



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

O Problema de Dirichlet em Domínios Limitados

Adalgisa Mendonça Mota

Maceió, Brasil
Abril de 2011

ADALGISA MENDONÇA MOTA

Problema de Dirichlet

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 15 de abril de 2011 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández.

Maceió
2011

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

M917p Mota, Adalgisa Mendonça.
O problema de Dirichlet em domínios limitados / Adalgisa Mendonça Mota.
_ 2011.
– 67 f.

Orientador: Adán José Corcho Fernández.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 67.

1. Dirichlet, problemas de. 2. Análise funcional. 3. Teoria do potencial.
I. Título.

CDU: 517.988

Problema de Dirichlet

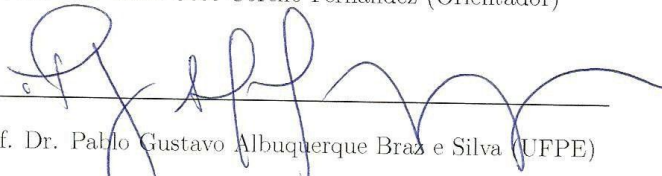
Adalgisa Mendonça Mota

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 15 de abril de 2011 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández (Orientador)



Prof. Dr. Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva (UFPE)



Prof. Dr. Julio Cesar Souza Almeida (UFAL)

A minha mãe Maria Bernadete.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me ajudado a superar vários obstáculos que surgiram neste período.

A minha mãe, Bernadete, por ter sido o meu alicerce e por ter acreditado em mim e no meu sonho. Sem a senhora essa vitória não teria o mesmo brilho.

Ao meu pai, Arnaldo, por ter me ensinado que a dignidade é uma qualidade essencial no ser humano. Obrigada pai por me guiar.

A toda minha família, irmãs, tios, primos que contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade.

Ao meu orientador, prof. Dr. Adán Corcho por ter acreditado em minha capacidade acadêmica e pelo apoio durante todo o mestrado. Além disso, gostaria de agradecer ao senhor por ser um exemplo de profissional ético.

Ao doutorando, Isnaldo Isaac, por ter sido um grande amigo e por toda sua contribuição nesse trabalho.

Ao aluno de mestrado, Adriano, por ter feito as figuras presentes neste trabalho.

Ao corpo docente da Pós-graduação em Matemática da Ufal, em especial, ao Prof. Adailson e ao Prof. Dimas pela amizade.

A todos os amigos que fiz durante esses três anos, em especial: Karla, Márcio, Isnaldo, Darlton, Adina, Rodrigo, Viviane, Adriano, Geovani, Isadora, Kennerson, Michael, Diego e Angela.

Ao meu namorado João Victor pela compreensão em entender a minha ausência em muitos momentos. Obrigada por ter acreditado em meu sonho.

A dona Maria pela amizade e pelos seus sábios conselhos.

As agências de Fomento Fundação de Amparo a Pesquisa de Alagoas ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq e a Universidade Federal de Alagoas pelos auxílios financeiros.

Resumo

Nesta dissertação usamos duas abordagens diferentes para provar a existência de soluções para o *Problema de Contorno de Dirichlet Clássico* em domínios limitados. Aplicamos o primeiro método quando estamos trabalhando com domínios cuja fronteira é duas vezes continuamente diferenciável. Essa abordagem baseia-se na Teoria dos Potenciais de Camadas Simples e Dupla, onde a teoria de operadores compactos tem um papel fundamental. O segundo método usa o Princípio Variacional de Dirichlet para resolver o problema em domínios do plano com fronteiras menos regulares que no caso anterior; a saber, fronteiras que satisfazem a condição do triângulo exterior.

Palavras-chave: Análise Funcional; Teoria do Potencial; Problema de Dirichlet

Abstract

In this work we use two approach to prove the existence of solutions for the *Classical Dirichlet Problem* on bounded domains. The first method is applied to domains with smooth boundary and is based on the Single and Double Layer Potentials Theory. The second method uses the Variational Dirichlet Principle to solve the Dirichlet Problem in plane domains with boundary less regular than the previous case; more precisely, boundary satisfying the property of the outer triangle.

Keywords: Functional Analysis; Potential Theory; Dirichlet Problem

Índice

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Espaços Funcionais	11
1.2 Elementos do Cálculo em Várias Variáveis	12
1.3 Um Pouco Sobre Funções Harmônicas	13
1.3.1 Solução Fundamental do Laplaciano	13
1.3.2 A Fórmula do Valor Médio	16
1.3.3 Funções Fracamente Harmônicas	18
1.3.4 Identidades Aproximadas	19
1.4 A Terceira Identidade de Green	21
1.5 Elementos de Análise Funcional	26
1.5.1 Alternativa de Fredholm	28
2 Teoria do Potencial	32
2.1 Operadores Integrais	33
2.2 Propriedades do Potencial de Camada Dupla	36
2.3 Potencial de Camada Simples	44
2.4 A Solução do Problema de Dirichlet Clássico	48
3 Problema de Dirichlet no Plano com bordos mais gerais.	53
3.1 O espaço vetorial das funções $C^1(\bar{\Omega})$ que se anulam no bordo	54
3.2 O Princípio de Dirichlet	57
3.3 A Solução do Problema de Dirichlet	61
Referências Bibliográficas	67

Introdução

O objetivo central deste trabalho é fazer um estudo do Problema de Dirichlet clássico em domínios limitados. O modelo matemático a ser estudado é o seguinte: deseja-se provar a existência de soluções para o problema de contorno

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta u(x) = 0 & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = f(x) & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^n cuja fronteira é denotada por $\partial\Omega$.

Este tipo de equação aparece na física, por exemplo, modelando problemas de eletrostática, onde qualquer distribuição de carga f no contorno deveria determinar um potencial elétrico como solução. Entretanto, a existência de uma solução para o Problema de Dirichlet depende de forma delicada da suavidade do contorno e dos dados prescritos.

Em algumas situações simples o Problema (1) pode ser resolvido explicitamente. Por exemplo, a solução para o problema de Dirichlet quando Ω é o disco unidade no plano $D = \{re^{2\pi i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } |r| \leq 1\}$ é dado pela fórmula integral de Poisson:

$$u(re^{2\pi i\theta}) = \int_0^1 f(t)P_r(\theta - t)dt \quad (2)$$

onde

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos 2\pi t + r^2}$$

é conhecido como *núcleo de Poisson*. No entanto, o processo de provar a existência de soluções para domínios não tão simétricos e regulares como o disco exigem um tratamento matemático mais longo e cuidadoso.

Neste trabalho usaremos duas abordagens diferentes para provar a existência de soluções de soluções para (1) em domínios limitados de \mathbb{R}^n . Primeiro assumiremos que que estamos trabalhando com domínios cuja fronteira é de classe C^2 e a técnica que será usada baseia-se na Teoria dos Potenciais de Camadas Simples e Dupla, onde a teoria de operadores compactos tem um papel fundamental. O segundo método usa o Princípio Variacional de Dirichlet para resolver o problema em domínios do plano com fronteiras menos regulares que no caso anterior; a saber, fronteiras que satisfazem a condição do triângulo exterior.

O trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1 serão apresentados resultados básicos do cálculo em várias variáveis e da Análise Funcional que darão suporte técnico às teorias que serão desenvolvidas nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 faremos um estudo do Problema de Dirichlet em domínios limitados de \mathbb{R}^n com fronteira de classe C^2 . A abordagem será realizada através da teoria do Potencial de Camada Dupla e de Camada Simples. A existência de uma solução será obtida mediante uma bela aplicação do Teorema da Alternativa de Fredholm.

Finalmente, no Capítulo 3, estudaremos o Problema de Dirichlet em domínios limitados do plano que satisfazem a *condição do triângulo exterior*. As fronteiras desse tipo de domínios possuem menos regularidade que os de classe C^2 tratados no capítulo anterior. Neste caso, a procura de uma solução solução será motivada pelo uso do *Princípio de Dirichlet*.

A elaboração deste trabalho foi realizado através de uma pesquisa bibliográfica específica, baseada nos livros que continham os resultados e parte da teoria mais relevante para a nossa finalidade. Dentre estes, destacamos ([5]) e ([10]) onde foi baseada a teoria do Potencial de Camada Dupla e de Camada Simples e a Condição do Triângulo exterior, respectivamente apresentada no texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas ferramentas básicas do cálculo em várias variáveis, da teoria das funções harmônicas e da Análise Funcional que serão necessárias para estudarmos o *Problema de Dirichlet Clássico* em domínios limitados dos espaços euclidianos.

1.1 Espaços Funcionais

Nesta seção definimos os principais espaços funcionais que serão usados ao longo do texto. Entendemos por domínio de \mathbb{R}^n um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo.

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dizemos que uma função $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ pertence ao espaço $C^k(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, \dots$, se existem um aberto V de \mathbb{R}^n , com $\bar{\Omega} \subset V$, e uma função $\tilde{f} \in C^k(V)$ tal que $f = \tilde{f}|_{\bar{\Omega}}$.*

Definição 1.2. *Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície de classe C^k , $k = 1, 2, \dots$, se para cada $p \in M$ existe $V_p \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V_p \cap M$ é o gráfico de uma função de $n - 1$ variáveis de classe C^k definida num aberto de \mathbb{R}^{n-1} .*

Proposição 1.1. *Seja M uma hipersuperfície compacta orientada de classe C^k , $k \geq 2$. Então, existe uma vizinhança \mathcal{V} de M em \mathbb{R}^n e um número $\varepsilon > 0$ tal que a função*

$$G(x, t) = x + t\nu(x)$$

é um difeomorfismo de classe C^{k-1} de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{V}$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5]. □

Definição 1.3. *A vizinhança \mathcal{V} dada na Proposição(1.1) é chamada de Vizinhança Tubular de M .*

Definição 1.4 (Espaços L^p). *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ denotaremos por L^p , o espaço das funções mensuráveis tais que*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Teorema 1.1 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida e f uma função mensurável. Então para todo $1 \leq p \leq \infty$ vale a desigualdade*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

Demonstração. A afirmação é clara se $p = \infty$. Se $p < \infty$ fazemos $F(x) = \int_Y |f(x, y)| d\nu(y)$ e se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ temos que

$$\begin{aligned} \|F\|_p &= \sup_{\|g\|_{p'}=1} \int_X g(x) \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \sup_{\|g\|_{p'}=1} \int_Y \int_X |f(x, y)| g(x) d\mu(x) d\nu(y). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned} \|F\|_p &\leq \sup_{\|g\|_{p'}=1} \int_Y \|g\|_{p'} \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y) \\ &= \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y). \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos a desigualdade desejada. \square

1.2 Elementos do Cálculo em Várias Variáveis

Nesta seção iremos estabelecer algumas notações, definições e resultados importantes do Cálculo em \mathbb{R}^n .

Teorema 1.2 (Teorema da Divergência). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 , e seja $F = (f_1, \dots, f_n)$ um campo vetorial de classe C^1 em $\bar{\Omega}$. Então*

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(y), \nu(y) \rangle d\sigma(y) = \int_{\Omega} \langle \nabla, F \rangle(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i} dx,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno clássico em \mathbb{R}^n .

Demonstração. A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [9]. \square

Teorema 1.3 (Identidades de Green). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, onde vale o Teorema da Divergência, e u e v campos escalares tais que $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então, para todo $x \in \Omega$ valem as identidades*

$$\int_{\partial\Omega} v \partial_n u d\sigma(y) = \int_{\Omega} (v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dy, \quad (1.1)$$

$$\int_{\partial\Omega} (-u \partial_n v + v \partial_n u) d\sigma(y) = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dy, \quad (1.2)$$

onde $\partial_n u$ e $\partial_n v$ denotam as derivadas direcionais de u e v na direção normal.

Demonstração. Para provar (1.1) note que $\langle \nabla, u \nabla v \rangle = u \Delta v + \langle \nabla v, \nabla u \rangle$ e aplique o Teorema da Divergência. Para provar (1.2) troque u por v na primeira identidade e subtraia a identidade resultante de (1.1). \square

As identidades (1.1) e (1.2) são conhecidas como *Primeira e Segunda Identidades de Green*, respectivamente.

Por último, enunciaremos um resultado que é muito útil para derivar sob o sinal de integração, quando for necessário.

Lema 1.1. *Sejam (X, μ) um espaço de medida, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(a) $f_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_x(t) = f(t, x)$ é absolutamente contínua para cada $x \in X$, μ -q.t.p.;

(b) $f(t, \cdot) \in L^1(X, \mu)$ para todo $t \in [a, b]$;

(c) $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1([a, b] \times X)$.

Então, a função

$$F(t) = \int_X f(t, x) d\mu$$

é diferenciável em $[a, b]$ e sua derivada é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu.$$

Demonstração. A demonstração deste Lema pode ser encontrada em [2]. \square

1.3 Um Pouco Sobre Funções Harmônicas

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades importantes das funções harmônicas que serão utilizadas.

1.3.1 Solução Fundamental do Laplaciano

Nesta seção faremos a dedução da solução fundamental para o modelo mais simples de equação elíptica em domínios de \mathbb{R}^n , a *equação de Laplace*, cujo modelo é regido pela equação em derivadas parciais de segunda ordem

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

onde Ω é um domínio em \mathbb{R}^n . O operador Δ é conhecido como *operador Laplaciano* e as soluções de (1.3) são denominadas *funções harmônicas*.

As funções harmônicas possuem propriedades de invariância muito importantes; de forma mais precisa vale o seguinte resultado:

Proposição 1.2. *Seja u harmônica em Ω . Então,*

- (a) *dado $y \in \mathbb{R}^n$, a função $v(x) = u(x - y)$ é harmônica em $\Omega_y = y + \Omega$ (invariância por translações);*
- (b) *dado $r > 0$, a função $u_r(x) = u(rx)$ é harmônica em $\frac{1}{r}\Omega = \{w/r : w \in \Omega\}$ (invariância por dilatações);*
- (c) *dada uma transformação linear ortogonal T , a função $v(x) = (u \circ T)(x)$ é harmônica em $T^{-1}(\Omega)$ (invariância por rotações).*

Demonstração. Os itens (a) e (b) seguem de forma simples fazendo-se uso da regra da cadeia. Provaremos a seguir o item (c). Denotamos por (a_{ij}) a matriz de T na base canônica de \mathbb{R}^n . Então

$$(u \circ T)_{x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ji} u_{x_j} \circ T.$$

Derivando mais uma vez esta última expressão temos que

$$(u \circ T)_{x_i x_i} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} a_{ji} u_{x_k x_j} \circ T.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta(u \circ T)(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} a_{ji} (u_{x_k x_j} \circ T)(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} a_{ji} \right) (u_{x_k x_j} \circ T)(x) \\ &= \sum_{j=1}^n (u_{x_j x_j} \circ T)(x) = (\Delta u \circ T)(x), \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde a última igualdade é obtida usando a ortogonalidade de T . Assim, segue-se que $\Delta(u \circ T)(x) = 0$ para $x \in T^{-1}(\Omega)$. \square

Baseados na invariança por rotações das funções harmônicas, é natural procurar por soluções radiais para a equação (1.3) em \mathbb{R}^n ; ou seja, uma solução u tendo a forma

$$u(x) = v(r), \tag{1.5}$$

onde $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ e v é selecionado (se possível) de modo que $\Delta u = 0$.

Para $i = 1, 2, \dots, n$, e $x \neq 0$, temos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}} = \frac{x_i}{r}.$$

Derivando a equação (1.5) em relação à variável x_i ,

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r};$$

e, derivando novamente em relação à mesma variável, temos que

$$\begin{aligned}
 u_{x_i x_i} &= v'(r) \left(\frac{x_i}{r} \right)' + v''(r) \frac{x_i}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\
 &= v'(r) \frac{r - x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2} + v''(r) \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r} \\
 &= v'(r) \frac{r - x_i \frac{x_i}{r}}{r^2} + v''(r) \left(\frac{x_i}{r} \right)^2 \\
 &= v'(r) \left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right] + v''(r) \left(\frac{x_i}{r} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte expressão para o Laplaciano de u :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = v''(r) + v'(r) \left(\frac{n-1}{r} \right).$$

Note que, $\Delta u = 0$ se e somente se $v''(r) + v'(r) \frac{n-1}{r} = 0$.

Supondo que $v'(r) \neq 0$, temos que

$$\ln(|v'(r)|)' = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{-n+1}{r}.$$

Integrando a equação acima em relação a r obtemos,

$$\ln|v'(r)| = (1-n) \ln r + c.$$

Logo, $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ para alguma constante a . Consequentemente, se $r > 0$, temos que

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & \text{se } n = 2, \\ \frac{b}{|x|^{n-2}}, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

onde b e c são constantes.

Definição 1.5 (Solução Fundamental do Laplaciano). *A função*

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{se } n = 2 \\ \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

definida para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ é chamada de *Solução Fundamental da Equação de Laplace*, onde ω_n é a área da esfera unitária S^{n-1} em \mathbb{R}^n .

Proposição 1.3. *Se $F(x-y)$ é a solução fundamental do Laplaciano então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $\Delta_y F(x,y) = 0$ no domínio $\Omega_y = \{y \in \mathbb{R}^n; y \neq x\}$, onde Δ_y indica o laplaciano na variável y .*

Demonstração. Consequência imediata da Proposição 1.2-(a). □

Proposição 1.4. *Se u é harmônica em Ω então $\int_{\partial\Omega} \partial_n u d\sigma(y) = 0$.*

Demonstração. Consequência imediata da Identidade (1.1). Basta tomar $v \equiv 1$. Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n u d\sigma(y) = \int_{\Omega} \Delta u dx = 0.$$

□

1.3.2 A Fórmula do Valor Médio

Definição 1.6 (Propriedade do Valor Médio). *Uma função u definida em Ω satisfaz a propriedade do valor médio se*

$$u(x) = \frac{1}{\text{vol}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u(y) dy,$$

para cada bola $B_r(x)$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Se $\alpha(n)$ denota o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n então as médias de u em $S_r(x)$ e $B_r(x)$ são denotadas por:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \overline{u} dy &= \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B_r(x)} u dy, \\ \int_{S_r(x)} \overline{u} dy &= \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u d\sigma(y), \end{aligned}$$

Teorema 1.4 (Teorema do Valor Médio). *Se u é harmônica então*

$$u(x) = \int_{S_r(x)} \overline{u} d\sigma(y) = \int_{B_r(x)} \overline{u} dy,$$

para toda bola $B_r(x)$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Demonstração. Considere a seguinte função

$$\phi(r) = \int_{S_r(x)} \overline{u} d\sigma(y) = \int_{S_1(0)} \overline{u(x + rz)} d\sigma(z).$$

Diferenciando em relação a r ,

$$\phi'(r) = \int_{S_1(0)} z \nabla u(x + rz) d\sigma(z) = \int_{S_r(x)} \frac{y - x}{r} \nabla u(y) d\sigma(y).$$

Conseqüentemente, usando a Primeira Identidade de Green com $v \equiv 1$, obtemos

$$\phi'(r) = \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(y) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0. \quad (1.6)$$

Logo, $\phi(r)$ é constante. Desse modo,

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{S_t(x)} u(y) d\sigma(y) = u(x).$$

Mostraremos agora que $u(x)$ também é escrita como a média sobre a bola $B_r(x)$. Com efeito, usando coordenadas polares, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u dy &= \int_0^r \left(\int_{S_\phi(x)} u d\sigma(y) \right) d\phi \\ &= u(x) \int_0^r n\alpha(n) \phi^{n-1} d\phi \\ &= \alpha(n) r^n u(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B_r(x)} u dy = \int_{B_r(x)} u dy.$$

□

Teorema 1.5 (Recíproca do Teorema do Valor Médio). *Se $u \in C^2$ satisfaz*

$$u(x) = \int_{S_r(x)} u d\sigma(y)$$

para toda bola $B_r(x) \subset U$, então u é harmônica.

Demonstração. Se $\Delta u \neq 0$, existe alguma bola $B_r(x) \subset U$ tal que $\Delta u > 0$ no interior da bola $B_r(x)$. Mas para ϕ definida como no Teorema(1.4), temos que

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy > 0,$$

o que é uma contradição. □

Corolário 1.1. *Seja ω_n a área da esfera unitária S^{n-1} . Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a área da esfera $S_r(x)$ é $r^{n-1}\omega_n$ e o volume da $B_r(x)$ é $\frac{r^n\omega_n}{n}$.*

Demonstração. Consequência imediata do Teorema(1.4). Basta tomar $u(x) \equiv 1$. \square

Teorema 1.6. *Suponha que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções harmônicas em Ω que converge uniformemente para uma função u em subconjuntos compactos de Ω quando $n \rightarrow \infty$. Então u é harmônica.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega$. Tome a bola $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Como u_n é uma seqüência de funções harmônicas, temos que u_n pode ser escrita por

$$u_n(x) = \frac{1}{\text{vol}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u_n(y) dy, \quad (1.7)$$

pelo Teorema(1.4). Passando o limite em (1.7) e usando a convergência uniforme em $\bar{B}_r(x)$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \frac{1}{\text{vol}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(y) dy,$$

assim

$$u(x) = \frac{1}{\text{vol}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Logo, u satisfaz a propriedade do Valor Médio. Usando o Teorema(1.5) obtemos que u é harmônica. \square

1.3.3 Funções Fracamente Harmônicas

Denotaremos por $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω .

Definição 1.7. *Uma função u diz-se fracamente harmônica se o produto interno em $L^2(\Omega)$ satisfaz*

$$\langle u, \Delta\psi \rangle = \int_{\Omega} u \Delta\psi dx = 0,$$

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Notamos que toda função harmônica é fracamente harmônica, sendo este último conceito mais geral.

Teorema 1.7. *Uma função fracamente harmônica u em Ω pode ser corrigida num conjunto de medida nula de modo que a função resultante seja harmônica.*

Antes de procedermos com a demonstração desse Teorema definiremos e provaremos alguns resultados que serão de grande utilidade.

1.3.4 Identidades Aproximadas

Definição 1.8. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

(a) $\text{supp } \varphi \subset B_1(0),$

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1.$

Chama-se Identidade Aproximada à família de funções $\{\varphi_r\}_{r>0}$ onde $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^n} \varphi(x/r).$

Definição 1.9. Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $r > 0.$ A convolução

$$u_r(x) = \varphi_r * u(x) = \frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{r}\right) u(y) dy,$$

é dita uma regularização de $u,$ onde $\text{supp } \varphi\left(\frac{x-y}{r}\right) = B_r(x).$

Teorema 1.8. Seja $\{\varphi_r\}_{r>0}$ uma identidade aproximada. Então,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\varphi_r * f - f\|_p = 0,$$

se $f \in L^p, 1 \leq p < \infty.$

Demonstração. Suponha que $1 \leq p < \infty.$ Como $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy = 1,$ temos que

$$\varphi_r * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) [f(x - ry) - f(x)] dy. \tag{1.8}$$

Se f é contínua, temos que $g_h(x) := f(x + h) - f(x) \rightarrow 0$ pontualmente quando $h \rightarrow 0.$ Além disso, $\|f(\cdot + h)\|_p = \|f(\cdot)\|_p,$ pois o valor da integral não muda por translações. Assim, obtemos que

$$\|g_h\|_p \leq \|f(\cdot + h)\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p.$$

Logo, o Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então $\|f(\cdot + h) - f\|_p < \frac{\varepsilon}{6\|\varphi\|_1}.$

Sabemos que se $f \in L^p$ então existe f_ε contínua tal que $\|f - f_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{6\|\varphi\|_1}.$ Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - f_\varepsilon(\cdot + h)\|_p + \|f_\varepsilon(\cdot + h) - f_\varepsilon\|_p \\ &\quad + \|f_\varepsilon - f\|_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_1}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Observemos que

$$\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(y)| dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq R} |\varphi(y)| dy,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ existe R_ε tal que se $R > R_\varepsilon$ então

$$\left| \|\varphi\|_1 - \int_{|y| \leq R} |\varphi(y)| dy \right| = \int_{|y| > R} |\varphi(y)| dy < \frac{\varepsilon}{4 \|f\|_p}. \quad (1.10)$$

Agora, com δ fixado, utilizamos a Desigualdade de Minkowski em (1.8) e combinando as desigualdades obtidas em (1.9) e (1.10) obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_r * f - f\|_p &\leq \int_{|y| < \frac{\delta}{r}} |\varphi(y)| \|f(\cdot + ry) - f\|_p dy + 2 \|f\|_p \int_{|y| \geq \frac{\delta}{r}} |\varphi(y)| dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que $\delta/r > R_\varepsilon \iff r < \delta/R_\varepsilon$. □

Demonstração do Teorema 1.7. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos Ω_ε como sendo

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

O conjunto Ω_ε é aberto e para todo ponto $p \in \Omega$ existe $0 < \varepsilon \ll 1$ tal que $p \in \Omega_\varepsilon$.

Definiremos em Ω_ε a regularização $u_r(x) = u * \varphi_r(x)$. Notemos que, $u_r(x)$ com $r < \varepsilon$ é fracamente harmônica em Ω_ε . De fato, $\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle u * \varphi_r, \Delta\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \varphi_r(y) dy \right] \Delta\psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} u(x-rz) \frac{1}{r^n} \varphi(z) r^n dz \right] \Delta\psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \left[\int_{\mathbb{R}^n} u(x-rz) \Delta\psi(x) dx \right] dz \quad (\text{fazendo } x = rz + \tilde{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \left[\int_{\mathbb{R}^n} u(\tilde{x}) \Delta\psi(rz + \tilde{x}) d\tilde{x} \right] dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois u é fracamente harmônica em Ω .

Note que a regularização $u * \varphi_r$ é harmônica, pois usando a segunda identidade de Green, para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} (\psi \Delta u_r - u_r \Delta \psi) dy = \int_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial u_r}{\partial \nu} - u_r \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) d\sigma(y).$$

E como funções restritas ao bordo se anulam, segue-se

$$\int_{\Omega} \psi \Delta u_r dy = \int_{\Omega} u_r \Delta \psi dy.$$

Usando o fato de u_r ser fracamente harmônica, obtemos que

$$\int_{\Omega} \psi \Delta u_r dy = 0,$$

de onde podemos concluir que $\Delta u_r = 0$, pois se supormos por contradição que $\Delta u_r(x_0) > 0$ em algum $x_0 \in \Omega$, podemos então considerar a função $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{\delta/2}(x_0), \\ 0, & \text{se } x \notin B_\delta(x_0), \end{cases}$$

de onde segue que

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u_r \psi dy = \int_{B_{\delta/2}(x_0)} \Delta u_r dy > 0,$$

o que é uma contradição. Logo, u_r é uma função harmônica.

Observemos que

$$(u * \varphi_{r_1})(x) = (u * \varphi_{r_2})(x), \quad (1.11)$$

para todo $x \in \Omega_\varepsilon$ e $r_1 + r_2 < \varepsilon$. Com efeito, como $u * \varphi_{r_1}$ é harmônica então vale

$$((u * \varphi_{r_1}) * \varphi_{r_2})(x) = (u * \varphi_{r_1})(x), \quad (1.12)$$

Logo, usando a comutatividade da convolução tem-se

$$(u * \varphi_{r_1})(x) = ((u * \varphi_{r_1}) * \varphi_{r_2})(x) = ((u * \varphi_{r_2}) * \varphi_{r_1})(x) = (u * \varphi_{r_2})(x),$$

Deixando r_2 fixo e passando limite quando r_1 tende a zero em (1.11) e usando o Teorema (1.8) temos que

$$0 = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \|u * \varphi_{r_1} - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \|u * \varphi_{r_2} - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)},$$

logo $u * \varphi_{r_2}(x) = u(x)$, *x.q.t.p* em Ω_ε . □

1.4 A Terceira Identidade de Green

Iremos deduzir nesta seção a *Terceira Identidades de Green*, a qual será nosso ponto de partida para dar início ao método de resolução do problema de Dirichlet.

Teorema 1.9 (Terceira Identidade de Green). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, onde vale o Teorema da Divergência e $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Então, para todo $x \in \Omega$*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} [u(y) \partial_{n_y} F(x-y) - F(x-y) \partial_{n_y} u(y)] d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Omega} -F(x-y) \Delta u(y) dy, \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde F é a solução fundamental do Laplaciano em \mathbb{R}^n .

Antes de proceder com a prova do Teorema 1.9 provaremos alguns resultados que serão de grande utilidade.

Observação 1.1. *Com o objetivo de não deixar as demonstrações muito técnicas, todos os resultados desta seção serão provados no contexto de dimensão $n \geq 3$. No entanto, todas as provas que serão realizadas se adaptam facilmente ao caso $n = 2$.*

Lema 1.2. *Dado $\varepsilon > 0$. Seja $y \in \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$ e $S_\varepsilon(x) = \partial \overline{B_\varepsilon(x)}$. Então,*

$$(a) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x)} [F(x-y) \partial_n u(y)] d\sigma(y) = 0,$$

$$(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x)} [\partial_n F(x-y) u(y)] d\sigma(y) = -u(x),$$

onde Ω é um domínio regular, F é a solução fundamental do Laplaciano e $\partial_n F$ é a derivada direcional de F na direção normal interior à esfera $S_\varepsilon(x)$.

Demonstração. Iniciamos com a demonstração do item (a). Definimos

$$I_1(\varepsilon) = \int_{S_\varepsilon(x)} [F(x-y) \partial_n u(y)] d\sigma(y).$$

Usando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\begin{aligned} |I_1(\varepsilon)| &\leq \int_{S_\varepsilon(x)} |F(x-y)| |\partial_n u(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \int_{S_\varepsilon(x)} |F(x-y)| |\langle \nabla u(x), N_y(u) \rangle| d\sigma(y) \\ &\leq \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \|\nabla u(x)\| d\sigma(y) \\ &\leq \frac{c}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{S_\varepsilon(x)} d\sigma(y) \\ &= \frac{c}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \varepsilon^{n-1} \omega_n \\ &= \frac{c}{n-2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_1(\varepsilon)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c}{n-2} \varepsilon = 0.$$

Assim, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) = 0$, concluindo a demonstração do primeiro item.

Para provar o item (b), definimos

$$I_2(\varepsilon) = \int_{S_\varepsilon(x)} [\partial_n F(x-y) u(y)] d\sigma(y).$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
I_2(\varepsilon) &= \int_{S_\varepsilon(x)} \{ \partial_n F(x-y) [u(y) - u(x) + u(x)] \} d\sigma(y) \\
&= \int_{S_\varepsilon(x)} \partial_n F(x-y) [u(y) - u(x)] d\sigma(y) + \int_{S_\varepsilon(x)} [\partial_n F(x-y) u(x)] d\sigma(y) \\
&= I_{21}(\varepsilon) + I_{22}(\varepsilon),
\end{aligned}$$

onde

$$I_{21}(\varepsilon) = \int_{S_\varepsilon(x)} \{ [\partial_n F(x-y) (u(y) - u(x))] \} d\sigma(y), \quad (1.14)$$

$$I_{22}(\varepsilon) = \int_{S_\varepsilon(x)} [\partial_n F(x-y) u(x)] d\sigma(y). \quad (1.15)$$

Estimaremos a seguir cada uma das integrais separadamente. Usando o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned}
|I_{21}(\varepsilon)| &\leq \int_{S_\varepsilon(x)} |\partial_n F(x-y)| |u(y) - u(x)| d\sigma(y) \\
&\leq \int_{S_\varepsilon(x)} |\partial_n F(x-y)| |c(y-x)| d\sigma(y) \\
&\leq c\varepsilon \int_{S_\varepsilon(x)} d\sigma(y) \leq c\varepsilon \omega_n \varepsilon^{n-1} = c\varepsilon^n.
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ na desigualdade acima, concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_{21}(\varepsilon)| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c \varepsilon^n = 0.$$

Analogamente, para I_{22} obtemos

$$\begin{aligned}
I_{22}(\varepsilon) &= \int_{S_\varepsilon(x)} \partial_n F(x-y) u(x) d\sigma(y) \\
&= u(x) \int_{S_\varepsilon(x)} \partial_n F(x-y) d\sigma(y) \\
&= u(x) \int_{S_\varepsilon(x)} \nabla_y F(x-y) \nu(y) d\sigma(y) \\
&= u(x) \frac{1}{\omega_n(2-n)} \int_{S_\varepsilon(x)} \nabla_y \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) \frac{x-y}{|x-y|} d\sigma(y) \\
&= u(x) \frac{1}{\omega_n(2-n)} \int_{S_\varepsilon(x)} - (2-n) \frac{x-y}{|x-y|^n} \frac{x-y}{|x-y|} d\sigma(y) \\
&= -\frac{u(x)}{\omega_n} \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} d\sigma(y) \\
&= -\frac{u(x)}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} d\sigma(y) \\
&= -\frac{u(x)}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \omega_n \varepsilon^{n-1} = -u(x).
\end{aligned}$$

Finalmente como $I_2(\varepsilon) = I_{21}(\varepsilon) + I_{22}(\varepsilon)$, novamente passando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{21}(\varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{22}(\varepsilon) = -u(x).$$

Desse modo concluímos a demonstração do item (b). □

Lema 1.3. *Dado $\varepsilon > 0$. Seja $y \in \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$. Então*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)} F(x-y) \Delta u(y) dy = 0,$$

onde $u \in C^2(\Omega)$ e F é a solução fundamental do Laplaciano.

Demonstração. Para estimarmos esta integral usamos as coordenadas esféricas, ou seja,

$$\begin{cases} y = x + r\omega, & (r, \omega) \in [0, \varepsilon) \times S^{n-1}, \\ dy = r^{n-1} dr d\sigma(\omega), \end{cases}$$

onde $d\sigma(\omega)$ denota o elemento de área em S^{n-1} .

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\varepsilon(x)} F(x-y) \Delta u(y) dy \right| &\leq \int_0^\varepsilon \int_{S^{n-1}} |F(-r\omega) \Delta u(x+r\omega)| r^{n-1} d\sigma(\omega) dr \\
&\leq \int_0^\varepsilon \int_{S^{n-1}} \frac{r}{|(2-n)\omega_n|} \max_\Omega |\Delta u| dr \\
&= c_n \int_0^\varepsilon r dr = \frac{c_n}{2} \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Logo, passando o limite obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)} F(x-y) \Delta u(y) dy = 0.$$

□

A seguir passamos efetivamente a provar a Terceira Identidade de Green.

Prova do Teorema 1.9. Note que, $F(x-y)$ tem uma descontinuidade quando $x = y$, desse modo iremos isola-lá e aplicaremos a segunda identidade de Green dada por(1.2) trocando $v(y)$ por $F(x-y)$. Desse modo

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u \partial_n F(x-y) d\sigma(y) &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} F(x-y) \partial_n u d\sigma(y) - \int_{\Omega_\varepsilon} F(x-y) \Delta u dy \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta_y F(x-y) dy. \end{aligned}$$

Como $\Delta_y F(x-y) = 0$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega - B_\varepsilon(x)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x-y) \Delta u dy &= - \int_{\partial\Omega} u \partial_n F(x-y) - \partial_n u F(x-y) d\sigma(y) \\ &+ \int_{B_\varepsilon(x)} F(x-y) \Delta u dy - \int_{S_\varepsilon(x)} u \partial_n F(x-y) \\ &+ \int_{S_\varepsilon(x)} F(x-y) \partial_n u d\sigma(y) \end{aligned}$$

Usando os Lemas(1.2) e (1.3) obtemos a expressão desejada.

□

1.5 Elementos de Análise Funcional

Nesta seção apresentaremos algumas definições e propriedades dos operadores limitados e compactos que serão utilizadas.

Definição 1.10. *Sejam E um espaço de Banach. Um operador $T \in B(E, E)$ (conjunto dos operadores limitados) é dito ser invertível se e somente se existe $S \in B(E, E)$ tal que*

$$TS = ST = I,$$

onde I denota a identidade em E . Neste caso, escreveremos $S = T^{-1}$.

Teorema 1.10. *Se $T \in B(E, E)$ e $\|T\| < 1$, então $(I - T)$ é invertível e seu inverso é dado pela série de Neumann, ou seja,*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j, \quad (1.16)$$

onde a convergência vale na norma de $B(E)$.

Demonstração. Usando o fato de que $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$ segue que $\|T^j\| \leq \|T\|^j$.

Sabemos ainda que a série geométrica $\sum_j \|T\|^j$ converge quando $\|T\|^j < 1$. Desse modo, a série (1.16) é absolutamente convergente.

Como E é completo, segue que $B(E, E)$ também o é. Além disso, temos neste caso que convergência absolutamente implica convergência.

Denotemos

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j.$$

Mostraremos que, $S = (I - T)^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} (I - T)(I + T + T^2 + \dots + T^n) &= (I + T + \dots + T^n)(I - T) \\ &= I - T^{n+1}, \end{aligned}$$

fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $T^{n+1} \rightarrow 0$ pois $\|T\| < 1$. Desse modo,

$$(I - T)S = S(I - T) = I.$$

Logo, concluímos que $S = (I - T)^{-1}$. □

Definição 1.11. *Um operador linear $T : E \rightarrow E$ é dito compacto se e somente se para qualquer S limitado contido em E , a imagem $T(S) \subset E$ tem fecho compacto. Equivalentemente, T é compacto se e somente se qualquer que seja a sequência $\{x_n\}$ limitada, a sequência $\{T(x_n)\}$ contém uma subsequência convergente.*

A coleção de todos os operadores compactos de E em E será denotada por $B_0(E)$.

Teorema 1.11. *Seja E um espaço de Banach.*

- (a) Se $T, S \in B_0(E)$, então $\alpha T + \beta S \in B_0(E)$;
- (b) Se $T \in B_0(E)$ e $S \in B(E)$, então TS e ST são operadores compactos;
- (c) Se $\{T_n\} \subset B_0(E)$, $T \in B(E)$ e T_n tende a T na norma de $B(E)$, então T é compacto,
- (d) $T \in B_0(H)$ se e somente se $T^* \in B_0(H)$.

Demonstração. A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [7]. □

Definição 1.12. Seja $H = L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos o operador $T : H \rightarrow H$ pela expressão

$$T_K f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy \text{ onde } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Dizemos que T_K é um operador integral e K é o núcleo associado a esse operador.

Além disso, se $K(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ então K é chamado de núcleo de Hilbert Schmidt.

Proposição 1.5. Todo operador de Hilbert Schmidt é compacto.

Demonstração. Note que se $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ denota uma base ortogonal em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $\psi_{ij} = \phi_i(x) \phi_j(y)$ é uma base ortogonal para $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, pois,

$$\begin{aligned} \|\psi_{ij}\|_2^2 &= \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} |\psi_{ij}(x, y)|^2 d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} |\phi_i(x)|^2 |\phi_j(y)|^2 d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} |\phi_i(x)|^2 d\sigma(x) \int_{\partial\Omega} |\phi_j(y)|^2 d\sigma(y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle \psi_{ij}, \psi_{lk} \rangle &= \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \psi_{ij}(x, y) \overline{\psi_{lk}(x, y)} d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \left(\phi_i(x) \overline{\phi_l(x)} \right) \left(\phi_j(y) \overline{\phi_k(y)} \right) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} \phi_i(x) \overline{\phi_l(x)} d\sigma(x) \int_{\partial\Omega} \phi_j(y) \overline{\phi_k(y)} d\sigma(y) \\ &= \delta_{il} \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Assim temos os seguintes casos: $\langle \psi_{ij}, \psi_{lk} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = l \text{ e } j = k, \\ 0, & \text{se outro caso.} \end{cases}$

Logo, mostramos que ψ_{ij} é uma base ortogonal para $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Note que

$$K(x, y) \sim \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{i,j} \phi_i(x) \phi_j(y) \text{ com } \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 < \infty,$$

Definindo o operador

$$T_n f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x, y) f(y) dy \text{ onde } K_{n(x,y)} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \phi_i(x) \phi_j(y).$$

obtemos que cada T_n tem posto finito logo é compacto. Além disso

$$\|K - K_n\|_2^2 = \sum_{i,j \geq n} |a_{i,j}|^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como consequência deste fato obtemos que $\|T - T_n\| \leq \|K - K_n\|_2^2$ e usando o Teorema (1.11) concluímos que T é compacto. □

Teorema 1.12 (Desigualdade Generalizada de Young). *Dados (X, μ) um espaço mensurável σ finito, $1 \leq p \leq \infty$ e $C > 0$. Suponha que K seja uma função mensurável em $X \times X$ tal que*

$$(a) \sup_{x \in X} \int_X K(x, y) d\mu(y) \leq C,$$

$$(b) \sup_{y \in X} \int_X K(x, y) d\mu(x) \leq C.$$

Se $f \in L^p(X)$ a função Tf definida por

$$Tf(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

está bem definida em quase todo ponto e pertence a $L^p(X)$, e vale a seguinte desigualdade

$$\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p.$$

Demonstração. A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [5]. □

1.5.1 Alternativa de Fredholm

Definição 1.13. *Um operador A é dito ser de Fredholm se e somente se*

$$\dim N(A) = \dim N(A^*) = n < \infty \tag{1.17}$$

$$R(A) = \overline{R(A)}. \tag{1.18}$$

Considere as seguintes equações

$$Au = f, \quad (1.19)$$

$$Au_0 = 0, \quad (1.20)$$

$$A^*v = g, \quad (1.21)$$

$$A^*v_0 = 0. \quad (1.22)$$

Teorema 1.13. *Se B é um isomorfismo e F é um operador cuja dimensão do posto é finita então $A = B + F$ é de Fredholm.*

Para todo operador A de Fredholm as seguintes alternativas são válidas.

- (a) *Ou, a equação (1.20) tem somente solução trivial u_0 e portanto a equação (1.22) também possui somente a solução trivial e ainda as equações (1.19) e (1.21) são unicamente determinadas para f e g ,*
- (b) *Ou, a equação (1.20) tem $n > 0$ soluções linearmente independentes e portanto (1.22) também tem n soluções linearmente independentes ψ_j para $1 \leq j \leq n$, desse modo (1.19) e (1.21) são resolvíveis se e somente se $\langle f, \psi_j \rangle = 0$ e $\langle g, \phi_j \rangle = 0$.*

Demonstração. Se A é de Fredholm então as condições 1 e 2 do teorema são equivalentes a (1.17) e (1.18). Desse modo, nosso objetivo é provar que A é um operador de Fredholm. Para isso iremos mostrar que (1.19) e (1.21) são equivalentes a um sistema algébrico linear em um espaço de dimensão finita.

Note que (1.19) é equivalente a equação

$$\omega + T\omega = f, \quad (1.23)$$

onde $T := FB^{-1}$ é um operador de posto finito que tem a mesma dimensão n do operador F e $Bu := \omega$. A equivalência entre estas equações é clara pois

$$f = Au = (B + F)u = (B + TB)u = Bu + TBu = \omega + T\omega.$$

Como B é um isomorfismo, cada solução de (1.19) tem uma correspondência injetiva com a solução de (1.23). Em particular, tomando $B = I$ obtemos

$$\dim N(A) = \dim N(I + T) \text{ e}$$

$$R(A) = R(I + T) \text{ onde } R(I + T) \text{ é fechado.}$$

Afirmamos que se T tem posto de dimensão finita n então a $\dim N(I + T)$ é finita e não é maior do que o posto de T .

De fato, se $u = -Tu$ onde T tem posto finito n então

$$Tu = \sum_{j=1}^n \langle Tu, e_j \rangle e_j,$$

onde $\{e_j\}$ é uma base ortonormal de $R(T)$ e

$$u = - \sum_{j=1}^n \langle u, T^*e_j \rangle e_j.$$

Desse modo u pertence a um subespaço de dimensão $n = r(T)$.

Como A e A^* são simétricos, no teorema é suficiente provar (1.17) e (1.18) para A e verificar que $\dim N(A) = \dim N(A^*)$.

Note que (1.21) é equivalente a equação

$$v = T^*v = h, \quad (1.24)$$

onde $T^* := (B^*)^{-1}F$ é um operador de posto finito (adjunto de T) que tem a mesma dimensão n do operador T . A equivalência é clara, pois basta aplicar $(B^*)^{-1}$ a (1.21), obtendo

$$h = (B^*)^{-1}g = (B^*)^{-1}(A^*v) = (B^*)^{-1}(B^* + F^*)v = v + T^*v.$$

Mostraremos agora que os operadores tem o mesmo posto de dimensão finita. Seja $\{e_j\}$ é uma base de $R(T)$ então

$$Tu = \sum_{j=1}^n \langle Tu, e_j \rangle e_j,$$

e

$$T^*u = \sum_{j=1}^n \langle u, e_j \rangle T^*e_j,$$

assim $r(T^*) \leq r(T)$ e usando simetria obtemos $r(T) \leq r(T^*)$. Logo os operadores tem o mesmo posto.

Iremos escrever explicitamente um sistema algébrico linear equivalente as equações (1.23) e (1.24). Para a equação (1.23) obtemos

$$c_i + \sum_{j=1}^n t_{ij}c_j = f_i. \quad (1.25)$$

onde $t_{ij} := \langle e_j, T^*e_i \rangle$, $c_j := \langle \omega, T^*e_j \rangle$ e $f_i = \langle f, T^*e_i \rangle$.

E para (1.24) obtemos

$$\xi_i + \sum_{j=1}^n t_{ij}^*\xi_j = h_i. \quad (1.26)$$

onde $t_{ij}^* := \langle T^*e_j, e_i \rangle$, $\xi_j := \langle v, e_j \rangle$ e $h_i := \langle h, e_i \rangle$ e t_{ij}^* é a matriz adjunta de t_{ij} . Para os sistemas algébricos lineares (1.25) e (1.26) a Alternativa de Fredholm é um resultado elementar bem conhecido. Estes sistemas são equivalentes a (1.19) e (1.21). Desse modo a Alternativa de Fredholm é válida para (1.19) e (1.21) então as propriedades (1.17) e (1.18) estão provadas. \square

Para uma melhor visualização da Aplicação de Fredholm neste trabalho iremos utilizar um teorema equivalente ao (1.13), onde tomaremos em particular $A = \lambda I - T$, $B = -\lambda I$ é um isomorfismo e $F = -T$ é um operador de posto finito, pois T é um operador compacto.

Teorema 1.14. *Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in B_0(H)$. Então, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se as seguintes alternativas:*

(a) $\forall g \in H, \lambda I - T = g$ tem solução, ou

(b) $\lambda I - T = 0$ tem solução não trivial.

Observação 1.2. Note que valem as seguintes equivalências.

(a) $\Leftrightarrow \exists \phi \in H : \lambda\phi - T\phi = g \Leftrightarrow \text{Im}(\lambda I - T) = H$.

(b) $\Leftrightarrow \exists \phi \neq 0, \phi \in H$ tq $\lambda\phi - T\phi = 0 \Leftrightarrow \lambda$ é um autovalor de T.

Observação 1.3. Uma prova de uma versão mais geral da Alternativa de Fredholm pode ser vista em [1].

Capítulo 2

Teoria do Potencial

Neste capítulo, faremos um estudo do *Problema de Dirichlet em domínios limitados com fronteira de classe C^2* . A abordagem será realizada através da Teoria do Potencial, onde um conhecimento básico de operadores compactos é necessário. O modelo matemático a ser estudado é o seguinte: deseja-se provar a existência de soluções para o problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^n com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 .

Nossa motivação para resolver o problema parte da Terceira Identidade de Green, (ver Teorema(1.9)), quando aplicada a uma função harmônica, isto é, se u é harmônica em Ω e pertence a $C^2(\bar{\Omega})$ temos que

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} [u \partial_{n_y} F(x-y) - F(x-y) \partial_{n_y} u] d\sigma(y),$$

para todo $x \in \Omega$. A função acima não é uma boa representação pois contém a derivada normal de u , da qual não temos informação. Assim, a idéia é desprezar o termo que contém $\partial_n u(y)$ e procurar uma solução no formato

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \phi(y) \partial_{n_y} F(x-y) d\sigma(y), \quad (2.2)$$

onde ϕ é uma função a determinar.

A equação (2.2) é conhecida como *Potencial de Camada Dupla*. Como veremos, será necessário também o estudo das propriedades de

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \phi(y) F(x-y) d\sigma(y) \quad (2.3)$$

conhecida como *Potencial de Camada Simples*.

2.1 Operadores Integrais

Antes de estudarmos as propriedades dos potenciais de camada dupla e simples precisamos deduzir algumas propriedades sobre certos tipos de operadores integrais com fronteira limitada de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.1. *Sejam $K : \partial\Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função mensurável e $0 \leq \alpha < n - 1$. K é dito um núcleo de ordem α se*

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, & \text{se } \alpha > 0, \\ A(x, y) \ln|x - y| + B(x, y), & \text{se } \alpha = 0, \end{cases}$$

onde A e B são funções limitadas em $\partial\Omega \times \partial\Omega$. Além disso, K é dito um núcleo contínuo de ordem α ($0 \leq \alpha < n - 1$) se K é o núcleo de ordem α e K é contínuo no conjunto $\{(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega; x \neq y\}$.

Se K é um núcleo contínuo de ordem α , $0 \leq \alpha < n - 1$, definimos o operador T_K por

$$T_K u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) u(y) d\sigma(y).$$

Observação 2.1. *Todas as demonstrações feitas neste trabalho são válidas para $n \geq 3$. No entanto, para o caso $n = 2$ a demonstração será feita de forma análoga mas a função neste caso não é a mesma.*

Proposição 2.1. *Se K é o núcleo contínuo de ordem α , onde $0 \leq \alpha < n - 1$, então T_K é limitado em $L^p(\partial\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que se K é suportado no conjunto $\{(x, y); |x - y| < \varepsilon\}$ então*

$$\|T_K u\|_p \leq C\varepsilon^{n-1-\alpha} \|A\|_\infty \|u\|_p, \quad (\alpha > 0), \quad (2.4)$$

$$\|T_K u\|_p \leq C\varepsilon^{n-1} (\|A\|_\infty (1 + |\ln \varepsilon|) + \|B\|_\infty) \|u\|_p, \quad (\alpha = 0). \quad (2.5)$$

No enunciado desta Proposição estamos usando as seguintes notações:

$$\|A\|_\infty \text{ indica } \|A\|_\infty = \sup_{(x,y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega} |A(x, y)|.$$

Observação 2.2. *Antes de demonstrarmos a proposição, observamos o seguinte fato:*

$\forall x \in \partial\Omega$ existe ε_x tal que

$$V(x) = \partial\Omega \cap B_{\varepsilon_x}(x) = \{y \in \partial\Omega; |y - x| < \varepsilon_x\},$$

é um gráfico de uma função de classe C^2 . Usando esse fato, obtemos que

$$\partial\Omega = \bigcup_{x \in \partial\Omega} V(x).$$

Por hipótese o bordo é compacto, logo

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^k V(x^i).$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que em cada vizinhança $V(x^i)$ a variável x_n se escreve em função de (x_1, \dots, x_{n-1}) , ou seja, $x_n = f_i(x_1, \dots, x_{n-1})$ para todo $x \in V(x^i)$.

Demonstração da Proposição 2.1.1. Demonstraremos esta proposição utilizando o Teorema (1.12), portanto, é suficiente provar as estimativas

$$(a) \sup_{x \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\mu(y) < C,$$

$$(b) \sup_{y \in \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\mu(x) < C.$$

Provaremos apenas (a), uma vez que (b) pode ser obtida de forma similar. Fixe $x \in \partial\Omega$ e seja

$$\partial\Omega_\varepsilon(x) = \{y \in \partial\Omega; |x - y| < \varepsilon\}.$$

Por definição temos que,

$$\int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\sigma(y) \leq \|A\|_\infty \int_{\partial\Omega} |x - y|^{-\alpha} d\sigma(y). \quad (2.6)$$

Sejam $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$. É fácil ver que $|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |x - y|$, e como $\alpha > 0$, obtemos que

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^{-\alpha} \geq |x - y|^{-\alpha}. \quad (2.7)$$

Substituindo a desigualdade (2.7) em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\sigma(y) &\leq \|A\|_\infty \int_{\partial\Omega} |\tilde{x} - \tilde{y}|^{-\alpha} d\sigma(y) \\ &= \|A\|_\infty \sum_{i=1}^k \int_{\partial\Omega_\varepsilon(x) \cap V(x^i)} |\tilde{x} - \tilde{y}|^{-\alpha} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Resolvendo cada integral de superfície obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\sigma(y) &\leq \|A\|_\infty \sum_{i=1}^k \int_{|\tilde{x} - \tilde{y}| < \varepsilon} |\tilde{x} - \tilde{y}|^{-\alpha} |J_i(\tilde{y})| d\tilde{y} \\ &\leq \sum_{i=1}^k C_i \|A\|_\infty \int_{|\tilde{x} - \tilde{y}| < \varepsilon} |\tilde{x} - \tilde{y}|^{-\alpha} d\tilde{y}, \end{aligned}$$

onde $C_i = \max |J_i(\tilde{y})|$, onde $J_i(\tilde{y})$ é o jacobiano que transforma o elemento de superfície no elemento de volume em cada $V(x^i)$.

Usando coordenadas polares em \mathbb{R}^{n-1} , $\tilde{y} = \tilde{x} + r\omega$, onde $\omega \in S^{n-2}$, para obtermos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\sigma(y) &\leq C_0 \|A\|_\infty \int_0^\varepsilon r^{-\alpha} r^{n-2} dr \int_{S^{n-2}} d\sigma_\omega \\ &\leq C_2 \|A\|_\infty \varepsilon^{n-1-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2. *Se K é o núcleo contínuo de ordem α , $0 < \alpha < n - 1$, então T_K transforma funções limitadas em funções contínuas.*

Demonstração. Suponha que $\alpha > 0$, pois o núcleo contínuo de ordem zero também é um núcleo de ordem α para algum $\alpha > 0$. Desse modo, podemos escrever

$$K(x, y) = A(x, y) |x - y|^{-\alpha}.$$

Dados $x \in \Omega$ e $\delta > 0$, definimos

$$B_\delta(x) = \{y \in \partial\Omega; |x - y| < \delta\}.$$

Seja $f \in L^\infty(\partial\Omega)$. Se $y \in B_\delta(x)$, temos que

$$|T_K f(x) - T_K f(y)| = \left| \int_{\partial\Omega} (K(x, z) - K(y, z)) f(z) d\sigma(z) \right| \leq I_1(x, y) + I_2(x, y),$$

onde

$$I_1(x, y) = \int_{B_{2\delta}(x)} |K(x, z) - K(y, z)| |f(z)| d\sigma(z),$$

$$I_2(x, y) = \int_{\partial\Omega \setminus B_{2\delta}(x)} |K(x, z) - K(y, z)| |f(z)| d\sigma(z).$$

Podemos supor δ suficientemente pequeno de modo que $B_{2\delta}(x)$ seja o gráfico de uma função de classe C^2 . Desse modo

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &\leq \int_{B_{2\delta}(x)} (|K(x, z)| + |K(y, z)|) |f(z)| d\sigma(z) \\ &\leq \|A\|_\infty \|f\|_\infty \int_{B_{2\delta}(x)} (|x - z|^{-\alpha} + |y - z|^{-\alpha}) d\sigma(z) \\ &\leq \|A\|_\infty \|f\|_\infty \left(\int_{B_{2\delta}(x)} |x - z|^{-\alpha} d\sigma(z) + \int_{B_{3\delta}(y)} |y - z|^{-\alpha} d\sigma(z) \right). \end{aligned}$$

onde $B_{3\delta}(y) = \{z \in \partial\Omega; |z - y| < 3\delta\}$ e $B_{2\delta}(x) \subset B_{3\delta}(y)$. Similarmente ao processo da demonstração da Proposição(2.1) temos que

$$I_1(x, y) \leq \|A\|_\infty \|f\|_\infty \left(\int_{|\tilde{x} - \tilde{z}| < 2\delta} |\tilde{x} - \tilde{z}|^{-\alpha} |J_i(\tilde{z})| d\tilde{z} + \int_{|\tilde{y} - \tilde{z}| < 3\delta} |\tilde{y} - \tilde{z}|^{-\alpha} |J_i(\tilde{z})| d\tilde{z} \right).$$

Usando coordenadas polares em \mathbb{R}^{n-1} , dadas por $\tilde{y} = \tilde{x} + r\omega$, onde $\omega \in S^{n-2}$ e $\tilde{z} = \tilde{y} + r\psi$, onde $\psi \in S^{n-2}$, obtemos

$$I_1(x, y) \leq C_1 \|A\|_\infty \|f\|_\infty \int_0^\delta r^{-\alpha} r^{n-2} dr \int_{S^{n-2}} d\sigma_\omega + C_2 \|A\|_\infty \|f\|_\infty \int_0^\delta r^{-\alpha} r^{n-2} dr \int_{S^{n-2}} d\sigma_\psi.$$

Assim,

$$I_1(x, y) \leq C \|A\|_\infty \|f\|_\infty \delta^{n-\alpha-1}.$$

Estimemos agora $I_2(x, y)$. Notemos que neste caso se $y \in B_\delta(x)$ e $z \in \partial\Omega \setminus B_{2\delta}(x)$ obtemos que $|x - z| \geq 2\delta$ e $|y - z| \geq \delta$.

Como K é contínua fora da diagonal temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $|x - y| = |(x, z) - (y, z)| < \eta$ então $|K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty \mu(\partial\Omega)}$.

Fazendo $\delta < \eta$ concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega \setminus B_{2\delta}(x)} |K(x, z) - K(y, z)| |f(z)| d\sigma(z) &\leq \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty \mu(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega \setminus B_{2\delta}(x)} d\sigma(z) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $|T_K f(x) - T_K f(y)| \leq \varepsilon$, sempre que $|x - y| < \eta$. □

2.2 Propriedades do Potencial de Camada Dupla

Nesta seção iremos estudar algumas propriedades muito importantes do Potencial de Camada Dupla.

Seja $u(x)$ o Potencial de Camada Dupla definido em (2.2). Definimos

$$\partial_{n_y} F(x, y) = -\frac{\langle (x - y), \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n},$$

onde $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ e $y \in \partial\Omega$.

Proposição 2.3. *Existe uma constante positiva c tal que $\forall x, y \in \partial\Omega$*

$$|\langle (x - y), \nu_y \rangle| \leq c|x - y|^2.$$

Demonstração. Usando Cauchy-Schwarz temos que $|\langle (x - y), \nu_y \rangle| \leq |x - y| |\nu(y)|$, $\forall x, y$. Suponha que $|x - y| \leq 1$.

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dado $y \in \partial\Omega$ podemos fazer translação e rotação de coordenadas de modo que

$$y = 0, \nu(y) = (0, 0, \dots, 1) \text{ e } \langle (x - y), \nu_y \rangle = x_n \text{ esteja próximo de } y.$$

Como o bordo é o gráfico de uma função f de classe C^2 , podemos escrever

$$x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), f(0) = 0 \text{ e } \nabla f(0) = 0.$$

Agora mostraremos a desigualdade a seguir:

$$|\langle (x - y), \nu(y) \rangle| = |f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})| \leq c|(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})|^2 \leq c|x - 0|^2 \leq c|x - y|^2.$$

Usando a Fórmula de Taylor, com $a = 0$ e $v = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, obtemos a seguinte expressão

$$f(v) = \frac{1}{2} \langle d^2 f(a), v^2 \rangle + r(v) \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|^2} = 0,$$

e aplicando a norma a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} |f(v)| &= \left| \frac{1}{2} \langle d^2 f(a), v^2 \rangle + r(v) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |d^2 f(a)| |v|^2 + |r(v)| \\ &\leq c_y |v|^2 + |r(v)|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{v^2} = 0$ usando a definição temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |v| < \delta \Rightarrow \left| \frac{r(v)}{v^2} \right| < \varepsilon \Rightarrow r(v) < \varepsilon |v|^2.$$

Agora estimaremos a última expressão, ou seja, iremos impor condições para que tal limitação exista,

(a) Se $|x - y| \leq \delta \leq 1$ então $|v| < \delta$;

Usando alguns fatos visto acima, obtemos

$$|v| < |x| = |x - y| \leq \delta \leq 1.$$

Neste primeiro caso basta tomar $c < \delta < 1$ assim a desigualdade acima é verificada.

(b) $|x - y| \geq \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\delta} (x - y) \right| \geq 1$.

Neste caso, usaremos Cauchy-Schwarz e a equivalência acima dada no item b, e obtemos

$$|\langle (x - y), \nu(y) \rangle| \leq |x - y| \leq \delta \left| \frac{1}{\delta} (x - y) \right| \leq \delta \frac{|x - y|^2}{\delta^2} \leq \frac{1}{\delta} |x - y|^2.$$

Neste caso para que a desigualdade seja válida basta tomarmos $c > \frac{1}{\delta}$. \square

Quando $x \in \partial\Omega$ temos que a $\partial_{n_y} F(x, y)$ é singular para $x = y$. Porém, provaremos que o núcleo $K(x, y) = -\frac{\langle (x - y), \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n}$ análogo à $\partial_{n_y} F(x, y)$ tem propriedades de núcleo contínuo, como veremos a seguir.

Proposição 2.4. $K(x, y) = -\frac{\langle (x - y), \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n}$ onde $x, y \in \partial\Omega$ e $x \neq y$ é um núcleo contínuo de ordem $n - 2$ em $\partial\Omega$.

Demonstração. Note que, podemos escrever $K(x, y)$ da seguinte forma

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^{n-2}}, \quad \text{onde } A(x, y) = -\frac{\langle (x - y), \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^2}.$$

É fácil ver que $K(x, y)$ é contínua para $x \neq y$. Além disso, $A(x, y)$ é uma função limitada em $\partial\Omega \times \partial\Omega$, pois usando a Proposição (2.3),

$$|A(x, y)| = \left| \frac{\langle x - y, \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^2} \right| \leq \frac{c |x - y|^2}{|\omega_n| |x - y|^2} \leq d.$$

Logo, $K(x, y)$ é um núcleo contínuo de ordem $n - 2$ no bordo. □

Proposição 2.5. *Valem as seguintes igualdades:*

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.8)$$

e

$$\int_{\partial\Omega} K(x, y) d\sigma(y) = \frac{1}{2}, \quad \text{se } x \in \partial\Omega. \quad (2.9)$$

Demonstração. Dividiremos nossa demonstração em casos:

- (a) Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Seja $F(x, y) = \frac{|x - y|^{2-n}}{(2 - n)\omega_n}$ a Solução Fundamental do Laplaciano onde $n \geq 3$. É fácil ver que $F(x, y)$ é harmônica como uma função de y e usando a Proposição (1.4), temos que

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) = 0.$$

- (b) Se $x \in \Omega$. Tome $\varepsilon > 0$ de modo que $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$. Aplicando a Proposição (1.4) sobre o domínio $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon} d\sigma(y) &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} A(\partial B_\varepsilon) &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \varepsilon^{n-1}\omega_n &= 0 \\ \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) &= 1. \end{aligned}$$

(c) Por fim, o caso em que $x \in \partial\Omega$.

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}\partial\Omega_\varepsilon &= \partial\Omega \setminus (\partial\Omega \cap B_\varepsilon); \\ \partial B'_\varepsilon(x) &= \partial B_\varepsilon \cap \Omega; \\ \partial B''_\varepsilon(x) &= \{y \in \partial B_\varepsilon; \langle \nu(x), x - y \rangle < 0\}.\end{aligned}$$

onde $\partial B''_\varepsilon(x)$ é a semi-esfera da $\partial B_\varepsilon(x)$ que se localiza do mesmo lado do plano tangente de $\partial\Omega$ com $x \in \Omega$.

Por um lado, é fácil ver que

$$\int_{\partial\Omega} K(x, y) d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} K(x, y) d\sigma(y).$$

Por outro lado, como $F(x, y)$ é harmônica em $\Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon$ e a curva acima é limitada por $\partial\Omega_\varepsilon \cup \partial B'_\varepsilon(x)$, pela Proposição (1.4)

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} K(x, y) d\sigma(y) + \int_{\partial B'_\varepsilon(x)} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) = 0.$$

Fazendo uma troca de orientação em $\partial B'_\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} K(x, y) d\sigma(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} K(x, y) d\sigma(y) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B'_\varepsilon(x)} \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1} \omega_n} \int_{\partial B'_\varepsilon(x)} d\sigma(y).\end{aligned}$$

Como $\partial\Omega$ é um de classe C^2 , a diferença simétrica entre $\partial B'_\varepsilon(x)$ e $\partial B''_\varepsilon(x)$ está contida na faixa equatorial, definida por

$$\{y \in \partial B_\varepsilon(x), \langle \nu(x), x - y \rangle < c(\varepsilon)\} \text{ onde } c(\varepsilon) = O(\varepsilon^2) \text{ cuja área é } O(\varepsilon^n).$$

Este fato será de fundamental importância na seguinte integração,

$$\int_{\partial B'_\varepsilon(x)} d\sigma(y) = \frac{1}{2} \varepsilon^{n-1} \omega_n + O(\varepsilon^n).$$

Para finalizarmos a Proposição, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} K(x, y) d\sigma(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1} \omega_n} \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{n-1} \omega_n - c\varepsilon^n \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{c\varepsilon^n}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{c\varepsilon}{\omega_n} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Lema 2.1. *Existe uma constante $C < \infty$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$,*

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_{n_y} F(x, y)| d\sigma(y) \leq C.$$

Demonstração. Seja $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ a distância de x ao ponto mais próximo de $\partial\Omega$. Fixe $\delta > 0$ com as seguintes propriedades:

- (1) $\delta < \frac{1}{2c}$ onde c é a constante dada na Proposição (2.3).
- (2) O conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta/2$ é uma vizinhança tubular de $\partial\Omega$. Desse modo, se $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta/2$, existem um único $x_0 \in \partial\Omega$ e um único $t \in (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ de modo que $x - x_0 = t\nu(x_0)$, onde x_0 é a projeção de x em $\partial\Omega$.

Dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso I: Suponha que $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta/2$. Por definição temos que

$$\partial_{n_y} F(x, y) = \frac{\langle x - y, \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n}.$$

Aplicando a norma a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_{n_y} F(x, y)| &= \left| \frac{\langle x - y, \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n} \right| \\ &\leq \frac{|x - y| |\nu_y|}{|\omega_n| |x - y|^n} \\ &= \frac{1}{|\omega_n| |x - y|^{n-1}} \\ &\leq \frac{1}{|\omega_n|} \frac{2^{n-1}}{\delta^{n-1}} \\ &\leq c_1 \delta^{1-n}. \end{aligned}$$

Integrando esta desigualdade e usando o fato do bordo ser compacto, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\partial_{n_y} F(x, y)| d\sigma(y) &\leq \int_{\partial\Omega} c_1 \delta^{1-n} d\sigma(y) \\ &= c_1 \delta^{1-n} \int_{\partial\Omega} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Caso II: Suponha que $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{\delta}{2}$.

Sejam x_0 a projeção de x sobre $\partial\Omega$ ao longo da reta normal e

$$\partial\Omega_\delta = \partial\Omega \cap B_\delta(x_0) = \{y \in \partial\Omega : |x_0 - y| < \delta\}.$$

Iremos estimar a integral de $\partial_{n_y} F(x, y)$ sobre $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_\delta$ e sobre $\partial\Omega_\delta$ separadamente.

(a) Se $y \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_\delta$ então

$$\begin{aligned} |x - y| &\geq |x_0 - y| - |x - x_0| \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{2} \\ &= \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Estimando a $\partial_{n_y} F(x, y)$, obtemos

$$|\partial_{n_y} F(x, y)| \leq c_1 \delta^{1-n}.$$

Portanto, neste caso a limitação é verificada.

(b) Para estimar a integral sobre $\partial\Omega_\delta$ usaremos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |2 \langle x - x_0, x_0 - y \rangle| &= 2|x - x_0| |\langle \nu(x_0), x_0 - y \rangle| \\ &\leq 2c|x - x_0| |x_0 - y|^2. \end{aligned}$$

Prova da Desigualdade. De fato, seja

$$\theta = \angle(x - x_0, x_0 - y) = \angle(\nu(x_0), x_0 - y).$$

Por definição, valem as seguintes expressões:

$$|2 \langle x - x_0, x_0 - y \rangle| = 2|x - x_0| |x_0 - y| \cos \theta \quad (2.10)$$

$$|\langle \nu(x_0), x_0 - y \rangle| = |x_0 - y| \cos \theta \quad (2.11)$$

Substituindo a igualdade (2.11) em (2.10) e aplicando a Proposição (2.3) obtemos que

$$\begin{aligned} |2 \langle x - x_0, x_0 - y \rangle| &= 2|x - x_0| |x_0 - y| \cos \theta \\ &= 2|x - x_0| |\langle \nu(x_0), x_0 - y \rangle| \\ &\leq 2c|x - x_0| |x_0 - y|^2. \end{aligned}$$

Logo, concluímos a demonstração da desigualdade. \square

Além disso,

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x - x_0 + x_0 - y|^2 \\ &= |x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2 + 2 \langle x - x_0, x_0 - y \rangle. \end{aligned}$$

Em particular, como $|x - x_0| < \delta < \frac{1}{2c}$, usando a desigualdade acima temos que

$$\begin{aligned} |2 \langle x - x_0, x_0 - y \rangle| &\leq 2c|x - x_0| |x_0 - y| \frac{1}{2c} \\ &\leq |x - x_0| |x_0 - y|. \end{aligned}$$

Como

$$|x - y|^2 \geq \frac{1}{2} (|x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2).$$

Aplicando a desigualdade triangular na norma de $\partial_{n_y} F(x, y)$, obtemos que

$$\begin{aligned} |\partial_{n_y} F(x, y)| &= \left| \frac{\langle x - y, \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n} \right| \\ &\leq \left| \frac{\langle x - x_0, \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n} \right| + \left| \frac{\langle x_0 - y, \nu_y \rangle}{\omega_n |x - y|^n} \right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{|x - y|^n} + c \frac{|x_0 - y|^2}{|x - y|^n} \\ &\leq \frac{|x - x_0| + c|x_0 - y|^2}{|x - y|^n} \\ &= c_3 \frac{|x - x_0| + c|x_0 - y|^2}{(|x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2)^{n/2}} \\ &\leq \frac{c_3|x - x_0|}{(|x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2)^{n/2}} + \frac{c_3c|x_0 - y|^2}{(|x - x_0|^2 + |x_0 - y|^2)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Chamemos $c_4 = \max\{c_3c, c_3\}$. Façamos $r = |x_0 - y|$ e $a = |x - x_0|$ e integrando a expressão obtida em coordenadas polares e fazendo $r = sa$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\delta} |\partial_{n_y} F(x, y)| &\leq \int_0^\delta c_4 \left[\frac{a}{(a^2 + r^2)^{n/2}} + \frac{1}{r^{n-2}} \right] r^{n-2} dr \\ &\leq c_4 \left(\int_0^\infty \frac{s^{n-2}}{(1 + s^2)^{n/2}} ds + \delta \right) \\ &= c_4(M + \delta) \end{aligned}$$

Esta última integral converge pois o integrando é da ordem de s^{-2} quando $s \rightarrow \infty$. Tomando

$$C = \max \left\{ c_1 \delta^{1-n} \int_{\partial\Omega} d\sigma(y), c_4 M + \delta \right\}.$$

obtemos a limitação desejada. □

Lema 2.2. *Suponha que $\phi \in C(\partial\Omega)$ e $\phi(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$. Se u é definida por*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} \phi(y) \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y), \\ u(x) &= \int_{\partial\Omega} \phi(y) K(x, y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

então u é contínua em x_0 .

Demonstração. Dados $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $\delta > 0$ de modo que se

$$|x - x_0| < \delta \text{ então } |u(x) - u(x_0)| < \varepsilon.$$

No Lema (2.1), provamos as seguintes estimativas

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_{n_y} F(x, y)| d\sigma(y) \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Omega} |K(x, y)| d\sigma(y) = C'.$$

Como $\phi \in C(\partial\Omega)$ e $\phi(x_0) = 0$ podemos escolher $\eta > 0$ de modo que $|\phi(y)| < \frac{\varepsilon}{3(C+C')}$ sempre que $B_\eta = \{y \in \partial\Omega : |y - x_0| < \eta\}$. Assim,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_0)| &= \left| \int_{B_\eta} \phi(y) \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} \phi(y) \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_{B_\eta} \phi(y) \partial_{n_y} F(x_0, y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} \phi(y) \partial_{n_y} F(x_0, y) d\sigma(y) \right] \right| \\ &\leq \left| \int_{B_\eta} \phi(y) \partial_{n_y} F(x, y) d\sigma(y) - \int_{B_\eta} \phi(y) \partial_{n_y} F(x_0, y) d\sigma(y) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} \phi(y) (\partial_{n_y} F(x_0, y) - \partial_{n_y} F(x, y)) d\sigma(y) \right| \\ &\leq \int_{B_\eta} |\phi(y)| (|\partial_{n_y} F(x, y)| + |\partial_{n_y} F(x_0, y)|) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} |\phi(y)| |\partial_{n_y} F(x, y) - \partial_{n_y} F(x_0, y)| d\sigma(y) \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} |\phi(y)| |\partial_{n_y} F(x, y) - \partial_{n_y} F(x_0, y)| d\sigma(y). \end{aligned}$$

Analisaremos agora a seguinte integral:

$$\int_{\partial\Omega \setminus B_\eta} |\phi(y)| |\partial_{n_y} F(x, y) - \partial_{n_y} F(x_0, y)| d\sigma(y).$$

Se $|x - x_0| < \frac{\eta}{2}$ temos que o integrando acima é limitado e contínuo em $\partial\Omega \setminus B_\eta$ e tende uniformemente a zero quando x converge para x_0 . □

Definição 2.2. *Seja $u(x)$ o potencial de camada dupla definido em (2.2), definimos a função $u_t(x)$ no bordo para $t \neq 0$ por*

$$u_t(x) = u(x + t\nu(x)), \tag{2.12}$$

onde $x \in \partial\Omega$. Assim, u_t é a restrição de u à superfície paralela $\partial\Omega$ a uma distância t de $\partial\Omega$.

Teorema 2.1. *Suponha que $\phi \in C(\partial\Omega)$ e $u(x)$ seja o Potencial de Camada Dupla. A restrição de u a Ω tem uma extensão contínua em $\bar{\Omega}$ e a restrição de u a $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ tem uma extensão contínua em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. De forma mais precisa, a restrição u_t converge uniformemente em $\partial\Omega$ para os limites contínuos u_- e u_+ quando t se aproximam de zero por baixo e por cima, respectivamente. Assim, u_- e u_+ são dados por*

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \frac{\phi(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \phi(y) K(x, y) d\sigma(y), \\ u_+(x) &= -\frac{\phi(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \phi(y) K(x, y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

Demonstração. Se $x \in \partial\Omega$ e $t < 0$ é suficientemente pequeno então $x + tv(x) \in \Omega$. Desse modo,

$$\begin{aligned} u_t(x) &= \int_{\partial\Omega} \phi(x) \partial_{n_y} F(x + tv(x), y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} [\phi(y) - \phi(x)] \partial_{n_y} F(x + tv(x), y) d\sigma(y) \\ &= \phi(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x + tv(x), y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} [\phi(y) - \phi(x)] \partial_{n_y} F(x + tv(x), y) d\sigma(y) \\ &= \phi(x) + \int_{\partial\Omega} [\phi(y) - \phi(x)] \partial_{n_y} F(x + tv(x), y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Pelo Lema(2.2) temos que a integral acima é contínua em 0. Usando a Proposição(2.5) concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u_t(x) &= \phi(x) + \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(x) d\sigma(y) \\ &= \phi(x) - \phi(x) \int_{\partial\Omega} K(x, y) d\sigma(y) + \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y) \\ &= \phi(x) - \frac{\phi(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{\phi(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

O caso onde $t > 0$, temos que os cálculos são análogos, mas a expressão abaixo

$$\phi(x) \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x + tv(x), y) d\sigma(y) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$$

A convergência uniforme segue da prova do Lema (2.2): precisamos apenas observar que sendo o bordo compacto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que se $|x - y| < \delta$ então $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon/3(C + C')$. \square

2.3 Potencial de Camada Simples

Nesta seção iremos estudar algumas propriedades muito importantes do Potencial de Camada Simples com momento ϕ . Estas propriedades terão um papel bastante relevante na demonstração de existência de solução para o Problema de Dirichlet.

Teorema 2.2. *Sejam $w(x)$ o potencial de camada simples e $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$ então $w(x)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$.*

Demonstração. Vimos no Lema (1.1) que é possível diferenciar sob o sinal da integral fazendo-se quantas vezes for necessário. Logo, $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$. Assim, $\Delta w = 0$ pois $\Delta_x F(x - y) = 0$. Desse modo w é harmônica em $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega)$. \square

Teorema 2.3. *Se $\phi \in C(\partial\Omega)$ e w é o potencial de camada simples então w é contínua em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Dado $x_0 \in \partial\Omega$ e $\delta > 0$ tome $B_\delta = \{y \in \partial\Omega : |x_0 - y| < \delta\}$. Então

$$\begin{aligned} |w(x) - w(x_0)| &= \left| \int_{\partial\Omega} \phi(y) F(x, y) d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega} \phi(y) F(x_0, y) d\sigma(y) \right| \\ &\leq \int_{B_\delta} |\phi(y) F(x, y)| d\sigma(y) + \int_{B_\delta} |\phi(y) F(x_0, y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \setminus B_\delta} |F(x, y) - F(x_0, y)| |\phi(y)| d\sigma(y). \end{aligned}$$

Aplicando coordenadas polares nas duas primeiras integrais e procedendo de modo análogo como na Proposição (2.1) e na Proposição (2.2) obtemos que estas são da ordem de δ .

Note que se $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ então o integrando da terceira integral da desigualdade acima é limitado em $\partial\Omega$ e converge uniformemente a zero quando x tende a x_0 . \square

Iremos agora descrever a derivada normal do Potencial de Camada Simples w dada por (2.3). Seja \mathcal{V} uma Vizinhança Tubular. Sabemos que a derivada normal ∂_n em \mathcal{V} é dado pela fórmula $\partial_n w(x + t\nu(x)) = \nu(x) \nabla w(x + t\nu(x))$ desse modo para $x \in \mathcal{V} \setminus \partial\Omega$ temos

$$\partial_n w(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_x} F(x, y) \phi(y) d\sigma(y). \quad (2.13)$$

Afirmamos que a expressão acima é exatamente o Potencial de Camada Dupla exceto pelo fato de que $\partial_n F$ é calculada em relação a variável x e não em y . De fato, como $F(x, y) = F(y, x)$ temos que $\partial_{n_x} F(x, y) = \partial_{n_y} F(y, x)$.

Em particular se denotarmos $K^*(x, y) = K(y, x)$ o lado direito de (2.13) faz sentido para $x \in \partial\Omega$ se interpretarmos como

$$\int_{\partial\Omega} K^*(x, y) \phi(y) d\sigma(y) = T_{K^*} \phi(x). \quad (2.14)$$

Como K é um núcleo contínuo de ordem $n - 2$ então K^* também o é. Desse modo (2.14) define uma função contínua em $\partial\Omega$.

Além disso, como K é uma função de valor real mostraremos que T_{K^*} é o adjunto de T_K como um operador de $L^2(\partial\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle T_K\phi, \psi \rangle &= \int_{\partial\Omega} T_K\phi(x) \psi(x) d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y) \psi(x) d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \phi(y) K(x, y) \psi(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \phi(y) K^*(x, y) \psi(x) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \phi(y) d\sigma(y) \int_{\partial\Omega} K^*(x, y) \psi(x) d\sigma(x) \\
&= \langle \phi, T_{K^*}\psi \rangle.
\end{aligned}$$

Então a expressão em (2.14) nos dá exatamente uma expressão para o operador adjunto de T_K .

Como era de se esperar, existe um pulo de descontinuidade entre os operadores definidos em (2.13) e (2.14). Como veremos, no resultado a seguir.

Teorema 2.4. *Suponha que $\phi \in C(\partial\Omega)$ e seja w o potencial camada simples definido em \mathbb{R}^n . Então a restrição de w a $\bar{\Omega}$ respectivamente a $(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}})$ está em $C_n(\Omega)$ e em $C_n(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$ para todo $x \in \partial\Omega$ temos*

$$\partial_{n^-} w(x) = -\frac{1}{2}\phi(x) + \int_{\partial\Omega} K(y, x) \phi(y) d\sigma(y),$$

$$\partial_{n^+} w(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \int_{\partial\Omega} K(y, x) \phi(y) d\sigma(y).$$

Demonstração. Seja $u(x)$ o potencial camada dupla. Definimos f em uma vizinhança tubular \mathcal{V} de $\partial\Omega$ por

$$f(x) = \begin{cases} u(x) + \partial_n w(x), & \text{se } x \in \mathcal{V} \setminus \partial\Omega, \\ T_K\phi(x) + T_{K^*}\phi(x), & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que f é contínua sobre \mathcal{V} . A restrição de f a $\mathcal{V} \setminus \partial\Omega$ e a $\partial\Omega$ são contínuas, desse modo é suficiente mostrar que $x_0 \in \partial\Omega$ e $x = x_0 + t\nu(x_0)$ então $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, a convergência uniforme em x_0 . Mas,

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{\partial\Omega} [\partial_{n_y} F(x, y) + \partial_{n_x} F(x, y)] \phi(y) d\sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} [\partial_{n_y} F(x_0, y) + \partial_{n_x} F(x_0, y)] \phi(y) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Seja $B_\delta = \{y \in \partial\Omega : |x_0 - y| < \delta\}$. Reescrevendo a integral acima sobre os domínios B_δ e $\partial\Omega \setminus B_\delta$ obtemos por um lado, que a integral sobre $\partial\Omega \setminus B_\delta$ tende uniformemente a zero quando x tende a x_0 e por outro lado, a integral sobre B_δ é limitada por

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \|\phi\|_\infty \int_{B_\delta} |\partial_{n_x} F(x, y) + \partial_{n_y} F(x, y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \|\phi\|_\infty \int_{B_\delta} |\partial_{n_x} F(x_0, y) + \partial_{n_y} F(x_0, y)| d\sigma(y). \end{aligned}$$

Desse modo é suficiente mostrar que $\forall x$ na reta normal de x_0 :

$$\int_{B_\delta} |\partial_{n_x} F(x, y) + \partial_{n_y} F(x, y)| d\sigma(y)$$

pode ser feito arbitrariamente pequeno, ou seja, δ pode ser tomado suficientemente pequeno independente de x e x_0 . Sejam,

$$\partial_{n_y} F(x, y) = -\frac{\langle x - y, \nu(y) \rangle}{\omega_n |x - y|^n} \text{ e}$$

$$\partial_{n_x} F(x, y) = \frac{\langle x - y, \nu(x_0) \rangle}{\omega_n |x - y|^n}.$$

somando as derivadas parciais acima, obtemos

$$\partial_{n_x} F(x, y) + \partial_{n_y} F(x, y) = \frac{\langle x - y, \nu(x_0) - \nu(y) \rangle}{\omega_n |x - y|^n}.$$

Como ν é de classe C^1 então ν é localmente Lipschitz, ou seja, $|\nu(x_0) - \nu(y)| \leq c|x_0 - y|$. Além disso, $|x - y| \geq c_1|x_0 - y|$ pois x está na normal x_0 . Assim

$$\begin{aligned} |\partial_{n_x} F(x, y) + \partial_{n_y} F(x, y)| &= \left| \frac{\langle x - y, \nu(x_0) - \nu(y) \rangle}{\omega_n |x - y|^n} \right| \\ &\leq \frac{|x - y| |\nu(x_0) - \nu(y)|}{|\omega_n| |x - y|^n} \\ &\leq \frac{c_2 |x_0 - y|}{|\omega_n| |x_0 - y|^{n-1}} \\ &\leq c_3 |x_0 - y|^{2-n}. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdades acima

$$\int_{B_\delta} |\partial_{n_x} F(x, y) + \partial_{n_y} F(x, y)| \leq \int_{B_\delta} c_3 |x_0 - y|^{2-n},$$

e fazendo uma mudança de coordenadas polares, concluímos

$$\int_0^\delta r^{2-n} r^{n-2} dr = \delta.$$

Desse modo, $f = u + \partial_n w$ é estendida continuamente sobre $\partial\Omega$. Usando o Teorema(2.1) obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} T_K \phi(x) + T_{K^*} \phi(x) &= u_-(x) + \partial_{n^-} w(x) \\ &= \frac{1}{2} \phi(x) + T_K \phi(x) + \partial_{n^-} w(x), \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_K \phi(x) + T_{K^*} \phi(x) &= u_+(x) + \partial_{n^+} w(x) \\ &= -\frac{1}{2} \phi(x) + T_K \phi(x) + \partial_{n^+} w(x). \end{aligned}$$

Simplificando-as, concluímos que

$$\partial_{n^-} w(x) = -\frac{1}{2} \phi(x) + T_{K^*} \phi(x),$$

$$\partial_{n^+} w(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + T_{K^*} \phi(x).$$

A convergência de $\partial_n w(x + t\nu(x))$ para $\partial_{n^+} w(x)$ é uniforme em x pois o mesmo é verdade para u e $u + \partial_n w$. \square

2.4 A Solução do Problema de Dirichlet Clássico

Vamos agora descrever a demonstração da existência de soluções para o problema de Dirichlet. Como mencionamos na introdução deste capítulo a idéia é procurar uma solução no formato

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \phi(y) K(x, y) d\sigma(y),$$

onde ϕ é uma função a determinar. Tendo em vista o Teorema (2.1) e a condição de contorno $u(x)|_{\partial\Omega} = f$, espera-se que ϕ satisfaça a equação integral

$$f(x_0) = \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y), \quad (2.15)$$

com $x_0 \in \partial\Omega$. Definimos o operador

$$T_K \phi(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) \phi(y) d\sigma(y) \text{ onde } x \in \partial\Omega \text{ e } \phi \in L^2(\partial\Omega). \quad (2.16)$$

Como veremos a seguir (2.16) define um operador compacto em $L^2(\partial\Omega)$ de modo que a equação (2.15) pode ser escrita na forma

$$f = \left(\frac{1}{2} + T_K \right) \phi. \quad (2.17)$$

Mostraremos também que $\frac{1}{2}$ não é autovalor de T_K e portanto, pela alternativa de Fredholm a equação (2.17) tem uma única solução para cada $f \in L^2(\partial\Omega)$. Além disso se $f \in C(\partial\Omega)$ então $\phi \in C(\partial\Omega)$ e aplicando o Teorema (2.1) junto ao fato de que o potencial camada dupla é harmônico em $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$, segue que o Potencial de Camada Dupla é a única solução do Problema de Dirichlet clássico.

Teorema 2.5. *O operador definido em (2.16) define um operador compacto em $L^2(\partial\Omega)$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$K_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & \text{se } |x - y| > \varepsilon \\ 0, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

e $K'_\varepsilon = K - K_\varepsilon$. Note que K_ε é limitado em $\partial\Omega \times \partial\Omega$. De fato,

(a) Se $|x - y| \leq \varepsilon$ então $K_\varepsilon(x, y) = 0$, logo é limitado.

(b) Seja $|x - y| > \varepsilon$. Usando as definição de K obtemos que

$$K_\varepsilon(x, y) = K(x, y) = A(x, y) |x - y|^{-\alpha} \leq A(x, y) \varepsilon^{-\alpha} < \infty.$$

Além disso, temos que este operador é de Hilbert-Schmidt, pois

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |K_\varepsilon(x, y)|^2 d\sigma(y) d\sigma(x) &\leq \|A\|_\infty^2 \varepsilon^{-2\alpha} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) d\sigma(x) \\ &\leq \|A\|_\infty^2 \varepsilon^{-2\alpha} \mu(\partial\Omega) \mu(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Daí concluímos que T_{K_ε} é compacto em $L^2(\partial\Omega)$.

Mostraremos que o operador T_K é compacto, ou seja, que a norma do operador $T_K - T_{K_\varepsilon} = T'_{K_\varepsilon}$ converge a zero quando ε se aproxima de zero. Passaremos agora a demonstração desse fato. Definamos $B_\varepsilon(\partial\Omega, x) = \{y \in \partial\Omega : |x - y| \leq \varepsilon\}$. Note que

$$\begin{aligned} |T_K\phi(x) - T_{K_\varepsilon}\phi(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega, x)} |K(x, y) - K_\varepsilon(x, y)| |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &\leq \|A\|_\infty \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega, x)} \frac{1}{|x - y|^\alpha} |\phi(y)| d\sigma(y) \\ &= \|A\|_\infty \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega, x)} \frac{1}{|x - y|^{\alpha/2}} \frac{|\phi(y)|}{|x - y|^{\alpha/2}} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado a desigualdade obtida e em seguida aplicando Cauchy-Schwarz obtemos que

$$|T_K\phi(x) - T_{K_\varepsilon}\phi(x)|^2 \leq \|A\|_\infty^2 \left[\int_{B_\varepsilon(\partial\Omega, x)} \frac{1}{|x - y|^\alpha} d\sigma(y) \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega, x)} \frac{|\phi(y)|^2}{|x - y|^\alpha} d\sigma(y) \right].$$

Usando coordenadas polares como fizemos na demonstração da Proposição (2.2) temos que

$$|T_K\phi(x) - T_{K_\varepsilon}\phi(x)|^2 \leq \|A\|_\infty^2 c \varepsilon^{n-1-\alpha} \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega, x)} \frac{|\phi(y)|^2}{|x - y|^\alpha} d\sigma(y). \quad (2.18)$$

Integrando a desigualdade (2.18) e aplicando o Teorema de Fubini, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} |T_K\phi(x) - T_{K_\varepsilon}\phi(x)|^2 d\sigma(x) &\leq \|A\|_\infty^2 c \varepsilon^{n-1-\alpha} \int_{\partial\Omega} \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega,x)} \frac{|\phi(y)|^2}{|x-y|^\alpha} d\sigma(y) d\sigma(x). \\
&\leq \|A\|_\infty^2 c \varepsilon^{n-1-\alpha} \int_{\partial\Omega} |\phi(y)|^2 \left\{ \int_{B_\varepsilon(\partial\Omega,y)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} d\sigma(x) \right\} d\sigma(y) \\
&\leq \|A\|_\infty^2 c^2 \varepsilon^{2(n-1-\alpha)} \int_{\partial\Omega} |\phi(y)|^2 d\sigma(y) \\
&= \|A\|_\infty^2 c^2 \varepsilon^{2(n-1-\alpha)} \|\phi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Tirando a raiz quadrada da desigualdade acima e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que

$$\|T_K\phi - T_{K_\varepsilon}\phi\| \leq c_3 \|A\|_\infty \varepsilon^{n-1-\alpha} \|\phi\|_2 \rightarrow 0.$$

Desse modo, concluímos que T_K é compacto. \square

Teorema 2.6. *Sejam $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $\frac{\phi}{2} + T_K\phi \in C(\partial\Omega)$. Então $\phi \in C(\partial\Omega)$. O mesmo vale para T^* .*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e escolha $\psi \in C(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ onde

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & \text{se } |x - y| > \varepsilon. \end{cases}$$

Considere os conjuntos $K_0 = \psi K$ e $K_1 = (1 - \psi) K$. Afirmamos que T_{K_1} é contínua. De fato, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
|T_{K_1}\phi(x) - T_{K_1}\phi(y)| &= \left| \int [K_1(x, z) - K_1(y, z)] \phi(y) d\sigma(z) \right| \\
&\leq \int |K_1(x, z) - K_1(y, z)| |\phi(y)| d\sigma(z) \\
&\leq \left\{ \int |\phi(y)|^2 d\sigma(z) \right\}^{1/2} \left\{ \int |K_1(x, z) - K_1(y, z)|^2 d\sigma(z) \right\}^{1/2} \\
&= \|\phi\|_2 \left\{ \int |K_1(x, z) - K_1(y, z)|^2 d\sigma(z) \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como K_1 é contínua a integral do lado direito tende a zero quando y tende a x , desse modo $T_{K_1}\phi$ é contínua.

Definimos $f = (\frac{\phi}{2} + T_K\phi) - T_{K_1}\phi$. Note que f é contínua. Além disso, $f = \frac{\phi}{2} + T_{K_0}\phi$. Utilizando a Proposição (2.1) com ε suficientemente pequeno concluímos que a norma do operador $2T_{K_0}$ em L^2 e L^∞ são menores que 1. Assim, $I - (-2T_{K_0})$ é invertível e $\frac{\phi}{2}$ é expresso em termos de f pela série geométrica

$$\frac{\phi}{2} = (I - (-2T_{K_0}))^{-1} f = \sum_{j=0}^{\infty} (-2T_{K_0})^j f.$$

Usando a Proposição (2.2) cada termo da série é contínua e a série converge na norma L^∞ , logo ϕ é contínua. \square

Teorema 2.7. A equação $f = \frac{\phi}{2} + T_K \phi$ tem uma única solução para cada $f \in L^2(\partial\Omega)$.

Demonstração. Para mostrarmos que f tem uma única solução para cada $f \in L^2(\partial\Omega)$ usando a Alternativa de Fredholm basta mostrar que se $(\frac{1}{2} + T_{K^*})g = 0$ então $g = 0$.

Se $g \in L^2(\partial\Omega)$ e satisfaz $(\frac{1}{2} + T_{K^*})g = 0$ então pelo Teorema (2.6) temos $g \in C(\partial\Omega)$. Seja $w(x)$ o potencial camada simples com densidade g ,

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) F(x-y) d\sigma(y).$$

Pelo Teorema (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n_+} &= \frac{g(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} K(y,x) g(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{g(x)}{2} + T_{K^*} g(x) \\ &= \left(\frac{1}{2} + T_{K^*} \right) g \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora para $t > 0$ suficientemente pequeno, definimos

$$\partial\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x = y + t\nu_y, y \in \partial\Omega\}.$$

Sejam $R > 0$ tal que $\partial\Omega \subset B_R(0)$ e $\Omega_{t,R}$ o domínio compreendido entre $B_R(0)$ e $\partial\Omega_t$. Usando a fórmula de Green, trocando Ω por $\Omega_{t,R}$, obtemos

$$\int_{\Omega_{t,R}} |\nabla w|^2 dy = \int_{\partial\Omega_{t,R}} \bar{w} \partial_n w d\sigma(y) = \int_{\partial\Omega_{t,R}} \bar{w} \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x,y) \phi(y) d\sigma(y) d\sigma(x) = 0,$$

pois $\Omega_{t,R} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ quando $t \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$. Logo $\nabla w = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ e portanto $w(x)$ é constante em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Como o Potencial de Camada Simples é harmônico em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ e tender a zero quando $|x| \rightarrow \infty$, concluímos que $w(x) = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. Mas então em $\bar{\Omega}$ temos

$$\begin{cases} w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \\ \Delta w = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

usando o princípio do máximo concluímos que $w(x) = 0 \forall x \in \bar{\Omega}$. Em particular, $\partial_{n-} = 0$. Logo

$$g(x) = \partial_{n+} - \partial_{n-} = 0.$$

□

Corolário 2.1. Sejam $f \in C(\partial\Omega)$ e $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ a única solução da equação $f = \frac{\phi}{2} + T_K \phi$. Então $\phi \in C(\partial\Omega)$ e a única solução do problema de Dirichlet clássico é dada por

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x,y) \phi(y) d\sigma(y).$$

Demonstração. A função ϕ é contínua pelo Teorema(2.6). Como $u(x)$ é harmônica em Ω , enquanto que pelo Teorema (2.1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \frac{\phi(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} F(x_0, y) \phi(y) d\sigma(y).$$

□

Capítulo 3

Problema de Dirichlet no Plano com bordos mais gerais.

Neste capítulo, iremos estudar o Problema de Dirichlet em bordos mais gerais. Consideremos Ω um domínio limitado do plano onde o bordo satisfaz a condição do triângulo exterior. Esta versão mais geral consiste em encontrar uma função contínua $u \in C(\bar{\Omega})$ que verifica as condições:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde o bordo $\partial\Omega$ satisfaça a condição do triângulo exterior, a qual descrevemos a seguir.

Fixamos inicialmente um triângulo isósceles T_0 em \mathbb{R}^2 cujos lados congruentes tem comprimento ℓ e formam um ângulo α no vértice comum.

Dizemos que T é um triângulo especial se ele é congruente a T_0 , e tem o vértice comum em $\partial\Omega$ ou seja, T é obtido a partir de T_0 por rotações e translações.

Definição 3.1. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dizemos que o bordo $\partial\Omega$ satisfaz a condição do triângulo exterior se existem α e ℓ tais que para cada $x \in \partial\Omega$ é possível construir um triângulo especial com vértice em x cujo interior esteja contido em $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$.*

Figura 3.1: O triângulo T_0 e o triângulo especial T

No capítulo anterior provamos a existência da solução para o Problema de Dirichlet quando a fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^2 . Neste capítulo, vemos que a fronteira em dimensão $n = 2$ é mais geral. Assim, a demonstração utilizada não é válida neste caso.

Observação 3.1. Note que se a fronteira é de classe C^2 então a condição do triângulo exterior é válida. No entanto existem bordos que satisfazem a condição do triângulo exterior que não são de classe C^2 .

3.1 O espaço vetorial das funções $C^1(\bar{\Omega})$ que se anulam no bordo

Descreveremos agora as ferramentas matemáticas necessárias para resolvermos o Problema de Dirichlet.

Seja Ω um conjunto aberto limitado em \mathbb{R}^n . Consideremos em $C^1(\bar{\Omega})$ a seguinte operação:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx, \quad \text{onde } \nabla u \cdot \overline{\nabla v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}}.$$

Nosso objetivo agora consiste em verificar se esta operação define um produto interno em $C^1(\bar{\Omega})$, ou seja, se as propriedades a seguir são válidas.

- (i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- (ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$;
- (iii) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;
- (iv) $u = 0 \Leftrightarrow \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0$.

É fácil ver que os três primeiros itens são válidos. Desse modo, passaremos agora a verificação do último item. Suponha que $\|u\| = 0$. Assim,

$$0 = \|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla u} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

como $|\nabla u|^2$ é uma função contínua e não-negativa segue que $|\nabla u|^2 = 0$, o que implica que $\nabla u = 0$, ou seja, u é constante em cada componente conexa de $\bar{\Omega}$. Logo, verificamos que essa operação não define um produto interno em $C^1(\bar{\Omega})$.

Para tornarmos esta operação um produto interno definiremos classes de equivalência em $C^1(\bar{\Omega})$. Sejam f e $g \in C^1(\bar{\Omega})$, dizemos que

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}; f(x) - g(x) = c,$$

$$[f] = f + \mathbb{R} = \{f + c; c \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos $H_0 = C^1(\bar{\Omega}) / \mathbb{R}$.

Observação 3.2. Neste espaço, $H_0 = H_0(\bar{\Omega})$, a operação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno.

Vejam alguns resultados que são de extrema importância na teoria a ser desenvolvida.

Lema 3.1. *Seja $f \in C^1([a, b])$ onde $f(a) = f(b) = 0$ e $|I|$ é o comprimento do intervalo, então*

$$\int_I |f(t)|^2 dt \leq |I|^2 \int_I |f'(t)|^2 dt. \quad (3.2)$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos que $f(s) = \int_a^s f'(t) dt$. Aplicando a norma a igualdade e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} |f(s)|^2 &= \left| \int_a^b f'(t) \chi_{[a,s]}(t) dt \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |f'(t)|^2 dt \int_a^b |\chi_{[a,s]}(t)|^2 dt \\ &= \int_a^b |f'(t)|^2 dt (s-a) \\ &\leq (b-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt \\ &= |I| \int_a^b |f'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima em relação a s sobre o intervalo I , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_I |f(s)|^2 ds &\leq \int_I \int_I |I| |f'(t)|^2 dt ds \\ &\leq |I|^2 \int_I |f'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado. Se $v \in C^1(\bar{\Omega})$ e v se anula no bordo de Ω então*

$$\int_{\Omega} |v(x, y)|^2 dx dy \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla v(x, y)|^2 dx dy. \quad (3.3)$$

Demonstração. Seja $p = (x, y) \in \Omega$. Definimos

$$J(y) = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega\},$$

um conjunto aberto de \mathbb{R} . Note que $J(y)$ pode ser escrito como uma união de intervalos disjuntos. Como Ω é limitado segue que $J(y)$ é limitado e assim $J(y) \subset (a, b)$.

Usando o Lema(3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dx &\leq c_1 \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v_x(x, y)|^2 dx, \\ \int_c^d \left\{ \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dx \right\} dy &\leq c_1 \int_c^d \left\{ \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v_x(x, y)|^2 dx \right\} dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De forma análoga, temos que

$$\int_c^d |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dy \leq c_2 \int_c^d |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v_y(x, y)|^2 dy, \quad \text{e}$$

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dy \right\} dx \leq c_2 \int_a^b \left\{ \int_c^d |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v_y(x, y)|^2 dy \right\} dx.$$

Usando o Teorema de Tonelli

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dx \right\} dy \leq c_2 \int_c^d \left\{ \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v_y(x, y)|^2 dx \right\} dy. \quad (3.5)$$

Somando as desigualdades (3.4) e (3.5) obtemos

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dx \right\} dy \leq c \int_c^d \left\{ \int_a^b |\chi_{J(y)}(x)|^2 |\nabla v(x, y)|^2 dx \right\} dy.$$

Observe que $\chi_{J(y)}(x) = \chi_\Omega(x, y)$;

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} |\chi_{J(y)}(x)|^2 |v(x, y)|^2 dx dy \leq \int_{[a,b] \times [c,d]} |\chi_{J(y)}(x)|^2 |\nabla v(x, y)|^2 dx dy,$$

$$\int_\Omega |v(x, y)|^2 dx dy \leq \int_\Omega |\nabla v(x, y)|^2 dx dy.$$

□

Definição 3.2. Definimos S_0 como sendo o subespaço linear constituído de funções $C^1(\bar{\Omega})$ que se anulam no bordo de Ω .

Lema 3.3. Se f e $g \in S_0$ com $f \neq g$ então f e g não pertencem a mesma classe de equivalência definida em $C^1(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Usaremos a técnica da prova pela contrapositividade, ou seja, mostaremos que se duas funções em S_0 pertencem a mesma classe de equivalência então elas são iguais.

De fato, sejam f e g elementos da mesma classe de equivalência, por definição,

$$\begin{aligned} f - g &= c, & \forall x \in \bar{\Omega}, \\ f|_{\partial\Omega} - g|_{\partial\Omega} &= c, & \text{é válido } \forall x \in \partial\Omega; \\ c &= 0, & \forall x \in \bar{\Omega}; \\ f &= g, & \forall x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que elementos distintos de S_0 continuam distintos em H_0 . □

Como consequência podemos identificar S_0 como sendo um subespaço de H_0 . Denotemos $\bar{S}_0 = S$ em H onde H é o fecho de H_0 com a norma do produto interno e $P_S(H)$ a projeção ortogonal de H sobre S .

3.2 O Princípio de Dirichlet

Seja $F \in C^1(\bar{\Omega})$. O Princípio de Dirichlet consiste em encontrar uma sequência de funções $\{u_n\}$ em $C^1(\bar{\Omega})$, tal que $u_n|_{\partial\Omega} = F|_{\partial\Omega} = f$ de modo que $\|u_n\|^2$ convirja para um valor mínimo. Isto significa que $u_n = F - v_n$ onde $v_n \in S_0$ de modo que $\lim \|u_n\|$ minimize a $d(F, S)$.

Como $F \in H$ e S é fechado sempre existe uma menor distância que será dada por $P_S(F)$. Usando a igualdade

$$u_n = F - v_n,$$

temos que $\lim \|u_n\|$ é mínimo se e somente se $\lim \|F - v_n\|$ também o é, ou seja,

$$\lim v_n = P_S(F) \text{ e como consequência } \lim u_n = u = F - P_S(F).$$

Figura 3.2: Interpretação do Princípio de Dirichlet

Lema 3.4. *A função $u = F - P_S(F)$ é fracamente harmônica.*

Demonstração. Note que se $\psi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ então $\psi \in S$. Além disso,

$$\langle u, \psi \rangle = 0 \quad \text{pois } u \text{ é ortogonal a } S.$$

Usando o fato de que $\lim u_n = u$ e aplicando produto interno, obtemos

$$\lim \langle u_n, \psi \rangle = \langle \lim u_n, \psi \rangle = \langle u, \psi \rangle = 0.$$

Fazendo uma integração por partes (Teorema de Green) obtemos a seguinte igualdade

$$\langle u_n, \psi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \bar{\psi} dx = - \int_{\Omega} u_n \Delta \bar{\psi} dx = - \langle u_n, \Delta \psi \rangle.$$

Aplicando limite a igualdade acima quando $n \rightarrow \infty$, obtemos que $\langle u, \Delta \psi \rangle = 0$. Logo, u é fracamente harmônica. Usando o Teorema (1.7) concluímos que u é harmônica. \square

Lema 3.5. *Sejam Γ um conjunto compacto em \mathbb{R}^n e f contínua em Γ . Então existe uma sequência $\{F_n\}$ de funções suaves em \mathbb{R}^n tal que F_n converge uniformemente para f em Γ .*

Observação 3.3. Na demonstração do Problema de Dirichlet ficou pendente o fato a seguir: Encontramos uma sequência de funções contínuas u_n em $\bar{\Omega}$ e que $u_n|_{\partial\Omega} = f$ para cada n , mas não ficou claro que u é contínua em $(\bar{\Omega})$ e que $u|_{\partial\Omega} = f$. Passaremos agora a demonstração detalhada deste fato.

O Princípio de Dirichlet garante que dada uma $F_n \in C^1(\bar{\Omega})$ existe uma função U_n harmônica em Ω e contínua em $\bar{\Omega}$ de modo que $U_n|_{\partial\Omega} = F_n|_{\partial\Omega}$.

Note que F_n converge uniformemente para f em $\partial\Omega$ pelo Lema(3.5). Além disso, U_n converge uniformemente para u pois essa é de Cauchy em $\bar{\Omega}$ na norma do sup. De fato, dadas U_n e U_k funções harmônicas e usando o Princípio do Máximo, temos que

$$\begin{aligned}\|U_n - U_k\|_\infty &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} |U_n(x) - U_k(x)| \\ &= \sup_{x \in \partial\Omega} |F_n(x) - F_k(x)|.\end{aligned}$$

Como $F_n \rightarrow f$ uniformemente concluímos que $\lim \|U_n - U_k\|_\infty = 0$

Usando o Teorema (1.6) garantimos que u é harmônica em Ω , logo u é contínua em $\partial\Omega$ e pelo princípio do máximo u é contínua em $\bar{\Omega}$. Por fim, temos

$$\begin{aligned}\|u - f\|_\infty &= \sup_{x \in \partial\Omega} |u(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \partial\Omega} |U_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \partial\Omega} |F_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - f\|_\infty \\ &= 0.\end{aligned}$$

e portanto $u|_{\partial\Omega} = f$.

Lema 3.6. *Seja f uma função contínua sobre um subconjunto compacto Γ de \mathbb{R}^n . Então existe uma função G em \mathbb{R}^n contínua tal que $G|_{\partial\Gamma} = f$.*

A demonstração deste lema será feita baseada na observação a seguir.

Observação 3.4. *Se K_0 e K_1 são conjuntos compactos disjuntos então existe uma função $0 \leq g(x) \leq 1$ tal que se $x \in K_0$ então $g(x) = 0$ e se $x \in K_1$ então $g(x) = 1$. Com efeito, definimos*

$$g(x) = \frac{\text{dist}(x, K_0)}{\text{dist}(x, K_0) + \text{dist}(x, K_1)},$$

onde $d(x, \Omega)$ denota a distância de x a Ω . Assim, $g|_{K_0} \equiv 0$ e $g|_{K_1} \equiv 1$.

Prova do Lema 3.6. Nosso objetivo será construir uma função G , usando a observação citada. Assuma que f é não-negativa e limitada por 1 em Γ . Este fato é possível pois funções contínuas definidas num compacto admitem um valor máximo e um valor mínimo. Definimos,

$$\begin{aligned}K_0 &= \{x \in \Gamma : 2/3 \leq f(x) \leq 1\}, \quad \text{e} \\ K_1 &= \{x \in \Gamma : 0 \leq f(x) \leq 1/3\},\end{aligned}$$

conjuntos compactos disjuntos.

Pela observação existe uma função $0 \leq G_1(x) \leq 1/3|I|$ onde I é o comprimento do intervalo e $G_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que se $x \in K_0$ então $G_1(K_0) = 1/3$ e se $x \in K_1$ então $G_1(K_1) = 0$. De fato, definindo

$$G_1(x) = \frac{1}{3} \frac{\text{dist}(x, K_1)}{\text{dist}(x, K_1) + \text{dist}(x, K_0)}.$$

Note que $\forall x \in \Gamma$ temos que $0 \leq f(x) - G_1(x) \leq \frac{1}{3}$, pois

$$\forall x \in K_0, \text{ temos que } \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1 \text{ então } \frac{1}{3} \leq f(x) - G_1(x) \leq \frac{2}{3};$$

$$\forall x \in K_1, \text{ temos que } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3} \text{ então } 0 \leq f(x) - G_1(x) \leq \frac{1}{3};$$

$$\forall x \in \Gamma \setminus (K_0 \cup K_1), \text{ temos que } \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3} \text{ então } 0 \leq f(x) - G_1(x) \leq \frac{2}{3}.$$

Repetiremos o mesmo processo trocando f por $f - G_1$. Como, $0 \leq f(x) - G_1(x) \leq \frac{2}{3}$ obtemos os seguintes conjuntos compactos

$$K_{01} = \left\{ x \in \Gamma : 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{9} \right\} \quad \text{e}$$

$$K_{11} = \left\{ x \in \Gamma : \frac{4}{9} \leq f(x) \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

Usando novamente a observação existe uma função $0 \leq G_2(x) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ tal que se $x \in K_{01}$ então $G_2(K_{01}) = 0$ e se $x \in K_{11}$ então $G_2(K_{11}) = 2/9$. Com efeito, definimos

$$G_2(x) = \frac{2}{9} \frac{\text{dist}(x, K_{01})}{\text{dist}(x, K_{01}) + \text{dist}(x, K_{11})}.$$

Além disso, usando o mesmo procedimento feito para G_1 obtemos $\forall x \in \Gamma$ que,

$$0 \leq f(x) - G_1(x) - G_2(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Repetindo este processo n vezes obtemos funções $G_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$0 \leq f(x) - G_1(x) - G_2(x) - \dots - G_n(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{em } \Gamma \quad (3.6)$$

$$0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Definimos $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$ uma função contínua. Usando o Teorema do Confronto na desigualdade(3.6), obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(x) - \sum_{n=0}^N G_n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x).$$

Lema 3.7. Se cada G_n é contínua então $G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n$ é contínua.

De fato, definimos

$$S_k = \sum_{n=1}^k G_n(x).$$

Note que S_k é contínua por ser a soma finita de funções contínua. Além disso, temos por hipótese que

$$0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ converge para zero usando o Teste de M. Weierstrass, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} G_n(x)$ converge uniformemente.

E usando o fato de que convergência uniforme de funções contínuas é uma função contínua, obtemos que G é contínua. \square

Prova do Lema 3.5. Seja G uma função contínua. Definimos

$$F_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \varphi(y/\varepsilon) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) G(y) dy.$$

com $\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi(y/\varepsilon)$ onde φ é não negativa em C_0^∞ , e que tem a bola unitária $\int \varphi(y) dy = 1$ como seu suporte. Observe que cada $F_\varepsilon(x)$ é C^∞ pela definição de convolução. Subtraindo $G(x)$ na igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) - G(x) &= -G(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) G(y) dy \\ &= -G(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) G(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -G(x) \varphi_\varepsilon(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) G(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (G(y) - G(x)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \int_{B_\varepsilon(x)} (G(y) - G(x)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy. \end{aligned}$$

Suponha que $x \in \Gamma$, e aplicando a norma a igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(x) - G(x)| &= \left| \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (G(y) - G(x)) \varphi_\varepsilon(x-y) dy \right| \\ &\leq \int_{|x-y| \leq \varepsilon} |G(y) - G(x)| \varphi_\varepsilon(x-y) dy \\ &\leq \sup |G(y) - G(x)| \int_{|x-y| \leq \varepsilon} \varphi_\varepsilon(x-y) dy. \end{aligned}$$

Como G contínua e definida num conjunto compacto temos que G é uniformemente contínua, desse modo a última desigualdade acima tende a zero quando ϵ tende a zero. Escolhendo $\epsilon = \frac{1}{m}$ obtemos a igualdade desejada. \square

Lema 3.8. *Se $\int \varphi(z)dz = 1$ então $\int \varphi_\epsilon(y-x)dy = 1$.*

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $y-x = t$, obtemos a primeira igualdade abaixo. A igualdade seguinte é obtida usando a definição de $\varphi_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon^n} \varphi(t/\epsilon)$. Para obtermos a última igualdade fazemos a mudança de variável dada por $\frac{t}{\epsilon} = z$, assim

$$\int \varphi_\epsilon(y-x)dy = \int \varphi_\epsilon(t)dt = \frac{1}{\epsilon^n} \int \varphi(t/\epsilon)dt = \int \varphi(z)dz = 1.$$

\square

3.3 A Solução do Problema de Dirichlet

Descreveremos nesta seção a solução do Problema de Dirichlet no qual o bordo satisfaz a condição triângulo exterior.

Teorema 3.1. *Seja Ω um domínio aberto em \mathbb{R}^2 que satisfaz a condição triângulo exterior. Se f é contínua em $\partial\Omega$ então o problema de valor limitado $\Delta u = 0$ com u contínua em $\bar{\Omega}$ e $u|_{\partial\Omega} = f$ tem sempre uma única solução.*

Observação 3.5. *Antes de demonstrarmos o teorema iremos fazer alguns comentários.*

- (a) *Se Ω é limitado por uma curva poligonal então a condição do teorema é satisfeita.*
- (b) *Se Ω é limitada por finitas curvas Lipschitz, em particular de classe C^1 então o teorema ainda é válido.*
- (c) *Há exemplos simples onde o problema não é resolvível. Por exemplo, se Ω é um disco furado então ele não satisfaz a condição do triângulo exterior neste ponto.*

Proposição 3.1. *Se para cada conjunto Ω aberto limitado em \mathbb{R}^2 que satisfaça a condição do triângulo exterior existem duas constantes $C_1 < 1$ e $C_2 > 1$ tal que se z é um ponto em Ω cuja distância a $\partial\Omega$ é δ implica que quando v pertence a $C^1(\bar{\Omega})$ temos*

$$\int_{B_{C_1\delta}(z)} |v(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq C\delta^2 \int_{B_{C_2\delta}(z) \cap \Omega} |\nabla v(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2. \quad (3.7)$$

A constante C pode ser escolhido dependendo somente do diâmetro de Ω e os parâmetros ℓ e α os quais determinam o triângulo T .

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração construiremos para cada $z \in \Omega$, cuja distância ao bordo seja δ , com δ suficientemente pequeno um retângulo R com as seguintes propriedades:

Figura 3.3: A situação descrita na Proposição 3.1

- (a) R tem lados $2C_1\delta$ e $M\delta$ com $C_1 \leq \frac{1}{2}$ e $M \leq 4$,
- (b) $B_{C_1\delta}(z) \subset R$,
- (c) cada segmento no retângulo R que é paralelo e de comprimento igual ao comprimento do maior lado.

Tomemos $y \in \partial\Omega$ de modo que $\delta = |z - y|$ e apliquemos a condição do triângulo exterior a y . Como resultado, a reta ligando z a y e um dos lados do triângulo cujo vértice está em y deve ter um ângulo $\beta < \pi$. De fato, $\beta \leq \pi - \alpha/2$ onde (α é o ângulo do triângulo).

Fazendo uma rotação e translação assuma que $y = 0$ e que o ângulo formado entre o eixo x_2 e a reta que liga z a origem é igual ao ângulo do lado do triângulo com o eixo x_2 . Esse ângulo é dado por γ , com $\gamma > \alpha/4$.

Iniciaremos agora a construção do retângulo. Este deve ter o maior lado paralelo ao eixo x_2 contendo a $B_{C_1\delta}(z)$ e todo segmento em R paralelo ao eixo x_2 deve intersectar o lado do triângulo.

Note que $z = (-\delta \sin \gamma, \delta \cos \gamma)$, pois estas coordenadas são dadas pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) &= \frac{b_1}{\delta} \quad \text{então } b_1 = \delta \cos \gamma, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) &= \frac{a_1}{\delta} \quad \text{então } a_1 = -\delta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Note ainda que se $C_1 < \sin \gamma$ então $B_{C_1\delta}(z)$ pertence ao mesmo semi-plano de z , pois

$$C_1 < \sin \gamma \Leftrightarrow C_1\delta < \delta \sin \gamma \Leftrightarrow -C_1\delta > -\delta \sin \gamma \Leftrightarrow i = -\delta \sin \gamma + C_1\delta < 0.$$

Definimos P_1 como sendo a interseção do maior lado de R com o eixo x_1 e P_2 como sendo a interseção do lado do triângulo com o retângulo R . Calcularemos agora as suas coordenadas. Note que

$$P_1 = (-\delta \sin \gamma - C_1\delta, 0) = (-a, 0),$$

onde $a = \delta \sin \gamma + C_1\delta$. Além disso

$$P_2 = (\text{projecção de } P_1, \tan \gamma) = \left(-a, -a \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}\right),$$

Observe ainda que, $\text{dist}(P_2, 0) = \frac{a}{\sin \gamma} \leq 2\delta$, pois

$$\text{dist}(P_2, 0) = \sqrt{a^2 + a^2 \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma}} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma}\right)} = \frac{a}{\sin \gamma}. \text{ E além disso,}$$

$$\text{dist}(P_2, 0) = \frac{a}{\sin \gamma} = \frac{\delta \sin \gamma + C_1\delta}{\sin \gamma} = \frac{C_1\delta}{\sin \gamma} + \delta \leq 2\delta, \text{ pois } C_1 \leq \sin \gamma.$$

Figura 3.4: O disco $B_{C_1\delta(z)}$ e o retângulo R

É claro a partir da construção que cada segmento em R , começando pelo disco $B_{C_1\delta(z)}$ quando continuada para baixo e paralelo ao eixo x_2 intersecta a reta que liga a origem a P_2 (a qual é continuação do lado do triângulo).

Além disso, se o comprimento ℓ desse lado do triângulo exceder a $\text{dist}(P_2, 0)$ então o segmento intersecta o triângulo. Quando essa interseção ocorre o segmento começando de $B_{C_2\delta(z)}$ pode também intersectar a fronteira de Ω . Desse modo, se $\ell \geq 2\delta$, a interseção desejada ocorre e cada uma das condições (a), (b) e (b) são verificadas.

Agora integrando sobre cada segmento de reta paralelo ao eixo x_2 em R , incluindo a porção em $B_{C_1\delta(z)}$ a qual é contínua para baixo. Chamamos tal segmento de $I(x_1)$. Então usando o Lema (3.1) obtemos que

$$\int_{I(x_1)} |v(x_1, x_2)|^2 dx_2 \leq M^2 \delta^2 \int_{I(x_1)} \left| \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|^2 dx_2,$$

e integrando em x_1 temos que

$$\int_{R \cap \Omega} |v(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq M^2 \delta^2 \int_{R \cap \Omega} |\nabla v(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2.$$

Agora, notamos que $B_{C_1\delta(z)} \subset R$ e $B_{C_2\delta(z)} \supset R$ quando $C_2 \geq 2$. Desse modo, a inequação desejada é estabelecida, sobre a hipótese de que δ é pequeno, ou seja, $\ell \geq 2\delta$. Quando $\ell < 2\delta$ é suficiente apenas usar o Lema (3.2). □

Prova do Teorema 3.1. Utilizaremos a Proposição 3.1 para mostrarmos a solução do Problema de Dirichlet onde o bordo satisfaz a condição do triângulo exterior. Vimos pelo Princípio de Dirichlet que $u_n = F - v_n$ converge uniformemente para $u = F - v$ onde F é uma extensão de $C^1(\bar{\Omega})$, ou seja, $F|_{\partial\Omega} = f$ e u é uma função harmônica. Como

a desigualdade (3.7) é verdadeira para cada n , então também é para $u = F - P_S(F)$, isto é,

$$\int_{B_{C_1\delta(z)}} |F - u|^2 dx \leq C\delta^2 \int_{B_{C_2\delta(z)} \cap \Omega} |\nabla(F - u)|^2 dx. \quad (3.8)$$

Para provarmos o teorema é suficiente em vez da continuidade de u em Ω , mostrarmos que se y é algum ponto em $\partial\Omega$ e z algum ponto variável em Ω então $u(z)$ converge para $f(y)$ quando z tende a y .

Seja $\delta(z) = \delta$ a distância de z ao bordo. Então $\delta(z) \leq |z - y|$ e desse modo $\delta(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow y$.

Considere agora as médias de F e u sobre os discos centrados em z e de raio $C_1\delta(z)$, dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} Av(F)z &= \frac{1}{\mu(B_{C_1\delta(z)})} \int_{B_{C_1\delta(z)}} F(x) dx, \text{ e} \\ Av(u)z &= \frac{1}{\mu(B_{C_1\delta(z)})} \int_{B_{C_1\delta(z)}} u(x) dx. \end{aligned}$$

Usando Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned} |Av(F)z - Av(u)z|^2 &= \frac{1}{|\mu(B_{C_1\delta(z)})|^2} \left| \int_{B_{C_1\delta(z)}} (F - u)(x) dx \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{|\mu(B_{C_1\delta(z)})|^2} \|F - u\|^2 |\mu(B_{C_1\delta(z)})| \\ &= \frac{1}{|\mu(B_{C_1\delta(z)})|} \int_{B_{C_1\delta(z)}} |F - u|^2 dx. \end{aligned}$$

Desse modo, majorando a desigualdade acima por (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} |Av(F)z - Av(u)z|^2 &\leq \frac{1}{\mu(B_{C_1\delta(z)})} \int_{B_{C_1\delta(z)}} |F - u|^2 dx \\ &\leq C' \int_{B_{C_2\delta(z)}} |\nabla(F - u)|^2 dx. \end{aligned}$$

Observe que se $\mu(B_{C_2\delta(z)})$ converge a zero então a continuidade absoluta garante que

$$\int_{B_{C_2\delta(z)}} |\nabla(F - u)|^2 dx \rightarrow 0.$$

A Propriedade do Valor Médio garante que $Av(u)z = u(z)$, enquanto que pela continuidade de F em $\bar{\Omega}$, obtemos

$$Av(F)z = \frac{1}{\mu(B_{C_1\delta(z)})} \int_{B_{C_1\delta(z)}} F(x) dx,$$

Aplicando o limite à igualdade acima, segue que

$$\lim_{z \rightarrow y} Av(F)z = \lim_{z \rightarrow y} \frac{1}{\mu(B_{C_1\delta(z)})} \int_{B_{C_1\delta(z)}} F(x) = f(y).$$

Assim,

$$\lim_{z \rightarrow y} u(z) = \lim_{z \rightarrow y} Av(u)z = \lim_{z \rightarrow y} Av(F)z = f(y).$$

Desse modo concluímos que $u(z) \rightarrow f(y)$ quando z tende a y . □

Referências Bibliográficas

- [1] Almeida, J.C de Souza, *Difeomorfismos que preservam volume e problemas elípticos*, Dissertação de Mestrado(Ufal), 2010.
- [2] Bartle, R.G. *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [3] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 1998.
- [4] Feitosa, E.F.Santos *O Problema de Cauchy para a Equação não Linear de Schrödinger com Dados não Nulos no Infinito*, Dissertação de Mestrado(Ufal), 2009.
- [5] Folland, G.B *Introduction to partial differential equations*, 2^a ed. Prineton University Press, Prineton, NJ,1995.
- [6] Flores, André Ignacio Navas. *O Problema de Cauchy Para um Sistema do tipo Schrödinger-Boussinesq*, Dissertação de Mestrado (Impa),1998.
- [7] Iorio, Rafael J. e Iorio, Valéria de Magalhães. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides, IMPA, 1988.
- [8] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Application*, 1978, p. 451-457.
- [9] Lima, Elon Lages - Curso de Análise Vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005. p.493.
- [10] Stein, Elias M. e Shakarchi, Rami. *Real Analysis*, Prineton University Press, Princenton, NJ, 2004.
- [11] Zuazo, J. Duoandikoetxea. *Análise de Fourier*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A, Delawarwe, 1995.