

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
CENTRO DE TECNOLOGIA

ROÉSIO OLIVEIRA SANTOS

**MODELAGEM DE TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS
CONSIDERANDO EFEITOS DE TEMPERATURA E FALHAS**

Maceió

2016

ROÉSIO OLIVEIRA SANTOS

MODELAGEM DE TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS
CONSIDERANDO EFEITOS DE TEMPERATURA E FALHAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti
Marques

Maceió

2016

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

S237m Santos, Roésio Oliveira.
Modelagem dos tubos de materiais compósitos laminados considerando efeitos de temperatura e falhas / Roésio Oliveira Santos. – 2016.
122 f. : il.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 116-120.

1. Materiais compósitos poliméricos. 2. Tubos laminados. 3. Modelagem analítica. 4. Falhas termomecânicas. 5. Ações termomecânicas. I. Título.

CDU: 620.173.24: 536.495



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC



**MODELAGEM DE TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS
CONSIDERANDO EFEITOS DE TEMPERATURA E FALHAS**

ROÉSIO OLIVEIRA SANTOS

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 04 do mês de novembro do ano de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques
Orientador – PPGEC/UFAL

Prof. Dr. Wayne Santos de Assis
(Avaliador Interno - PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante
(Avaliador Interno – PPGEC/UFAL)

Prof. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim
(Avaliador Externo – UFS)

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Cícero e Aldenice, e aos meus irmãos, Roumerito e Rafael, por todo apoio e amor incondicional.

Ao professor Severino Marques, por toda a ajuda, orientação e ensinamentos durante toda a graduação e mestrado. Obrigado pela paciência e diversas horas dedicadas a reuniões.

A todos os professores que contribuíram para esse momento.

A FAPEAL pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

Aos meus amigos pelos momentos de lazer durante essa caminhada.

E a Deus, por todas as minhas conquistas durante a vida.

RESUMO

Nas últimas décadas, houve um grande crescimento na aplicação de materiais compósitos reforçados por fibras em diversos setores, com destaque para os segmentos aeronáutico, automotivo, construção civil e de estruturas offshore. Como os referidos compósitos apresentam relações rigidez/peso e resistência/peso elevadas, além de outras características interessantes, em comparação com outros materiais, eles têm sido cada vez mais utilizados em substituição aos materiais convencionais. O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um estudo sobre tubos de materiais compósitos poliméricos laminados submetidos a cargas termomecânicas. As lâminas são constituídas por uma matriz polimérica envolvendo fibras unidirecionais longas de reforço. As paredes dos tubos estudadas apresentam diferentes esquemas de laminação, podendo ser constituídas por diferentes materiais. As análises são feitas através de formulações analíticas que permitem a obtenção dos deslocamentos, tensões e deformações, assim como a verificação de falhas nas lâminas. Para a análise de falhas são empregados diferentes modelos analíticos empíricos e semiempíricos. Efeitos de cargas termomecânicas, tais como pressão interna, flexão e de variação de temperatura são considerados. Os casos analisados consistem de tubos com paredes constituídas por várias camadas com diferentes direções de fibras, alguns incluindo lâminas de areia impregnada com resina. Os resultados encontrados também são comparados com outros disponíveis na literatura. Verifica-se que o critério de Tsai-Wu fornece resultados superiores aos dos outros dois modelos de falha utilizados no trabalho, principalmente para ângulos superiores a 50° . Além disso, esse critério obteve resultado inconsistente na análise dos efeitos de temperatura para o laminado $[+55^\circ/-55^\circ]_2$.

Palavras-chave: Materiais compósitos poliméricos. Tubos laminados. Modelagem analítica. Falhas. Ações termomecânicas.

ABSTRACT

In last decades, there has been a relevant growth in the application of composite materials reinforced by fibers in the several industries, especially the aeronautical, automotive, construction and offshore structures segments. How the composites exhibit relationships stiffness/weight and resistance/high weight, and other interesting features compared with other materials, they have been increasingly used to replace conventional materials. The present work has as objective to develop a study about laminated polymeric composite tubes subjected to thermomechanical loads. The laminae are composed of polymeric matrix involving unidirectional long fiber reinforcement. The walls of the studied tubes present various lamination schemes and different constituent materials. The analyses are set by analytical formulations that permits obtaining the displacements, stresses and strains, as well as verification failures in the laminae. Different empirical and semi-empirical analytical models are used for failure analyses. Effects of thermomechanical loads, such as internal pressure, bending, and temperature changes are considered. The analyzed cases consist of tubes with walls comprised of several layers with different directions of fibers, some including laminae sand impregnated with resin. The results are also compared with other available in the literature. It is verified that the Tsai-Wu criterion provides superior results to the other two failure models used in the work, especially for angles greater than 50° . Moreover, this criterion obtained an inconsistent result in the analysis of the temperature effects for the laminae $[+55^\circ/-55^\circ]_2$.

Keywords: Polymeric composite materials. Laminates tubes. Analytical modeling. Failures. thermomechanical actions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Classificação dos materiais compósitos segundo os tipos de reforço.....	26
Figura 2- Etapas de fabricação de um material compósito.....	30
Figura 3- Esquema do processo de fabricação por laminação manual.....	31
Figura 4- Esquemática do processo de enrolamento filantar.	31
Figura 5- Processo de enrolamento por centrifugação.	32
Figura 6-Lâmina com os eixos nas direções principais.	33
Figura 7- Laminado multidirecional em relação a um sistema de referência global.....	34
Figura 8- Sequência de empilhamento.	34
Figura 9-Laje e viga de um viaduto reforçadas com materiais compósitos.	36
Figura 10 - Tubos de PRFV.....	37
Figura 11- Materiais compósitos em diferentes níveis de consideração e análise	38
Figura 12-Coordenadas locais e globais de um laminado.	39
Figura 13- Estado de tensões num ponto material do contínuo.....	40
Figura 14- Material ortotrópico com isotropia transversal.....	43
Figura 15-Sistema de coordenadas do laminado (x, y) e da lâmina (1, 2).	45
Figura 16- (a) Resposta longitudinal - Arranjo em paralelo, (b) Resposta transversal - Arranjo em série.....	49
Figura 17- Elemento bidimensional submetido à tensão na direção longitudinal.....	50
Figura 18-Elemento bidimensional submetido à tensão na direção transversal.....	51
Figura 19- Elemento bidimensional submetido à tensão de cisalhamento.....	52
Figura 20- Elemento Bidimensional submetido à tensão longitudinal.....	53
Figura 21- Exemplos de mecanismos de falha em compósitos reforçados com fibras.	56
Figura 22- Superfície de falha.	63
Figura 23-Tensões no plano de fratura e ângulo de fratura.	65
Figura 24- Caso geral de anisotropia.....	69
Figura 25-Tubo submetido a pressões interna e externas.....	72
Figura 26-Tubo submetido à força de tração.....	73
Figura 27-Tubo submetido a momento fletor nas extremidades.	74
Figura 28-Tubo compósito laminado em coordenadas cilíndricas.....	78
Figura 29- Sistema de coordenadas da lâmina (1, 2, 3) e sistema de coordenada cilíndrico (r, θ , z).....	82
Figura 30- Tubo laminado submetido à flexão.....	85

Figura 31- Representação proporcional das espessuras das camadas estimadas.....	92
Figura 32- Geometria do corpo de prova cilíndrico.	93
Figura 33- Pressões de falha experimentais e teóricas.	96
Figura 34-Pressões de falha para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna. ...	98
Figura 35-Tensões para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna.	99
Figura 36- Variação das tensões na parte interna do tubo em função do ângulo do laminado.	100
Figura 37- Deformações e deslocamento radial para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna.	100
Figura 38- Pressões de falha para diferentes raios interno (a) e quantidade de lâminas (b). .	101
Figura 39- Carga de falha de um tubo de Carbono/Epóxi submetido à flexão.	102
Figura 40-Tensões para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à carga de flexão.	103
Figura 41-Deformações e deslocamento radial para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à flexão.	103
Figura 42- Cargas de falha para diferentes raios interno (a) e quantidade de lâminas (b).	104
Figura 43- Variação das tensões para diferentes valores de raios internos.	105
Figura 44- Pressão de falha de um tubo de Carbono/Epóxi submetido carga termomecânica.	107
Figura 45- Tensões internas de um tubo de Carbono/Epóxi submetido à carga termomecânica.	107
Figura 46-Deformações e deslocamento radial para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à carga termomecânica.	108
Figura 47-Tensões para um tubo compósito com camadas de areia submetido à pressão interna.	109
Figura 48- Representação proporcional das espessuras das camadas estimadas.....	109
Figura 49- Deformações e deslocamento radial para um tubo compósito com camada de areia submetido à pressão interna.....	110
Figura 50- Pressão de falha para um tubo compósito com camadas de areia submetido à pressão interna.	111
Figura 51-Pressão de falha de um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna e carga termomecânica com diferentes frações volumétricas de fibras.	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Valores típicos de inclinações.	65
Tabela 2- Valores médios das espessuras de cada camada.	92
Tabela 3- Características geométricas dos tubos ensaiados.	93
Tabela 4- Propriedades mecânicas dos materiais.	94
Tabela 5- Pressões de falha experimentais e teóricas para tubos de PVC revestido por lâminas de Vidro-E/Epóxi.....	95
Tabela 6-Pressões de falha experimentais e teóricas para tubos compósitos com/sem liner plástico.....	96
Tabela 7- Propriedades mecânicas das lâminas.....	97
Tabela 8- Efeitos da temperatura nas propriedades mecânicas de um típico compósito de Carbono/Epóxi.....	106
Tabela 9- Propriedades termomecânicas da fibra de carbono (AS4) e da matriz epóxi (3501-6).....	112

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 3

σ_{ij}	Componentes de tensão
ε_{ij}	Componentes de deformação
C_{ijkl}	Componentes de rigidez
S_{ijkl}	Componentes de flexibilidade
W	Energia de deformação
C_{ij}	Coefficientes da Matriz constitutiva do material
S_{ij}	Coefficientes da matriz de flexibilidade
σ_i	Tensões normais na direção i
τ_{ij}	Tensões de cisalhamento no plano ij
ε_i	Deformações normais na direção i
γ_{ij}	Deformações angulares no plano ij
E_i	Módulo de elasticidade na direção i
G_{ij}	Módulo de cisalhamento no plano ij
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
T	Matriz de transformação
T^{-1}	Inversa da Matriz de transformação
T^t	Transposta da Matriz de transformação
σ^x	Matriz de tensão em relação ao eixo x

σ^1	Matriz de tensão em relação ao eixo 1
ε^x	Matriz de deformação em relação ao eixo x
ε^1	Matriz de deformação em relação ao eixo 1
\bar{C}	Matriz constitutiva efetiva do material
C	Matriz constitutiva do material
\bar{C}_{ij}	Coefficientes da matriz constitutiva efetiva do material
\bar{S}	Matriz de flexibilidade efetiva do material
S	Matriz de flexibilidade do material
$\varepsilon_{ij}^{(M)}$	Componente de deformação mecânica
$\varepsilon_{ij}^{(T)}$	Componente de deformação térmica
T_{ref}	Temperatura de referência
T_a	Temperatura arbitrária
α_{ij}	Coefficiente do tensor de dilatação térmica
ΔT	Variação de temperatura
f_{vi}	Fração de volume
P_c	Propriedade qualquer do compósito
P_i	Propriedade associada ao $i^{ésimo}$ constituinte
P_f	Propriedade das fibras
P_m	Propriedades da matriz
Σ	Somatório
f_f	Fração volumétrica de fibras

V_f	Volume de fibras
A_f	Área de fibra
f_m	Fração volumétrica de matriz
V_m	Volume de matriz
A_m	Área de matriz
V	Volume total
A	Área total
ΔL	Deformação Longitudinal
L	Largura
ε_{f1}	Deformação da fibra na direção 1
ε_{m1}	Deformação da matriz na direção 1
σ_{f1}	Tensão nas fibras na direção 1
σ_{m1}	Tensão na matriz na direção 1
E_f	Módulo de elasticidade da fibra
E_m	Módulo de elasticidade da matriz
σ_{f2}	Tensão nas fibras na direção 2
σ_{m2}	Tensões na matriz na direção 2
ε_{f2}	Deformação da fibra na direção 2
ε_{m2}	Deformação da matriz na direção 2
w	Comprimento
Δw	Deformação transversal

τ	Tensão cisalhante
τ_f	Tensão cisalhante nas fibras
τ_m	Tensão cisalhante na matriz
Δ	Deformação
γ_f	Deformação cisalhante nas fibras
γ_m	Deformação cisalhante na matriz
G_f	Módulo de cisalhamento da fibra
G_m	Módulo de cisalhamento da matriz
ν_f	Coefficiente de Poisson da fibra
ν_m	Coefficiente de Poisson da matriz
ξ	Fator de eficiência do reforço
α_1	Coefficiente de dilatação térmica na direção 1
α_2	Coefficiente de dilatação térmica na direção 2
α_f	Coefficiente de dilatação térmica da fibra
α_m	Coefficiente de dilatação térmica da matriz

CAPÍTULO 4

F_{1T}	Limite de resistência à tração na direção 1
F_{2T}	Limite de resistência à tração na direção 2
F_{1C}	Limite de resistência à compressão na direção 1
F_{2C}	Limite de resistência à compressão na direção 2

F_{12}	Limite de resistência ao cisalhamento no plano 1 – 2
ε_{1T}	Deformação de falha em tração na direção 1
ε_{2T}	Deformação de falha em tração na direção 2
ε_{1C}	Deformação de falha em compressão na direção 1
ε_{2C}	Deformação de falha em compressão na direção 2
γ_{12}	Deformação de cisalhamento de falha no plano 1 – 2
F_c	Fator de carga
σ_{yp}	Tensão de escoamento do material
ε_1	Deformação axial do compósito
$m_{\sigma f}$	Fator de fibras
R_{22}^A	Resistência do plano de ação contra a fratura devido à tensão cisalhante atuante neste plano
$p_{21}^{(+)}, p_{21}^{(-)}$ e $p_{22}^{(-)}$	Inclinações da superfície de falha
σ_{1D}	Valor de tensão para a degradação linear
τ_{12c}	Tensão cisalhante do ponto de transição da curva de fratura
θ_{fp}	Ângulo de falha

CAPÍTULO 5

R, Θ	Forças de volume
\bar{U}	Potencial associado às forças de volume
D	Deformação normal na direção z

$U(r, \theta)$, $V(r, \theta)$ e $W(r, \theta)$ Funções de integração

u_r Deslocamento radial

u_θ Deslocamento circunferencial

w Deslocamento longitudinal

u'_r , u'_θ e w' Deslocamentos de corpo rígido

g_k , g_{-k} , μ_2 e k Constantes de redução

Ψ Função de Airy

F Função de Tensão

k_1 , h , e N constantes de redução

r_i Raio interno

r_e Raio externo

P_i Pressão interna

P_e Pressão externa

P Carga axial

M Momento fletor

M_t Momento de torção

η , γ e K constantes de redução

\dot{q} Taxa de geração de energia interna

k_c Coeficiente de condução de calor

α Difusividade térmica

T_a Temperatura de distribuição arbitrária

T_{∞} Temperatura ambiente

T_f Temperatura do fluido

\bar{h}_i Coeficiente de transferência de calor por convecção médio interno

\bar{h}_e Coeficiente de transferência de calor por convecção médio externo

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	21
1.1 Objetivos	22
1.2 Justificativas	23
1.3 Metodologia	23
2 MATERIAIS COMPÓSITOS: CONSTITUINTES, PROCESSOS DE FABRICAÇÃO, E APLICAÇÕES	25
2.1 Materiais constituintes	25
2.1.1 Matriz	27
2.1.2 Reforço	28
2.2 Processo de fabricação	29
2.2.1 Laminação manual.....	30
2.2.2 Enrolamento filamentar	31
2.2.3 Enrolamento por centrifugação	32
2.2.4 Outros processos de fabricação	32
2.3 Lâmina e laminados	33
2.3.1 Esquemas de laminação.....	34
2.4 Aplicações	35
3 PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS DE UMA LÂMINA	38
3.1 Análise macromecânica de lâminas	39
3.1.1 Material Ortotrópico	42
3.1.2 Material Transversalmente Isotrópico	42
3.1.3 Relações entre constantes elásticas e de engenharia	43
3.1.4 Matriz de transformação	44
3.1.5 Efeito térmico	46
3.2 Análise micromecânica das constantes elásticas e térmicas	48
3.2.1 Regra das misturas para materiais compósitos reforçados por fibras longas	48
3.2.1.1 Determinação do módulo de elasticidade longitudinal (E_1)	50

3.2.1.2 Determinação do módulo de elasticidade transversal (E_2)	51
3.2.1.3 Determinação do módulo de cisalhamento (G_{12}).....	52
3.1.2.4 Determinação do coeficiente de Poisson (ν_{12})	53
3.2.2 Módulo de Cisalhamento e de elasticidade modificados.....	54
3.2.3 Coeficientes de dilatação térmica efetivos de uma lâmina unidirecional.....	55
4 CRITÉRIOS DE FALHA DE UMA LÂMINA	56
4.1 Modos de falha	56
4.2 Critérios de falha de lâminas	57
4.2.1 Critério da Máxima Tensão	58
4.2.2 Critério da Máxima Deformação	59
4.2.3 Critério de Tsai-Hill	59
4.2.4 Critério de Tsai-Wu	60
4.2.5 Critério de falha de Puck	62
5 MODELOS ANALÍTICOS PARA TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS	66
5.1 Formulação básica para tubos de materiais compósitos (Lekhnitskii, 1981)	66
5.2 Análise de tubos de material compósito laminado sob o efeito combinado de pressão interna e carga térmica	75
5.2.2 Análise de tensões e deformações	77
5.2.3 Propriedades das lâminas	81
5.2.4 Condições de contorno	83
5.3 Análise de tubos de material compósito laminado sob o efeito de momento fletor nas extremidades	84
5.3.1 Procedimento de análise do tubo sob flexão	85
5.3.2 Análise de tensões e deformações	86
5.3.3 Condições de contorno	89
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	91
6.1 Comparação entre resultados experimentais e teóricos.....	91
6.1.1 Considerações iniciais	91
6.1.2 Resultados experimentais e teóricos.....	94
6.2 Análise de um tubo submetido à pressão interna	97
6.3 Análise de um tubo submetido à flexão	101

6.4	Análise de um tubo submetido à carga termomecânica.....	105
6.5	Análise de um tubo de material compósito com camadas de areia submetido à pressão interna.....	108
6.6	Análise para tubo submetido à pressão interna e carga térmica com diferentes frações volumétricas de fibra.....	111
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114
	REFERÊNCIAS	117
	ANEXO A	122

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nas últimas décadas, houve um grande crescimento na aplicação de compósitos reforçados com fibras em diversos ramos da engenharia, com destaque para os segmentos automotivo, aeronáutico, construção civil e de estruturas offshore.

Segundo Menshykova e Guz (2014), os compósitos apresentam uma ampla vantagem sobre os materiais convencionais, incluindo leveza, alta resistência e rigidez específicas, resistência à corrosão e capacidade de serem projetados de acordo com sua utilização.

Uma das aplicações para os materiais compósitos são os tubos utilizados na indústria química e petroquímica. No caso das aplicações nos setores de petróleo e gás, os citados tubos podem ser empregados como dutos para condução de fluidos resultantes da exploração, ou de água para combate a incêndio. Um bom exemplo são os *risers* de materiais compósitos utilizados para exploração em águas profundas, os quais são relativamente leves, tem excelente resistência à corrosão, elevadas relações resistência/peso e rigidez/peso e bom isolamento térmico, o que acaba representando várias vantagens em relação a outros materiais. Além disso, tubulações de PRFV (plástico reforçado com fibras de vidro) vêm sendo bastante utilizadas em sistemas de condução de água e esgoto, emissários submarinos e irrigação. Este tipo de tubulação, além de apresentar uma vida útil grande, tem elevada resistência química, o que permite sua aplicação na maioria dos casos em que materiais convencionais são destruídos pela corrosão.

Com relação aos efeitos térmicos, sabe-se que a temperatura é o fator ambiental mais importante que afeta o comportamento dos materiais compósitos, principalmente em compósitos poliméricos que são bastante sensíveis à temperatura e têm relativamente baixa condutividade térmica. Segundo Vasiliev e Morozov (2001), essa combinação de propriedades permite, por outro lado, a utilização desses materiais em estruturas submetidas a um aquecimento de curto prazo, desde que sejam realizadas análises destas estruturas com a devida atenção aos efeitos de temperatura.

Devido a essas aplicações e vantagens, nos últimos tempos, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas com o objetivo de avaliar as propriedades termomecânicas de materiais compósitos e, conseqüentemente, aperfeiçoar os projetos de elementos estruturais por eles constituídos, tais como tubos. Nesse contexto, muitas análises experimentais de falhas foram realizadas em tubos cilíndricos de paredes finas com diferentes ângulos de laminação. Esses estudos verificaram um ângulo de enrolamento ideal de $\pm 55^\circ$ para tubos submetidos à pressão interna ou cargas biaxiais com razão de tensão circunferencial-axial de 2:1 (Soden *et*

al., 1989; Soden *et al.*, 1978; Mistry *et al.*, 1992 e Hull *et al.*, 1978). Spencer e Hull (1978) e Uemura e Fukunaga (1981) também investigaram, respectivamente, o mecanismo de falha em tubos de plásticos reforçados com fibras de carbono (PRFC) e plásticos reforçados com fibras de vidro (PRFV) com diferentes ângulos de laminação.

Lekhnitskii (1968, 1981) é uma sólida referência na área de análises estruturais envolvendo materiais anisotrópicos, por apresentar formulações analíticas genéricas para os principais casos de carregamento em cilindro com várias relações constitutivas anisotrópicas. Em particular, ela é bastante utilizada para a obtenção de soluções analíticas para tubos compósitos laminados. Com base na teoria clássica de laminados, Xia *et al.* (2001a) desenvolveram um procedimento analítico para avaliar as tensões térmicas de tubos de paredes sanduíche submetido a pressão interna e mudança de temperatura. Além disso, Xia *et al.* (2001b) apresentaram modelos analíticos para a determinação das tensões e deformações em tubos laminados sob pressão interna assumindo anisotropia para cada camada.

O presente trabalho consiste em mais um trabalho focado no estudo de tubos de materiais compósitos laminados. São apresentadas formulações analíticas específicas para o cálculo de tensões, deformações e deslocamentos em tubos submetidos a carregamentos termomecânicos, incluindo a verificação de falhas nas lâminas. Para a análise de falhas são empregados diferentes modelos analíticos empíricos e semiempíricos, tais como os critérios de Tsai-Hill, Tsai-Wu e Puck.

1.1 Objetivos

Geral: Realizar um estudo do comportamento termomecânico de tubos de materiais compósitos poliméricos laminados reforçados por fibras, incluindo falhas mecânicas no material.

Específico:

- a) Estudar o comportamento de tubos considerando diferentes configurações da parede, caracterizadas pelo número de lâminas, ordem de empilhamento das lâminas e direções e fração volumétrica das fibras;
- b) Implementar modelos analíticos capazes de descrever campos de deslocamentos, tensões e deformações nos tubos;
- c) Avaliar a influência de diferentes configurações sobre falhas mecânicas nas lâminas.

1.2 Justificativas

Os tubos de materiais compósitos são elementos estruturais de grande importância industrial e atualmente se mostram bastantes competitivos em relação a outros fabricados com materiais metálicos convencionais. Devido às suas interessantes características termomecânicas, eles vêm sendo empregados com sucesso nos mais diversos setores industriais, incluindo importantes aplicações na indústria de petróleo e gás e também na construção civil.

Quando comparados com os tubos metálicos tradicionais, os tubos de compósitos laminados reforçados por fibras apresentam um comportamento mais complexo, o que se justifica pela anisotropia e heterogeneidade exibidas pelo material. Desta forma, o desenvolvimento de estudos visando o entendimento do comportamento termomecânico dos referidos tubos é de fundamental importância para a prática da engenharia. O conhecimento do mencionado comportamento aplica-se ao aperfeiçoamento de projetos e aplicações de tubos laminados.

Para o desenvolvimento de projetos dos mencionados tubos, os efeitos correspondentes à pressão externa, interna e flexão são de grande importância e, assim sendo, procedimentos que permitam obtê-los de forma realista têm considerável relevância no que diz respeito à economia e eficiência dos projetos estruturais. Ao mesmo tempo, análise de falhas, além de servir como base para as decisões relacionadas com aspectos de resistência, auxilia na obtenção de uma sequência ótima de empilhamento de lâminas visando atender os critérios de projeto.

1.3 Metodologia

O estudo é desenvolvido através do uso de formulações analíticas para análise termomecânica de tubos laminados de materiais compósitos poliméricos reforçados por fibras, com diferentes esquemas de laminação. As lâminas são constituídas por fibras longas paralelas envolvidas por matriz polimérica. As fibras apresentam alto desempenho, tais como as de vidro e de carbono. As matrizes consideradas são do tipo polimérico (por exemplo, resinas epóxi e poliéster). Os materiais são assumidos como termoelásticos lineares e os deslocamentos admitidos como pequenos.

Os tubos podem ser submetidos a diferentes carregamentos termomecânicos simétricos, para os quais os modelos utilizados permitem a obtenção dos campos de

deslocamentos, tensões e deformações. Também são incorporados critérios de falhas, os quais permitem detectar falhas nas lâminas.

Tais modelos foram implementados usando o programa *MATLAB*.

2 MATERIAIS COMPÓSITOS: CONSTITUINTES, PROCESSOS DE FABRICAÇÃO, E APLICAÇÕES

2.1 Materiais constituintes

Um material compósito consiste na combinação de dois ou mais materiais em uma escala macroscópica com a finalidade de formar um novo material. Separadamente, os constituintes do compósito mantêm suas características, porém, quando misturados eles formam um composto com propriedades efetivas diferenciadas em relação a cada um deles.

A ideia de combinar diferentes materiais para produzir um produto com propriedades distintas dos seus componentes individualmente não é algo recente. No antigo Egito, por exemplo, utilizavam-se palhas para reforçar os tijolos de barro e já na idade média haviam armaduras constituídas de lâminas com diferentes metais. A partir de meados do século passado, os compósitos tornaram-se um importante material para a engenharia, graças às suas interessantes propriedades e à sua versatilidade de projeto. Através da combinação de materiais específicos e do controle das proporções dos mesmos, é possível manipular uma gama de aspectos do material, tais como: resistência estática e à fadiga, rigidez, resistência à corrosão e abrasão, temperatura de trabalho, dureza e ductilidade, aparência estética, custo e densidade (Silva, 2003).

Os materiais que formam os compósitos podem ser classificados como matriz e reforço. A matriz é o que confere estrutura ao material compósito e mantém os reforços unidos, transmitindo a estes os esforços atuantes. Os reforços são os que realçam as propriedades mecânicas, eletromagnéticas ou químicas do compósito.

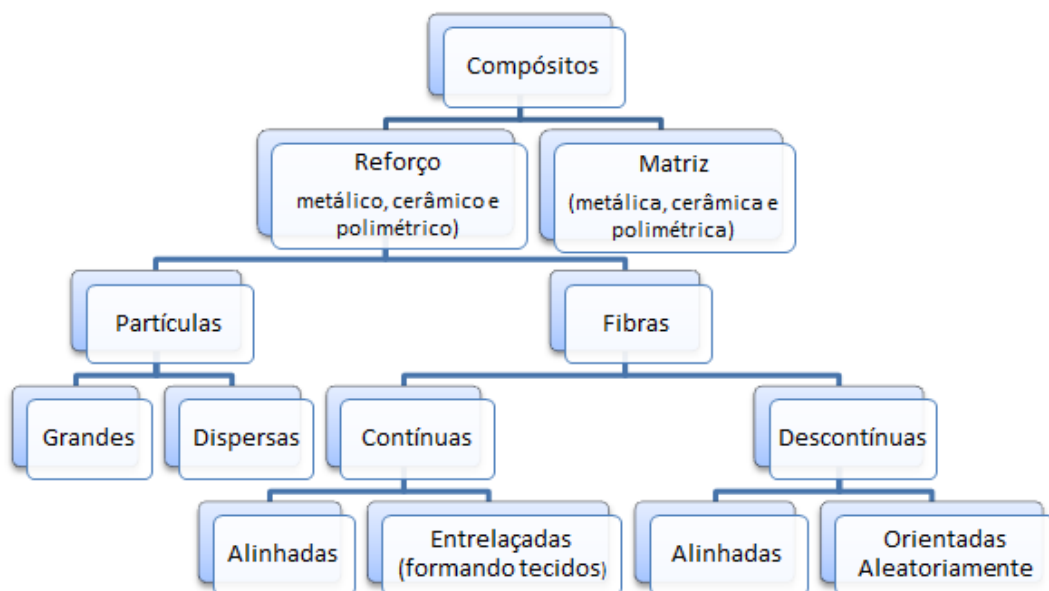
As matrizes podem ser constituídas de materiais poliméricos, metálicos ou cerâmicos, sendo que os polímeros são os mais utilizados devido ao menor custo e à facilidade de processamento. Segundo Barbero (1999), a seleção de materiais para as matrizes deve levar em conta as propriedades mecânicas, resistência à corrosão e flambagem e também os métodos de processamento e, portanto, essas escolhas devem ser analisadas no início do projeto conforme o processo de manufatura a ser utilizado.

Além disso, outra importante propriedade a ser considerada é a capacidade de combinação matriz-fibra. O limite de resistência à ruptura do compósito é diretamente dependente da qualidade dessa interação. Adequar essa ligação é essencial para maximizar a transmissão da tensão da matriz para as fibras.

As fibras constituem o elemento estrutural que confere as principais características de resistência mecânica de tração e compressão, assim como a isotropia ou anisotropia do compósito. Os tipos mais comuns de fibras usadas em compósitos avançados são as de vidro, de aramida (kevlar), carbono e boro. Um dos principais fatores a ser considerado no projeto com compósitos reforçados é a orientação que a fibra assume no produto final. As propriedades mecânicas finais também dependem fortemente da quantidade de fibras empregadas (fração volumétrica) e da forma que o material é processado. Fibras em forma de fios se caracterizam por fornecer reforços apenas na direção que estão dispostas, já os tecidos ortogonais permitem reforços em duas direções, e as fibras picadas produzem, na sua grande maioria, reforços aleatórios. Logo, a orientação é escolhida levando em consideração as direções das forças atuantes no compósito.

De certa forma, os materiais compósitos podem ser classificados de acordo com a forma de combinação entre os dois ou mais materiais constituintes. Essa classificação varia de autor para autor. A Figura 1 mostra um organograma com a classificação e subdivisão dos compósitos conforme os tipos de reforço.

Figura 1- Classificação dos materiais compósitos segundo os tipos de reforço.



(Fonte: Sobrinho (2009), adaptado pelo autor).

A escolha do tipo de fibra e da matriz depende fundamentalmente das demandas definidas pela aplicação que será dada ao material compósito: características mecânicas elevadas, resistência alta à temperatura, resistência à corrosão, etc. O custo em muitos casos

pode ser um fator de escolha entre um ou outro constituinte. Deve ser observada também a compatibilidade entre as fibras e as matrizes. Para que se confeccione um compósito é necessário que haja afinidade entre os materiais que serão unidos. Por isso, é essencial conhecer as propriedades químicas e físicas dos constituintes envolvidos, especialmente as propriedades das interfaces.

2.1.1 Matriz

A principal função da matriz é manter a integridade estrutural do compósito através da ligação simultânea com os reforços em razão de suas características coesivas e adesivas, servindo dessa forma como meio pelo qual o fluxo de tensão é transmitido e distribuído às fibras. Outra função da matriz é proteger as fibras individuais em relação aos danos superficiais como, por exemplo, abrasão mecânica ou reações químicas com o ambiente. Por essa razão, é essencial que a resistência da adesão da interface fibra-matriz seja elevada. Os limites de resistência à ruptura do compósito são diretamente dependentes da qualidade dessa interação e, dessa forma, adequar essa ligação é essencial para maximizar a transmissão de tensão entre as fases constituintes.

A escolha do material dependerá das propriedades físicas, mecânicas e térmicas exigidas, além do processo de fabricação escolhido e do custo associado. As matrizes mais utilizadas são as poliméricas devido ao baixo custo, fácil moldagem, boa resistência química e baixo peso específico. Por outro lado, se comparadas as matrizes metálicas e cerâmicas, fatores como menor resistência mecânica, baixos módulo de elasticidade e temperatura de serviço, limitam o seu emprego (Silvestre Filho, 2001).

As matrizes poliméricas se destacam das matrizes metálicas em relação à facilidade de fabricação. Uma desvantagem dos polímeros é sua baixa resistência a altas temperaturas. Sendo assim, toda investigação que vise substituir materiais convencionais por polímeros deve levar em conta essa limitação. Devido a diferentes comportamentos quando submetidos a elevadas temperaturas, os polímeros podem ser agrupados em dois grupos: termoplásticos ou termorrígidos. Os termoplásticos são os polímeros que amolecem quando submetidos a altas temperaturas. Alguns exemplos de termoplásticos são o polietileno, náilon e PVC. Os termorrígidos, por outro lado, uma vez que endurecem, não podem ser mais amolecidos pelo fornecimento de calor. Ao atingir elevadas temperaturas, esses materiais simplesmente se decompõem. Entretanto, eles são mais empregados na fabricação de compósitos laminados do que os termoplásticos. Isso ocorre porque os termorrígidos apresentam propriedades

mecânicas superiores e também por serem menos sensíveis à variação de temperatura. Outra vantagem dos termorrígidos que merece ser ressaltada é que seus compósitos laminados de plásticos podem ser fabricados em temperatura ambiente. Dois exemplos desse tipo de material são as resinas epóxi e poliéster, que estão entre os polímeros mais utilizados na confecção de laminados.

2.1.2 Reforço

Os reforços dos materiais compósitos tradicionais podem ser de vários tipos (metálicos, cerâmicos e poliméricos) e formas (partículas, fibras contínuas ou descontínuas, tecidos e mantas). Entretanto, os compósitos reforçados por fibras contínuas são os mais importantes em projeto de engenharia em função dos altos valores obtidos de resistência e rigidez associados com a baixa densidade (Sobrinho, 2009). As fibras fornecem praticamente toda a capacidade do compósito, em termos de resistência e rigidez.

A seleção adequada do tipo, quantidade e orientação das fibras é fundamental, pois essas variáveis influenciam diretamente algumas características do compósito, tais como, massa específica, resistência e módulo em tração e compressão, resistência à fadiga, condutividade elétrica e térmica e custo. Outra importante característica é o diâmetro das fibras. À medida que o diâmetro diminui, as chances de uma falha inerente no material são reduzidas, o que pode aumentar sua resistência. Além disso, para uma mesma fração volumétrica de fibras, a redução do diâmetro aumenta a área de superfície da interface fibra-matriz, permitindo uma melhor transferência de carga entre os constituintes do material compósito e o aumento da ductilidade e tenacidade. Dentre os diferentes tipos de fibras comercialmente disponíveis, as fibras de vidro, carbono, aramida e de boro são as mais utilizadas em compósitos poliméricos.

Fibras de vidro é um nome genérico que serve para designar as fibras que têm como base em sua composição a sílica e outros óxidos como o de cálcio, boro, sódio, ferro e alumínio. Os três tipos de fibras de vidro mais populares são designados pelas letras E, C e S. A designação E (*eletrical*) deve-se ao vidro do tipo-E ser um bom isolante elétrico, a designação C (*corrosion*) é feita em função do vidro do tipo-C apresentar boa resistência à corrosão e a designação S (*strength*) deve-se ao vidro do tipo-S apresentar alta resistência mecânica. Este tipo de fibra é um dos reforços mais utilizados, principalmente pelo seu baixo custo, facilidade de processamento, acesso fácil no mercado, maneabilidade e alta resistência.

As fibras de carbono são normalmente formadas por fibras poliméricas submetidas a intenso tratamento térmico. O alto custo dessas fibras fez com que no passado o seu uso fosse restrito a indústria aeronáutica. No entanto, o volume de produção, a demanda mundial e o surgimento de novas tecnologias têm barateado seu custo, aumentando assim a abrangência do uso de fibras de carbono. Atualmente são as fibras mais utilizadas em compósitos avançados, devido, principalmente, as excelentes propriedades mecânicas.

A fibra de aramida é um composto orgânico aromático feito de carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio. Suas vantagens são a baixa massa específica, alta resistência à tração, baixo custo e elevada resistência ao impacto. Suas desvantagens incluem baixa resistência à compressão e degradação a exposição prolongada à luz ultravioleta (luz solar, por exemplo). Estas fibras têm sido usadas na fabricação de componentes estruturais de baixo peso, tais como equipamentos aeroespaciais, aeronavais, marinhos, esportivos e coletes a prova de balas. Elas também são, frequentemente, combinadas com outras fibras, formando compósitos híbridos. Os dois principais tipos de fibras de aramida são o Kevlar 29 e o Kevlar 49.

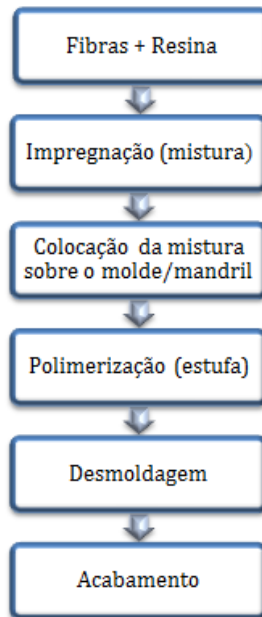
2.2 Processo de fabricação

Segundo Daniel e Ishai (2006), o processo de fabricação é uma das etapas mais importantes para se produzir um compósito. O tipo de processo de manufatura para o compósito dependerá do tipo de matriz a ser empregado. Portanto, o procedimento de fabricação deve ser selecionado simultaneamente com a escolha de materiais e o projeto estrutural, em um ambiente de desenvolvimento integrado, unificado e dinâmico.

Para Guamá (2002), uma das principais limitações do uso dos materiais compósitos está associada ao elevado custo de produção. Grande parte desse valor é atribuída à falta de processos de fabricação automatizados e em grande escala, assim como à necessidade de inspeções pós-fabricação para assegurar a qualidade do material.

De modo geral, as operações básicas (Figura 2) para a obtenção da peça final tem a seguinte sequência:

Figura 2- Etapas de fabricação de um material compósito.



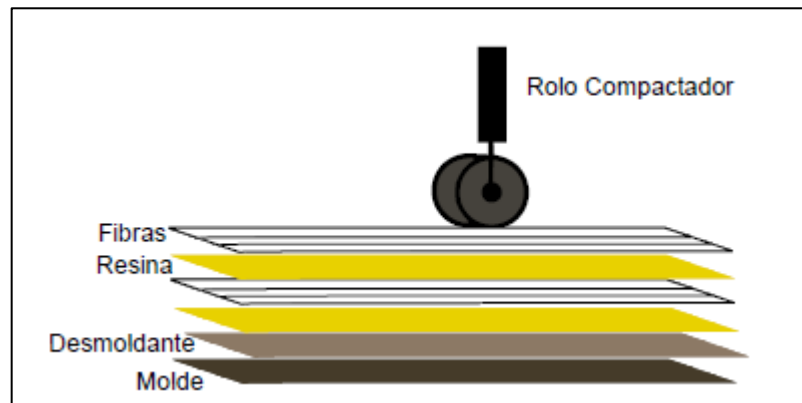
(Fonte: Pereira (2003), adaptada pelo autor, 2016).

Como os processos de fabricação são diversos, serão descritos apenas os mais usuais nesta seção.

2.2.1 Laminação manual

A laminação manual (Figura 3) é a técnica de manufatura de compósitos mais simples. A camada de fibras de reforço (unidirecional, tecidos, mantas, etc.) é colocada manualmente sobre a superfície de um molde e a resina é aplicada com pincel, spray ou espátula. O processo é então repetido até a formação da espessura total desejada. O laminado geralmente cura à temperatura ambiente, porém, pode-se aplicar calor para acelerar o processo.

Figura 3- Esquema do processo de fabricação por laminação manual.

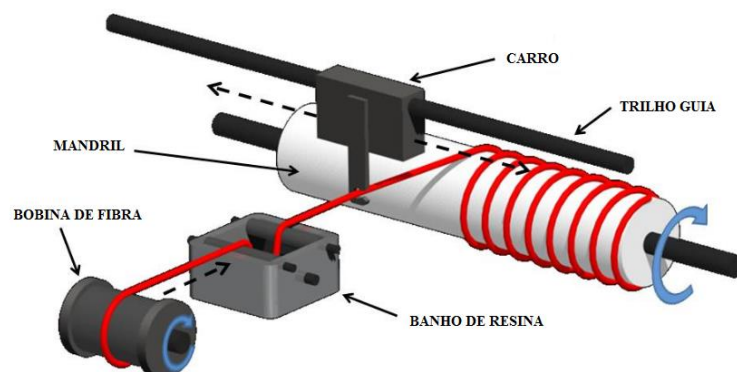


(Fonte: Sobrinho, 2009).

2.2.2 Enrolamento filментар

A técnica de enrolamento filментар, apresentada na Figura 4, é empregada na produção de estruturas na forma de cascas de revolução. Por ser rotativo, o processo é recomendado para peças como tubos, vasos de pressão, reservatórios, peças esféricas e cônicas. Este processo baseia-se no enrolamento sob tensão de fibras contínuas pré-impregnadas de resina, ou fibras molhadas com resina durante o enrolamento, em torno de um mandril em rotação até que a superfície do mandril esteja coberta e a espessura requerida seja atingida. Pelo fato de ser um processo de razoável automação é considerado um método de fabricação de baixo custo. A rotação programada do mandril e o movimento horizontal da lançadeira de injeção das fibras produzem um padrão helicoidal de disposição das mesmas sobre o mandril, sendo que o posicionamento das fibras pode ser controlado de acordo com os requisitos de projeto.

Figura 4- Esquemática do processo de enrolamento filментар.



(Fonte: www.flickr.com/photos/core-materials/5904500223, acesso em: 01/06/2016).

2.2.3 Enrolamento por centrifugação

Este processo é empregado na fabricação de peças de revolução. Dentro do molde em movimento de rotação (Figura 5) são injetadas as fibras cortadas juntamente com a resina. A impregnação da resina nas fibras e a compactação são feitas pelo efeito de centrifugação. A cura da resina pode ser realizada a temperatura ambiente ou em uma estufa. Ele é utilizado em casos onde não se exige homogeneidade das propriedades mecânicas da peça.

Figura 5- Processo de enrolamento por centrifugação.



(Fonte: Barros, 2007).

2.2.4 Outros processos de fabricação

Outros processos de fabricação de peças de revolução podem ser empregados quando se exige homogeneidade das propriedades mecânicas das mesmas. Nestes processos as fibras são enroladas (bobinadas) sobre um mandril que dará a forma final da peça, permitindo a fabricação industrial de tubos com diversos diâmetros e grandes comprimentos. Para atender a estas necessidades de projeto, o bobinamento das fibras pode ser dos seguintes tipos: circunferencial, helicoidal e polar.

No bobinamento circunferencial, as fibras são colocadas em um mandril rotativo, com um ângulo de deposição de 90° em relação ao eixo de rotação. Este tipo de bobinamento resiste aos esforços circunferenciais.

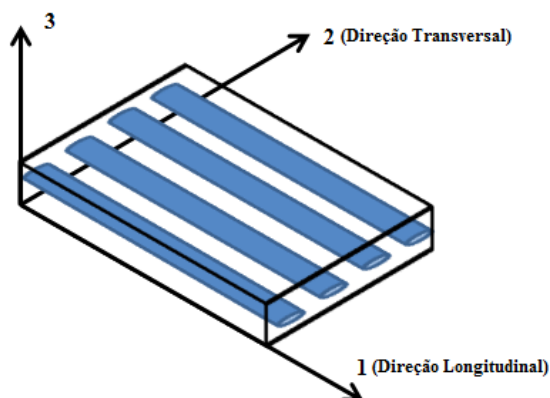
No bobinamento helicoidal, as fibras são depositadas em um mandril rotativo com um ângulo de deposição em relação ao eixo de rotação. Este tipo de bobinamento resiste aos esforços circunferenciais e longitudinais.

No bobinamento polar, as fibras são depositadas no mandril de forma a tangenciar as duas aberturas dos domos, traseiro e dianteiro. O ângulo de deposição varia de α_0 , constante na região cilíndrica, até 90° nas duas aberturas dos domos. O bobinamento polar resiste preferencialmente aos esforços longitudinais. A fabricação de vasos de pressão bobinados consiste de dois tipos de bobinamento. Nos domos traseiro e dianteiro, o bobinamento é do tipo polar $\pm\theta$ enquanto que na região cilíndrica, os bobinamentos circunferencial e polar se intercalam $[90^\circ/\pm\theta]$.

2.3 Lâmina e laminados

Lâmina é uma camada plana (ou curva) de fibras unidirecionais (ou manta) em uma matriz. A lâmina é um material ortotrópico com os eixos das direções principais na direção das fibras (longitudinal), normal às fibras no plano da lâmina (transversal no plano) e normal ao plano da lâmina, conforme mostra a Figura 6.

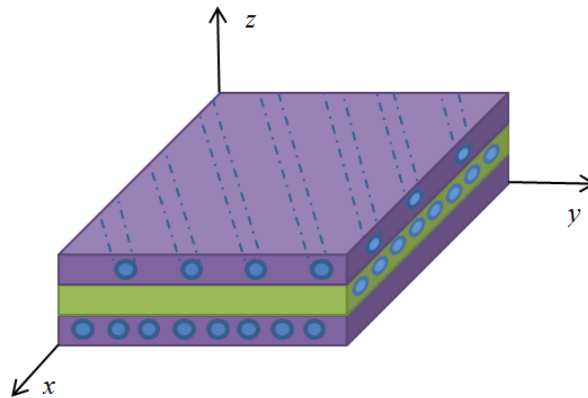
Figura 6-Lâmina com os eixos nas direções principais.



(Fonte: Autor, 2016).

O laminado é constituído por duas ou mais lâminas empilhadas (Figura 7) em diversas direções de tal forma que se alcance rigidez e resistência desejáveis. As lâminas podem ser de várias espessuras e constituídas de diferentes materiais. Segundo Daniel e Ishai (2006), uma vez que a orientação dos eixos principais é diferente para cada lâmina, torna-se conveniente analisar os laminados conforme um sistema fixo de coordenadas comum (x, y, z) global. A orientação de uma lâmina é definida por meio do ângulo entre o eixo de referência x e o eixo principal 1 do material da lâmina, medido no sentido anti-horário no plano $x - y$.

Figura 7- Laminado multidirecional em relação a um sistema de referência global.



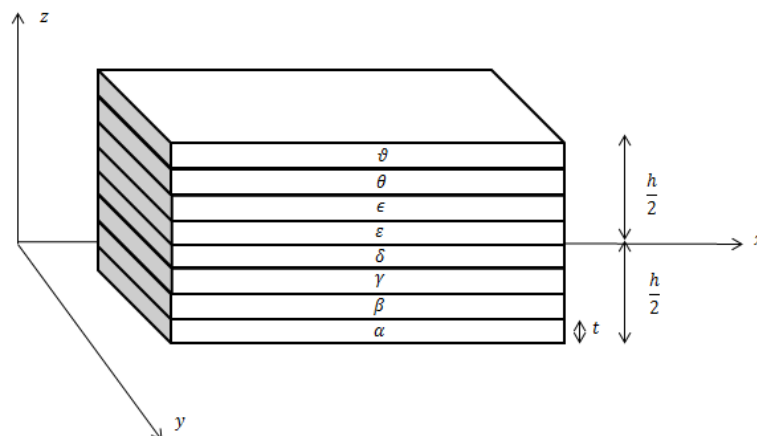
(Fonte: Autor, 2016).

O desempenho estrutural dos compósitos laminados reforçados por fibras depende das camadas, dos materiais constituintes e do esquema de laminação utilizado. O esquema de laminação define o arranjo dos ângulos de orientação das camadas.

2.3.1 Esquemas de laminação

O esquema de camadas de um laminado (Figura 8) pode ser denotado por $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots)$, onde α é o ângulo de orientação das fibras da primeira camada, β é o ângulo de orientação das fibras da segunda camada, e assim por diante. Esses ângulos devem estar entre -90° e $+90^\circ$.

Figura 8- Sequência de empilhamento.



(Fonte: Autor, 2016).

Com relação às orientações das camadas, podem-se classificar os laminados em dois tipos, *cross-ply* e *angle-ply*. Os laminados *cross-ply* apresentam ângulos de laminação iguais a 0° ou 90° , por exemplo, $[0 / 90 / 0 / 90]$. Quando o laminado apresentar qualquer valor para o ângulo de orientação das camadas, sendo pelo menos um ângulo diferente de 0° e 90° , ele é denominado *angle-ply*, por exemplo, o laminado $[45 / -45 / 0 / 90]$.

Em relação à simetria, os laminados também podem receber três classificações:

- a) Laminados Simétricos: São aqueles que possuem materiais, espessuras e orientações das lâminas simétricas em relação à superfície média do laminado. Utiliza-se a letra 's' para indicar simetria, por exemplo, $[45 / -45 / -45 / +45] = [\pm 45]_{2s}$.
- b) Laminados Antissimétricos: São aqueles que possuem materiais e espessuras simétricas, mas orientações das lâminas antissimétricas em relação à superfície média, por exemplo, $[-45 / 30 / 0 / 0 / -30 / 45]$.
- c) Laminados Assimétricos: São aqueles que possuem materiais, espessuras ou orientações das lâminas assimétricas em relação à superfície média.

2.4 Aplicações

Nas últimas décadas é cada vez mais frequente a utilização de compósitos em vários segmentos da indústria automotiva, naval, construção civil, energia eólica e, principalmente, aeronáutica e aeroespacial.

A aplicação de material compósito surgiu inicialmente no setor aeronáutico devido à necessidade de diminuição de peso sem perda de propriedades mecânicas. A utilização dos materiais compósitos dentro da indústria automobilística é bem mais recente do que na aeronáutica. Inicialmente, eram produzidos somente para-choques e tetos de automóveis. Atualmente, o material compósito é utilizado para a fabricação de capôs, carters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. De acordo com Pereira (2003), uma das grandes vantagens trazidas para o meio automobilístico pelos materiais compósitos é, além da redução do peso, a facilidade em confeccionar peças com superfícies complexas.

No setor da construção civil, eles têm sido utilizados na forma de barras para armaduras passivas no concreto e armaduras de protensão interna e externa, para estais, para cabos de pontes suspensas, na forma de tiras e chapas para o reforço de vigas e pilares, perfis

estruturais e na forma de painéis sanduíche para lajes de tabuleiro de pontes e lajes de edifícios (Keller, 2003). Além disso, durante muito tempo os compósitos poliméricos têm sido utilizados para reparos e reforço de pontes e viadutos (Figura 9).

Figura 9-Laje e viga de um viaduto reforçadas com materiais compósitos.



(Fonte: www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0710932_09_cap_02.pdf. Acesso em: 05/11/2015).

Devido a sua boa relação rigidez-densidade e seu grande desempenho mecânico, outra aplicação dos materiais compósitos é na fabricação de tubos, vasos de pressão, tanques de armazenamento e dutos para distribuição de água em torres de resfriamento que requerem boa resistência à corrosão e baixas pressões.

Os tubos em PRFV (Figura 10), por exemplo, comumente utilizados em sistema de água e esgoto, são uma das formas mais utilizadas de compósitos. O desempenho das tubulações em PRFV é reconhecido por reunir qualidades como durabilidade, resistência mecânica e à corrosão. Isto elimina a necessidade de revestimentos de proteção internos e externos ou a utilização de proteção catódica, comuns em tubulações metálicas.

Outro produto fabricado com materiais compósitos são os *risers* utilizados na exploração de petróleo e gás. Os *risers* rígidos atuais são feitos de aço, apresentando elevado peso, requerendo mecanismos de tração e flutuação caros, por isso, ultimamente, eles vêm sendo substituídos por tubos produzidos com materiais compósitos que são mais leves e apresentam maior resistência à corrosão e fadiga, além de possuírem bom isolamento térmico (Gonçalves, 2012).

Figura 10 - Tubos de PRFV.

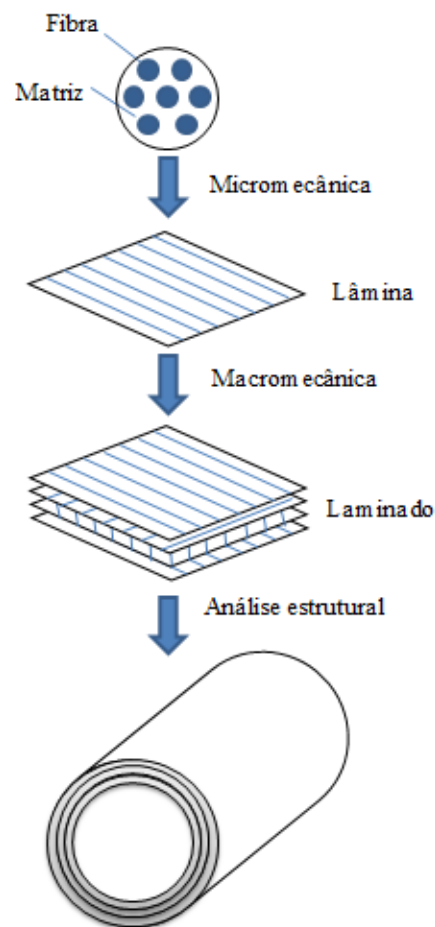


(Fonte: Barros, 2007).

3 PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS DE UMA LÂMINA

Os materiais compósitos podem ser visualizados e analisados em diferentes níveis e escalas, conforme mostra a Figura 11. A micromecânica estuda a interação dos constituintes em um nível microscópico. Essa abordagem considera as propriedades das fibras e da matriz a fim de se obter as propriedades equivalentes (médias ou efetivas) do compósito, bem como estudar os modos de falha de maneira a se determinar critérios de resistência para os compósitos (Teófilo, 2010). Segundo Jones (1999), a modelagem micromecânica é bastante ampla, utilizando desde conceitos simples, como a Leis das Misturas, até métodos mais sofisticados baseados na Teoria da Elasticidade para determinação das propriedades elásticas equivalentes.

Figura 11- Materiais compósitos em diferentes níveis de consideração e análise.

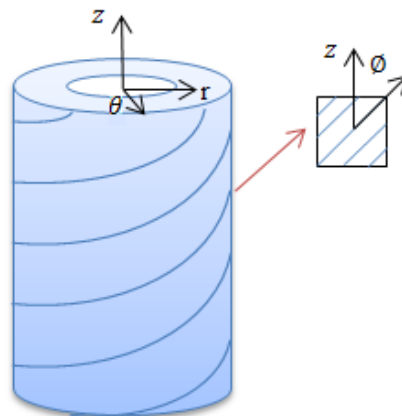


(Fonte: Autor, 2016).

Depois de conhecidas às propriedades mecânicas do compósito, estima-se o comportamento de uma lâmina sob um conjunto de carregamentos combinados. Esta abordagem, conhecida como análise macromecânica, é utilizada para calcular deslocamentos, deformações, esforços e tensões de elementos estruturais compósitos. Em uma análise macromecânica, a lâmina é considerada homogênea e ortotrópica, isto é, um material com três planos mutuamente ortogonais de simetria, onde as propriedades de rigidez e resistência são consideradas por valores efetivos. Esta abordagem é recomendada no estudo do comportamento elástico ou viscoelástico geral de laminados ou estruturas compósitas, o qual assume a continuidade de material. Tendo em vista que várias lâminas são sobrepostas e que a orientação das fibras varia de lâmina para lâmina, cada uma delas possui um sistema de coordenadas local. Porém, na resolução das equações de equilíbrio globais do laminado, é necessário definir um sistema de coordenadas global, no qual as propriedades de todas as lâminas devem ser apresentadas.

Para tubos e vasos de pressão, utiliza-se o sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) , conforme mostrado na Figura 12.

Figura 12-Coordenadas locais e globais de um laminado.



(Fonte: Autor, 2010).

3.1 Análise macromecânica de lâminas

O estado de tensão em um ponto pode ser representado por nove componentes de tensão σ_{ij} (onde $i, j = 1, 2, 3$) que atuam nos lados de um cubo infinitesimal, com lados paralelos aos eixos 1, 2 e 3 do sistema de coordenadas adotado, conforme pode ser visto na Figura 13. De maneira análoga, o estado de deformação é apresentado por nove componentes

de deformação ε_{ij} . Para materiais elásticos lineares, as componentes de tensão e deformação estão relacionadas pela lei de Hooke generalizada. Utilizando notação indicial, têm-se as seguintes relações:

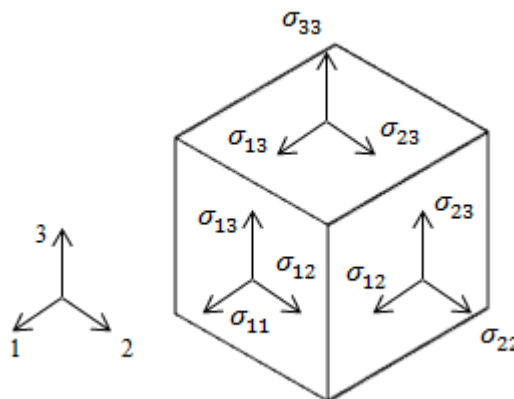
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1a)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (1b)$$

onde C_{ijkl} e S_{ijkl} são as componentes de rigidez e flexibilidade, respectivamente.

Em geral, são necessárias até 81 constantes elásticas para caracterizar completamente o comportamento elástico de um material. No entanto, através do princípio da conservação do momento angular, verifica-se a existência de simetria no tensor de tensão ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) e, por definição, tem-se $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, o que reduz o número de constantes elásticas para 36.

Figura 13- Estado de tensões num ponto material do contínuo.



(Fonte: Autor, 2016).

Segundo Daniel e Ishai (2006), podem-se verificar simetrias adicionais através de considerações energéticas. A energia de deformação por unidade de volume (W) é expressa por:

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (2)$$

A relação tensão-deformação pode ser obtida pela derivada parcial da energia de conservação em relação à deformação:

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \quad (3)$$

Derivando novamente, obtém-se:

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \quad (4a)$$

Analogamente, trocando a ordem das derivadas parciais, tem-se:

$$C_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} \quad (4b)$$

Portanto, como a ordem de diferenciação de (W) é irrelevante, têm-se $C_{ij} = C_{ji}$. De maneira similar, $S_{ij} = S_{ji}$, ou seja, o estado de tensão (ou deformação) num ponto pode ser descrito por seis componentes de tensão (ou deformação), possuindo 21 constantes elásticas independentes.

Assim, as relações tensão-deformação para um corpo anisotrópico podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

ou em forma reduzida:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (6a)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad (6b)$$

3.1.1 Material Ortorrópico

Um material ortorrópico apresenta três planos de simetria mutuamente perpendiculares. Neste caso o número de constantes elásticas independentes é reduzido a nove, conforme mostra as equações (7a) e (7b):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (7a)$$

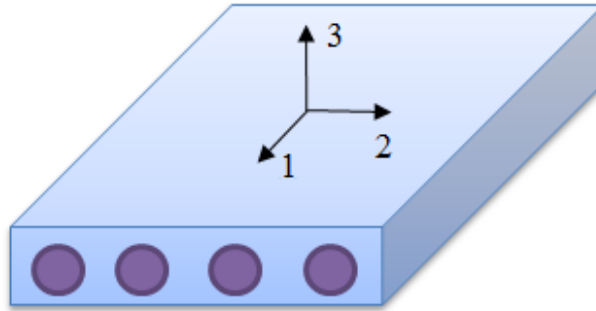
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

3.1.2 Material Transversalmente Isorrópico

Um material é considerado transversalmente isorrópico quando um dos planos principais é um plano de isotropia, isto é, todo ponto no plano tem as mesmas propriedades mecânicas em todas as direções. Para uma lâmina de compósito unidirecional (Figura 14) com fibras na direção 1, o plano de isotropia será o plano (2-3). Nesse caso, as relações tensão-deformação ficam simplificadas, reduzindo o número de constantes elásticas para cinco. Essa redução é feita através das relações:

$$C_{12} = C_{13}; \quad C_{22} = C_{33}; \quad C_{55} = C_{66}; \quad C_{44} = \frac{(C_{22} - C_{23})}{2} \quad (8)$$

Figura 14- Material ortotrópico com isotropia transversal.



(Fonte: Autor, 2016).

3.1.3 Relações entre constantes elásticas e de engenharia

As relações tensão-deformação adquirem maior clareza física quando expressas em termos de constantes de engenharia, ou seja, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento. Estas constantes são mensuradas por meio de testes simples como tensão uniaxial e cisalhamento puro. Para a matriz de flexibilidade os coeficientes são dados por:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}; S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} = \frac{-\nu_{12}}{E_1}; S_{13} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} = \frac{-\nu_{13}}{E_1}; S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad (9)$$

$$S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} = \frac{-\nu_{23}}{E_2}; S_{33} = \frac{1}{E_3}; S_{44} = \frac{1}{G_{23}}; S_{55} = \frac{1}{G_{31}}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

sendo,

ε_i = Deformações normais na direção i

γ_{ij} = Deformação angular no plano ij

σ_i = Tensão normal na direção i

τ_{ij} = Tensão de cisalhamento no plano ij

ν_{ij} = Coeficiente de Poisson (deformação causada na direção j devido a uma sollicitação na direção i)

E_i = Módulo de elasticidade na direção i

G_{ij} = Módulo de cisalhamento no plano ij

Devido à simetria da matriz de flexibilidade, tem-se que:

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10)$$

De acordo com Daniel e Ishai (2006), a equação (10) também pode ser deduzida a partir da lei da reciprocidade de Betti, segundo a qual a deformação transversal, devido a uma tensão aplicada na direção longitudinal, é igual à deformação longitudinal, devido a uma tensão igual aplicada na direção transversal.

As constantes elásticas C_{ij} também estão diretamente relacionadas com as constantes de engenharia E_i , v_{ij} e G_{ij} através das seguintes equações (Jones, 1999):

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - v_{23}v_{32}}{E_2E_3\Delta} & C_{22} &= \frac{1 - v_{13}v_{31}}{E_1E_3\Delta} & C_{44} &= G_{23} \\ C_{12} &= \frac{v_{21} + v_{31}v_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{v_{12} + v_{32}v_{13}}{E_1E_3\Delta} & C_{23} &= \frac{v_{32} + v_{12}v_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{v_{23} + v_{21}v_{13}}{E_1E_2\Delta} & C_{55} &= G_{31} \\ C_{13} &= \frac{v_{31} + v_{21}v_{32}}{E_2E_3\Delta} = \frac{v_{13} + v_{12}v_{23}}{E_1E_2\Delta} & C_{11} &= \frac{1 - v_{12}v_{21}}{E_1E_2\Delta} & C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (11)$$

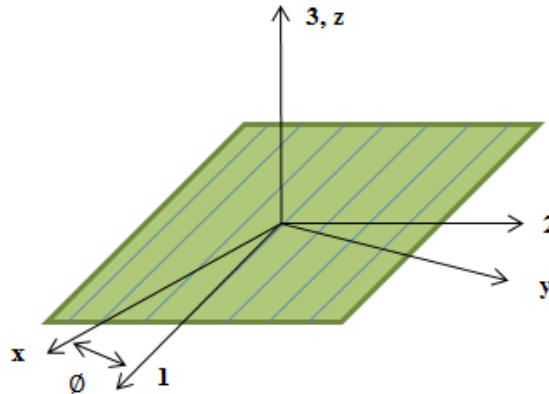
onde,

$$\Delta = \frac{1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13}}{E_1E_2E_3} \quad (12)$$

3.1.4 Matriz de transformação

Normalmente, os eixos principais do material não coincidem com os eixos associados ao laminado (Figura 15). Para que seja possível realizar a análise de um laminado, é necessário usar sempre o mesmo sistema de eixos coordenados globais.

Figura 15-Sistema de coordenadas do laminado (x, y) e da lâmina (1, 2).



(Fonte: Autor, 2016).

Para realizar a mudança de eixos locais (σ^1 e ϵ^1) para globais (σ^x e ϵ^x), utiliza-se a lei de transformação aplicada aos tensores de segunda ordem, definida pelas matrizes de transformação T e T_M dadas nas equações (13a) e (13b), onde $c = \cos \phi$ e $s = \sin \phi$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 2sc & -2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (13b)$$

ou de forma reduzida como:

$$\sigma^x = T\sigma^1 \quad (14a)$$

$$\epsilon^x = T_M\epsilon^1 \quad (14b)$$

As transformações das constantes elásticas referidas aos eixos locais para os eixos globais são feita através das relações

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{TCT}^t \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}_M \mathbf{S} \mathbf{T}_M^t \quad (16)$$

onde os coeficientes das matrizes $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{S}}$ são dados por :

$$\bar{C}_{11} = C_{11}c^4 + C_{22}s^4 + 2C_{12}s^2c^2 + 4C_{66}s^2c^2 \quad (17)$$

$$\bar{C}_{12} = C_{12}(c^4 + s^4) + s^2c^2(C_{11} + C_{22}) - 4C_{66}s^2c^2$$

$$\bar{C}_{13} = C_{13}c^2 + C_{23}s^2$$

$$\bar{C}_{22} = C_{22}c^4 + C_{11}s^4 + 2C_{12}s^2c^2 + 4C_{66}s^2c^2$$

$$\bar{C}_{23} = C_{23}c^2 + C_{13}s^2$$

$$\bar{C}_{33} = C_{23}$$

$$\bar{C}_{44} = C_{44}c^2 + C_{55}s^2$$

$$\bar{C}_{55} = C_{55}c^2 + C_{44}s^2$$

$$\bar{C}_{66} = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12})s^2c^2 + C_{66}(c^2 - s^2)^2$$

$$\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + S_{22}s^4 + 2S_{12}s^2c^2 + S_{66}s^2c^2 \quad (18)$$

$$\bar{S}_{12} = S_{12}(c^4 + s^4) + s^2c^2(S_{11} + S_{22}) - S_{66}s^2c^2$$

$$\bar{S}_{13} = S_{13}c^2 + S_{23}s^2$$

$$\bar{S}_{22} = S_{22}c^4 + S_{11}s^4 + 2S_{12}s^2c^2 + S_{66}s^2c^2$$

$$\bar{S}_{23} = S_{23}c^2 + S_{13}s^2$$

$$\bar{S}_{33} = S_{23}$$

$$\bar{S}_{44} = S_{44}c^2 + S_{55}s^2$$

$$\bar{S}_{55} = S_{55}c^2 + S_{44}s^2$$

$$\bar{S}_{66} = (S_{11} + S_{22} - 2S_{12})4s^2c^2 + S_{66}(c^2 - s^2)^2$$

3.1.5 Efeito térmico

Além das deformações resultantes de cargas aplicadas, quando um material compósito reforçado com fibras é aquecido ou arrefecido, tal como um material isotrópico, ele se expande ou se contrai. A expansão térmica de um material reforçado com fibras é, em geral, diferente em cada uma das três direções principais do material.

Dentro do contexto da teoria de pequenas deformações, a deformação total pode ser decomposta na soma de componentes mecânicas $\varepsilon_{ij}^{(M)}$ e térmicas $\varepsilon_{ij}^{(T)}$, ou seja,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(M)} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \quad (19)$$

Se T_{ref} é tomada como a temperatura de referência e T_a como uma temperatura arbitrária, as deformações térmicas de um sólido sem restrições pode ser escrita sob uma forma constitutiva linear como:

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}(T_a - T_{ref}) \quad (20)$$

onde α_{ij} representa os coeficientes do tensor de dilatação térmica.

Substituindo as equações (7b) e (20) na equação (19), tem-se a relação deformação-tensão para um material anisotrópico:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j + \alpha_i\Delta T \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (21)$$

ou, por inversão,

$$\sigma_i = C_{ij}(\varepsilon_j - \alpha_j\Delta T) \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (22)$$

Na forma matricial, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1\Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2\Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3\Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1\Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2\Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3\Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Observa-se que para o sistema principal de coordenadas, devido à ortotropia do material, as tensões térmicas não envolvem quaisquer deformações de cisalhamento. As deformações são estritamente de dilatação, não de distorção.

3.2 Análise micromecânica das constantes elásticas e térmicas

Um dos objetivos da micromecânica de lâminas é prever as propriedades efetivas das mesmas, baseando-se nas propriedades conhecidas (experimentalmente) dos materiais constituintes, fibras e matriz, e de características geométricas da microestrutura (volume de fibras e parâmetros geométricos). Essa relação, segundo Daniel e Ishai (2006), pode ser descrita da seguinte forma:

$$C_{ij} = f(E_f, E_m, \nu_f, \nu_m, f_f, f_m, S, A) \quad (25)$$

onde S e A são os parâmetros geométricos que descrevem a forma e a disposição do reforço, e f_f e f_m são, respectivamente, a fração volumétrica de fibras e matriz.

Existem vários métodos utilizados para prever as propriedades dos materiais compósitos, sendo que tais métodos diferem entre si de acordo com as hipóteses de cada um em relação à geometria dos constituintes (fibras e matriz) e de acordo com as aproximações feitas com relação à resposta do compósito.

3.2.1 Regra das misturas para materiais compósitos reforçados por fibras longas

Trata-se do modelo mais simples para previsão das propriedades termoelásticas dos compósitos. Nesse modelo, a resposta longitudinal do compósito a cargas mecânicas, ações térmicas ou elétricas são idealizadas como um arranjo em paralelo das fibras e da matriz. Para o caso de cargas mecânicas, admite-se a hipótese de que as deformações das fibras e da matriz sejam as mesmas, conduzindo a relações lineares simples entre as propriedades do compósito e as respectivas propriedades dos seus constituintes, ponderadas pelas respectivas frações volumétricas. Uma propriedade qualquer do compósito para arranjo em paralelo (Figura 16a) é dada por:

$$P_c = \sum_{i=1}^n f_{vi} P_{ci} \quad (26)$$

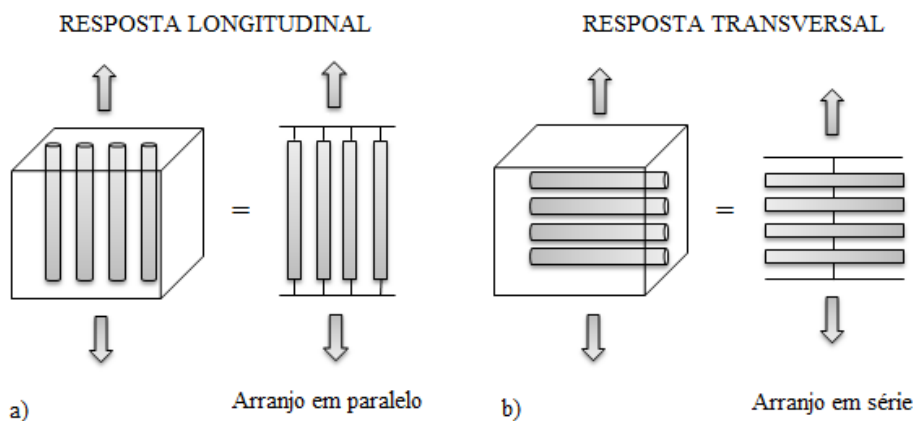
onde f_{vi} é a fração de volume e P_{ci} é a propriedade associada ao $i^{\text{ésimo}}$ constituinte. Observando essa expressão, vê-se claramente que na direção longitudinal as fibras predominam na caracterização do compósito, uma vez que suas propriedades mecânicas são superiores a da matriz nessa direção, $P_f > P_m$.

A resposta transversal do compósito a essas mesmas cargas é idealizada como um arranjo em série (Figura 16b) das fibras e da matriz. Esse modelo também conduz a relações lineares simples entre as propriedades do compósito e as respectivas propriedades da fibra e da matriz, ponderadas pelas suas frações de volume, mas, agora em termos do inverso das propriedades de cada constituinte. Uma propriedade qualquer do compósito, P_c , é dada por:

$$\frac{1}{P_c} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{vi}}{P_{ci}} \quad (27)$$

Como as propriedades da fibra são elevadas em relação às da matriz, $1/P_f < 1/P_m$, tem-se uma predominância maior das propriedades da matriz na direção transversal.

Figura 16- (a) Resposta longitudinal - Arranjo em paralelo, (b) Resposta transversal - Arranjo em série.



(Fonte: Autor, 2016).

3.2.1.1 Determinação do módulo de elasticidade longitudinal (E_1)

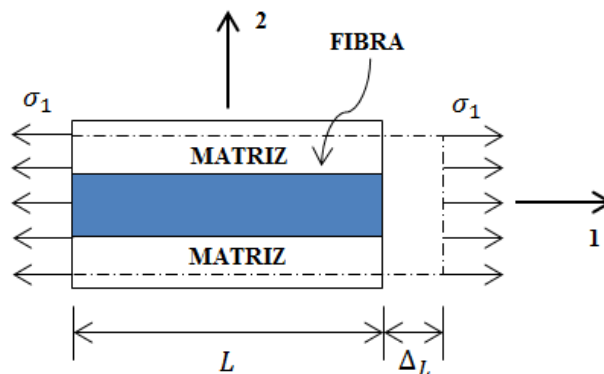
O módulo de elasticidade longitudinal E_1 é determinado a partir da análise de um elemento bidimensional (Figura 17) solicitado na direção longitudinal. As suas dimensões devem reproduzir a fração volumétrica de fibra (f_f) e de matriz (f_m), conforme mostrado nas equações (28a) e (28b):

$$f_f = \frac{V_f}{V} = \frac{A_f}{A} \quad (28a)$$

$$f_m = \frac{V_m}{V} = \frac{A_m}{A} \quad (28b)$$

onde V e A são, respectivamente, o volume total e a área transversal do elemento.

Figura 17- Elemento bidimensional submetido à tensão na direção longitudinal.



(Fonte: Autor, 2016).

O elemento, quando solicitado nesta direção, sofre uma deformação longitudinal ΔL . Assumindo uma aderência perfeita entre os constituintes do material compósito, a deformação longitudinal é igual para a fibra e para a matriz, conforme mostrado na equação (29).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1} = \frac{\Delta L}{L} \quad (29)$$

A força total no elemento é dividida entre a fibra e a matriz, de modo que:

$$F = \sigma_1 A = \sigma_{f1} A_f + \sigma_{m1} A_m \quad (30)$$

onde

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1; \quad \sigma_{f1} = E_f \varepsilon_{f1}; \quad \sigma_{m1} = E_m \varepsilon_{m1} \quad (31)$$

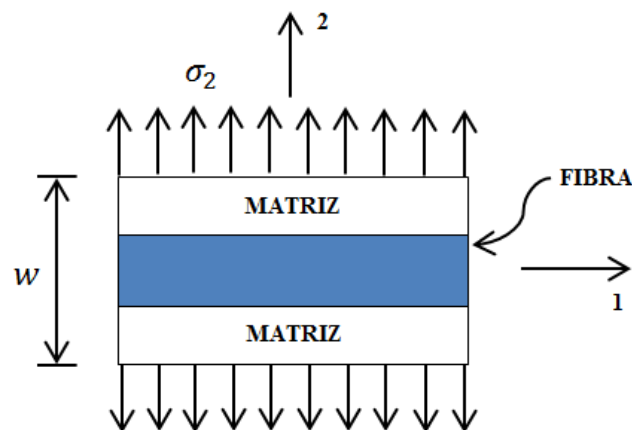
Substituindo as expressões de (31) em (30) e utilizando as relações dadas nas equações (28a) e (28b), obtém-se:

$$E_1 = E_f f_f + E_m f_m \quad (32)$$

3.2.1.2 Determinação do módulo de elasticidade transversal (E_2)

Para a determinação do módulo de elasticidade transversal (E_2), considera-se o mesmo elemento bidimensional, agora solicitado na direção transversal (Figura 18). Neste caso, admite-se que a tensão transversal é igual na fibra e na matriz (equação 33). A deformação total é dada pela equação (34).

Figura 18-Elemento bidimensional submetido à tensão na direção transversal.



(Fonte: Autor, 2016).

$$\sigma_2 = \sigma_{f2} = \sigma_{m2} \quad (33)$$

$$\varepsilon_2 = f_f \varepsilon_f + f_m \varepsilon_m \quad (34)$$

sendo

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}; \quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_{f2}}{E_{f2}}; \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_{m2}}{E_m} \quad (35)$$

Substituindo as expressões de (35) em (34), obtém-se:

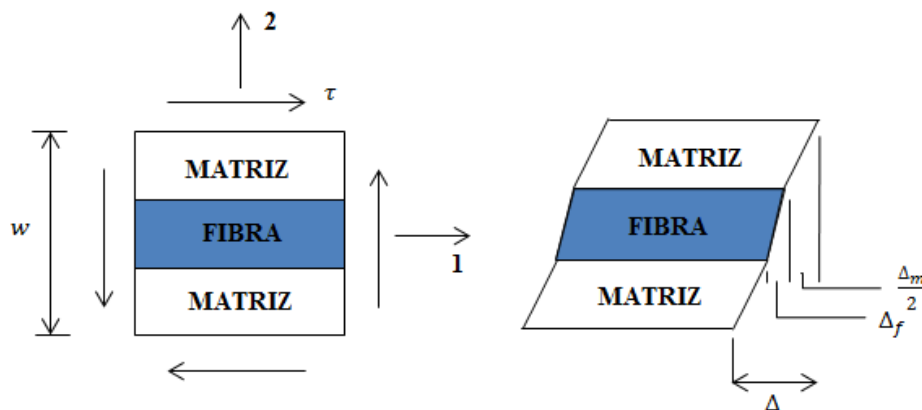
$$E_2 = \frac{E_{2f} E_m}{f_m E_{f2} + f_f E_m} \quad (36)$$

3.2.1.3 Determinação do módulo de cisalhamento (G_{12})

O módulo de cisalhamento é deduzido a partir da situação de carregamento mostrada na Figura 19. Para essa situação, assume-se que as tensões de cisalhamento são iguais na fibra e na matriz, conforme mostra a equação 37.

$$\tau_f = \tau_m = \tau \quad (37)$$

Figura 19- Elemento bidimensional submetido à tensão de cisalhamento.



(Fonte: Autor, 2016).

Nesse caso, a deformação total causada pelo efeito da tensão de cisalhamento é dada por:

$$\Delta = \gamma w = w f_f \gamma_f + w f_m \gamma_m \quad (38)$$

sendo

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_{12f}}; \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G_{12}} \quad (39)$$

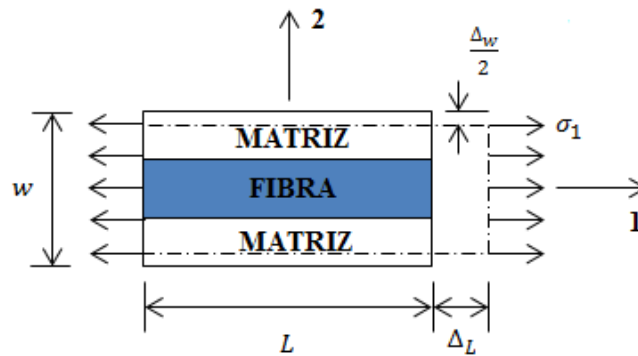
Substituindo as equações de (39) em (38), obtém-se a expressão do módulo de cisalhamento:

$$G_{12} = \frac{G_{12f}G_m}{f_m G_f + f_f G_m} \quad (40)$$

3.1.2.4 Determinação do coeficiente de Poisson (ν_{12})

O cálculo de ν_{12} é feito a partir da análise do elemento bidimensional da Figura 20. Parte-se do pressuposto de que as deformações longitudinais são iguais para a fibra e para a matriz. A deformação na direção transversal às fibras é dada pela equação (41).

Figura 20- Elemento Bidimensional submetido à tensão longitudinal.



(Fonte: Autor, 2016).

$$\Delta w = w_f \varepsilon_{f2} + w_m \varepsilon_{m2} \quad (41)$$

onde

$$\varepsilon_{f2} = -\nu_f \varepsilon_1 \quad (42a)$$

$$\varepsilon_{m2} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad (42b)$$

$$\varepsilon_2 = -\nu_{12}\varepsilon_1 \quad (42c)$$

A deformação transversal é dada pela equação (43).

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta w}{w} \quad (43)$$

Substituindo (43) e (42c) na equação (41) e fazendo as devidas modificações, tem-se:

$$\nu_{12} = f_f \nu_f + f_m \nu_m \quad (44)$$

3.2.2 Módulo de Cisalhamento e de elasticidade modificados

Segundo Magagnin Filho (2000) *apud* McCuliough (1971), todos os outros modelos teóricos apresentam valores para as propriedades longitudinais que coincidem com os previstos pela Regra das Misturas, entretanto, para valores das propriedades transversais do compósito, a mesma fornece valores excessivamente conservadores. Devido a essas diferenças, encontra-se na literatura diferentes modelos de correções para o valor de E_2 e G_{12} .

Um desses modelos é o de Halpin–Tsai (1976) que consiste em equações semi-empíricas obtidas através de ajustes de solução teórica fundamentada pela Teoria da Elasticidade e confirmadas por resultados experimentais. Neste modelo, têm-se:

$$E_2 = E_m \left(\frac{1 + \xi \eta f_f}{1 - \eta f_f} \right) \quad (45a)$$

$$G_{12} = G_m \left(\frac{1 + \xi \eta f_f}{1 - \eta f_f} \right) \quad (45b)$$

sendo $\eta = (M_f/M_m - 1)/(M_f/M_m - \xi)$, ξ um fator de eficiência do reforço com valor entre 1 e 2 e $M = E$ ou G para E_2 e G_{12} , respectivamente. O valor de ξ depende da geometria da fibra, da geometria de arranjo e das condições de carregamento. De acordo com Daniel e Ishai (2006), os melhores ajustes com os resultados experimentais para G_{12} foram obtidos com $\xi = 1$. Nesse caso a equação (46b) torna-se:

$$G_{12} = G_m \frac{(G_{f12} + G_m) + f_f(G_{f12} - G_m)}{(G_{f12} + G_m) - f_f(G_{f12} - G_m)} \quad (46a)$$

Outra expressão modificada para E_2 é dada por:

$$E_2 = \frac{E_{2f}E'_m}{f_m E_{f2} + f_f E_m} \quad (46b)$$

onde $E'_m = E_m/(1 - \nu_m^2)$. Essa expressão corresponde a restrição imposta sobre a matriz pela fibra na direção 1.

3.2.3 Coeficientes de dilatação térmica efetivos de uma lâmina unidirecional

O comportamento térmico de uma lâmina unidirecional é caracterizado em termos de dois coeficientes de dilatação térmica, α_1 e α_2 . Estes coeficientes podem ser relacionados com as propriedades materiais e geométricas dos constituintes.

As relações micromecânicas aproximadas para tais coeficientes foram dadas por Schapery (1968) para constituintes isotrópicos. Os valores nas direções longitudinal e transversal são obtidos, respectivamente, por:

$$\alpha_1 = \frac{E_f \alpha_f f_f + E_m \alpha_m f_m}{E_f f_f + E_m f_m} \quad (47a)$$

$$\alpha_2 = \alpha_m f_m + \alpha_f f_f + \frac{\nu_f E_m - \nu_m E_f}{\left(\frac{E_m}{f_f} + \frac{E_f}{f_m}\right)} (\alpha_f - \alpha_m) \quad (47b)$$

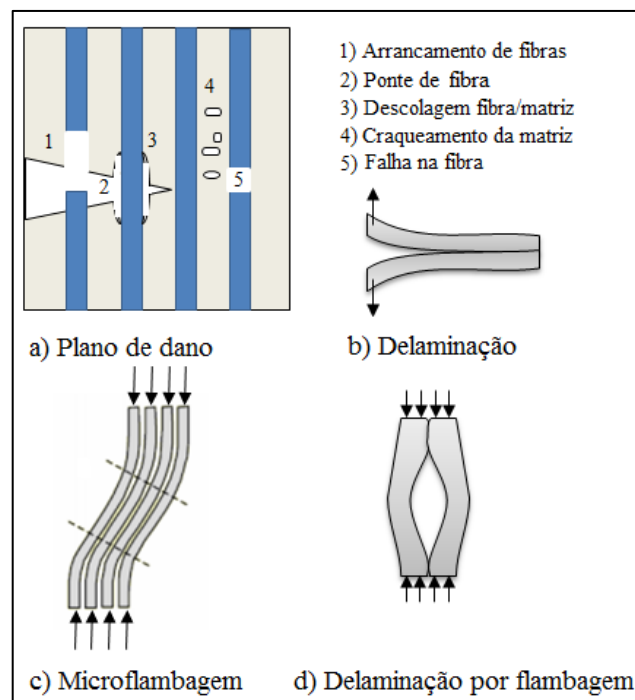
onde α_f e α_m são os coeficientes de dilatação térmica da fibra e da matriz, respectivamente.

4 CRITÉRIOS DE FALHA DE UMA LÂMINA

4.1 Modos de falha

Uma das análises mais importantes ao se projetar qualquer componente é a verificação das possíveis falhas na estrutura. De maneira geral, um elemento estrutural falha quando deixa de realizar sua função adequadamente. No caso dos materiais compósitos, a falha pode se dar das seguintes maneiras: quebra das fibras, microtrincamento da matriz, separação das fibras da matriz (descolamento das fibras) e separação das lâminas do laminado compósito (delaminação). A Figura 21 apresenta alguns exemplos de mecanismos de falhas em compósitos reforçados com fibras.

Figura 21- Exemplos de mecanismos de falha em compósitos reforçados com fibras.



(Fonte: Autor, 2016).

No mecanismo de falha de um material compósito, a quebra da fibra ocorre quando uma trinca se propaga na direção transversal ao seu comprimento, como a fibra é o elemento mais resistente à tração, essa fratura acaba provocando a separação do laminado.

A fratura da matriz ocorre quando uma trinca contorna a fibra, provocando a ruptura completa do compósito. Um fenômeno que promove o aumento da energia de fratura e, consequentemente, da tenacidade, é a ramificação das trincas na matriz (Silvestre Filho,

2001). Esta ramificação se origina a partir do encontro de uma trinca e uma fibra, que se forem perpendiculares entre si, produzem ramificações paralelas à fibra.

Com relação à interface, os mecanismos de falhas dependem da interação físico-química entre os constituintes do material compósito. Uma fraca interação entre as fibras e a matriz, por exemplo, pode levar a falha por descolagem (mecanismo 3, Figura 21a). Por outro lado, para os compósitos com uma forte interação, poderá ocorrer o rompimento da fibra (mecanismo 1, Figura 21a).

Outro importante mecanismo de falha presente nos materiais compósitos é a delaminação. Ela ocorre quando camadas adjacentes separam-se fisicamente devido a elevada intensidade de tensões ortogonais ao plano da lâmina (Figuras 21b e 21d).

4.2 Critérios de falha de lâminas

Existe uma variedade de critérios de falha para lâminas com fibras unidirecionais propostos na literatura, o que se justifica pelos diferentes comportamentos exibidos por diferentes materiais. A partir das tensões e/ou deformações calculadas em um sistema de coordenadas locais, é possível escolher o critério de falha mais adequado para avaliar a capacidade do laminado de resistir a um determinado conjunto de esforços.

Segundo Angélico (2009), a análise de falha de um laminado pode-se guiar por dois conceitos: falha da primeira camada (FPF – “*first ply failure*”) ou falha última do laminado (ULF - “*ultimate laminate failure*”). Na abordagem FPF, considera-se que a falha do laminado ocorre quando a primeira camada (ou grupo de camadas) falha. Esta abordagem é mais conservadora, pois requer somente a aplicação de um critério de falha. Por outro lado, o UFL considera que a falha do laminado ocorrerá para a máxima carga suportada (carga última). Nesse caso, além dos critérios de falha, são necessárias leis de degradação das propriedades mecânicas em decorrência do processo de falha, uma vez que este é progressivo, considerando a redistribuição dos esforços pelas camadas.

De acordo com Daniel e Ishai (2006), as teorias de falha podem ser classificadas em três grupos:

- a) Critérios não-interativos: Critérios nos quais as tensões ou deformações em cada direção são consideradas isoladamente, sem interação, como por exemplo, critérios da Máxima Tensão e Máxima Deformação.
- b) Critérios interativos: São critérios que consideram a interação entre as diferentes componentes de tensões para a falha do material, ao invés de considerá-las separadamente. Em

geral, não se tem uma identificação do modo de falha. Estes critérios apresentam formulações mais complexas, como os de Tsai-Hill e Tsai-Wu;

c) Critérios parcialmente interativos: São critérios nos quais as tensões em todas as direções são consideradas conjuntamente, entretanto, as falhas da fibra e da matriz são descritas por expressões distintas específicas. Critérios como os de Hashin-Rotem e de Puck pertencem a esta categoria.

A seguir, serão apresentados alguns dos principais critérios de falha existentes na literatura. Serão utilizados os valores de resistência e de deformação última limite do material, os quais são expressos através das variáveis:

F_{1T} e F_{2T} : Limite de resistência à tração nas direções 1 e 2, respectivamente;

F_{1C} e F_{2C} : Limite de resistência à compressão nas direções 1 e 2, respectivamente;

F_{12} : Limite de resistência ao cisalhamento no plano 1 – 2;

ε_{1T} e ε_{2T} : Deformação de falha em tração nas direções 1 e 2, respectivamente;

ε_{1C} e ε_{2C} : Deformação de falha em compressão nas direções 1 e 2, respectivamente;

γ_6 : Deformação de cisalhamento de falha no plano 1 – 2;

4.2.1 Critério da Máxima Tensão

Neste critério, a falha ocorre quando qualquer das componentes de tensão exceder os valores de resistência correspondente aos eixos do material. Matematicamente, têm-se:

$$|\sigma_1| = \begin{cases} F_{1T} & (\sigma_1 > 0) \\ F_{1C} & (\sigma_1 < 0) \end{cases} \quad (48a)$$

$$|\sigma_2| = \begin{cases} F_{2T} & (\sigma_2 > 0) \\ F_{2C} & (\sigma_2 < 0) \end{cases} \quad (48b)$$

$$|\tau_{12}| = F_{12} \quad (48c)$$

O critério da máxima tensão é intuitivo e de simples implementação, além de possibilitar a diferenciação entre tensões de tração e compressão. Porém, em estados de tensão multiaxiais, devido à interação entre tensões não ser considerada pela envoltória de falha adotada, o critério pode apresentar resultados ruins (Rocha, 2010).

4.2.2 Critério da Máxima Deformação

Nesse critério, a falha ocorre quando uma das componentes de deformação ao longo dos eixos principais do material excede a deformação última nessa direção. O critério da máxima deformação pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \varepsilon_{1T} & (\varepsilon_1 > 0) \\ \varepsilon_{1C} & (\varepsilon_1 < 0) \end{cases} \quad (49a)$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} \varepsilon_{2T} & (\varepsilon_2 > 0) \\ \varepsilon_{2C} & (\varepsilon_2 < 0) \end{cases} \quad (49b)$$

$$|\gamma_6| = 2|\varepsilon_{12}| \quad (49c)$$

As deformações últimas podem ser encontradas diretamente pelos parâmetros de resistência máxima e módulos elásticos, para isso, assume-se que a resposta de tensão-deformação é linear até a falha. O critério de máxima deformação é similar ao critério da máxima tensão, em que nenhuma interação ocorre entre os vários componentes de deformação. No entanto, de acordo com Kaw (2006), as duas teorias de falha dão resultados diferentes, pois as deformações locais de uma lâmina incluem o efeito do coeficiente de Poisson.

4.2.3 Critério de Tsai-Hill

Trata-se de um critério adaptado para materiais ortotrópicos a partir do critério de von Mises, originalmente formulado para plasticidade de metais. O critério de von Mises parte da pressuposição de que um estado de tensão pode ser decomposto em um estado de tensão hidrostático e um estado de tensão desviador, assumindo que somente este último estado contribui para o escoamento do material.

O critério de von Mises para o caso de estado plano de tensão é dado por:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_{yp}^2 \quad (50)$$

onde σ_{yp} é a tensão de escoamento do material.

Hill (1948) modificou o critério de von Mises para materiais anisotrópicos e, posteriormente, Azzi e Tsai (1965) adaptaram o critério de Hill para uma lâmina ortotrópica de material compósito. Após algumas considerações, o critério de Tsai-Hill pode ser descrito como:

$$\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{F_{12}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2} = 1 \quad (51)$$

onde

$$F_1 = \begin{cases} F_{1T} & (\sigma_1 > 0) \\ F_{1C} & (\sigma_1 < 0) \end{cases} \quad (52a)$$

$$F_2 = \begin{cases} F_{2T} & (\sigma_2 > 0) \\ F_{2C} & (\sigma_2 < 0) \end{cases} \quad (52b)$$

Este critério não identifica o modo de falha ocorrido, entretanto, tem-se a vantagem de calcular o índice de falha a partir de uma única expressão que reúne todas as componentes que definem o estado de tensão num ponto material da estrutura.

Para um dado estado de tensões numa lâmina $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$, pode-se definir um estado de tensão crítico de falha como sendo $(F_s\sigma_1, F_s\sigma_2, F_s\tau_{12})$, onde F_c é um fator de carga pelo qual todos os componentes de tensão devem ser multiplicados para chegar à falha da lâmina. No caso do critério de Tsai-Hill, tem-se:

$$F_c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{F_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{F_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{F_{12}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{F_1^2}}} \quad (53)$$

4.2.4 Critério de Tsai-Wu

Este critério é baseado na teoria da máxima energia de deformação de Beltrami. Tsai e Wu (1971) aplicaram esta teoria de falha para uma lâmina de material compósito em estado plano de tensões. A falha da lâmina é atingida se a condição:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{66}\sigma_{12}^2 < 1 \quad (54)$$

é violada, onde

$$f_1 = \frac{1}{F_{1T}} + \frac{1}{F_{1C}} \quad (55a)$$

$$f_2 = \frac{1}{F_{2T}} + \frac{1}{F_{2C}} \quad (55b)$$

$$f_{11} = \frac{1}{F_{1T}F_{1C}} \quad (55c)$$

$$f_{22} = -\frac{1}{F_{2T}F_{2C}} \quad (55d)$$

$$f_{66} = \frac{1}{F_{12}^2} \quad (55e)$$

A única componente que não pode ser determinada diretamente a partir dos cinco parâmetros de resistência é f_{12} . Esta componente é determinada experimentalmente e pode assumir valores diversos dependendo do tipo de experimento realizado. Uma boa aproximação é dada por Tsai (1980):

$$f_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{f_{11}f_{22}} \quad (55f)$$

Para o critério de falha de Tsai-Wu, o fator de carga pode ser obtido através da seguinte equação:

$$AF_c^2 + BF_c - 1 = 0 \quad (56a)$$

onde,

$$A = f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 + f_{66}\sigma_{12}^2 \quad (56b)$$

$$B = f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 \quad (56c)$$

O fator de carga é então a menor raiz F_c que seja maior que zero.

4.2.5 Critério de falha de Puck

O critério de Puck (Puck e Schürmann (1998), Puck e Schürmann (2002) e Puck *et al.* (2002)) é baseado no critério de Hashin (1980) e divide a análise de falhas em duas categorias: falha na fibra (*fiber failure – FF*) e falha entre fibras (*inter-fiber failure – IFF*).

Esse critério detecta dois diferentes modos de *FF*, sendo a primeira uma falha devido à tração e a segunda devido à compressão. As expressões para o cálculo de *FF* são:

a) Falha na fibra por tração:

$$\frac{1}{\varepsilon_{1T}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2 \right) = 1 \quad (57a)$$

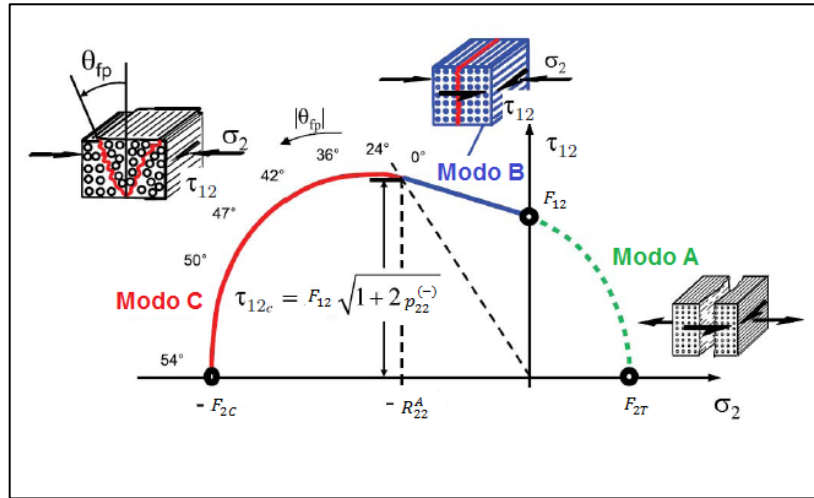
b) Falha na fibra por compressão:

$$\frac{1}{\varepsilon_{1C}} \left| \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2 \right| = 1 - (10\gamma_6)^2 \quad (57b)$$

onde ε_1 e $m_{\sigma f}$ são, respectivamente, a deformação axial do compósito e o fator de fibras destinado a captar as diferenças de tensões transversais entre a fibra e a matriz. Puck e Schürmann (1998) fornecem os valores para as fibras de carbono $m_{\sigma f} \approx 1,1$ e vidro $m_{\sigma f} \approx 1,3$.

A falha entre fibras (*IFF*) engloba qualquer quebra de matriz ou a descolagem da fibra-matriz. O critério de Puck reconhece três modos de falha *IFF* diferentes, referidos como Modos A, B, e C. A Figura 22 representa as superfícies de falhas dos modos apresentados nas equações (58) no plano (σ_2, τ_{12}) .

Figura 22- Superfície de falha.



(Fonte: Puck *et al.* (2002), adaptado pelo autor, 2016).

O Modo A ocorre quando a tensão transversal no compósito é de tração (indicando, assim, uma fenda transversal perpendicular ao carregamento transversal). O critério de falha para o Modo A é dado por:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{12}}{F_{12}}\right)^2 + \left(1 - p_{21}^{(+)} \frac{F_{2T}}{F_{12}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{F_{2T}}\right)^2} + p_{21}^{(+)} \frac{\sigma_2}{F_{12}} = 1 - \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}}\right|, \quad \sigma_2 \geq 0 \quad (58a)$$

O Modo B corresponde a uma tensão de compressão transversal (inibição da formação de fenda) com uma tensão de corte longitudinal que é abaixo da resistência à fratura. O critério do Modo B é dado por:

$$\frac{\sqrt{\tau_{12}^2 + \left(p_{21}^{(-)} \sigma_2\right)^2} + p_{21}^{(-)} \sigma_2}{F_{12}} = 1 - \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}}\right|, \quad \sigma_2 < 0 \text{ e } 0 \leq \left|\frac{\sigma_2}{\tau_{12}}\right| \leq \frac{R_{22}^A}{\tau_{12c}} \quad (58b)$$

Por fim, o Modo C corresponde a uma tensão de compressão transversal (inibição da formação de fenda) com uma tensão de corte longitudinal que é significativamente grande o suficiente para causar fratura em um plano inclinado em relação ao eixo da fibra. O critério de falha para o modo C é:

$$\left[\left(\frac{\tau_{12}}{2(1 + p_{22}^{(-)})F_{12}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{F_{2c}} \right)^2 \right] \frac{F_{2c}}{-\sigma_2} = 1 - \left| \frac{\tau_{12}}{\sigma_2} \right|, \sigma_2 < 0 \text{ e } 0 \leq \left| \frac{\tau_{12}}{\sigma_2} \right| \leq \frac{\tau_{12c}}{R_{22}^A} \quad (58c)$$

onde:

R_{22}^A = Resistência do plano de ação contra a fratura devido à tensão cisalhante atuante neste plano;

$p_{21}^{(+)}, p_{21}^{(-)}$ e $p_{22}^{(-)}$ = Inclinações da superfície de falha;

σ_{1D} = Valor de tensão para a degradação linear;

τ_{12c} = Tensão cisalhante do ponto de transição da curva de fratura;

Os parâmetros R_{22}^A e τ_{21c} são dados por:

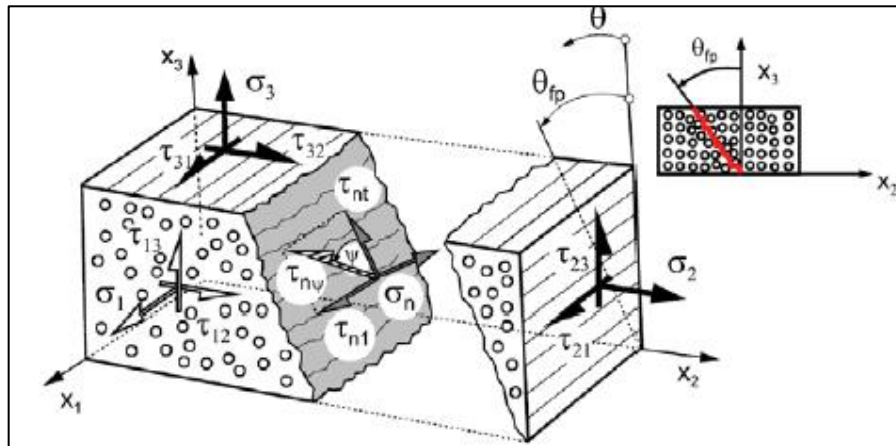
$$R_{22}^A = \frac{F_{2c}}{2(1 + p_{22}^{(-)})} \quad (59a)$$

$$\tau_{21c} = F_{12} \sqrt{1 + p_{22}^{(-)}} \quad (59b)$$

Puck também define o conceito de plano de ação (Figura 23), plano onde potencialmente se dará a ruptura da matriz. Nos modos A e B, tem-se um ângulo de falha (θ_{fp}) nulo, enquanto que, no modo C esse ângulo varia entre 0° e 55° e pode ser calculado através da equação (60).

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{1}{2(1 + p_{22}^{(-)})} \left[\left(\frac{R_{22}^A \tau_{12}}{F_{12} \sigma_{22}} \right)^2 + 1 \right]} \quad (60)$$

Figura 23-Tensões no plano de fratura e ângulo de fratura.



(Fonte: Knops, 2008).

O critério de resistência do plano de ação de Puck depende de seis parâmetros independentes, dos quais três são parâmetros de resistência (F_{12} , F_{2C} e F_{2T}) e três são de inclinação ($p_{21}^{(+)}$, $p_{21}^{(-)}$, $p_{22}^{(-)}$). Para os parâmetros de inclinação, Puck *et al.* (2002) recomendam os valores apresentados na Tabela 1 a dois tipos diferente de materiais compósitos com 60% de fração volumétrica de fibra.

Tabela 1- Valores típicos de inclinações.

	$p_{21}^{(+)}$	$p_{21}^{(-)}$	$p_{22}^{(-)}$
Fibra de vidro / Epóxi	0,30	0,25	0,20 a 0,25
Fibra de carbono / Epóxi	0,35	0,3	0,25 a 0,30

(Fonte: Puck *et al.*, 2002).

De forma análoga aos dois critérios anteriores, pode-se obter um fator de carga para o caso do critério de Puck.

5 MODELOS ANALÍTICOS PARA TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS

Lekhnitskii (1968, 1981) deduziu formulações analíticas genéricas para os principais casos de carregamento em geometrias curvilíneas para várias relações constitutivas anisotrópicas. Portanto, seu estudo é uma sólida referência na área de projetos estruturais para materiais anisotrópicos, sendo muito utilizado por diversos autores para a elaboração de novas pesquisas no desenvolvimento de tubos de materiais compósitos. No tópico a seguir, serão apresentadas algumas dessas formulações.

5.1 Formulação básica para tubos de materiais compósitos (Lekhnitskii, 1981)

Para a elaboração dessa formulação, assume-se que o eixo de anisotropia coincide com o eixo geométrico do corpo (eixo z), as ações na superfície interna e externa são normais e distribuídas uniformemente, e que as tensões que atuam nas extremidades se reduzem a forças que são direcionadas ao longo do eixo.

Sejam, então, R e Θ as forças de volume e $\bar{U}(r, \theta)$ o potencial associado por Lekhnitskii (1981):

$$R = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \quad \Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \quad (61)$$

Para esse caso, temos, respectivamente, as seguintes equações de equilíbrio e relações constitutivas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_r - \bar{U})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_\theta - \bar{U})}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= S_{11}\sigma_r + S_{12}\sigma_\theta + S_{13}\sigma_z + S_{14}\tau_{\theta z} + S_{15}\tau_{rz} + S_{16}\tau_{r\theta} \\ \varepsilon_\theta &= S_{12}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{23}\sigma_z + S_{24}\tau_{\theta z} + S_{25}\tau_{rz} + S_{26}\tau_{r\theta} \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_r + S_{32}\sigma_\theta + S_{33}\sigma_z + S_{34}\tau_{\theta z} + S_{35}\tau_{rz} + S_{36}\tau_{r\theta} \\ \gamma_{z\theta} &= S_{14}\sigma_r + S_{24}\sigma_\theta + S_{34}\sigma_z + S_{44}\tau_{\theta z} + S_{45}\tau_{rz} + S_{46}\tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= S_{15}\sigma_r + S_{25}\sigma_\theta + S_{35}\sigma_z + S_{45}\tau_{\theta z} + S_{55}\tau_{rz} + S_{56}\tau_{r\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= S_{16}\sigma_r + S_{26}\sigma_\theta + S_{36}\sigma_z + S_{46}\tau_{\theta z} + S_{56}\tau_{rz} + S_{66}\tau_{r\theta}\end{aligned}$$

Considerando-se a deformação normal na direção z igual a D e em seguida isolando a tensão normal nesta direção, tem-se:

$$\sigma_z = \frac{D}{S_{33}} - \frac{1}{S_{33}}(S_{13}\sigma_r + S_{32}\sigma_\theta + S_{34}\sigma\tau_{\theta z} + S_{35}\tau_{rz} + S_{36}\tau_{r\theta}) \quad (64)$$

Introduzindo o coeficiente de deformação reduzido:

$$\beta_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (65)$$

e colocando as deformações como funções dos deslocamentos, pode-se reescrever as expressões de (63) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta + \dots + \beta_{16}\tau_{r\theta} + \frac{S_{13}}{S_{33}}D \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} &= \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta + \dots + \beta_{26}\tau_{r\theta} + \frac{S_{23}}{S_{33}}D \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= D \\ \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} &= \beta_{14}\sigma_r + \beta_{24}\sigma_\theta + \dots + \beta_{46}\tau_{r\theta} + \frac{S_{34}}{S_{33}}D \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \beta_{15}\sigma_r + \beta_{25}\sigma_\theta + \dots + \beta_{56}\tau_{r\theta} + \frac{S_{35}}{S_{33}}D \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= \beta_{16}\sigma_r + \beta_{26}\sigma_\theta + \dots + \beta_{66}\tau_{r\theta} + \frac{S_{36}}{S_{33}}D\end{aligned} \quad (66)$$

Integrando a terceira, quarta e quinta equações de (66), obtêm-se os deslocamentos com três novas funções de integração $U(r, \theta)$, $V(r, \theta)$ e $W(r, \theta)$ escritas simplesmente por U , V e W . Além disso, para satisfazer a primeira, segunda e sexta equações de (66), D será função linear das coordenadas cartesianas x e y e, em termos de coordenadas cilíndricas, se expressa como:

$$D = Ar \cos \theta + Br \sin \theta + C \quad (67)$$

Depois de algumas manipulações matemáticas, Lekhnitskii (1981) obteve um sistema de três equações para U e V (correspondente à primeira, segunda e sexta equações de (66)) e um sistema com duas equações para W (equivalente a quinta e quarta expressões de (66)) dados por:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r} = \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta + \dots + \beta_{16}\tau_{r\theta} + \frac{S_{13}}{S_{33}}D \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} = \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta + \dots + \beta_{26}\tau_{r\theta} + \frac{S_{23}}{S_{33}}D \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} = \beta_{16}\sigma_r + \beta_{26}\sigma_\theta + \dots + \beta_{66}\tau_{r\theta} + \frac{S_{36}}{S_{33}}D \end{cases} \quad (68a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial r} = \beta_{15}\sigma_r + \beta_{25}\sigma_\theta + \dots + \beta_{56}\tau_{r\theta} + \frac{S_{35}}{S_{33}}D \\ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = \beta_{14}\sigma_r + \beta_{24}\sigma_\theta + \dots + \beta_{46}\tau_{r\theta} + \frac{S_{34}}{S_{33}}D \end{cases} \quad (68b)$$

Eliminando as funções U, V e W destes sistemas, obtém-se um novo sistema com apenas duas equações, somente em função das tensões. Para eliminar U e V do sistema (68a) é utilizada a identidade (Lekhnitskii, 1981):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \varepsilon_r + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_\theta) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \gamma_{r\theta}) = 0 \quad (69)$$

A eliminação da função W do sistema (68b) é feita por meio de diferenciação e subtração.

Quando as funções U, V e W são encontradas as projeções dos deslocamentos são determinados por:

$$u_r = -\frac{z^2}{2} (A \cos \theta + B \sin \theta) + U + u'_r \quad (70a)$$

$$u_\theta = -\frac{z^2}{2} (B \cos \theta - A \sin \theta) + V + \vartheta r z + u'_\theta \quad (70b)$$

$$w = z(Ar \cos \theta - Br \sin \theta + C) + W + w' \quad (70c)$$

Nestas equações estão incluídos os deslocamentos de corpo rígido escritos por:

$$u'_r = z(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) + u_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta \quad (71a)$$

$$u'_\theta = -z(\omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta) + \omega_3 r - u_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta \quad (71b)$$

$$w' = -r(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) + w_0 \quad (71c)$$

onde as constantes arbitrárias ω_1 , ω_2 , ω_3 e u_0 , v_0 , w_0 são, respectivamente, as componentes de rotação e translação do corpo sobre os três eixos de coordenadas r , θ , z .

Por fim, as componentes de tensão são dadas pelas equações:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \bar{U} \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \bar{U} \quad (72)$$

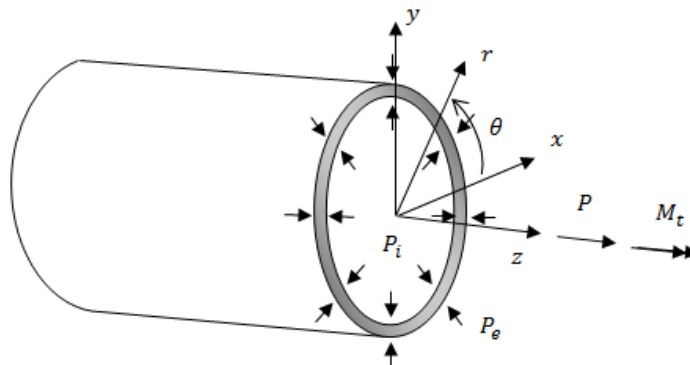
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{F}{r} \right) \quad \tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$\sigma_z = C - \frac{1}{S_{33}} (S_{13} \sigma_r + S_{32} \sigma_\theta + S_{34} \sigma \tau_{\theta z} + S_{35} \tau_{rz} + S_{36} \tau_{r\theta}) \quad (72b)$$

onde C é uma constante de integração, \bar{U} é a energia potencial do corpo e Ψ , F são as funções de Airy e de tensão, respectivamente. De acordo com Lekhnitskii (1981), essas funções podem ser obtidas através das expressões (68), (69) e (72).

Além disso, pode-se afirmar que, mesmo no caso geral de anisotropia, apresentado na Figura 24, a distribuição axialmente simétrica das forças externas produzem tensões idênticas em toda seção transversal e, portanto, dependentes apenas da variável r . Igualmente, Ψ e F também são funções de uma única variável r .

Figura 24- Caso geral de anisotropia.



(Fonte: Autor, 2016).

Devido a essa simetria, tem-se $\bar{U} = 0$. Logo, as expressões de tensões podem ser reescritas como:

$$\sigma_r = \frac{F''}{r} \quad \sigma_\theta = F'' \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \tau_{rz} = 0 \quad \tau_{\theta z} = -\Psi' \quad (73)$$

onde o sobrescrito indica derivada.

O sistema de equação para o cálculo de F e Ψ é dado por Lekhnitskii (1981) na forma:

$$\begin{cases} \beta_{22} \left(F^{IV} + \frac{2F'''}{r} \right) + \beta_{11} \left(-\frac{F''}{r^2} + \frac{F'}{r^3} \right) - \beta_{24} \Psi'''' + (\beta_{14} - 2\beta_{24}) \frac{\Psi'''}{r} = 0 \\ -\beta_{24} F'''' - (\beta_{14} + \beta_{24}) \frac{F''}{r} + \beta_{44} \left(\Psi''' + \frac{\Psi'}{r} \right) = \frac{CS_{34}}{r} - 2\vartheta \end{cases} \quad (74)$$

cuja solução geral é expressa como:

$$F = C_0 \frac{\beta_{14}}{\beta_{11}} r + \frac{C_1}{2} r^2 + \frac{C_2}{1+k} r^{1+k} + \frac{C_3}{1-k} r^{1-k} + C_4 + \frac{\vartheta \mu_1}{3} r^3 \quad (75a)$$

$$\Psi = C_0 \ln r + C \frac{S_{34}}{\beta_{44} r} + C_1 g_1 r + \frac{C_2}{k} g_k r^k - \frac{C_3}{k} g_{-k} r^{-k} + C_5 - \frac{\vartheta \mu_2}{2} r^2 \quad (75b)$$

onde $g_k, g_1, g_{-k}, \mu_2, \mu_1$ e k são funções de β_{ij} dadas por:

$$k = \frac{\sqrt{\beta_{11}\beta_{44} - \beta_{14}^2}}{\sqrt{\beta_{22}\beta_{44} - \beta_{24}^2}} \quad g_k = \frac{\beta_{14} + k\beta_{24}}{\beta_{44}} \quad g_{-k} = \frac{\beta_{14} - k\beta_{24}}{\beta_{44}} \quad g_1 = \frac{\beta_{14} + \beta_{24}}{\beta_{44}} \quad (76)$$

$$\mu_1 = \frac{\beta_{14} - 2\beta_{24}}{4(\beta_{22}\beta_{44} - \beta_{24}^2) - (\beta_{11}\beta_{44} - \beta_{14}^2)} \quad \mu_2 = \frac{\beta_{14} - 4\beta_{24}}{4(\beta_{22}\beta_{44} - \beta_{24}^2) - (\beta_{11}\beta_{44} - \beta_{14}^2)}$$

Dentre as constantes C_i que aparecem em (75), C_4 e C_5 são nulas desde que as tensões correspondentes sejam nulas. As tensões são finalmente calculadas por:

$$\sigma_r = C_0 \frac{\beta_{14}}{\beta_{44}} \frac{1}{r} + C_1 + C_2 r^{k-1} + C_3 r^{-k-1} + \vartheta \mu_1 r \quad (77a)$$

$$\sigma_\theta = C_1 + C_2 k r^{k-1} - C_3 k r^{-k-1} + 2\vartheta \mu_1 r \quad (77b)$$

$$\tau_{\theta z} = -C_0 \frac{1}{r} - C \frac{S_{34}}{\beta_{44}} - C_1 g_1 - C_2 g_k r^{k-1} - C_3 g_{-k} r^{-k-1} + \vartheta \mu_2 r \quad (77c)$$

Com algumas considerações e a partir das condições de contorno na superfície (78a) e extremidades (78b), obtêm-se as constantes C_i , C e ϑ restantes. Para se determinar os deslocamentos a partir das tensões usam-se as equações constitutivas dadas pelas expressões de (63) e daí por integração obtêm-se os deslocamentos.

Condições de contorno são:

$$\sigma(r_i) = -P_i \quad \sigma(r_e) = -P_e \quad (78a)$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_z r dr = \frac{P}{2\pi} \quad \int_{r_i}^{r_e} \tau_{\theta z} r^2 dr = \frac{M_t}{2\pi} \quad (78b)$$

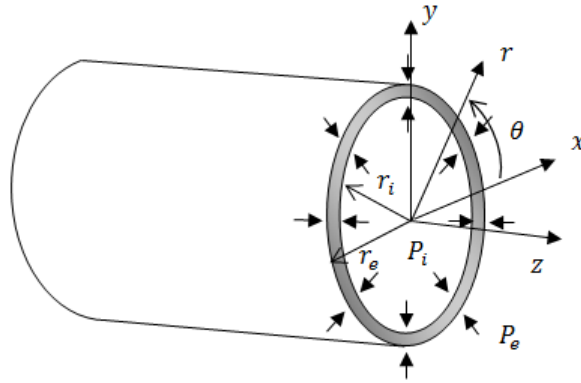
onde r_i é o raio interno do cilindro, r_e o raio externo e P_i , P_e , P e M_t a pressão interna, pressão externa, carga axial e momento de torção, respectivamente.

A seguir, são mostradas as equações para o cálculo de tensões em tubos dadas por Lekhnitskii (1968) com base nas expressões (77a) – (77c) e (72b) para os principais tipos de carregamentos.

Caso 1: Distribuições de tensões em um tubo sob a influência de pressões internas e externas.

Considere um cilindro fixado nas extremidades e que seja deformado por pressões P_i e P_e distribuídas uniformemente nas superfícies internas e externas, respectivamente, conforme mostra a Figura 25.

Figura 25-Tubo submetido a pressões interna e externas.



(Fonte: Autor, 2016).

Sendo r_i o raio interno e r_e o raio externo, as tensões no tubo para esse carregamento são dadas por (Lekhnitskii, 1968):

$$\sigma_r = \frac{P_i r_i^{k+1} - P_e r_e^{k+1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} r^{k-1} + \frac{q r_i^{k-1} - P_i r_e^{k-1}}{b^{2k} - r_i^{2k}} r_i^{k+1} r_e^{k+1} r^{-k-1} \quad (79a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i r_i^{k+1} - P_e r_e^{k+1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} k r^{k-1} - \frac{P_e r_i^{k-1} - P_i r_e^{k-1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} k r_i^{k+1} r_e^{k+1} r^{-k-1} \quad (79b)$$

$$\tau_{\theta r} = -\frac{P_i r_i^{k+1} - P_e r_e^{k+1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} g_k r^{k-1} - \frac{P_e r_i^{k-1} - P_i r_e^{k-1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} g_{-k} r_i^{k+1} r_e^{k+1} r^{-k-1} \quad (79c)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (79d)$$

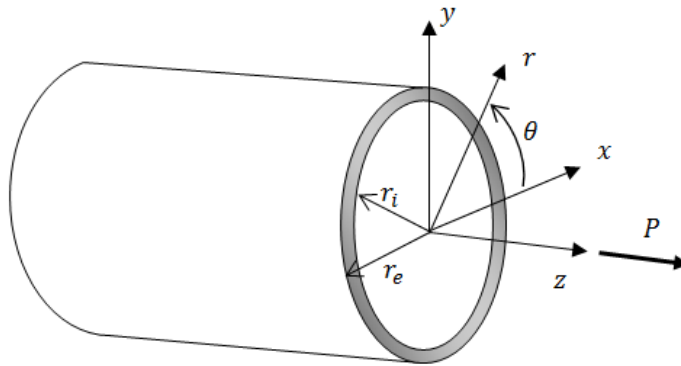
$$\sigma_z = -\frac{1}{S_{33}} \left(\frac{P_i r_i^{k+1} - P_e r_e^{k+1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} (S_{13} + k S_{23} - g_k S_{34}) r^{k-1} + \frac{P_e r_i^{k-1} - P_i r_e^{k-1}}{r_e^{2k} - r_i^{2k}} (S_{13} - k S_{23} - g_{-k} S_{34}) r_i^{k+1} r_e^{k+1} r^{-k-1} \right) \quad (79e)$$

Nas equações (79), S_{ij} representam os coeficientes de flexibilidade do material e k, g_k, g_{-k} as constantes dadas em (76).

Caso 2: Distribuição de tensões em um tubo sob a influência de força de tração.

Neste caso, o tubo é deformado somente por tensões distribuídas nas extremidades e reduzidas a uma força de tração P , conforme mostrado na Figura 26. As equações a seguir devem ser consideradas apenas nos casos onde existem planos de simetria elástico perpendiculares ao eixo z . Com base nas expressões (77) e (72b), e utilizando as condições de contorno mostradas em (78) com $P_i = P_e = M_t = 0$, obtêm-se (Lekhnitskii, 1968):

Figura 26-Tubo submetido à força de tração.



(Fonte: Autor, 2016).

$$\sigma_r = \frac{Ph}{N} \left(1 - \frac{r_e^{k_1+1} - r_i^{k_1+1}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} r^{k_1-1} - \frac{r_e^{k_1-1} - r_i^{k_1-1}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} r_i^{k_1+1} r_e^{k_1+1} r^{-k_1-1} \right) \quad (80a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{Ph}{N} \left(1 - \frac{r_e^{k_1+1} - r_i^{k_1+1}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} k_1 r^{k_1-1} - \frac{r_e^{k_1-1} - r_i^{k_1-1}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} k_1 r_i^{k_1+1} r_e^{k_1+1} r^{-k_1-1} \right) \quad (80b)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \quad (80c)$$

$$\sigma_z = \frac{P}{N} - \frac{Ph}{TS_{33}} \left(S_{13} + S_{23} - \frac{r_e^{k_1+1} - r_i^{k_1+1}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} (S_{13} + k_1 S_{23}) r^{k_1-1} - \frac{r_e^{k_1-1} - r_i^{k_1-1}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} (S_{13} - k_1 S_{23}) r_i^{k_1+1} r_e^{k_1+1} r^{-k_1-1} \right) \quad (80d)$$

onde

$$k_1 = \sqrt{\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}}; \quad h = \frac{S_{23} - S_{13}}{\beta_{11} - \beta_{22}} \quad (81a)$$

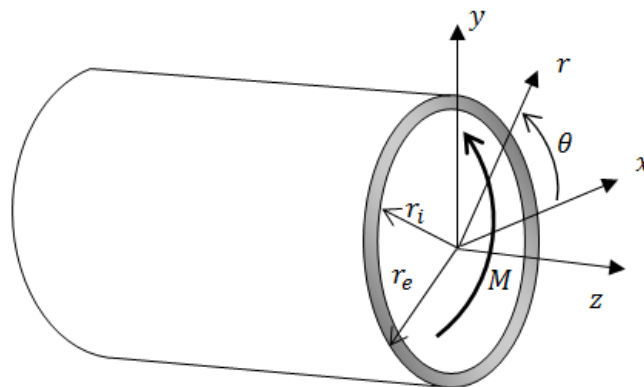
$$\begin{aligned}
N = -\frac{2\pi h}{S_{33}} \left[\frac{r_e^2 - r_i^2}{2} (S_{13} + S_{23}) - \frac{(r_e^{k_1+1} - r_i^{k_1+1})^2 S_{13} + k_1 S_{23}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} \frac{1}{k_1 + 1} \right. \\
\left. - \frac{(r_e^{k_1-1} - r_i^{k_1-1}) r_i^2 r_e^2 S_{13} - k_1 S_{23}}{r_e^{2k_1} - r_i^{2k_1}} \frac{1}{k_1 - 1} \right] \\
+ \pi(r_e^2 - r_i^2)
\end{aligned} \tag{81b}$$

Nesse caso é assumido que $\beta_{11} \neq \beta_{22}$, ou seja, $k_1 \neq 1$, que é para os materiais anisotrópicos. Se $k_1 = 1$, ter-se-ia um material isotrópico, logo, as equações anteriores seriam simplificadas.

Caso 3: Distribuição de tensões em um tubo sob a influência de momentos fletores aplicados nas extremidades.

Assume-se que um tubo, possuindo anisotropia cilíndrica (com o eixo de anisotropia coincidindo com o eixo geométrico), está em equilíbrio sob a ação de tensões distribuídas ao longo da extremidade e reduzidas a momento fletores (Figura 27).

Figura 27-Tubo submetido a momento fletor nas extremidades.



(Fonte: Autor, 2016).

De forma análoga ao caso 2, considera-se um caso especial de anisotropia onde todos os planos normais ao eixo são planos de simetria elástica e, portanto, um caso de tubo ortotrópico. As fórmulas para o cálculo de tensões são dadas por (Lekhnitskii, 1968):

$$\sigma_r = \frac{M\eta}{K} \left(r - \frac{r_e^{\gamma+2} - r_i^{\gamma+2}}{r_e^{2\beta} - r_i^{2\beta}} r^{n-1} - \frac{r_e^{\gamma-2} - r_i^{\gamma-2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} r_i^{\gamma+2} r_e^{\gamma+2} r^{-\gamma-1} \right) \sin \theta \quad (82a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{M\eta}{K} \left(3r - \frac{r_e^{\gamma+2} - r_i^{\gamma+2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} (1 + \gamma) r^{\gamma-1} - \frac{r_e^{\gamma-2} - r_i^{\gamma-2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} (1 - \gamma) r_i^{\gamma+2} r_e^{\gamma+2} r^{-\gamma-1} \right) \sin \theta \quad (82b)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{M\eta}{K} \left(r - \frac{r_e^{\gamma+2} - r_i^{\gamma+2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} r^{n-1} - \frac{r_e^{\gamma-2} - r_i^{\beta-2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} r_i^{\gamma+2} r_e^{\gamma+2} r^{-\gamma-1} \right) \sin \theta \quad (82c)$$

$$\sigma_z = \frac{Mr}{K} \sin \theta - \frac{M\eta}{KS_{33}} \left((S_{13} + 3S_{23})r - \frac{r_e^{\gamma+2} - r_i^{\gamma+2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} [S_{13} + (1 + \beta)S_{23}] r^{\gamma-1} - \frac{r_e^{\gamma-2} - r_i^{\gamma-2}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma}} [S_{13} + (1 - \gamma)S_{23}] r_i^{\gamma+2} r_e^{\gamma+2} r^{-\gamma-1} \right) \sin \theta \quad (82d)$$

sendo,

$$\eta = \frac{S_{23} - S_{13}}{\beta_{11} + 2\beta_{12} + \beta_{66} - 3\beta_{22}} \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{\beta_{11} + 2\beta_{12} + \beta_{66}}{\beta_{22}}} \quad (83)$$

$$K = \pi \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{4} - \frac{\pi\eta}{S_{33}} \left[(r_e^4 - r_i^4) \left(\frac{S_{13} + 3S_{23}}{4} \right) - \frac{(r_e^{\gamma+2} - r_i^{\gamma+2})^2 S_{13} + (1 + \gamma)S_{23}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma} (\gamma + 2)} - \frac{(r_e^{\gamma-2} - r_i^{\gamma-2})^2 r_i^4 r_e^4 S_{13} + (1 - \gamma)S_{23}}{r_e^{2\gamma} - r_i^{2\gamma} (\gamma - 2)} \right] \quad (84)$$

O caso de tubo submetido a momento de torção também pode ser visto em Lekhnitskii (1968, 1981). Como esse tipo de carregamento não faz parte do escopo do trabalho, as equações para os cálculos de tensões nessa situação não serão mostradas.

5.2 Análise de tubos de material compósito laminado sob o efeito combinado de pressão interna e carga térmica

A partir das formulações de Lekhnitskii (1968, 1981), vários pesquisadores desenvolveram estudos para análise de tubos de materiais compósitos laminados submetidos a diferentes tipos de carregamento. Dentre as cargas usuais, merece destaque o caso da pressão interna, considerando a função para a qual os tubos são normalmente projetados. Sendo assim,

procedimentos de análise para investigação do comportamento mecânico nessas condições de carregamento têm considerável relevância no que diz respeito à economia e eficiência dos projetos estruturais. Além disso, no desenvolvimento de estruturas laminadas, uma questão importante consiste na avaliação das tensões interlaminares e seus efeitos sobre o comportamento estrutural. Entre os diferentes fatores que influenciam no processo de delaminação, a distribuição de temperatura e as tensões térmicas resultantes são também de grande importância.

Bakaiyan *et al.* (2009) apresentam uma formulação analítica para o estudo de tensões e deformações em tubos laminados sob variações combinadas de pressão interna e temperatura. Tal procedimento de análise é mostrado a seguir.

5.2.1 Equações de condução de calor

A forma geral da equação governante de condução de calor em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k_c} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (85)$$

onde \dot{q} representa a taxa de geração de energia interna, k_c o coeficiente de condução de calor e α a difusividade térmica.

Considere um tubo de raios interno r_i e externo r_e . Devido ao longo comprimento e simetria axial (condição de estado estacionário), a distribuição de temperatura no tubo é uma função única do raio, quando não é gerado calor. A equação diferencial de fluxo de calor (85) é reduzida para:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (86)$$

Integrando a equação (86), tem-se:

$$T_a = A + B \ln r \quad (87)$$

A superfície externa está exposta à convecção livre com temperatura ambiente T_∞ , enquanto que a superfície interna está submetida ao processo de convecção forçada pelo fluido quente sob temperatura T_f , como descrito pelas seguintes equações:

$$-k_c \frac{\partial T}{\partial r} = \bar{h}_i (T_a - T_f) \quad \text{para } r = r_i \quad (88a)$$

$$-k_c \frac{\partial T}{\partial r} = \bar{h}_e (T_a - T_\infty) \quad \text{para } r = r_e \quad (88b)$$

onde \bar{h}_i e \bar{h}_e são os coeficientes de transferência de calor por convecção médios interno e externo, respectivamente. Usando as condições de contorno mencionadas acima, as constantes de integração A e B são dadas por:

$$A = \frac{k_c \left(\frac{T_f}{r_e \bar{h}_e} - \frac{T_\infty}{r_i \bar{h}_i} \right) + T_f \ln r_e - T_\infty \ln r_i}{k_c \left(\frac{1}{r_e \bar{h}_e} - \frac{1}{r_i \bar{h}_i} \right) + \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)} \quad (89a)$$

$$B = \frac{T_\infty - T_f}{k_c \left(\frac{1}{r_e \bar{h}_e} - \frac{1}{r_i \bar{h}_i} \right) + \ln \left(\frac{r_e}{r_i} \right)} \quad (89b)$$

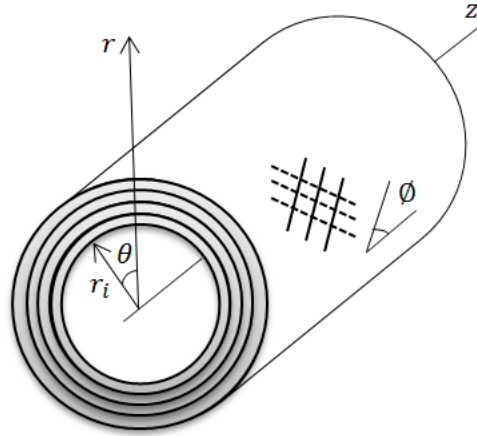
5.2.2 Análise de tensões e deformações

Considerando um tubo de material compósito laminado, conforme mostrado na Figura 28, submetido à carga termomecânica e pressão interna axissimétrica ($\partial/\partial\theta = 0$), ou seja, as tensões e deformações são independentes de θ e com o deslocamento axial e radial não dependendo das direções r e z , respectivamente, os campos de deslocamentos podem ser expressos por:

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = u_\theta(r, z), \quad u_z = u_z(z) \quad (90)$$

onde u_r , u_θ e u_z são, respectivamente, o deslocamento radial, circunferencial e axial.

Figura 28-Tubo composto laminado em coordenadas cilíndricas.



(Fonte: Autor, 2016).

A relação tensão-deformação da k -ésima lâmina de material ortotrópico são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{\theta r} \\ \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z - \alpha_z \Delta T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_\theta \Delta T \\ \varepsilon_r - \alpha_r \Delta T \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{z\theta} - 2\alpha_{z\theta} \Delta T \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (91a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k)} &= \bar{C}_{11}^{(k)} \varepsilon_z^{(k)} + \bar{C}_{12}^{(k)} \varepsilon_\theta^{(k)} + \bar{C}_{13}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{16}^{(k)} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_z^{(k)} \Delta T \\ \sigma_\theta^{(k)} &= \bar{C}_{12}^{(k)} \varepsilon_z^{(k)} + \bar{C}_{22}^{(k)} \varepsilon_\theta^{(k)} + \bar{C}_{23}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{26}^{(k)} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_\theta^{(k)} \Delta T \\ \sigma_r^{(k)} &= \bar{C}_{13}^{(k)} \varepsilon_z^{(k)} + \bar{C}_{23}^{(k)} \varepsilon_\theta^{(k)} + \bar{C}_{33}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{36}^{(k)} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_r^{(k)} \Delta T \\ \tau_{\theta r}^{(k)} &= \bar{C}_{44}^{(k)} \gamma_{\theta r}^{(k)} + \bar{C}_{45}^{(k)} \gamma_{zr}^{(k)} \\ \tau_{zr}^{(k)} &= \bar{C}_{45}^{(k)} \gamma_{\theta r}^{(k)} + \bar{C}_{55}^{(k)} \gamma_{zr}^{(k)} \\ \tau_{z\theta}^{(k)} &= \bar{C}_{16}^{(k)} \varepsilon_z^{(k)} + \bar{C}_{26}^{(k)} \varepsilon_\theta^{(k)} + \bar{C}_{36}^{(k)} \varepsilon_r^{(k)} + \bar{C}_{66}^{(k)} \gamma_{z\theta}^{(k)} - \xi_{z\theta}^{(k)} \Delta T \end{aligned} \quad (91b)$$

sendo

$$\begin{aligned} \xi_z^{(k)} &= \bar{C}_{11}^{(k)} \alpha_z^{(k)} + \bar{C}_{12}^{(k)} \alpha_\theta^{(k)} + \bar{C}_{13}^{(k)} \alpha_r^{(k)} + 2\bar{C}_{16}^{(k)} \alpha_{z\theta}^{(k)} \\ \xi_\theta^{(k)} &= \bar{C}_{12}^{(k)} \alpha_z^{(k)} + \bar{C}_{22}^{(k)} \alpha_\theta^{(k)} + \bar{C}_{23}^{(k)} \alpha_r^{(k)} + 2\bar{C}_{26}^{(k)} \alpha_{z\theta}^{(k)} \\ \xi_r^{(k)} &= \bar{C}_{13}^{(k)} \alpha_z^{(k)} + \bar{C}_{23}^{(k)} \alpha_\theta^{(k)} + \bar{C}_{33}^{(k)} \alpha_r^{(k)} + 2\bar{C}_{36}^{(k)} \alpha_{z\theta}^{(k)} \end{aligned} \quad (91c)$$

$$\xi_{z\theta}^{(k)} = \bar{C}_{16}^{(k)} \alpha_z^{(k)} + \bar{C}_{26}^{(k)} \alpha_\theta^{(k)} + \bar{C}_{36}^{(k)} \alpha_r^{(k)} + 2\bar{C}_{66}^{(k)} \alpha_{z\theta}^{(k)}$$

onde $C_{ij}^{(k)}$ e $\alpha_i^{(k)}$ são as constantes de rigidez e os coeficientes de dilatação térmica, respectivamente, e ΔT a diferença de temperatura, dada por:

$$\Delta T = T_a - T_{ref} \quad (92)$$

onde T_{ref} é a temperatura de referência e T_a a temperatura de distribuição obtida pela equação (87).

As relações deformações-deslocamentos podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(k)} &= \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, & \varepsilon_\theta^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k)}}{r}, & \varepsilon_z^{(k)} &= \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}, \\ \gamma_{z\theta}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z}, & \gamma_{zr}^{(k)} &= \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}, & \gamma_{\theta r}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta^{(k)}}{r} \right) \end{aligned} \quad (93)$$

enquanto que as equações de equilíbrio podem ser expressas nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^{(k)}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_\theta^{(k)}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^{(k)}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}^{(k)}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}^{(k)}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (94)$$

As equações (93) e (94) podem ser simplificadas utilizando as expressões dadas em (90). Reescrevendo as relações deformações-deslocamentos têm-se:

$$\varepsilon_r^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r}, \quad \varepsilon_z^{(k)} = \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} = \varepsilon_0 \quad (95a)$$

$$\gamma_{zr}^{(k)} = 0, \quad \gamma_{\theta r}^{(k)} = \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial r} - \left(\frac{u_\theta^{(k)}}{r} \right), \quad \gamma_{z\theta}^{(k)} = \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial z} = \gamma_0 r \quad (95b)$$

onde γ_0 tem a interpretação física da torção do tubo por unidade de comprimento, enquanto que as deformações axiais de toda lâmina são iguais a uma constante ε_0 .

Por fim, para o presente problema axissimétrico, as equações de equilíbrio tornam-se:

$$\frac{\partial \sigma_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\sigma_r^{(k)} - \sigma_\theta^{(k)}}{r} = 0 \quad (96a)$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}^{(k)}}{r} = 0 \quad (96b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}^{(k)}}{r} = 0 \quad (96c)$$

Integrando as equações (96b) e (96c), pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$\tau_{\theta r}^{(k)} = \frac{A^{(k)}}{r^2}, \quad \tau_{zr}^{(k)} = \frac{B^{(k)}}{r} \quad (97)$$

onde $A^{(k)}$ e $B^{(k)}$ são constantes de integração.

Substituindo as expressões de tensões da equação (91b) em (96a), e usando as equações (95a) e (95b), chega-se à seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u_r^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r^{(k)}}{dr} - \frac{\beta^{(k)2}}{r^2} u_r^{(k)} = \alpha^{(k)} \frac{\varepsilon_0}{r} + \delta^{(k)} \gamma_0 + \frac{\xi_r^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda^{(k)} \Delta T}{r} \quad (98a)$$

onde

$$\alpha^{(k)} = \frac{\bar{C}_{12}^{(k)} - \bar{C}_{13}^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}}, \quad \delta^{(k)} = \frac{\bar{C}_{26}^{(k)} - 2\bar{C}_{36}^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}}, \quad \beta^{(k)} = \sqrt{\frac{\bar{C}_{22}^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}}}, \quad \xi_r^{(k)} = \frac{\xi_r^{(k)} - \xi_\theta^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}} \quad (98b)$$

sendo $\frac{\bar{C}_{22}^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}} > 0$ e $\frac{\bar{C}_{22}^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}} \neq 1$, por se tratar de materiais anisotrópicos usados no presente estudo.

A solução da equação (98a) pode ser obtida por (Bakaiyan *et al.*, 2009):

$$u_r^{(k)} = D^{(k)}r^{\beta^{(k)}} + E^{(k)}r^{-\beta^{(k)}} + \left(\alpha_1^{(k)}\varepsilon_0 + \eta^{(k)}(A - T_{ref}) + \frac{\left(\frac{B\xi_r^{(k)}}{\bar{C}_{33}^{(k)}} - 2\eta^{(k)}B \right)}{(1 - \beta^{(k)2})} \right) r + \alpha_2^{(k)}\gamma_0 r^2 + \eta^{(k)}Br \ln r \quad (99a)$$

onde

$$\alpha_1^{(k)} = \frac{\alpha^{(k)}}{1 - \beta^{(k)2}}, \quad \alpha_2^{(k)} = \frac{\delta^{(k)}}{4 - \beta^{(k)2}}, \quad \eta^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{1 - \beta^{(k)2}} \quad (99b)$$

e $D^{(k)}$ e $E^{(k)}$ são constantes desconhecidas de integração determinadas a partir das condições de contorno e das condições de contato em cada interface entre camadas. A e B são constantes de condução de calor dadas pelas equações (89a) – (89b).

5.2.3 Propriedades das lâminas

As propriedades da lâmina são obtidas através das suas constantes de engenharia, definidas por: $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{31}, \nu_{32}, G_{11}, G_{22}, G_{33}$.

Para orientação unidirecional de fibras, pode-se considerar que as propriedades mecânicas nas direções 2 e 3 sejam as mesmas, ou seja, assumir o material como transversalmente isotrópico. Neste caso, têm-se:

$$E_2 = E_3, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{31} \quad (100a)$$

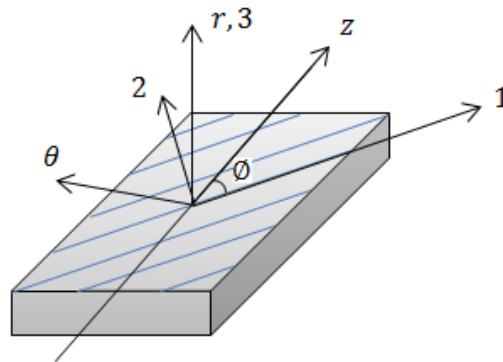
$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{32})} \quad (100b)$$

De posse das constantes elásticas, obtêm-se as componentes da matriz de flexibilidade S_{ij} utilizando as expressões apresentadas em (9). Pelas relações (100a), têm-se $S_{12} = S_{13}$, $S_{22} = S_{33}$ e $S_{66} = S_{55}$. Dessa forma, a relação tensão-deformação incluindo os efeitos térmicos será:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_3 - \alpha_3 \Delta T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (101)$$

Como mostrado anteriormente, as constantes elásticas C_{ij} são calculadas por meio das equações (11) – (12). A transformação da matriz de rigidez do sistema local da lâmina para o sistema de coordenadas cilíndricas globais do tubo, mostrado na Figura 29, é obtida através da equação (15).

Figura 29- Sistema de coordenadas da lâmina (1, 2, 3) e sistema de coordenada cilíndrico (r, θ , z).



(Fonte: Autor, 2016).

Os coeficientes de expansão térmica para o novo sistema de coordenadas, os quais são usados para avaliação das deformações não mecânicas, podem ser obtidos através de:

$$\begin{bmatrix} \alpha_z \\ \alpha_{z\theta} \\ \alpha_r \\ \alpha_{z\theta} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ cs & -cs & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}^{(k)} \quad (102)$$

onde $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ e φ é o ângulo que as fibras das lâminas fazem com o eixo do tubo.

5.2.4 Condições de contorno

As condições de contorno são impostas através das condições geométricas da estrutura e do carregamento. Supõe-se que não existem deslizamentos relativos nas interfaces das lâminas e que há continuidade nas tensões e deslocamentos. Estas condições de contorno permitem a determinação das constantes de integração.

Para um tubo submetido apenas à pressão interna P_i , têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\sigma_r^{(1)} = P_i \quad (103a)$$

$$\sigma_r^{(N)} = 0 \quad (103b)$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)}(r_i) = \tau_{zr}^{(1)}(r_i) = 0 \quad (103c)$$

$$\tau_{\theta r}^{(N)}(r_e) = \tau_{zr}^{(N)}(r_e) = 0 \quad (103d)$$

As condições de continuidade para os deslocamentos e tensões nas interfaces são expressas na forma:

$$u_r^{(k)}(r^k) = u_r^{(k+1)}(r^k) \quad k = 1, 2, 3 \dots, N \quad (104a)$$

$$\sigma_r^{(k)}(r_k) = \sigma_r^{(k+1)}(r_k) \quad (104b)$$

$$\tau_{zr}^{(k)}(r_k) = \tau_{zr}^{(k+1)}(r_k) \quad (104c)$$

$$\tau_{\theta r}^{(k)}(r_k) = \tau_{\theta r}^{(k+1)}(r_k) \quad (104d)$$

Além disso, as duas condições de equilíbrio global do tubo podem ser expressas por:

$$2\pi \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} \sigma_z^{(k)}(r) r dr = \pi r_i^2 P_i \quad (105a)$$

$$2\pi \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} \tau_{z\theta}^{(k)}(r) r^2 dr = 0 \quad (105b)$$

A primeira integral satisfaz o equilíbrio de força axial na extremidade do tubo devido à pressão interna, e a segunda integral é a condição de torção zero.

Substituindo as equações (103c), (103d), (104c) e (104d) em (97), obtêm-se as constantes de integração $A^{(k)} = B^{(k)} = 0$.

Para N lâminas, existem $2N + 2$ constantes de integração, as quais são $D^{(k)}, E^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$), ε_0 e γ_0 , que podem ser obtidas através de $2(N - 1)$ equações fornecidas por (104) adicionadas de mais quatro equações resultantes de (103) e (105). Por exemplo, para um tubo laminado com $N = 4$ as constantes de integração podem ser obtidas através de:

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} \\ D^{(2)} \\ D^{(3)} \\ D^{(4)} \\ E^{(1)} \\ E^{(2)} \\ E^{(3)} \\ E^{(4)} \\ \varepsilon_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & e_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & e_{21} & e_{22} & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & e_{32} & e_{33} & 0 & a_{31} & a_{32} \\ 0 & 0 & d_{43} & d_{44} & 0 & 0 & e_{43} & e_{44} & a_{41} & a_{42} \\ d_{51} & d_{52} & 0 & 0 & e_{51} & e_{52} & 0 & 0 & a_{51} & a_{52} \\ 0 & d_{62} & d_{63} & 0 & 0 & e_{62} & e_{63} & 0 & a_{61} & a_{62} \\ 0 & 0 & d_{73} & d_{74} & 0 & 0 & e_{73} & e_{74} & a_{71} & a_{72} \\ 0 & 0 & 0 & d_{84} & 0 & 0 & 0 & e_{84} & a_{81} & a_{82} \\ d_{91} & d_{92} & d_{93} & d_{94} & e_{91} & e_{92} & e_{93} & e_{94} & a_{91} & a_{92} \\ d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} & e_{01} & e_{02} & e_{03} & e_{04} & a_{01} & a_{02} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

onde d_{ij} , e_{ij} , a_{ij} e f_i são encontradas após a reorganização das equações de contorno, explicitando as constantes desconhecidas, conforme mostrado em (106). Uma vez que os valores de tais constantes são determinados, os deslocamentos, deformações e tensões podem ser calculados partir das equações (99), (95) e (91), respectivamente.

5.3 Análise de tubos de material compósito laminado sob o efeito de momento fletor nas extremidades

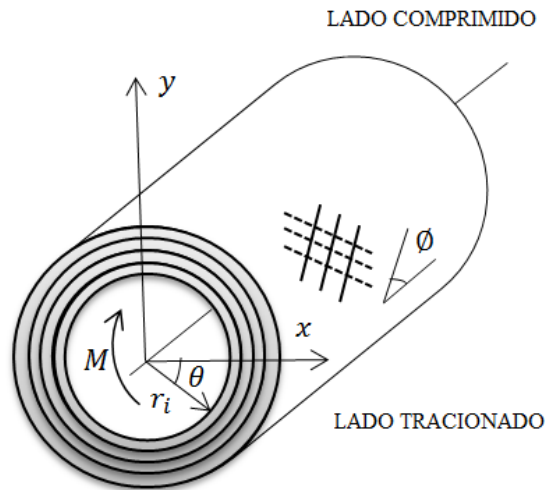
A investigação do comportamento de tubos compósitos submetido à flexão é de grande importância, uma vez que, em muitas aplicações, os tubos são apoiados em seções discretas, ficando então submetidos a momentos fletores introduzidos pelo seu peso próprio e dos fluidos por eles conduzidos. Conforme mostrado na seção 5.1 (Caso 3), Lekhnitskii (1981) fornece uma formulação para o caso de tubo anisotrópico com uma única lâmina e submetido a momento fletor, enquanto que Xia *et al.* (2002c) apresentam um estudo sobre o comportamento à flexão de tubos com parede sanduíche. Outras referências tratando deste assunto são Natsuki *et al.* (2003) e Menshykova e Guz (2014), as quais tratam do comportamento de tubos de compósitos com diferentes camadas e submetidos a flexão.

A seguir, apresenta-se uma formulação analítica para análise dos efeitos gerados por momentos fletores em tubos de materiais compósitos laminados, encontrada em Xia et al. (2002c) e baseada na teoria clássica de placas laminadas e em Lekhnitskii (1981).

5.3.1 Procedimento de análise do tubo sob flexão

Considere um tubo de material compósito laminado submetido à flexão, conforme mostra a Figura 30.

Figura 30- Tubo laminado submetido à flexão.



(Fonte: Autor, 2016).

Cada camada do tubo é assumida como sendo ortotrópica e constituída por duas lâminas. Para cada camada ortotrópica a equação constitutiva pode ser expressa na forma (Natsuki *et al.*, 2003):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (107)$$

onde as constantes de flexibilidades S_{ij} podem ser obtidas pela expressão:

$$(S_{ij}) = (Q_{ij})^{-1}(a_{ij})(P_{ij}) \quad (108)$$

sendo,

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{zy})}{E_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zz}} \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$(P_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 0 & -2cs & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & 0 & 2cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ 0 & cs & -cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \quad (110a)$$

$$(Q_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 0 & -cs & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & 0 & cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ 0 & 2cs & -2cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & c \end{bmatrix} \quad (110b)$$

onde $c = \cos \emptyset$ e $s = \sin \emptyset$.

5.3.2 Análise de tensões e deformações

Utilizando a equação (107), a relação tensão-deformação para cada lâmina individualmente pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= S_{11}\sigma_r + S_{12}\sigma_\theta + S_{13}\sigma_z \\ \varepsilon_\theta &= S_{12}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{23}\sigma_z \\ \varepsilon_z &= S_{13}\sigma_r + S_{22}\sigma_\theta + S_{33}\sigma_z \\ \gamma_{r\theta} &= S_{44}\tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (111)$$

A tensão na direção axial é dada por Lekhnitskii (1981) através da seguinte expressão:

$$\sigma_z = Ar \sin \theta - \frac{1}{S_{33}} (S_{13}\sigma_r + S_{23}\sigma_\theta) \quad (112)$$

Substituindo-se a equação (112) nas duas primeiras expressões de (111), obtêm-se as seguintes equações constitutivas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \beta_{11}\sigma_r + \beta_{12}\sigma_\theta + S_{13}Ar \sin \theta \\ \varepsilon_\theta &= \beta_{12}\sigma_r + \beta_{22}\sigma_\theta + S_{23}Ar \sin \theta \end{aligned} \quad (113)$$

onde β_{ij} é dado pela equação (64) com $i, j = 1, 2, 4$.

As componentes de tensão podem ser expressas da seguinte forma (Lekhnitskii, 1981):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{F}{r} \right) \end{aligned} \quad (114)$$

onde $F(r, \theta)$ é uma função de tensão que satisfaz a seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0 \quad (115)$$

Substituindo a equação (113) em (115) e usando as expressões dadas em (114), com a função de tensão de Lekhnitskii (1981), ou seja, $F(r, \theta) = f(r) \sin \theta$, a solução da equação diferencial (115) pode ser expressa na seguinte forma:

$$F(r, \theta) = \left(\frac{B}{\gamma} r^{1+\gamma} + \frac{C}{\gamma} r^{1-\gamma} + Dr \ln(r) + Er + \frac{A\eta}{2} r^3 \right) \sin \theta \quad (116)$$

onde A, B, C e D são constantes de integração. A constante D é igual a zero devido às simetrias do problema, enquanto que γ e η são obtidos pela equação (83).

Utilizando-se as equações (114) e (116), obtêm-se as componentes do campo de tensão:

$$\sigma_r = (Br^{-1+\gamma} - Cr^{-1-\gamma} + A\eta r) \sin \theta \quad (117)$$

$$\sigma_\theta = (B(1 + \gamma)r^{-1+\gamma} - C(1 - \gamma)r^{-1-\gamma} + 3A\eta r) \sin \theta$$

$$\tau_{r\theta} = -(Br^{-1+\gamma} - Cr^{-1-\gamma} + A\eta r) \cos \theta$$

Para determinar a tensão ao longo da direção axial, substitui-se (117) em (112) e chega-se com:

$$\sigma_z = (s_1 Br^{-1+\gamma} + s_2 Cr^{-1-\gamma} + s_3 Ar) \sin \theta \quad (118)$$

sendo

$$s_{1,2} = \mp \frac{S_{13} + S_{23}(1 \pm \gamma)}{S_{33}} \quad (119)$$

$$s_3 = 1 - \frac{(S_{13} + 3S_{23})\eta}{S_{33}}$$

As relações deformações-deslocamentos em coordenadas cilíndricas podem ser escritas na seguinte forma:

$$\varepsilon_r^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} \quad (120)$$

$$\varepsilon_\theta^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k)}}{r}$$

$$\gamma_{\theta r}^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta^{(k)}}{r} \right)$$

sendo u_r e u_θ expressos por (Xia *et al*, 2002):

$$u_r = (p_1 Br^\gamma + p_2 Cr^{-\gamma} + p_3 Ar^2) \sin \theta \quad (121)$$

$$u_\theta = (q_1 Br^\gamma + q_2 Cr^{-\gamma} + q_3 Ar^2) \cos \theta$$

Com

$$p_{1,2} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}(1 \pm \gamma)}{\gamma}, \quad p_3 = \frac{(\beta_{11} + 3\beta_{12})\eta + S_{13}}{2} \quad (122)$$

$$q_{1,2} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12} \mp \beta_{22}\gamma(1 \pm \gamma)}{\gamma}, \quad q_3 = \frac{(\beta_{11} + \beta_{12} - 6\beta_{22})\eta + S_{13} - 2S_{23}}{2} \quad (123)$$

5.3.3 Condições de contorno

Como o tubo não é submetido à pressão interna e externa têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\sigma_r(r_i) = \tau_{r\theta}(r_i) = 0 \quad (124)$$

$$\sigma_r(r_e) = \tau_{r\theta}(r_e) = 0$$

Para uma perfeita ligação entre as lâminas as condições de continuidade para deslocamentos e tensões são dadas por:

$$u_r^{(k)}(r_k) = u_r^{(k+1)}(r_k) \quad (125)$$

$$u_\theta^{(k)}(r_k) = u_\theta^{(k+1)}(r_k)$$

$$\tau_{r\theta}^{(k)}(r_k) = \tau_{r\theta}^{(k+1)}(r_k)$$

$$\sigma_r^{(k)}(r_k) = \sigma_r^{(k+1)}(r_k) \quad k = 1, 2, \dots, N - 1$$

A equação de equilíbrio relativa ao momento fletor pode ser dada pela seguinte relação:

$$\iint \sigma_z r^2 \sin \theta \, dr d\theta = M \quad (126)$$

Com as equações (124) – (126), obtém-se um sistema de equações que permite determinar as constantes desconhecidas que aparecem na solução da equação diferencial apresentada anteriormente. Para um tubo com N lâminas, existem $3N$ constantes. Usando $3(N - 1)$ condições de continuidade (125), duas condições de contorno (124) e a condição de equilíbrio de momento fletor (126), as referidas constantes podem ser determinadas.

Para um tubo com quatro lâminas, tem-se, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \\ B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ B^{(3)} \\ B^{(4)} \\ C^{(1)} \\ C^{(2)} \\ C^{(3)} \\ C^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & c_{32} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & b_{51} & b_{52} & 0 & 0 & c_{51} & c_{52} & 0 & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & b_{62} & b_{63} & 0 & 0 & c_{62} & c_{63} & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & 0 & 0 & b_{73} & b_{74} & 0 & 0 & c_{73} & c_{74} \\ a_{81} & a_{82} & 0 & 0 & b_{81} & b_{82} & 0 & 0 & c_{81} & c_{82} & 0 & 0 \\ 0 & a_{92} & a_{93} & 0 & 0 & b_{92} & b_{93} & 0 & 0 & c_{92} & c_{93} & 0 \\ 0 & 0 & a_{03} & a_{04} & 0 & 0 & b_{03} & b_{04} & 0 & 0 & c_{03} & c_{04} \\ 0 & 0 & 0 & a_{40} & 0 & 0 & 0 & b_{40} & 0 & 0 & 0 & c_{40} \\ d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} & d_{05} & d_{06} & d_{07} & d_{08} & d_{09} & d_{10} & d_{11} & d_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$$

onde a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} e d_{ij} são obtidos após a reorganização das equações de contorno.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

No presente capítulo são apresentados resultados de análises de tubos obtidos a partir das expressões analíticas mostradas no capítulo 5 e de critérios de falha descritos na seção 4.2. As análises são realizadas para diferentes configurações de lâminas e tipos de materiais compósitos. Para gerar os resultados foram utilizados códigos desenvolvidos usando a plataforma *Matlab*.

6.1 Comparação entre resultados experimentais e teóricos

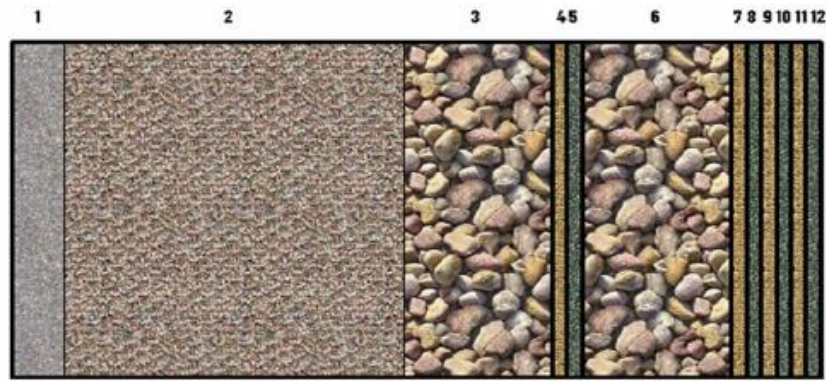
6.1.1 Considerações iniciais

Na primeira análise, realizou-se uma comparação entre resultados de falhas obtidos experimentalmente com os encontrados pelos critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Devido à falta de alguns parâmetros, não foi possível a utilização do critério de Puck nesta análise. Os resultados experimentais foram determinados por Barros (2007), Silva (2009) e Sayman *et al.* (2011) através de ensaios de pressão hidrostática.

Barros (2007) realizou ensaios em tubos de PRFV analisando a influência de camadas de areia em suas propriedades mecânicas. Essas camadas são adicionadas para que a peça atinja a rigidez necessária de maneira eficiente e com baixo custo. Os tubos ensaiados foram fabricados segundo recomendações da norma ANSI/AWWA C950-01 (American National Standards Institute, 2001) por bobinagem contínua e fibras de vidro-E inclinadas de $\pm 80^\circ$ em relação ao eixo longitudinal do tubo e impregnadas por resina poliéster ortoftálica. Estes tubos são encontrados comercialmente e utilizados no transporte de água, tendo classes de pressão e rigidez, respectivamente, igual a 1034 *kPa* e 248 *kPa* e diâmetro nominal de 300 *mm*.

As espessuras das camadas são mostradas na Tabela 2 e proporcionalmente representadas na Figura 31.

Figura 31- Representação proporcional das espessuras das camadas estimadas.



(Fonte: Mesquita, 2008).

Tabela 2- Valores médios das espessuras de cada camada.

Camadas/ Detalhes*	Espessura (mm)	Ângulo de Enrolamento (grau)	
1	Véu	0,370	Aplicação manual
2	Fibra picada	2,390	Aplicação manual
3	Areia	1,050	-
4	Vidro-E / Poliéster	0,105	+80
5	Vidro-E / Poliéster	0,105	-80
6	Areia	1,050	-
7	Vidro-E / Poliéster	0,105	+80
8	Vidro-E / Poliéster	0,105	-80
9	Vidro-E / Poliéster	0,105	+80
10	Vidro-E / Poliéster	0,105	-80
11	Vidro-E / Poliéster	0,105	+80
12	Vidro-E / Poliéster	0,105	-80

* Todas as camadas são impregnadas com resina poliéster ortoftálica.

(Fonte: Adaptado de Mesquita, 2008).

Os ensaios realizados por Silva (2009) envolveram quatro tubos de PVC revestidos por camadas de vidro-E/epóxi, sendo duas bobinadas a 90° (tubo 1 e 2) e duas bobinadas a $\pm 55^\circ$ (tubos 3 e 4). Essas camadas são adicionadas para aumentar a rigidez e resistência do material. As características geométricas desses tubos são dadas na Tabela 3.

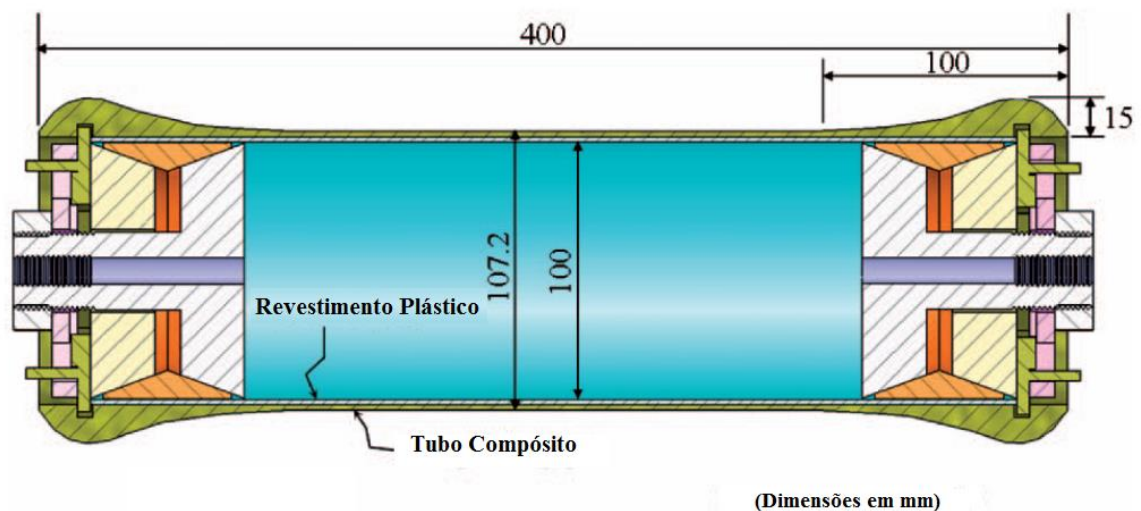
Tabela 3- Características geométricas dos tubos ensaiados.

Valores médios (mm)	Tubo 1	Tubo 2	Tubo 3	Tubo 4
Raio interno	54,38	53,78	53,18	54,41
Espessura (PVC)	1,80	1,80	1,80	1,80
Espessura (Compósito)	1,13	1,2	1,48	3,17

(Fonte: Silva, 2009).

Por fim, os testes de Sayman *et al.* (2011) foram realizados em tubos constituídos de um *liner* plástico e quatro camadas de vidro-E/epóxi, cada uma com duas lâminas, com diferentes configurações de laminado $[+\theta / -\theta / +\theta / -\theta]_2$. As espessuras das camadas do *liner* plástico e das camadas de compósitos foram de 2 mm e 1,6 mm, respectivamente. O diâmetro interno dos tubos era de 100 mm. A Figura 32 mostra a geometria do corpo de prova cilíndrico. Deve-se salientar que a formulação utilizada é válida apenas para região central (parte em azul) do corpo de prova. Contudo, como as falhas nos ensaios experimentais ocorreram nessa região, as expressões analíticas podem ser utilizadas para análise do problema.

Figura 32- Geometria do corpo de prova cilíndrico.



(Fonte: Sayman *et al.*, 2011)

A Tabela 4 apresenta as propriedades mecânicas dos materiais utilizados nos três trabalhos experimentais citados anteriormente. Como Barros (2007) não fornece esses valores foram utilizadas as propriedades mecânicas disponíveis em Mesquita (2008) para os mesmos materiais.

Tabela 4- Propriedades mecânicas dos materiais.

Propriedades	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	F_{1T} (MPa)	F_{1C} (MPa)	F_{2T} (MPa)	F_{2C} (MPa)	S_{12} (MPa)
Véu de superfície ¹⁾	3,35	3,35	1,35	0,35	65	170,0	65	170	45
Fibras picadas e resina ¹⁾	8	8	3,33	0,2	133	133	133	133	66,5
Areia e resina ¹⁾	3,35	3,35	1,35	0,35	65	170	65	170	45
Vidro-E / Poliéster ¹⁾	35	10,4	3,2	0,083	820	610	75	133	34,5
PVC ²⁾	3	3,0	1,07	0,4	42	42	42	42	30
Vidro-E / Epóxi ²⁾	40,01	7,06	5,16	0,27	977,51	540,78	34,11	132,14	56,14
Revestimento plástico ³⁾	2,66	2,66	0,964	0,38	32	32	32	32	32
Vidro-E / Epóxi ³⁾	36,5	15	6,4	0,24	1050	938	43	106	88

(Fonte: ¹⁾ Mesquita, 2008; ²⁾ Silva, 2009; ³⁾ Sayman *et al.*, 2011).

6.1.2 Resultados experimentais e teóricos

Nos ensaios de pressão hidrostática realizados por Barros (2007), a pressão de falha média para os tubos com camadas de areia foi de 4,55 MPa. Com o código numérico desenvolvido neste trabalho obtêm-se pressões de falha de 4,05 MPa e 4,5 MPa utilizando os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu, respectivamente. Na simulação a primeira falha ocorre na camada 4, já nos experimentos a falha iniciou-se na camada mais interna do tubo.

Os resultados experimentais de pressão de falha obtidos por Silva (2009) e os encontrados analiticamente são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5- Pressões de falha experimentais e teóricas para tubos de PVC revestido por lâminas de Vidro-E/Epóxi.

Numeração dos Tubos		1	2	3	4
Ângulo de enrolamento		90°	90°	±55°	±55°
Resultados experimentais (MPa) ¹⁾		2,417	2,086	3,032	5,111
Resultados teóricos (Tsai-Hill) (MPa) ²⁾		2,59	2,7	4,91	4,5
Resultados teóricos (Tsai-Wu) (MPa) ²⁾		2,92	3,04	5,82	5,33
Diferença percentual entre os resultados experimentais e teóricos	Tsai-Hill	7,16%	29,42%	61,94%	-11,95%
	Tsai-Wu	20,81%	45,75%	91,95%	4,48%

(Fonte: ¹⁾Silva, 2009; ²⁾Autor, 2016).

Percebe-se, ao analisar a Tabela 5, que os resultados obtidos com o critério de falha de Tsai-Wu foram sempre maiores que aos resultados experimentais, enquanto que os valores teóricos obtidos com o critério de Tsai-Hill foram superiores nos tubos 1 e 2 bobinados a 90° e menor no tubo 4 bobinado a ±55°. O tubo 3 é o que apresenta maior diferença entre os valores teóricos e experimental. Segundo Silva (2009), houve vazamento na tampa durante o ensaio desse tubo o que motivou uma redução da pressão de ruptura. Para todos os tubos a primeira falha ocorreu na lâmina mais externa.

Considerando apenas o tubo de PVC com raio interno $r_i = 50 \text{ mm}$ e espessura da parede de $1,8 \text{ mm}$ a pressão de falha obtida analiticamente, com os dois critérios, é de $1,71 \text{ MPa}$. Isso mostra que as lâminas de material compósito tem grande influência na pressão de falha, principalmente com laminado a ±55°. Vale salientar que, de acordo com a literatura, a falha média desses tubos é de aproximadamente $1,4 \text{ MPa}$ (Silva, 2009 *apud* Faluhelyi, 2006).

A Tabela 6 apresenta os resultados de pressões de falha da primeira lâmina obtidos experimentalmente por Sayman *et al.* (2011), juntamente com os valores obtidos analiticamente por meio dos critérios de falha de Tsai-Hill e Tsai-Wu para os tubos com e sem o *liner* plástico.

Verifica-se que os resultados teóricos são bastantes conservadores para os tubos com laminado de ±45° e ±55°, mas, à medida que o ângulo aumenta esses valores ficam mais próximos dos obtidos experimentalmente. Observa-se também que o *liner* plástico contribui bastante para o aumento da pressão de falha do tubo. Essa contribuição varia entre 21% e 34%. Somente o *liner* apresentou resultado teórico de pressão de falha de $1,448 \text{ MPa}$.

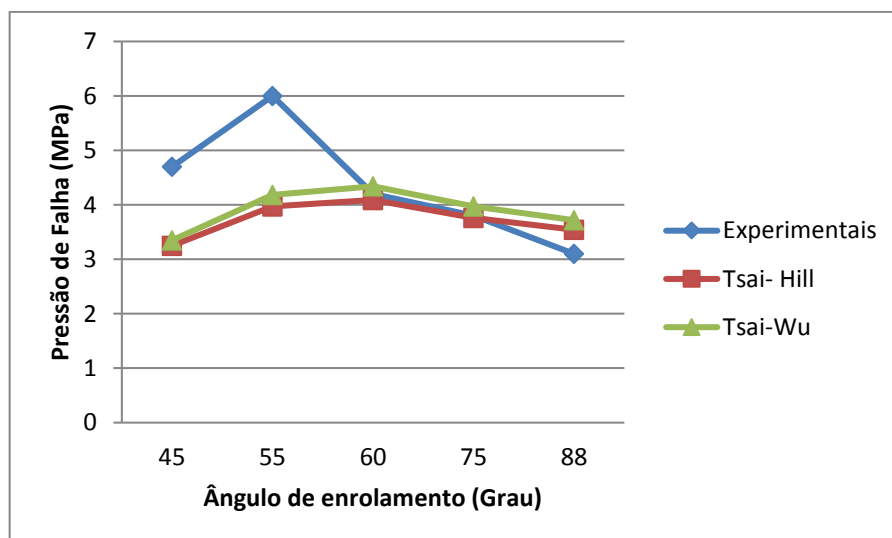
Tabela 6-Pressões de falha experimentais e teóricas para tubos compósitos com/sem liner plástico.

Ângulo de enrolamento		$\pm 45^\circ$	$\pm 55^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 75^\circ$	$\pm 88^\circ$
Com <i>liner</i> plástico	Experimento ¹⁾ (MPa)	4,7	6	4,2	3,8	3,1
	Tsai-Hill ²⁾ (MPa)	3,25	3,97	4,09	3,76	3,54
	Tsai-Wu ²⁾ (MPa)	3,35	4,18	4,34	3,97	3,72
Sem <i>liner</i> plástico	Tsai-Hill ²⁾ (MPa)	2,68	3,26	3,3	2,88	2,67
	Tsai-Wu ²⁾ (MPa)	2,76	3,44	3,5	3,03	2,79
Diferença percentual entre os resultados experimentais e teóricos ²⁾	Tsai-Hill	-30,85%	-33,83%	-2,62%	-1,05%	14,19%
	Tsai-Wu	-28,72%	-33,33%	3,33%	4,47%	20%
Diferença percentual entre os resultados teóricos dos tubos com e sem <i>liner</i> plástico ²⁾	Tsai-Hill	21,27%	21,78%	23,94%	30,56%	32,58%
	Tsai-Wu	21,38%	21,51%	24%	31,02%	33,33%

(Fonte: ¹⁾ Sayman *et al.*, 2011; ²⁾ Autor, 2016).

Conforme pode ser visto na Figura 33, para o critério de Tsai-Hill e Tsai-Wu, os resultados teóricos começam a apresentar valores de pressão de falha superiores aos obtidos experimentalmente, a partir dos ângulos de enrolamento de 75° e 60° , respectivamente.

Figura 33- Pressões de falha experimentais e teóricas.



(Fonte: Autor, 2016).

6.2 Análise de um tubo submetido à pressão interna

Nesta seção apresentam-se os resultados das análises de um tubo com quatro lâminas constituídas de fibras de carbono e matriz epóxi e submetido a uma pressão interna, considerando diferentes critérios de falha. A sequência de empilhamento do tubo é $[+\emptyset/-\emptyset]_2$, o raio interno é de 50 mm e cada lâmina possuía espessura de 0,5 mm. As propriedades das lâminas para uma fração volumétrica de fibras de 0,6 são mostradas na Tabela 7.

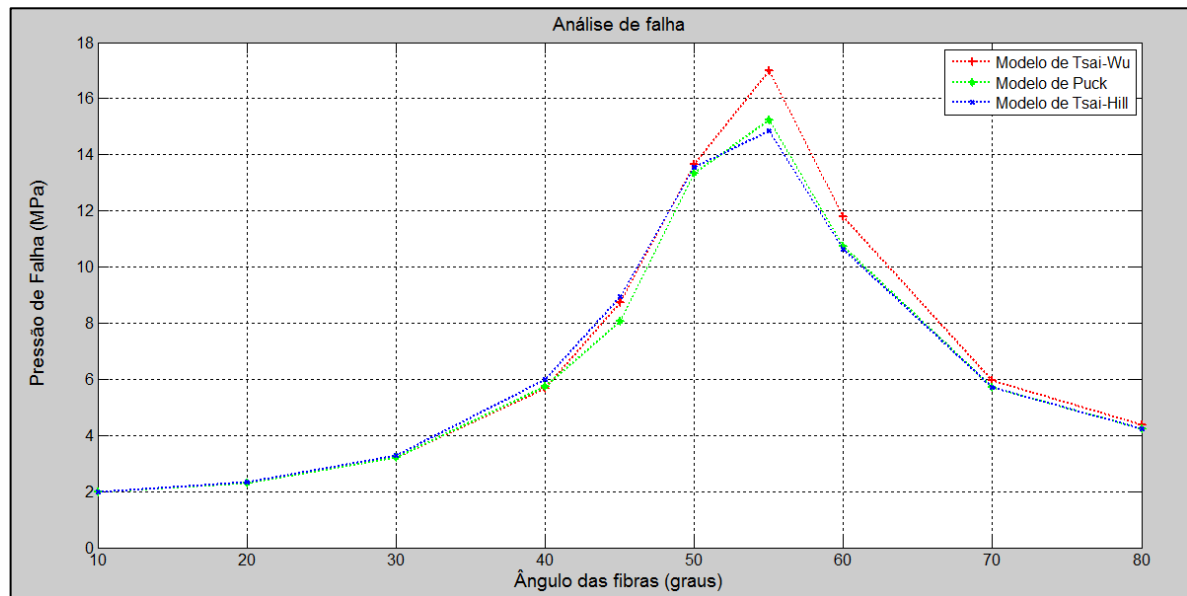
Tabela 7- Propriedades mecânicas das lâminas.

Propriedades	Carbono / Epóxi (AS4/ 3051-6)
E_{11} (GPa)	126
E_{22} (GPa)	11
G_{12} (GPa)	6,6
ν_{12}	0,28
E_{f1} (GPa)	225
ν_{f12}	0,2
ϵ_{1t} (%)	1,38
ϵ_{1c} (%)	1,175
F_{1T} (MPa)	1950
F_{1C} (MPa)	1480
F_{2T} (MPa)	48
F_{2C} (MPa)	200
F_{12} (MPa)	79
α_1 ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	-1
α_2 ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	26

(Fonte: Soden *et al.*, 1998).

Observando a Figura 34, percebe-se que a pressão de falha máxima ocorre quando o laminado está a $\pm 55^{\circ}$. Isto pode ser justificado pelo balanço entre as tensões axiais e circunferenciais atuantes no tubo, fazendo com que as fibras fiquem mais solicitadas que a matriz para esse ângulo. Em contrapartida, quando o ângulo das fibras se afasta de 55° a resistência do tubo dependerá cada vez mais da matriz o que acaba diminuindo drasticamente a pressão de falha.

Figura 34-Pressões de falha para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna.



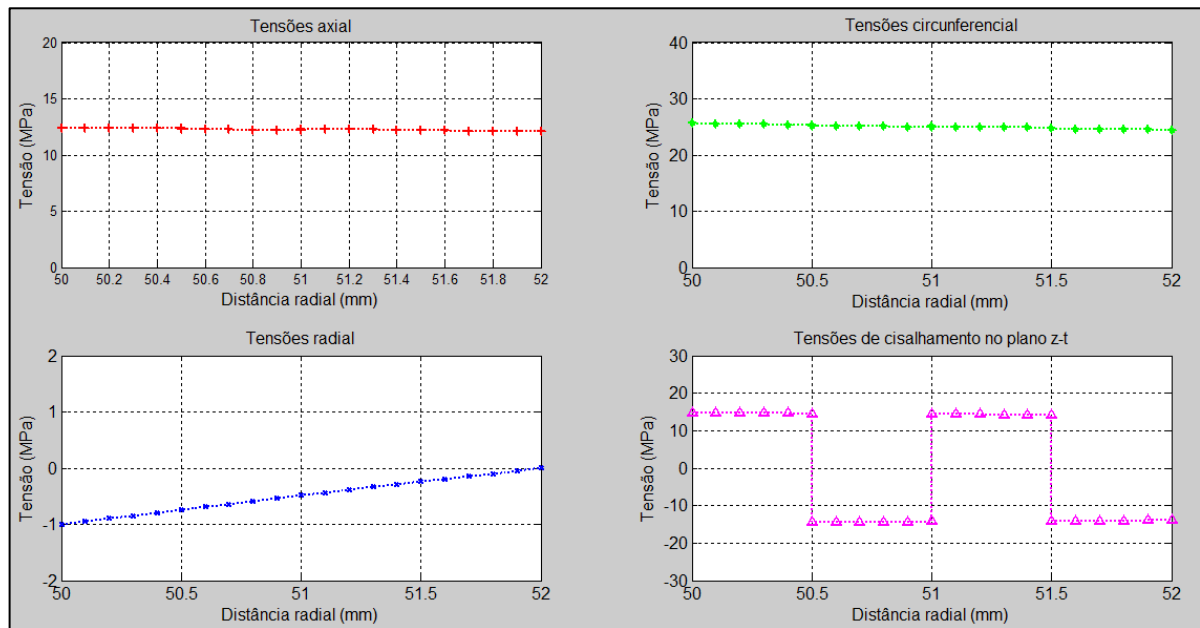
(Fonte: Autor, 2016).

Analisando os três critérios de falha utilizados no problema, percebe-se que para ângulos menores que 50° os modelos apresentaram pressões de falha praticamente iguais, com o critério de Puck fornecendo valores ligeiramente inferiores. A partir desse ângulo o critério de Tsai-Wu apresenta resultados maiores do que os outros dois modelos, verificando-se situação semelhante a aquela observada na comparação com os valores experimentais.

O critério de Puck também permitiu a detecção do tipo de falha que ocorreu no tubo. Para todos os casos, a falha é entre fibras pelo Modo A, ou seja, devido a tensões de tração, com ângulo de falha de 0° . Para laminados com ângulos de fibras abaixo de $\pm 45^\circ$ a primeira falha ocorre na lâmina mais interna e, acima desse ângulo, a falha se inicia na última lâmina. Essa mudança é devida, principalmente, às variações das tensões axiais e circunferenciais ao longo da espessura da parede.

A Figura 35 mostra os resultados das tensões ao longo da espessura para o tubo com sequência de empilhamento de $[+55^\circ/-55^\circ]_2$ submetido a uma pressão de 1 MPa .

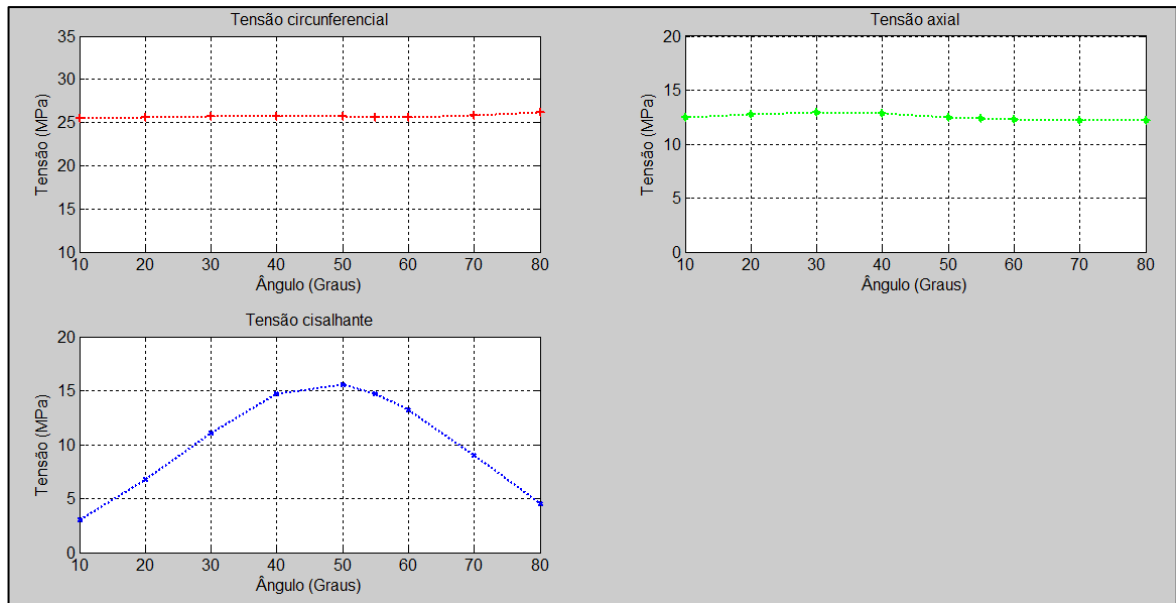
Figura 35-Tensões para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna.



(Fonte: Autor, 2016).

As tensões que apresentam maiores valores são as circunferenciais devido ao tipo de carregamento do tubo. A relação entre essa tensão e a axial é de aproximadamente 2. A tensão de cisalhamento apresenta descontinuidade ao mudar de lâmina. Conforme mostra a Figura 36, essa tensão é a que mais sofre variação com a mudança de ângulo do reforço. Verifica-se também que a tensão radial é bem menor que as outras, onde seu valor depende, principalmente, do carregamento no tubo.

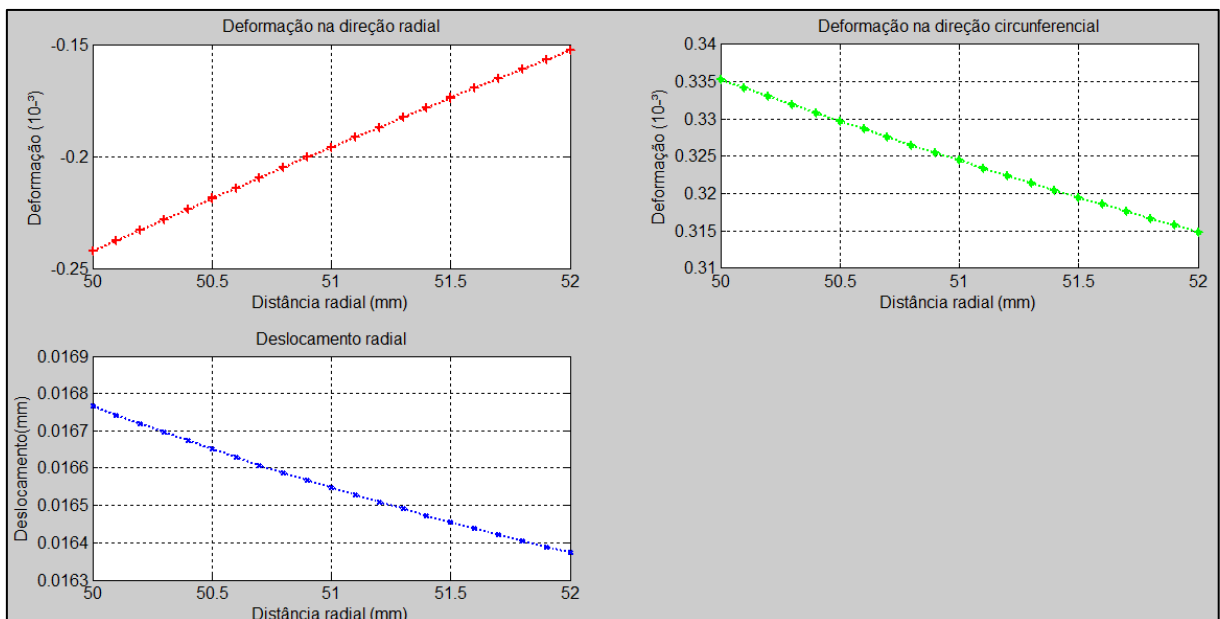
Figura 36- Variação das tensões na parte interna do tubo em função do ângulo do laminado.



(Fonte: Autor, 2016).

Observando a Figura 37, nota-se que as deformações nas direções circunferencial e radial variam linearmente ao longo da espessura da parede. Na direção axial a deformação é constante e igual a $0,1486 \times 10^{-3}$. Com relação ao deslocamento radial, verifica-se que o mesmo não varia muito ao longo da espessura da parede, sendo um pouco maior na parte interna do tubo.

Figura 37- Deformações e deslocamento radial para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna.

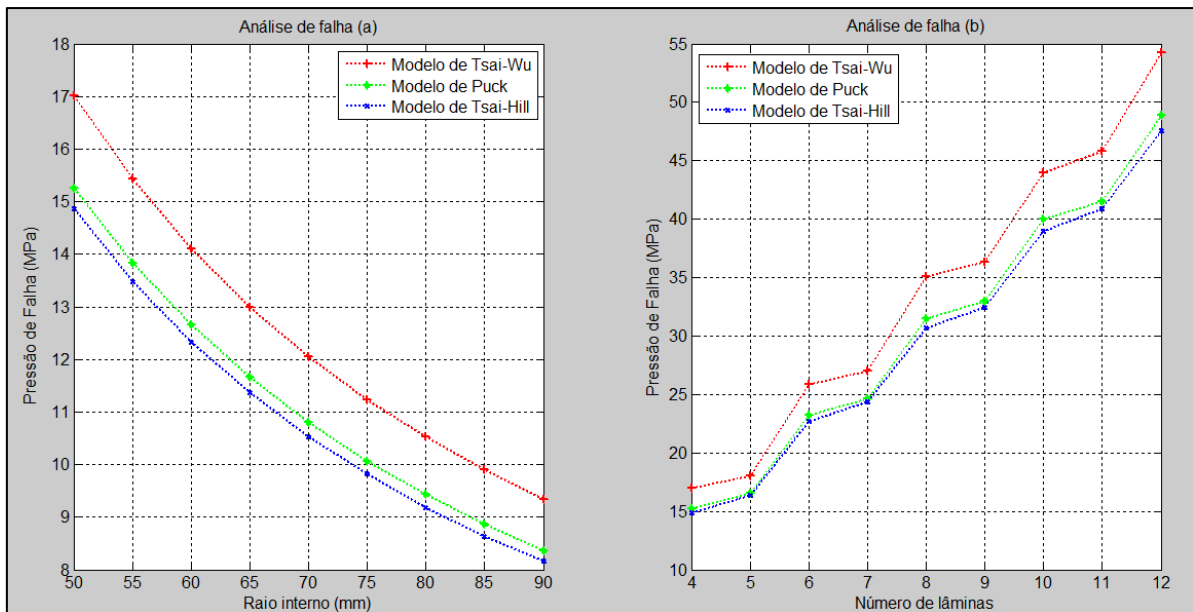


(Fonte: Autor, 2016).

As Figuras 38a e 38b mostram a variação da pressão de falha para um tubo com esquema de laminação constituído por grupos de $\pm 55^\circ$ em função do raio interno, mantendo a quantidade de lâminas igual a quatro, e do número de lâminas, com $r_i = 50 \text{ mm}$, reespectivamente. Com o aumento da quantidade de lâminas as tensões diminuem o que, conseqüentemente, aumenta a pressão de falha do tubo. Além disso, percebe-se que os resultados obtidos pelo modelo de Tsai-Wu afastam-se cada vez mais dos outros dois modelos à medida que o número de lâminas aumenta.

Em contrapartida, o aumento do raio interno eleva os valores das tensões, o que diminui a pressão de falha. Observa-se pela Figura 38a que, com o aumento do raio interno do tubo, as relações entre os resultados fornecidos pelos três modelos permanecem as mesmas, ou seja, as curvas pressão x raio interno são paralelas.

Figura 38- Pressões de falha para diferentes raios interno (a) e quantidade de lâminas (b).



(Fonte: Autor, 2016).

6.3 Análise de um tubo submetido à flexão

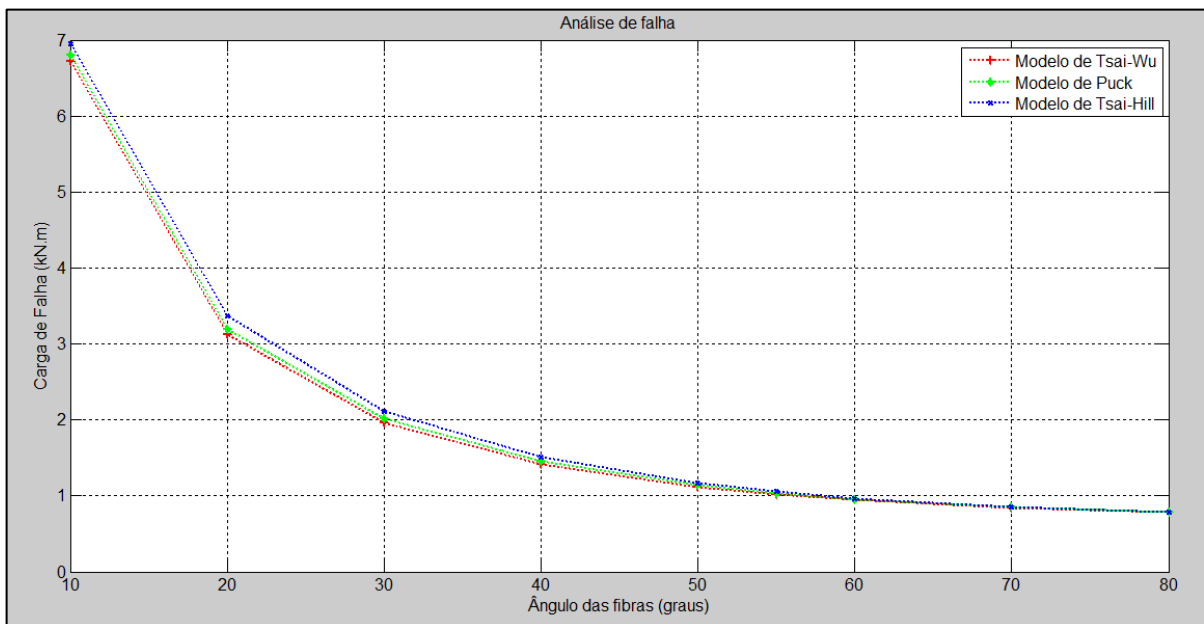
Nesta seção apresenta-se a análise de um tubo com as mesmas características daquele estudado no tópico anterior, porém submetido à flexão pura. Para qualquer seção transversal do tubo, as deformações e tensões variam de acordo com o ângulo θ , conforme mostra as equações (113), (117) e (118). As tensões máximas de tração e compressão ocorrem em $\theta = \pm 90^\circ$ enquanto que o tubo é submetido à tensão máxima de cisalhamento quando $\theta = 0^\circ$

e 180° . Os resultados a seguir são obtidos para $\theta = 90^\circ$. Neste caso, trata-se do lado tracionado do tubo, conforme mostra a Figura 30.

Na Figura 39 são mostradas as cargas de falha para diferentes ângulos de laminação $[+\theta/-\theta]_2$. Observa-se que, nessa condição de carregamento, devido às tensões axiais serem bem superiores às demais, o tubo apresenta maior carga de falha quando a orientação das fibras está mais próxima da direção do seu eixo. Isto ocorre devido ao aumento da contribuição do reforço na resistência final. Diferentemente dos resultados apresentados para o tubo submetido à pressão interna, observa-se que quase não há variação entre os resultados apresentados pelos três modelos de falha. Em todos os casos a falha inicia-se na lâmina mais externa. Por meio do critério de Puck, verifica-se que ela ocorre entre fibras do Modo A.

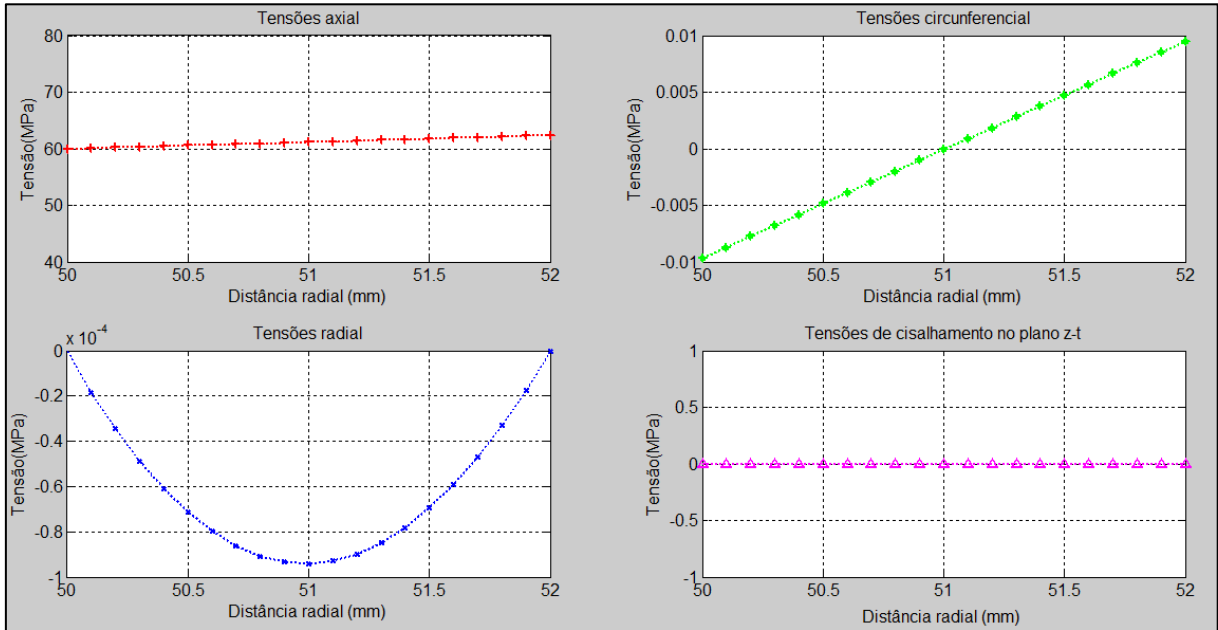
A Figura 40 mostra os resultados de tensões para um tubo com laminado $[+10^\circ/-10^\circ]_2$ submetido a um momento fletor de 1 kN.m . Como dito anteriormente, a tensão axial é bem maior que as outras. Na direção circunferencial tem-se tensões de compressão nas camadas mais internas, enquanto que nas camadas mais externas ocorre tração. Diferentemente das demais tensões, a distribuição da tensão radial ao longo da espessura da parede não é linear, apresentando comportamento parabólico. Nesse caso não há tensões cisalhantes no tubo.

Figura 39- Carga de falha de um tubo de Carbono/Epóxi submetido à flexão.



(Fonte: Autor, 2016).

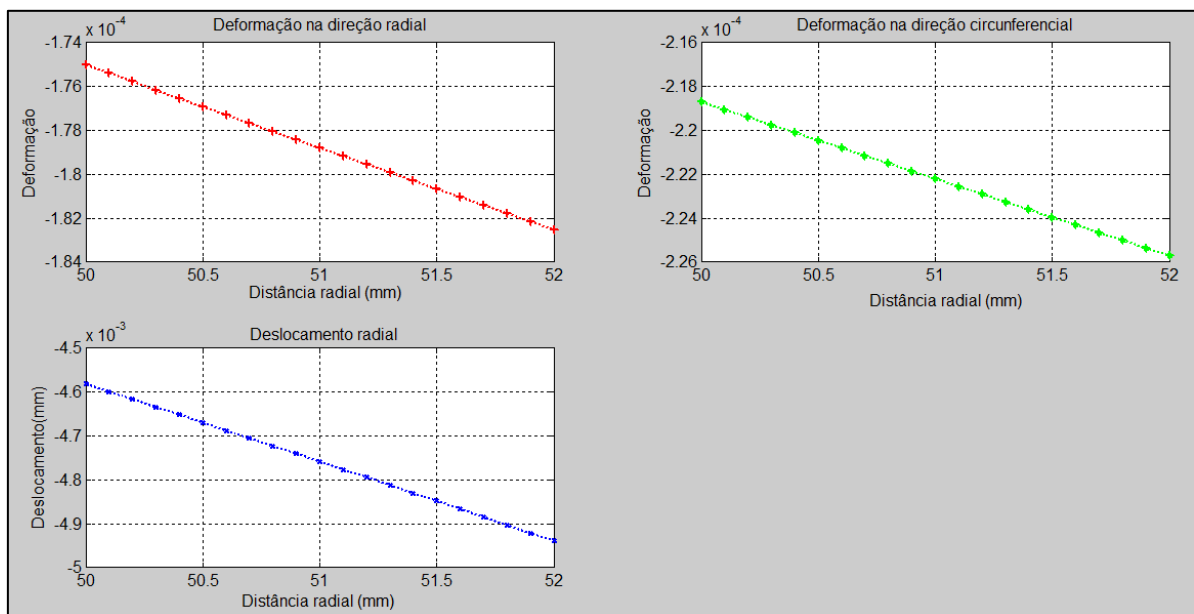
Figura 40-Tensões para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à carga de flexão.



(Fonte: Autor, 2016).

A Figura 41 mostra os resultados de deformações e deslocamentos. Tanto na direção radial quanto na circunferencial as deformações são de compressão, sendo esta um pouco maior em módulo. Observa-se que nesse tipo de carregamento o deslocamento radial é negativo.

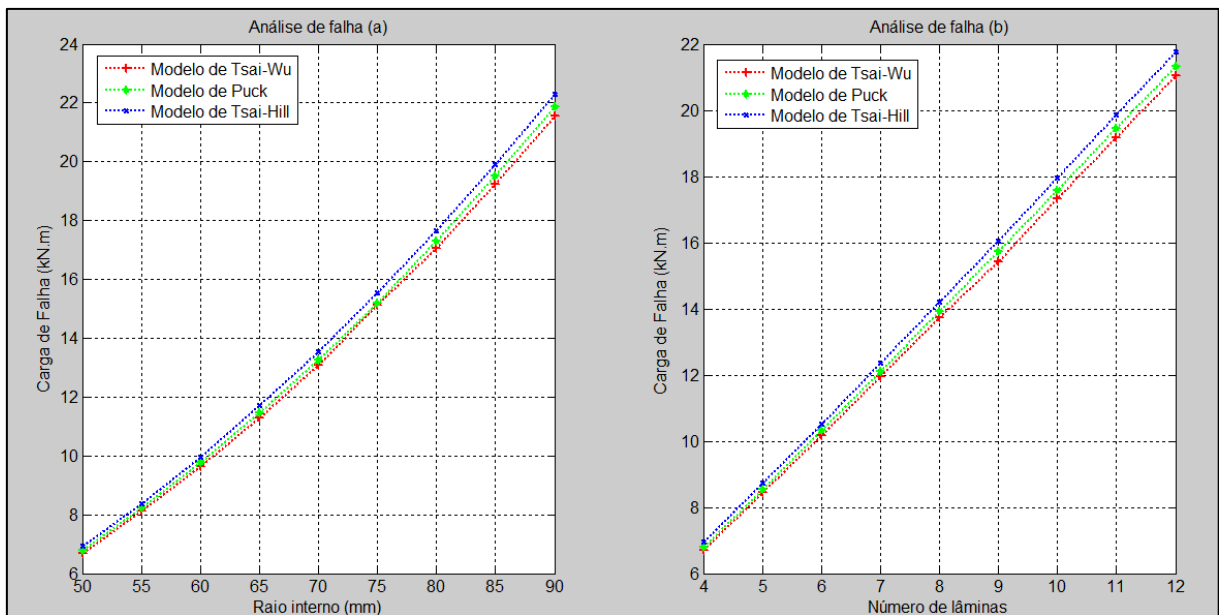
Figura 41-Deformações e deslocamento radial para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à flexão.



(Fonte: Autor, 2016).

Mantendo o mesmo laminado e variando o raio interno e o número de lâminas obtêm-se os valores de cargas de falha mostrados na Figura 42. Observa-se que tanto o aumento do raio quanto da quantidade de lâminas eleva a carga de falha. Verifica-se que o comportamento dos dois gráficos é bastante semelhante, onde o aumento de 5 mm no raio interno produz um efeito próximo ao acréscimo de uma lâmina.

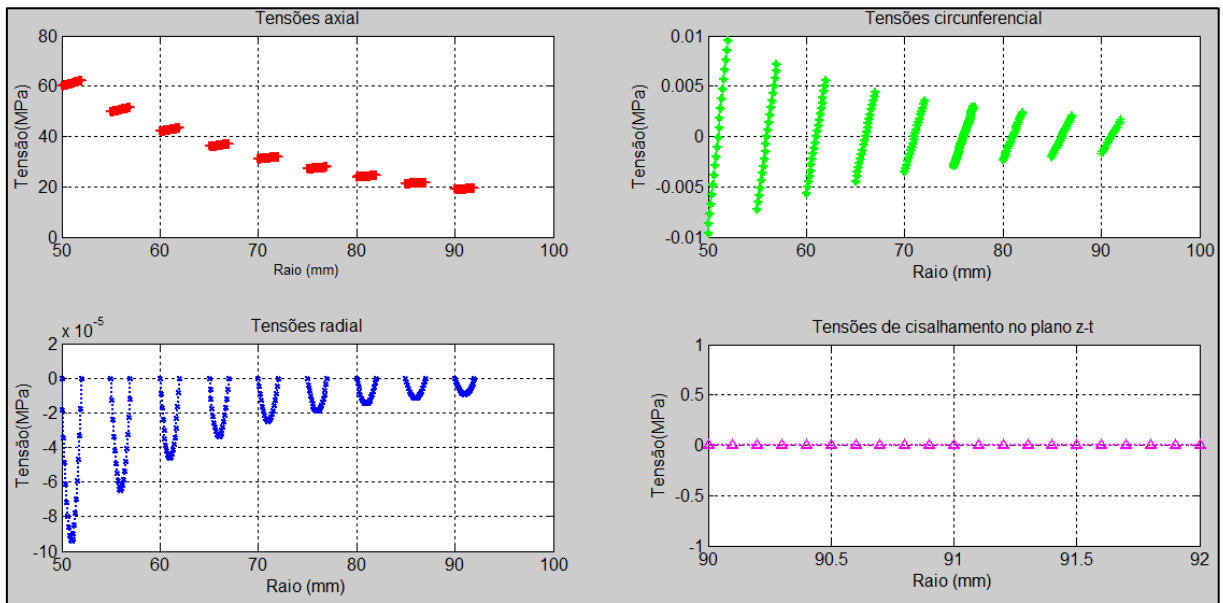
Figura 42- Cargas de falha para diferentes raios interno (a) e quantidade de lâminas (b).



(Fonte: Autor, 2016).

Conforme mostra a Figura 43, o aumento do raio interno diminui às tensões no tubo, principalmente a axial, o que acaba elevando essa carga de falha. O mesmo ocorre com o aumento do número de lâminas.

Figura 43- Variação das tensões para diferentes valores de raios internos.



(Fonte: Autor, 2016).

6.4 Análise de um tubo submetido à carga termomecânica

Nesse exemplo são mantidas as características geométricas iniciais do tubo da seção 6.2, ou seja, $r_i = 50 \text{ mm}$, sequência de empilhamento $[+\phi/-\phi]_2$ e espessura de cada lâmina de $0,5 \text{ mm}$. O tubo é submetido ao efeito combinado de pressão interna e carga térmica. Os coeficientes de transferência de calor por convecção médio interno e externo e a temperatura inicial são assumidos como $\bar{h}_i = 50 \text{ W/m}^2\text{°C}$, $\bar{h}_e = 20 \text{ W/m}^2\text{°C}$ e $T_{ref} = 24 \text{ °C}$, respectivamente. A temperatura ambiente é $T_\infty = 24 \text{ °C}$ e a condutividade térmica através da espessura é $k_c = 0,41 \text{ W/m}^2\text{°C}$.

A análise é feita variando a temperatura do fluido (T_f). O aumento desta temperatura provoca a degradação das propriedades mecânicas das lâminas devido, principalmente, aos efeitos produzidos no constituinte epóxi. Os valores da Tabela 7 são admitidos como as propriedades na temperatura ambiente e a partir da Tabela 8 obtêm-se os valores para as demais temperaturas por meio de interpolação linear. Esta interpolação é feita em dois intervalos $[24 \text{ °C} - 121 \text{ °C}]$ e $[121 \text{ °C} - 177 \text{ °C}]$ e permite encontrar os coeficientes de redução intermediários que, por fim, são multiplicados pelas propriedades dadas na tabela 7.

Apesar da degradação não variar linearmente com a temperatura, essa aproximação foi utilizada devido à falta de resultados experimentais.

Tabela 8- Efeitos da temperatura nas propriedades mecânicas de um típico compósito de Carbono/Epóxi.

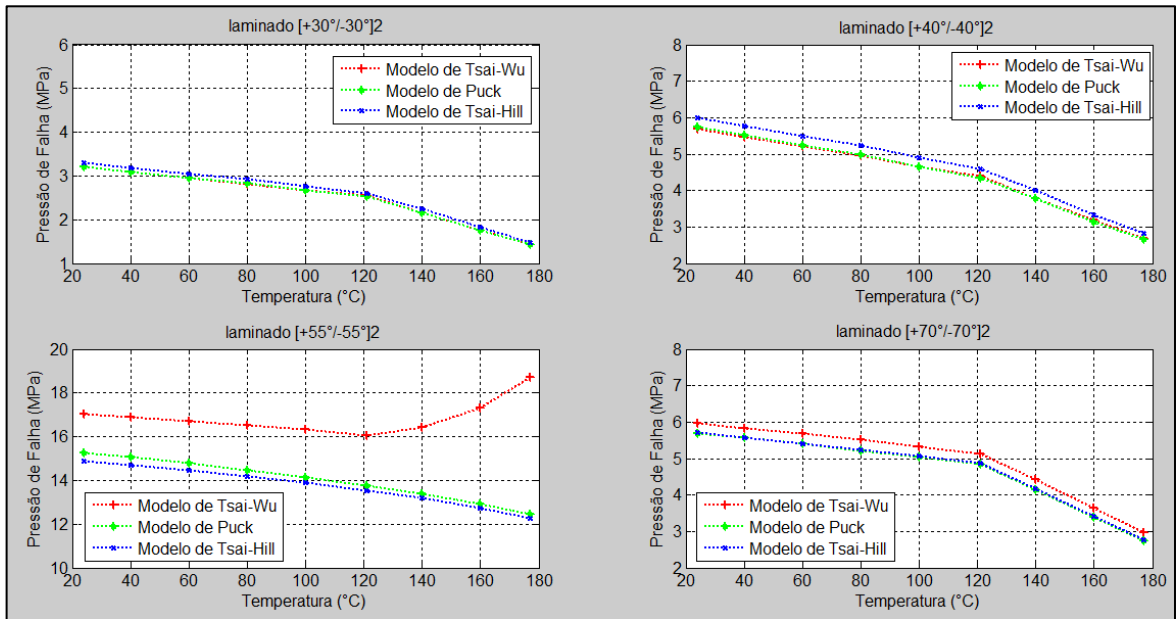
Propriedades Normalizadas	Temperatura (T)		
	24 (°C)	121 (°C)	177 (°C)
$E_{11}(T)/E_{11}(T_{\infty})$	1	0,95	0,93
$E_{22}(T)/E_{22}(T_{\infty})$	1	0,87	0,5
$G_{12}(T)/G_{12}(T_{\infty})$	1	0,87	0,5
$F_{1T}(T)/F_{1T}(T_{\infty})$	1	0,96	0,9
$F_{2T}(T)/F_{2T}(T_{\infty})$	1	0,82	0,45
$F_{1C}(T)/F_{1C}(T_{\infty})$	1	0,78	0,40
$F_{2C}(T)/F_{2C}(T_{\infty})$	1	0,87	0,60
$F_{12}(T)/F_{12}(T_{\infty})$	1	0,70	0,40

(Fonte: Daniel e Ishai, 2006).

Observando a Figura 44, percebe-se que a pressão de falha diminui com o aumento da temperatura, entretanto, o modelo de Tsai-Wu apresenta resultados contrários para o laminado $[+55^{\circ}/-55^{\circ}]_2$. Nesse caso, quando a temperatura atingiu 121 °C houve um aumento da pressão de falha. Este resultado inconsistente ocorreu porque, a partir dessa temperatura, o valor do termo $f_1\sigma_1$ (que é negativo) cresceu mais rapidamente que o do termo $f_2\sigma_2$ (positivo) fazendo com que o fator de falha diminuísse. Vale salientar que os valores dos outros termos presentes no critério de Tsai-Wu são bem menores que os dois citados anteriormente e, portanto, não influenciaram muito nesse resultado.

Nos outros casos, verifica-se que acima de 121 °C a resistência do tubo diminui mais rapidamente. Isso ocorre devido a maior degradação das propriedades do material a partir dessa temperatura, como pode ser visto na Tabela 8.

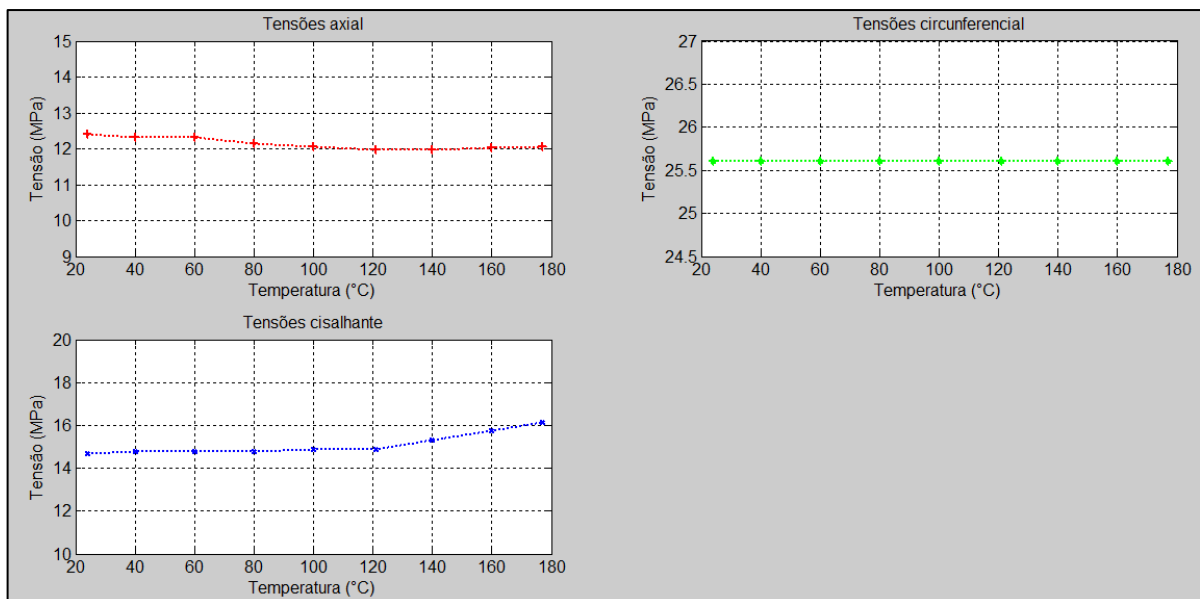
Figura 44- Pressão de falha de um tubo de Carbono/Epóxi submetido carga termomecânica.



(Fonte: Autor, 2016).

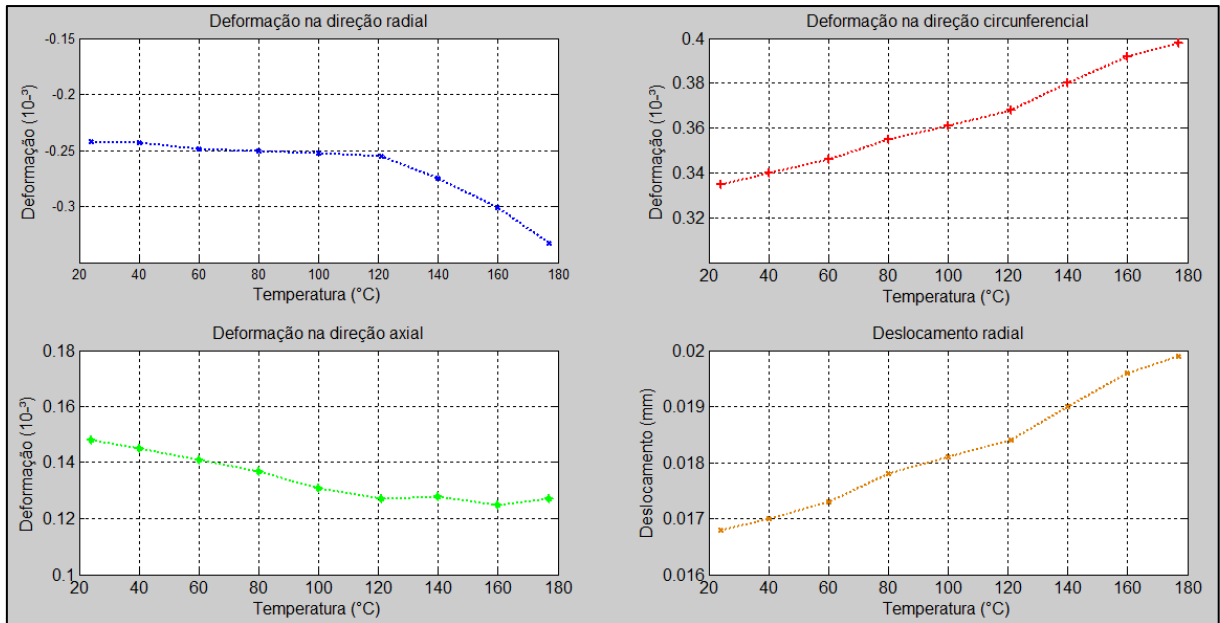
A Figura 45 mostra os valores de tensões na parte interna do tubo com laminado $[+55^\circ/-55^\circ]_2$ submetido à pressão interna $P_i = 1 \text{ MPa}$ e efeitos térmicos. Verifica-se que a temperatura pouco influencia as tensões, variando um pouco mais a tensão cisalhante a partir de 121°C . Observando a Figura 46, percebe-se que as deformações nas direções circunferencial e radial aumentam com a temperatura, o mesmo ocorre com o deslocamento radial. Em contrapartida há uma diminuição da deformação na direção axial.

Figura 45- Tensões internas de um tubo de Carbono/Epóxi submetido à carga termomecânica.



(Fonte: Autor, 2016).

Figura 46-Deformações e deslocamento radial para um tubo de Carbono/Epóxi submetido à carga termomecânica.



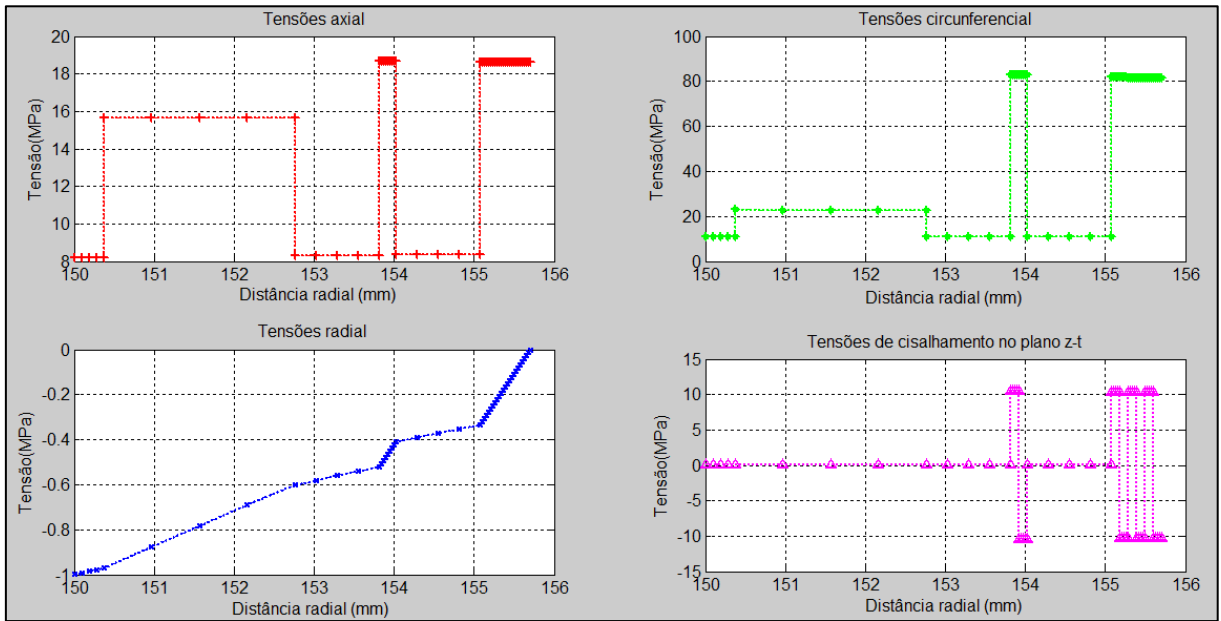
(Fonte: Autor, 2016).

6.5 Análise de um tubo de material compósito com camadas de areia submetido à pressão interna

Nesse exemplo, o tubo é mantido com o mesmo raio interno ($r_i = 150\text{mm}$) e configuração da parede mostrada na Tabela 2. Conforme dito anteriormente, a adição de areia serve para aumentar a espessura da parede, de forma a fornecer a rigidez especificada em projeto, sem elevar o custo do produto. Além disso, esses tubos devem atender os requisitos mínimos de pressão. De acordo com a norma ANSI/AWWA C950-01, os tubos devem ser projetados com fator de segurança de 1,8, quando há dados do ensaio de HDB (ensaios hidrostáticos de longa duração - Norma ASTM D2992). Sem essas informações, o tubo deve ser projetado com fator de segurança de 4. Nesse caso, para a classe de pressão de 1034 kPa , a pressão de ruptura do tubo não deve ser inferior a 4136 kPa .

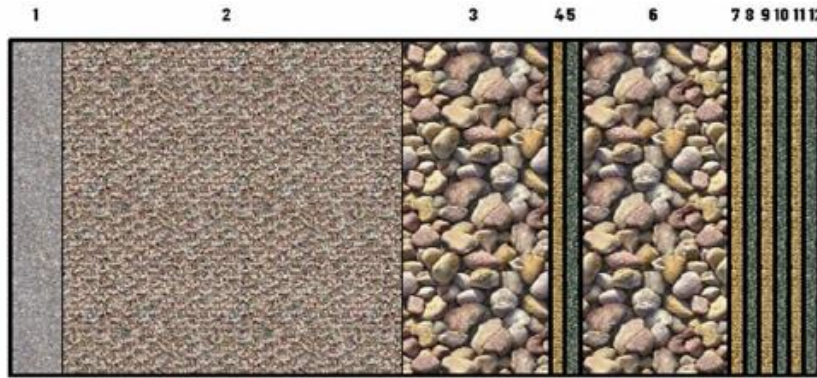
A Figura 47 mostra os resultados das tensões para o tubo submetido à pressão interna de 1 MPa . Observa-se que as lâminas com fibras contínuas apresentam valores de tensões maiores, principalmente na direção circunferencial. Isto ocorre devido a maior contribuição deste tipo de fibras para a resistência do tubo. Estas lâminas também são as únicas que apresentam tensões de cisalhamento. Isso porque as outras camadas são constituídas de materiais isotrópicos.

Figura 47-Tensões para um tubo compósito com camadas de areia submetido à pressão interna.



(Fonte: Autor, 2016).

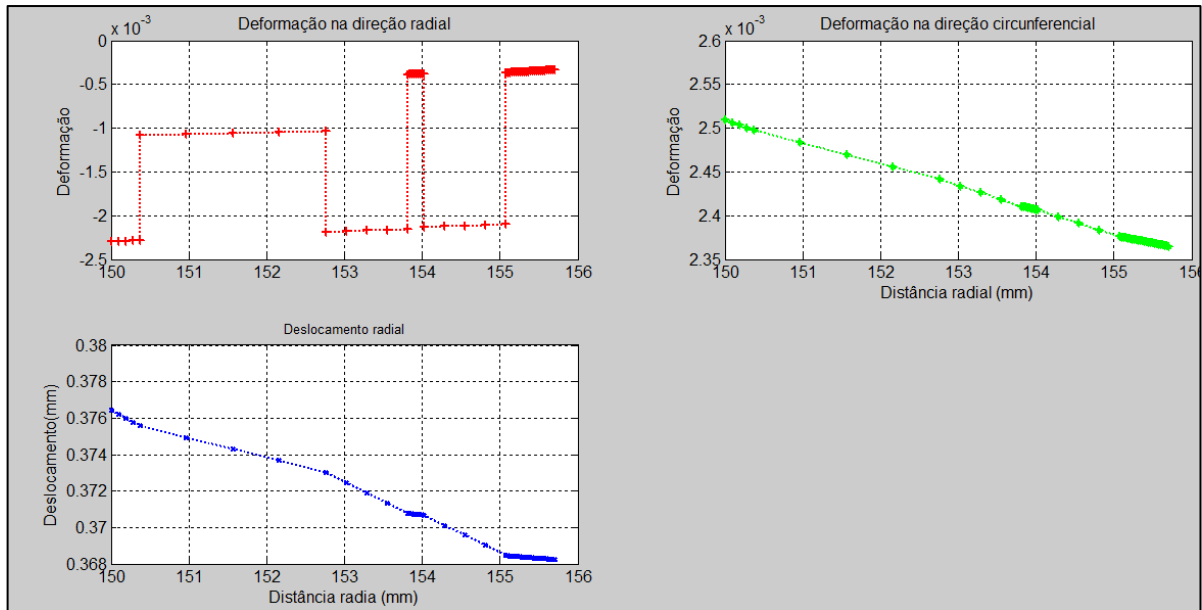
Figura 48- Representação proporcional das espessuras das camadas estimadas.



(Fonte: Mesquita, 2008).

Verificando a Figura 49, observa-se que na direção radial o véu de superfície (camada 1, Figura 48) e as lâminas de areia (camadas 3 e 6, Figura 48) são as que apresentam maiores deformação de compressão. Isso ocorre porque as fibras proporcionam maior rigidez, principalmente nas lâminas com fibras contínuas. O gráfico de deformação na direção circunferencial é praticamente linear, apresentando valores superiores na parte interna do tubo. Em relação ao gráfico do deslocamento radial, observa-se um comportamento mais variado. A curva apresenta maior inclinação nas regiões sem fibras de vidro. Nesse caso, a deformação na direção axial é de $1,41 \times 10^{-3}$.

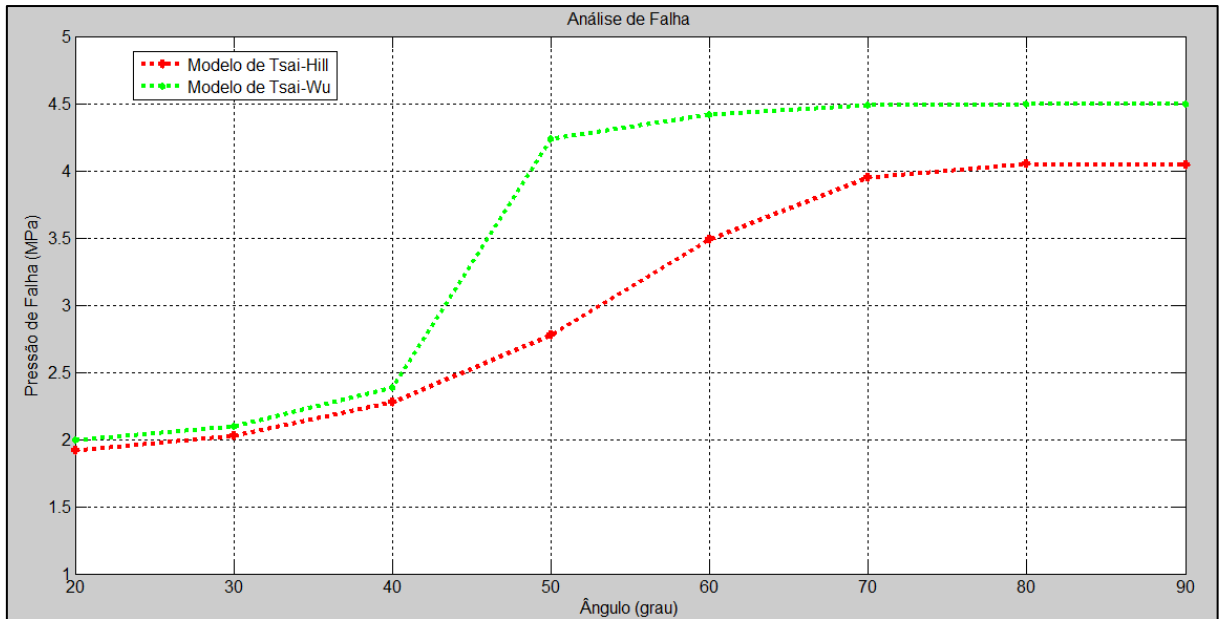
Figura 49- Deformações e deslocamento radial para um tubo compósito com camada de areia submetido à pressão interna.



(Fonte: Autor, 2016).

A Figura 50 apresenta as pressões de falhas para diferentes ângulos de enrolamento ($\pm\theta$). Observa-se que os melhores resultados são para os laminados com ângulo das fibras contínuas acima de 70° . Conforme visto na seção 6.1.2, utilizando o critério de falha de Tsai-Hill, obtém-se um resultado mais conservador em comparação ao encontrado experimentalmente por Barros (2007) para $\theta = \pm 80^\circ$. Além disso, a pressão de falha para esta orientação de fibras é um pouco menor do que a exigida por norma ($\sim 2\%$). O critério de Tsai-Wu fornece valores superiores aos obtidos por meio do modelo de Tsai-Hill, principalmente para orientação de fibras acima de 40° . Além do mais, para $\theta = \pm 80^\circ$ a pressão de falha é 8,8% maior que a exigida por norma. Sendo assim, é possível afirmar que o tubo atenderia as exigências mínimas de pressão de ruptura para ângulos de enrolamento maiores que 70° .

Figura 50- Pressão de falha para um tubo compósito com camadas de areia submetido à pressão interna.



(Fonte: Autor, 2016).

6.6 Análise para tubo submetido à pressão interna e carga térmica com diferentes frações volumétricas de fibra

Neste exemplo, buscou-se variar a fração volumétrica de fibra e a temperatura do fluido, mantendo a mesma configuração de laminado $[+55^\circ/-55^\circ]_2$ e geometria do tubo da seção 6.2. As propriedades elásticas e térmicas do material compósito na temperatura ambiente (24°C) são obtidas a partir das propriedades dos seus constituintes, mostradas na tabela 9, e pelas equações de micromecânica (33), (45), (46c), (46d) e (47). Os valores de resistências são calculados por meio das expressões dadas no apêndice A. Para as demais temperaturas, as propriedades são determinadas de forma análoga a seção 6.5.

Tabela 9- Propriedades termomecânicas da fibra de carbono (AS4) e da matriz epóxi (3501-6).

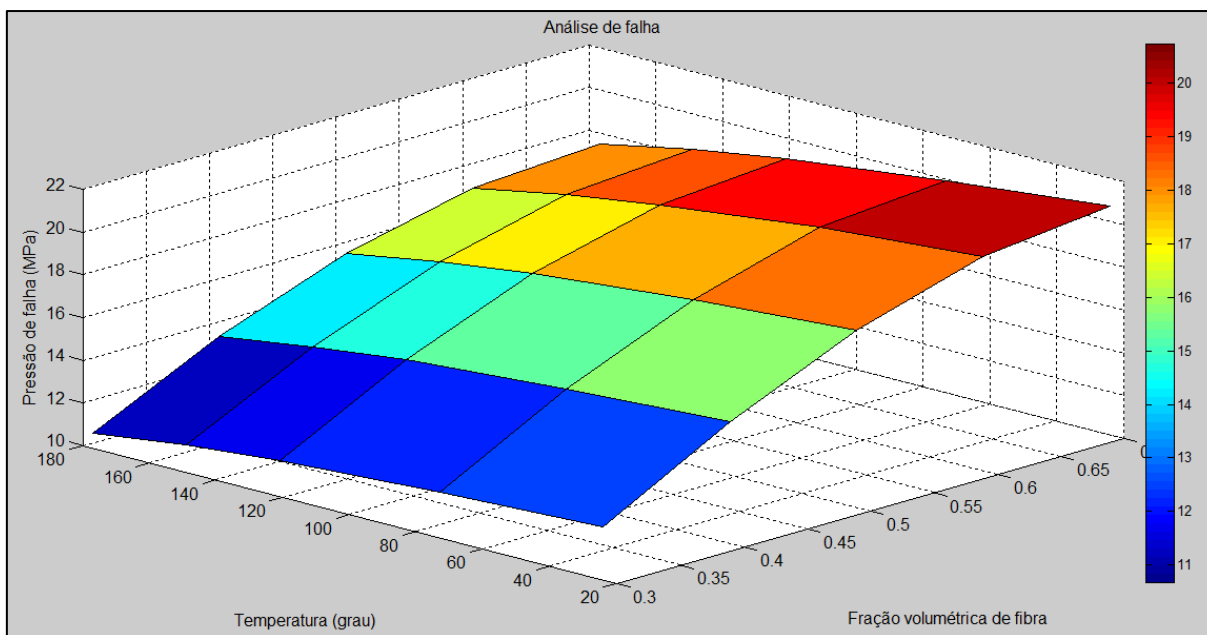
Propriedades	Fibra de carbono (AS4)	Matriz epóxi (3501-6)
E_1 (GPa)	225	4.2
E_2 (GPa)	15	4.2
G_{12} (GPa)	15	1,567
ν_{12}	0,2	0,34
F_T (MPa)	3350	69
F_C (MPa)	2500	250
F_{12} (MPa)	607,7	50
α_1 ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	-0,5	45
α_2 ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	15	45

(Fonte: Soden *et al.*, 1998).

A Figura 51 mostra os resultados de pressões de falha obtidos por meio do critério de Tsai-Hill. Observa-se que o aumento da fração volumétrica de fibra eleva consideravelmente a pressão de falha. Para o aumento de 0,3 para 0,7 desse volume há um crescimento médio de aproximadamente 64% na resistência do tubo. Verifica-se também que este acréscimo de fibras não influencia nos efeitos causados pela elevação da temperatura. Uma elevação de 153 °C diminuiu a pressão de falha em aproximadamente 14%, independentemente da quantidade de fibras.

Para uma mesma fração volumétrica de fibras de 0,6, verificaram-se que as pressões de falha encontradas, utilizando as propriedades termomecânicas obtidas por meio das equações de micromecânica e das propriedades mostrados na tabela 9, são aproximadamente 5 MPa maiores do que aquelas alcançadas utilizando valores da Tabela 7.

Figura 51-Pressão de falha de um tubo de Carbono/Epóxi submetido à pressão interna e carga termomecânica com diferentes frações volumétricas de fibras.



(Fonte: Autor, 2016).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou formulações analíticas que permitem os cálculos de tensões, deformações e deslocamento radial em tubos de materiais compósitos laminados submetidos a diferentes tipos de carregamento e efeito de temperatura. A partir dos resultados de tensões obtidos com essas formulações, foram possíveis as análises de falhas utilizando os critérios de Tsai-Wu, Puck e Tsai-Hill.

A seção 6.1 mostrou várias comparações entre resultados de pressões de falha obtidos teoricamente e por meio de ensaios de pressão hidrostática. Nota-se que as expressões analíticas nem sempre proporcionam valores a favor da segurança, principalmente, para ângulos de enrolamentos altos. Nessas análises, verificou-se que o critério de Tsai-Wu obteve valores sempre superiores ao critério de Tsai-Hill. Para os exemplos com tubo de PVC e *liner* plástico, observou-se que a adição de lâminas de material compósito aumentou consideravelmente a pressão de falha, especialmente para os tubos com laminado de $\pm 55^\circ$.

Nos exemplos com tubos constituídos somente de material compósito com laminado $[+\emptyset/-\emptyset]_2$ submetidos à pressão interna, seção 6.2, observou-se que a configuração de laminado que apresentou maior pressão de falha foi com ângulos de enrolamento de $\pm 55^\circ$. Esse resultado está de acordo com outros encontrados na literatura, especialmente quando a relação entre a tensão circunferencial e axial é de aproximadamente 2. Com relação aos três critérios de falha utilizados, verificou-se que, para ângulos de enrolamento abaixo de 50° , todos apresentaram resultados bem próximos. A partir desse ângulo, os valores de pressão de falha obtidos com o critério de Tsai-Wu são maiores. Verifica-se que, se a tensão longitudinal (paralela às fibras) é bem superior à tensão transversal (perpendicular às fibras), a diferença entre os valores obtidos pelo critério de Tsai-Wu e pelos outros dois critérios aumentam. Os modelos de Tsai-Hill e Puck fornecem praticamente os mesmos valores para qualquer configuração de laminado, a vantagem desse último modelo é que ele também fornece o tipo de falha ocorrida nas lâminas. Nesses exemplos, devido a menor resistência da matriz e do tipo de carregamento, foram entre fibras com plano de falha a 0° .

Conforme visto na seção 6.3, para o tubo submetido à flexão as tensões axiais são bem maiores que as outras, portanto, para aumentar a resistência é preciso que o ângulo do reforço esteja o mais próximo possível da direção do eixo z. Isso mostra que a seleção desse ângulo de enrolamento depende muito do tipo de carregamento predominante no tubo, sendo a relação entre tensão circunferencial e axial de suma importância nessa escolha. Para esse caso,

foi observado que o modelo de Tsai-Wu, diferente da situação anterior, apresentou praticamente os mesmos resultados dos outros dois modelos.

A seção 6.4 mostrou que, com o aumento da temperatura, há uma diminuição na resistência do tubo, devido, principalmente, à degradação das propriedades mecânicas das lâminas. Esse efeito é mais evidente na direção transversal, onde as propriedades da matriz são mais preponderante e, portanto, sofre maior influência da temperatura. Observou-se também que essa elevação térmica provocou apenas pequenas variações nas tensões, deformações e deslocamento radial. Além disso, o critério de Tsai-Wu mostrou resultado inconsistente quando a temperatura ultrapassou 121°C para o ângulo de laminação de 55°. Nesse caso, verificou-se que a relação entre os termos $f_1\sigma_1$ e $f_2\sigma_2$ teve grande influência neste resultado.

No caso do tubo da seção 6.5, observou-se que as camadas de areia modificam bastantes os gráficos de tensões, deformações e deslocamentos. Isso ocorre devido a grande diferença das propriedades mecânicas dos materiais utilizados. Verificou-se também que a configuração de laminado empregada por Barros (2007) é a sequência de empilhamento ótima para esse tubo.

Apesar de ter fornecido alguns resultados próximos aos valores obtidos pelos ensaios de pressão hidrostática, mostrados neste trabalho, o critério de Tsai-Wu apresentou maior sensibilidade a mudanças dos ângulos das fibras e de temperatura com relação aos outros dois modelos o que, em alguns casos, pode alterar significativamente o resultado de pressão de falha. Portanto, o uso de mais de um critério ajuda no momento da análise, pois dessa forma, utiliza-se o resultado menos favorável como forma de segurança.

Com relação às características geométricas, tais como raio interno, espessura, número de lâminas e fração volumétrica de fibras, percebe-se que pequenas variações nessas propriedades podem diminuir ou aumentar consideravelmente a resistência do tubo, portanto, a escolha dessas características e o controle durante a fabricação do tubo são de suma importância.

De maneira geral, as formulações analíticas podem apresentar boas estimativas de cargas de falha. Isso permite uma base prévia para a fabricação dos tubos, evitando perdas por superdimensionamento, além de reduzir gastos com ensaios de laboratório que geralmente são caros devido ao grande custo dos equipamentos.

Uma sugestão para a continuidade deste trabalho seria a utilização de métodos de elementos finitos para a análise de tubos submetidos a carregamento assimétricos. Além disso, poder-se-ia realizar um estudo do comportamento viscoelástico dos mesmos. Como a

flambagem é um fenômeno comum em tubulações, um estudo que objetiva a determinação da carga crítica poderia ser realizado, considerando, também, imperfeições geométricas iniciais nos tubos. Outra sugestão seria a análise de falha última do laminado (UFL). Nesse caso, além dos critérios de falha, seriam necessárias leis de degradação das propriedades mecânicas em decorrência do processo de falha progressivo das lâminas.

REFERÊNCIAS

- ANGÉLICO, R. A. **Avaliação de modelos de falhas progressivas para estruturas em materiais compósitos.** Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, 2009.
- AGARWAL, B. D., BROUTMAN, L. J. **Analysis and Performance of Fiber Composites,** Wiley, New York, 2ª edição, 1990.
- AZZI V. D., TSAI, S. W. **Anisotropic strength of composites.** Experimental Mechanics, v. 5, N° 9, p. 283-288, 1965.
- BAKAIYAN, H., HOSSEINI, H., AMERI, E. **Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined internal pressure and thermomechanical loading with thermal variations.** Composite Structures, 88:532-541, 2009.
- BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design.** New York: Taylor & FrancisGroup, 1999.
- BARROS, G. A. **Tubulações de PRFV com adição de areia quartzosa visando sua aplicação na indústria do petróleo.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007.
- DANIEL, I.M., ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials.** 2ª New York: Orford University Press, 2006.
- GUAMÁ, F. M. C. **Análise estrutural de cilindros revestidos de compósitos para armazenamento de GNV.** Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
- GONÇALVES, V. P. **Avaliação do comportamento mecânico de tubos compósitos fabricados por enrolamento filamentar submetidos à pressão interna.** Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- HALPIN, J. C., KARDOS J. L. **The Halpin-Tsai Equations: A review.** Polymer engineering and science, v. 16, N° 5, 1976.
- HASHIN, Z. **Failure criteria for unidirectional fiber composites.** Journal of Applied Mechanics, v. 47, p. 329-334, 1980.

HILL, R. **A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals.** Proceedings of the Royal Society, Series A, v. 193, 1948.

HULL, D., LEGG, M. J., SPENCER, B. **Failure of glass/polyester filament wound pipe.** Composites 1978; 9:17-24.

JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials.** 2º ed. EUA: Taylor & Francis, 1999.

KAW, A. K. **Mechanics of Composite Materials.** 2º ed. EUA: Taylor & Francis, 2006.

KELLER, T. **Use of fibre reinforced polymers in bridge construction,** Structural Engineering Documents, IABSE, 2003.

LEKHNITSKII, S. G. **Theory of elasticity of an anisotropic body.** Moscow: MIR Publishers, 1968 e 1981.

MAGAGNIN FILHO, N. **Uma introdução a placas laminadas constituídas de materiais compostos em fibras longas.** Semina: Ci. Exatas/Tecnol. Londrina, v. 21, n. 4, p. 95-108, dez. 2000.

MENSHYKOVA, M, GUZ, I. A. **Stress analysis of layered thick-walled composite pipes subjected to bending loading.** International Journal of Mechanical Sciences 88 289–299, 2014.

MESQUITA, F. N. A. **Simulação do comportamento Mecânico de Tubos em PRFV submetidos à pressão hidrostática.** Dissertação de mestrado, Universidade de Brasília. 2008.

MISTRY, J., GIBSON, AG., WU, Y-S. **Failure of composite cylinders under combined external pressure and axial loading.** Comp Struct; 22:193-200, 1992.

NATSUKI, T., TAKAYANAGI, H., TSUDA, H. **Prediction of bendings trength for filament-wound composite pipes.** Journal of reinforced plastics and composites; 22 (8): 695–710, 2003.

PEREIRA, J. C. **Curso de projeto estrutural com materiais compostos.** Grupo de análise e projeto mecânico, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

PUCK, A., KOOP, J., KNOPS, M. **Guidelines for the determination of the parameters in puck's action plane strength criterion.** Composite Science and Technology, v. 52, p. 371-378, 2002.

PUCK, A., SHÜRMANN, H. **Failure analysis of FPR laminates by means of physically based phenomenological models.** Composite Science and Technology, v. 58, p. 1045-1067, 1998.

PUCK, A., SHÜRMANN, H. **Failure analysis of FPR laminates by means of physically based phenomenological models.** Composite Science and Technology, v. 62, p. 1633-1662, 2002.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis,** CRC Press, 1996.

ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de tubos compósitos laminados.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, 2010.

SAYMAN, O., DENIZ, M. E., DOGAN, T.; YAYLAGAN, E. **Failure pressures of composite cylinders with a plastic liner.** Journal of reinforced plastics and composites; 30(10): 882-888, 2011.

SCHAPERLY, R. A. **Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles.** J. composite Materials, v. 2, p.380-404, 1968.

SILVA, C. D., **Influência da presença de Fibras Naturais em Compósitos Híbridos Tipo Sanduíche.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2003.

SILVA, R. F. **Análise de Tensões em tubulações compósitas híbridas.** Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, 2009.

SILVESTRE FILHO, G. D. **Comportamento mecânico do poliuretano derivado de óleo de mamona reforçado por fibra de carbono: Contribuição para o projeto de hastes de implante de quadril.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Paulo, 2001.

SOBRINHO, L. L. **Desenvolvimento de tubos compósitos visando aplicação como risers.** Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

SODEN, PD., KITCHING, R., TAW, PC. **Experimental failure stresses for $\pm 55^\circ$ filament wound glass fiber reinforced plastic tubes under biaxial loads.** Composites; 20:125-35, 1989.

SODEN, P. D., LEADBETTER, D., GRIGGS, PR., ECKOLD, GC. **The strength of a filament wound composite under biaxial loading.** Composites; 9:247-50, 1978.

SODEN, P. D., HILTON, M. J., KADDOUR, A. S. **Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates.** Composites Science and Technology; 58: 1011-1022, 1998.

SPENCER, B.; HULL, D. **Effect of winding angle on the failure of filament wound pipe.** Composites; 9:263–71, 1978.

TEÓFILO, F. A. F. **Análise e Projeto de Risers Compósitos em Catenária.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2010.

TSAI, S.W., HAHN, M.T. **Introduction to Composite Materials.** Technomic, Lancaster, PA, Technomic Publishing Co., 1980.

TSAI, S. W., WU, E. M. **A general theory of strength for Anisotropic Materials.** J. Composite Materials, v. 5, p. 58-80, 1971.

UEMURA, M.; FUKUNAGA, H. **Probabilistic burst strength of filament wound cylinders under internal pressure.** J Compos Mater; 15:462–80, 1981.

VASILIEV, V. V., MOROZOV, V. E. **Mechanics and analysis of composite Materials.** 1ª edição, 2001.

XIA, M., KEMMOCHI, K., TAKAYANAGI, H. **Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under internal pressure.** Compos Struct; 53: 483–91, 2001.

XIA M., TAKAYANAGI, H., KEMMOCHI, K. **Bending behavior of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipes.** Compos Struct; 56: 201–10, 2002.

XIA, M., KEMMOCHI, K., TAKAYANAGI, H. **Analysis of filament-wound fiberreinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading.** Compos Struct; 51:273–83, 2001.

YOUNES, R., HALLAL, A., FARDOUN, F., CHEHADE, F. H. Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials. INTECH, 2012.

ANEXO A

Cálculo das propriedades mecânicas de resistência de materiais compósitos

A obtenção dos valores de resistência de um material compósito por meio dos seus constituintes pode ser calculada de forma análoga a regra da mistura considerando que as propriedades mecânicas variam com a fração volumétrica de fibras, tanto linearmente bem como proporcionalmente, a partir de uma lâmina de referência (Silva, 2009 *apud* Frascino de Almeida, 1982 e Levy, 1983). As expressões para o cálculo dos limites de resistência são (Silva, 2009):

- Constante de cálculo:

$$R = \left(1 + \frac{f_{mc}}{f_{fc}}\right) f_f \quad (A.1)$$

- Limite de resistência à tração na direção 1:

$$F_{1T} = RF_{1Tc} + (1 - R)F_{Tm} \quad (A.2)$$

- Limite de resistência à compressão na direção 1:

$$F_{1C} = RF_{1Cc} + (1 - R)F_{Cm} \quad (A.3)$$

- Limite de resistência à tração na direção 2:

$$F_{2T} = \frac{F_{Tm}F_{2Tc}}{(1 - R)F_{2Tc} + RF_{Tm}} \quad (A.4)$$

- Limite de resistência à compressão na direção 2

$$F_{2C} = \frac{F_{Cm}F_{2Cc}}{(1 - R)F_{2Cc} + RF_{Cm}} \quad (A.5)$$

- Limite de resistência ao cisalhamento no plano 1 – 2

$$F_{12} = \frac{F_{12f}F_{12m}}{f_m F_{12f} + f_f F_{12m}} \quad (A.6)$$

sendo,

f_{mc}, f_{fc} = Frações volumétricas da matriz e fibras da lâmina de referência, respectivamente;

F_{Tm}, F_{Cm} = Limites de resistência à tração e a compressão da matriz, respectivamente;

F_{1Tc}, F_{2Tc} = Limites de resistência à tração da lâmina de referência na direção 1 e 2, respectivamente;

F_{1Cc}, F_{2Cc} = Limites de resistência à compressão da lâmina de referência na direção 1 e 2, respectivamente;

F_{12f}, F_{12m} = Limites de resistência ao cisalhamento no plano 1-2 das fibras e matriz, respectivamente;