UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA UFAL-UFBA

MARLON CESAR SANTOS OLIVEIRA

UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO PARA FERRADURAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICAS

Maceió

2017

MARLON CESAR SANTOS OLIVEIRA

UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO PARA FERRADURAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira.

Maceió

2017

O48u Oliveira, Marlon Cesar Santos.
Unicidade de estados de equilíbrio para ferraduras parcialmente hiperbólicas / Marlon Cesar Santos Oliveira. – 2017.
39 f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira..
Tese (Doutorado em Matemática) – Doutorado Interinstitucional UFBA/UFAL. Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 37-39.

1. Ferraduras. 2. Estados de equilíbrio. 3. Hölder continuidade. 4. Esquema induzido. 5. Shift enumerável. I. Título.

CDU: 517.93

AUTOR: MARLON CESAR SANTOS OLIVEIRA

UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO PARA FERRADURAS PARCIALMENTE HIPERBOLICAS

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, aprovada ao 30 dia do mês de março do ano de 2017.

Krerley Oliveira

Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira, UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Ali Golmakani

Dr. Ali Golmakani, UFAL

Davi dos Santos Lima

Dr. Davi dos Santos Lima, UFAL

Dra. Isabel Lugão Rios, UFF (Examinador Externo)

Vanessa Ribeiro Ramos

Dra. Vanessa Ribeiro Ramos, UFMA (Examinador Externo)

À minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

A minha família pelo apoio e incentivo dado durante essa jornada.

Ao professor Krerley Oliveira pela orientação e aos membros da banca.

A todos os professores que fizeram parte de minha vida acadêmica.

Enfim, a todos amigos e colegas que estiveram comigo nessa etapa, meus sinceros agradecimentos.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Nesta tese nós mostramos a unicidade de estados de equilíbrio para uma família de ferraduras parcialmente hiperbólicas consideradas em [9] e com respeito a uma classe de potenciais Hölder contínuos e hiperbólicos. O método usado consiste em construir um sistema simbólico com infinitos símbolos, mostrar que o potencial induzido é Hölder e recorrente e fazer o uso da teoria de Sarig para shifts enumeráveis. Além disso provamos a unicidade de medidas de máxima entropia para a classe de ferraduras introduzida em [8].

Palavras-chaves: Ferraduras; Estados de equilíbrio; Hölder continuidade; Esquema induzido; Shift enumerável.

ABSTRACT

In this work we show the uniqueness of equilibrium state for a family of partially hyperbolic horseshoes introduced by [9] associated to a class of hyperbolic Hölder continous potentials. The method used here is to build a symbolic system with infinitely many symbols, show that the induced potential is Hölder and recurrent and make use of Sarig's theory for countable shifts. Moreover, we prove the uniqueness of maximal entropy measures for a class of horseshoes intruduced by [8].

Keywords: Horseshoe; Equilibrium state; Hölder continuity; Inducing scheme; Countable shift.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Formalismo Termodinâmico é uma área da Teoria Ergódica que usa métodos de Mecânica Estatística para analisar o comportamento de sistemas dinâmicos caóticos. O principal ingrediente é o princípio variacional, que consiste na relação entre a energia do sistema associada com um potencial contínuo ϕ e o invariante topológico $P_{top}(\phi)$, que chamamos de pressão topológica. Em outras palavras

$$P_{top}(\phi) := \sup\left\{h_\mu(F) + \int \phi\, d\mu\right\}, \tag{1.1}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as medidas de probabilidade F-invariantes.

Um dos objetivos do Formalismo Termodinâmico é o estudo das medidas que realizam o supremo do princípio variacional, e uma medida assim é chamada de *estado de equilíbrio* (em particular, se $\phi \equiv 0$ nós chamamos *medida de máxima entropia*).

Compreender o Formalismo Termodinâmico além do contexto uniformemente hiperbólico é uma tarefa desafiadora e difícil no estudo da Teoria Ergódica de aplicações diferenciáveis. Recentemente, alguns autores obtiveram progressos importantes com respeito a unicidade de estados de equilíbrio (veja [4], [5], [6], [13], [15], [22], [23], [24] e [27] como referências de alguns resultados), sendo a maioria sobre medidas de máxima entropia, aplicações não invertíveis ou então exemplos com aplicações e potenciais específicos.

Por outro lado, inúmeros resultados foram obtidos sob a estrutura de aplicações parcialmente hiperbólicas. Esses resultados descrevem a estrutura e a prevalência dessas aplicações em alguns cenários e fornecem uma boa extensão da teoria hiperbólica clássica. No entanto, existem poucos resultados com relação a unicidade de estados de equilíbrio para potenciais Hölder contínuos e sobre o fenômeno de transição de fase no contexto parcialmente hiperbólico.

O resultado principal desta tese é sobre o Formalismo Termodinâmico de uma família de ferraduras parcialmente hiperbólicas F, introduzida por *Diaz et al* em [9]. Essas aplicações estão simultaneamente no bordo dos sistemas uniformemente hiperbólicos e no conjunto dos sistemas persistentemente não hiperbólicos. Além disso, dessas aplicações possuem ciclo heterodimensional e também são semi-conjugadas a um subshift de tipo finito.

Em [12] foi mostrado que estados de equilíbrio para a aplicação ferradura F sempre existem para potencias contínuos. Sobre a unicidade, mostraram que em $C^0(\Lambda)$ existe um conjunto residual de potenciais que admitem um único estado de equilíbrio. Verificaram também que para potenciais Hölder contínuos a unicidade não necessariamente é garantida. De fato, provaram que a família de potenciais C^∞ dados por $\phi_t = t\log|DF|_{E^c}|$ tem uma *transição de fase*, i.e., pelo menos dois estados de equilíbrio.
Em [1], considerando potenciais constantes ao longo da direção centro-estável, os autores mos-

traram a unicidade de estados de equilíbrio. O resultado foi obtido reduzindo o estudo ao formalismo termodinâmico do subshift, isto é, fazendo o uso da unicidade de estados de equilíbrio obtida em [2].

Rios e Siqueira em [23] consideraram uma família de sistemas não-uniformemente expansores obtidos a partir da ferradura F através da projeção de sua inversa ao longo de dois planos centro-estáveis. Eles mostram a unicidade de estados de equilíbrio com respeito aos potenciais definidos no plano e com variação pequena, seguindo argumentos similares aos feitos em [17]. Usaram a aplicação projeção para transferir os resultados para a ferradura original e potenciais constantes na direção instável e com variação pequena. Em [21] esse resultado foi melhorado, retirando a condição sobre a direção e além disso, foram obtidas propriedades estatísticas do estado de equilíbrio.

Neste trabalho mostramos a unicidade de estados de equilíbrio para a ferradura F através de uma abordagem diferente de [1, 21, 23] e com respeito a uma classe de potenciais Hölder contínuos.

O segundo capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção definimos precisamente a família de ferraduras e os resultados obtidos sobre a mesma em [9]. A segunda seção contém os resultados anteriores sobre as propriedades ergódicas de F obtidas em [1, 21, 23]. Na mesma seção fazemos o estudo dos expoentes de Lyapunov na direção central dos estados de equilíbrio relativos à classe de potencias considerada. Por fim, apresentamos o resultado principal.

No terceiro capítulo demonstramos o teorema principal. Esse capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira seção construímos um esquema induzido que será usado para a *recodificação* da dinâmica em um shift enumerável. Na segunda seção apresentamos os resultados sobre o formalismo dos shifts enumeráveis que serão utilizados. Na terceira seção demonstramos o teorema principal. Na última seção apresentamos um exemplo de potencial que satisfaz nossas condições e não está incluso nas classes de potenciais dos trabalhos anteriores.

No quarto capítulo provamos a unicidade de medidas de máxima entropia para as ferraduras *porco-espino*, que foram introduzidas em [8].

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo definimos precisamente a família de ferraduras parcialmente hiperbólicas e também apresentamos alguns resultados já existentes sobre as características dessas aplicações e suas propriedades ergódicas. Fazemos o estudo dos expoentes de Lyapunov na direção central dos estados de equilíbrio associados à classe de potenciais que iremos considerar neste trabalho e também apresentamos o resultado principal.

2.1 Ferraduras parcialmente hiperbólicas

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo sobre uma variedade diferenciável compacta e sem bordo M. Um subconjunto $K \subset M$ compacto e invariante é *parcialmente hiperbólico* para f se existem uma métrica riemanniana em M e uma decomposição contínua e DF-invariante $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ do fibrado tangente sobre K tal que para $x \in M$ e vetores unitários $v^* \in E^*(x)$, $* = s,c,u$ são satisfeitas as seguintes propriedades

1. $||D_x f(v^s)|| < 1$ e $||D_x f(v^u)|| > 1$,
2. $||D_x f(v^s)|| < ||D_x f(v^c)|| < ||D_x f(v^u)||$.

O fibrado central pode admitir desenvolvimento contrativo ou expansor, mas deve ter taxas mais fracas do que o desenvolvimento nas direções E^s e E^u respectivamente.
Em [9] os autores construíram uma família de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que definiremos abaixo em dimensão 3, mas os resultados são válidos para dimensões maiores.
Considere em $\mathbb{R}^3$ o cubo $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ e os retângulos

$$R_0 := I \times I \times [0,1/6] \qquad \text{e} \qquad R_1 := I \times I \times [5/6,1],$$

onde as constantes são $0 < \lambda_0 < \frac{1}{3}$, $\beta_0 > 6$, $0 < \sigma < \frac{1}{3}$ e $3 < \beta_1 < 4$.
Seja f o tempo 1 do campo de vetores $y' = (1-y)y$, definida por

$$f^n(y) = \frac{1}{1-(1-1/y)e^{-n}},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $y \neq 0$. A família de *aplicações ferraduras* $F : R \to \mathbb{R}^3$ é definida por

$$F_0(x,y,z) = (\lambda_0 x, f(y), \beta_0 z),$$

sempre que $(x,y,z) \in R_0$ e

$$F_1(x,y,z) = (3/4 - \lambda_0 x, \sigma(1-y), \beta_1(z-5/6)),$$

para $(x,y,z) \in R_1$. Os pontos $X \in R - R_0 \cup R_1$ são enviados injetivamente fora de R.

Observe que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, logo os pontos $Q = (0,0,0)$ e $P = (0,1,0)$ são selas hiperbólicas com índices[1] 2 e 1 respectivamente.

Em [9] os autores mostraram que o conjunto maximal invariante de F

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F^n(R),$$

é parcialmente hiperbólico e tem ciclo heterodimensional. De fato, Λ contém as selas Q e P que possuem índices diferentes e satisfazem a condição de ciclo

$$W^s(P) \cap W^u(Q) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad W^s(Q) \cap W^u(P) \neq \emptyset.$$

A classe homoclínica de P, definida por $H(P,F) = \overline{W^s(P) \cap W^u(P)}$, coincide com Λ e a classe homoclínica de Q é trivial, ou seja,

$$\{Q\} = H(Q,F) \subset H(P,F) = \Lambda.$$

Seja Σ_{11} o subshift de tipo finito

$$\Sigma_{11} = \Big\{ w = (w_k)_{k\in\mathbb{Z}}; w_k w_{k+1} \neq 11 \Big\}.$$

Em [9] também foi provado que existe uma sobrejeção contínua $h : \Lambda \to \Sigma_{11}$ dada por

$$h(X) = (w_k)_{k\in\mathbb{Z}},$$

onde $F^k(X) \in R_{w_k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e também satisfaz $h \circ F = \sigma \circ h$. Em outras palavras, a aplicação $F|_\Lambda$ é *semi-conjugada* ao subshift de tipo finito $\sigma : \Sigma_{11} \to \Sigma_{11}$. Esses resultados são sintetizados no seguinte teorema:

Teorema 2.1. *([9], Teorema 1) Considere $F : R \to \mathbb{R}^3$ a aplicação ferradura, então*

1. *O difeomorfismo F tem um ciclo heterodimensional associado às selas P e Q. Além disso, existe uma interseção não-transversal entre $W^s(Q,F)$ e $W^u(P,F)$ cuja órbita está contida em $H(P,F)$.*

2. *A classe homoclínica de Q é trivial e está contida na classe homoclínica de P. Em particular, $H(P,F)$ é não hiperbólica.*

3. *Existe uma sobrejeção contínua*

$$h : \Lambda \to \Sigma_{11} \qquad \text{com} \qquad h \circ F = \sigma \circ h.$$

Além disso existem infinitos segmentos centrais não-triviais $J = \{x\} \times [a,b] \times \{z\}$ contidos na classe homoclínica $H(P,F)$ e são tais que h é constante nos mesmos.

[1] O índice de um ponto periódico hiperbólico é a dimensão da sua variedade instável.

Dado um ponto $X = (x^s, x^c, x^u) \in \Lambda$, nós consideramos a *variedade central* tangente ao subespaço central E^c em X por

$$W^c(X) := \{(x_s, y, x_u);\ y \in [0,1]\}.$$

Considere o conjunto invariante

$$\hat{\Lambda} := \{X \in \Lambda\ ;\ \Lambda \cap W^c(X) = \{X\}\},$$

e sua imagem $\Sigma := h(\hat{\Lambda})$.

Dessa forma, temos que a restrição $h : \hat{\Lambda} \subset \Lambda \to \Sigma$ é injetiva e se $X \in \hat{\Lambda}^c$, então Λ contém um segmento não trivial de $W^c(X)$ que é colapsado por h em um único ponto. O conjunto $\hat{\Lambda}^c$ pode ser composto por uma união não enumerável e disjunta desses segmentos. Além disso, os conjuntos $\hat{\Lambda}$ e $\hat{\Lambda}^c$ são densos em Λ.

2.2 Resultados

Considere $F : \Lambda \to \Lambda$ a aplicação ferradura definida na seção anterior e $\mathscr{M}_F(\Lambda)$ o espaço das medidas de probabilidade F-invariantes em Λ. Dada uma medida μ em $\mathscr{M}_F(\Lambda)$ ergódica, nós definimos seu *expoente de Lyapunov central* como

$$\lambda^c_\mu = \int \log |DF|_{E^c}|\, d\mu.$$

Em nosso caso E^c é unidimensional, então pelo teorema ergódico de Birkhoff

$$\lambda^c_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DF^n_{|E^c}(X)|,$$

para μ quase todo ponto $X \in \Lambda$.

O estudo das propriedades ergódicas da aplicação F teve início em [12], onde os autores provaram que toda medida invariante é *hiperbólica*, ou seja, que μ quase todo ponto possui expoente de Lyapunov diferente de zero. Também foi mostrado que existe um *gap* no conjunto dos expoentes de Lyapunov na direção central. Além disso, provaram que todo ponto recorrente diferente de Q e P pertence a $\hat{\Lambda}$. Como consequência desses resultados, mostraram que a função

$$\mu \to h_\mu(F),$$

é semi-contínua superiormente em $\mathscr{M}_F(\Lambda)$ e assim garantindo a existência de estados de equilíbrio para todo potencial contínuo e também unicidade para um conjunto residual de potenciais em $C^0(\Lambda)$.
Mais precisamente, eles mostraram

Teorema 2.2. *([12], Teoremas 2.1 e 2.2 , Proposição 3.3)*

Considere F a aplicação ferradura parcialmente hiperbólica. Então

1. *Para qualquer ponto recorrente X diferente de Q:*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(X)|_{E^c}| \leq 0.$$

Além disso, qualquer medida invariante ergódica para F diferente de δ_Q tem expoente de Lyapunov central negativo.

2. *Seja X um ponto em Λ. Se existe algum número inteiro positivo k tal que $h(F^n(X))$ pertence ao cilindro[2] $[1\underbrace{0...0}_{k}1]$ para infinitos $n \in \mathbb{Z}$, então*

$$\Lambda \cap W^c(X) = \{X\}.$$

3. *Qualquer função contínua $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ admite algum estado de equilíbrio. Além disso, existe um conjunto residual de funções em $C^0(\Lambda)$ tal que o estado de equilíbrio é único.*

Note que se μ é uma medida invariante ergódica tal que $\mu(R_1) = 0$, logo por invariância do suporte e também como $supp\mu \subset R_0$, temos que suppμ deve estar contido em $\{0\} \times [0,1] \times \{0\}$, pois qualquer outro ponto eventualmente em alguma iteração estará fora de R_0. Dessa maneira, como qualquer ponto em $\{0\} \times [0,1] \times \{0\}$ é atraído para P, a medida μ deve ser δ_Q ou δ_P. Caso μ seja qualquer medida invariante tal que $\mu(R_1) = 0$, pelo teorema da decomposição ergódica, concluímos que μ deve ser uma combinação convexa dessas duas medidas de Dirac. Nós acabamos de mostrar o seguinte lema :

Lema 2.1. *Considere uma medida $\mu \in \mathscr{M}_F(\Lambda)$ tal que $\mu(R_1) = 0$. Então ou μ é uma das medidas de Dirac nos pontos P e Q ou é uma a combinação convexa dessas medidas.*

Observação 2.1. *Como consequências dos resultados anteriores, uma vez que*

$$h_{top}(F) = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0,$$

nós temos que μ_{max}, a única medida de máxima entropia de F, satisfaz $\mu_{max}(R_1) > 0$. Além disso, se μ é uma medida invariante ergódica tal que $\mu(R_1) > 0$, então pelo Teorema 2.2 temos que $\mu(\hat{\Lambda}) = 1$.

No contexto uniformemente hiperbólico, a Hölder continuidade é uma condição suficiente sobre o potencial para obter a unicidade de estados de equilíbrio, mas em [12] os autores mostraram que propriedade de Hölder continuidade não é uma condição suficiente para garantir a unicidade para a ferradura F. Eles mostraram que a família de potencias Hölder contínuos $\phi_t = t\log|DF|_{E^c}|$ possui *transição de fase*.

Teorema 2.3 ([12], Teorema 2.3)**.** *Seja ϕ_t a família a 1-parâmetro de potenciais $C^\infty(\Lambda)$ dados por $\phi_t(X) = t\log|DF(X)|_{E^c}|$. Então existe um número real positivo t_0 tal que:*

[2] Um cilindro $[i_0...i_k]$ é um subconjunto de Σ_{11} formado pelas sequências $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $w_0 = i_0, w_1 = i_1, ..., w_k = i_k$.

1. *Para $t > 0$ a medida de Dirac δ_Q é o único estado de equilíbrio.*

2. *Para $t < t_0$, qualquer estado de equilíbrio para ϕ tem expoente de Lyapunov na direção central negativo. Em particular, essa medida é singular com respeito à medida δ_Q.*

3. *Para $t = t_0$, a medida δ_Q é um estado de equilíbrio para ϕ_t. Além disso, existe pelo menos um outro estado de equilíbrio, singular com respeito à medida δ_Q.*

Posteriormente em [1], considerando os chamados *u-potenciais*, isto é, os potenciais Hölder contínuos $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\phi(x,y,z) = \phi(z),$$

provaram a unicidade de estados de equilíbrio. Usaram a semi-conjugacão h para reduzir a análise ao subshift, considerando o potencial $h_*\phi$, que está bem definido (aqui foi usado condição sobre as coordenadas) e além disso é localmente Hölder contínuo, dessa forma pelo resultado clássico de Bowen (veja em [2], Teorema 1.22), obtiveram unicidade de estados de equilíbrio para o subshift. Por fim mostraram que as fibras obtidas da semi-conjugação não contribuem para a pressão topológica, assim sendo possível estender a unicidade para a aplicação F com respeito a ϕ.

Em [23] foi introduzida uma família de aplicações obtidas através da projeção de F^{-1} nos planos centro-estáveis

$$P_0 = [0,1] \times [0,1] \times \{0\} \qquad \text{e} \qquad P_1 = [0,1] \times [0,1] \times \{5/6\}.$$

As aplicações são definidas nos retângulos

$$\begin{aligned} R_0 &= [0,\lambda_0] \times [0,1] \times \{0\}, \\ R_1 &= [3/4-\lambda_0, 3/4] \times [0,\sigma] \times \{0\}, \\ R_2 &= [0,\lambda_0] \times [2,3] \times \{5/6\}, \end{aligned}$$

pelas respectivas restrições G_i

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= (\lambda_0^{-1}x, f_0^{-1}(y), 0), \\ G_2(x,y,z) &= (\lambda_0^{-1}(3/4-x), 1-\sigma^{-1}y, 5/6), \\ G_3(x,y,z) &= (\lambda_0^{-1}x, f_0^{-1}(y), 0). \end{aligned}$$

Dessa maneira, as aplicações $G : \bigcup_{i=1}^{3} R_i \to P_0 \cup P_1$ restritas aos subconjuntos

$$\Lambda_G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G^{-n}(\bigcup_{i=1}^{3} R_i),$$

são semi-conjugadas a um subshift de tipo finito $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$.

Eles obtêm o seguinte resultado sobre estados de equilíbrio dessa aplicação:

Teorema 2.4. *([23], Teorema A) Sejam $G : \Lambda_G \to \Lambda_G$ a aplicação definida acima e $\phi : \Lambda_G \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo que satisfaz*

$$Var(\phi) := \sup \phi - \inf \phi < \frac{\log \omega}{2}, \tag{2.1}$$

onde $\omega = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Então existe um único estado de equilíbrio para ϕ.

Uma vez que G é uma aplicação não-uniformemente expansora, os autores utilizam o operador de transferência para obter o estado de equilíbrio seguindo argumentos similares aos feitos em [17]. Como consequência do Teorema 2.4, os autores constroem um estado de equilíbrio para a aplicação ferradura F com respeito aos potenciais Hölder contínuos que dependem apenas da direção centro-estável, e consequentemente essa medida será a única maximizante.

Teorema 2.5 ([23], Teorema C)**.** *Sejam F a ferradura parcialmente hiperbólica e $\phi : R \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo que satisfaz* (2.1). *Se ϕ não depende da coordenada z em $R_0 \cup R_1$, então existe um único estado de equilíbrio para F com respeito ao potencial ϕ.*

Dizemos que duas funções $\phi, \tilde{\phi} : \Lambda \to \mathbb{R}$ são homólogas a F, se satisfazem

$$\phi - \tilde{\phi} = u \circ F - u,$$

para alguma função contínua $u : \Lambda \to \mathbb{R}$. Uma propriedade importante dessas funções é que elas possuem os mesmos estados de equilíbrio.

Em [21] é feita uma generalização do Teorema 2.5. É mostrado que todo potencial Hölder contínuo possui um homólogo que não depende da coordenada instável, assim sendo possível obter a unicidade de estados de equilíbrio para potenciais com variação pequena.

Agora, nós introduzimos a classe de potenciais que será considerada em nosso resultado principal.

Definição 2.1. *Dizemos que um potencial Hölder contínuo $\phi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ é admissível com respeito a F se satisfaz*

(C_1) *O induzido do potencial $\varphi := \phi \circ h^{-1}$ é localmente Hölder (com respeito a uma indução que apresentaremos no próximo capítulo).*

(C_2) *Existe um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$P_{top}(\phi) > \sup_{X \in \Lambda} \frac{\phi_n(X)}{n},$$

onde $\phi_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(F^k(X))$.

Sejam ϕ um potencial que satisfaz a condição (C_2) e o potencial $\psi = \phi_n/n$. Uma vez que $P_{top}(\psi) = P_{top}(\phi)$ e os conjuntos dos estados de equilíbrio de ψ e ϕ coincidem, podemos assumir sem perda de generalidade que $n = 1$.

Observação 2.2. *Não é de difícil verificação que todo u-potencial satisfaz a condição* (C_1). *Além disso, todos os potenciais* ϕ *tais que* $\sup|\phi|$ *é suficientemente pequeno satisfazem a condição* (C_2) *(como exemplo temos os potenciais que satisfazem* (2.1)*).*

A seguir nós obtemos informações sobre os expoentes de Lyapunov na direção central dos estados de equilíbrios associados aos potenciais admissíveis.

Primeiramente, enunciamos abaixo um resultado fundamental da teoria ergódica que será usado posteriormente:

Teorema 2.6 (Teorema da Decomposição Ergódica)**.** *Sejam* X *um espaço métrico compacto,* $T : X \to X$ *uma aplicação contínua e sobrejetiva e uma medida* $\mu \in \mathscr{M}_T(X)$. *Então, existem um conjunto mensurável* $\tilde{X}$ *com* $\mu(\tilde{X}) = 1$, *uma partição mensurável* $\mathscr{P}$ *de* $\tilde{X}$, *uma família de medidas de probabilidade* $\{\mu_P : P \in \mathscr{P}\}$ *e uma probabilidade* $\hat{\mu}$ *sobre* $\mathscr{P}$ *tais que*

- $\mu_P(P) = 1$ *para* $\hat{\mu}$*-q.t.p* $P \in \mathscr{P}$*;*
- *A função* $P \mapsto \mu_P(A)$ *é mensurável para todo conjunto mensurável* A*;*
- μ_P *é invariante e ergódica para* $\hat{\mu}$*-q.t.p* $P \in \mathscr{P}$*;*
- $\mu(A) = \int \mu_P(A)\, d\hat{\mu}$ *para todo conjunto mensurável* A*.*

Para a demonstração do teorema veja [16].

Proposição 2.1. *Se* μ *é um estado de equilíbrio associado a* ϕ*, então* $\lambda^c_\mu < 0$.

Para a prova da proposição precisamos do seguinte resultado:

Lema 2.2. *Sejam* F *a aplicação ferradura e* $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ *um potencial admissível com respeito a* F. *Então qualquer estado de equilíbrio é singular com respeito a medida* δ_Q*.*

Demonstração. A propriedade (C_2) implica que a medida δ_Q não pode ser um estado de equilíbrio. Nós supomos por contradição que exista um estado de equilíbrio μ tal que $\mu(\{Q\}) > 0$. Portanto, do teorema da decomposição de medidas, existe uma medida invariante ν, singular com respeito a δ_Q tal que

$$\mu = \mu(\{Q\})\delta_Q + (1-\mu(\{Q\}))\nu.$$

Além disso, $\int \phi\, d\delta_Q = \phi(Q)$ e uma vez que a função entropia métrica com respeito à medida é afim, temos

$$\begin{aligned} P_{top}(\phi,F) &= h_\mu(F) + \int \phi\, d\mu \\ &= \mu(\{Q\})\phi(Q) + (1-\mu(\{Q\}))\left(h_\nu(F) + \int \phi\, d\nu\right) \\ &< \mu(\{Q\})P_{top}(\phi) + (1-\mu(\{Q\}))\left(h_\nu(F) + \int \phi\, d\nu\right), \end{aligned}$$

logo $P_{top}(\phi,F) < h_\nu(F) + \int \phi d\nu$, o que contradiz (1.1). □

Prova da Proposição 2.1. Sejam μ um estado de equilíbrio com respeito a ϕ e $\{\mu_\xi\}_{\xi\in\mathbb{T}^1}$ a família de medidas ergódicas obtida do Teorema 2.6. Pelo Lema 2.2, temos $\mu(\{Q\}) = 0$, portanto para Lebesgue quase todo ponto $\xi \in \mathbb{T}^1$ acontece $\mu_\xi(\{Q\}) = 0$. Usando o Corolário 3.6 de [12] concluímos que $\int \log|DF_{|E^c}|d\mu_\xi < 0$ para cada ξ, então

$$\begin{aligned} \lambda_\mu^c &:= \int \log|DF_{|E^c}|\,d\mu \\ &= \int_{\mathbb{T}^1}\left(\int \log|DF_{|E^c}|\,d\mu_\xi\right)d\mu \\ &< 0. \end{aligned}$$

□

Note que para obter os resultados acima, nós usamos apenas a condição (C_2). A condição (C_1) será necessária para obter a unicidade de estados de equilíbrio.

Teorema Principal. *Considere $F : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ a aplicação ferradura e um potencial $\phi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ admissível com respeito a F. Então existe um único estado de equilíbrio μ associado a ϕ.*

A estratégia para demonstração do teorema principal consiste em:

- Supomos que existem dois estados de equilíbrio ergódicos distintos μ_1 e μ_2 com respeito a um potencial Hölder contínuo ϕ e que não são medidas de Dirac (δ_Q e δ_P).

- Reduzindo a análise ao subshift, consideramos as medidas ν_1 e ν_2 em Σ_{11} que são os *push forward* dos estados de equilíbrio pela semi-conjugação h. Consideramos o potencial $\varphi = h_*\phi$, que não necessariamente está definido em Σ_{11} e além disso pode não ser regular.

- Considerando um subconjunto Σ_α que tem medida total com respeito às medidas ν_1 e ν_2, nós definimos a aplicação induzida $T = \sigma^\rho$ e um potencial induzido φ_ρ relacionado a φ. Nós provamos que o sistema $(T,\varphi_\rho,\Sigma_\alpha)$ é equivalente a um shift total relativo a um alfabeto enumerável $(\sigma,S^{\mathbb{Z}},\Psi)$.

- Nós provamos que o potencial Ψ é localmente Hölder contínuo e limitado. Usando o formalismos termodinâmico para shift enumerável de Sarig, nós mostramos também que existe um único estado de equilíbrio para Ψ.

- Finalmente, pela equivalência entre os sistemas $(T,\varphi_\rho,\Sigma_\alpha)$ e $(\sigma,S^{\mathbb{Z}},\Psi)$ nós obtemos a unicidade de medidas de equilíbrio para $(T,\varphi_\rho,\Sigma_\alpha)$. Para finalizar, provamos que ambas as medidas ν_1 e ν_2 são levantáveis com respeito a um sistema induzido e seus levantamentos também são estados de equilíbrio, então pela unicidade obtida antes, nós concluímos que $\nu_1 = \nu_2$ e consequentemente $\mu_1 = \mu_2$.

3 UNICIDADE DE ESTADOS DE EQUILÍBRIO

Neste capítulo demonstramos o nosso resultado principal.

3.1 Construção de um esquema induzido

A seguir construímos um esquema induzido que admite uma representação simbólica com respeito a um alfabeto infinito enumerável.

Para cada n e $w \in \Sigma_{11}$ considere

$$d_n^+(w) = \frac{\sharp\{k \,;\, w_k = 1,\ 0 \leq k \leq n-1\}}{n} \quad \text{e} \quad d_n^-(w) = \frac{\sharp\{k \,;\, w_{-k} = 1,\ 0 \leq k \leq n-1\}}{n}.$$

Dada uma constante $\alpha > 0$ nós consideramos o subconjunto

$$\Sigma_\alpha = \{w \in [1];\ \overline{\lim_n}\, d_n^+(w) > \alpha \ \ \text{e} \ \ \overline{\lim_n}\, d_n^-(w) > \alpha\}. \tag{3.1}$$

O conjunto Σ_α é σ-invariante e composto pelas sequências com frequências de dígitos 1 maior que α. Usando o item 2 do Teorema 2.2, temos que para qualquer $w \in \Sigma_\alpha$ o conjunto $h^{-1}(w)$ consiste de um único ponto, assim obtemos $\Sigma_\alpha \subset h(\hat{\Lambda})$.

Definimos em Σ_α a *função α-retorno* $\rho : \Sigma_\alpha \to \mathbb{N}$ por

$$\rho(w) = \min\{k > 1 \,;\, w_{k-1} = 1 \ \ \text{e} \ \ d_k^+(w) > \alpha\}.$$

Podemos decompor Σ_α em conjuntos de nível da função ρ,

$$\Sigma_\alpha = \bigcup_i \Sigma_i,$$

onde Σ_i é dado por $\Sigma_i = \{w \in \Sigma_\alpha;\ \rho(w) = i\}$. Definimos a *aplicação induzida* $T : \Sigma_\alpha \to \Sigma_\alpha$ associada a ρ com

$$T(\omega) = \sigma^{\rho(\omega)}(\omega).$$

Considere a *Torre* associada a ρ, definida por

$$W = \bigcup_{i>1} \bigcup_{k=0}^{i-1} \sigma^k(\Sigma_i). \tag{3.2}$$

Seja ν uma medida T-invariante, tal que $\int \rho \, d\nu < \infty$, então definimos a medida σ-invariante

$$\mathscr{L}(\nu)(A) := \left(\int \rho d\nu\right)^{-1} \sum_{i>1} \sum_{k=0}^{i-1} \nu(\sigma^{-k}(A) \cap \Sigma_i), \tag{3.3}$$

para $A \subset \Sigma_{11}$, que chamaremos de *medida levantada* de ν.

A aplicação $\mathscr{L}$ que age de $\mathscr{M}_T(W)$ em $\mathscr{M}_\sigma(\Sigma_{11})$ não é necessariamente sobrejetiva. Dada uma medida $\nu \in \mathscr{M}_\sigma(\Sigma_{11})$, se existe uma medida ν_T tal que $\mathscr{L}(\nu_T) = \nu$, então dizemos que ν é uma medida *levantável*. Nós consideramos a classe dessas medidas por

$$\mathscr{M}_L(\sigma, W) := \{\nu \in \mathscr{M}_\sigma;\ \exists\ \nu_T\ ,\ \mathscr{L}(\nu_T) = \nu,\ \nu(W) = 1\}. \tag{3.4}$$

Dados um conjunto mensurável $A \subset \Sigma$ e um inteiro $i > 1$, nós definimos

$$e(i,A) := \frac{\sharp\{0 \leq k \leq i-1;\ \sigma^k(\Sigma_i) \cap A \neq \emptyset\}}{i}.$$

O próximo resultado nos dá condições para verificar quando uma medida é levantável.

Teorema 3.1 ([19], Teorema 3.1)**.** *Uma medida σ-invariante e ergódica ν, que satisfaz $\nu(\Sigma_\alpha) >$ 0, é levantável se existem um número $N \geq 0$ e subconjunto $A \subset \Sigma$ tal que*

$$\nu(A) > \sup_{i>N} e(i,A).$$

Considere um potencial $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$. Nós definimos $\varphi_\rho : \Sigma_\alpha \to \mathbb{R}$ o *potencial induzido* de φ por

$$\varphi_\rho(w) := \sum_{k=0}^{i-1} \varphi(\sigma^k(w)), \tag{3.5}$$

sempre que $w \in \Sigma_i$.
As fórmulas generalizadas de Abramov-Kač fornecem relações importantes entre a entropia do sistema original e a entropia do sistema induzido.

Proposição 3.1 (Veja [29], Teorema 5.1 e [18], Teorema 2.3)**.** *Considere uma medida $\nu_T \in \mathscr{M}_T(W)$. Se $\int \rho\, d\nu_T < \infty$, então*

$$h_{\mathscr{L}(\nu_T)}(\sigma) \cdot \int \rho\, d\nu_T = h_{\nu_T}(T).$$

Dados um potencial φ e seu induzido φ_ρ, se $\int \varphi_\rho\, d\nu_T < \infty$ então

$$\int \varphi\, d\mathscr{L}(\nu_T) \cdot \int \rho\, d\nu_T = \int \varphi_\rho\, d\nu_T.$$

Dessa maneira, definimos a quantidade

$$P_L(\varphi) := \sup_{\nu \in \mathscr{M}_L(\sigma, W)} \left\{ h_\nu(\sigma) + \int_W \varphi\, d\nu \right\},$$

que chamaremos de *pressão relativa*. Dizemos que uma medida de probabilidade invariante é um *estado de equilíbrio relativo* se realiza o supremo.

Agora, nós iremos estabelecer uma relação entre o sistema induzido e um shift enumerável.

Primeiramente, nós consideramos $\rho_{-1}(w) = \min\{k;\ d_k^-(w) > \alpha\}$ e o conjunto

$$\Sigma_{-k} := \{w \in \Sigma_\alpha;\ \rho_{-1}(w) = k\}.$$

Note que cada Σ_k (e também Σ_{-k}) pode ser decomposto de modo único como uma união finita e disjunta de k-cilindros, isto é,

$$\Sigma_k = \bigcup_{i=1}^{r_k} D_i^k,$$

onde $D_i^k = [w_0^i w_1^i ... w_k^i]$, para alguns w_k^i.

Definimos a aplicação que envia um cilindro em uma palavra

$$\hat{\pi}(D_i^k) = w_0^i w_1^i ... w_k^i.$$

Considere o alfabeto formado pelos conjuntos de α-retorno, ou seja,

$$S = \{D_i^k;\ k \geq 1, 1 \leq i \leq r_k\}.$$

Definimos a *aplicação de codificação* $\Pi : S^{\mathbb{Z}} \to \Sigma_\alpha$ por amalgamação

$$\Pi(\hat{w}) = (...\hat{\pi}(D_{i_{k_{-1}}}^{k_{-1}})\hat{\pi}(D_{i_{k_0}}^{k_0})\hat{\pi}(D_{i_{k_1}}^{k_1})...),$$

onde $\hat{w} = (D_{i_{k_n}}^{k_n})_{n\in\mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{Z}}$.

A aplicação Π está bem definida e conjuga os sistemas T e σ (o shift enumerável que age em $S^{\mathbb{Z}}$). De fato, dada uma sequência $w \in \Sigma_\alpha$, por definição sabemos que existe uma única sequência $\hat{w} = (D_{i_{k_n}}^{k_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ em $S^{\mathbb{Z}}$ tal que $\sigma^{k_{n-1}}(w) \in \Sigma_{k_n}$, dessa forma nós obtemos $\Pi(\hat{w}) = w$.

3.2 Formalismo do shift enumerável

Nesta seção apresentaremos noções sobre o formalismo termodinâmico de shifts enumeráveis. As principais referências são [20], [24] e [25].

Considere S um conjunto enumerável e um potencial $\Psi : S^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$, a *k-variação* é definida por

$$\mathrm{Var}_k(\Psi) = \sup_{[i_{-k+1}...i_0...i_{k-1}]} \ \sup_{\hat{w},\hat{v}\in[i_{-k+1}...i_0...i_{k-1}]} \{|\Psi(\hat{w}) - \Psi(\hat{v})|\},$$

onde o conjunto $[i_{-k+1}...i_0...i_{k-1}]$ é chamado de cilindro e consiste de todas as sequências $\hat{w} = (w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ com $w_{-k+1} = i_{-k+1}$, ..., $w_0 = i_0$, ..., $w_{k-1} = i_{k-1}$. Nós dizemos que Ψ tem *variação somável forte* se

$$\sum_{k\geq 1} k\mathrm{Var}_k(\Psi) < \infty.$$

Dizemos que Ψ é *localmente Hölder contínuo*, se existem constantes $C > 0$ e $a \in (0,1)$ tais que para todo $k \geq 1$

$$\mathrm{Var}_k(\Psi) \leq Ca^k.$$

É fácil ver que todo potencial localmente Hölder contínuo tem variação somável forte.

Seja $\Psi : S^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ um potencial localmente Hölder contínuo então a *pressão de Gurevich* de Ψ é

$$P_G(\Psi,a) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\substack{\sigma^n(\hat{w})=\hat{w} \\ \hat{w}\in[a]}} e^{\Psi_n(\hat{w})} \chi_{[a]}(\hat{w}), \tag{3.6}$$

onde $\chi_{[a]}$ é a função indicador no cilindro $[a]$ e $\Psi_n(\hat{w}) := \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(\sigma^k(\hat{w}))$.

Em [24] é provado que o limite existe e não depende de $a \in S$ sempre que o potencial tem variação somável, dessa forma nós denotamos a pressão simplesmente por $P_G(\Psi)$.

Sejam $\mathscr{M}_\sigma(S^{\mathbb{Z}})$ o conjunto das medidas de probabilidade σ-invariante em $S^{\mathbb{Z}}$ e o subconjunto

$$\mathscr{M}_\sigma(\Psi) := \left\{ \eta \in \mathscr{M}_\sigma(S^{\mathbb{Z}}); \int \Psi \, d\eta > -\infty \right\}.$$

Uma medida σ-invariante η_Ψ é um estado de equilíbrio para Ψ, se satisfaz

$$h_{\eta_\Psi}(\sigma) + \int \Psi \, d\eta_\Psi = \sup_{\eta\in\mathscr{M}_\sigma(\Psi)} \left\{ h_\eta(\sigma) + \int \Psi \, d\eta \right\}.$$

Uma medida η é Gibbs para Ψ, se existe uma constante C tal que para quaisquer cilindro $[i_0...i_{k-1}]$ e $\hat{w} \in [i_0...i_{k-1}]$ temos

$$C^{-1} \le \frac{\eta([i_0...i_{k-1}])}{e^{(\Psi_n(\hat{w})-nP_G(\Psi))}} \le C.$$

O próximo resultado pode ser encontrado em [20] Teorema 3.1 (veja também [24] e [25]).

Teorema 3.2. *Seja $\Psi : S^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ um potencial que satisfaz $\sup_{\hat{w}\in S^{\mathbb{Z}}} \Psi(\hat{w}) < +\infty$ e que tem variação somável forte. Então*

1. *acontece o princípio variacional para Ψ*

$$P_G(\Psi) = \sup_{\eta\in\mathscr{M}_\sigma(\Psi)} \left\{ h_\eta(\sigma) + \int \Psi \, d\eta \right\}.$$

2. *se $P_G(\Psi) < \infty$, então existe uma única medida σ-invariante ergódica e Gibbs η_Ψ para Ψ.*

3. *se $h_{\eta_\Psi}(\sigma) < \infty$, então $\eta_\Psi \in \mathscr{M}_\sigma(\Psi)$ e além disso é o único estado de equilíbrio para Ψ.*

Considere X uma espaço métrico, uma aplicação contínua $T : X \to X$ e uma medida invariante μ associada a T. Dizemos que μ tem *decaimento exponencial de correlação* como respeito a uma classe $\mathscr{H}$ de funções $h : X \to \mathbb{R}$, se existe $0 < \theta < 1$ tal que, para quaisquer $h_1, h_2 \in \mathscr{H}$ acontece

$$\left| \int h_1(T^n x) h_2(x) d\mu - \int h_1(x) d\mu \int h_2(x) d\mu \right| \le K\theta^n,$$

para algum $K = K(h_1, h_2) > 0$. Dizemos que μ satisfaz o *Teorema do Limite Central* (ou simplesmente TLC) com respeito à classe de funções $\mathscr{H}$, se para qualquer $h \in \mathscr{H}$, que não está no cobordo (i.e $h \neq g \circ T - g$ para qualquer g), existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mu\left\{x; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} (h(T^i(x)) - \int h(x) d\mu) < t\right\} \to \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-\tau^2}{2\gamma^2}} d\tau$$

quando $n \to \infty$.

Teorema 3.3. *([20], Teorema 3.4) Assuma que $P_G(\Psi)$, $\sup_{w\in S^{\mathbb{Z}}}(\Psi(w)) < \infty$ e que Ψ tem variação somável forte. Se $h_{\eta_\Psi}(\sigma) < \infty$ então a medida η_Ψ tem decaimento exponencial de correlações e satisfaz o TLC com respeito a classe dos potenciais localmente Hölder contínuos.*

O resultado é consequência do gap espectral do operador de Ruelle obtido em [25] (ver também [11] e [26]).

3.3 Prova do teorema principal

A prova do Teorema Principal será dividida em duas partes. A primeira parte será mostrar a unicidade de estados de equilíbrio relativo e a segunda consiste em obter a unicidade para a aplicação ferradura.

Dados $\alpha \in (0, \frac{2}{3})$ e o esquema induzido (ρ, Σ_α), obtido como na Seção 3.1. Com respeito a esse esquema induzido, mostramos a unicidade de estados de equilíbrio relativos para uma classe de potenciais.

Teorema 3.4. *Sejam $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ um potencial e φ_ρ o seu induzido. Se $P_L(\varphi) < \infty$ e também*

(P_1) *o potencial $\Psi := \varphi_\rho \circ \Pi$ é localmente Hölder contínuo*

(P_2) *existe um número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_L(\varphi) > \sup \frac{\varphi_n}{n}$.*

Então existe um único estado de equilíbrio relativo ν_φ. Além disso ν_φ tem decaimento exponencial de correlações e satisfaz (TCL) com respeito à classe de funções cujas induzidas associadas são limitadas e localmente Hölder contínuas em Σ_α.

Demonstração. Por hipótese a pressão $P_L(\varphi)$ é finita, então o potencial induzido $\varphi_\rho = \overline{\varphi - P_L(\varphi)}$ está bem definido. Com respeito a esse potencial temos o seguinte resultado:

Lema 3.1. *Se φ satisfaz (P_2), então existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\sum_{i>1} i \sup_{w\in\Sigma_i} e^{\varphi_\rho(w)+i\varepsilon} < \infty. \tag{3.7}$$

Demonstração. Uma vez que o potencial φ satisfaz (P_2), então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $P_L(\varphi) > \sup\varphi + \varepsilon_0$, assim para $P := P_L(\varphi)$, $w \in \Sigma_i$ e todo i temos

$$-\varepsilon_0 > \frac{\sum_{k=0}^{i-1}\varphi(\sigma^k(w))}{i} - P,$$

que implica em $\sum_{k=0}^{i-1}\varphi(\sigma^k(w)) - iP < -i\varepsilon_0$ e

$$e^{\varphi_\rho(w)} < e^{-i\varepsilon_0}.$$

Como a estimativa é independente da sequência, então existe uma constante ε suficientemente pequena tal que

$$\sup\{e^{\varphi_\rho(w)+i\varepsilon}; w \in \Sigma_i\} \leq e^{-i\varepsilon_0}. \tag{3.8}$$

Portanto, somando a expressão (3.8) com respeito a i, nós podemos concluir:

$$\sum_i i\sup\{e^{\varphi_\rho(w)+i\varepsilon}; w \in \Sigma_i\} \leq \sum_i ie^{-i\varepsilon_0} < +\infty.$$

Assim provamos o lema. $\square$

Considere o potencial $\Psi = \varphi_\rho \circ \Pi$. Pela condição (P_1), Ψ tem variação somável forte e satisfaz $\sup_{\hat{w}\in S^{\mathbb{Z}}}\Psi(\hat{w}) < +\infty$, então a pressão de Gurevich $P_G(\Psi)$ está bem definida e além disso veremos a seguir que ela é finita. De fato, dados um inteiro positivo n e um cilindro $[D_{i_1}^{l_1}...D_{i_n}^{l_n}]$ em $S^{\mathbb{Z}}$, existe uma única sequência $w \in \Pi([D_{i_1}^{l_1}...D_{i_n}^{l_n}])$ tal que $T^n(w) = w$. Dessa maneira, fixados $a > 1$ e $1 \leq j \leq r_a$, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i>1}\sup_{w\in\Sigma_i} e^{\varphi_\rho(w)}\right)^n &= \sum_{i_1,\dots i_n} C_{i_1\dots i_n}\sup_{w\in\Sigma_{i_1}} e^{\varphi_\rho(w)}\dots\sup_{w\in\Sigma_{i_n}} e^{\varphi_\rho(w)}\\
&\geq \sum_{i_2,\dots i_n} C_{a,i_2\dots i_n}\sup_{w\in\Sigma_a} e^{\varphi_\rho(w)}\sup_{w\in\Sigma_{i_2}} e^{\varphi_\rho(w)}\dots\sup_{w\in\Sigma_{i_n}} e^{\varphi_\rho(w)}\\
&\geq \sum_{\substack{T^n(w)=w\\ w\in D_j^a}} e^{\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_\rho(T^k w)}.
\end{aligned}$$

Então por (3.7) e (3.10), temos

$$\begin{aligned}
P_G(\Psi) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{\substack{\sigma^n(\hat{w})=\hat{w}\\ \hat{w}\in[D_j^a]}} e^{\sum_{j=0}^{n-1}\Psi(\sigma^j(\hat{w}))}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{\substack{T^n(w)=w\\ w\in D_j^a}} e^{\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_\rho(T^k(w))}\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{i>1}\sup_{w\in\Sigma_i} e^{\varphi_\rho(w)}\right)^n < +\infty,
\end{aligned}$$

assim confirmamos que $P_G(\Psi)$ é finita. De maneira semelhante também podemos provar que a pressão de Gurevich do potencial $\Psi_\delta : S^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ dado por $\Psi_\delta(\hat{w}) = \varphi_\rho(w) + \delta\rho(w)$, é finita para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Um potencial Ψ que tem essa propriedade é chamado de potencial *recorrente positivo*.

Pelo Teorema 3.2, temos o princípio variacional

$$P_G(\Psi) = \sup_{\eta \in \mathscr{M}_\sigma(\Psi)} \left\{ h_\eta(\sigma) + \int \Psi \, d\eta \right\}.$$

Além disso, existe uma única medida Gibbs η_Ψ para Ψ. Dessa maneira, a medida $\nu = \Pi_* \eta_\Psi$ também tem essa propriedade com respeito ao potencial φ_ρ, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que, para $n > 1$ e $\Sigma_n = \cup_{i=1}^{r_n} D_i^n$ nós temos

$$K^{-1} \leq \frac{\nu(D_i^n)}{e^{(\varphi_\rho(w) - nP)}} \leq K, \tag{3.9}$$

para $w \in D_i^n$ e $P = P_G(\Psi)$.

Portanto somando (3.9) com respeito a n e usando (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\alpha} \rho \, d\nu &= \sum_{n>1} n\nu(\Sigma_n) \\ &= \sum_{n>1} n \sum_{i=1}^{r_n} \nu(D_i^n) \\ &\leq \frac{K}{e^P} \sum_{n>1} n r_n \sup_{w \in D_i^n} \{e^{\varphi_\rho(w)}\} < +\infty. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Por (3.10) e usando as fórmulas Abramov-Kač, podemos concluir

$$\begin{aligned} h_{\eta_\Psi}(\sigma) &= h_\nu(T) \\ &= \int \rho \, d\nu \cdot h_{\mathscr{L}(\nu)}(\sigma) < +\infty. \end{aligned}$$

Além disso, como $P_L(\varphi) > -\infty$ e $\int \varphi \, d\mathscr{L}(\nu) > -\infty$ temos

$$\begin{aligned} \int \Psi \, d\eta_\Psi &= \int \varphi_\rho \, d\nu \\ &= \left(\int \rho \, d\nu \right) \cdot \int \varphi - P_L(\varphi) \, d\mathscr{L}(\nu) > -\infty. \end{aligned}$$

Portanto $\eta_\Psi \in \mathscr{M}_\sigma(\Psi)$ e novamente pelo Teorema 3.2, temos que a medida η_Ψ é o único estado de equilíbrio de Ψ. Consequentemente ν é o único estado de equilíbrio para (T, φ_ρ). Por (3.10), podemos definir a medida $\mathscr{L}(\nu)$ que pertence ao conjunto $\mathscr{M}_L(\sigma, W)$. Mostraremos que essa medida é o único estado de equilíbrio relativo para $P_L(\varphi)$.

Afirmamos que $P_G(\Psi) = 0$. De fato, uma vez que $\mathscr{L}(\nu) \in \mathscr{M}_L(\sigma, W)$ temos

$$h_{\mathscr{L}(\nu)}(\sigma) + \int \varphi \, d\mathscr{L}(\nu) - P_L(\varphi) \leq 0.$$

Então

$$\begin{aligned} P_G(\Psi) &= h_{\eta_\Psi}(\sigma) + \int \Psi \, d\eta_\Psi \\ &= \left(\int \rho \, d\nu\right) \cdot \left(h_{\mathscr{L}(\nu)}(\sigma) + \int \varphi - P_L(\varphi) \, d\mathscr{L}(\nu)\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, dado um $\delta > 0$ existe uma medida $\mu_\delta \in \mathscr{M}_L(W)$ tal que

$$h_{\mu_\delta}(\sigma) + \int \varphi \, d\mu_\delta - P_L(\varphi) + \delta \geq 0. \tag{3.11}$$

Consideramos também as medidas associadas $\nu_\delta = \mathscr{L}^{-1}(\mu_\delta)$. Assim, por (3.12) e também pelo fato do potencial Ψ ser recorrente positivo, para um δ suficientemente pequeno ocorre

$$\begin{aligned} P_G(\Psi_\delta) &\geq h_{\nu_\delta}(T) + \int \varphi_\rho(w) + \delta\rho(w) \, d\nu_\delta \\ &= \left(\int \rho \, d\nu\right) \cdot \left(h_{\mu_\delta}(\sigma) + \int \varphi - P_L(\varphi) \, d\mu_\delta + \delta\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Por continuidade de $P_G(\Psi_\delta)$ em função de δ, obtemos $P_G(\Psi) \geq 0$, estando assim provado a afirmação.

Portanto, nós temos

$$P_G(\Psi) = \left(\int \rho \, d\nu\right) \cdot \left(h_{\mathscr{L}(\nu)}(\sigma) + \int \varphi - P_L(\varphi) \, d\mathscr{L}(\nu)\right) = 0,$$

e sendo $\int \rho \, d\nu$ não nulo, concluímos que

$$P_L(\varphi) = h_{\mathscr{L}(\nu)}(\sigma) + \int \varphi d\mathscr{L}(\nu).$$

Assim, verificamos que a medida $\mathscr{L}(\nu)$ é um estado de equilíbrio relativo. A unicidade decorre da unicidade do estado de equilíbrio η_Ψ.

Para completar a prova do teorema, resta somente verificar as propriedades estatísticas, e para isso precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2 (Cauda Exponencial)**.** *Existem constantes K_0 e $\theta \in (0,1)$ tais que para todo $m > 0$,*

$$\nu\left(\{w \in \Sigma_\alpha; \rho(w) \geq m\}\right) \leq K_0 \theta^m.$$

Demonstração. Usando (3.9), para $n > 1$ e $\Sigma_n = \cup_{i=1}^{r_n} D_i^n$ nós temos

$$K^{-1} \leq \frac{\nu(D_i^n)}{e^{(\varphi_\rho(w) - nP)}} \leq K,$$

onde $w \in D_i^n$.

Considere as constantes ε_0 do Lema 3.7 e $s = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \theta^i$ tal que $\theta = e^{-\varepsilon_0}$, obtemos

$$\begin{aligned} \nu(\{w \in \Sigma_\alpha; \rho(w) \geq m\}) &= \sum_{n \geq m}^{\infty} \sum_{i=1}^{r_n} \nu(D_i^n) \\ &\leq \frac{K}{e^P} \sum_{n \geq m}^{\infty} r_n \sup_{w \in D_i^n} e^{\varphi_\rho(w)} \\ &\leq K_0 \theta^m, \end{aligned}$$

para $K_0 = \frac{K}{e^P} s$ e todo $m > 1$. □

Portanto segue do Lema 3.2 e dos resultados de [28] (Teorema 2 e Teorema 3) que a medida $\mathscr{L}(\nu)$ tem decaimento exponencial de correlação e satisfaz o (TCL) com respeito a classe de funções cujas induzidas em Σ_α são limitadas e localmente Hölder contínuas. Isso finaliza a prova do teorema. □

Prova do Teorema Principal. Pelo Teorema 2.2, temos que todo potencial contínuo ϕ admite um estado de equilíbrio. Suponha que μ_1 e μ_2 sejam estados de equilíbrio ergódicos para F, então mostraremos que $\mu_1 = \mu_2$.

Observe que pela hipótese (C_2), a medida de Dirac δ_Q não pode ser um estado de equilíbrio para ϕ, pois

$$\phi(Q) \leq \sup \frac{\phi_n}{n} < P_{top}(\phi).$$

Similarmente, temos também que a medida δ_P não é um estado de equilíbrio para ϕ.

Pelo Lema 2.1 sabemos que as medidas δ_Q e δ_P são as únicas medidas invariantes ergódicas que dão medida zero ao conjunto R_1, então $\mu_1(R_1)$ e $\mu_2(R_1)$ são positivos. Fixemos $\alpha > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\mu_i(R_1) > \alpha$ para $i = 1, 2$.

Considere o esquema induzido (ρ, Σ_α), onde $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_{11}$ é o subconjunto das sequências com frequência de símbolos 1's pelo menos α, como definido em (3.1), e a torre associada W como em (3.2).

Para cada $i = 1, 2$, denotamos por ν_i a medida push-forward de μ_i por h a semi-conjugação definida na Seção 1., ou seja, a medida definida para todo boreleano $A \subset \Sigma_{11}$ por

$$\nu_i(A) = \mu_i(h^{-1}(A)).$$

Note que a medida ν_i é invariante e ergódica para σ e satisfaz

$$\nu_i([1]) = \mu_i(R_1) > \alpha > 0. \tag{3.12}$$

Uma vez que W é um subconjunto σ-invariante, pela ergodicidade de ν_i e por (3.12) temos $\nu_i(W) = 1$. Aplicando o Lema 3.1 para $A = [1]$, concluímos que a medida ν_i é levantável e além disso, é um estado de equilíbrio relativo para $\varphi = h_*\phi$. Por outro lado, o potencial ϕ satisfaz a condição (C_1) e (C_2), logo φ satisfaz as condições (P_1) e (P_2), então pelo Teorema 3.4 existe um único estado de equilíbrio relativo, portanto $\nu_1 = \nu_2$ e consequentemente concluímos que $\mu_1 = \mu_2$. Finalizando assim a demonstração do teorema. □

3.4 Exemplos de potenciais admissíveis

Nesta seção apresentamos uma família de exemplos de potenciais admissíveis com respeito à F. Esses potenciais não possuem variação pequena (não satisfaz a Condição (2.1)).

Iniciaremos com algumas definições e resultados que serão necessários para a verificação das condições (C_1) e (C_2).

Seja n um inteiro positivo, nós denotamos as palavras

$$b_n = \underbrace{0...0}_{n \text{ vezes}}1.$$

Dados $w \in [1]$ e um inteiro positivo i, definimos o *i-segmento* de w por

$$[w]_i := w_0 w_1 ... w_i.$$

Se $\sigma^i(w) \in [1]$, então o i-segmento de w é uma concatenação de palavras b_n, isto é,

$$1 b_{n_1} b_{n_2} ... b_{n_r}.$$

Nós denotamos a quantidade de b_n no i-segmento de w por $a(w,i,n)$. Note que se uma sequência w está em Σ_α, então ele é composta por concatenações de infinitas palavras do tipo b_n.

Lema 3.3. *Considere uma constante $\tau < \alpha$ e o inteiro positivo $N = \lfloor \frac{1}{\alpha - \tau} \rfloor$. Então dada uma sequência $w \in \Sigma_i$ nós temos*

$$1 + \sum_{k=1}^{N-1} a(w,i,k) \geq \tau(i+1). \tag{3.13}$$

Demonstração. Supomos que (3.13) não ocorra, ou seja,

$$1 + \sum_{k=1}^{N-1} a(w,i,k) < \tau(i+1). \tag{3.14}$$

Note que o número de dígitos 1 em $[w]_i$ é dado por

$$1 + \sum_{k=1}^{s} a(w,i,k),$$

onde s é o maior dos n tais que b_n compõe o i-segmento de w, com a possibilidade de alguns dos termos serem nulos.

Uma vez que $\rho(w) = i$ nós temos

$$1 + \sum_{k=1}^{s} a(w,i,k) > \alpha(i+1). \tag{3.15}$$

Por outro lado

$$1 + \sum_{k=1}^{s} (k+1) a(w,i,k) = (i+1). \tag{3.16}$$

Isso implica que

$$a(w,i,N) + a(w,i,N+1) + ... + a(w,i,s) > (\alpha - \tau)(i+1).$$

Portanto nós concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{s} (k+1) a(w,i,k) &\geq (N+1) \left(\sum_{k=N}^{s} a(w,i,k) \right) \\ &> (N+1)(\alpha - \tau)(i+1) \\ &> (i+1). \end{aligned}$$

O que contradiz (3.16). $\square$

Uma interpretação do lema anterior pode ser :

Se i é um α-retorno de uma sequência w ao cilindro $[1]$, então as palavras $b_1,...,b_N$ representam pelo menos uma proporção τi de $[w]_i$.

A aplicação F é semi-conjugada ao subshift $\sigma : \Sigma_{11} \to \Sigma_{11}$ e além disso a sua dinâmica central é determinada pela funções unidimensionais

$$f_0(y) = f(y) \qquad \text{e} \qquad f_1(y) = \sigma(1-y),$$

para $y \in I = [0,1]$. Então podemos representar F por um *skew-product* $\tilde{F} : \Sigma_{11} \times I \to \Sigma_{11} \times I$ dado por

$$\tilde{F}(w,y) = (\sigma(w), f_{w_0}(y)).$$

De fato, basta considerar a aplicação $\widetilde{\Pi} : \Lambda \to \Sigma_{11} \times I$, cuja imagem de cada $X = (x_s, x_c, x_u)$ seja

$$\widetilde{\Pi}(X) = (h(X), x_c).$$

A continuidade de $\widetilde{\Pi}$ segue do fato da aplicação h ser contínua. Além disso, podemos verificar que $\widetilde{\Pi}$ é uma bijeção sobre sua imagem. Portanto, a análise do comportamento de F pode se reduzir ao contexto unidimensional, através do sistema iterado de funções (SIF) gerado por $\{f_0, f_1\}$.

Dada um ponto $X = (x,y,z)$ em Λ tal que $h(X) = w$, usamos a seguinte notação

$$\Phi_{[w]_n}(y) = f_{w_{n-1}} \circ ... \circ f_{w_0}(y),$$

e também o caso inverso

$$\Phi_{[w]_n^-}(y) = f_{w_{-1}} \circ ... \circ f_{w_{-n}}(y).$$

Usamos o próximo lema para obter contração não-uniforme.

Lema 3.4. *([12], Lema 3.1) Seja $w \in \Sigma_{11}^+$ uma sequência com infinitos dígitos 1. Supomos também que $w_0 = 1$. Considere $n_0, n_1, ...$ as posições sucessivas do símbolo 1 em w. Então, existem uma sequência de números reais positivos $(\delta_j)_{j\geq 0}$ e uma constante $C > 0$ tais que*

(i) C depende apenas de n_0

(ii) Cada δ_j depende somente dos n_i, para $i \leq j$ e pertencem ao intervalo $[0,\sigma]$

(iii) Para todo $i > 0$ e todo $y \in [0,1]$,

$$|\Phi'_{[w]_{n_i}}(y)| \leq C_{n_0} \prod_{j=1}^{i-1} \theta_j,$$

onde $\theta_j = \frac{1-\frac{\delta_j}{\sigma}}{1-\delta_j}$.

Observação 3.1. *Para obter o Lema 3.4 os autores fazem o uso das contrações obtidas dos blocos 0...01. Uma vez que os fatores do produto que aparece no item (iii) do lema são todos estritamente menores que 1, eles mostram que caso alguma palavra b_n apareça k vezes em um n_i-segmento, então temos*

$$|\Phi'_{[w]_{n_i}}(y)| \leq C_{n_0}\theta^k,$$

onde a constate θ depende somente da palavra b_n.

Dados os pontos $X,Y \in \Lambda$ nós utilizamos a seguinte distância

$$||X-Y|| = ||X-Y||_s + ||X-Y||_c + ||X-Y||_u, \tag{3.17}$$

onde e $||X-Y||_*$ é a distância com respeito à direção $* \in \{s,c,u\}$.

Pelo comportamento hiperbólico da aplicação F nas direções estável e instável e também pelo uso da distância (3.17), dados pontos $X,Y \in \Lambda$ tais que $h(X),h(Y) \in [w_{-n+1}...w_{n-1}]$, dessa maneira concluímos

$$||X-Y||_s \leq \lambda^n \qquad \text{e} \qquad ||X-Y||_u \leq \beta^{-n} \tag{3.18}$$

onde λ e β são respectivamente as maiores taxas de contração e expansão de F.

Dado $c_0 \in (5/6,1)$, considere o *conjunto de nível* c_0

$$\mathscr{Q}_{c_0} = \{X=(x,y,z) \in R\,;\, z \leq c_0\}.$$

Note que fixado um nível c_0, existe um $m = m(c_0)$ tal que para todo $X \in \mathscr{Q}_{c_0} \cap R_1$ temos que $h(X) \in [1\underbrace{0...0}_{k}]$ para algum $k \geq m$. De fato, basta considerar

$$m = \min\{k\,;\, \beta^k c_0 > 1/6\}.$$

Seja $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo e constante em $\mathscr{Q}_{c_0}$, mostraremos a seguir que ϕ satisfaz a Condição (C_1).

Dadas as sequências $\hat{w}$ e $\hat{v}$ em um cilindro $[D^{l_{-n+1}}_{i_{-n+1}}...D^{l_0}_{i_0}...D^{l_{n-1}}_{i_{n-1}}] \subset S^{\mathbb{Z}}$ e suas respectivas projeções w e v por Π em Σ_α, que pertencem ao conjunto

$$D^{l_0}_{i_0} = [\overbrace{\overbrace{10...01}^{n_1}...10..01}^{n_r}],$$

onde os números n_1, ..., n_r são as posições do dígito 1.
Sejam os pontos $X_0 = h^{-1}(w)$ e $Y_0 = h^{-1}(v)$ em Λ e n_{r_k} o k-ésimo retorno dos pontos X_0 e Y_0 ao conjunto $R_1 - \mathscr{Q}_{c_0}$, então temos

$$\begin{aligned} |\Psi(\hat{w}) - \Psi(\hat{v})| &= |\varphi_\rho(w) - \varphi_\rho(v)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{l_0-1} |\phi(F^i(X_0)) - \phi(F^k(Y_0))| \\ &= C\sum_{k=1}^{m} ||F^{n_{r_k}}(X_0)) - F^{n_{r_k}}(Y_0))||^{\xi}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde m é o número de iterados que o pontos X_0 e Y_0 que estão em $R_1 - \mathscr{Q}_{c_0}$. Note que as parcelas da soma relacionadas aos pontos que estão em $\mathscr{Q}_{c_0}$ são nulas, pois ϕ é constante neste conjunto. Além disso, pelo observado em (3.18), para a verificação da propriedade Hölder em (3.19), é suficiente analisar a direção central.

Considere $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} l_{-k}$, pelo Lema 3.3 temos que em cada segmento $[w]_{s_n}$ as palavras $b_1, b_2, ..., b_N$ aparecem com frequência pelo menos τs_n. Dessa maneira, usando o Lema 3.4 e a Observação 3.1, nós concluímos

$$|\Phi'_{[w]^-_{s_n}}(y)| \leq C_N \theta^n, \tag{3.20}$$

para $y \in [0,1]$ e constantes $C_N > 0$ e $\theta \in (0,1)$ que dependem apenas das palavras $b_1, b_2, ..., b_N$. Então, sejam $X^\star$ e $Y^\star$ os pontos em Λ tais que $F^{s_n}(X^\star) = X_0$ e $F^{s_n}(Y^\star) = Y_0$, usando o Lema 3.4 e a Desigualdade (3.20) nós temos:

$$\begin{aligned}
||F^{n_{r_k}}(X_0) - F^{n_{r_k}}(Y_0)||_c &= ||F^{s_n + n_{r_k}}(X^\star) - F^{s_n + n_{r_k}}(Y^\star)||_c \\
&\leq |\Phi'_{[\sigma^{n_{r_k}}(w)]^-_{s_n + n_{r_k}}}| \\
&\leq C_N \theta^n \prod_{j=1}^{r_k} \theta_{n_j} \\
&\leq C_N \theta^n \gamma^k,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $1 \leq k \leq m$ e a constante $\gamma \in (0,1)$ depende apenas da palavra b_m. Portanto, usando (3.21) na expressão (3.19), concluímos que

$$|\Psi(\hat{w}) - \Psi(\hat{v})| \leq \tilde{C} \Theta^n,$$

onde $\Theta = \max\{\lambda, \beta^{-1}, \theta\}$ e $\tilde{C} = C.C_N.\Upsilon$, para $\Upsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k$. Isso mostra que o potencial ϕ satisfaz a condição (C_1).

Suponha que o potencial ϕ também satisfaz:

$$\sup_{X \in \Lambda} \phi = \phi(Q) \qquad \text{e} \qquad \inf_{X \in \Lambda} \phi = -\kappa,$$

para alguma constante $\kappa > 0$.

Considere a família de potenciais $\phi_t : \Lambda \to \mathbb{R}$ dados por

$$\phi_t(X) = t\phi(X),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Usando os mesmos argumentos feitos anteriormente, podemos mostrar que ϕ_t satisfaz a condição (C_1) para todo $t \in \mathbb{R}$.

Denotamos a pressão topológica de ϕ_t por $P(t)$. Note que a função $t \mapsto P(t)$ é convexa, logo contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que $h_{top}(F) > 0$.

Considere o conjunto

$$\varDelta = \{\vartheta;\ t \in [0,\vartheta)\,,P(t) > t\phi(Q)\},$$

que é não vazio, pois $P_{top}(0) > 0$. Seja t_1 o supremo de Δ, que pode ser obtido por

$$t_1 = \sup_{\substack{\mu\in\mathscr{M}_F(\Lambda)\\ \mu\neq\delta_Q}} \left\{ \frac{h_\mu(F)}{\phi(Q) - \int \phi d\mu} \right\}.$$

Como a medida de máxima entropia de F não é a medida de Dirac δ_Q, temos que $t_1 > \frac{h_{top}(F)}{\phi(Q)-\int \phi\, d\mu_{max}}$, logo $t_1 > \frac{h_{top}(F)}{\phi(Q)+\kappa}$.

Pelas suposições sobre o potencial ϕ temos:

$$Var(\phi_t) = t(\kappa + \phi(Q)).$$

Dessa maneira, consideramos

$$t_0 = \sup\left\{ t\,;\ Var(\phi_t) < \frac{h_{top}(F)}{2} \right\}.$$

Portanto, para todo $t \in (t_0\,, t_1)$ o potencial ϕ_t satisfaz as condições (C_1) e (C_2) e além disso, temos $Var(\phi_t) \geq \frac{h_{top}(F)}{2}$.

4 OUTRAS FERRADURAS

Neste capítulo estudaremos as medidas de máxima entropia para uma família de ferraduras chamadas de *porco-espinho*, que foram introduzidas em [8]. As ferraduras parcialmente hiperbólicas que consideramos nos capítulos anteriores são essencialmente hiperbólicas, pois suportam apenas medidas ergódicas hiperbólicas, a seguir iremos trabalhar com ferraduras que suportam medidas não hiperbólicas.

4.1 Ferraduras porco-espinho

Considere uma família a 1-parâmetro de *skew-products* sobre um shift completo de dois símbolos (σ, Σ_2) com fibras unidimensionais

$$F_t : \Sigma_2 \times \mathbb{R} \to \Sigma_2 \times \mathbb{R}, \qquad (w,x) \mapsto (\sigma(w), f_{w_0,t}(x)). \tag{4.1}$$

As funções $f_{0,t} = f_0$ e $f_{1,t}$ que agem nas fibras devem satisfazer:

(I) f_0 é uma função C^2, côncava, crescente e que possui dois pontos fixos hiperbólicos 0 (repulsor) e 1 (atrator) e não depende de t.

(II) As constantes $\beta = f_0^{'}(0) > 1$ e $\lambda = f_0^{'}(1) < 1$ são tais que

$$\frac{\lambda^2(1-\lambda)}{\beta(1-\beta^{-1})} > 1.$$

(III) $f_{1,t}(x)$ é a função afim contrativa e que reverte orientação, dada por $f_{1,t} = t(1-x)$ e que satisfaz a condição de ciclo, isto é, $f_{1,t}(1) = 0$.

Considere o *skew-product* F_t restrito ao conjunto maximal invariante

$$\Lambda_t = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_t^n(\Sigma_2 \times \mathbb{R}).$$

Vejamos a definição da ferradura que estudaremos

Definição 4.1 (Porco-espinho)**.** *Dado um skew-product $F_t : \Sigma_2 \times \mathbb{R} \to \Sigma_2 \times \mathbb{R}$, um conjunto compacto Λ é uma ferradura porco-espinho (ou simplesmente porco-espinho) se é topologicamente transitivo e existe uma semi-conjugação $\Pi_t : \Lambda_t \to \Sigma_2$, tal que $\Pi^{-1}(w)$ é não trivial para uma quantidade infinita e não enumerável de $w \in \Sigma_2$ e também $\Pi^{-1}(w)$ é um único ponto para uma quantidade infinita e não enumerável de $w \in \Sigma_2$.*

Para cada $w \in \Sigma_2$, o conjunto $\Pi^{-1}(w)$ é chamado *espinho* de w. Dizemos que um espino é *não trivial* se não é um único ponto, caso contrário é chamado *trivial*. O conjunto Σ_2 é decomposto em dois subconjuntos invariantes $\Sigma_{2,t}^{non}$ e $\Sigma_{2,t}^{triv}$ consistindo das sequências com espinhos não triviais e triviais respectivamente.
Pela definição de F_t os espinhos $\Pi_t^{-1}(w)$, ou são um único ponto ou segmentos fechados de [0,1], ou seja, $\Pi_t^{-1}(w) = (w, x_{w,t})$ ou então $\Pi_t^{-1}(w) = \{w\} \times I_{w,t}$ onde

$$I_{w,t} = \{x \in [0,1];\ (f_{w_{-i},t}^{-1} \circ \ldots \circ f_{w_{-1},t}^{-1})(x) \in [0,1],\ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Em [8], considerando os *skew-products* F_t como em (4.1) e com as funções f_0 e $f_{1,t}$ satisfazendo as condições (I) , (II) e (III), foi mostrado que os conjuntos Λ_t são ferraduras porco-espinho, com as semi-conjugações são dadas por $\Pi_t(w,x) = w$, além disso eles provam que os subconjuntos $\Sigma_{2,t}^{non}$ são não-enumeráveis e densos em Σ_2, e que os subconjuntos $\Sigma_{2,t}^{triv}$ são residuais em Σ_2. Essas aplicações possuem um comportamento parcialmente hiperbólico, pois a parte hiperbólica é representada pelo dinâmica simbólica e a parte central, pelo sistema iterado de funções gerado pelas funções fibradas f_0 e $f_{1,t}$, que fazem uma mistura de comportamento contrativo e expansor. Além disso, como os *skew-products* possuem fibras unidimensionais, então admitem estados de equilíbrio para potenciais contínuos (veja [7] Corolário 1.5). Em particular, admitem medidas de máxima entropia. No entanto a unicidade não ocorre em geral (veja [8], Proposição 5.6).

A seguir veremos que essas ferraduras admitem uma única medida de máxima entropia, e para isso precisamos de um resultado com respeito às fibras do *skew-product*.

Sejam Σ_2 o espaço de sequências e $\mathscr{B}$ a σ-álgebra gerada pelos seus cilindros. Nesse espaço temos a medida de Bernoulli $\mathfrak{b}_p$ para $p \in [0,1]$, que dá peso p ao símbolo 0 e $(1-p)$ para 1. Em [10] com respeito ao espaço de medida $(\Sigma_2, \mathscr{B}, \mathfrak{b}_{\frac{1}{2}})$ é mostrado que quase todo sequência tem espinho trivial.

Teorema 4.1 ([10], Teorema 2)**.** *Seja a família $(F_t)_{t\in[0,1]}$ descrita acima. Então*

$$\mathfrak{b}_{\frac{1}{2}}\left(\Sigma_{2,t}^{triv}\right) = 1 \qquad \textit{para todo } \ t \in (0,1) \quad \textit{e} \qquad \mathfrak{b}_{\frac{1}{2}}\left(\bigcap_{t\in(0,\beta^{-1})} \Sigma_{2,t}^{triv}\right) = 1.$$

Mostraremos que as ferraduras acima admitem uma única medida de máxima entropia.

Teorema 4.2. *A família de skew-products $(F_t)_{t\in[0,1]}$ admite uma única medida de máxima entropia.*

Demonstração. Uma vez que o shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ admite uma única medida de máxima entropia, que no caso é a medida de Bernoulli $\mathfrak{b}_{\frac{1}{2}}$, usaremos a unicidade da medida de Bernoulli junto com as propriedades da dinâmica nas fibras para mostrar que as ferraduras porcupine-like também admitem uma única medida de máxima entropia.

Seja ν uma medida qualquer em $\mathscr{M}_{F_t}(\Lambda_t)$ e sua projeção $\hat{\nu} = \nu \circ \Pi_t^{-1}$ ($\hat{\nu}$ é obtida pelo teorema da desintegração de Rokhlin). O princípio variacional de Ledrappier-Walters (ver em [14]) garante que

$$\sup_{\nu : \Pi_* \nu = \hat{\nu}} h_\nu(F_t) = h_{\hat{\nu}}(\sigma) + \int_{\Sigma_2} h(F_t, \Pi^{-1}(w))\, d\hat{\nu},$$

então

$$h_\nu(F_t) \leq h_{\hat{\nu}}(\sigma) + \int_{\Sigma_2} h(F_t, \Pi^{-1}(w))\, d\hat{\nu}.$$

Como um espinho $\Pi^{-1}(w)$ ou é um único ponto ou um subintervalo fechado em [0,1], temos que $h(F_t, \Pi^{-1}(w)) = 0$ para qualquer $w \in \Sigma_2$, então $h_\nu(F_t) \leq h_{\hat{\nu}}(\sigma)$. Por outro lado, sendo os sistemas F_t e σ semi-conjugados, concluímos que $h_\nu(F_t) = h_{\hat{\nu}}(\sigma)$.

Uma vez que os argumento acima são válidos para qualquer medida ν F_t-invariante, concluímos que $h_{top}(F) = h_{top}(\sigma)$. Dessa forma uma medida $\mu \in \mathscr{M}_{F_t}(\Lambda_t)$ tal que $\mathfrak{b}_{\frac{1}{2}} = \mu \circ \Pi_t^{-1}$ é de máxima entropia para F_t.

Note que, dado um ponto $X \in \Lambda_t$ tal que $[X] = \{X\}$ então $h(X) \in \Sigma_{2,t}^{trv}$, logo pelo Teorema 4.1 temos

$$\mu\,\{X \in \Lambda_t; [X] = \{X\}\} = 1.$$

Portanto usando os mesmos argumentos de [3] nós obtemos que μ é a única medida de máxima entropia de F_t. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ARBIETRO, A., PRUDENTE, L., *Uniqueness of equilibrium states for some partially hyperbolic horseshoes*, **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, *32* (2012), pp 27-40. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 8.

[2] BOWEN, R. *equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, **Lecture Notes in Mathematics** , vol. *470*, Springer-Verlag (1975). Citado 2 vezes nas páginas 3 e 8.

[3] BUZZI, J., FISHER, T., SAMBARINO, M., VASQUEZ, C., *Maximal entropy measures for certain partially hyperbolic, derived from Anosov systems*, to appear in **Ergodic Theory Dynamical Systems**. Citado na página 28.

[4] CASTRO, A., NASCIMENTO, T., *Statistical properties of the maximal entropy measure for partially hyperbolic attractors* , **Ergodic Theory and Dynamical Systems**,(2016), pp 1-42. Citado na página 2.

[5] CLIMENHAGA, V., FISHER, T., THOMPSON, J., *Unique equilibrium states for the robustly transitive diffeomorphisms of Mañé and Bonnati-Viana*, preprint arXiv:1505.06371v2. Citado na página 2.

[6] CRISOSTOMO, J., TAHZIBI, T., *Equilibrium states for partially hyperbolic diffeomorphisms with hyperbolic linear part*, Preprint Citado na página 2.

[7] DÍAZ, L., FISHER, T., *Symbolic extensions for partially hyperbolic diffeomorphisms*, **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, *29* (2011), 1419-1441. Citado na página 27.

[8] DÍAZ, L., GELFERT K., *Porcupine-like horseshoes: transitivity, Lyapunov Spectrum, and phase transitions*, **Fund. Math. Systems**, *216* (2012), pp 55-100. Citado 5 vezes nas páginas 8, 9, 3, 26 e 27.

[9] DÍAZ, L ., HORITA, V., RIOS, I., SAMBARINO, M., *Destroying horseshoes via heterodimensional cycles: generating bifurcations inside homoclinic classes*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, *29* (2009), pp 433-474. Citado 6 vezes nas páginas 8, 9, 2, 3, 4 e 5.

[10] DÍAZ, L., MARCARINI, T., *Generation of spines in porcupine-like horseshoes*, **Nonlinearity** *28* (2015), pp 4249-4279. Citado na página 27.

[11] GODIN, *On the central limit theorem for stationary processes*, **Akademi Nauk SSSR**, *188:4* (1969), pp 739-741. Citado na página 16.

[12] LEPLAIDEUR, R., OLIVEIRA, K., RIOS, I., *Equilibrium States for partially hyperbolic horseshoes*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, *31* (2011), pp 179-195. Citado 5 vezes nas páginas 2, 6, 7, 11 e 22.

[13] LI, H., RIVERA-LETELIER, J.*Equilibrium States of Weakly Hyperbolic One-Dimensional Maps for Hölder Potentials*, **Commun. Math. Phys.**, *31* (2011), pp 328-397. Citado na página 2.

[14] LEDRAPPIER, F., WALTER, P., *A relativised variational principle for continuous transformations*, **J. London Math. Soc.**, *16* (1987), pp 568-576. Citado na página 28.

[15] MELO, W., STRIEN, S., *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Belrim, 1993. Citado na página 2.

[16] OLIVEIRA, K., VIANA M., *Fundamentos da teoria ergódica*, Sociedade Brasileira de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, (2008) Citado na página 10.

[17] OLIVEIRA, K., VIANA M., *Thermodynamical formalism for robust classes of potentials and nonuniformly hyperbolic maps*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, *28* (2008), pp 501-533. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.

[18] PESIN, Y., SENTI, S., *Equilibrium measures for maps with inducing schemes*, **J. Mod. Dyn.**, 2(3) (2008), pp 397-430. Citado na página 13.

[19] PESIN, Y., SENTI, S., ZHANG, K.,*Lifting measures to inducing schemess*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, *28* (2008), pp 553-574. Citado na página 13.

[20] PESIN, Y., SENTI, S., ZHANG, K., *Equilibrium states for hyperbolic potentials*, preprint, arXiv:1403.2989v2 Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

[21] RAMOS, V., SIQUEIRA, J., *On Equilibrium States for Partially Hyperbolic Horseshoes: Uniqueness and Statistical Properties*, **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, New Series, (2017), pp 1-29. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.

[22] RAMOS, V. , VIANA, M., *Equilibrium states for hyperbolic potentials*, **Nonlinearity**, *30* (2017), pp 825. Citado na página 2.

[23] RIOS, I., SIQUEIRA, J., *On equilibrium state for partially hyperbolic horseshoes*, Preprint ArXiv:1505.07742v1. Citado 4 vezes nas páginas 2, 3, 8 e 9.

[24] SARIG, O., *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, **Ergodic Theory Dynam. Systems**, *19* (1999), pp 1565-1593. Citado 3 vezes nas páginas 2, 14 e 15.

[25] SARIG, O., *Characterization of the existence of Gibbs measure for countable Markov shift*, **Proc of AMS**, *131:6* (2003), pp 1751-1758. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

[26] SARIG, O., *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, **Proc. of Symposia in Pure Math**, *89* (2015), pp 81-117 1751-1758. Citado na página 16.

[27] URES, R., *Intrinsic ergodicity of partially hyperbolic diffeomorphisms with a hyperbolic linear part* **Proc. Amer. Math. Soc.** *140* (2012), pp 1973-1985 Citado na página 2.

[28] YOUNG, L-S., *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, **Ann. of Math.** (2), *147(3)* (1998), pp 585-650. Citado na página 20.

[29] ZWEIMÜLLER, R., *Invariant measures for general(ized) induced transformations*, **Proc. Amer.Math.Soc.** , *133* (2005), pp 2283-2295(electronic). Citado na página 13.