

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

VÍVIA DAYANA GOMES DOS SANTOS

**ESBOÇO DE GRÁFICOS NOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS E GEOGEBRA:
FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS**

Maceió/AL

2012

VÍVIA DAYANA GOMES DOS SANTOS

**ESBOÇO DE GRÁFICOS NOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS E GEOGEBRA:
FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS**

Dissertação realizada e apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Maceió - AL

2012

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S327e Santos, Vivia Dayana Gomes dos
Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e GeoGebra: funções afins e
funções quadráticas / Vivia Dayana Gomes dos Santos – 2012.
124 f. il., fots. color.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade
Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e
matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 103-105.
Apêndices: f. 106-118.
Anexos: 119-124.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções afins e quadráticas. 3. Software
GeoGebra. 3. Gráficos (Matemática). 4. Ensino fundamental. I. Título.

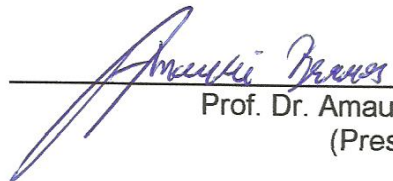
CDU: 511:37

VÍVIA DAYANA GOMES DOS SANTOS

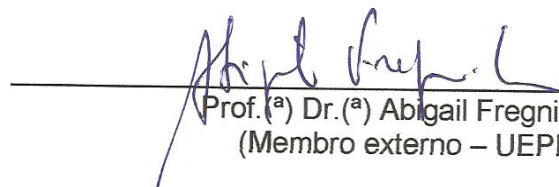
**ESBOÇO DE GRÁFICOS NOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS E GEOGEBRA:
FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS**

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 10 de Outubro de 2022.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
(Presidente)



Prof.^(a) Dr.^(a) Abigail Fregni Lins
(Membro externo – UEPB)



Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
(Membro interno – PPGEICIM/UFAL)

Dedico este trabalho aos meus pais, Amaro e Quitéria,
à meus sobrinhos, Daffny e Aquiles,
e ao meu noivo Allan César.

AGRADECIMENTOS

Considerando esta dissertação como resultado de uma árdua caminhada, agradecer pode não ser tarefa fácil, nem justa. Para não correr o risco da injustiça, agradeço de antemão a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção desta pesquisa e da pessoa que sou hoje.

Agradeço primeiramente a Jeová Deus, porque sem a fé que tenho nele e sem o seu apoio não teria chegado onde estou e, particularmente, a algumas pessoas pela contribuição direta na construção deste trabalho: meus pais, Amaro e Quitéria, e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida; meu noivo, Allan César, por sempre ter estado ao meu lado e por colaborar com sua disposição de me ajudar na conclusão deste trabalho; e meu professor e orientador Amauri Barros, pela paciência na orientação, por seu apoio, incentivo e inspiração, que contribuíram para o amadurecimento dos meus conhecimentos e conceitos, que me levaram à execução e conclusão desta dissertação.

Quero agradecer também a todos os professores do Programa e Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, pois foram muito importantes no desenvolvimento deste trabalho e na ampliação da minha visão quanto ao futuro do ensino de Matemática. Também, ao professor Dr. Ediel Guerra e a professora Dra. Abigail Lins por aceitaram o convite para participar, tanto da banca de qualificação, quanto a de defesa. Suas sugestões e instruções deram uma contribuição significativa para o resultado final deste trabalho.

Ao meu amigo Rafael Barros, pelo co-orientação forçada, no que diz respeito à formatação e normatização deste trabalho. Aos amigos e colegas da Universidade Federal de Alagoas, em especial, Anayara Gomes, Vanessa Alves e Wellington Araújo (vulgo Pessoa), pela amizade sincera, pelo incentivo e apoio constante, pela espontaneidade e alegria na troca de informações e materiais, numa rara demonstração de amizade e solidariedade.

Enfim, agradeço a todos que de uma forma ou de outra tiveram uma grande, ou pequena, participação em minha vida durante esta jornada a qual espero que não termine por aqui.

Função – A Alma do Ensino de Matemática.
(Felix Klein)

RESUMO

Quando se trata do ensino de funções afim e quadrática, observamos que os professores de Matemática, orientados pelos livros didáticos atuais, exploram a construção de gráficos mediante a ligação de pontos no plano cartesiano. Este método, embora seja válido, não garante um esboço seguro e não favorece a observação de propriedades importantes das referidas funções. Pensando nisto, este trabalho objetiva verificar a eficiência de um roteiro produzido em forma de cartilha explicativa e metodológica. Neste roteiro encontra-se uma maneira prática e eficiente para traçar os gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus fazendo uso de materiais simples e indispensáveis, como o papel e o lápis, e também de um recurso digital, o software GeoGebra. Para verificar a eficiência deste roteiro, tomamos um grupo de alunos composto por indivíduos que cursam o Ensino Médio em escolas públicas e que participam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Junior (PIBIC-Jr). A metodologia adotada consistiu na aplicação de questionários - antes, durante e depois - de nossa intervenção de ensino: aulas expositivas, referente às funções afins e funções quadráticas, destacando a construção de seus gráficos; e uso do roteiro impresso que trabalhou a construção dos gráficos, fazendo uso, a princípio, de lápis e papel quadriculado e, em outro momento, de um software de geometria dinâmica. A utilização deste software, além de tornar o esboço de gráficos mais rápidos, tornou compreensíveis as modificações gráficas sofridas quando muda os coeficientes das funções. Como fundamentação teórica para a pesquisa exposta neste trabalho, contamos com a contribuição da Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (2008), e das formas representativas de uma função na visão de Raymond Duval (2009), na sua Teoria de Registros de Representação Semiótica. Dos dez alunos participantes na pesquisa, sete apresentaram um avanço no desenvolvimento do traçado gráfico das funções consideradas e na compreensão das suas propriedades. Desta maneira, chega-se à conclusão de que é possível estudar e observar as propriedades das funções afim e quadrática levando em consideração pontos específicos pertencentes a seus gráficos, tanto no papel quanto, e especialmente, no computador.

Palavras-chave: Funções Afins - Funções Quadráticas - Gráficos - GeoGebra.

ABSTRACT

When it comes to teaching linear and quadratic functions, we observed that the Mathematics teachers, guided by current textbooks, explore the construction of graphs by connecting points on the Cartesian plane. This method, while valid, does not guarantee an outline safe and does not imply the observation of important properties of these functions. With this in mind, this study aims to verify the efficiency of a screenplay produced in a explanatory and methodological booklet form. This script is a practical and efficient way to plot the graphs of polynomial functions of the 1st and 2nd grade using simple materials and essentials such as paper and pencil, and also a digital resource, the software GeoGebra. To check the efficiency of this route, we take a student group composed of individuals who attend high school in public schools and participant the Institutional Program for Scientific Initiation Scholarships Junior (PIBIC-Jr). The methodology consisted of questionnaires - before, during and after - the teaching intervention: lecture, referring to related functions and quadratic functions, highlighting the construction of their graphs, and use of a printed script, developed in the form of a explanatory booklet which worked the construction of graphs, using the principle of graph paper and pencil, and at another time, a dynamic geometry software. Using this software, and making a sketch of faster graphics, it became understandable graphical changes incurred when changing the coefficients of the functions. As a theoretical framework for the research exposed in this work, we rely on the contribution of the Theory of Didactic Situations, Guy Brousseau (2008), and representative forms of a function in the view of Raymond Duval (2009), in his Theory of Representation Registers Semiotics. The ten students participating in the study, seven had a breakthrough in the development of the trace graph of functions considered and understanding of their properties. Thus, one comes to the conclusion that it is possible to study and observe the properties of linear and quadratic functions taking into account specific issues pertaining to its graphics, both on paper and, especially, on the computer.

Keywords: Linear Functions - Quadratic Functions - Graphics - GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplos de uma situação matemática – “Corrida Ao 20”	35
Figura 2 - Diagrama da relação $y = x + 8$	58
Figura 3 - Gráfico	59
Figura 4 - Gráfico	59
Figura 5 - Gráfico	60
Figura 6 - Função Afim – Crescimento e Decrescimento	62
Figura 7 - Gráfico da função $f(x) = 3x + 1$	62
Figura 8 - Trajetória da bola de vôlei	63
Figura 9 - Concavidade da Parábola	64
Figura 10 - Parábola	65
Figura 11 - Imagem da função quadrática	67
Figura 12 - Gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$	69
Figura 13 - Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 2x - 1$	70
Figura 14 - Gráfico da função $h(x) = 4x^2 - 4x + 2$	72
Figura 15 - Capa do roteiro explicativo	73
Figura 16 - Função Afim – Roteiro para o ambiente Papel e Lápis	75
Figura 17 - Função Afim – Roteiro para o ambiente GeoGebra	76
Figura 18 - Função Quadrática – Roteiro para o ambiente Papel e Lápis	77

Figura 19 - Função Quadrática – Roteiro para o ambiente GeoGebra	77
Figura 20 - Sistema de Equações – Método de intersecção de gráficos	78
Figura 21 - Hora De Praticar – Capítulo 1	79
Figura 22 - Hora De Praticar – Capítulo 3	80
Figura 23 - Esboço gráfico da função $f(x) = - 2x^2 + 2$, por uma das alunas envolvidas na pesquisa	91
Figura 24 - Resposta de uma aluna as três últimas perguntas de Q3.....	97
Figura 25 - Três pontos sobre a reta $y = ax + b$	106
Figura 26 - GeoGebra	113
Figura 27 - Janela de Visualização	115
Figura 28 - Constantes	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dúzia X Preço	57
Tabela 2 - Valor a pagar por quilômetro rodados	60
Tabela 3 - Pontos que o gráfico intersecta os eixos coordenado	62
Tabela 4 - Pontos principais no caso $\Delta > 0$	67
Tabela 5 - Pontos principais no caso $\Delta \leq 0$	68
Tabela 6 - Função $f(x) = x^2 - 9$	69
Tabela 7 - Função $g(x) = -x^2 + 2x - 1$	70
Tabela 8 - Função $h(x) = 4x^2 - 4x + 2$	71
Tabela 9 - Avanço das Habilidades	99
Tabela 10 - Operações Elementares	117
Tabela 11 - Constantes	117
Tabela 12 - Funções Elementares	117

SUMÁRIO

1	AS FUNÇÕES MATEMÁTICAS	19
1.1	Aspectos históricos e didáticos das funções	19
1.1.1	Origem da noção de função.....	19
1.1.2	Introdução do tema “função” aos conteúdos matemáticos no Brasil	22
1.1.3	Ensino de função na atualidade.....	28
1.2	Teoria das situações didáticas	29
1.2.1	Situações Didáticas e Adidáticas.....	31
1.2.2	Classificação das Situações Didáticas.....	33
1.2.3	Contrato Didático	36
1.2.4	Quebra de Contrato e Alguns Efeitos do Contrato Didático.....	40
1.3	Teoria dos registros de representação semiótica	43
1.3.1	Registro de Representações – Compreensão e Aprendizagem.....	44
1.3.2	Transformações das Representações Semióticas.....	45
1.3.3	Tipos de Representações Semióticas.....	47
1.4	Revisão de literatura	48
2	CONCEITUAÇÕES BÁSICAS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES	57
2.1	Conceito de função	57
2.1.1	Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Função	58
2.1.2	Gráfico de uma Função	59
2.2	Função afim	60
2.2.1	Gráfico.....	61
2.3	Função quadrática	63
2.3.1	Gráfico.....	64

3	INTERVENÇÃO DE ENSINO PARA AS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA	73
3.1	Intervenção de ensino	73
3.2	Aplicação da metodologia: Descrição	80
4	DOS ENCONTROS PRESENCIAS: ANÁLISE	86
4.1	Primeiro encontro	86
4.2	Segundo encontro	89
4.3	Terceiro encontro	90
4.4	Quarto encontro	93
4.5	Quinto encontro	95
4.6	Sexto encontro	96
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	100
	REFERÊNCIAS	103
	APÊNDICES	106
	ANEXOS	119

INTRODUÇÃO

Logo no início da minha experiência em sala de aula com a Matemática, percebi que seria necessário criar situações de ensino diferentes daquelas que são comumente utilizadas, ou seja, o emprego do quadro de giz e de aulas expositivas. Com o decorrer do meu trabalho, intuí que as situações de aprendizagem deveriam estimular a motivação dos alunos pelo tema estudado, como também, auxiliarem na compreensão dos conceitos relativos à disciplina. Neste contexto, considereei que deveriam estar inseridos: jogos, desafios e problemas contextualizados na realidade vivida pelos estudantes. No meu entendimento, diante dessas novas estratégias, esses alunos mudariam de opinião sobre a Matemática, considerada - pela maioria - como uma disciplina desinteressante e difícil.

No decorrer de minha vida profissional, descobri um fator que se revelou bastante útil, que foi a utilização de recursos representativos, de preferência visuais, dentro das situações criadas. Por exemplo, no estudo de funções matemáticas, é importante que se utilize modelagens, analogias, gráficos e tabelas, capazes de contribuir, de maneira significativa, para o entendimento dos conceitos matemáticos. Segundo destacou Oliveira (2006),

Os gráficos representam uma importância muito grande para o aprendizado da matemática, uma vez que eles são fotografias da compreensão e do entendimento da solução de um problema matemático e, na maioria das vezes, é uma solução geométrica que nos permite apresentar a solução do problema de forma analítica. É tão importante que é usado com frequência como recurso didático para o ensino da matemática, pela visão de conjunto e rapidez do problema. (p. 10)

Este trabalho relata os resultados da aplicação de um roteiro produzido, em forma de cartilha explicativa e metodológica, capaz de permitir aos alunos o traçado de gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus, fazendo uso de materiais simples, como o papel e o lápis e de um recurso digital, o software GeoGebra. Com este roteiro, intitulado “Esboço de Gráficos: funções afins e quadráticas”, e com a nossa orientação, quais professores e pesquisadores, buscou-se melhores resultados no que diz respeito a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Esta pesquisa, que teve um caráter qualitativo, buscou verificar se os alunos nela envolvidos seriam capazes de perceber que, para esboçar os gráficos das funções afins e das funções quadráticas, basta-se ter o cuidado de selecionar pontos específicos, uma vez conhecida a sua forma geral. Também, buscou verificar se o uso de um aplicativo digital auxilia na compreensão da relação existente entre os coeficientes, de cada uma das funções consideradas, em consonância com seus respectivos gráficos.

Como suportes teóricos para esta pesquisa utilizamos a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau (2008) e alguns recortes da teoria de registros de representações semióticas, de Raymond Duval (2009).

Analisando o tratamento que muitos livros didáticos oferecem, no que se refere ao esboço de gráficos de funções afim e quadrática, pôde-se notar que estes são obtidos através da “ligação” de pontos, no plano cartesiano. Infelizmente, muitos professores de Matemática apegam-se, somente, a este recurso didático para a obtenção do gráfico de funções. Sabe-se que este método não deve ser desconsiderado, porém, deveria servir, apenas, de auxílio no reconhecimento da forma gráfica da função considerada e, a partir dessa forma, seriam obtidos gráficos de outras funções do mesmo tipo, levando em consideração algumas de suas propriedades básicas, como raízes e simetria.

Observa-se também que alguns professores ao considerarem, em suas turmas, as representações gráficas das funções afim e quadrática, simplesmente apresentam o formato que estes gráficos tem, impossibilitando que seus alunos descubram isso por si mesmos.

Segundo a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), o papel do professor é criar meios que possibilitem, aos seus alunos, a aquisição de autonomia no que se refere à construção de conceitos. Nesse sentido, Brousseau (1986, p.49) afirma que:

A concepção moderna de ensino vai, portanto, requerer que o professor provoque no aluno as adaptações desejadas, por meio de uma escolha cuidadosa dos problemas, de modo que o aluno possa aceitá-lo, agir, falar, refletir, evoluir por si próprio. (Apud Freitas, 2008, p. 84)

Então, quando o professor simplesmente apresenta aos alunos a representação gráfica de qualquer tipo de função sem dar a oportunidade para que eles a identifique, mesmo que através do uso de tabelas, priva estes indivíduos do importante papel de alunos-pesquisadores, o que contribuiria, de maneira significativa, para a percepção de propriedades e aquisição de conceitos.

Dos conceitos e definições que mais merecem atenção na área da Matemática está o de Função, pois, a partir dele, muitos outros conceitos podem ser desenvolvidos e compreendidos. Sua aplicação é vasta, seja no campo da própria Matemática (matemática financeira, seqüência, determinantes, áreas e volumes, limites e derivadas, dentre outros), bem como na Física, Química, Biologia e Economia.

Lidamos diariamente com funções: o valor da conta de energia que depende da quantidade de *kilowatts*, gasto no mês; o salário de um vendedor, que depende da quantidade de itens vendidos; a corrida de táxi, em função da quilometragem rodada. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (PCN+, 2002, p. 121)

Segundo a visão de Raymond Duval (2009), para que um aluno consiga entender conteúdos matemáticos, deve ser capaz de explorar ao máximo todos os tipos de representações destes, fazendo uso do que já sabe a respeito do que está sendo estudado.

Como o conteúdo matemático trabalhando nesta pesquisa refere-se às funções afins e funções quadráticas - conteúdo abrangente e com diversas aplicações e considerações -, serão focadas, aqui, as suas representações algébricas e gráficas, destacando um método prático, rápido e seguro, para a construção de seus gráficos.

Almejou-se, com isso, que os alunos que participassem da pesquisa fossem capazes de esboçar gráficos manualmente e fazendo uso do programa de geometria dinâmica, o *software* GeoGebra, e que estes processos lhes permitissem a percepção de propriedades referentes às funções consideradas.

Vale frisar, que a expressão “esboço manual de gráfico”, vez por outra encontrada neste trabalho, refere-se à construção de gráfico a punho, fazendo uso de papel, régua, lápis ou caneta.

Para verificar se o roteiro que nós desenvolvemos é uma ferramenta eficaz, no tocante aos objetivos almejados, contamos com a participação de uma turma composta por dez alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior (PIBIC-JR), programa desenvolvido pelo Instituto de Matemática (IM) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) cujo objetivo é despertar a vocação científica e incentivar talentos potenciais, dentre estudantes oriundos de escolas públicas do Estado de Alagoas.

Este trabalho está dividido em quatro seções enumeradas, e mais uma destinada às considerações finais.

A primeira seção, dividida em quatro subseções, apresenta alguns aspectos históricos e metodológicos a respeito do ensino de função no Brasil, apresenta também as teorias que serviram de suporte para o desenvolvimento desta pesquisa e trabalhos relevantes que contribuíram de maneira significativa para a definição do tema por nós abordados, da problemática e dos objetivos.

A segunda seção, dividida em três subseções, dedica-se às definições de: função, função afim e função quadrática. Motivado por um exemplo do cotidiano, o conceito de cada uma das funções é apresentado, seguido de sua representação gráfica.

Na terceira seção, o leitor encontrará detalhes sobre a intervenção de ensino, criada para auxiliar os alunos a atingir os objetivos esperados, e sobre a metodologia aplicada.

A quarta seção, destinada à análise da intervenção de ensino, tratará com detalhes, à luz das teorias das situações didáticas, contrato didático e registros de suas representações, o comportamento dos alunos em cada um dos encontros, que, no total, foram seis.

Nas considerações finais apresentaremos um fechamento geral de todos os acontecimentos relevantes na execução desta pesquisa e uma reflexão sobre a situação didática por nós criada, baseada numa perspectiva de criar situações de aprendizagem mais dinâmicas, com, ou sem o uso da tecnologia de informática.

Acreditamos que estamos oferecendo uma contribuição significativa, para que haja um aprimoramento dos conceitos que os alunos já dominam e para a construção de novos conhecimentos, tanto no âmbito das experiências de professores, como de alunos.

1 AS FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Esta seção está dividida em quatro subseções. A primeira discorre sobre os fatores históricos e metodológicos, a respeito de funções e sua inserção entre os conteúdos matemáticos ministrados no 1º ano do Ensino Médio das escolas brasileiras. Na segunda e terceira subseções são apresentadas as teorias que serviram de base para o desenvolvimento desta pesquisa: as teorias das Situações Didáticas e do Contrato Didático, ambas desenvolvidas pelo teórico Guy Brousseau (2008); e a Teoria dos Registros de representação Semiótica de Raymond Duval (2009). A quarta subseção apresenta uma análise de literatura relevante para o nosso trabalho.

1.1 Aspectos históricos e didáticos das funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e, ao longo dos séculos, sofreu uma grande evolução. Nesta subseção será apresentada a origem deste conceito, bem como, sua introdução no ensino de Matemática, no Brasil.

Para tanto, fez-se uso de obras de alguns autores que se debruçaram sobre o assunto, em especial Braga (2006), que trata com riqueza de detalhes a introdução do tema “Função”, como conteúdo da disciplina Matemática, das escolas brasileiras.

1.1.1 Origem da noção de função

Desde os tempos dos Gregos até a idade moderna, a teoria dominante - no que se refere a tópicos matemáticos - foi a *Geometria Euclidiana*, cujos elementos principais eram os pontos, as retas e os planos.

Com base no que foi apresentado no livro Funções de Campitelli e Campitelli (2006, p.13), foi a partir desta época - final do século XVII -, que surgiu uma nova teoria, a teoria do *Cálculo Infinitesimal*. A origem da noção de função passou a confundir-se com os conceitos iniciais desta nova teoria, que, a partir de então, passaram a ser explicitados de várias formas.

Segundo exposto na obra acima citada, os primeiros conceitos surgiram de forma um tanto confusa nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642-1727). Newton aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relatia quantias" para designar variável dependente, e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

O primeiro a usar o termo "função" foi Leibniz (1646-1716), em 1673, no manuscrito Latino "*Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus*"¹. Leibniz usou o termo apenas para designar, de forma muito geral, a dependência de uma curva das quantidades geométricas, como as subtangentes e as subnormais, e introduziu, da mesma forma, os termos "constante", "variável" e "parâmetro".

O desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos requereu o uso de um termo que representasse quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. "Sendo assim, a palavra "função" foi adotada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748)." (Campiteli e Campiteli, 2006, p. 13)

O termo "função" não aparecia ainda num léxico matemático, sendo que, este fato ocorreu em 1716. Mas, dois anos mais tarde, Johann Bernoulli publicou um artigo que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função, de uma certa variável, como uma quantidade, composta de qualquer forma dessa variável, e constantes. Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por Euler (1707-1783), um antigo aluno de Bernoulli, substituindo o termo "quantidade" por "expressão analítica". Foi também Euler quem introduziu a notação $f(x)$.

A noção de função era identificada com a de expressão analítica, situação que perdurou pelos séculos XVIII e XIX, apesar de logo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações, pois uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes.

¹ Disponível em < <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/hist.htm>>. Acesso em: 21 março 2011.

Essa noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado.

Segundo Ponte (1990, Apud Campiteli e Campiteli, 2006), um dos momentos mais marcantes, no que tange a evolução do conceito de função, resultou dos trabalhos de Fourier (1768-1830), que se ocupava dos problemas de condução de calor nos objetos materiais, considerando a temperatura em função de duas variáveis: tempo e espaço.

Este problema mais tarde foi retomado por Dirichlet (1805-1859) que, em 1837, separou o conceito de função da sua representação analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos. Deste modo, uma função seria simplesmente uma correspondência entre duas variáveis, onde todo valor da variável independente é associado a um, e somente um, valor da variável dependente.

Finalmente, com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, que foi iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria de ser estendida à forma de que tudo o que constituísse correspondência entre conjuntos. Sendo eles numéricos ou não, constituem uma função.

Como consequências da evolução do estudo de funções, surgem numerosas aplicações da Matemática a outras ciências. Os cientistas, partindo de observações procuravam uma fórmula (uma função) para explicar os sucessivos resultados obtidos. A função era, então, o modelo matemático que explicava a relação entre as variáveis.

De acordo com Campiteli e Campiteli (2006, p. 19), foi com Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630) que a noção de função surgiu como instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais. Reagindo às tradições da escolástica medieval, Galileu sublinhava ser a Matemática a linguagem apropriada para estudar a natureza. Era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que tivessem, tanto quanto possível, uma descrição matemática simples.

Assim, o conceito de função que hoje nos parece simples, e que mais adiante será exposto para o leitor, é resultado de uma evolução histórica que o conduziu, sempre cada vez mais, à abstração, e que, só no século XIX, foi finalizado.

1.1.2 Introdução do tema “função” aos conteúdos matemáticos no Brasil²

Vimos, na subseção anterior, que o conceito de função vem sendo explicitamente definido pelos matemáticos desde o século XVII, mas, seu ensino, até a metade deste século, ocorria apenas na universidade. A inserção do tema “função” entre os conteúdos matemáticos do ensino secundário deu-se em 1929, com a criação de uma nova disciplina escolar denominada Matemática. Esta nova disciplina foi resultado da unificação de três outras disciplinas independentes: aritmética, álgebra e geometria.

Esta fusão é feita a partir de uma referência internacional, centrada nas idéias do renomado matemático Felix Klein, que propunha uma renovação nesse nível de ensino. Essa transformação estrutural da nossa matemática escolar é, em 1931, referendada por uma reforma educacional mais ampla, conhecida como Reforma Campos. A partir de agora, detalharemos mais como isso ocorreu.

O matemático prussiano-alemão Christian Felix Klein (1849-1925) foi destaque durante o movimento mundial de renovação do ensino da matemática na escola secundária (século XX), cujas raízes eram fincadas na Alemanha, Inglaterra, França e Estados Unidos, pelos seus atributos intelectuais e pelo respeito adquirido na comunidade científica.

Klein interessava-se por assuntos educacionais e defendia a idéia de que o ensino da Matemática deveria enaltecer uma visão mais abrangente no sentido de procurar uma unificação do conhecimento matemático, ao invés de haver um aprofundamento de estudos particulares, e se pensar a Matemática inicial de maneira intuitiva.

² Todas as informações contidas neste tópico foram retiradas, sofrendo pequenas mudanças, do livro “FUNÇÃO – A alma do ensino da matemática”, de Ciro Braga (2006).

Nos anos de 1881 e 1882, Klein trocou correspondência com o matemático Frances Jules Henri Poincaré (1854-1912), que também compartilhava a idéia de que a intuição deveria ter um lugar de destaque no desenvolvimento da Matemática. Segundo Poincaré, “é pela lógica que provamos, é por indução que inventamos”. (Braga, 2006, p. 33).

Embora desenvolvesse pesquisas em comum com Poincaré, Klein percebeu que não poderia acompanhar os passos de seu colega e dedicou-se a atividades acadêmicas. No final do século XIX começou a se envolver com as questões de ensino da Matemática no curso secundário que acabou o levando, de maneira decisiva, na criação de um organismo emblemático do movimento mundial de sua modernização: a Comissão Internacional de Ensino de Matemática (CIEM), em 1908.

Como líder deste movimento internacional, Klein propunha a unificação da Matemática escolar e a posse de alguns assuntos que eram próprios da Matemática universitária. Para isso, deveria haver um aperfeiçoamento da formação de professores do secundário, outra preocupação de Klein.

Klein foi levado a lutar pelo descrito acima devido ao que ocorria nos cursos oferecidos pelas Escolas Técnicas Superiores da Alemanha. As turmas de alunos ingressantes nesses cursos eram de culturas bem diversificadas, culturas em que cada professor de Matemática do secundário destacava o que, para ele, é mais importante.

Isto acarretava em um grande despreparo matemático dos alunos e, por este motivo, os cursos de Engenharia perdiam um tempo precioso para nivelá-los, tempo este que poderia ser dedicado ao estudo de outras matérias mais específicas.

Ciente da necessidade de repensar o ensino secundário, Klein, na década de 1890, levou adiante seu ponto de vista de que, fazer uma reforma universitária, requeria levar em consideração um sistema mais extenso: o sistema escolar como alicerce básico, de educação superior. Assim, Klein começou a se interessar pelo aperfeiçoamento da formação dos professores do secundário e a participar de

encontros, de congressos e a elaborar “aulas” - dirigidas a estes professores - a fim de atingir seu objetivo.

Em 1904, Klein organizou um curso em que analisava o papel dos diferentes tipos de escolas nos processos de ensino da Matemática. As anotações decorrentes dessas análises levaram à criação da coleção *Matemática Elementar sob o ponto de Vista Superior*, produto do curso de dois semestres, também destinados aos professores.

Nesta obra, Klein expressa muitas de suas idéias que acabaram se convertendo em princípios do movimento de modernização do ensino da Matemática secundária, do século XX. Ainda, o matemático alemão discorre diversas vezes sobre a necessidade de ter-se o Cálculo entre os conteúdos escolares, chegando a afirmar que “o ensino da Matemática secundária deve ir ascendendo até chegar aos umbrais do cálculo Infinitesimal, de modo que o naturalista e técnico de seguros, tomando por exemplos, obtenham da escola o instrumentos matemáticos de que venham a necessitar em seus trabalhos” (1927 p. VI, Apud. Braga 2006).

Apesar de vários tipos de argumentos apresentados por Klein, sua idéia não foi aceita e, como líder reformista, ele propôs entrelaçar e coordenar os vários ramos da Matemática escolar. Um exemplo foi o conceito de função, com suas diversas representações (tabular, algébrica e gráfica). Isto ocorreu, porque o sucesso no ensino de Cálculo, conforme apresentado por Klein, está intimamente ligado a um bom domínio de função - que os alunos devem ter -, visto que, faz parte dos conteúdos da disciplina de Cálculo: limite de uma *função*, derivada de uma *função* num ponto; *função* derivada; *função* primitiva; integral de uma *função* etc.

Para o líder reformista,

O assunto função deveria ser introduzido desde as séries iniciais (desenvolver o pensamento funcional dos mesmos) e favorecer o trânsito pelas representações tabular, gráfica e analítica e ser apresentado de forma gradativa, ao longo de todo o curso secundário, conectando e intermediando, sempre que possível, os conceitos e processos empregados na Aritmética, na Álgebra e na Geometria (Braga, 2006, p. 52).

Klein também defendia a idéia de se manter conexão entre diversas partes da Matemática. O intercâmbio de idéias que ocorria, entre os membros do CIEM,

assegurou a Klein a formulação de proposições reconhecidas como de alto valor educacional, que acabaram ganhando circulação por muitos países, incluindo o Brasil.

O primeiro feito decorrendo do que acontecia no movimento liderado por Klein, na Alemanha e em outros países que compunham a CIEM, foi que, em 1929, o Colégio Dom Pedro II do Rio de Janeiro (colégio de referência para todo o Brasil) implantou uma nova disciplina escolar, a *Matemática*, resultado da unificação de três disciplinas independentes: Aritmética, Álgebra e Geometria.

Para a recém-criada disciplina, a Congregação do Colégio Dom Pedro II aprovou o programa do 1º ano, seguindo as instruções para a sua execução que reservavam - para a noção de função - um papel nunca antes assumido no ensino das Matemáticas. Atendendo a essas instruções, em meados do 2º semestre de 1929, é publicado o Volume I do *Curso de Matemática Elementar* de Euclides Roxo (1890-1950) - catedrático do Colégio e diretor do seu externato -. Este livro didático foi considerado revolucionário para o padrão da época. Em 1930, é editado o Volume II deste curso, destinado aos alunos do segundo ano.

O processo de implantação dos novos programas do Colégio Dom Pedro II, que deveria ser realizado de maneira progressiva, acabou passando por turbulências devido à eclosão da Revolução Vargas que, em 1931, decretou uma reforma do sistema educacional brasileiro – a Reforma Francisco Campos. Com essa Reforma, o ensino secundário passou a ter dois ciclos: um fundamental, de cinco anos, e outro complementar, de dois anos, visando à preparação para o ensino superior.

Quando Euclides Roxo implantou, em 1929, as reformas modernizadas no Colégio Dom Pedro II, imaginava concretizar as concepções do movimento internacional, primeiramente, no ambiente do Colégio, para acompanhar de perto as eventuais e necessárias correções de rota imposta pela realidade da sala de aula. Mas, a Reforma Francisco Campos terminou obrigando, ao ensino de Matemática de todo Brasil a adaptar-se, de maneira repentina, a essas ideias. Este fato ocorreu de forma diferente do que foi vivenciado na Alemanha, onde o processo modernizador foi gradativo e, a partir do convencimento do professorado.

Desde então, os matemáticos brasileiros sofreram bastante influência dos pensamentos e ideologias de matemáticos de outros países, no que se refere ao ensino de função, considerado como uma das prioridades do curso secundário.

Em seu livro *A Matemática na Escola Secundária*, publicado em 1937, Roxo expressa seu pensamento sobre o ideário renovador internacional. No caso da noção de função, no ensino secundário, ele revela que, tanto ele como Breslich, compartilhava da concepção de Klein de que “*função é a alma da Matemática*”.

Ernst Breslich (1874-1966), alemão naturalizado cidadão americano em 1896, foi um educador que explorou ao máximo o potencial educativo do pensamento funcional. Em seu artigo *Developing Functional Thinking in Secondary School*, de 1928, Breslich ressalta a importância da utilização de função como princípio unificador para a reorganização do ensino secundário nos Estados Unidos. Essa importância está diretamente relacionada ao caráter prioritário que assume o desenvolvimento do pensamento funcional, na formação do aluno, no sentido de lhe dar uma visão e uma compreensão da Matemática, adequada ao mundo contemporâneo de então.

Por ocasião da década de emergência da nova disciplina - Matemática - no Brasil, em 1930, foram lançadas diversas coleções de livros didáticos, no intuito de atender a essas mudanças. Entre os que mais se destacam estão:

- Curso de Matemática Elementar, 2 Volumes (1º e 2º anos), de Euclides Roxo, professor do Colégio Dom Pedro II;
- Matemática, 2 Volumes (1º e 2º anos), de Cecil Thiré e J.C. de Mello e Souza (Malba Tahan), professores do Colégio Dom Pedro II;
- Curso de Matemática, 3 Volumes (3º, 4º e 5º anos), de Euclides Roxo, Cecil Thiré e J.C. de Mello e Souza;
- Elementos da Matemática, 5 Volumes, de Jacomo Stávale, professor do Instituto Caetano de Campos de São Paulo;

- Lições de Matemática, 5 Volumes, de Algacyr Munhoz Maeder, professor do Ginásio Paranaense;

- Curso de Matemática, 5 Volumes, de Agricola Bethlem, professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro.

Segundo a análise feita por Braga (2006), os livros didáticos acima utilizaram como referência o atendimento às recomendações pertinentes das Instruções Pedagógicas da Reforma Francisco Campos, isto é: fazer uso da noção de função como ideia central de ensino, apresentado-a inicialmente de maneira intuitiva e desenvolvida nas séries sucessivas do curso; incluir o ensino de função na 5ª série; considerar a fórmula como expressão de dependência de uma variável em relação à outra, manter a relação entre sua representação gráfica, tabular e outros.

Dos manuais destinados ao primeiro e segundo anos, apenas os de autoria de Roxo atendiam às instruções acima citadas. Os demais autores limitavam-se a reservar, em cada volume, um dos últimos capítulos para representação gráfica, e limitavam-se a poucos exercícios. Dessa forma, os professores que faziam uso destas obras optavam por não abordar esse assunto em sala de aula. Percebe-se, assim, que apesar dos autores atenderem ao Programa Oficial, existia alguma intencionalidade em afastar o tema “função”, dos dois primeiros anos do secundário, ou no mínimo, deixá-lo em segundo plano.

Desta forma, temos que o pensamento funcional, entendido como um método a ser desenvolvido aos poucos e de forma gradativa, ao longo do curso secundário, não vigorou nos dez anos da Reforma Capanema. O que dizer dos outros países, em período igual, referente à aplicação desse princípio do movimento internacional?

Pelo o que foi exposto em um relatório do CIEM, relativo ao período de 1902 a 1914, esses doze anos foram insuficientes para a assimilação do princípio que colocava função e o pensamento funcional como protagonista da Matemática escolar. Assim, compreende-se que o insucesso da aplicação dessa concepção modernizadora, nos dez anos da Reforma Francisco Campos, não é algo específico do nosso país.

Alguns tentam creditar o insucesso da implantação do pensamento funcional e da concepção de função como ideia central do ensino no Brasil à Roxo, visto que, ele não se empenhou numa atividade mais intensa junto às bases e manteve uma atitude menos autoritária.

Tendo em mente os fatores que deram início à introdução do ensino de função - entre os conteúdos programáticos da disciplina de Matemática -, nas escolas brasileiras, torna claro, e até aceitável, a forma como são apresentados os objetivos deste conteúdo em documentos oficiais.

1.1.3 Ensino de função na atualidade

Os que ministram aulas no Ensino Superior, na área das Ciências Exatas, comprovam que o ensino de função continua sendo marginalizado, tanto em escolas públicas, quanto em particulares. Grande parte dos que ingressam em cursos do Ensino Superior, cuja disciplina Cálculo faz parte de sua grade curricular, apresentam muitas dificuldades, no que diz respeito a funções e seus gráficos.

O índice de reprovação em Cálculo é elevadíssimo nas Universidades Federais, Estaduais e Particulares, do nosso país. Por exemplo, na Universidade Federal de Alagoas (UFAL), menos de 30% dos que se matriculam na disciplina de Cálculo 1 (semestral) são aprovados. No intuito de diminuir este índice, acrescentou-se à grade curricular dos Cursos de Matemática e Química da UFAL as disciplinas Fundamentos da Matemática 1 e Fundamentos da Matemática 2 (esta apenas para o curso de Matemática), oferecidas em semestres diferentes e sucessivos, a fim de nivelar, preparar, os que terão de cursar a disciplina Cálculo.

Na disciplina de Fundamentos da Matemática 1 é apresentado aos alunos a maioria dos tópicos que compõem o Programa do 1º ano do Ensino Médio: Conjuntos Numéricos, Função, Função Afim, Função Quadrática, Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas. Em Fundamentos da Matemática 2 aborda-se todos aspectos da Trigonometria, Números Complexos e Polinômios.

Apesar dos documentos oficiais brasileiros destacarem a importância do ensino de função e do desenvolvimento do pensamento funcional, observa-se que

muitos dos professores do Ensino Médio (antigo secundário) têm dificuldades em abordar esse tema.

Segundo o tópico *Competências em Matemática* dos PCN+ (2002, p. 116), no que se refere ao ensino de função, os alunos devem ser capazes de identificar fenômenos naturais, ou grandezas, em um domínio específico do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.

Muitos livros didáticos não favorecem este tópico, o que reflete na maneira dos professores abordarem o assunto Função, já que são orientados por estes livros. Como será visto mais adiante neste trabalho, no subtítulo Revisão de Literatura, alguns livros didáticos de Matemática destinados ao 1º ano do Ensino Médio pecam em alguns pontos, principalmente, no que diz respeito à construção e análise de gráficos de funções.

Mas, deve-se levar em consideração que os professores de Matemática, mais preocupados com o futuro de seus alunos, têm se esforçado para apresentar a estes o máximo de conhecimento referente ao ensino de funções. Um desse esforço está descrito neste nosso trabalho que relata uma pesquisa que visa contribuir, tanto por ensinar algo novo quanto por aprimorar conhecimentos já existentes nos alunos, no que diz respeito ao esboço de gráficos das funções afins e funções quadráticas.

1.2 Teoria das situações didáticas

A teoria das Situações Didáticas, cuja noção principal é a de Contrato Didático³, foi desenvolvida na França pelo matemático Guy Brousseau, por volta dos anos 70. Brousseau nasceu em 04 de fevereiro de 1933, em Taza, Marrocos. Desde muito jovem se interessou por Matemática, em especial pela maneira como os conhecimentos matemáticos eram apresentados aos alunos. Essa sua postura tornou-se evidente quando decidiu abandonar o Curso Superior de Matemática para retornar à Escola Normal de Agen, cidade da Aquitânia, sudoeste da França, para

³ Que será abordada mais adiante.

fazer um ano de formação profissional. Seu interesse era estudar como as crianças adquirem conhecimentos matemáticos.

Após completar 20 anos de idade, começou seu trabalho como professor, dando aulas para alunos do Ensino Fundamental, numa aldeia da região de Lot et Garonne. Em 1962 retomou o curso de Matemática, na Universidade, em Bordeaux, onde lecionou e assumiu o posto de assistente de Matemática. No desenrolar do Curso Superior de Matemática, Brousseau recebeu, de um de seus professores, a tarefa de estudar psicologia cognitiva, com Pierre Greco. Brousseau ficou encantado com a habilidade de Greco em criar dispositivos experimentais, a fim de tornar clara a origem do pensamento matemático de crianças, nas diversas fases de seu desenvolvimento. No entanto, percebeu que não fazia parte das preocupações de Greco a análise dos dispositivos utilizados no processo ensino-aprendizagem, nem tampouco, a demonstração da relação existente entre essas crianças e a noção do assunto matemático estudado.

Brousseau reconhecia o trabalho realizado pelos professores de Matemática que consiste em ensinar o conteúdo através da proposta de diversos problemas e exercícios, para que seus alunos dele se apropriassem. Não descartava o fato de que este método de ensino pudesse oferecer informações sobre a aquisição de conhecimentos gerais, desde que, o meio utilizado para esta finalidade fosse planejado, de tal forma, que proporcionasse aos alunos estas informações.

Então, foi pesquisando a relação existente entre o meio, o aluno e o professor, e também buscando respostas a determinadas perguntas - “Que condições podem ser propiciadas para que um sujeito qualquer tenha a necessidade de um conhecimento matemático para tomar certas decisões?” e “Como explicar de antemão a razão pela qual a faria?” - que Guy Brousseau desenvolveu a teoria das Situações Didáticas.

Com base em seus estudos, Brousseau chegou à conclusão de que:

Os conhecimentos dos alunos revelam o funcionamento do meio, considerado como um sistema. Portanto, é o meio que deve ser modelado. Assim, um problema ou exercício não pode ser mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que responde ao sujeito, segundo algumas regras (2007, p. 19).

O “meio” ao qual Brousseau se refere diz respeito aos instrumentos utilizados pelos professores para que seus alunos compreendam os conceitos matemáticos, que estão sendo estudados. Desta forma, este “meio” pode ser representado por exercícios, problemas, jogos etc. O professor pode organizar o “meio”, de tal forma que ele mesmo possa intervir diretamente, indiretamente, ou não intervir, na realização da atividade proposta.

Segundo a apresentação da edição brasileira do livro “Introdução ao Estudo das Situações Didáticas” de Brousseau (2008), nos anos 90 suas obras começaram a se tornar conhecidas no Brasil, quando um grupo de pesquisadores da recém-criada área de Educação Matemática começou a estudar os princípios e o alcance da didática francesa no ensino e aprendizagem da Matemática. Desde então, muitos pesquisadores tem utilizado esta teoria como base para seus estudos, inclusive nós.

1.2.1 Situações Didáticas e Adidáticas

Brousseau trabalha com dois tipos de situações de ensino, a situação didática e a situação adidática. Uma “situação” é um modelo de interação de um sujeito, com um meio determinado, e o termo “situações didáticas” refere-se aos modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno, sendo essas atividades matemáticas ou não (Broussau, 2008, p. 21).

Desta forma, pode-se dizer que uma situação didática é o conjunto de procedimentos adotados que objetiva manter uma relação entre o aluno, o professor e o meio. O professor exerce um importante papel neste processo de aprendizagem por parte dos alunos, pois cabe a ele modelar atividades matemáticas de tal forma que proporcione aos seus alunos a construção de conhecimentos e conceitos matemáticos à medida que tentam solucionar a atividade proposta, seja esta atividade um problema ou um jogo. Conforme descrito por Freitas (2010):

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de construção (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (Brousseau, 1986, p.8).

Quando um problema é proposto ao aluno, e ele - sem a intervenção do professor -, consegue solucioná-lo e adquirir um conceito que não lhe foi transmitido anteriormente, mas que se encontra implícito no problema proposto, ocorre o que Brousseau (2008) chama de “situação adidática”.

A idéia é aproximar o trabalho do aluno do trabalho de um pesquisador - testando conjecturas, formulando hipóteses, provando, construindo modelos, conceitos, teorias e socializando os resultados - que deverá agir sobre o conteúdo, de tal forma, que seja capaz de transformá-lo em conhecimento para si mesmo, isto com o devido auxílio do professor, que providenciará situações favoráveis.

Brousseau (2008) defende que todo método de ensino que objetiva a aprendizagem, é válido. Mas a construção de um saber ocorre, efetivamente, a partir do momento em que o professor provoca o aluno por meio de problemas selecionados de forma sensata e coerente. Tais problemas devem fazer com que o aluno atue, fale, reflita e evolua:

Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir (...). O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, essa saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se adidática (Brousseau, 2008, p. 35).

Desta forma, notamos que, ao contrário do que a palavra dá a entender, uma situação adidática não tem nada a ver com uma situação não-didática, que é uma situação não planejada, onde ocorre uma aprendizagem.

Na verdade, as situações adidáticas fazem parte das situações didáticas. Elas interagem entre si. É através das situações adidáticas que pode ser trabalhada a situação didática, onde, a aparente ausência do professor, numa determinada etapa do processo de ensino-aprendizagem, impulsiona o aluno a trabalhar individualmente, ou em grupo, para construir um novo conhecimento.

1.2.2 Classificação das Situações Didáticas

Para generalizar os tipos de situações didáticas, Brousseau partiu de uma lição intitulada “Quem vai dizer 20?”. O objetivo da aula em que essa lição foi proposta era revisar a operação de divisão, oferecendo às crianças a possibilidade de descobrir e demonstrar alguns teoremas.

Esta lição foi dividida em três fases. Na primeira fase, o jogo acontece entre duas crianças. De maneira alternada, cada uma deve somar os algarismos 1 ou 2 ao número dito pelo adversário, e aquele que chegar primeiro ao número 20, ganha a partida. Após sucessivas partidas, os alunos devem ser capazes de perceber que aquele que conseguir chegar ao número 17, garante a vitória.

A segunda fase desta lição consiste em dividir os alunos em duas equipes e o jogo acontece, de modo que uma equipe joga contra a outra. Nesta etapa as crianças descobrem que falar um número aleatoriamente não é a melhor maneira de ganhar, sendo assim, é importante discutir e definir estratégias.

Na terceira e última fase o professor sugere que cada equipe apresente uma estratégia que leve à vitória. Desta forma, os alunos têm a oportunidade de socializar seus métodos, testar se suas estratégias são válidas e de formalizá-las.

Com suporte nesse jogo, Brousseau (2008) define quatro tipos de situações didáticas. São elas:

- **Situação de Ação:** é aqui que acontece o primeiro contato do aluno com o meio modelado pelo professor. Sem a orientação do professor e com base nos seus conhecimentos anteriores, sejam estes conhecimentos escolares ou empíricos, o aluno age sobre o problema de diversas formas em busca da solução. No jogo “Quem vai dizer 20?”, esta situação ocorre quando os alunos participam do efetuando várias partidas. Conforme observado por Brousseau (2008, p. 24), “à medida que a criança joga mais partidas, desenvolve novas estratégias, isto é, razões que a levam a escolher um número em vez de outro”.

- **Situação de Formulação:** esta situação é o momento em que o aluno começa a pensar numa estratégia que o leve à solução do problema proposto, e o

socializa com os demais colegas. Faz isto, levando em consideração as soluções obtidas enquanto estava na Situação de Ação. Ele percebe que, para encontrar a resposta, é preciso raciocinar em cima do meio modelado por seu professor, que, obviamente, tem uma solução, e estabelecer um padrão. Aplicando novamente ao jogo dos 20, Brousseau (2008, p. 26) diz que “o meio se modifica nas sucessivas partidas e cada aluno faz suas formulações em função de sua interpretação dos resultados das partidas anteriores” (N. da t. da edição argentina).

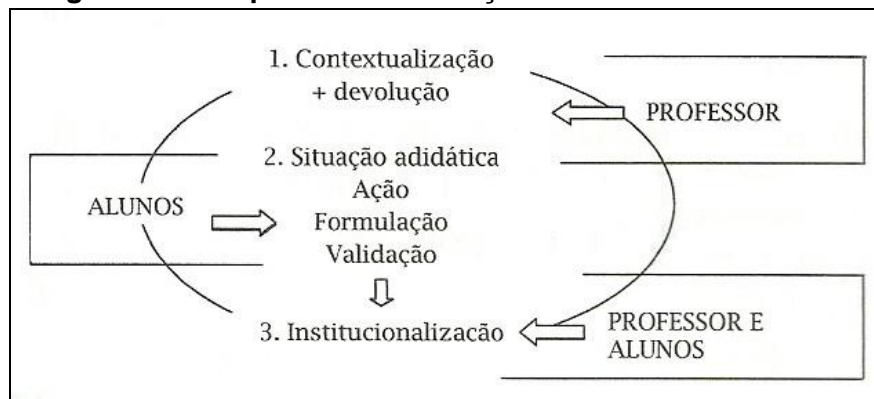
- **Situação da Validação:** como o próprio nome dá a entender, neste tipo de situação o aluno terá de mostrar que a sua estratégia realmente é válida para resolver o problema que lhes foi apresentado à medida que contesta a estratégia de outro colega, diferente da sua, exigindo que o mesmo prove a veracidade de sua afirmação:

Nesse novo tipo de situação, os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias – na qualidade de conjuntos de enunciados de referência – e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à sabedoria, a intimidações etc. (Brousseau, 2008, p. 27)

- **Situação de Institucionalização:** esta é a etapa em que o aluno tem de formalizar o conhecimento adquirido na situação anterior e verificar se o mesmo vale em outros contextos, que fazem uso do objeto matemático encontrado. Até este momento, todo o conhecimento que o aluno adquiriu foi com base em seus próprios esforços, para a resolução do problema que lhe foi apresentado. Mas, na situação de institucionalização, a prova e a generalização dos conhecimentos adquiridos pelos alunos acontecem com a intervenção do professor.

A figura abaixo sintetiza as principais fases ou momentos didáticos referente à teoria das situações didáticas.

Figura 1: Exemplo de uma situação matemática – “Corrida ao 20”



Fonte: Freitas, 2010, p. 103

O esquema apresenta a ideia geral da teoria das situações didáticas. O professor age no momento em que propõe, para o aluno, um problema contextualizado e lhe transfere a responsabilidade de resolvê-lo. O professor deve ser capaz de convencer o aluno a aceitar o desafio, ou seja, torná-lo seu e apaixonar-se por ele, e não, resolvê-lo, só porque o professor quer.

Daí, exercendo o papel de um pesquisador, o aluno age sobre o problema, na intenção de encontrar a solução. É durante esta “ação” que novos conhecimentos vão sendo adquiridos, testados e confirmados, na situação de formulação e validação. Finalmente, o conhecimento adquirido é formalizado com a contribuição do professor, na fase de institucionalização.

Pommer (2008) apresenta em seu artigo que, para Brousseau (1996a), as situações de ensino devem ser criadas pelo professor, de modo a aproximar o aluno do saber, do qual ele deve se apropriar. Para isso, cabe a este professor fazer um duplo papel cíclico: procurar situações onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento onde eles são estimulados a vivenciar o conhecimento; e ajudar esses alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, como fazem os matemáticos, de modo a tornar as produções destes, fatos universais e reutilizáveis.

É exatamente este ciclo contextualizar/descontextualizar que permite ao aluno avançar em conhecimentos. Desta forma, para aprender, o aluno deve ter um papel

ativo diante de uma situação, comparado ao ato de produzir de um matemático, auxiliado por seus conhecimentos anteriores.

1.2.3 Contrato Didático

Fora do contexto da educação, entende-se “contrato” como sendo um trato, um acordo, feito por duas ou mais pessoas que assumem certos compromissos ou obrigações. Desta forma, a expressão “Contrato Didático” relaciona-se com o trato existente entre o professor e aluno, sendo este, formalizado ou não.

Brousseau (1986) define contrato didático como sendo:

O conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que é esperado pelo professor [...] Esse contrato é um conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (Apud, Silva, 2010, p. 50).

Esta noção de contrato didático é um dos principais elementos da teoria das situações didáticas, desempenhando um importante papel na análise e na construção de situações para o ensino e a aprendizagem da Matemática e mantendo o vínculo entre as situações didáticas e adidáticas.

O contrato é estabelecido, na maioria das vezes, sem que os envolvidos se apercebam disso. Por exemplo, o professor prepara e realiza uma situação de ensino, esperando que o aluno faça uso das aulas vistas, e de problemas, anteriormente solucionados, para resolver a situação proposta. O aluno, por sua vez, sabe o que o professor espera dele e age para que possa cumprir a atividade proposta, sempre em busca da resposta correta.

Um componente essencial do contrato didático é o conceito de “devolução”. Brousseau (2008, p. 91) o define como sendo “o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática), ou de um problema, e assume ele mesmo as consequências dessa transferência.” É exatamente o pensamento de que o professor deve organizar o meio, para que seu aluno atue como um pesquisador.

O contrato predominante entre os professores de Matemática e seus alunos é aquele em que o professor vai à sala de aula, ministra aulas que, na maioria das vezes, são expositivas e passa uma lista de exercícios sobre o conteúdo abordado, na expectativa de que seus alunos efetuem plenamente todos os problemas propostos. O aluno, acostumado com “o tal” professor de Matemática, espera dele todos os passos referidos anteriormente.

Brousseau (2008) aborda vários tipos de contratos, dividindo-os em três categorias.

Primeiro, os *contratos em que não há intenção didática*:

- **Contrato de Emissão:** é o contrato estabelecido onde o professor monologa e não se preocupa se o que está sendo dito está sendo captado por seus alunos. O importante é que fiquem calados, enquanto o professor cumpre o conteúdo programado para aquela aula. É, basicamente, o que acontece em um programa de rádio ou de televisão.

- **Contrato de Comunicação:** desta vez, o professor já passa a se preocupar em transmitir o conteúdo desejado, de tal forma que chegue aos seus alunos. Para tanto, verifica qual é a melhor maneira de fazer isso. Tendo o aluno captado o conteúdo, cabe a ele interpretá-lo.

- **Contrato da Habilidade:** aqui o professor deve garantir e provar, se necessário, a verdade daquilo que ele ensina. Isto acontece, principalmente, quando expõe teoremas, propriedades, proposições etc. Porém, cabe ao aluno decidir se vai querer, ou não, saber o motivo da afirmação do seu professor.

- **Contrato de Produção de Saber:** um novo conhecimento é passado para o aluno, mas o professor - que transmite este conhecimento - não entra em detalhes quanto aos procedimentos adotados. Um exemplo disso é o uso de fórmulas e propriedades, para resolver uma equação.

Agora, apresentaremos os *contratos pouco didáticos* que se encarregam de produzir um novo “saber”:

- **Contrato de Informação:** aqui, o professor transmite um novo conteúdo a seus alunos, ao mesmo tempo em que garante a sua veracidade. Faz isso, por fornecer as demonstrações de fórmulas ou algoritmos, por apresentar as fontes de suas informações etc. O aluno, por sua vez, deverá solicitar informações a seu professor, para que - por si próprio - consiga construir novos conhecimentos.

- **Contrato de Utilização dos Conhecimentos** – neste tipo de contrato o aluno faz uso do conhecimento que lhe foi recentemente transmitido para resolver situações propostas pelo seu professor. Ao professor cabe a responsabilidade de organizar aplicações para que este conhecimento seja utilizado:

No *contrato de informação*, o emissor de matemática deve organizar uma teoria que conhece, de modo a articulá-la com alguma parte de si mesma; porém, guarda esse vínculo em “segredo”, e o aluno não sabe até onde o levarão os enunciados que recebe. No *contrato de utilização*, a relação entre a parte geradora e tudo que foi gerado torna-se explícita. Os enunciados dados como saber são teoremas, mas os que devem ser adquiridos (pela lógica ou de outro modo) mudam de forma e de nome: transformam-se em perguntas, situação ou problemas (Brousseau, 2008, p. 67).

- **Contrato de Iniciação ou de Controle:** o professor determina que assunto matemático irá iniciar com seus alunos e verifica se estes realmente compreenderão o assunto. Em seguida, propõe uma série de exercícios e problemas, que fazem uso do objeto matemático em questão.

- **Contrato de Instrução ou Direção de Estudo:** além de seguir os passos descritos no contrato anterior, o professor deve apresentar a seus alunos a maneira de “como” adquirir um novo saber. Assim, os exercícios propostos devem ilustrar os vários casos possíveis de aplicação do conteúdo que o professor quer que seus alunos aprendam.

Finalizaremos esta questão, apresentando os tipos de contrato, considerados por Brousseau (2008), como sendo *os que se ocupam fortemente de um saber “novo”*:

- **Contrato de Imitação ou de Reprodução Formal:** o professor compromete-se a fazer com que o aluno execute uma tarefa - como enunciar e demonstrar um teorema ou fazer uso de algum algoritmo para resolver problemas e

equações -, sem levar em consideração os mecanismos que utilizam para isto e se absorveram novos conhecimento, ou não. O importante é chegar à resposta correta, fazendo uso dos mecanismos apresentados pelo professor. Desta forma, o aluno aprende a resolver as situações que estão dentro do mesmo contexto da tarefa proposta, mas não aprende o conteúdo em questão.

- **Contrato de Ostensão:** este é o tipo de contrato em que o professor apresenta para seus alunos os objetos matemáticos sem recorrer à definição formal e propriedades. Os alunos, por sua vez, acreditam que estas informações são suficientes para que possam resolver as atividades propostas por seus professores.

- **Contrato de Condicionamento:** este é o contrato em que o professor deve criar condições que funcionem como causas de aprendizagem, estas condições se limitam a uma série de exercícios repetitivos que são propostos para seus alunos. Acredita-se que este processo de resolver exercícios que mantém a mesma linha de pensamento seja capaz de ensinar aos alunos conceito que o professor não explicou.

- **Contrato Empirista:** neste caso o conhecimento é produzido basicamente pelo contato que o aluno estabelece com o meio ao qual deve se adaptar. A responsabilidade pela aprendizagem é transferida ao meio e à natureza.

- **Contrato Construtivista:** aqui o professor organiza o meio e delega ao aluno a responsabilidade das aquisições. Essa organização gira em torno do saber em questão e do conhecimento dos processos que levam o aluno a compreensão. Espera-se que o aluno seja racional, coerente e econômico ao agir em prol da resolução do que lhe foi proposto.

- **Contrato de Revisão de Saberes Antigos:** este é o tipo de contrato em que o professor faz uso de saberes já ensinados e da cultura dos que compõem o grupo a que se dirige para ensinar algo novo. Os que compõem este grupo fazem uso de saberes antigos para solucionar os problemas propostos.

Destes três blocos de tipos de contratos, o que mais são utilizados - na área de ensino de Matemática - são os contratos pouco didáticos. Não é raro ouvir falar

de professores que ensinam de uma forma um tanto tradicional e que não se preocupam em inovar, fazendo uso de outros tipos de recursos didáticos, tais como, jogos, desafios e da tecnologia. Isto talvez seja um reflexo da forma como estes professores de Matemática apreenderam esta disciplina.

Sendo assim, Brousseau (2008) considera válido todo tipo de ação que visa à transmissão de conhecimento, sendo que, mesmo que esta ação não tenha determinado objetivo, acarrete uma aquisição de saber. Deste modo, Brousseau dá ênfase aos tipos de contratos que se ocupam fortemente de um novo saber, e, em especial, ao último referido, considerado o contrato de revisão de saber.

Alguns filósofos compartilham desta mesma idéia de Brousseau (2008). Por exemplo, Ausubel (1968, 1976, Apud Moreira, 2009, p. 31) considera que, para que haja uma aprendizagem significativa, o novo conhecimento deve ser obtido a partir de uma interação com algum conhecimento já adquirido.

Professores experientes e preocupados com o ensino têm percebido que levar em consideração os saberes culturais e intelectuais de seus alunos ajuda no desenvolvimento de novos saberes. Desta forma, procuram desenvolver atividades que impulsionam os alunos a forçar a mente na busca de saberes anteriormente adquiridos, para responder à atividade proposta.

1.2.4 Quebra de Contrato e Alguns Efeitos do Contrato Didático

Vimos, na subseção anterior, diversos tipos de contratos didáticos. Na maioria das vezes, estes contratos são estabelecidos sem que os envolvidos - professor e aluno - conversem sobre as cláusulas que o compõem. Tudo acontece muito naturalmente, uma vez que, o professor já sabe o que o aluno espera dele, e este, por sua vez, compreende o que o professor espera dele.

Mas, para que ocorra uma aquisição de conhecimento por parte do aluno, é necessário que haja uma quebra do contrato anteriormente existente, ou seja, cabe ao professor providenciar e executar um tipo de situação completamente diferente daquela a que seus alunos estão acostumados. O aluno quebra seu contrato com o professor, a partir do momento em que toma uma ação inesperada pelo seu mestre,

ação esta que acarreta a construção de um conhecimento novo, adquirido sem a intencionalidade do professor.

Silva (2008) chama esta quebra de contrato de ruptura e renegociação. Conforme destaca, “é preciso que haja a ruptura e a renegociação do mesmo [contrato didático] para o avanço do aprendizado” (p. 54).

Uma quebra de contrato didático dá-se, por exemplo, quando um professor, conhecido por ser tradicionalista e conteudista, chega à sala de aula com jogos ou atividades matemáticas, fazendo uma aula completamente diferente do que seus alunos estão acostumados.

Neste caso, o aluno quebra seu contrato com o professor, por não conseguir corresponder satisfatoriamente à situação criada. As dificuldades que apresentam - ao resolver o problema apresentado nesta aula “diferente” - podem ser fruto da prática que era vivenciada anteriormente por seu professor, a qual o aluno já estava habituado.

A situação criada pelo professor faz com que o contrato do aluno se assemelhe ao contrato de um pesquisador. Sendo assim, não é mais necessária uma quebra de contrato, para que ele avance no aprendizado. O aluno irá adquirir conhecimento à medida que vai executando ações, que o levem à solução. Os erros cometidos nesta etapa servirão para a construção do saber e, por este motivo, não devem ser destacados negativamente pelo professor.

Brousseau (2008) aponta alguns efeitos do contrato didático estabelecido por professores. Um destes efeitos é o que ele chama de *efeito Topaze*, que consiste na ação do professor, visando à simplificação do problema, até que o aluno seja capaz de responder, corretamente, uma atividade proposta. Ao contrário do que se espera, estas tentativas do professor não contribuem para a aquisição de um novo saber, uma vez que, o objeto matemático - implícito na situação proposta - perde o sentido.

A expressão “efeito Topaze” provém da peça de teatro, de Marcel Pagnol. Na primeira cena, que se passa em uma sala de aula, o protagonista Topaze faz um ditado para um mau aluno. Ele não pode aceitar erros muito grosseiros, mas

também não pode fornecer, diretamente a ortografia correta, e por isso passa a soprar a resposta através de códigos didáticos cada vez mais transparentes.

Outra consequência é o *efeito Jourdain* ou o *mal-entendido fundamental*. É uma forma do efeito Topaze e é chamado assim por uma referência à cena de *O burguês fidalgo*, de Molière. Aqui, o professor tenta ensinar um conceito matemático para seu aluno, fazendo uso excessivo de exemplos e exercícios, que envolvam o objeto matemático em questão, mas que não dão a ênfase necessária a este objeto. Desta forma, o aluno aprende a resolver exercícios que fazem uso da mesma linha de raciocínio dos que foram apresentados anteriormente, no entanto, o conceito matemático almejado fica perdido. É claro que isto ocorre, apenas, na mente do professor, já conhecedor do que queria ensinar.

O *uso abusivo de analogias* é mais um efeito do contrato didático. Comparações têm se constituído em um método muito útil para o ensino de qualquer tipo de disciplina, em especial, a Matemática. Mas, deve-se ter cuidado para não usá-las de maneira excessiva e, mais uma vez, cair em um caso parecido ao do efeito Topaze:

Resolver um problema procurando respostas num contexto análogo é uma boa prática heurística, mas, no entanto, limitar a conclusão à famosa frase, “caímos de novo no problema anterior”, pode fazer com que o aluno evite abordar o problema colocado diretamente (Silva, 2008, p. 66).

Finalizaremos esta subseção, apresentando outro efeito do contrato didático que é o *envelhecimento das situações de ensino*. Muitos professores, ao ministrarem a mesma aula - vez após vez -, mesmo que para turmas diferentes, percebem que existe uma necessidade de mudá-la, de aprimorá-la. Talvez seja na maneira de apresentar o conteúdo, algum exemplo ou exercício novo.

Esta defasagem nas situações de ensino pode acontecer devido ao progresso do mundo, nas diversas áreas de conhecimento, como por exemplo, o grande avanço das tecnologias de informação. Cada vez mais, vê-se a necessidade de mudanças, quanto ao método de ensinar Matemática, para que os alunos sintam prazer em aprender e percebam que esta disciplina é uma necessidade comum, a toda humanidade.

1.3 Teoria dos registros de representação semiótica

Juntamente com as teorias de Situação Didática e Contrato Didático, de Brousseau (2008), a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009), serviu de base para este trabalho. Por termos utilizado alguns pressupostos desta teoria, faremos uma explanação destes, a partir de agora.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval (2008, 2009), filósofo e psicólogo de formação, que firmou sua carreira no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França (1970-1999), ao desenvolver importantes estudos referentes à Psicologia Cognitiva.

Duval (1993) define representações semióticas “como produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento”. Acrescenta ainda que as representações semióticas não são apenas necessárias para fins de comunicação, visto que, são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento (Apud Damm, 2010, p. 176-177).

Embora Duval não tenha formação inicial na área da Matemática, seus trabalhos que envolvem a concepção de conhecimento - através dos signos e códigos - tem sido a base para diversas pesquisas na área de ensino de Matemática, visto que, sua aplicabilidade se encaixa muito bem neste campo, cuja aquisição de conhecimento só é possível por meio de representações, em especial, representações visuais, tais como, números, letras, gráficos, tabelas, entre outros.

Conforme observado por Damm:

Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos que serão estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações. Portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representações de um mesmo objeto matemático (2010, p. 167).

Para Duval (2009), a aprendizagem em Matemática torna-se possível a partir do momento em que o sujeito é capaz de compreender as diferentes formas de

representações do objeto considerado, e de distinguir um objeto de sua representação, passando de um registro para outro, porém mantendo sempre a ligação entre eles. Acontece aprendizagem, também, quando às representações mentais, ou conjunto de imagens e de conceituações que um indivíduo pode ter sobre o objeto, são exteriorizadas, se tornem visíveis ou acessíveis a outros.

1.3.1 Registro de Representações – Compreensão e Aprendizagem

Duval (2009) define *semiósis*, como sendo a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e por *noésis*, a apreensão conceitual de um objeto. Segundo estudos por ele realizados, não existe *noésis* sem *semiósis*, pois é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*.

A análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações referentes ao raciocínio, à compreensão de texto e à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos, levam a três fenômenos que aparecem estreitamente ligados: a diversidade dos registros de representação semiótica; a diferenciação entre o representante e o representado e a coordenação entre os diferentes tipos de registros.

No que se refere ao primeiro fenômeno, após analisar trabalhos, tais como, os de Piaget (1968b) e Leiser (1987), Duval (2009, p. 38) chegou à conclusão de que sistemas de representação muito diferentes entre si geram, cada um, questões de aprendizagem, específicas, como, por exemplo, esquemas, figuras geométricas, gráficos cartesianos e tabelas.

Com relação ao segundo fenômeno, existe muita confusão entre o que é o representante e o que é o representado. O representante é a maneira, a forma de expressar, desenvolvida para a compreensão de um determinado conteúdo, o representado. Por exemplo, uma função matemática pode ser representada por meio de um gráfico ou uma tabela. Duval reconhece que esta diferença não é logo adquirida, seja em qualquer tipo de representação ou em qualquer estágio de desenvolvimento, e que a dificuldade na apreensão de conhecimentos matemáticos dá-se, justamente, por que esta diferença não é percebida.

Ao citar o terceiro fenômeno, Duval (2009, p. 38) explica que, para compreensão plena de conceitos e para a aprendizagem de fenômenos, o sujeito deve ser capaz de coordenar os diferentes tipos de registros, para um determinado objeto. De preferência, devem ser considerados, no mínimo, dois registros do objeto de estudo, para que se possa fazer a conversão.

Os estudos das aprendizagens intelectuais e cognitivas devem levar em consideração esses três fenômenos referentes à *semiósis*. Assim, para tornar possível a compreensão de conceitos, o professor deve considerar, com seus alunos, todos os tipos de representação que o objeto a ser estudado poderá apresentar. Deve criar meios para que estes sejam capazes de migrar de uma representação para outra, mantendo uma ligação entre elas. Desta forma, será confirmada a hipótese de Duval, de que não existe *noésis* (conceitualização) sem *semiósis* (representações).

Segundo Damm, quanto maior for a mobilidade com registros de representações diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto (2010, p. 177).

Com isso, nota-se que é importante conhecer os diferentes tipos de representação do objeto considerado e os tipos de transformação que essas representações podem ter, para que colaborem na compreensão e aprendizagem de objetos matemáticos.

1.3.2 Transformações das Representações Semióticas

Existem dois tipos de transformações nas representações semióticas: a de *tratamento* e a de *conversão*.

Conforme define o próprio Duval (2009, p.16), um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro e que depende da forma e não do conteúdo envolvido. Isso acontece no processo de resolução de equações, na simplificação de expressões algébricas e no cálculo de raízes de equações.

Conversão é a passagem de um registro para outro, conservando a totalidade ou partes, do objeto estudado. Nota-se esta conversão, quando uma função matemática passa da representação algébrica para a representação em tabelas; da representação em tabelas, para a algébrica; de representações algébricas, para gráficos; de gráficos, para representações algébricas; e/ou, ainda, de tabelas para gráficos e vice-versa.

Deve-se ter cuidado para não confundir *tratamento* com *conversão*. Uma transformação de *tratamento* acontece dentro de um mesmo registro (operações com números) e a *conversão* é externa a cada registro, ou seja, entre registros. É importante atentar-se para isso, porque é por meio da conversão entre registros que podemos compreender o estreito laço entre *semiósis* e *noésis*. Também, é por meio da conversão entre registros que acontece a compreensão de conceitos referentes ao objeto matemático em questão.

O comentário de Damm (2010) confirma o que foi dito acima:

O que garante a apreensão do objeto matemático, não é a determinação de representações ou de várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre esses vários registros de representação (p. 182).

Então, para que a conversão entre registros de um mesmo objeto matemático contribua para a aquisição de conceitos, existe a necessidade de se ter conhecimento de uma diversidade de registros de representações semióticas para este objeto.

De posse dessas representações, para efetuar qualquer tipo de procedimento matemático, o aluno poderá optar pela forma ou método que preferir, ou que lhe for mais conveniente. Por exemplo, para efetuar a multiplicação 35×5 poderíamos adicionar $35 + 35 + 35 + 35 + 35$, ou usar a distributividade da seguinte forma $(10 + 10 + 10 + 5) \times 5$, ou ainda, aplicar o algoritmo da multiplicação.

Outra vantagem por se conhecer diferentes tipos de registros está relacionada à complementaridade de registros. Algo que não pode ser percebido, ou compreendido, fazendo-se uso de uma determinada representação semiótica, pode ser complementada por meio de outra representação, para o mesmo objeto. Um

exemplo disso é o trabalho com funções. Suas representações (algébricas, gráficos, tabelas e equações) possuem características específicas e próprias, que serão adquiridas durante o processo de conversão, de um registro, para outro.

Ainda, a variedade de registros semióticos permite a manipulação para a conversão de um registro em outro, que é um fator crucial para a conceitualização. É nesse processo de conversões, entre representantes, que se constrói a concepção cognitiva do objeto matemático analisado.

Com isto, chega-se à conclusão de que a apreensão cognitiva de um saber matemático somente é possível com a utilização de diferentes registros de representações semióticas e da coordenação entre eles. Mas, daí surge a pergunta: quais são os tipos de representações semióticas de que poderemos fazer uso? Analisemos o próximo tópico.

1.3.3 Tipos de Representações Semióticas

Duval (2009, p. 45-53) considera que existem três tipos de representações semióticas: as mentais, as internas e as semióticas.

As representações mentais, ou subjetivas, são concepções que uma pessoa pode ter sobre um objeto ou sobre uma situação. É o que o indivíduo entende por determinado assunto, com base em sua trajetória de vida. Conforme comentado por Damm (2010, p. 171), os primeiros estudos a respeito deste tipo de representação foram feitos por Piaget, em sua obra *A representação do mundo na infância* (1924-26). Piaget apresenta um estudo sobre as crenças, explicações e concepções das crianças, referentes a fenômenos físicos e naturais. Para o estudo das representações mentais, utiliza-se o método da conversão, onde, o que parece erro é considerado um indício de outras situações ou de uma lógica diferenciada.

As representações internas, ou computacionais, são caracterizadas pela execução automática de uma tarefa. O sujeito a executa, sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização. Um exemplo deste tipo de representação é quando os alunos fazem uso de algoritmos, para resolver determinados cálculos.

Finalizando, temos as representações semióticas, que são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. As representações semióticas podem ser convertidas em representações equivalentes, num outro sistema semiótico, podendo, no entanto, possuir diferentes significados, de acordo com as pessoas que as utilizam (Douady, 1984, Apud Damm, 2010, p. 173).

Visto que o ensino/aprendizagem de qualquer conhecimento está ligado à compreensão de diferentes registros de representações, no desenvolvimento de nossa pesquisa foi trabalhado o terceiro tipo de representação, a representação semiótica. A situação didática que criamos fez uso de três tipos de representações para as funções afins e função quadráticas: representações algébricas, para a definição formal de cada uma delas; tabelas, que auxiliaram na percepção do comportamento gráfico das mesmas; e gráficos esboçado tanto no papel quanto no GeoGebra.

1.4 Revisão de literatura

Sobre temas referentes ao conceito de função afim, destacamos Pires (2009) e Dornelas (2007).

Pires (2009), em sua dissertação intitulada “O uso da modelagem matemática na construção do conceito de função”, fundamentada na teoria da modelagem matemática de Bassanezi (2007), destaca quão proveitoso é fazer uso de resolução de problemas para introduzir, de maneira significativa, o conceito de função, no 7º ano do Ensino Fundamental. Segundo o que é proposto nos documentos oficiais da educação brasileira (PCN+, 2002), o conceito de função deve ser introduzido a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, sendo estudado, com mais detalhes, no 1º ano do Ensino Médio. Pires (2009) mostrou que é possível antecipar isso para o 7º ano, sem causar complicações na dimensão psicológica ou intelectual, dos que cursam este grau de estudos.

A pesquisa, de metodologia quase - experimental, foi realizada com 53 alunos de uma escola municipal do interior de São Paulo. Os alunos foram divididos em

dois grupos: Grupo Experimental (GE), composto por 29 estudantes que passaram por uma investigação de ensino para introduzir noções básicas a respeito da função afim; e o Grupo de Controle (GC), composto por 24 alunos que não passaram por nenhum tipo de intervenção, referente ao tema.

Para os dois grupos, foram desenvolvidos um pré-teste e um pós-teste, para que no final houvesse uma comparação dos resultados. Quando comparados os resultados, Pires (2009) constatou que o GE teve um desempenho muito superior ao GC. Para o autor, isto prova que a introdução das noções de função afim, no 7º ano do Ensino Fundamental - por meio de resolução de problemas -, é uma estratégia viável, pois, ao final dos estudos, os alunos mostraram que se apropriaram de algumas noções, como o crescimento, o decrescimento e a construção de gráficos de funções afins.

Dornelas (2007) discorreu sob o tema “Análise de uma Seqüência Didática para a Aprendizagem do Conceito de Função Afim”. Seu trabalho apresentou os resultados obtidos da aplicação de uma seqüência didática composta por dois conjuntos de atividades, elaborados com ênfase na compreensão da noção entre grandezas lineares, privilegiando a articulação entre as linguagens natural, gráfica, algébrica e tabular da função afim. Para tanto, a autora contou com o apoio de sua turma do 1º ano do Ensino Médio, que funciona em uma escola pública do Recife-PE. Teve como fundamentação teórica a teoria das situações didáticas, de Guy Brousseau (1982), cujo estudo estabelece que a aprendizagem de um objeto matemático está diretamente ligada ao envolvimento do aluno na busca da solução de um problema, por intermédio de uma situação didática, formulada pelo professor.

O primeiro capítulo da dissertação de Dornelas (2007) trata de aspectos históricos a respeito do conceito de função. Este fato nos motivou a incluir, neste trabalho, a primeira seção deste capítulo que expõe a evolução do conceito de função e a sua entrada nos conteúdos programáticos da disciplina de Matemática, no Brasil.

No que tange à maneira como alguns livros didáticos apresentam temas referentes ao ensino de funções, destaca-se o artigo escrito por Maggio e Soares (2009), que tem como título “Registros de Representação Semiótica e Função Afim:

Análise de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio”. Este artigo foi apresentado no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática (X EGEM), realizado na cidade de Ijuí-RS, em junho de 2009. As autoras desenvolveram este artigo objetivando expor os principais resultados obtidos em seu trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática. O trabalho consiste na análise de dois livros didáticos de Matemática, ambos em volumes únicos, utilizados por diversos professores do Ensino Médio. Estes livros foram identificados por LD-1 e LD-2.

Os critérios analisados foram: 1º) Classificação das atividades em situações-problema (contextualizados) e problemas “fechados” (sem contextualização); 2º) Articulações entre os campos da Matemática e/ou conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento e com situações do cotidiano; 3º) Tratamentos explorados e enfatizados; 4º) Conversões exploradas e enfatizadas, bem como os sentidos privilegiados; e 5º) Procedimentos abordados e enfatizados, nos registros gráficos: globais ou pontuais.

À luz da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003), constatou-se que em LD-1 prevalecem os problemas “fechados” e conversões no sentido algébrico-gráfico, que são enfatizadas em problemas “fechados”. Em LD-2 existe a preocupação a respeito da contextualização. No entanto, os conteúdos são apresentados, invariavelmente, com uma situação-problema contextualizada por fatos cotidianos ou interdisciplinares, sendo que, ambos não privilegiam a coordenação entre vários registros da função, afim, mas, os tratamentos algébricos, em detrimento do tratamento gráfico.

Isto confirma o que, ao longo dos nossos anos de prática docente, já havia sido percebido, com respeito ao ensino de função: grande parte dos livros adotados pelos professores de Matemática - que acabam se orientando apenas e unicamente por estes livros - tem enfatizado a conceitualização, as resoluções de problemas, as equações e as inequações, deixando de lado as representações gráficas da função estudada. Desta forma, os alunos que tem como instrutores tais professores perdem a preciosidade de conhecimento que pode ser obtido quando há uma mudança, do registro algébrico para o registro gráfico e vice-versa.

Outro trabalho referente à análise de livros didáticos é o de Terto (2008). Sua dissertação de mestrado intitulada “Funções Quadráticas nos Livros Didáticos - realizado sob a Ótica da Resolução de Problemas”, apresenta um estudo analítico de quatro livros didáticos de Matemática, de 1º ano do Ensino Médio. O objetivo de sua pesquisa foi o de analisar de que forma o livro didático apresenta o conteúdo de função quadrática, sob a ótica da resolução de problemas. Para tanto, foi utilizada a metodologia de pesquisa qualitativa e empregado o método da análise de conteúdo.

Terto (2008) dedica um dos quatros capítulos que compõem seu trabalho à história do livro didático e, ainda, uma seção de outro capítulo, destinado à história das resoluções de problemas. Mas o foco principal do seu trabalho foi a resolução de problemas que, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2002), é peça central para o ensino de Matemática.

Dentre os resultados obtidos, observou-se que, em geral, os livros didáticos estão fortemente inseridos na concepção de ensinar “para” a resolução de problemas. Essa concepção configura a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito ou após o treino de alguma habilidade, ou algoritmo de cálculo. Quanto aos tipos de problemas - os fechados, de treino e de conceitos -, foram os mais encontrados e, somente em raros momentos, foram propostos problemas abertos. Na análise do conteúdo quanto à conceituação, manipulação e aplicação, foi observado forte ênfase na manipulação. Em geral, parece que os livros didáticos estão de acordo com os documentos oficiais, em muitos aspectos.

Destacando novamente que se deve considerar o esboço de gráficos de funções, consideramos a dissertação de mestrado de Oliveira (2006), que teve por tema as “Dificuldades na Construção de Gráficos de Funções”. Esta pesquisa expõem os resultados obtidos através de uma investigação realizada com uma turma de Calculo 1 - do referido autor -, no curso de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

Na disciplina de Cálculo 1 são apresentados tópicos de Limites; Derivadas e Aplicações; e de Integrais e Aplicações. Para a compreensão destes tópicos, é

indispensável, saber transitar da representação algébrica de uma função, para sua representação gráfica, conforme já observado na primeira seção deste capítulo.

Oliveira (2006) percebeu que a maioria de seus alunos de Cálculo 1 tinha muita dificuldade em relação ao esboço de gráficos, o que elevou o índice de reprovação, na disciplina. Esta dificuldade dá-se pelo fato de que o ensino de gráficos é marginalizado quando temas referentes a funções são considerados no 9º ano do Ensino Fundamental (Introdução a funções), no 1º ano do Ensino Médio (Funções Afim, Quadrática, Modular, Exponencial e Logarítmica), e no início do 2º ano do Ensino Médio (Funções Trigonométricas).

Em um teste de sondagem, Oliveira (2006) pediu a sua turma, composta por 38 alunos, que esboçassem o gráfico da função $y = 4$, com domínio igual aos números reais. Note-se o resultado:

- 16 alunos esboçaram corretamente o gráfico;
- 2 alunos não responderam a questão;
- 15 alunos representaram dificuldades em relação ao domínio da função, pois esboçaram o gráfico considerando como domínio apenas os números reais positivos;
- 4 alunos esboçaram o gráfico como sendo, apenas, dois pontos no plano cartesiano;
- 1 aluno afirmou que não podia fazer o gráfico porque não conhecia a função que a define.

Este trabalho merece destaque para que, mais uma vez, se confirme o fato de que não é dada, ao estudo de gráficos, a atenção merecida e necessitada. Isto, de fato, compromete a compreensão de conteúdos futuros.

Para seu estudo, Oliveira (2006) fez uso das teorias das situações didáticas de Guy Brousseau (1983) e da representação de registro semiótico, de Duval (1988), teorias que também serviram de suporte para o nosso trabalho. Como

metodologia de intervenção pedagógica, o autor em pauta baseou-se na Engenharia Didática.

Durante o curso da disciplina de Cálculo 1, Oliveira (2006) identificou os erros mais comuns, referentes à construção de gráficos e os classificou, com base as teorias acima citadas. Planejou e executou atividades, a fim de ajudar a turma a aprimorar suas habilidades em esboçar gráficos de funções, obtendo com isso resultados positivos. Houve, por parte dos alunos, um amadurecimento gradativo, tanto que, ao fim da disciplina, as dificuldades anteriormente identificadas não mais existiam.

Não podemos negar que a tecnologia tem sido uma ferramenta eficaz, no processo de ensino-aprendizagem. Vivemos cercados por ela, de forma direta ou indireta. Jovens aprendem a conviver com a tecnologia, desde bem cedo, desde um simples mp3 player, a celulares com câmeras de altas resoluções e wi-fi, que os permitem acessar Internet, onde quer que os sinais estejam disponíveis.

Assim, para motivá-los a aprender e a continuar aprendendo, muitos educadores tem feito uso de recursos tecnológicos em suas aulas: jogos didáticos, animações, aulas interativas, blogs e outros aplicativos.

Muitos pesquisadores da área de ensino da Matemática que focam a representação gráfica de funções fazem isso por meio de programas de computadores desenvolvidos para estes fins. A título de exemplo destaca-se Scano (2009), Augusto (2008) e Maia (2007).

Scano (2009), em seu trabalho intitulado “Função Afim: uma seqüência didática envolvendo atividades com o GeoGebra”, apresenta uma seqüência didática, mediada pelo uso do software de geometria dinâmica GeoGebra, para auxiliar no estudo inicial de função afim.

À luz da teoria das situações didáticas (Guy Brousseau, 1986, apud Freitas, 2008) e da teoria dos registros de representações semióticas (Duval, 2005), Scano (2009) desenvolveu uma seqüência de ensino para iniciar o estudo de função afim, envolvendo alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de contribuir

para o desenvolvimento da capacidade de expressar, algébrica e graficamente, a dependência de duas variáveis, como também, de reconhecer que seu gráfico é uma reta.

Esta pesquisa foi realizada em uma turma, composta por 17 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola particular de São Paulo. O professor-pesquisador dividiu a turma em sete duplas e um trio. Convém ressaltar, que esta turma já havia tido contato com o software GeoGebra, em outros momentos do ano letivo, durante o estudo de transformação geométrica.

Scano (2009) iniciou sua seqüência delegando questões para cada equipe, pedindo que os alunos estudassem as possibilidades de respostas. Vale ressaltar, que cada equipe dispunha de um notebook, com o software instalado. Logo após, o pesquisador explorou alguns itens no GeoGebra, e seus alunos acompanharam os feitos, através de um *data show*.

Para concluir sua pesquisa e constatar se o objetivo foi atingido, novas atividades foram propostas. Ao comparar as atividades efetuadas pelas equipes - antes da intervenção com o software - com as feitas posteriormente, observou-se que o uso do GeoGebra apresentou grandes contribuições como recurso dinâmico e auxiliou no processo de compreensão da análise do comportamento gráfico da função afim, no que se refere às alterações que estes sofrem, ao mudar os valores de seus coeficientes. Logo, verificou-se que o objetivo da pesquisa foi atingido.

Augusto (2008) fez uso do software Graphmatica para desenvolver o conceito de função afim em uma turma composta por 40 alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública de São Paulo. Seu trabalho, "Aprendizagem de Função Afim: uma intervenção de ensino do software Graphmatica", apresentou o resultado da pesquisa desenvolvida, aplicada e vivenciada por ele, que consistiu em verificar quais as contribuições para a aprendizagem de conceitos relativos a função afim, podem ser produzidas através de uma intervenção de ensino, com o uso do Graphmatica.

No seu processo de pesquisa, Augusto (2008) trabalhou com dois grupos de alunos, sendo que um destes foi denominado Grupo Experimental (GE) e o outro,

Grupo Controle (GC). Sua pesquisa foi realizada em três fases (Pré-teste, Intervenção de Ensino e Pós-teste), das quais o GE participou de todas três e o GC, apenas de duas - o pré e o pós- teste.

Pelo que foi apresentado por Augusto (2008) - em seu trabalho -, a escola não dispunha de materiais tecnológicos suficientes, para todos os alunos. Sendo assim, a Intervenção de Ensino deu-se em um laboratório de informática, que dispunha de cinco computadores, sendo que o GE foi dividido, de tal forma, que mais de dois alunos pudessem acompanhar as construções expostas, em *data show*, pelo professor, que realizava a pesquisa.

Com base nas teorias das situações didáticas (Brousseau, 1996) e dos campos conceituais (Vergnaud, 1996), e através da visão da utilização de tecnologias à luz da etnomatemática (D'Ambrosio, 1998), Augusto (2008) desenvolveu sua pesquisa e, ao comparar o pós-teste do GE com o do GC, observou que o grupo ao qual foi sugerida a Intervenção de ensino, com o Graphmatica - o GE-, apresentou um melhor desenvolvimento, no que se refere aos questionamentos, a respeito de função afim.

Os dados por ele analisados mostram que o uso de um ambiente gráfico, obtido por meio de um software, facilita a construção de novos conceitos, bem como, o aperfeiçoamento do que os alunos já sabem, sobre o assunto em questão. Deste modo, observa-se o campo conceitual, constituído pela intersecção entre a leitura, a interpretação de gráficos e a expressão, de funções afins.

Maia (2007), em sua pesquisa, intitulada “Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional” apresentou os resultados obtidos através da utilização de uma sequência didática, que fez uso do software Winplot, para proporcionar aos alunos outra visão a respeito da construção de gráficos, por meios de observações de propriedades gerais.

Como fundamentação teórica, Maia (2007) dispôs dos princípios da engenharia didática, da teoria de representação semiótica de Raymond Duval e na teoria das situações didáticas, de Guy Brousseau. Motivada pela análise que havia feito em livros didáticos, que pouco valoriza a construção de gráficos de funções e,

muito menos, o uso de ferramentas computacionais para este fim, a autora desenvolveu a seqüência didática que foi aplicada com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola particular, da cidade de São Bernardo do Campo, Estado de São Paulo.

Seu trabalho está dividido em quatro capítulos, e um deles é dedicado à análise de livros didáticos de Matemática, tanto de Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio, como também à abordagem gráfica, que é dada às funções quadráticas. A autora observou que a representação gráfica, obtida por meio da construção de tabelas, onde na maioria das vezes são escolhidos apenas números inteiros, impossibilita aos alunos perceberem as propriedades que regem a família de curvas das funções quadráticas.

O quarto capítulo de seu trabalho, dedicado a análise da seqüência didática, apresenta os resultados obtidos. Para verificar a eficácia de sua seqüência, Maia (2007) fez testes *a priori*, e *posteriori* da aplicação da seqüência. Comparando estes testes, ela pôde perceber o quão proveitoso é fazer uso de aplicativos gráficos - para aprimorar os conceitos dos alunos -, no que se refere a esse tipo de construção.

2 CONCEITUAÇÕES BÁSICAS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES

Esta seção, dividida em três subseções, tem como objetivo apresentar as definições formais, antecedidas de um exemplo motivador, dos objetos matemáticos que serviram de estudo em nossa pesquisa. A primeira subseção aborda sobre o conceito geral de função e de gráficos, a segunda subseção trata das funções afins e a terceira e última subseção, das funções quadráticas.

2.1 Conceito de função

No dia a dia existem diversas relações entre grandezas diferentes e relações numéricas associadas a um objeto, como por exemplo, a conta de luz a pagar, que está relacionada à quantidade de energia elétrica consumida; o valor da corrida de taxi, que depende de quantos quilômetros o cliente percorreu; o tempo de uma viagem de carro ou de qualquer outro meio de transporte, que é inversamente proporcional à velocidade desenvolvida pelo transporte, dentre outras situações que vivenciamos.

Considere a situação: Numa avícola, a dúzia de ovos grandes é vendida a R\$ 2,50. A partir deste dado, pode-se criar a seguinte tabela:

Tabela 1 : Dúzias X Preço

Dúzia	1	2	3	4	5	6
Total a pagar (R\$)	2,50	5,00	7,50	10,00	12,50	15,00

Fonte: Santos, 2011

Denominado x o número de dúzias e y o total a pagar, pode-se expressar a situação acima, pela fórmula que segue:

$$y = 2,50 \cdot x.$$

Assim, o valor a pagar (y) é uma função da quantidade de dúzias, que será comprada (x). Logo, para cada valor atribuído a x , tem-se um único correspondente (y).

Diante disso, podemos definir função como uma relação de dependência entre duas grandezas. Mais especificamente:

“Considerando dois conjuntos não-vazios A e B , chama-se de **função de A em B** , qualquer relação de A em B que associa cada elemento x do conjunto A a um único elemento y do conjunto B ”.

Representando matematicamente:

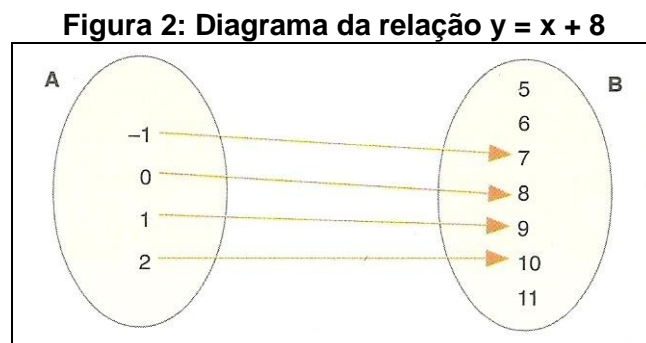
$f: A \rightarrow B$. Lê-se: f é função de A em B .

Ou, no caso de ser possível escrever uma lei de correspondência através de uma expressão matemática:

$y = f(x)$. Lê-se: y é função de x , com $x \in A$ e $y \in B$.

2.1.1 Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Função

Considere a função $f: A \rightarrow B$, conforme representação a seguir:



Fonte: Filho e Silva (2000)

Cada valor de $x \in A$ tem em correspondência um valor $y \in B$, de tal forma que se verifica a relação $y = x + 8$. Assim,

$$x = -1 \rightarrow y = f(-1) = -1 + 8 = 7$$

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0 + 8 = 8$$

$$x = 1 \rightarrow y = f(1) = 1 + 8 = 9$$

$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = 2 + 8 = 10$$

Numa função $f: A \rightarrow B$, o conjunto A , formado por todos os valores da variável independente x , é denominado **domínio** da função. A variável y é chamada de variável dependente, pois depende do valor de x .

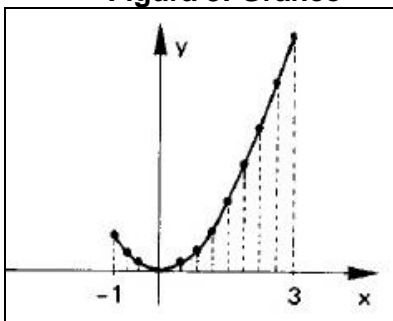
O conjunto $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ é denominado **contradomínio** da função, e o conjunto formado pelos valores de y é conhecido como **conjunto-imagem**. Ou seja, $\text{Im}(f) = \{7, 8, 9, 10\}$.

2.1.2 Gráfico de uma Função

O gráfico de uma função é a representação da mesma, no plano cartesiano. Esta representação pode ser feita por meio da associação de pares ordenados (x, y) com pontos do plano. Outra forma de fazer isso é conhecer as características principais, que a definem.

Analisando gráficos, é possível identificar os que representam uma função, ou não. Para tanto, basta observar se qualquer reta vertical, paralela ao eixo-OY, encontra o gráfico, em apenas um ponto. Desta forma, comprova-se que, para cada valor de x , tem-se um único termo y associado. Note-se os exemplos:

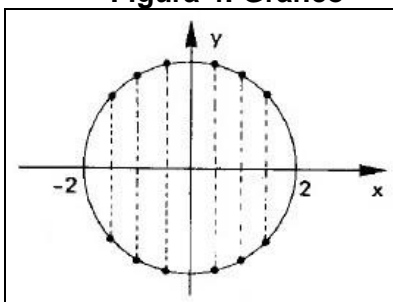
Figura 3: Gráfico



Fonte: lezzi e Murakami (1977)

1. A relação $f: A \rightarrow \mathfrak{R}$, com $A = \{x \in \mathfrak{R} / -1 \leq x \leq 3\}$, representada ao lado é uma função, pois todos os pontos de abscissa $x \in A$ encontra sempre o gráfico em apenas um ponto.

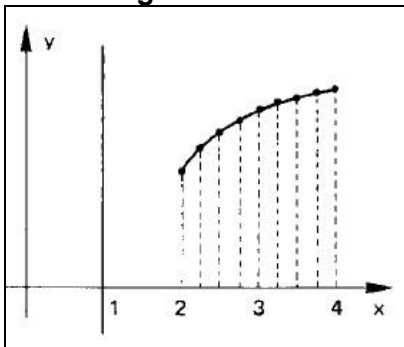
Figura 4: Gráfico



Fonte: lezzi e Murakami (1977)

2. A relação $f: A \rightarrow \mathfrak{R}$, com $A = \{x \in \mathfrak{R} / -2 \leq x \leq 2\}$, não é uma função, pois há retas verticais que encontra o gráfico em dois pontos.

Figura 5: Gráfico



Fonte: lezzi e Murakami (1977)

3. A relação $f: A \rightarrow \mathfrak{R}$, com $A = \{x \in \mathfrak{R} / 0 \leq x \leq 4\}$, não é uma função, pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(1,0)$ não encontra o gráfico que encontra o gráfico f . Mas, se considerarmos a função $f: B \rightarrow \mathfrak{R}$, com $B = \{x \in \mathfrak{R} / 2 \leq x \leq 4\}$, f seria função.

2.2 Função afim

As funções afins, ou funções polinomiais do 1º grau, estão presentes em diversas situações do cotidiano. Um exemplo bem simples disto é uma corrida de taxi. Suponha que em uma determinada cidade, os taxistas cobram R\$ 3,50 a bandeira, e mais, R\$ 5,00 reais por quilometro rodado. Então, um passageiro que percorre três quilômetros neste taxi pagará (P) pela corrida:

$$P = 3,50 + 5,00 \cdot 3 = 3,50 + 15,00 = 18,50.$$

Para visualizar melhor esta situação, pode-se atentar para uma tabela:

Tabela 2: Valor a pagar por quilômetro rodados

Bandeirada (R\$)	Km percorrido	Valor a pagar (R\$)
3,50	1	8,50
3,50	2	13,50
3,50	3	18,50
3,50	4	23,50
3,50	5	28,50

Fonte: Santos, 2011.

De forma geral, se o passageiro fizer uma viagem de x quilômetros, o valor que pagará pode ser representado pela expressão:

$$P(x) = y = 3,50 + 5,00 \cdot x.$$

A fórmula acima expressa uma função afim.

“Função afim, também conhecida como **função polinomial de 1º grau** ou simplesmente **função de 1º grau**, é toda relação real $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ que pode ser escrita da forma $f(x) = y = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$.”

Os números reais a e b são chamados de coeficientes da função:

a) Coeficiente angular

b) Coeficiente linear

Os conjuntos domínio e imagem da função real $f(x) = ax + b$ é o conjunto dos números reais: $D(f) = Im(f) = \mathcal{R}$.

Exemplos de funções afins:

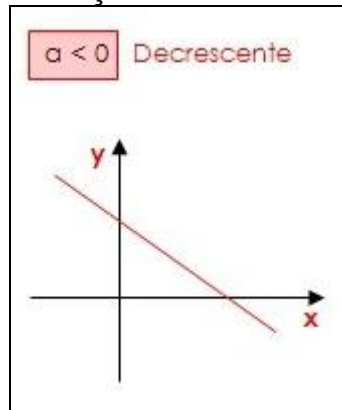
1. $f(x) = 7x - 5$, cujos coeficientes são $a = 7$ e $b = -5$.
2. $f(x) = -4x + 3$, de coeficientes $a = -4$ e $b = 3$.
3. $f(x) = 2x$, de coeficientes $a = 2$ e $b = 0$.

Nota-se que no terceiro exemplo tivemos $b = 0$. Funções afins, em que isto acontece, recebem o nome de **função linear**.

Se a condição $a \neq 0$ da função afim $f(x) = ax + b$ não fosse satisfeita, ou seja, se $a = 0$, f deixaria de ser uma função afim e passaria a ser uma **função constante** do tipo $f(x) = b$, cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo horizontal do plano cartesiano, mais conhecido como eixo OX.

2.2.1 Gráfico

O gráfico de uma função afim é uma reta inclinada em relação aos eixos coordenados, cuja inclinação será para a direita, se o coeficiente angular for um valor positivo (neste caso a função é dita crescente), e será inclinada para esquerda, se o coeficiente angular for negativo (função decrescente). A verificação desta afirmação encontra-se no Apêndice A (p. 106):

Figura 6: Função Afim – Decrescimento

Fonte: <http://vestibular.com.br/revisao/funcoes>

Para construir o gráfico da função $y = 3x - 1$, que é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

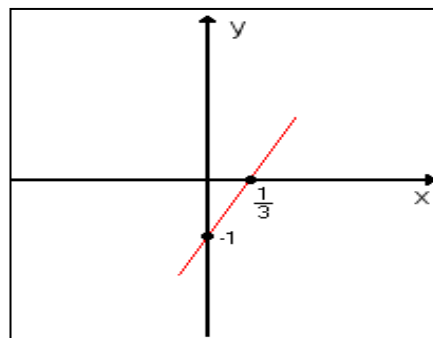
- Para $x = 0$, tem-se $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, tem-se $0 = 3x - 1$; portanto, $x = 1/3$ e outro ponto é $(1/3, 0)$.

Tabela 3: Pontos que o gráfico intersecta os eixos coordenados

x	y
0	- 1
1/3	0

Fonte: Santos, 2011.

Identificando os pontos $(0, -1)$ e $(1/3, 0)$ no plano cartesiano e unindo-os com uma reta:

Figura 7: Gráfico da função $f(x) = 3x - 1$ 

Fonte: www.somatematica.com.br

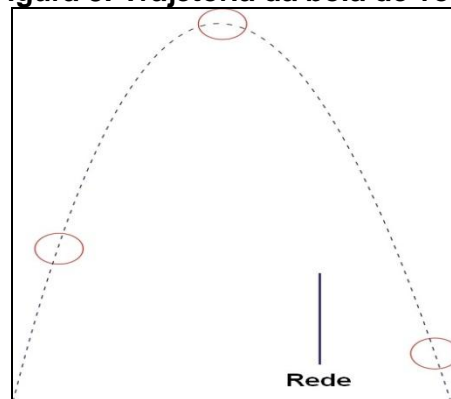
No exemplo acima, a ideia de escolher apenas dois pontos pertencentes ao gráfico da função para esboçá-lo decorre de um princípio básico da Geometria Euclidiana: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém. Optamos por escolher pontos que intersectam os eixos coordenados devido a precisão no traçado.

A tabela 3 auxilia na percepção da relação existente entre os coeficientes da função afim com a posição de seu gráfico. Percebe-se que o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas, eixo OY, é exatamente o valor do coeficiente b da função $f(x) = ax + b$. Desta forma, torna-se dispensável cálculos para obtê-lo.

2.3 Função quadrática

Se uma pessoa gosta de esportes, em especial de vôlei, pode ser que já tenha ouvido falar do saque efetuado por Bernard Rajzman, saque este que ficou conhecido como “Jornada nas Estrelas”. Neste saque, o jogador deu um impulso inicial à bola - para cima -, fazendo com que ela atingisse a altura de cerca de 10 metros, caindo diretamente no campo adversário. A trajetória percorrida pela bola foi uma curva denominada parábola, conforme se pode visualizar na figura que segue:

Figura 8: Trajetória da bola de vôlei



Fonte: www.justvolleyball.com.br

Algebricamente, essa curva representa uma função quadrática.

“Função Quadrática, também conhecida como **função polinomial de 2º grau** ou simplesmente **função de 2º grau**, é toda relação real $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ que pode ser escrita da forma $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$.”

No caso das funções quadráticas, os coeficientes não recebem nomes especiais, são apenas coeficientes.

O conjunto domínio da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o conjunto dos números reais, $D(f) = \mathcal{R}$, e o conjunto imagem é um subconjunto dos números reais, que podemos escrever: $Im(f) \subset \mathcal{R}$.

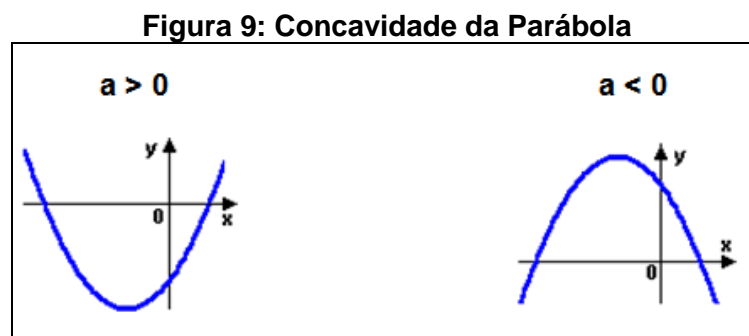
Exemplos de funções quadráticas:

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1$, cujos coeficientes são $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$.
2. $f(x) = -2x^2 + x - 8$, de coeficientes $a = -2$, $b = 1$ e $c = -8$.
3. $f(x) = 1/4 x^2 + 3x$, de coeficientes $a = 1/4$, $b = 3$ e $c = 0$.
4. $f(x) = -3x^2 + 1$, de coeficientes $a = -3$, $b = 0$ e $c = 1$.
5. $f(x) = \sqrt{2} x^2$, de coeficientes $a = \sqrt{2}$, $b = 0 = c$.

Nos exemplos 1 e 2, todos os coeficientes da função do 2º grau são diferentes de zero. Quando isto acontece, a função quadrática é dita **completa**. Caso pelo menos um dos coeficientes seja nulo, a função é denominada **incompleta**, o que acontece nos exemplos 3, 4 e 5.

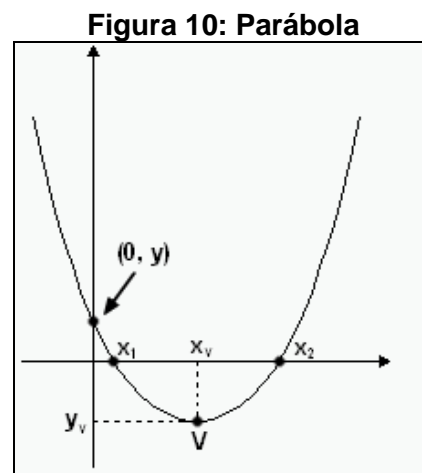
2.3.1 Gráfico

O gráfico de uma função quadrática, conforme foi dito no início desta subseção, é uma curva denominada **parábola** cuja concavidade será voltada para cima se o coeficiente do termo x^2 for positivo e para baixo se este mesmo coeficiente for um valor negativo (Figura 9).



Fonte: http://www.tudook.com/guiadoensino/funcao_quadratica.html (Acessado em 19/01/2012)

Para esboçar o gráfico da função quadrática, é comum recorrer a uma tabela com diversos pontos pertencentes ao gráfico. Embora este procedimento seja inteiramente válido, ele não garante uma precisão a respeito do comportamento da parábola. Sendo assim, apresentaremos pontos específicos que garantirão mais segurança, no ato de desenhar a parábola. Estes pontos são: o ponto em que o gráfico intersecta o eixo vertical do plano cartesiano, isto é, o eixo OY, as raízes, e o vértice (Figura 10).



Fonte: Santos, 2011

- Ponto em que o gráfico intersecta o eixo Y:

Este é um ponto de coordenadas $(0, y)$. Ou seja, para encontrar o valor de y precisa apenas fazer $x = 0$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sendo assim,

$$f(0) = y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c.$$

Portando, o ponto é o de coordenadas $(0, c)$.

Diante disso, nota-se que para verificar o ponto em que o gráfico da função quadrática corta o eixo Y, basta apenas identificar o valor do coeficiente c na expressão algébrica que define a função.

- Raízes:

As raízes, ou zeros, de uma função polinomial do 2º grau são os valores de x para os quais a função se anula, ou seja,

$$x \in \mathcal{R} \text{ tal que } f(x) = 0.$$

Como a função $f(x)$, aqui considerada, é uma função quadrática, deve-se resolver a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Para encontrarmos as raízes de uma equação do 2º grau, no caso a equação acima, recorre-se à fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac.$$

A demonstração desta fórmula pode ser encontrada no Apêndice B (p. 109).

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando, denominado **discriminante**. Sendo assim, temos três possibilidades:

a) Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e diferentes,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b) Quando Δ é zero, há só uma raiz real, $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

c) Quando Δ é negativo, não há raiz real.

- **Vértice:**

O vértice $V = (x_v, y_v)$ da parábola é o ponto extremo dela, ponto em que a curva muda de sentido e que fica exatamente entre as raízes x_1 e x_2 , quando estas existirem.

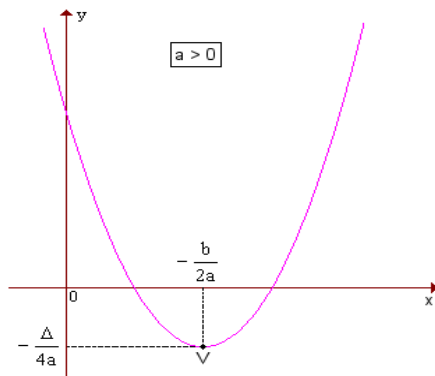
O vértice da parábola é um ponto cujas coordenadas são (Ver Apêndice B, p.111)

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right).$$

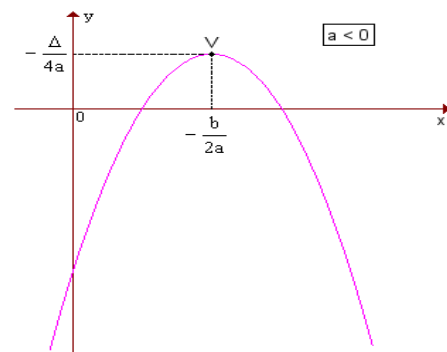
Se o coeficiente de x^2 , ou seja, o valor de a , for positivo o vértice é chamado de **ponto mínimo** da função quadrática e se for negativo, é chamando de **ponto máximo** da função.

Assim, a **imagem** da função de 2º grau fica bem determinada, a saber:

Figura 11: Imagem da função quadrática



$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$



$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Fonte: <http://homework-asap.webnode.com.br>

Resumindo todos os passos acima, podemos construir as seguintes tabelas:

- Se $\Delta > 0$

Tabela 4: Pontos principais no caso em que $\Delta > 0$

x	y
x_1	0
x_v	y_v
x_2	0
0	c

Fonte: Santos, 2011

- Se $\Delta \leq 0$

Tabela 5: Pontos principais no caso em que $\Delta \leq 0$

x	y
x_1	y_1
x_v	y_v
x_2	y_2
0	c

Fonte: Santos, 2011

Onde $x_1 < x_v < x_2$.

Se escolhermos x_1 e x_2 valores simétricos em relação a reta $x = x_v$ nossas contas serão simplificadas por conta da simetria da parábola. No caso de $\Delta = 0$, $x = x_v$ é a única raiz da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Com base no que foi considerado acima, construiremos agora os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ e $h(x) = 4x^2 - 4x + 2$.

Vamos começar com $f(x) = x^2 - 9$:

1º) Temos que o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y é $(0, c) = (0, -9)$.

2º) Calculando as raízes,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 36.$$

Logo, a função tem duas raízes reais distintas.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

3º) Calculando x_v e y_v , obtemos

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9.$$

Portanto, $V = (0, -9)$.

Conforme a tabela 4:

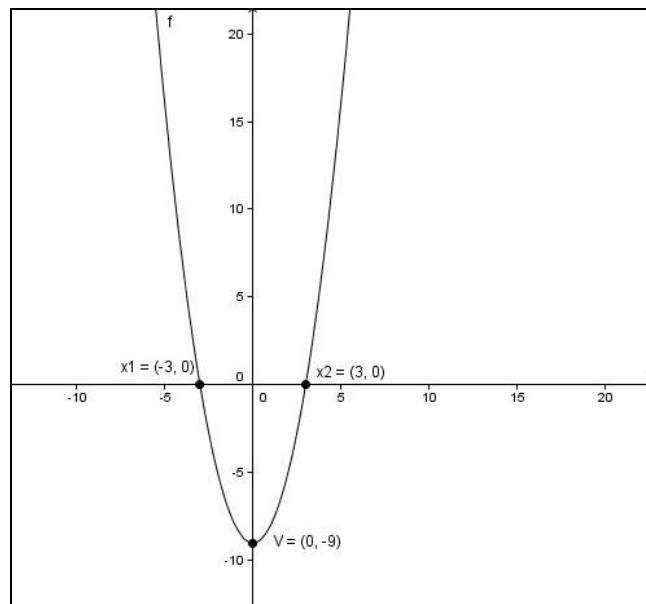
Tabela 6: Função $f(x) = x^2 - 9$

x	y
- 3	0
0	- 9
3	0
0	- 9

Fonte: Santos, 2011

Agora somos capazes de esboçar com precisão o gráfico da função dada.

Figura 12: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$



Fonte: Santos, 2011

Agora é a vez da função $g(x) = -x^2 + 2x - 1$:

1º) Temos que o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y é $(0, c) = (0, -1)$.

2º) Calculando as raízes,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0.$$

Logo, a função tem duas raízes reais iguais.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

3º) Calculando x_v e y_v , obtemos

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1 \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4 \cdot (-1)} = 0.$$

Portanto, $V = (1, 0)$.

Observe que, neste caso, a abscissa do vértice é igual ao valor da única raiz da função g . Isto sempre acontece nos casos em que o discriminante da função quadrática é nulo. Sendo assim, precisamos tomar x_1 e x_2 de tal forma que $x_1 < x_v < x_2$.

Tomemos $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Conforme a tabela 5 temos:

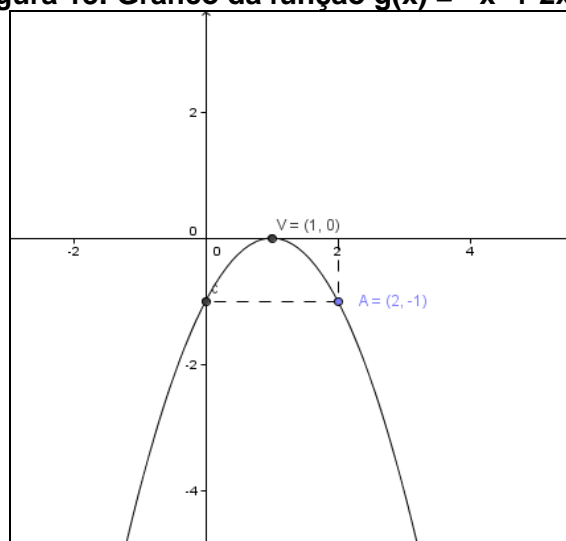
Tabela 7: Função $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

x	y
0	1
1	0
2	1
0	-1

Fonte: Santos, 2011

Portanto, o gráfico da função g é:

Figura 13: Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 2x - 1$



Fonte: Santos, 2011

Por fim, vamos esboçar o gráfico da função $h(x) = 4x^2 - 4x + 2$:

1º) Temos que o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y é $(0, c) = (0, 2)$.

2º) Calculando as raízes,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (2) = 16 - 32 = -16.$$

Visto que $\Delta < 0$, temos que a função não possui raízes reais. Mesmo assim, podemos determinar as coordenadas de seu vértice.

3º) Calculando x_v e y_v , obtemos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-16)}{4 \cdot 4} = \frac{16}{16} = 1.$$

Portanto, $V = (0,5; 1)$.

Neste caso, o valor do discriminante é negativo e novamente precisaremos escolher x_1 e x_2 de tal forma que $x_1 < x_v < x_2$. Sejam $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Conforme a tabela 5 temos

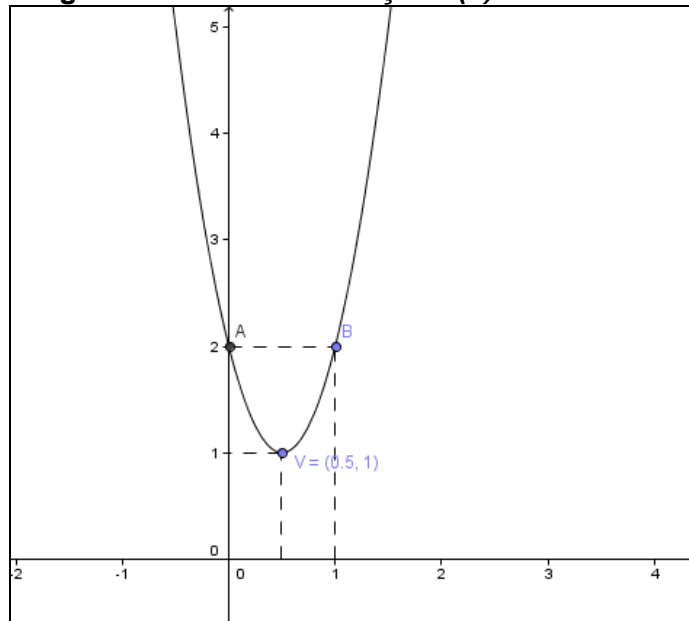
Tabela 8: Função $h(x) = 4x^2 - 4x + 2$

x	y
0	2
0,5	1
1	2
0	2

Fonte: Santos, 2011

Portanto, o gráfico da função h é

Figura 14: Gráfico da função $h(x) = 4x^2 - 4x + 2$



Fonte: Santos, 2011

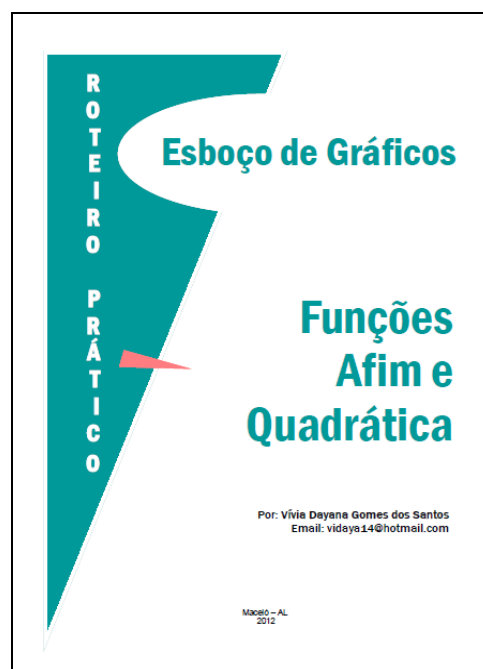
3 INTERVENÇÃO DE ENSINO PARA AS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Nesta seção apresentaremos detalhes a respeito da intervenção de ensino criada a fim de afirmar, ou não, a hipótese de que é possível criar um meio que proporcione a um grupo de alunos a capacidade de esboçar, no papel e no software GeoGebra, gráficos de funções afins e quadráticas, fazendo uso apenas de pontos específicos. Também, verificar se o uso deste recurso informatizado, o GeoGebra, proporciona que os alunos entendam a influência dos coeficientes de cada uma das funções consideradas com sua posição e forma gráfica.

3.1 Intervenção de ensino

Inspirados na ideia de Brousseau (2008), tivemos a preocupação de proporcionar aos alunos - da disciplina Matemática - um meio que lhes possibilitasse a percepção de fatores que dizem respeito às funções afim e quadrática, que, até então - talvez -, ainda não tenham percebido. Este meio consiste em um roteiro escrito, produzido em forma de cartilha explicativa, que foca a construção de gráficos das funções afim e quadrática, em dois ambientes bastante comuns a todos os que frequentam instituições de ensino: o ambiente papel e lápis e o ambiente informatizado.

Figura 15: Capa do roteiro explicativo



Fonte: Santos, 2012

Este roteiro, fazendo uso das representações algébricas e tabular das funções afins e das funções quadráticas, dá o passo a passo de como esboçar o gráfico de uma função afim (reta) e o gráfico de uma função quadrática (parábola), tomando pontos específicos. Apresenta-se com isto uma maneira prática e segura para a conversão da representação algébrica para a representação tabular, ressaltando que esta tabela conterá apenas os pontos relevantes para o esboço gráfico. Em seguida é feita a conversão da representação tabular para a representação gráfica, da função considerada.

Queremos deixar claro, aqui, que este roteiro não foi produzido com a intenção de substituir a construção de conceitos que ocorre na primeira vez em que temas sobre função são apresentados, onde geralmente a construção de gráficos é feita de tal forma que o professor toma diversos pontos do domínio da função, constrói uma tabela para obter os correspondentes a cada um dos pontos tomados (imagem da função) e identifica estes pontos no plano cartesiano, para fazer a ligação dos mesmos.

É importante evidenciar que, a estratégia ideal, é que este roteiro seja apresentado aos alunos depois que todos os tipos de consideração, a respeito das funções afins e quadráticas, tenham sido feitas. Desta forma, o roteiro servirá de complemento que lhes proporcionará a possibilidade de enxergar algo, que ainda não haviam percebido. No caso da nossa pesquisa, foi assim que ocorreu.

Neste roteiro, o aluno encontrará uma breve apresentação. Em seguida, tem-se o primeiro capítulo que apresentará, a princípio, um método para o esboço do gráfico da função afim, no papel. Já que o gráfico da função afim é uma reta inclinada, este método consiste na ideia de que, por dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém. Os pontos escolhidos são os que intersectam (cortam) os eixos coordenados do plano cartesiano. A partir deste fato, é construída uma tabela que auxilia na identificação destes pontos. Feito isto, basta colocar estes pontos no plano cartesiano e, com a ajuda de uma régua, ligá-los, prolongando o traço:

Figura 16: Função Afim – Roteiro para o ambiente de Papel e Lápis

Logo, o ponto em que o gráfico da função afim intersecta o eixo das abscissas tem as seguintes coordenadas: $(-b/a, 0)$.

O valor $x = -b/a$ é denominado zero ou raiz da função afim, ou seja, o ponto do domínio da função cuja imagem é nula.

NO EIXO – OY: O ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas tem o valor de x nulo. Fazendo a substituição na função $y=f(x) = ax + b$ obtemos,
 $f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = 0 + b \Rightarrow y = f(0) = b$.

Assim, o ponto em que o gráfico da função afim intersecta o eixo OY tem as coordenadas $(0, b)$. Percebemos assim que não é necessário efetuar cálculos para identificar o ponto cujo gráfico corta o eixo das ordenadas. Basta observar o valor do coeficiente linear b na função $f(x) = ax + b$.

Tabelando o que acabamos de ver, temos:

Tabela 1: Pontos que intersecta os eixos coordenados

x	y=f(x)
0	b
-b/a	0

Fonte: Santos, 2011

1.1 Gráfico de uma Função Afim – Papel e Lápis

Tendo em mente o que foi exposto anteriormente, vamos fazer o esboço do gráfico de uma função afim no ambiente Papel e Lápis. Para isto, precisaremos de uma folha de papel A4 para efetuar os cálculos necessários, uma folha de papel quadriculado para o esboço do gráfico, lápis e borracha.

Exemplo 1: Construa, no plano cartesiano, o gráfico da função definida por $y = 2x - 3$, sendo x e y variáveis reais.

Usando de praticidade e recorrendo à Tabela 1 temos:

Figura 2: Gráfico de $y = 2x - 3$

Tabela 2: Pontos em que $y = 2x - 3$ Intersecta os eixos coordenados

x	y=f(x)
0	-3
3/2	0

Fonte: Santos, 2011

Marcando estes dois pontos no papel quadriculado e fazendo uso de uma régua para ligar tais pontos, obtemos o gráfico da função dada.

Exemplo 2: Esboce o gráfico da função definida por $y = -x + 7$, sendo x e y variáveis reais.

Seguiremos os mesmos passos do exemplo anterior.

Tabela 3: Pontos em que $y = -x + 7$ Intersecta os eixos coordenados

x	y=f(x)
0	7
7	0

Fonte: Santos, 2011

Basta apenas marcar estes pontos no papel quadriculado e traçar a reta que por eles passa.

Exemplo 3: Esboce o gráfico da função definida por $y = 2x$, sendo x e y variáveis reais.

Tabela 4 – Pontos em que $y = 2x$ Intersecta os eixos coordenados

x	y=f(x)
0	0
0	0

Fonte: Santos, 2011

Neste caso, notamos que há uma coincidência de pontos. Ambos os pontos têm coordenadas $(0, 0)$, ou seja, o gráfico da função $f(x) = 2x$ é uma reta que passa pela origem.

Relembrando outro princípio da Geometria Plana, de que por um único ponto passam infinitas retas, podemos concluir que não é possível obter o gráfico da

Fonte: Santos, 2012

Em face do grande avanço da tecnologia e do fácil acesso a computadores, principalmente para a turma de jovens da atual geração, além do esboço à mão, de gráficos, o roteiro deteve-se, também, na construção de gráficos através do uso de um poderoso e prático software de geometria dinâmica, o GeoGebra (Ver o Apêndice C, p. 112).

Ainda no primeiro capítulo, a construção de gráfico no GeoGebra se deu fazendo uso da mesma ideia de construção de gráficos no papel: a identificação dos pontos onde o gráfico intersecta os eixos coordenados. Desta forma, de acordo com Duval (2009), os alunos devem trabalhar o tratamento - na forma algébrica - das funções afins, objetivando identificar estes pontos:

Figura 17: Função Afim – Roteiro para o ambiente GeoGebra

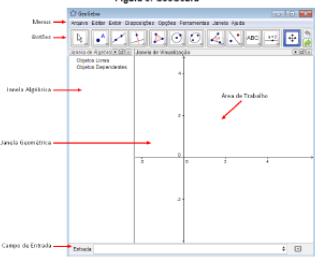


Figura 5: GeoGebra

Fonte: Santos, 2011

As ferramentas acima discriminadas são facilmente manipuláveis. Em caso de dúvidas, pode-se acessar o fórum (<http://www.geogebra.org/forum/>) que está disponível no site oficial do GeoGebra.

A princípio, vamos esboçar o gráfico da função dada no Exemplo 1, $f(x) = 2x - 3$, com o auxílio do GeoGebra.

Para tanto, siga os seguintes passos:

1*) No Campo de Entrada digite "a = 2" (sem as aspas) e aperte no teclado do computador a tecla ENTER. Repita o mesmo processo agora digitando "b = -3". Note que estes valores ficarão impressos na Janela Algebrica.

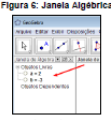


Figura 6: Janela Algebrica

Fonte: Santos, 2011

2*) Agora digite no Campo de Entrada a expressão $f(x) = a \cdot x + b$ e aperte ENTER.

O que aconteceu? Isso mesmo, o gráfico da função $f(x) = 2x - 3$ está esboçado (Figura 7).

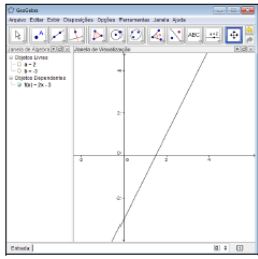


Figura 7: Gráfico de $y = 2x - 3$

Fonte: Santos, 2011

Fonte: Santos, 2012

O professor, ao orientar os alunos que fazem uso do roteiro, no tópico referente ao GeoGebra, deve ter em mente a importância de fazer com que estes alunos se apercebam das propriedades que relacionam o comportamento do gráfico com os valores de seus coeficientes. Isso não é facilmente notável quando se trabalha apenas com construção de gráficos no ambiente de papel e lápis, pois, requer diversas construções e isto se torna uma atividade cansativa e enfadonha.

O segundo capítulo do roteiro enfatiza a construção do gráfico da função quadrática, a saber, da parábola. Para tanto, leva-se em consideração os pontos em que a curva intersecta os eixos coordenados e o vértice da parábola. O vértice tem um papel muito importante para o esboço preciso da curva, pois, a abscissa deste ponto define uma reta vertical, que é o eixo de simetria da parábola.

Assim como foi feito para a função do polinomial do 1º grau, o esboço é feito, tanto no papel (Figura 18), como no *software* GeoGebra (Figura 19):

Figura 18: Função Quadrática – Roteiro para o ambiente Papel e Lápis

2. FUNÇÃO QUADRÁTICA

A Função Quadrática, também conhecida como função polinomial de 2º grau ou simplesmente função de 2º grau, é toda relação real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser escrita da forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$


com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Os conjuntos domínio e imagem da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ são, respectivamente, os conjuntos \mathbb{R} e $\{y \in \mathbb{R} / y \geq y_v, = -\Delta / 4a\}$.


O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola cuja concavidade (abertura) será voltada para cima se o coeficiente do termo x^2 for positivo e, para baixo se este mesmo coeficiente for um valor negativo.

Figura 10: Parábola

$a > 0$



$a < 0$



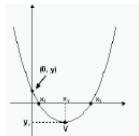
Fonte: Google, 2011

Para o esboço gráfico da função do 2º grau, ao invés de construirmos uma tabela para obter diversos pontos pertencentes ao gráfico (o que não garante precisão com respeito ao comportamento da parábola) iremos encontrar alguns pontos específicos que nos garantirão mais segurança ao esboçar no papel a representação gráfica da função quadrática. Estes pontos são: o ponto em que o gráfico intersecta o eixo OY, as raízes quando existir e o vértice.

Veja a figura abaixo:

11

Figura 11: Pontos principais da parábola



Fonte: Godge, 2011

1º) PONTO EM QUE O GRÁFICO INTERSECTA O EIXO OY:
Para isto, basta fazer $x = 0$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obter $f(0) = y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$.
Portanto, este ponto tem coordenadas $(0, c)$.

2º) RAÍZES:
As raízes de uma função são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Sendo assim, nos deparamos com a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.
Para resolvê-la fazemos uso da expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde pode-se fazer $\Delta = b^2 - 4ac$.

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando, denominado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e diferentes;
- Quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

12

Fonte: Santos, 2012

Figura 19: Função Quadrática – Roteiro para o ambiente GeoGebra

2.2 Gráfico de uma Função Quadrática – GeoGebra

Tomando passos semelhantes aos que foram tomados para o esboço gráfico de funções afins no GeoGebra, iremos fazer o esboço do gráfico das funções quadráticas apresentadas no Exemplo 4.

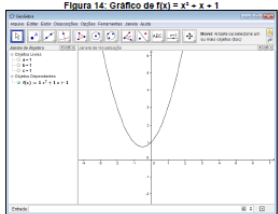
Generalizando o gráfico para funções quadráticas, abra o GeoGebra e digite no Campo de Entrada "a = 1" (sem as aspas) e em seguida clique em ENTER. Repita o mesmo processo para "b = 1" e "c = 1". Estes são os coeficientes da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Clique nas bolinhas que aparecerem na Janela Algébrica para que estes coeficientes fiquem visíveis na Área de Trabalho.

Agora, digite novamente no Campo de Entrada $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Note que aparecerá o gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$.

Figura 14: Gráfico de $f(x) = x^2 + x + 1$



Fonte: Santos, 2011

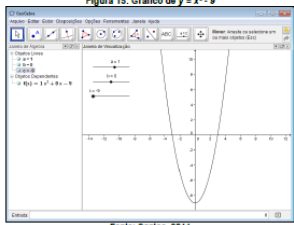
Para o esboço do gráfico que desejamos, basta selecionar o botão Mover e arrastar os coeficientes a, b e c de tal modo que tenhamos as funções $y = x^2 - 9$ (Figura 15) e $y = x^2 - x + 1$ (Figura 16).

17

Observação: Se por acaso, a reta onde está o coeficiente não obtiver o valor desejado, isto pode ser alterado clicando sobre ele com o botão direito no mouse e selecionar a opção Propriedades para alterar o intervalo.

À medida que modifica cada coeficiente, independentemente, observe o que cada um deles interfere em relação à posição do gráfico da função quadrática. É possível padronizar? Se for, faça isso!

Figura 15: Gráfico de $y = x^2 - 9$



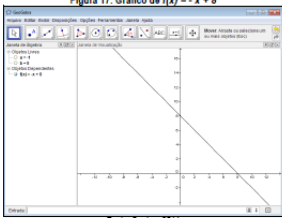
Fonte: Santos, 2011

18

Fonte: Santos, 2012

Ao passar pelo primeiro e segundo capítulo, o aluno já deve estar apto a esboçar os gráficos de todo e qualquer tipo de função afim e quadrática, tanto no papel quanto no GeoGebra. Considerando as construções gráficas que podem ser feitas no GeoGebra, o terceiro e último capítulo abordará a resolução de sistemas de equações afim e quadrática mediante a técnica de intersecção de gráficos:

Figura 20: Sistema de Equações – Método de intersecção de gráficos

<p>3. RESOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES COM O GEOGEBRA</p> <p>Resolver um sistema de equações que envolvem duas equações com duas incógnitas consiste em encontrar os valores dessas incógnitas que satisfazem simultaneamente as igualdades.</p> <p>Por exemplo, considerando o sistema</p> $\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$ <p>temos que os valores de x e y que satisfazem ao mesmo tempo as duas igualdades são, respectivamente, 3 e 5. De fato,</p> $\begin{aligned} x + y &= 3 + 5 = 8 \\ e \\ 3x + y &= 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14 \end{aligned}$ <p>Algebricamente esta solução pode ser encontrada pelo método de tentativas, onde diversos valores para x para y são verificados até que encontre a solução, este muito exaustivo, pelo método da substituição ou o método da adição.</p> <p>Graficamente, a solução de um sistema de equações pode ser obtida pela intersecção dos gráficos das funções envolvidas no sistema. A coordenadas (x, y) do ponto de intersecção destes gráficos representa os valores que, substituídos nas incógnitas correspondentes das equações, representa a sua solução.</p> <p>A partir de agora apresentaremos como resolver graficamente um sistema de equações fazendo uso do GeoGebra.</p> <p>Exemplo 5: Fazendo uso de representações gráficas, resolva o sistema</p> $\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$ <p>A primeira coisa a fazer é escrever cada uma das equações do sistema em função de x, ou seja, isolar a incógnita y no primeiro membro. Desta forma temos,</p> $\begin{aligned} x + y = 8 &\Rightarrow y = -x + 8 \text{ (i)} \\ e \\ 3x + y = 14 &\Rightarrow y = -3x + 14 \text{ (ii)}. \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">21</p>	<p>Tomando $y = f(x)$ na sentença (i) e $y = g(x)$ na sentença (ii), basta agora usar os passos tomados na seção 2.2 para esboçar o gráfico de cada uma delas no GeoGebra.</p> <p>Primeiro esboce o gráfico da função $f(x) = -x + 8$. (Figura 17)</p> <p>Figura 17: Gráfico da função $f(x) = -x + 8$</p>  <p>Fonte: Santos, 2011</p> <p>Para esboçar o gráfico da função $g(x) = -3x + 14$ no mesmo plano cartesiano da janela do GeoGebra em que está o gráfico da função $f(x)$, precisaremos definir novos coeficientes.</p> <p>No Campo de Entrada digite "c = - 3" (sem aspas) e dê um ENTER. Em seguida, digite "d = 14" e novamente dê um ENTER. Note que estes valores aparecem na Janela Algebrica logo abaixo dos coeficientes da função $f(x)$. Estes c e d são os coeficientes da função $g(x)$.</p> <p style="text-align: right;">22</p>
---	--

Fonte: Santos, 2012

A partir deste roteiro, dado um sistema qualquer, o aluno deverá identificar a função que define cada uma das equações envolvidas, esboçar seus gráficos na mesma Janela Geométrica e apontar seu(s) ponto(s) de intersecção. As coordenadas deste(s) ponto(s) são a solução do sistema considerado.

O roteiro foi elaborado de tal forma que, por si só, seria suficiente para compreensão dos que o lessem. Porém, no desenvolvimento desta pesquisa, o professor exerceu um importante papel de mediador. Isso foi feito necessário, tanto para o bom andamento da pesquisa, quanto para apresentar aos alunos o programa de geometria dinâmica que foi utilizado, visto que, nenhum dos sujeitos envolvidos tinha conhecimento sobre ele.

Ao fim de cada capítulo, uma seção “Hora de Praticar” é destinada a exercícios. Com relação ao primeiro e segundo capítulo, esta seção apresenta dois

exercícios: um, dá a representação algébrica da função considerada no capítulo e solicita a sua representação gráfica; e o outro faz o contrário, dá o gráfico da função e solicita a sua representação algébrica (Figura 21). Para que os alunos respondam estes exercícios, o professor deve admoestá-los, de que, primeiro, façam uso do ambiente de papel e lápis e, depois, do GeoGebra. Abaixo, exemplo dos exercícios que constam no roteiro:

Figura 21: Hora de Praticar – Capítulo 1

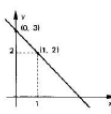
1.3 Hora de praticar

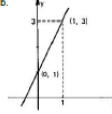
1) Fazendo uso dos recursos apresentados anteriormente, esboce os gráficos das seguintes funções:

a. $y = 3x + 1$
 b. $y = 2,5x - 1$
 c. $y = -3x - 6$
 d. $y = -x + 1$
 e. $y = 7x$
 f. $y = -4x$

Diante desta questão, pode-se notar certo padrão com respeito à inclinação da reta, ou seja, crescimento e decréscimo da função afim. Você é capaz de identificá-lo?

2) Para cada gráfico abaixo, determine a função que o define:

a. 

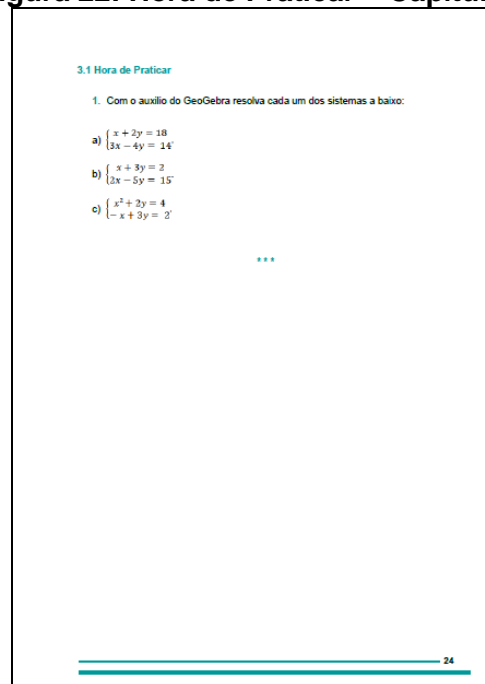
b. 

10

Fonte: Santos, 2012

No terceiro capítulo, a atividade consiste em apresentar sistemas e solicitar a solução gráfica destes (Figura 22). Neste caso, o aluno deve ficar à vontade para fazer no ambiente, papel e lápis, ou no GeoGebra, ou seja, da forma que ele considerar mais conveniente:

Figura 22: Hora de Praticar – Capítulo 3



Fonte: Santos, 2012

3.2 Aplicação da metodologia: Descrição

Para o desenvolvimento desta pesquisa contamos com a participação voluntária de dez alunos de algumas escolas públicas, que participam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior (PIBIC-Jr).

O PIBIC-Jr é promovido através de uma parceria do CNPq⁴ com a FAPEAL⁵ e tem como objetivo despertar a vocação científica e incentivar talentos - na área de Matemática - entre estudantes do Ensino Fundamental, Médio e de Educação Profissional, da rede pública de ensino.

No Estado de Alagoas, o PIBIC-Jr é sediado pelo Instituto de Matemática (IM), na Universidade Federal de Alagoas (UFAL). As aulas normalmente são ministradas por bolsistas e alunos do curso superior de Matemática e, por pesquisadores qualificados. Essas aulas acontecem todos os sábados, pela manhã, das 8 às 12 horas, com um intervalo de 20 minutos - a partir das 10 horas.

⁴ Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

⁵ Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas.

A metodologia adotada consistiu na aplicação de questionários, aulas expositivas, apresentação do roteiro impresso e aulas no laboratório de informática. Levando em consideração que os alunos participantes do PIBIC-Jr já estavam habituados com aulas aos sábados pela manhã, nossa intervenção como professores e pesquisadores aconteceu em seis encontros presenciais consecutivos, um encontro por sábado, distribuídos da seguinte forma:

- **Primeiro encontro:** Fomos apresentados a turma, pelo diretor do IM, como professores e pesquisadores que contaria com a participação voluntária daqueles alunos para desenvolver um estudo que visaria ampliar seus conhecimentos a respeito das funções Matemáticas, mais especificamente, funções afins e funções quadráticas. Logo em seguida, foi aplicado um questionário de caráter investigativo, ao qual denominamos de Q1 (Anexo A, p. 119), com a finalidade de conhecer os sujeitos presentes e para averiguar os seus níveis de conhecimento a respeito das funções afim e quadrática.

Após o intervalo, o tema “Função Afim” foi apresentado à turma por meio de uma aula tradicional expositiva. Sobre esse tema foi destacada a sua definição formal (representação algébrica), motivado por um exemplo prático e simples, e a sua representação gráfica. Com isto, tomando-se como exemplo uma função polinomial do 1º grau completa e fazendo uso da sua representação algébrica, foi construída uma tabela e a construção do gráfico no quadro-negro foi feito por meio da ligação de pontos no plano cartesiano. Depois desta construção, foi demonstrado que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau não poder ser outro tipo de traço a não ser uma reta.

Dos dez alunos participantes, apenas um fazia o 8º ano do Ensino Fundamental e nunca tinha ouvido falar sobre funções. Os outros nove eram todos do Ensino Médio, sendo: dois, do 1º ano; quatro, do 2º ano; e três, do 3º ano. Visto que esta pesquisa foi iniciada no segundo semestre de 2011, chegamos à conclusão de que os alunos que estavam cursando o Ensino Médio já tinham visto algum tipo de consideração sobre as funções afim e quadrática, já que estes conteúdos fazem parte do programa curricular do 1º ano do Ensino Médio.

- **Segundo encontro:** Neste encontro foi considerado o tema “Funções Quadráticas”. Semelhante ao que foi feito no caso das funções afins, apresentou-se ao grupo a definição formal de uma função polinomial do 2º grau, também motivada por um exemplo simples a qual ela se aplica. A forma geral de seu gráfico foi apresentada e, por meio de um exemplo específico, o gráfico foi esboçado no quadro-negro, fazendo uso de sua representação tabular.

No segundo momento desta aula, após o intervalo, apresentamos para os alunos a fórmula que fornece as raízes de uma função quadrática e a demonstração da mesma por meio da técnica de completar quadrado. Neste momento, foi esclarecido para os alunos que, apesar desta fórmula receber o nome de “Fórmula de Bhaskara”, não foi Bhaskara quem a descobriu. Fazendo uso da fórmula que fornece as raízes da função quadrática, deduzimos as coordenadas do vértice da parábola e seu conjunto-imagem.

- **Terceiro encontro:** No primeiro momento deste encontro, antes do intervalo, foi aplicado outro questionário, que identificamos por Q2 (Anexo B, p. 121). Este questionário foi desenvolvido na mesma linha do Q1, incluindo até as mesmas perguntas a respeito do que os alunos entendem por função, domínio, contradomínio, imagem e sobre as formas de representação de uma função. A intenção de preparar Q2 bem semelhante a Q1 foi de que, ao comparar estes dois questionários, fosse possível observar até que ponto uma aula tradicional, expositiva, contribuiu, na aquisição de conhecimentos.

No segundo momento, deste terceiro encontro, o software GeoGebra foi apresentado aos alunos. Para isso, foram levados para a sala de aula dos estudantes de pós-graduação em Matemática, da UFAL, visto que, neste recinto o ambiente é climatizado, além de conter os equipamentos indispensáveis à exposição do software, tais como, retroprojetor e notebook. Desta forma, os principais recursos fornecidos pelo GeoGebra foram apresentados aos alunos, ao mesmo tempo em que se fazia algumas construções geométricas. O fato de algumas construções terem sido feitas, ao mesmo tempo em que o programa e seus recursos eram apresentados, tornou mais viável a percepção dos alunos no que diz respeito à diversidade de ações que podem ser efetuadas no GeoGebra.

- **Quarto encontro:** Foi no quarto encontro que os alunos tiveram acesso ao roteiro prático, intitulado “Esboço Gráfico – Funções Afins e Quadráticas”. É importante ressaltar, que para fazer uso deste material, a pessoa deve ser capaz de perceber a maneira eficiente de esboçar os gráficos das funções afins e quadráticas, tanto no ambiente de “papel e lápis”, quanto no “GeoGebra”.

A cada aluno presente foi entregue um roteiro. Foram, também, disponibilizados alguns minutos da aula para que conhecessem o material, a fim de verificar a possibilidade de que este roteiro tenha condições de auxiliar, efetivamente, na elaboração de um esboço seguro e rápido das funções consideradas nas aulas anteriores. Finalizado o tempo disponível para o estudo do roteiro, os principais pontos a respeito da construção dos gráficos das funções polinomiais do 1º e 2º graus foram discutidos e reescritos no quadro-negro.

Após isto, foi entregue, a cada aluno, uma folha de papel quadriculado, solicitando-se que fizessem, neste papel, os gráficos das funções afins e funções quadráticas dadas como exercícios no tópico “Hora de Praticar”. Sugeriu-se, também, que os tratamentos destinados ao encontro das coordenadas dos pontos necessários para o esboço dos gráficos, fossem feitos, ou no verso da folha do papel quadriculado, ou em um caderno a parte.

- **Quinto encontro:** No quarto encontro, o esboço de gráfico foi feito apenas no ambiente papel e lápis. Este quinto encontro foi o momento de aplicar o método exposto - no roteiro explicativo - para construir os gráficos das funções afim e quadrática, no ambiente GeoGebra. Para isto, fez-se uso da mesma idéia de encontrar pontos específicos, visto que as formas gráficas já eram conhecidas: uma reta para a função afim; e uma parábola para a função quadrática.

Neste momento do processo, as aulas que sempre haviam sido ministradas em uma sala de aula normal, foram transferidas para o Laboratório de Informática, do IM-UFAL. No laboratório estava à nossa disposição um número suficiente de computadores, de tal forma, que cada aluno participante da pesquisa pôde ficar com um deles.

Com o auxílio do roteiro, que fornece o passo a passo para a construção dos gráficos no GeoGebra, e sob a nossa orientação, os alunos repetiram as construções gráficas das mesmas funções consideradas no encontro anterior. Desta forma, era possível cada um deles comparar as construções feitas no papel, com as que estavam sendo feitas no computador.

- **Sexto encontro:** Neste último encontro, aplicou-se outro questionário, denominado Q3 (Anexo C, p. 123). Diferentemente dos questionamentos apresentados anteriormente - Q1 e Q2 -, Q3 chama a atenção para a construção de gráficos fazendo uso dos métodos apresentados no roteiro. Estas construções foram feitas no papel comum, papel A4.

Foram feitos questionamentos a respeito da relação dos coeficientes das funções afim e quadrática, com suas posições no plano cartesiano. A essa altura, esperava-se que, com base nas manipulações que foram efetuadas no GeoGebra - no quinto encontro -, os alunos fossem capazes de perceber esta relação. Também fizeram parte deste último questionário, perguntas sobre a opinião pessoal a respeito do roteiro utilizado no experimento, sugestões e críticas.

Ao pensarmos e efetuarmos os procedimentos descritos nessa subseção, procuramos desenvolver uma situação adidática segundo a concepção de Guy Brousseau (2008), situação que privilegiasse os quatro tipos de momentos característicos de uma situação adidática: ação, formulação, validação e institucionalização. Mas, no decorrer dos encontros, percebemos que o que prevaleceu em relação às teorias desenvolvidas por Brousseau (2008) foi à teoria do contrato didático. Houve quebras de contratos em diversos momentos da experimentação, em especial quando partimos de uma aula expositiva e tradicional para o laboratório de informática.

Também, desenvolvemos os questionários Q1, Q2 e Q3 na intenção de proporcionar aos alunos condições para que explorassem ao menos duas formas de representação das funções afim e quadrática – representação algébrica e representação gráfica. Tendo em mente a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2009), nossa intervenção buscou motivar os alunos a, além de conhecer e identificar os três tipos de representações das funções consideradas

(algébrica, tabular e gráfica), efetuem a conversão de um registro em outro mantendo sempre a relação entre eles. A próxima seção trará com mais detalhes estas informações.

4 DOS ENCONTROS PRESENCIAS: ANÁLISE

À luz da teoria da situação didática e da teoria de contrato didático de Guy Brousseau (2008), auxiliada por alguns pressupostos da teoria da representação semiótica de Raymond Duval (2009), esta seção apresentará uma análise feita de cada um dos encontros especificados na seção anterior.

4.1 Primeiro encontro

Antes do nosso aparecimento como professores e pesquisadores na sala de aula composta dos alunos participantes da pesquisa, as aulas eram ministradas por bolsistas-graduandos do curso de Matemática que, até este momento, tinham trabalhado com eles tópicos sobre conjuntos numéricos, resolução de equações do 1º e do 2º grau e plano cartesiano.

Ao sermos apresentados a turma, o diretor do Instituto de Matemática da UFAL explicou que estaríamos com eles por um período de tempo, a fim de introduzir tópicos sobre funções afins e quadráticas, e que eles seriam participantes de uma pesquisa que resultaria em um trabalho de conclusão de mestrado, isto é, se eles desejassem colaborar. Tendo uma unanimidade de respostas positivas, deu-se início aos trabalhos.

Conforme especificado na seção anterior, no primeiro momento deste encontro ocorreu a aplicação do questionário Q1. Quanto ao perfil dos alunos voluntários, constatou-se que a idade dentre eles variava de 15 a 17 anos, havendo, apenas, um aluno com a idade de 13 anos. Este era, na ocasião da pesquisa, o único que não cursava o Ensino Médio.

Todos dos alunos envolvidos na pesquisa estudavam em escolas públicas. Quando perguntados sobre a disciplina de que mais gostavam, apenas três alunos responderam que era a Matemática. Sobre a disciplina que mais tinham dificuldades, também três (diferentes dos que responderam que gostam de Matemática) responderam ser a Matemática, argumentando que esta dificuldade dava-se pelo fato de que a escola em que estudavam não tinha professores de Matemática, ou seja, a dificuldade decorria do fato de que eles não tinham conhecimentos básicos de Matemática.

Partindo para os questionamentos a respeito de funções, funções afins e funções quadráticas, notou-se que todos os alunos tinham uma noção sobre o assunto, mas que não conseguiam definir, formalmente, o que é uma função, nem os conjuntos domínios, contradomínios e imagens. Também, cinco dos participantes deixaram em branco o item que trata sobre as formas de representação de uma função. Mas, dos que responderam, três alunos disse que uma função pode ser representada por gráfico e pelo diagrama de Venn. Duval (2009) afirma que:

[...] a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representações diferentes. Essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado (p. 22).

Sabemos que - além de gráficos e do diagrama de Venn - existem outras formas de se representar uma função. Mas, o fato desses três alunos, que participaram da pesquisa, citarem estas duas formas, leva-nos a entender que eles entendem a diferença entre o conceito de função e sua representação. Isto pode indicar que os professores de Matemática que eles tem, ou tiveram, souberam transmitir os tópicos de função de tal forma que eles, no momento da pesquisa, não confundiram o objeto com a sua representação.

O fato de cinco alunos deixarem este questionamento em branco pode indicar que, ou realmente não sabem a resposta ou que não quiseram responder. Já os dois, que não deram uma resposta satisfatória, pode indicar a deficiência no ensino de Matemática, por parte de alguns professores de escolas publicas. Como este não era o foco desta pesquisa, não entramos em detalhes quanto aos motivos das falhas apresentadas pela maioria, no que se refere aos questionamentos analisados acima.

O Q1 trouxe, também, perguntas diretas sobre as funções afins e quadráticas:

- Dada uma expressão que representa uma função, perguntava-se se o seu gráfico era uma reta ou parábola: todos acertaram.

- Esboçar os gráficos de funções: todos fizeram uso do método de construir tabelas, puseram os pontos encontrados no plano cartesiano e os ligaram.

- Identificação de uma função quanto ao seu valor máximo ou mínimo e se ela era crescente ou decrescente: houve muita confusão, e alguns não responderam.

Assim, verificamos que em relação às formas representativas das funções em questão, a turma em geral tinha pouco conhecimento. Neste caso, deveríamos fazer mais uso da teoria de representação semiótica de Duval (2009) a fim possibilitar a estes alunos a aquisição de conhecimento, bem como o aprimoramento dos que eles já tinham, referente às funções afim e quadrática e suas representações.

Nos problemas propostos - um para função afim, e outro para função quadrática as respostas eram dadas sem recorrer aos conceitos de função. Raciocinaram e escreveram suas respostas, com base nos conhecimentos matemáticos que já possuíam.

Visto que neste primeiro encontro não consideramos nenhum tópico referente às funções que pretendíamos considerar com os alunos, o contrato didático estabelecido implicitamente foi aquele ao qual esperamos que alunos respondessem ao questionário, estando suas respostas corretas ou não. Em quanto os alunos, usam todos os meios possíveis em busca da solução correta, pois é isto que eles acreditam ser o nosso principal interesse.

Uma visão geral do que foi feito pelos dez alunos, neste primeiro momento da aula, leva-nos a concluir que a turma é composta de alunos que têm uma base adequada sobre as funções afim e quadrática (seis alunos), e de alunos que não a têm (quatro alunos). Percebe-se, também, que, a respeito dos gráficos das funções, todos fizeram uso do método de ligação de pontos no plano cartesiano, pontos este obtidos de uma tabela construída atribuindo-se diversos valores ao "x" da representação algébrica da função que foi considerada.

No segundo momento deste primeiro encontro, que tratou de uma aula tradicional expositiva sobre as funções afins, fizemos uso apenas do quadro e do giz para passar informações tais como a definição da função afim e seu gráfico. Desta forma, pode-se dizer que o contrato estabelecido foi o contrato que Brousseau (2008) considera como sendo sem intenção didática, o contrato de comunicação.

Ao falarmos do gráfico, motivamos o seu reconhecimento por meio da representação tabular da função afim e o gráfico foi obtido por meio da ligação de ponto no plano cartesiano. Tendo em mente os pensamentos de Duval (2009) referente à necessidade de possibilitar aos alunos condições para que compreenda a relação existente entre as várias representações de um objeto matemático, demonstramos que o gráfico da função afim é uma reta, e não outro tipo de traço. Percebemos que os alunos tiveram a princípio certa dificuldade em compreender e aceitar o que estava sendo exposto. Mas motivando-os a raciocinar com base nos princípios básicos da Geometria Euclidiana, esta barreira foi vencida.

4.2 Segundo encontro

Neste encontro foi dada uma aula tradicional e expositiva sobre funções quadráticas. Desta forma, o contrato estabelecido foi o mesmo que o comentado no penúltimo parágrafo da subseção anterior – contrato de comunicação.

Em nenhum momento os alunos tomaram a iniciativa de questionar algo do que estávamos expondo. Apenas, quando questionados diretamente é que alguns deles se pronunciavam.

A aula preparada - e executada - levou em consideração a definição formal de uma função quadrática, destacando três formas de sua representação semiótica: algébrica, tabular e gráfica.

A representação algébrica foi trabalhada com os alunos no momento em que a definição formal da função quadrática e da sua representação tabular foi considerada. Isso serviu de auxílio aos alunos no esboço do gráfico da função, momento em que a representação gráfica aparece, ou seja, no gráfico esboçado no quadro-negro.

Algo que se manifestou como uma novidade para os alunos: a demonstração da fórmula das raízes da função quadrática, conhecida como fórmula de Bhaskara, a das coordenadas do vértice da parábola. Neste caso, o contrato de comunicação passou a ser quebrado e substituído por um novo contrato, o contrato de habilidade.

Dentro deste contrato de habilidade fizemos uso da noção de tratamento de registros representativos de Duval (2009), neste caso trabalhando com a representação algébrica da função quadrática.

Na mesma ocasião, foi dado aos alunos um resumo histórico sobre a descoberta das raízes da equação quadrática, e o motivo dela receber o nome de Fórmula de Bhaskara, visto que, não foi Bhaskara quem a descobriu. Todos mostraram certo espanto, visto que, desde o 9º ano do Ensino Fundamental (antiga 8ª série), foram ensinados a decorar a fórmula que recebeu o nome de Fórmula de Bhaskara.

Como observado na análise do Q1, tudo o que estava sendo passado para os alunos era do conhecimento da maioria. Então, esta aula serviu tanto de revisão, para os que já tiveram aulas sobre os temas em questão, como de transmissão de conhecimentos novos para os que não tiveram a oportunidade de aprender na escola em que estudavam, ou estudaram.

4.3 Terceiro encontro

Na aplicação de Q2 faltaram quatro alunos. Mas, analisando as atividades dos que estavam presentes, notou-se que boa parte dos questionamentos não foram respondidos. Esta não era a perspectiva que tínhamos. Esperávamos que, com base no que haviam sido expostos nos dois encontros anteriores, estes alunos se empenhassem um pouco mais em responder o questionário, mesmo sendo um pouco mais extenso que o Q1.

Os alunos foram avisados no encontro anterior - segundo encontro -, sobre a atividade que seria realizada. Percebemos que isto os deixava apreensivos, pois, mesmo sendo avisados de que era só para averiguar os conhecimentos dos mesmos, eles consideravam como sendo uma “prova”, que poderia acarretar em aprovação ou desaprovação na vida estudantil.

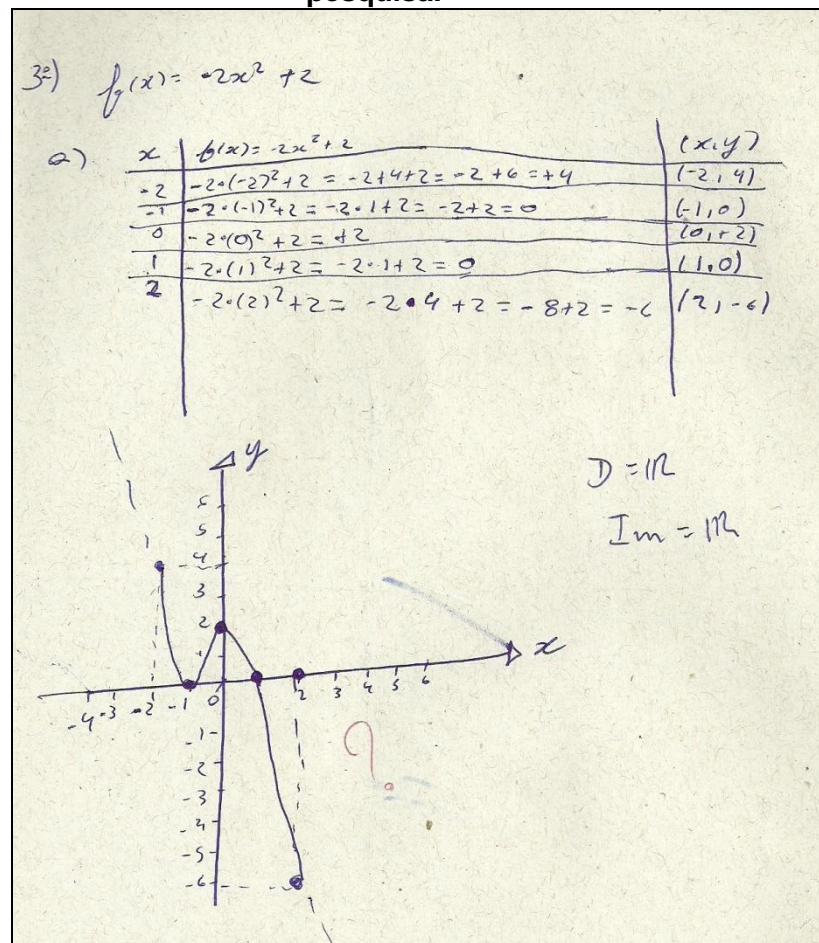
Lembramo-nos que no dia desta atividade, após entregarem de volta o questionário, algumas alunas vieram pedir-nos desculpas por não terem respondido a todos os questionamentos. Alegaram que durante a semana tiveram

compromissos com suas escolas de origem - provavelmente atividades, trabalhos e provas -, desta forma, não tiveram tempo para estudar para a atividade que realizamos com eles.

Apesar disto, em relação aos questionamentos sobre as definições de função e conjuntos domínios, contradomínios e imagem, assim como sobre as formas de representar uma função, notamos uma melhora e tanto em comparação com o Q1.

Sobre os gráficos das funções, os alunos apresentaram mais dificuldades ao esboçarem o gráfico da função quadrática fornecida. Visto ser uma função polinomial do 2º grau incompleta, o método de esboçar seu gráfico, atribuindo valores, não propiciou uma visão correta a respeito de sua forma gráfica. Deste modo, o que era para ser uma parábola, ficou parecendo com o gráfico de uma função cúbica (Figura 23):

Figura 23: Esboço gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 2$, por uma das alunas envolvidas na pesquisa.



Fonte: Santos, 2011

Em resposta às perguntas sobre a relação existente entre os coeficientes das funções e seus gráficos, dos seis presentes um respondeu corretamente - tanto para as funções afins quanto para as quadráticas -, três responderam corretamente - apenas para as funções afins -, e dois não responderam nada.

Na quarta questão do Q2 foi dada duas funções, uma afim, e outra quadrática, e foi solicitado que esboçassem o gráfico destas funções, no mesmo plano cartesiano, a fim de responder a duas desigualdades e a uma igualdade. Apenas uma das alunas presentes fez o esboço no mesmo plano cartesiano, e, mesmo assim, não conseguiu encontrar a solução das sentenças pedidas. Os demais fizeram o esboço dos gráficos em planos diferentes e não conseguiram encontrar a relação entre eles.

As questões 5 e 6 apresentavam problemas envolvendo função afim e quadrática, respectivamente. Dois dos alunos presentes não responderam. Os demais a responderam, fazendo uso de conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Conforme descrito na seção, no mesmo dia em que foi realizada a atividade do Q2, foi apresentado aos alunos o aplicativo GeoGebra. Quebrando a linha de aulas realizadas em sala de aula, todos os alunos foram levados para uma sala que continha recursos que propiciaram a projeção - em um telão - do que era feito no programa GeoGebra.

Nenhum dos presentes conhecia este software e ficaram encantados com os recursos disponíveis no programa. A partir desse momento, perceberam que ele seria de muito proveito para o estudo de gráficos.

Foi sugerido que fizessem o download deste programa, que é gratuito, e que em casa fossem explorando todas as ferramentas que lhe foram apresentadas, bem como, as que não foram apresentadas. Acredita-se que alguns fizeram isto, pois, no encontro seguinte, quando perguntados se haviam feito isto, alguns deles responderam que sim.

4.4 Quarto encontro

No quarto encontro, apresentamos aos alunos o roteiro que desenvolvemos na intenção de proporcionar a estes, o que Brousseau (2008) caracteriza por situação adidática. Conforme explanado na primeira subseção da seção 3, este roteiro visa auxiliar nossos alunos no esboço seguro e prático das funções afim e quadrática, e na percepção da influência que os coeficientes destas funções têm com seus gráficos.

Cada aluno presente, desta vez todos os dez, recebeu um roteiro ao qual chamaram de “livrinho”. Foram dados uns 60 minutos para que os alunos analisassem o material que tinham em mãos. Pedimos que esta análise, a princípio, fosse feita apenas nas primeiras seções dos capítulos 1 e 2, destinadas ao esboço dos gráficos no papel.

Passado o tempo, interagimos e trocamos informações sobre o que eles tinham visto no roteiro. Diferente das aulas anteriores, os alunos agora teriam uma participação mais significativa, expondo suas opiniões sobre a eficácia, ou não, do roteiro que criamos. Neste caso, o contrato estabelecido no início dos encontros foi quebrado.

Considerando o passo a passo para o esboço dos gráficos, a princípio, da função afim e, logo após, da função quadrática, fizemos uso do quadro-negro para mostrar à turma a necessidade de tomar pontos específicos para isto. Por exemplo, dada uma função afim, por que só precisamos de dois pontos, em especial os pontos em que o gráfico intersecta os eixos coordenados do plano cartesiano, para traçar seu gráfico? No caso da função quadrática, por que tomar as raízes e o vértice?

A maioria dos presentes mostrou admiração pelo método exposto no roteiro e concordaram com a eficácia e a praticidade em esboçar gráficos, que, até o momento, nunca haviam lhes sido apresentado.

Além da passagem da representação algébrica para a gráfica, o roteiro prestigiou também a mudança do registro gráfico para o algébrico. Dado o gráfico,

os alunos foram estimulados a pensar como usar as informações nele fornecidas para encontrar os coeficientes das funções, uma vez que, era do conhecimento destes que se o gráfico for uma reta, a sua representação algébrica, generalizada, é $f(x) = ax + b$ e, se o gráfico for uma parábola a função será do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Depois desta interação entre o professor (nós), o aluno (todos os 10 participantes da pesquisa) e o meio (roteiro para esboço de gráficos), foi entregue para cada aluno uma folha de papel quadriculado, sendo solicitado que representasse - graficamente -, neste papel, cada uma das funções disponibilizadas nas seções 2.3 e 3.3, destinadas aos exercícios. O tratamento - cálculo das raízes e ponto de intersecção com o eixo das ordenadas – poderia ser feito no verso do papel quadriculado fornecido ou em qualquer outro papel.

O roteiro apresenta uma tabela que contém os pontos que poderiam ser utilizados para o esboço dos gráficos em questão, porém, de forma genérica (Figuras 16 e 19). Cabia ao aluno decidir se efetuaria os cálculos ou, apenas, se substituiria os coeficientes. Desta forma, fez-se uso de três representações semióticas das funções: algébrica, tabular e gráfica.

Andando-se pela sala de aula para verificar como os alunos estavam trabalhando, constatou-se que as sugestões estavam sendo usadas, e com êxito. Mas surgiu uma dificuldade, quanto à função afim $y = 7x$. Como o termo independente é nulo, alguns alunos perceberam que os dois pontos que intersectam os eixos coordenados tinham coordenadas nulas. Sendo assim, quais seriam os dois pontos através dos quais passaria a reta que representa a função $y = 7x$?

Raciocinando com estes alunos, os fizemos perceber que a origem do plano cartesiano é um dos pontos desta função. Sendo assim, eles precisariam somente de mais um ponto, ponto este que pode ser obtido atribuindo um valor qualquer, para a variável x .

Este acontecimento nos lembra de um dos efeitos do contrato didático, que é o efeito Topaze. Porém, na totalidade do acontecido, os alunos compreenderam o que deveria ser feito na busca de um novo ponto pertencente à função, de modo que, o sentido do que se pretendia ensinar não ficou perdido completamente.

Ao finalizar este quarto encontro, houve uma aluna que se aproximou de nós para comentar que gostou do roteiro, que o achou prático, afirmando que, naquele dia, havia aprendido algo novo, algo que será de bastante proveito na sua vida escolar.

Diante deste fato, percebemos a relação entre a *semiósisis* e *noésisis* de Duval (2009). A compreensão da construção gráfica das funções consideradas possibilitou, e até aprimorou, a conceitualização dessas funções.

4.5 Quinto encontro

De posse do roteiro, que havia sido distribuído na aula anterior, os alunos saíram de aulas ministradas em uma sala de aula normal, para um laboratório de informática. Estando cada aluno em um computador, o qual já estava com o GeoGebra instalado no seu sistema, foram orientados pelo roteiro escrito e, auxiliados por nós, a representar graficamente as mesmas funções fornecidas nas subseções 2.3 e 3.3. Os passos detalhados para este esboço no GeoGebra estavam disponíveis na subseção 2.2, para a função afim, e 3.2 para a função quadrática.

No caso da função afim, o esboço, no GeoGebra, foi feito fazendo uso das coordenadas da função considerada. Para fazer o esboço da próxima função afim, apresentamos um recurso no programa que possibilita a variação dos coeficientes da função, sem que seja necessário refazer todo o processo. Desta forma, cada função ia sendo adquirida, à medida que se faziam as mudanças, convenientes, dos coeficientes da função.

Para verificar se os esboços feitos no papel realmente estavam corretos, os alunos fizeram comparações com os que estavam sendo esboçados no computador. Desta forma, cada um, por si só, tirava suas dúvidas e conclusões, a respeito da representação gráfica das funções consideradas.

Algo que o uso do GeoGebra possibilitou foi a percepção das modificações gráficas, que acontecem, na medida em que variam os coeficientes das funções. Isto não é tão simples de verificar quando o esboço é feito no papel, visto que, seria

necessário fazer diversos gráficos para enxergar a variação das coordenadas e a influencia disto na aparência do gráfico.

Por exemplo, considerando a função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, para perceber o que modifica no gráfico, quando fixamos o coeficiente de x (vamos tomar $a = 2$, por exemplo) e variamos apenas o termo independente, teríamos que construir um gráfico para cada tipo de função: uma para $f(x) = 2x + 1$, outro para $f(x) = 2x + 2$, outro para $f(x) = 2x + 3$ e assim por diante. Esta é uma atividade exaustiva para se fazer no papel, mas que, com o GeoGebra, torna-se uma tarefa fácil.

A mudança de registro no caso contrário, ou seja, dado o gráfico encontrar a função que o define, também foi considerada. Visto que, esboçado o gráfico da função afim ou quadrática no GeoGebra é possível mudar os coeficientes, até encontrar a função que desejamos. Deste modo, o aluno pôde perceber que, na Janela Algébrica do programa, a expressão que fornece o gráfico fica visível. Assim, ele percebe que não tem segredos e não é necessário resolver sistemas, com o objetivo de encontrar os coeficientes.

Mais uma vez vale ressaltar que o objetivo deste roteiro não foi o de omitir conhecimentos importantíssimos que devem ser passados para o aluno, tais como, o esboço de gráficos mediante uma ligação de pontos, obtidos e organizados em uma tabela e nos diversos métodos utilizados para se resolver sistemas de equações.

Notamos que esta situação didática possibilitou a quebra de um contrato implícito que, desde o primeiro encontro, havia sido estabelecido e que esta ruptura proporcionou um aprendizado considerável. Este crescimento refere-se ao esboço eficaz dos gráficos das funções polinomiais do 1º e 2º grau e à percepção da influência dos valores do coeficiente destas funções, com seus gráficos.

4.6 Sexto encontro

A eficiência da intervenção didática ficou clara, ao se analisar os resultados do questionário Q3. Este último questionário abrangeu questões mais específicas,

desde o esboço de gráficos de funções afins e funções quadráticas, a relação coeficientes com a posição do gráfico no plano cartesiano.

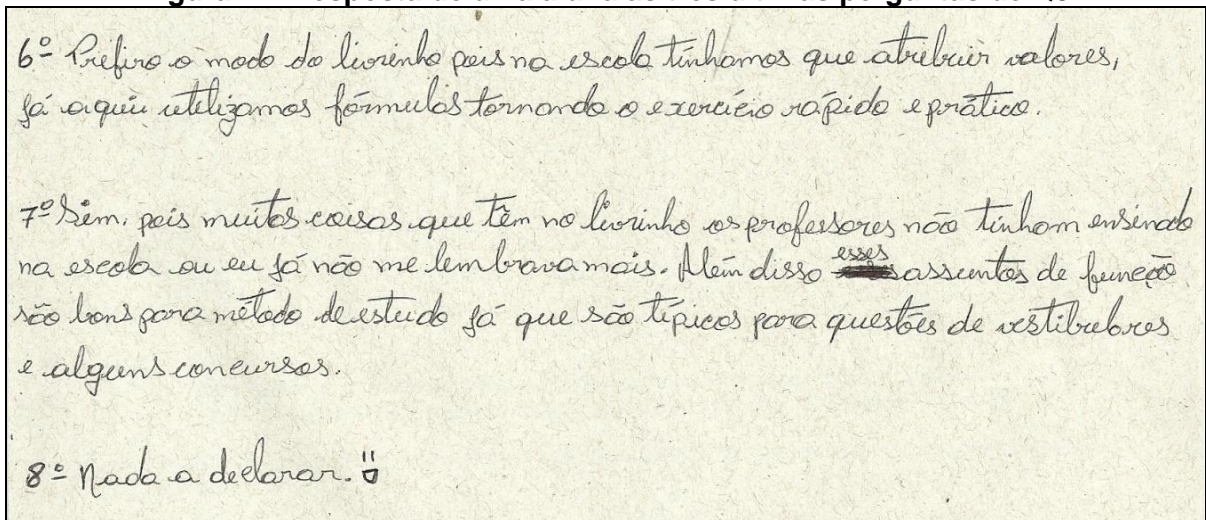
Dos dez alunos participantes, seis fizeram o esboço de gráficos, seguindo as instruções do roteiro; quatro fizeram uso do método de atribuir diversos valores para a variável x e ligar pontos, no plano cartesiano; e um não respondeu a nenhum dos questionamentos.

Observou-se que três alunos apresentaram dificuldades ao esboçar os gráficos das funções quadráticas. Esta dificuldade também foi observada ao responderem Q1 e Q2, mas em uma escala bem maior.

Neste momento, os alunos não disponibilizavam de computador, só do papel e lápis, e, na questão em que, dado o gráfico é solicitada a função que o define, os cálculos para encontrar os coeficientes das funções afim e quadrática foram feitos com base em seus conhecimentos. Alguns desses cálculos foram revisados durante nossos encontros, principalmente, nos que trabalhamos a resolução de sistemas de equações com duas incógnitas (para função afim) e com três incógnitas (função quadrática). Detectamos que alguns tiveram dificuldades nos casos em que a função quadrática aparecia.

Sobre as três últimas perguntas de Q3, iremos destacar o comentário de uma aluna, que representa a opinião geral dos dez participantes (Figura 24):

Figura 24: Resposta de uma aluna as três últimas perguntas de Q3



Sendo assim, durante os seis encontros (aulas expositivas, utilização do roteiro, aulas no laboratório e a aplicação dos questionários) foram trabalhados os dois tipos de transformações consideradas por Durval (2009): a conversão e o tratamento.

A conversão mostrou-se presente nos momentos em que ocorriam as mudanças de representação, das funções consideradas. Em todos os momentos, foi trabalhada a mudança entre as representações algébricas, tabulares e gráficas, tanto no sentido *algébrico – tabular – gráfico*, quanto no sentido *gráfico – tabular – algébrico*.

Os tratamentos mostraram-se presentes durante as resoluções de equações do 1º e do 2º grau, para encontrar os valores de intersecção aos eixos coordenados e, no caso da função quadrática os cálculos das coordenadas do vértice. Este tratamento deu-se no interior da representação algébrica das funções. Ainda houve tratamento para a representação gráfica das funções polinomiais do 1º e 2º graus, quando se estava fazendo uso do *software* GeoGebra.

Sabemos que muitas outras coisas poderiam ter sido feitas para o sucesso total da nossa intervenção de ensino com este grupo de alunos. Mas, de modo geral, o nosso objetivo foi atingido. Transformando em porcentagens os erros e acertos nos três questionários, podemos representar os resultados na tabela abaixo:

Tabela 9: Avanço das habilidades

Alunos	Q1	Q2	Q3
A1	72 %	75 %	79 %
A2	55 %	56 %	71 %
A3	50 %	72 %	78 %
A4	50 %	Faltou	68 %
A5	13 %	Faltou	50 %
A6	21 %	40 %	44 %
A7	33 %	42 %	56 %
A8	30 %	Faltou	75 %
A9	36 %	44 %	50 %
A10	19 %	Faltou	Não respondeu

Fonte: Santos, 2012

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que nos motivou a abordar o tema considerado nesta pesquisa foi às observações realizadas durante a nossa prática docente no Ensino Superior. Grande parte dos alunos que ingressam no curso superior de Licenciatura em Matemática e de Química apresenta grande deficiência em assuntos relacionados com funções matemáticas e seus gráficos. Isto nos levou a considerar que um trabalho mais minucioso deveria ser feito com os alunos da disciplina de Matemática do Ensino Médio, já que, tópicos sobre funções são considerados com mais detalhes no 1º ano do Ensino Médio (funções, funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica) e no início do 2º ano (função trigonométrica).

Analisando alguns trabalhos na área de Ensino de Matemática (Ver a subseção 1.4), fica mais evidente a necessidade de considerar o estudo sobre funções e gráficos, na tentativa de formular meios e métodos que proporcionem um aprendizado significativo, por parte dos alunos.

Desta forma, nosso trabalho deteve-se nas funções afins e nas funções quadráticas, destacando as suas representações algébricas, tabulares e gráficas. Guiados pela teoria das situações didática de Guy Brousseau e fazendo uso de alguns pressupostos da teoria de representações semiótica de Raymond Duval, foi desenvolvida uma intervenção de ensino que se compunha de aulas tradicionais expositivas, questionários e um roteiro prático para o esboço de gráficos, tanto no papel quanto no computador.

Fazendo uso desta intervenção de ensino, nosso objetivo foi responder às seguintes questões:

- a) O roteiro impresso contribuirá para que o aluno perceba que é possível esboçar os gráficos das funções afins e quadráticas sem precisar recorrer a tabelas, com inúmeros valores?
- b) Auxiliado pelo que foi apresentado no roteiro, em especial sob as orientações para o traçado gráfico - fazendo uso do GeoGebra -, o aluno foi capaz de perceber o que os coeficientes de cada uma das funções consideradas indicaram, sobre seu gráfico?

Para responder às perguntas acima, contamos com a participação de um grupo composto por 10 estudantes de escolas públicas que participavam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior (PIBIC-JR).

Ao serem realizados os seis encontros, observou-se que o contrato implicitamente estabelecido entre alunos e professor é do tipo em que o professor fala, e os alunos escutam. Houve tentativas de se quebrar este contrato quando - vez por outra - o professor fazia questionamentos, mas a turma ficava com receio de responder. Não se sabe o motivo, mas tudo indica, que era pelo fato do professor em questão não ser o mesmo a que os alunos estavam acostumados.

Ainda, antes de se iniciarem as aulas do primeiro encontro, os alunos responderam a um questionário, ao qual chamamos de Q1. No terceiro encontro, outro questionário foi aplicado, o Q2. A intenção era comparar este questionário e ver até que ponto os alunos avançaram, em relação aos estudos das funções afins e quadráticas e seus gráficos. Notamos que houve um considerável avanço, mas no que se refere à percepção da alteração que sofre o gráfico das funções consideradas - quando se modifica seus coeficientes - ainda ficou a desejar.

Problemas envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º grau também foram contemplados nestes questionários. Notou-se que ao responder o Q1, os alunos tiveram uma preocupação maior, de resolver todos os itens. O mesmo não aconteceu no Q2, o que dificultou a análise, que daria um resultado sobre, se houve, quanto houve, ou se não houve, aprimoramento.

Nos três últimos encontros houve a intervenção de ensino, mediada pelo roteiro, para esboço de gráficos. Estas considerações são feitas inicialmente para o traçado de gráficos no papel. Depois, as mesmas considerações foram utilizadas em um programa de geometria dinâmica para construções de gráficos e figuras geométricas, o GeoGebra.

Este aplicativo possibilitou ao grupo a confirmação dos gráficos anteriormente esboçados e a percepção da influência dos coeficientes das funções sobre seus gráficos. Questões sugeridas no roteiro em que dado o gráfico para que se encontre

a função que o define também foram facilmente resolvidas com o auxílio do GeoGebra.

Notamos que a substituição de um contrato didático tradicionalista por um novo contrato - que propicia a participação dos alunos e a interação entre eles, o professor e o meio colaborou – levou a alcançar resultados positivos de quase tudo o que se propunha ensinar: esboço de gráficos e a relação dos coeficientes de cada função com sua forma gráfica. Os alunos saíram de um meio que tinha como instrumentos o quadro e giz, para um meio informatizado.

Os resultados da eficiência do roteiro foram comprovados com a aplicação de um terceiro, e último, questionário (Q3). Desta vez, houve precisão na construção da reta (representação gráfica da função afim), da parábola (representação gráfica da função quadrática) e na determinação de seus conjuntos imagens, algo que em atividades anteriores deixaram a desejar. Situações que se pedia o contrário, dado o gráfico determinar a função, também foram plenamente resolvidas, e os comentários sobre a influência dos coeficientes de cada tipo de função, satisfatórios.

Desta forma, chegou-se à conclusão de que as duas perguntas, às quais pretendíamos responder, através desta pesquisa, obtiveram respostas positivas. Isto comprova que o entendimento sobre as representações gráficas de funções reais pode ser feito, tanto no papel, apesar de mais dificultosa, quanto aquela que é realizada no computador.

Algo que não foi abordado nesta pesquisa, mas que poderia ser considerado por futuros pesquisadores, é a questão de resolver equações e sistemas de equações, fazendo uso de um software de geometria dinâmica, como por exemplo, o GeoGebra. Roteiros podem ser desenvolvidos para este fim.

Assim, espera-se que este trabalho contribua na área de Ensino de Matemática, no que se refere ao esboço de gráficos de funções afins e quadráticas e na compreensão da relação existente, entre os coeficientes das funções afins e quadráticas com suas posições gráficas, desde a etapa final do Ensino Fundamental até o nível médio.

REFERÊNCIAS

AUGUSTO, C. R. **Aprendizagem de função afim: Uma intervenção de ensino com auxílio do software Graphmatica**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC, São Paulo, 2008.

ARAÚJO, E. **A concepção de um software de matemática para auxiliar na aprendizagem dos alunos da primeira serie do ensino médio no estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC, São Paulo, 2005.

BRAGA, C. **Função** – A alma do Ensino da Matemática. Fapesp. 1ª ed. São Paulo: Editora Annablume, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didática** – Conteúdos e métodos de ensino. Apresentação Silva, B.A.. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Função**. Ponta Grossa: Ed. UEPG, 2006.

CRUZ, C.C. **A Teoria Cognitiva de Ausubel**. Arquivo disponível no portal de recursos para estudantes no site http://www.robertexto.com/archivo3/a_teorias_ausubel.htm. Acessado em 13/05/2011.

DAMM, R. F. Registro de Representação. . In: Machado, S.D.A. (Org). **Educação Matemática – Um (nova) Introdução**. 3ª Ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010. p. 167-188.

DORIGO, M. **Função Quadrática**: um estudo sobre as representações gráficas. Monografia de Especialização em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2006.

DORNELAS, J. J. B. **Análise de uma Seqüência Didática para a Aprendizagem do Conceito de Função Afim**. Dissertação de Mestrado, Recife, 2007.

DUVAL, R. **Semiósis e o Pensamento Humano** – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Traduzido por Farias & Mendes, C.A. & I.A.. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In: Machado, S.D.A. (Org). **Educação Matemática – Um (nova) Introdução**. 3ª Ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-111.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. **Matemática** – aula por aula. Volume Único. São Paulo: FTD S.A, 2000.

IEZZI, G., MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar: conjuntos e funções**. São Paulo: Atual Editora, 1977. v.1.

LONGEN, A. **Matemática: Uma atividade humana**. Ensino Médio. Volume 1. 1ª ed. Curitiba: Base Editora, 2003.

MACHADO, S. D. A. (org). **Educação matemática – Uma nova introdução**. São Paulo: Editora da PUC, 2008.

MAGGIO D. P.; SOARES, M. A. S. **Registro de representação semiótica e função afim: análise de livros didáticos de matemática do ensino médio**. Comunicação científica apresentada no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí/RS, 2009.

MAIA, D. **Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma Abordagem Computacional**. Dissertação de Mestrado, PUC/SP. São Paulo, 2007.

MERCADO, L. P. L.(Org.). **A informática e os Problemas Escolares de Aprendizagem**. Maceió: DP&A, 2001.

MOREIRA, M. A. **Comportamentalismo, Construtivismo e Humanismo**. Coletânea de breves monografias sobre teorias de aprendizagem como subsídio para o professor pesquisador, particularmente da área de ciências. 1ª Ed. Porto Alegre, Brasil, 2009.

MORETTI, M. T. **A transformação como recursos no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais**. Capítulo do livro Aprendizagem em Matemática – Registros de Representação Semiótica. Machado, S.D.A. (Org.). Campinas: Papyrus, 2003.

NETO, J. R. D. **Registros de Representação Semiótica e o GeoGebra: Um ensaio para o ensino de funções trigonométricas**. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópolis, 2010.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades na Construção de Gráficos de Funções**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, UFRGN, Natal, 2006.

PELIZZARI, A. ET AL. **Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel**. Artigo publicado na revista PEC, Curitiba, n.1, p.37-42, jul. 2001-jul. 2002. v.2.

POMMER, W. M. **Brousseau e a idéia de Situação Didática**. Artigo apresentado no SEMA (Semana de Ensino de Matemática), FEUSP, 2º Semestre, 2008.

SANTOS, V. D. G. ET AL. **Apostila do Cursinho Comunitário Conexões de Sabees: Matemática**. Maceió, 2004. v.1.

SCANO, F. C. **Função Afim: uma seqüência didática envolvendo atividades com o GeoGebra**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC, São Paulo, 2009.

- SILVA, B. A. Contrato Didático. In: Machado, S.D.A. (Org). **Educação Matemática – Um (nova) Introdução**. 3ª Ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010. p. 50-75.
- SILVA, J. R. D. **Um estudo de registros de representação semiótica na aprendizagem dos conceitos de máximos e mínimos de funções**. Dissertação de Mestrado em Educação, UFMGS, Campo Grande/MG, 2005.
- SOUZA, R. N. S.; CORDEIRO, M. H. **A contribuição da Engenharia-Didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica**. Artigo apresentado no Educere – São Paulo: PUC, 2005.
- TERTO, L. L. **Funções Quadráticas nos Livros Didáticos sob a Ótica da Resolução de Problemas**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, UCR, São Paulo, 2008.
- TINOCO, L. A. A. (Coordenadora). **Construindo o Conceito de Função**. Instituto de Matemática – UFRJ; Projeto função; 2009.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO (UFRJ). Instituto de Matemática. **Construindo o Conceito de Função** - Projeto função. Rio de Janeiro, 2009.
- VALÉRIO, M. **Teoria de Ausubel**. Artigo preparado para obtenção de nota na disciplina Aprendizagem e Ensino, Instituto de Psicologia, Brasília: UnB, 1999.
- VIVIERO, T. C. N. G.; CORRÊA, M. L. P. **Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática**. Ensino Médio. Editora Rideel, 1ª edição. São Paulo, 1999.

APÊNDICES

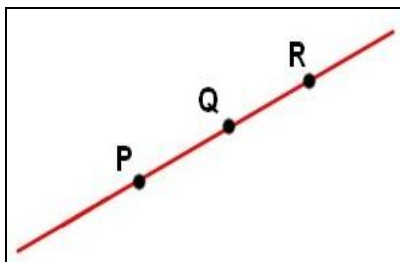
APÊNDICE A – FUNÇÃO AFIM

1 O Gráfico da Função Afim é uma Reta

O fato do gráfico de uma função afim ser uma reta fica algebricamente demonstrado quando tomamos três pontos distintos pertencentes a esta função e verificamos que estão alinhados.

Tomando como referência a figura abaixo, temos que os pontos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$ pertencentes ao gráfico da função $f(x) = ax + b$ estarão alinhados se, e somente se, $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$.

Figura 25: Três pontos sobre a reta $y = ax + b$



Fonte: Santos, 2012

$$\begin{aligned}
 d(P, R) &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + [ax_1 - b - (ax_3 - b)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (ax_1 - ax_3)^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + a^2(x_1 - x_3)^2} \\
 &= \sqrt{(a^2 + 1)(x_1 - x_3)^2} = (x_1 - x_3)\sqrt{a^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Com cálculos semelhantes encontramos

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = (x_1 - x_2)\sqrt{a^2 + 1}$$

e

$$d(Q, R) = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = (x_2 - x_3)\sqrt{a^2 + 1}.$$

Logo,

$$d(P, Q) + d(Q, R) = (x_1 - x_2)\sqrt{a^2 + 1} + (x_2 - x_3)\sqrt{a^2 + 1}$$

$$= (x_1 - x_3)\sqrt{a^2 + 1} = d(P, R).$$

Portando, temos que os pontos P, Q e R são colineares.

2 Condição Para Crescimento e Decrescimento

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita *crescente* quando

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

A mesma função é *decrescente* se

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

Sendo assim, vamos analisar as condições para que uma função real do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, seja crescente ou decrescente.

- **Crescente:** Considere $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ tais que $x_1 > x_2$. Segue-se com isto que $x_1 - x_2 > 0$.

Resolvendo a desigualdade $f(x_1) > f(x_2)$, temos

$$f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow ax_1 + b - (ax_2 + b) > 0 \Leftrightarrow ax_1 + b - ax_2 - b > 0 \Leftrightarrow$$

$$ax_1 - ax_2 > 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) > 0.$$

Visto que $x_1 - x_2 > 0$, a única possibilidade do produto $a(x_1 - x_2)$ ser positivo é o coeficiente a ter o mesmo sinal de $x_1 - x_2$, ou seja, $a > 0$.

Portanto, a função afim é crescente se, e somente se, $a > 0$.

- **Decrescente:** Nas mesmas condições para x_1 e x_2 do caso anterior,

temos que

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow ax_1 + b - (ax_2 + b) < 0 \Leftrightarrow ax_1 + b - ax_2 - b < 0 \Leftrightarrow$$

$$ax_1 - ax_2 < 0 \Leftrightarrow a(x_1 - x_2) < 0 .$$

Visto que $x_1 - x_2 > 0$, a única possibilidade do produto $a(x_1 - x_2)$ ser negativo é o coeficiente a ter sinal contrário ao de $x_1 - x_2$, ou seja, $a < 0$.

Portanto, a função afim é crescente se, e somente se, $a < 0$.

APÊNDICE B – FUNÇÃO QUADRÁTICA

1 Forma Canônica

A forma canônica da função quadrática é outra maneira de escrever a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$. Esta representação é de ajuda prática para o cálculo das raízes da função do 2º grau e do vértice da parábola.

Dada a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, a primeira coisa a fazer é colocar o coeficiente de x^2 em evidência:

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Feito isto, somamos e subtraímos um termo y^2 de tal forma que

$$2yx = \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \frac{b}{2a} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Logo,

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

Fatorando as três primeiras parcelas que, segundo a soma que fizemos, é um quadrado perfeito.

$$f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

Somando as outras duas parcelas $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ e colocando o sinal negativo em evidência, temos que

$$f(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

A expressão a cima é a Forma Canônica da função quadrática.

2 Raízes

Para encontrar as raízes da função quadrática, faremos uso da sua forma canônica. Distribuamos a dentro dos parênteses:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante da equação do 2º grau e é representada pela letra grega Δ (delta maiúscula).

Assim, podemos também escrever a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ como:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Fazendo $f(x) = 0$, tem-se

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando, denominado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e diferentes,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Quando Δ é zero, há só uma raiz real,

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

3 Vértice

Pelo o que foi exposto, temos que o x_v é o ponto médio do segmento que une as raízes x_1 e x_2 sobre o eixo - X. Logo,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b + \sqrt{\Delta})}{2a} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

E para obtermos y_v , basta calcular $f(x_v)$. Após alguns cálculos obtemos:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Portanto, o vértice da parábola é um ponto cujas coordenadas são

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right).$$

APÊNDICE C – GEOGEBRA

GeoGebra é um programa matemático desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarte, que possibilita fazer construções geométricas (pontos, vetores, segmentos, retas, polígonos e outros) de modo “aleatório” e até mesmo daquelas que exigem a precisão de régua e compasso. Além disso, este software permite a visualização de gráficos de funções a partir de expressões algébricas.

Sendo o GeoGebra é um programa gratuito, ele pode ser instalado em qualquer computador, sem complicações. Pode ser adquirido no site oficial do GeoGebra (<http://www.geogebra.org/cms>) e distribuído e transmitido a outros para fins não comerciais.

Além do programa completo para instalar em sua máquina, o site ainda disponibiliza, gratuitamente, uma versão portátil que pode ser usada em computadores que não possuem permissão para que qualquer pessoa instale programas, o que normalmente ocorre em computadores de Lan-houses ou computadores de laboratórios escolares. Para usar a versão portátil, basta salvá-la em um diretório qualquer e dar um duplo clique no programa que ele abrirá pronto para o uso.

Caso o leitor não queira ou não possa baixar nenhuma dessas versões, se tiver um computador com Internet, ele, ainda, poderá utilizar a versão on-line bastando acessar o link: <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>.

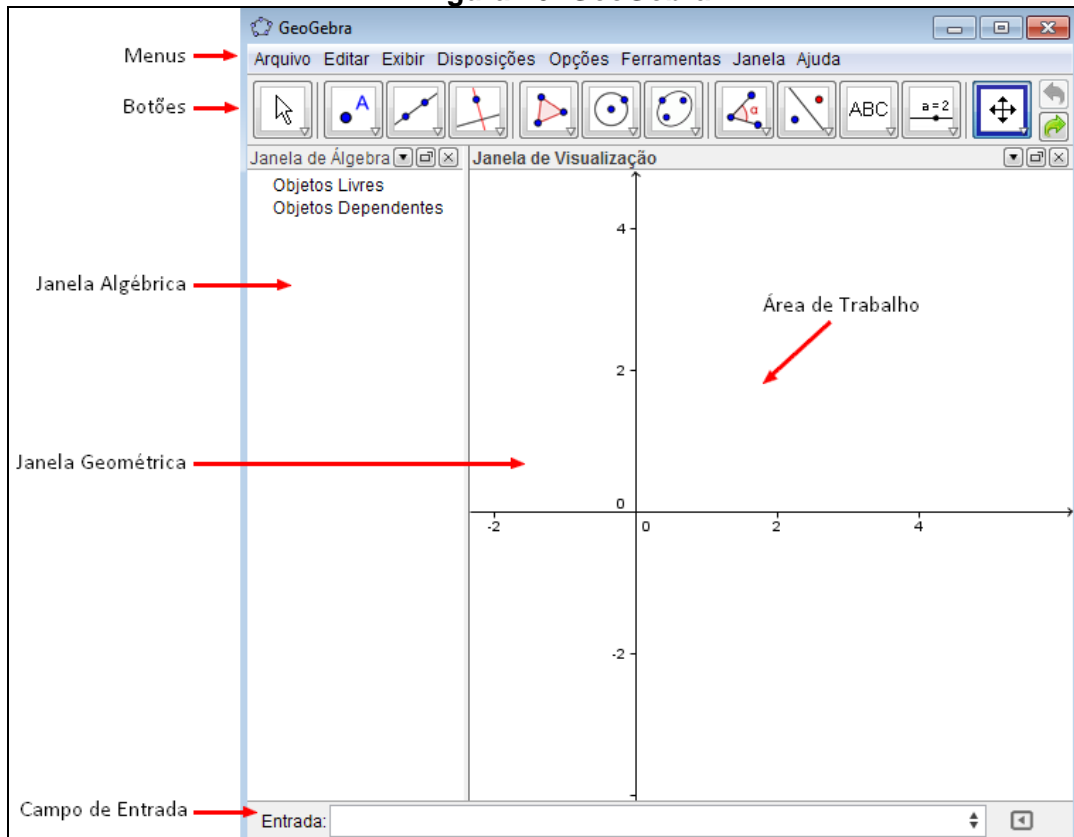
O site oficial do GeoGebra disponibiliza também um material de estudos que ensina o passo a passo para as manipulações no programa no link: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

1 Ferramentas Básicas

Ao iniciar o programa é mostrada a interface do GeoGebra que é composta por uma barra de ferramentas, uma janela de álgebra e uma janela geométrica.

Na barra de ferramentas se encontra os menu: *Arquivo*, *Editar*, *Exibir*, *Opções*, *Ferramentas*, *Janela* e *Ajuda*, além de um conjunto de botões que compõem as ferramentas básicas para o trabalho no software.

Figura 26: GeoGebra



Fonte: Santos, 2012

2 Botões e menus



Mover - Esta ferramenta nos permite arrastar e selecionar objetos. Esta é a ferramenta mais utilizada nesta interface.



Novo ponto - Cria um novo ponto ao ser selecionado e clicado na área de trabalho (janela de visualização) ou sobre objetos (retas ou curvas) e interseções.



Retas definida por dois pontos - Cria uma reta passando por dois pontos. Para isto, basta clicar sucessivamente sobre os pontos desejados.



Reta perpendicular - Cria uma reta perpendicular à outra reta já existente na área de trabalho. Para isto, clica-se na área livre da área de trabalho e depois sobre q reta a qual deseja o perpendicularismo.



Polígono - Cria polígonos com a quantidade de lados que desejar. Ao selecionar esta ferramenta, fazem-se ligações sucessivas entre seus vértices lembrando-se que o polígono se fecha ao clicar sobre o primeiro vértice.



Círculo definido pelo centro e um de seus pontos - Cria um círculo com centro e raio que desejar. O primeiro clique marca o centro e o próximo será um ponto do círculo que define a medida de seu raio.



Elipse - Com esta ferramenta você poderá construir uma elipse selecionada a princípio seus focos e depois um ponto pertencente ao seu traço.



Ângulo - Identifica a ângulo formado entre duas retas ou semi-retas. Ou, pode-se construir um ângulo através de três pontos distintos onde o primeiro é o início do ângulo a ser medido, o segundo ponto será o vértice do ângulo e o terceiro ponto indicará o valor do ângulo.



Reflexão em relação a uma reta - Reflete um ponto ou um objeto sobre uma reta. Para tanto, clique sobre o objeto desejado e logo após, a reta sobre a qual deseja a reflexão.



Seletor - Cria-se um segmento com um ponto que se movimenta sobre ele. Geralmente este ponto serve de parâmetro para coeficiente de funções matemáticas.



Deslocar eixos - Desloca a área de trabalho ou os eixos coordenados, auxiliando assim na visualização de objetos na janela geométrica.

Os menus do GeoGebra seguem a mesma lógica de padrão de programas já bem conhecidos, como o Word, por exemplo. Clicando na opção AJUDA disponível no menu *Ajuda*, você abrirá uma página com instruções, exemplos e dicas do GeoGebra.

No GeoGebra, assim como em vários outros programas, um clique do botão direito na área de trabalho abre uma pequena janela de configuração. Esta janela, denominada *Janela de Visualização*, mostra as seguintes opções:

Figura 27: Janela de Visualização



Fonte: Santos, 2011

Opcões

Eixo: Esconde ou mostra os eixos coordenados.

Malha: Esconde ou mostra uma grade (quadriculado) no sistema cartesiano.

Zoom: Aumenta ou diminui o zoom da tela, em porcentagem.

Eixo X: Eixo Y: Muda a escala dos eixos.

Exibir todos os Objetos: mostra todos os objetos que estavam invisíveis.

Visualização padrão: O sistema de eixo volta para a escala inicial.

Janela de Visualização: Modifica as propriedades da janela de visualização.

2 Janela Geométrica e Janela de Álgebra

O GeoGebra é composto de duas partes principais denominadas, respectivamente, *Janela Geométrica* e *Janela de Álgebra*.

A Janela Geométrica, também chamada de *Janela de Visualização* ou *Área de Trabalho*, é a região onde são visualizados os objetos construídos, por exemplo: pontos, retas, gráficos de funções, circunferências, etc.

Na Janela de Álgebra são mostradas informações algébricas dos objetos que estão na janela de visualização. Clicando com o botão direito do mouse sobre um objeto qualquer ilustrado na *Janela de Álgebra* é possível visualizar e ditar propriedades.

Caso seja interesse, a *Janela de Álgebra* ainda pode ser ocultada, clicando no menu *Exibir*, localizado na barra de menu, e marcando ou desmarcando a opção *Janela de Álgebra*. Além disso, ela pode ser posicionada à esquerda na vertical ou abaixo horizontal, clicando no menu *Exibir* e selecionando *Divisão Horizontal*.

Um item de entrada muito importante, além da *Janela Geométrica*, é a *Caixa de Entrada*, onde é possível digitar as expressões.

3 Operações e Funções Definidas no GeoGebra

O interpretador de funções deste programa foi projetado para reconhecer a maior parte das operações e funções elementares. Essas operações e funções são introduzidas pelo usuário por meio da caixa de entrada. A seguir apresentamos referências a operações e funções para o GeoGebra:

Tabela 10: Operações Elementares

Operações Elementares		
GeoGebra	Descrição	Expr. Matemática
a+b	Soma entre os valores de a e b	$a + b$
a-b	Diferença entre os valores de a e b	$a - b$
a*b	Multiplicação entre os valores de a e b	$a \cdot b$
a/b	Divisão entre os valores de a e b	$a : b$
a^b	Potência de a elevado a b	a^b

Fonte: Apostila do Novos talentos – UFAL

Tabela 11: Constante

Constante		
GeoGebra	Descrição	Expr. Matemática
pi	Valor 3,141592654...	π
e	Valor 2,718281828...	e

Fonte: Apostila do Novos talentos – UFAL

Tabela 12: Funções Elementares

Funções Elementares		
GeoGebra	Descrição	Expr. Matemática
abs(x)	Valor absoluto de x	$ x $
sqrt(x)	Raiz de x	\sqrt{x}
ln(x)	Logaritmo natural de x	$\ln x$
log(x)	Logaritmo na base 10 de x	$\log x$
sin(x)	Seno de x	$\sin x$
cos(x)	Cosseno de x	$\cos x$
Tan(x)	Tangente de x	$\tan x$

Fonte: Apostila do Novos talentos – UFAL

Mais operações, funções e comandos matemáticos do GeoGebra podem ser obtidos nas caixas localizadas do lado direito da caixa de entrada.

Figura 28: Constantes



Fonte: Apostila do Novos talentos – UFAL

ANEXOS**ANEXO A – Q1**

Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGE CIM
Instituto de Matemática – IM

DADOS PESSOAIS

1. Nome: _____
2. Idade: _____

DADOS EDUCACIONAIS

1. Nome da Escola: _____
2. Que série você faz: _____
3. Já repetiu o ano alguma vez? _____
4. Se sim, diga que série e quantas vezes? _____
5. Qual a disciplina que você sente mais dificuldades em aprender e por quê?

COM BASE NOS SEUS CONHECIMENTOS ESCOLARES, RESPONDA:

1. Explique com suas palavras:
 - a) O que você entende por função? Dê exemplos.

b) O que você entende por domínio, contradomínio e imagem de uma função? Exemplifique cada conceito.

c) Quais são as formas de se representar uma função?

2. Sobre o gráfico da função $f(x) = 3x + 1$, responda:

a) O seu gráfico é uma linha curva ou uma reta?

b) Faça um esboço deste gráfico e determine seus conjuntos domínio e imagem.

c) A função dada assume valor máximo (maior que todos) ou valor mínimo (menos que todos)?

d) A função é crescente ou decrescente. Justifique sua resposta.

3. Sobre o gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$, responda:

a) O seu gráfico é uma linha curva ou uma reta?

b) Faça um esboço deste gráfico e determine seus conjuntos domínio e imagem.

c) A função dada assume valor máximo (maior que todos) ou valor mínimo (menor que todos)?

d) A função é crescente ou decrescente. Justifique sua resposta.

4. A academia "Fique em Forma" cobra uma taxa de inscrição de R\$ 80,00 e uma mensalidade de R\$ 50,00. A academia "Corpo e Saúde" cobra uma taxa de inscrição de R\$ 60,00 e uma mensalidade de R\$ 55,00.

a) Determine as expressões algébricas das funções que representam os gastos acumulados em relação aos meses de aula, em cada academia.

b) Qual academia oferece menor custo para uma pessoa que pretende "malhar" durante um ano? Justifique, explicitando seu raciocínio.

5. Imagine que a trajetória de uma pedra lançada ao ar seja um trecho de parábola dada por: $y = -5x^2 + 20x$, com x e y em metros. Pede-se:

a) O gráfico que descreve a trajetória da pedra.

b) A altura máxima atingida pela pedra.

c) O deslocamento horizontal da pedra quando ela estiver a altura de 10 m?

ANEXO B – Q2

Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGEICIM
Instituto de Matemática – IM

Nome: _____

VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

1. Explique:
 - a) O que você entende por função? Dê exemplos.
 - b) O que você entende por domínio, contradomínio e imagem de uma função? Exemplifique cada conceito.
 - c) Quais são as formas de se representar uma função?

2. Dada a função $f(x) = 5x - 2$, determine o que se pede:
 - a) Seu gráfico e os conjuntos domínio e imagem.
 - b) Esta função é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.
 - c) Qual é a condição para que uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, seja crescente ou decrescente?
 - d) Dada uma função do tipo $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) em que pontos seu gráfico corta os eixos coordenados, isto é, o eixo - OX e o eixo - OY?

3. Dada a função $f(x) = -2x^2 + 2$, determine o que se pede:
 - a) Seu gráfico e os conjuntos domínio e imagem.
 - b) Esta função assume um valor máximo (maior que todos) ou um valor mínimo (menor que todos)?
 - c) Identifique (obtenha) o vértice $V = (X_v, Y_v)$ e o eixo de simetria da parábola representada por $y=f(x)$.
 - d) Para uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) qual o significado gráfico do coeficiente do termo que carrega x^2 ? E do termo independente c ?

- e) Dada uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), seu gráfico sempre intersecta (corta) os eixos coordenados, isto é, os eixos OX e OY? Justifique sua resposta.
- f) Quando intersecta (corta) o eixo OX qual o significado disto, o que representa o(s) valor(es) de x ?

4. Esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ e } g(x) = -2x + 1.$$

Feito isso, determine os valores de x para os quais se tem:

- a) $f(x) < g(x)$ b) $f(x) = g(x)$ c) $f(x) > g(x)$

5. O valor de uma moto nova é de R\$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R\$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, qual é o valor dessa moto com 1 ano de uso?
6. Suponha que o consumo de um carro para percorrer 100km com velocidade de x km/h seja dado por

$$C(x) = 0,006x^2 - 0,6x + 25.$$

Para qual velocidade este consumo é mínimo?

ANEXO C – Q3

Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGEICIM
Instituto de Matemática – IM

Nome: _____

Data: ____/____/2011

VERIFICAÇÃO DE APRENDIZAGEM

1. Fazendo uso do método apresentado no roteiro prático “Esboço Gráfico – Função Afim e Quadrática”, esboce os gráficos das funções abaixo e determine o conjunto imagem de cada uma:

a) $f(x) = 3x - 9$	b) $f(x) = -5x$	c) $f(x) = -x + 5$	d) $f(x) = \frac{x}{2}$
--------------------	-----------------	--------------------	-------------------------

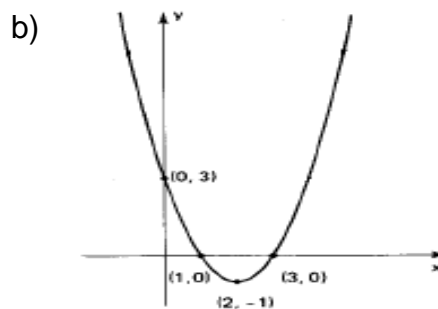
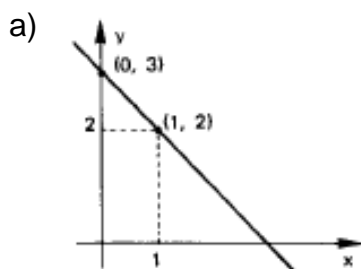
2. Levando em consideração o gráfico da função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, responda:
 - a) O que acontece com a função ao passo que variamos o seu coeficiente angular “a”?
 - b) E se variarmos o coeficiente linear “b”?

3. Fazendo uso do método apresentado no roteiro prático “Esboço Gráfico – Função Afim e Quadrática”, esboce os gráficos das funções abaixo e determine o conjunto imagem de cada uma:

a) $f(x) = x^2 - 1$	b) $f(x) = x^2 - 2x + 4$	c) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$	d) $f(x) = -2x^2$
---------------------	--------------------------	----------------------------	-------------------

4. Levando em consideração o gráfico da função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, responda:
 - a) O que acontece com esta função quando variamos o seu coeficiente “a”?
 - b) E se variarmos os coeficientes “b” e “c”?

5. Dados os gráficos abaixo, encontre as funções que os define:



6. Comparando a maneira de construção de gráficos das funções afins e quadráticas que você aprendeu na escola com a apresentada no roteiro (livrinho), qual você prefere? Por quê?
7. Acredita que o roteiro para construção de gráficos contribuiu para seu para o seu aprendizado? Por quê?
8. Sugestões e críticas que contribuam para a melhoria do roteiro para o esboço de gráficos.