altura.

Com raciocínio análogo, temos: $V_{II} \cong 1{,}0894 \text{ m}^3$

Assim o volume total da caixa será a soma dos dois volumes, ou seja, aproximadamente 2,01029 m^3. Que em litros será: 2,01029 × 1.000 = 2.010,29. Aproximadamente, 2.010 litros de água

NOTA: esta caixa vem descrita com uma capacidade de 2.000 litros.

Os chamados tanques de carros pipa, também são muito utilizados. Destinado para o transporte de líquido, principalmente no abastecimento de água para as populações da zona rural, sua forma e tamanho é muito variada, desde os de superfícies circulares ou até mesmo elípticas. Mostraremos um exemplo de como calcular o volume, em água, de um tanque de carro pipa que possui uma superfície elíptica.

Exemplo: Um proprietário de um carro pipa (figura a seguir), cujo tanque tem o formato de uma superfície elíptica na base, deseja saber quantos litros de água cabem no tanque. Feito as medições do tanque observou que ele possui 5,54 metros de comprimento e que a base tem medidas de 2,04 metros de comprimento (eixo maior) e 1,05 metros de altura (eixo menor). (usaremos π = 3,14)

Figura 20 – Tanque de carro pipa

Foto: Autor, 2015.

Uma solução:

Usando a definição V = $\pi \times a \times b \times L$, para o cálculo do volume do tanque. Onde, a = semi-eixo maior, b = semi-eixo menor, L = comprimento do tanque, temos:

V = $3{,}14 \times 1{,}02$ x $0{,}525 \times 5{,}54 = 9{,}3153438$ m^3. Que em litros equivalem a aproximadamente 9.315 litros de água. Visto que 1 m^3equivale a 1.000 litros.

6.2 Tambor e filtro

Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara, tambor significa vasilha metálica para transportar líquidos. Este também é um tipo de sólido muito utilizado pelas pessoas do interior, principalmente pelos agricultores. Seu formato e tamanho também são muito variados, podendo ser feito de plástico, metal ou até mesmo madeira. O modelo mais usado é o "tambor de 200 litros". Faremos um exemplo de como calcular o seu volume.

Exemplo: Vamos calcular o volume, em litros, de um tambor cilíndrico (figura abaixo), sabendo que ele possui 56 centímetros de diâmetro no fundo e 82 centímetros de altura.

Figura 21 – Tambor

Foto: Autor, 2015.

Uma solução:

Sabendo que o volume de um cilindro é obtido multiplicando a área da base pela altura, então, adotando π = 3,14, teremos:

Área da base: $\pi \times r^2 = 3{,}14 \times 28^2 = 2.461{,}76\ cm^2$. Volume: $2.461{,}76 \times 82 = 201.864{,}32\ cm^3$.

Convertendo agora o volume para litros, teremos: sabendo que 1 cm^3 corresponde a 1 mililitro (ml), então o volume será de 201.864,32 ml, que em litros representa aproximadamente 201,8 litros, visto que 1 litro é igual a 1.000 ml.

NOTA: O volume do tambor calculado vem com capacidade descrita de 200 litros.

O filtro também é outro tipo de sólido muito utilizado no interior. Destinado para o armazenamento de uma pequena quantidade de água para o consumo do dia a dia, seu formato consiste de dois pequenos reservatórios em forma de troncos de cone, sendo no reservatório superior colocado duas velas onde é feita a filtragem da água.

Figura 22 – Filtro

Fonte: Autor, 2015.

Exemplo: Uma dona de casa resolveu calcular a quantidade de litros de água que cabia no filtro de sua casa. Para isso ela adotou π = 3,14 e fez as seguintes medidas:

- Reservatório inferior: 24 centímetros de altura, 22 centímetros de diâmetro no fundo e 24 centímetros na borda superior.
- Reservatório superior: 22,5 centímetros de altura, 24 centímetros no fundo e 26 centímetros na borda superior.
- Ela observou também que no reservatório superior havia duas velas em formato cilíndrico com 10 centímetros de altura e 6 centímetros de diâmetro.

Uma solução:

Chamemos de V_I e V_S o volume dos troncos de cones inferior e superior, respectivamente. Aplicando diretamente a fórmula para o cálculo do volume de um tronco de cone, teremos:

$$V_I = \frac{\pi \times h}{3}(R^2 + R \times r + r^2) = \frac{3{,}14 \times 24}{3}(12^2 + 12 \times 11 + 11^2) = 10.248{,}96 \text{ cm}^3,$$

onde R e r são as medidas do raio maior e menor e h a medida da altura.

Com raciocínio análogo, $V_S = 11.044{,}95 \text{ cm}^3$.

Calculando agora o volume das duas velas.

$V_{velas} = (\pi \times r^2 \times h) \times 2 = (3{,}14 \times 3^2 \times 10) \times 2 = 282{,}6 \times 2 = 565{,}2 \text{ cm}^3$.

Assim, o volume total será: $10.248{,}96 + 11.044{,}95 - 565{,}2 = 20.728{,}71 \text{cm}^3$.

Onde teremos 20.728,71 ml, que representa aproximadamente 20,7 litros.

NOTA: há ainda outros recipientes que são utilizados em ambientes domésticos para o armazenamento de água, como o pote[24] (jarra) e a quartinha[25]. Por exemplo.

Figura 23 – Pote e Quartinha (nesta ordem)

Foto: Autor, 2015.

6.3 Cocho e barragem

O cocho, Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara, significa vasilha feita de tronco escavado, usado como comedouro e bebedouro para o gado. Este também é outro sólido muito utilizado pelos agricultores do interior, principalmente para o armazenamento de água para o consumo dos animais, variando-se de tamanho e forma, podendo ser retangulares, redondos ou até mesmo com o formato de um trapézio. Como já

[24] Grande vaso feito de barro, usados especialmente em ambientes domésticos para o armazenamento de uma pequena quantidade de água.
[25] Vaso para guardar água; moringa.

mostramos como calcular o volume de sólidos retangulares e redondos, faremos um exemplo de como podemos calcular o volume de sólido com formato de trapézio nas bases.

Figura 24 – Cocho

Fonte: Internet: cocho para gado – imagens. Out. 2015.

<u>Exemplo:</u> Determinar o volume que um cocho pode conter sabendo que ele possui o formato de um trapézio nas bases, com medidas de 60 cm e 80 cm nas bases maior e menor respectivamente, sendo 4,20 m seu comprimento e 50 cm sua profundidade.

Uma solução:

Sabendo que o cocho tem o formato de um prisma, então seu volume será o produto da área da base (trapézio) pela altura (comprimento do cocho).

Convertendo todas as medidas para metros, temos:

Área da base: $\frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(0{,}8 + 0{,}6) \times 0{,}5}{2} = \frac{0{,}48 \times 0{,}5}{2} = 0{,}12$ m^2. Volume: $0{,}12 \times 4{,}2 = 0{,}504$ m^3.

Que em litros, termos: $0{,}504 \times 1.000 = 504$ litros.

Abordaremos agora, um sólido que é muito visto no interior do estado de Alagoas, o uso de “Barragens”. Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa Evanildo Bechara, barragem significa estrutura de vários tamanhos e materiais (troncos, pedras e cimento, etc.) feita para represar as águas de um rio; represa. Este tipo de sólido é construído no interior de propriedades rurais para represar e armazenar água, que será consumida pelos animais, principalmente nos períodos de estiagem. Geralmente seu formato é de uma calota esférica, mas pode variar de formato conforme a superfície da propriedade a qual ela vai ser construída.

Figura 25 – Barragem

Fonte: Internet: barragens – imagens. Out. 2015.

<u>Exemplo:</u> Determinar quantos litros de água cabe numa barragem que possui o formato de uma calota esférica sabendo que a medida do raio da barragem é de 12 metros e que a profundidade máxima que água pode atingir é de 4,5 metros.

Uma solução:

Adotando π = 3,14, e sabendo que o volume de um segmento esférico pode ser calculado através da fórmula: $V = \frac{\pi \times h^2}{3}(3r - h)$, onde r é a medida do raio da barragem e h a profundidade máxima atingida pela água, então teremos:

$$V = \frac{3{,}14 \times 4{,}5^2}{3}(3\times 12 - 4{,}5) = 21{,}195 \times 31{,}5 = 667{,}6425\ m^3.$$

Onde em litros, teremos: 667,6425 × 1.000 = 667.642,5 litros de água.

6.4 Balaio e vaso “vauso”

O balaio é um tipo de recipiente muito utilizado pelos agricultores do interior, geralmente ele é feito de palha ou cipó. Ele serve principalmente para transportar pequenas quantidades de alimentos para o consumo do gado, como a palma e a silagem de milho por exemplo. Seu formato é de uma semi-esfera, com a retirada de uma pequena calota esférica para o fechamento do “fundo”.

Figura 26 – Balaio

Foto: Autor,2015.

Exemplo: Deseja-se calcular o volume de um balaio que tem o formato de uma semi-esfera de 66 centímetros de diâmetro, sabendo que para o fechamento do fundo foi retirado um segmento esférico (calota) de 6 centímetros de altura. (usaremos π = 3,14).

Uma solução:

Calculando primeiramente o volume V_1 da semi-esfera, temos:

$$V_1 = (\frac{4}{3} \times \pi \times r^3) \div 2 = (\frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 33^3) \div 2 = 150.456{,}24 \div 2 = 75.228{,}12 \text{ cm}^3.$$

Para o cálculo do volume V_2 do segmento esférico, temos: $V_2 = \frac{\pi \times h^2}{3}(3r - h)$, onde r é a medida do raio do balaio e h a altura do segmento esférico, desta forma teremos:

$$V_2 = \frac{3{,}14 \times 6^2}{3}(3 \times 33 - 6) = 37{,}68 \times 93 = 3.504{,}24 \text{ cm}^3.$$

Assim, o volume (V) do balaio, será $V_1 - V_2$, ou seja, V = 71.723,88 cm^3.

OBSERVAÇÃO: Fizemos a pesagem do volume de silagem de milho obtido em um balaio com as medidas descritas no exemplo e constatamos que o volume ocupado pesa aproximadamente 8 kg. Desta forma podemos calcular o volume, em kg, de qualquer recipiente, usado para a estocagem deste alimento. Vejamos um exemplo:

Exemplo: Um dos tipos de recipiente mais utilizado pelos agricultores do interior para estocagem de silagem de milho é o que tem o formato de um trapézio nas bases, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 27 – Silo

Fonte: Internet: silagem de milho – imagens. Out. 2015.

Deseja-se saber o volume de um destes recipientes, que possui 9 metros de comprimento e que suas bases possuem 2,80 e 2,40 metros de comprimento com 1,60 metros de altura.

Uma solução:

Calculando inicialmente a área do trapézio, temos:

$$\text{Área} = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(2{,}8+2{,}4)\times 1{,}6}{2} = 4{,}16 \text{ m}^2.$$

Desta forma, o volume (V) será o produto da área do trapézio pelo comprimento do recipiente, ou seja, V = 4,16 × 9 = 37,44 m^3.

NOTA: Podemos ainda calcular a quantidade de balaios de silagem que este recipiente pode conter como também a quantidade de quilos. Para saber a quantidade de balaios, usamos o fato de que um balaio tem o volume de 71.723,88 cm^3 (calculado no exemplo anterior), que isto corresponde a aproximadamente 0,0717 m^3, assim o volume total do recipiente que é de 37,44 m^3, que corresponde a aproximadamente 522 balaios (visto que 37,44 ÷ 0,0717 ≅ 522,175). Para saber o peso, usamos o fato de que um balaio tem o volume equivalente a 8 kg, assim fazendo 522 × 8, obtemos 4.176 kg.

Finalizamos esta seção falando sobre o sólido vaso ou "vauso". Este é um tipo de recipiente usado para o armazenamento de líquidos e sólidos. No interior, ele é muito usado para armazenar sólidos como o feijão, o milho e a farinha. Geralmente feito de zinco seu formato é de um cilindro, variando de tamanho e largura. Veremos também como calcular o volume de um destes recipientes, comparando o volume de metros cúbicos com litros e peso.

Figura 28 – Vaso de zinco

Foto: Autor, 2015.

<u>Exemplo:</u> Um recipiente cilíndrico tem em sua base um diâmetro de 1,20 m. Sabendo que a altura é de 2,10 m e adotando π = 3,14 calcular o volume deste recipiente em metros cúbicos, em litros e fazer a comparação do volume com a quantidade de feijão e farinha.

Uma solução: Sabendo que o volume do cilindro é o produto da área da base pela altura, então teremos:

Área da base = $\pi \times r^2 = 3{,}14 \times 0{,}6^2 = 1{,}1304\ m^2$. Volume = $1{,}1304 \times 2{,}1 = 2{,}37384\ m^3$.

Calculando o volume em litros, temos: $2{,}37384 \times 1.000 = 2.373{,}84$ litros.

Comparando o volume com peso do feijão e da farinha. Observamos que o volume ocupado por um litro equivale ao peso de 880 gramas de feijão ou 735 gramas de farinha.

Para o volume em feijão, temos: $2.373{,}84 \times 880 = 2.088.979{,}2$ gramas, que é equivalente a aproximadamente 2.089 kg. E para o volume em farinha, temos: $2.373{,}84 \times 735 = 1.744.772{,}4$ gramas, que equivalem a aproximadamente 1.744,7 kg.

NOTA: Finalizamos o tópico sobre volume com uma observação sobre o registro do consumo de água de uma residência. Observamos que os hidrômetros[26] registram o consumo de água das residências em metros cúbicos. Significa dizer que para saber o volume consumido em um mês, em litros, basta subtrair o valor da leitura atual do hidrômetro pela leitura anterior (registrada no talão) e então teremos o volume em metros cúbicos, e para saber o volume em litros é só multiplicar este valor por 1.000.

[26]Aparelho que mede o consumo de água.

7 CONCLUSÃO

Tendo em vista o que foi abordado no nosso trabalho, observamos que o processo de medição: seja de comprimento, área de uma superfície ou até mesmo volume, ainda é um pouco complexo, visto que apesar de termos um sistema de medidas unificado mundialmente, o Sistema Internacional de Medidas, o modo de como se mede algo varia de acordo com o que está sendo medido e principalmente com a região onde está sendo feita tal medição. Basta observarmos, por exemplo, que para medir o perímetro de uma propriedade no interior do nosso estado, utiliza-se a medida braça e não o metro, bem como para media a área desta propriedade utiliza-se a tarefa ou hectare ao invés do metro quadrado.

Contudo, mesmo diante de uma grande quantidade variada de unidades de medidas, mostramos que sempre é possível fazer as conversões destas unidades, ditas de não convencionais, para o atual sistema convencional de medidas. Embora algumas conversões das unidades de medidas sejam muito simples, devemos ter o máximo de cuidado para não convertermos uma medida para uma outra fora do seu padrão real com o objeto medido.

Vale salientar ainda, que a maioria dos exemplos citados no desenvolvimento do trabalho são exemplos práticos do cotidiano do autor deste ou da comunidade e região a qual o mesmo reside. Entretanto, apesar de serem muito usadas na região unidades de medidas como o palmo, a braça e a tarefa, por exemplo, não é trabalhado de forma alguma nas escolas conceitos e conteúdos que possam englobar e repassar aos alunos conhecimentos de temas que o mesmo possa aplicar no seu dia a dia. Desta forma, deixamos como sugestão para o professor do ensino fundamental a aplicação dos conteúdos sobre medidas de comprimento e área de superfícies, deixando a parte de volume para ser aplicada posteriormente no ensino médio. Com ressalvas que cabe ao professor decidir, de acordo com o nível de conhecimento da turma, que conteúdo pode ser trabalhado para seus alunos.

Ressaltamos ainda que este trabalho não finaliza-se em si mesmo, podendo o mesmo ter continuidade e aprofundamento sobre o tema e que os exemplos sugeridos no mesmo podem ser reformulados, cabendo ao professor que desejar aplicá-los realizar os ajustes necessários, a depender dos objetivos, habilidades e turma que irá trabalhar.

REFERÊNCIAS

[1] B. BOYER, Carl. **História da Matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo; Blucher, 2012.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana** / João Lucas Marques Barbosa. 11. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] BARUK, S. (2005). **Dicionário de Matemática Elementar – 2 volumes.** Lisboa: Edições Afrontamento.

[4] BECHARA, Evanildo. **Dicionário da língua portuguesa Evanildo Bechara** / Evanildo Bechara. – 1. Ed. – Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2011.

[5] BOYER, Carl B. **História da matemática** / Carl B. Boyer; prefácio de Isaac Asimov; revista por Uta C. Merzbach; tradução de Elza F. Gomide. – 3. Ed. – São Paulo: Blucher, 2010.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 01 out. 2015.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC, SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

[8] CHAMORRO, C & BELMONTE, J. M. (1994). **El problema de La medida, Didactica de lãs magnitude lineales**. Madrid: Editorial Síntesis.

[9] CREASE, Robert P. **A medida do mundo: a busca por um sistema universal de pesos e medidas** / Robert P. Crease; tradução George Schlesinger; revisão técnica Diego Vaz Bevilaqua. – 1. ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

[10] CRUZ, João José de Souza. **Do Pé Real à Légua da Póvoa.** Revista militar nº 2491/2192 – agosto/setembro de 2009, pp 1035-0.

[11] D'AMBRÓSIO. Ubiratan. **Etnomatemática – Elo entre as tradições e a modernidade** / Ubiratan D'Ambrósio. – 4. Ed. 1. Reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

[12] D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar ou conhecer**. 5ª edição. São Paulo: Ática, 1998.

[13] Dicionário Priberan da Língua Portuguesa. Disponível em: <www.priberan.pt/DLPO/arratel>. Acesso em: 26 ago. 2015.

[14] FERNANDES, J. C. **Instrumentação: Sistema de Medidas e Normalização.** João Candido Fernandes. UNESP – Campus de Bauru. Departamento de Engenharia Mecânica, 2008.

[15] FERREIRA, M; ALMEIDA, G. **Introdução à Astronomia e as Observações Astronômicas.** 7. ed. Lisboa: Plátano editora, 2003.

[16] Física.net: O canal de física na internet. Disponível em: <www.fisica.net/unidades/**pesos-e-medidas**-historico.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2015.

[17] JUNIOR, Deusvaldo de Sales Franco. Etnomatemática: Uma maneira de melhorar a aprendizagem da matemática entre os jovens. / Deusvaldo de Sales Franco Junior – Teresina: 2014.

[18] LAWLOR, R. **Geometria Sagrada: Mitos, deuses e Mistérios**. Filosofia e prática. Impresso no Brasil em dezembro de 1996. Edições delprado.

[19] LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio – volume 2** / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 6. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[20] LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** 4. ed, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[21] Medidas de Comprimento: Aspectos históricos. Disponível em: <www.infoescola.com/matematica/**unidades**-de-medidas-de-comprimento>. Acesso em: 11 fev. 2015.

[22] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana** / Caminha Muniz Neto. – 1.ed – Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.2; 432p. (Coleção Professor de Matemática; 25)

[23] PALHARES, Pedro. GOMES, Alexandre e AMARAL, Elza. **Complementos de Matemática para professores do Ensino Básico**. Edições técnicas, Lisboa: Lidel, setembro 2011.

[24] PARRA, Cecilia. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas** / Cecilia Parra, Irma Saiz ... [at al]; tradução Juan Acunã Llorens. – Porto alegre: artemed, 1996.

[25] PASSOS, Caroline Mendes. Etnomatemática e Educação Matemática Crítica: Conexões teóricas e práticas / Caroline Mendes de Passos. – Belo Horizonte: UFMG / FaE, 2008.

[26] PASTANA, C. E. T. **Topografia I: Anotações de aula.** Carlos Eduardo Troccoli Pastana. Universidade de Marília – UNIMAR, 2006.

[27] PERRY, J. H. Chemical Engineer Handbook. **SI - Sistema Internacional de Unidades Inmetro (1984)**. Enciclopédia Conhecer

[28] Populção das Cidades Brasileiras. Disponível em: <www.ibge.gov.br/estados>. Acesso em: 31 ago. 2015.

[29] ROZENBERG, I. M. **O Sistema Internacional de Unidades – SI 2ª edição** –Instituto Mauá de Tecnologia

[30] ROZENBERG, Izrael Mordka. **O Sistema Internacional de Unidades – SI** / I. M. ROZENBERG – 3ª ed. Ver. e ampl. – São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologias, 2006.

[31] SCHLIEMANN, Ana Lúcia Dias. **Na vida dez, na escola zero.** Ana Lucia Dias Schliemann, Terezinha Nunes Carraher. – 15ª ed. – São paulo, cortez, 2010.

[32] Sistema Internacional de Medidas. Disponível em: <www.inmetro.gov.br/.../conteudo/sistema-internacional-**unidades**.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2015.

[33] Superlista. Disponível em: <http://super.abril.com.br/blogs/superlistas/conheca-a-origem-de-11-unidades-de-medida/>. Acesso em: 23 fev. 2015.

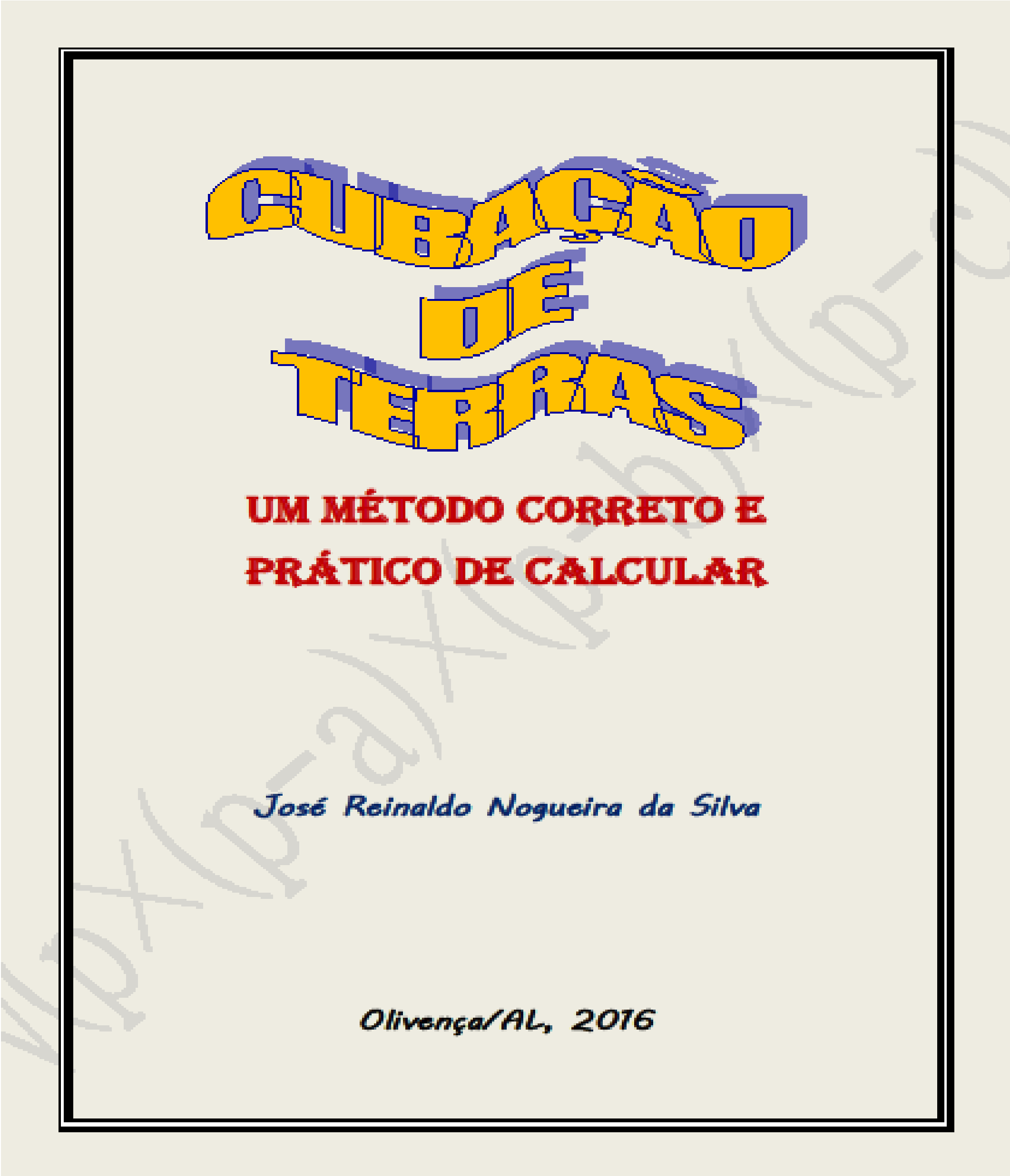
[34] Tabela De Medidas Agrária não Decimais. Disponível em: <sistemas.mda.gov.br/arquivos/**TABELA_MEDIDA_AGRARIA_NAO_DECIMAL**.pdf>. Acesso em: 25 set. 2015.

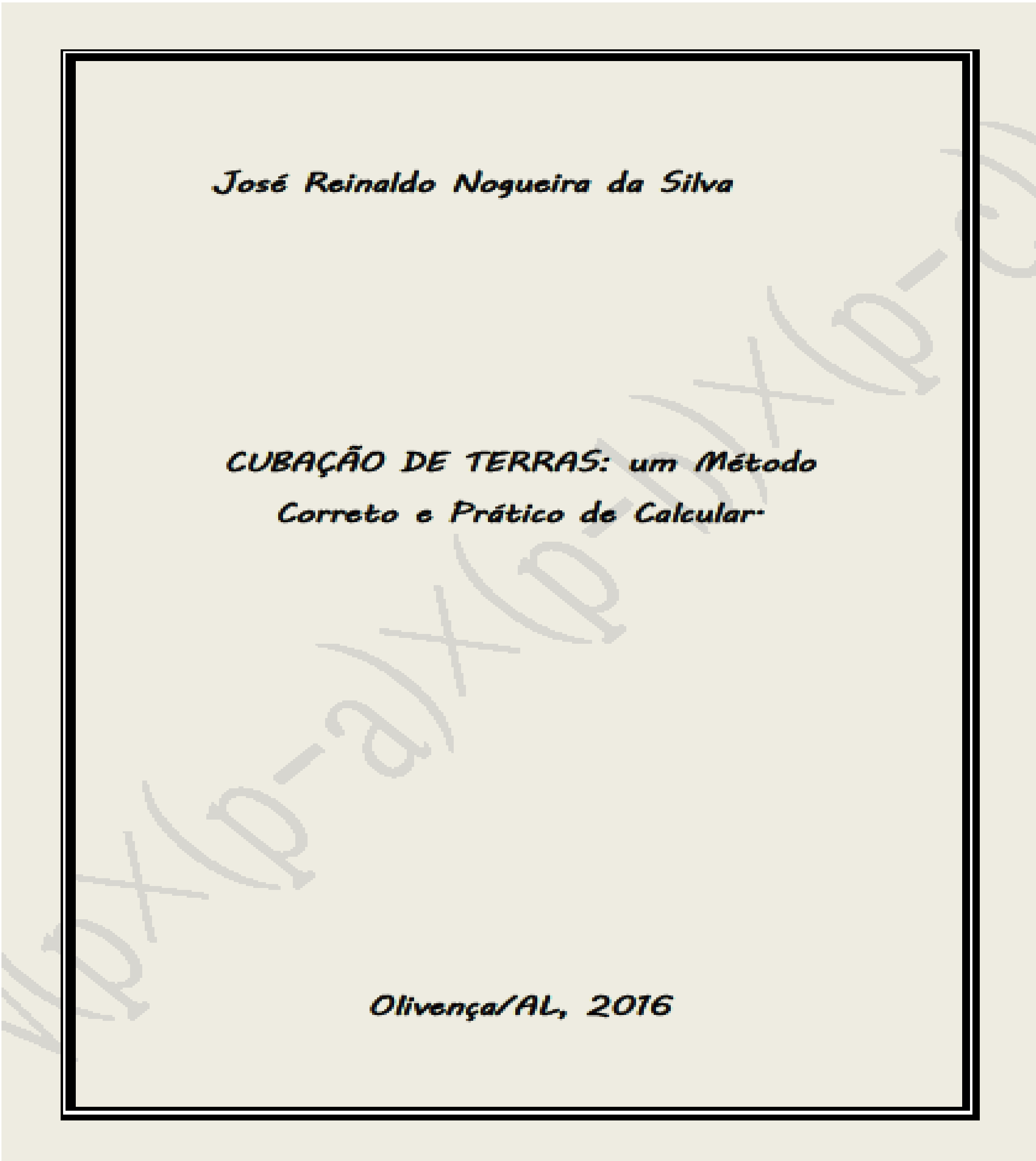
[35] Unidades de Medida ao Longo da História - Mundo Educação. Disponível em: <www.mundoeducacao.com/.../unidades-medida-ao-longo-historia.htm>. Acesso em: 19 fev. 2015.

[36] Unidades de Medidas. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfl-oAD/unidades-medidas>. Acesso em: 12 fev. 2015.

[37] WIKIPÉDIA. Wikipédia: A enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/wikipedia:página_principal>. Acesso em: 20 out. 2015.

APÊNDICE A – Cartilha (Cubação de Terras)





José Reinaldo Nogueira da Silva

CUBAÇÃO DE TERRAS: um Método Correto e Prático de Calcular

Olivença/AL, 2016

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS, pois sem ele nada é possível. A minha esposa Élika e minha Filha Evelly por todo incentivo e compreensão durante todo o processo de construção deste trabalho, e também a toda minha família. Aos professores da UFAL, professor Dr. Isnaldo Isaac por toda orientação e paciência durante toda construção do trabalho, e também ao professor Dr. André Flores que deu sugestões importantíssimas, enriquecendo o conteúdo do nosso trabalho. Não poderia também deixar de agradecer a todos os professores da UFAL que fizeram parte do PROFMAT, contribuindo assim na minha qualificação profissional.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Mostraremos aqui o método correto para fazer a cubação ou cubagem de terras, que nada mais é do que medir a área de uma determinada propriedade rural, obtendo esta área em tarefas. Faremos somente alguns exemplos, mas mostraremos o passo a passo de como se pode fazer o cálculo da área de qualquer propriedade, como também obter esta área em unidades de medidas diferentes. Deixaremos também, no final desta cartilha, uma tabela mostrando uma maneira simples de fazer conversões das unidades de área.

O autor.

1 INFORMAÇÕES PRELIMINARES

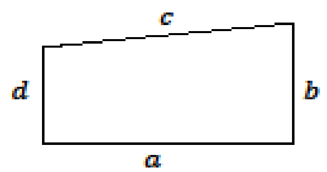
Informamos a princípio, que os cálculos para fazer a cubação de terras podem ser feitos manualmente, por ser na maioria dos casos cálculos simples, mas em alguns casos recomendamos o uso de uma calculadora convencional.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

A cubação de terras é uma antiga técnica de medição de área de lavouras ou de pastagem, realizada pelos agricultores brasileiros desde o período colonial no século XVI. Historicamente, esta técnica de medição de terras, vem desde o antigo Egito (1.800 a.C.), onde nesta época os egípcios usavam uma espécie de matemática experimental para fazer as demarcações das terras destinadas às plantações após as enchentes do rio Nilo, isto porque os impostos cobrados pelo Faraó eram proporcionais as áreas de cada plantação. Como as plantações eram feitas à margem do rio e depois das enchentes havia mudanças na geografia dos terrenos, então era necessário sempre fazer novas demarcações dos mesmos.

Para fazer estas demarcações, ou seja, calcular a área de cada terreno, os egípcios usavam uma técnica bastante simples: dividiam as áreas de plantações em áreas quase retangulares e calculavam a área de cada uma, onde para encontrar esta área multiplicavam as médias aritméticas dos lados opostos.

Digamos que uma plantação tinha o formato da figura abaixo, com as medidas dos lados sendo, respectivamente, a, b, c e d.



então, a área A era dada por:

$$A = \left(\frac{a+c}{2}\right) x \left(\frac{b+d}{2}\right)$$

Embora date de muitos anos, esta é basicamente a técnica que muitos agricultores, principalmente no interior do estado de Alagoas, utilizam para saber a área da cada propriedade, com ressalvas somente para a conversão das unidades de medidas, visto que nesta região usa-se muito a braça para medir os lados do terreno e a tarefa como medida de área.

Nota: A medida agrária tarefa é tida como a área de um terreno de 55 metros de comprimento por 55 de largura, ou seja, uma área de 3.025 metros quadrados. Como no meio rural usa-se muito a medida braça para medir os lados e como uma braça equivale a 2,2 metros, assim a tarefa é a área de 25 braças de comprimento por 25 de largura, ou seja, 625 braças quadradas. Variando esta medida de região para região, estamos aqui adotando o valor no estado de Alagoas.

3 MEDIÇÃO DE ÁREAS DE PROPRIEDADES COM FORMATO DE QUADRADO OU RETÂNGULO

A cubação de terrenos que possui estes formatos (quadrados e retângulos) se faz de maneira semelhante ao método dos egípcios: basta somente multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura do terreno.

<u>Exemplo 1:</u> Um proprietário deseja saber o valor total de sua propriedade que tem o formato retangular com 120 braças de

comprimento e 100 braças de largura, sendo o valor cobrado pela tarefa R$ 2.500,00.

Solução:

1º Passo: multiplicamos 120 por 100 (digitamos na calculadora 120, depois a tecla com o sinal de vezes "X", digitamos 100 e por último a tecla igual "=").

120 x 100 = 12.000 (braças quadradas)

2º Passo: Dividimos o resultado da multiplicação por 625 (digitamos 12000, depois a tecla com o sinal de dividir "÷", digitamos 625 e por último a tecla igual "=").

$$12000 \div 625 = 19{,}2 \text{ tarefas}$$

3º Passo: Multiplicamos a quantidade de tarefas pelo o valor de uma tarefa (digitamos 19,2 , depois o sinal de vezes "×", digitamos 2500 e por último a tecla igual "=").

$$19{,}2 \times 2500 = 48000$$

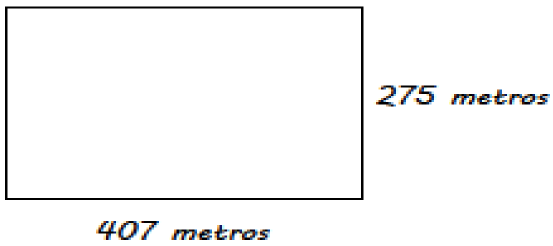
Portanto, a propriedade vale R$ 48.000,00.

OBSERVAÇÃO: Caso queiramos obter a área em metros quadrados (m^2), multiplicamos a quantidade de tarefas por 3.025. (digitamos 19,2 , depois o sinal de vezes "x", digitamos 3025 e por último a tecla igual "=").

$$19{,}2 \times 3025 = 58080\ m^2$$

Portanto, a área da propriedade mede 58.080 metros quadrados.

Exemplo 2: Um Proprietário de uma fazenda deseja saber quantas tarefas de terras tem a sua fazenda. Para fazer as medições dos lados ele usou uma trena com medidas em metros. Após fazer a medição percebeu que a propriedade tem um formato retangular com 407 metros de comprimento por 275 metros de largura. Como ele pode fazer para saber quantas tarefas de terras tem sua propriedade?



Solução:

1º Passo: multiplicamos 407 por 275 (digitamos na calculadora 407, depois a tecla com o sinal de vezes "X", digitamos 275 e por último a tecla igual "=").

407 x 275 = 111.925 metros quadradas

2° Passo: Dividimos o resultado da multiplicação por 3.025 (digitamos 111925, depois a tecla com o sinal de dividir "÷", digitamos 3025 e por último a tecla igual "=").

$$111925 \div 3025 = 37 \text{ tarefas}$$

Portanto, sua propriedade mede 37 tarefas de terras.

RESSALVA: Convém ressaltar que em ambos os exemplos anteriores poderíamos usar a técnica dos egípcios e chegaríamos aos mesmos resultados (vejamos o cálculo do exemplo 1, o exemplo 2 é análogo).

(Solução do exemplo 1):

$A = \left(\frac{120+120}{2}\right) x \left(\frac{100+100}{2}\right) = \frac{240}{2} + \frac{200}{2} =$

$120 \; x \; 100 = 12.000$ *braças quadradas*

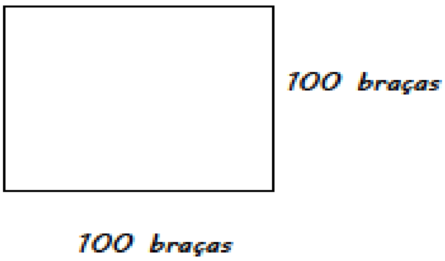
Daí 12.000 ÷ 625 = 19,2 tarefas

4 MEDIÇÃO DE ÁREAS DE PROPRIEDADES COM FORMATO IRREGULAR

Primeiro observemos que a técnica utilizada pelos egípcios e também por muitos agricultores do interior do estado de Alagoas só é válida, ou seja, só representa a área real da propriedade se a mesma tiver o formato quadrangular ou retangular.

Analisemos os exemplos 1º, 2º e 3º:

1º) Se uma propriedade tem um formato de um quadrado, onde a medida do lado é 100 braças então teremos que sua área será:



Área = 100 x 100 = 10.000 braças quadradas

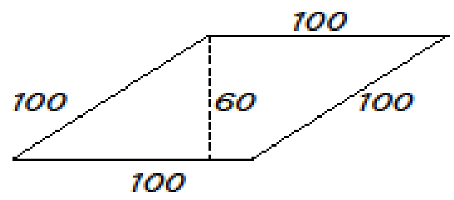
Daí 10.000 ÷ 625 = 16 tarefas

Método egípcio:

$A = \left(\frac{100+100}{2}\right) x \left(\frac{100+100}{2}\right) = \frac{200}{2} + \frac{200}{2} =$

$100 \ x \ 100 = 10.000$ braças quadradas

2º) Peguemos agora uma propriedade que possui quatro lados e que todos eles medem 100 braças cada, mas que não formam um quadrado, conforme figura abaixo. Qual será a área da propriedade?



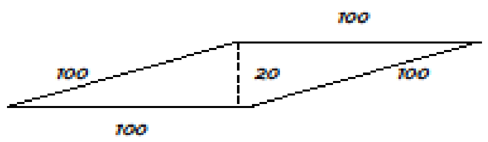
Veja que a área da propriedade, embora tenha os quatros lados do mesmo tamanho, depende da sua largura, que é de 60 braças. Assim teremos:

Área = 100 x 60 = 6.000 braças quadradas

Daí 6.000 ÷ 625 = 9,6 tarefas

Observe que quanto mais diminuímos sua largura, ou seja, quanto mais "achatamos" o quadrado sua área diminuirá, onde chegará a "zero".

3º) Peguemos a propriedade com as mesmas medidas do exemplo anterior, mas com largura de 20 braças. Qual seria sua área?



Área = 100 x 20 = 2.000 braças quadradas

Daí 2.000 ÷ 625 = 3,2 tarefas

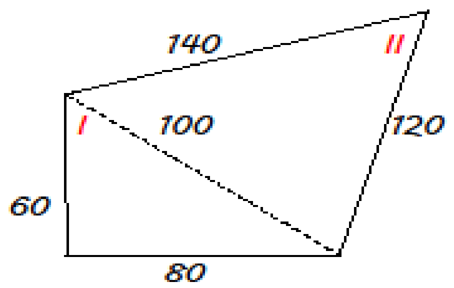
4.1 CUBAÇÃO CORRETA:

Para se fazer a cubação de terras de propriedades que possui o formato irregular, aconselhamos sempre dividir a área desta propriedade em triângulos e calcular a área de cada triângulo separadamente, por último fazer a soma das áreas dos triângulos. Para calcular a área (A) de cada triângulo usaremos a seguinte expressão (fórmula de Heron):

$$A = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}$$

Onde, p é a medida do semi-perímetro (somamos as medidas dos três lados e dividimos o resultado por 2). E a, b e c, são as medidas de cada lado do terreno.

__Exemplo 1:__ Uma propriedade rural tem o formato e as medidas descritas na figura abaixo (todas as medidas em braças):



Quantas tarefas de terras possuem esta propriedade?

Solução: Vamos dividir a propriedade em dois triângulos I e II, e calcular a área de cada triângulo separadamente.

- ÁREA DO TRIÂNGULO I:

Sejam a, b e c as medidas dos lados deste triângulo, onde a = 60, b = 80 e c = 100, assim a + b + c = 240.

Construiremos uma tabelinha prática para obter a área.

1º Passo	2º Passo	3º Passo	4º Passo
$(a+b+c)\div 2=p$	$p-a$	$p-b$	$p-c$
$240\div 2=120$	$120-60=60$	$120-80=40$	$120-100=20$

5º Passo	6º Passo	7º Passo
$p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)$	$\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$	Dividir por 625
$120\times 60\times 40\times 20=5760000$	$\sqrt{5760000}=2400$	$2400\div 625=3{,}84$

Portanto, a área do triângulo I é 3,84 tarefas.

- ÁREA DO TRIÂNGULO II:

Chamando de a, b e c as medidas dos lados deste triângulo, com a = 100, b = 120 e c = 140, então a + b + c = 360.

Fazendo a tabelinha prática, temos:

1º Passo	2º Passo	3º Passo	4º Passo
$(a+b+c)\div 2=p$	$p-a$	$p-b$	$p-c$
$360\div 2=180$	$180-100=80$	$180-120=60$	$180-140=40$

5º Passo	6º Passo	7º Passo
$p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)$	$\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$	Dividir por 625
$180\times 80\times 60\times 40=34560000$	$\sqrt{34560000}\cong 5878{,}77$	$5878{,}77\div 625\cong 9{,}4$

Portanto, a área do triângulo II é, aproximadamente, 9,4 tarefas.

Assim, a área total da propriedade será 3,84 + 9,4 = 13,24 tarefas.

LEMBRETE: Para obter o valor do 6º passo, digitamos primeiro o valor depois a tecla √.

NOTA: O símbolo $\cong$, significa aproximação.

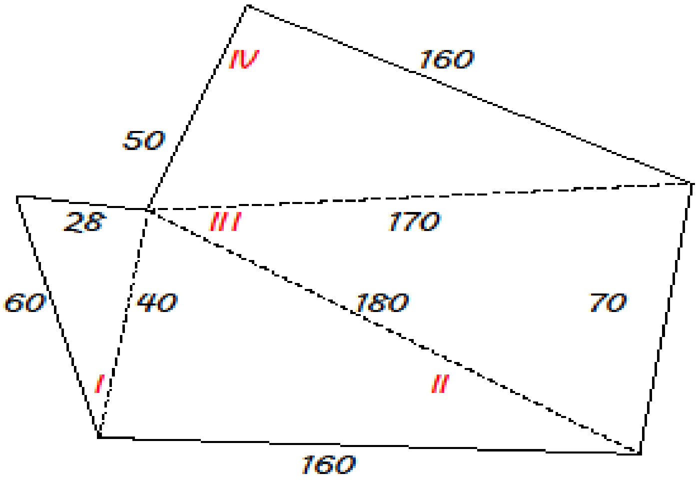
OBSERVAÇÃO: Caso queiramos obter a área em hectares, multiplicamos a quantidade de tarefas por 0,3025. (digitamos 13,24 , depois o sinal de vezes "$\times$", digitamos 0,3025 e por último a tecla igual "=").

$$13{,}24 \times 0{,}3025 = 4{,}0051 \text{ hectares}$$

Assim, a área da propriedade é de aproximadamente 4 hectares.

Exemplo 2: O dono de uma propriedade cuja forma e medidas estão descritas na figura, quer saber a área desta propriedade em metros quadrados, em braças quadradas, em tarefas e em hectares.

Sabe-se que todas as medidas na figura estão descritas em metros.



(figura ilustrativa)

Solução: Vamos dividir a propriedade em quatro triângulos I, II, III e IV.

- ÁREA DO TRIÂNGULO I:

Fazendo $a = 28$, $b = 40$ e $c = 60$, assim $a + b + c = 128$. Temos então:

1º Passo	2º Passo	3º Passo	4º Passo
$(a+b+c)\div 2=p$	$p - a$	$p - b$	$p - c$
$128\div 2 = 64$	$64-28 = 36$	$64-40 = 24$	$64-60 = 4$

5º Passo	6º Passo
$p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)$	$\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$
$64\times 36\times 24\times 4 = 221184$	$\sqrt{221184} \cong 470,30$

Portanto, a área do triângulo I é, aproximadamente, 470,3 m^2 (metros quadrados).

- ÁREA DO TRIÂNGULO II:

Fazendo $a = 40$, $b = 160$ e $c = 180$, assim $a + b + c = 380$. Temos:

1º Passo	2º Passo	3º Passo	4º Passo
$(a+b+c)\div 2=p$	$p - a$	$p - b$	$p - c$
$380\div 2 = 190$	$190-40 = 150$	$190-160 = 30$	$190-180 = 10$

5º Passo	6º Passo
$p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)$	$\sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}$
$190\times 150\times 30\times 10 = 8550000$	$\sqrt{8550000} \cong 2924{,}03$

Portanto, a área do triângulo II é, aproximadamente, $2924{,}03\ m^2$.

- ÁREA DO TRIÂNGULO III:

Fazendo $a = 70$, $b = 170$ e $c = 180$, assim $a + b + c = 420$. Temos:

1º Passo	2º Passo	3º Passo	4º Passo
$(a+b+c) \div 2 = p$	$p - a$	$p - b$	$p - c$
$420 \div 2 = 210$	$210 - 70 = 140$	$210 - 170 = 40$	$210 - 180 = 30$

5º Passo	6º Passo
$p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)$	$\sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}$
$210 \times 140 \times 40 \times 30 = 352800000$	$\sqrt{35280000} \cong 5939{,}69$

Portanto, a área do triângulo III é, aproximadamente, $5939{,}69\ m^2$.

- ÁREA DO TRIÂNGULO IV:

Fazendo $a = 50$, $b = 160$ e $c = 170$, assim $a + b + c = 380$. Temos:

1º Passo	2º Passo	3º Passo	4º Passo
$(a+b+c)\div 2=p$	$p - a$	$p - b$	$p - c$
$380\div 2 = 190$	$190-50 = 140$	$190-160 = 30$	$190-170 = 20$

5º Passo	6º Passo
$p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)$	$\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$
$190\times 140\times 30\times 20 = 15960000$	$\sqrt{15960000} \cong 3994,99$

Portanto, a área do triângulo IV é, aproximadamente, $3994,99\ m^2$.

Assim, a área total da propriedade será:

$$470,3 + 2924,03 + 5939,69 + 3994,99 = 13329,01\ m^2$$

Então, temos que a área da propriedade é de aproximadamente 13.329 m^2.

Poderíamos converter esta área para uma outra unidade de medida.

Vejamos:

- Área em braças quadradas (dividimos a área em m^2 por 4,84)

$13329 \div 4,84 \cong 2753,92$ braças quadradas

- Área em tarefas (dividimos a área em m^2 por 3025)

$13329 \div 3025 \cong 4,4$ tarefas

- *Área em hectares (dividimos a área em m^2 por 10000)*

13329 ÷ 10000 = 1,3329 hectares

Visto que, 1 braça quadrada = 4,84 m^2, 1 tarefa = 3.025 m^2 e 1 hectare = 10.000 m^2.

Finalizamos esta cartilha com uma tabela prática de conversões das unidades de medidas de áreas.

TABELA (Conversões de Unidades de áreas)

UNIDADE	CONVERTER PARA	UNIDADE	PROCESSO
Metros quadrados	→	Braças quadradas	Divide por 4,84
Metros quadrados	→	Tarefas	Divide por 3.025
Metros quadrados	→	Hectares	Divide por 10.000
Braças quadradas	→	Metros quadrados	Multiplica por 4,84
Braças quadradas	→	Tarefas	Divide por 625
Braças quadradas	→	Hectares	Divide por 2.066
Tarefas	→	Metros quadrados	Multiplica por 3.025
Tarefas	→	Braças quadradas	Multiplica por 625
Tarefas	→	Hectares	Multiplica por 0,3025
Hectares	→	Metros quadrados	Multiplica por 10.000
Hectares	→	Braças quadradas	Multiplica por 2.066
Hectares	→	Tarefas	Divide por 0,3025

O Autor

José Reinaldo Nogueira da Silva, professor de matemática da rede municipal de Olivença/AL e também do estado de Alagoas, licenciado em matemática pela Universidade Estadual de Alagoas – UNEAL e mestre em matemática pela Universidade federal de Alagoas – UFAL (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT).