



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Teoremas de Comparação em Variedades Kähler e Aplicações

Adina Rocha dos Santos

Maceió, Brasil
25 de março de 2011

ADINA ROCHA DOS SANTOS

Teoremas de Comparação em Variedades Kähler e
Aplicações

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 25 de março de 2011 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.

Maceió
2011

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237t Santos, Adina Rocha dos.
Teoremas de comparação em variedades Kähler e aplicações / Adina Rocha dos Santos. – 2011.
86 f.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 83-84.
Índices: f. 85-86.

1. Geometria de variedades. 2. Variedade Kähler. 3. Curvatura bisseccional holomorfa. 4. Espaço hiperbólico complexo. 5. Espaço projetivo complexo. 6. Laplaciano - Autovalor. I. Título.

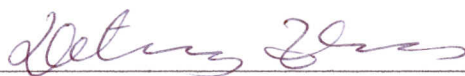
CDU: 514.763.4

Teoremas de Comparação em Variedades Kähler e Aplicações

Adina Rocha dos Santos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 25 de março de 2011 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

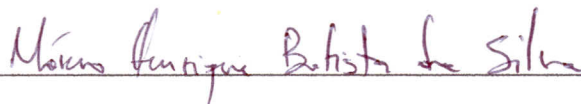
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Detang Zhou



Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (Orientador)



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Ao meu orientador prof. Hilário Alencar

Agradecimentos

A Deus, por ser meu guia seguro e confiável, por me dar inspiração e sabedoria para escrever esta dissertação.

Ao professor Hilário Alencar por todo apoio, incentivo e paciência, por sua amizade e orientação ao longo dos cursos de mestrado e graduação; pelo exemplo de pessoa e profissional que tem sido e pelos conselhos, os quais contribuíram de forma especial em minha formação acadêmica, profissional e também pessoal. Agradeço pelas oportunidades dadas; por sempre mostrar as possíveis saídas em momentos complicados.

Agradeço ao professor Detang Zhou da Universidade Federal Fluminense, por ter se disponibilizado a discutir e esclarecer importantes dúvidas, as quais deram clareza e firmeza a vários argumentos matemáticos presentes nesta dissertação.

Sou grata a Gregório Manoel e Natália Pinheiro pela solidariedade e disponibilidade de ler criticamente esta dissertação.

Aos professores do Instituto de Matemática da UFAL, que colaboraram em minha formação acadêmica.

Aos meus queridos pais, Francisco Chagas e Ahilud Rocha, e aos meus irmãos Adriano Angelo e Flávia Adaís. Obrigada pelo carinho, atenção e apoio emocional; pelo estímulo na busca da realização de meus sonhos.

Ao CNPq pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Mestrado.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos as demonstrações dos teoremas de comparação do Laplaciano para variedades Kähler completas M^m de dimensão complexa m com curvatura bisseccional holomorfa limitada inferiormente por -1 , 1 e 0 . As variedades a serem comparadas são o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$, o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ e o espaço Euclidiano complexo \mathbb{C}^m , cujas curvaturas bisseccionais holomorfas são -1 , 1 e 0 , respectivamente. Além disso, como aplicação dos teoremas de comparação do Laplaciano, descrevemos a prova do Teorema de Comparação de Bishop-Gromov para variedades Kähler; obtemos uma estimativa para o primeiro autovalor $\lambda_1(M)$ do Laplaciano, isto é, $\lambda_1(M) \leq m^2 = \lambda_1(\mathbb{C}\mathbb{H}^m)$; e mostramos que o volume de variedades Kähler, com curvatura bisseccional limitada inferiormente por 1 , é limitado pelo volume de $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Os resultados citados acima foram provados em 2005 por Li e Wang no artigo “Comparison Theorem for Kähler Manifolds and Positivity of Spectrum”, publicado no Journal of Differential Geometry.

Palavras-chave: Variedade Kähler. Laplaciano - Autovalor. Curvatura bisseccional holomorfa. Espaço hiperbólico complexo. Espaço projetivo complexo.

Abstract

In this work we present the proofs of the Laplacian comparison theorems for Kähler manifolds M^m of complex dimension m with holomorphic bisectional curvature bounded from below by -1 , 1 , and 0 . The manifolds being compared are the complex hyperbolic space $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$, the complex projective space $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, and the complex Euclidean space \mathbb{C}^m , which holomorphic bisectional curvatures are -1 , 1 , and 0 , respectively. Moreover, as applications of the Laplacian comparison theorems, we describe the proof of the Bishop-Gromov comparison theorem for Kähler manifolds and obtain an estimate for the first eigenvalue $\lambda_1(M)$ of the Laplacian operator, that is, $\lambda_1(M) \leq m^2 = \lambda_1(\mathbb{C}\mathbb{H}^m)$, and show that the volume of Kähler manifolds with holomorphic bisectional curvature bounded from below by 1 is bounded by the volume of $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. The results cited above have been proved in 2005 by Li and Wang, in an article “Comparison theorem for Kähler Manifolds and Positivity of Spectrum”, published in the Journal of Differential Geometry.

Keywords: Kähler manifold. Laplacian - Eigenvalue. Holomorphic bisectional curvature. Complex hyperbolic space. Complex projective space.

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	12
1.1 Definições e Alguns Resultados Básicos	12
1.2 Variedades Complexas	17
1.3 Variedades Quase-Complexas e Integrabilidade	21
2 Variedades Kähler	33
2.1 Definições e Alguns Resultados Básicos	33
2.2 Curvaturas em Variedades Kähler	37
2.3 Símbolos de Christoffel e Tensor Curvatura em Coordenadas	39
2.4 Curvatura Bissecional Holomorfa	45
2.5 Os Operadores Gradiente e Laplaciano em Variedade Kähler	53
3 Teoremas de Comparação em Variedades Kähler	60
3.1 Teoremas de Comparação do Laplaciano da Função Distância	60
3.2 Aplicações	72
3.2.1 Comparação de Volume de Bishop-Gromov	72
3.2.2 Estimativa do Primeiro Autovalor do Laplaciano	78
3.2.3 Comparação de Volume: Versão Global	81
Referências Bibliográficas	83

Introdução

Estimativas do operador Laplaciano, por exemplo os teoremas de comparação, são ferramentas importantes para a análise de propriedades globais em variedades. Um resultado clássico e bastante conhecido na literatura é o Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades Riemannianas, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [16].

Teorema 0.1 (Comparação do Laplaciano). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão real n e \mathbb{M}_k a forma espacial de curvatura seccional constante k . Se $\text{Ric}_M \geq (n-1)k$, então*

$$\Delta r(x) \leq \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)) \quad \forall x \in M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\}),$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida em \mathbb{M}_k .

Como consequência do Teorema 0.1, em 1964, R. Bishop demonstrou um resultado envolvendo comparação de volumes de bolas geodésicas em variedades Riemannianas e formas espaciais, ver [2]. Este resultado, atualmente, é conhecido como Teorema de Comparação de Bishop-Gromov.

Teorema 0.2 (Comparação de Bishop-Gromov). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão real n e k uma constante real. Se $\text{Ric}_M \geq (n-1)k$, então, para todo $x \in M$ e $0 \leq \varepsilon \leq R$, o volume das bolas geodésicas satisfazem*

$$\frac{V_x(R)}{V_x(\varepsilon)} \leq \frac{V_{\mathbb{M}_k}(R)}{V_{\mathbb{M}_k}(\varepsilon)}$$

e

$$V_x(R) \leq V_{\mathbb{M}_k}(R),$$

onde $V_{\mathbb{M}_k}(\varepsilon)$ denota o volume da bola geodésica de raio ε em \mathbb{M}_k .

Uma outra consequência do Teorema 0.1 é uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano em variedades Riemannianas obtida por S. Y. Cheng em 1975, ver [3].

Teorema 0.3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão real n . Se $\text{Ric}_M \geq -(n-1)$, então o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz*

$$\lambda_1(M) \leq \frac{(n-1)^2}{4} = \lambda_1(\mathbb{H}^n). \quad (1)$$

A estimativa obtida por Cheng é atingida. De fato, a igualdade é verificada para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , cuja curvatura de Ricci é igual a $-(n-1)$.

Em 2005, Li e Wang [12], usando técnicas de Análise Complexa, provaram teoremas de comparação do Laplaciano para variedades Kähler. Enunciamos a seguir tais resultados:

Teorema 0.4 (Li e Wang). *Seja M^m uma variedade Kähler completa de dimensão complexa m com curvatura bisseccional holomorfa maior que ou igual a -1 . Então, em $M \setminus (Cut(p) \cup \{p\})$, temos*

$$\begin{aligned} \Delta r(x) &\leq 2(m-1) \operatorname{cotgh}(r(x)) + 2 \operatorname{cotgh}(2r(x)) \\ &= \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$.

Teorema 0.5 (Li e Wang). *Seja M^m uma variedade Kähler completa de dimensão complexa m com curvatura bisseccional holomorfa maior que ou igual a 1 . Então, em $M \setminus (Cut(p) \cup \{p\})$, temos*

$$\begin{aligned} \Delta r(x) &\leq 2(m-1) \operatorname{cotg}(r(x)) + 2 \operatorname{cotg}(2r(x)) \\ &= \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Vale ressaltar que as variedades a serem comparadas são os espaços $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$ e $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, cujas curvaturas bisseccionais holomorfas são -1 e 1 , respectivamente. Usando técnicas de Análise Complexa, análogas as introduzidas por Li e Wang em [12], obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.6. *Seja M^m uma variedade Kähler completa de dimensão complexa m com curvatura bisseccional holomorfa não-negativa. Então, em $M \setminus (Cut(p) \cup \{p\})$, temos*

$$\Delta r(x) \leq (2m-1)(r(x))^{-1} = \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)),$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida no espaço Euclidiano complexo \mathbb{C}^m .

O resultado acima foi inspirado no Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades Kähler quaterniônicas obtido por Kong, Li e Zhou em [8]. Observamos que a curvatura bisseccional holomorfa de \mathbb{C}^m é nula.

Como aplicações do Teorema 0.4, temos o Teorema de Comparação de Bishop-Gromov para variedades Kähler e uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano em variedades Kähler. Tal estimativa foi obtida por Li e Wang em 2005, ver [12].

Aplicação 0.1. *Seja M^m uma variedade Kähler completa com curvatura bisseccional holomorfa maior que ou igual a -1 . Então, para todo $x \in M$ e $0 \leq \varepsilon \leq R$, o volume das bolas geodésicas satisfazem*

$$\frac{V_x(R)}{V_x(\varepsilon)} \leq \frac{V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R)}{V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(\varepsilon)}$$

e

$$V_x(R) \leq V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R),$$

onde $V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(\varepsilon)$ denota o volume da bola geodésica de raio ε em $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$.

Aplicação 0.2 (Li e Wang). *Seja M^m uma variedade Kähler completa com curvatura bisseccional holomorfa maior que ou igual a -1 . Então o primeiro autovalor do Laplaciano em M satisfaz*

$$\lambda_1(M) \leq m^2 = \lambda_1(\mathbb{C}\mathbb{H}^m).$$

A demonstração da Aplicação 0.1 é análoga ao caso Riemanniano e segue do Teorema 0.6. Ver, por exemplo, [16].

Em 2005, uma versão global de comparação de volume foi obtida por Li e Wang, ver [12], cuja demonstração segue como consequência do Teorema 0.5.

Aplicação 0.3 (Li e Wang). *Seja M^m uma variedade Kähler completa com curvatura bisseccional holomorfa maior que ou igual a 1 . Então M é compacta e o diâmetro de M satisfaz*

$$d(M) \leq \frac{\pi}{2} = d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m).$$

Além disso,

$$\text{vol}(M) \leq \text{vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m).$$

Nesta dissertação, descreveremos as demonstrações dos teoremas de comparação do Laplaciano para variedades Kähler, Teorema 0.4 e Teorema 0.5, apresentadas por Li e Wang em [12], e provaremos o Teorema 0.6. Como consequência dos teoremas de comparação do Laplaciano para variedades Kähler, apresentaremos as provas da Aplicação 0.1, Aplicação 0.2 e Aplicação 0.3.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentaremos algumas propriedades referentes ao Laplaciano da função distância definida em variedades Riemannianas. Na segunda e terceira seção deste capítulo, introduziremos as variedades complexas e quase-complexas, e definiremos integrabilidade de uma estrutura quase-complexa. Também demonstraremos alguns resultados básicos referentes às variedades quase-complexas e enunciaremos um importante teorema provado em 1957 por Newlander e Nirenberg, ver [15]. Encerraremos este capítulo introduzindo o conceito de métrica Hermitiana e variedade Hermitiana. Os textos básicos usados neste capítulo foram [16], [6], [10], [14] e [1].

No capítulo 2, definiremos variedades Kähler e obteremos alguns resultados necessários para demonstrar os teoremas de comparação do Laplaciano da função distância em variedades Kähler, como por exemplo, obteremos as expressões da métrica Kähler, da forma Kähler, dos símbolos de Christoffel e do tensor curvatura Riemanniana em coordenadas. Nesta parte, também definiremos curvatura bisseccional holomorfa e obteremos as curvaturas bisseccionais holomorfas dos espaços $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ e \mathbb{C}^m . Finalizamos o capítulo obtendo as expressões do Laplaciano da função distância nos espaços modelos $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ e \mathbb{C}^m . Neste capítulo, usamos [9], [14] e [1], textos os quais introduzem a geometria Kähler.

No último capítulo, apresentaremos as demonstrações dos teoremas de comparação do Laplaciano para variedades Kähler, ver Teorema 0.4, Teorema 0.5 e Teorema 0.6. Como consequência do Teorema 0.4, obteremos o Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov para variedades Kähler e a estimativa do primeiro autovalor do Laplaciano em variedades Kähler, ver Aplicação 0.1 e Aplicação 0.2. Finalmente, encerraremos este capítulo com a demonstração da Aplicação 0.3. Na demonstração dos resultados citados acima, usamos o artigo “Comparison theorem for Kähler Manifolds and Positivity of Spectrum”, ver [12], e o texto “Lectures on Differential Geometry”, ver [16].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e Alguns Resultados Básicos

Nesta seção, iremos obter algumas propriedades referentes à geodésica, à aplicação exponencial, ao cut locus e ao Laplaciano da função distância em variedades Riemannianas M . Mais precisamente, obteremos que o gradiente da função distância é um campo unitário em M .

Sejam M uma variedade Riemanniana e γ_v a única geodésica que passa pelo ponto $p \in M$ com velocidade constante $v \in T_pM$. Consideremos o conjunto

$$E_p := \{v \in T_pM; \gamma_v \text{ está definida em um intervalo contendo } [0, 1]\}.$$

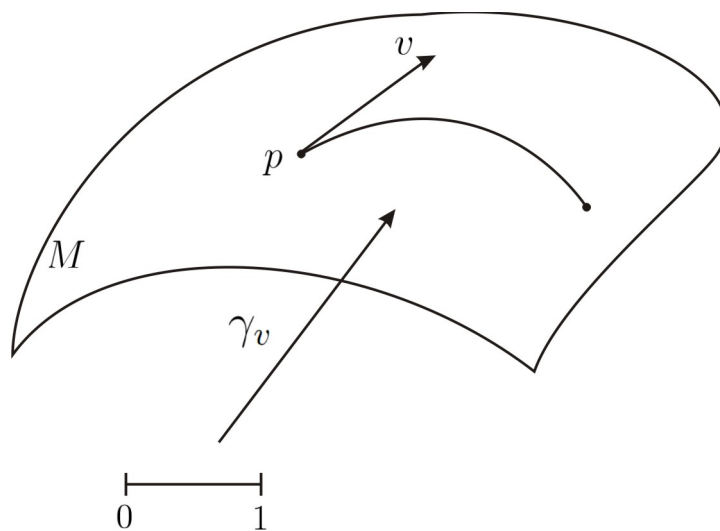


Figura 1.1: Geodésica γ_v .

A aplicação $\exp_p : E_p \rightarrow M$, definida por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, é denominada *aplicação exponencial*. É possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo seu intervalo

de definição e vice-versa. Isso segue de uma propriedade chamada *homogeneidade das geodésicas*, a saber:

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t) \quad \forall v \in T_p M \quad \text{e} \quad \forall \lambda, t \in \mathbb{R},$$

tais que γ_v está definida. Segue-se desta propriedade que

$$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$ que está no intervalo de definição de γ_v .

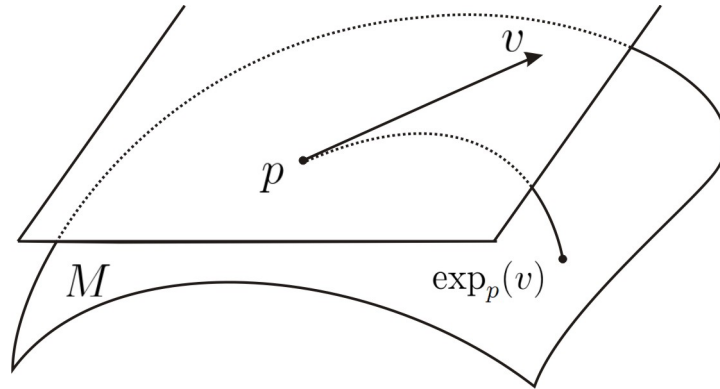


Figura 1.2: Aplicação Exponencial.

Proposição 1.1.1. *A aplicação exponencial $\exp_p : E_p \rightarrow M$ é diferenciável.*

Demonstração. Ver [10], página 71, Proposição 5.7, item (c).

□

Definição 1.1.1. *Uma variedade Riemanniana M é completa se, para todo $p \in M$, a aplicação \exp_p está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, as geodésicas $\gamma(t)$ partindo de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana completa e $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ um raio geodésico normalizado com $\gamma(0) = p$. Sabe-se que, sendo $t > 0$ suficientemente pequeno, $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, isto é, $\gamma|_{[0, t]}$ é uma geodésica minimizante. Além disso, se $\gamma|_{[0, t_0]}$ não é minimizante, então $\gamma|_{[0, t_1]}$ não é minimizante para qualquer $t_1 \geq t_0$. Usando a continuidade de γ , temos que o conjunto dos números $t \in [0, +\infty)$ tais que $\gamma|_{[0, t]}$ é minimizante é da forma $[0, t_0]$ ou $[0, +\infty)$. Assim podemos definir

$$\rho(v) := \sup\{t \in [0, +\infty); \gamma_v(t) = \exp_p(tv) \text{ é minimizante em } [0, t], \text{ com } |v| = 1\}.$$

Definição 1.1.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $v \in T_p M$ unitário. Se $\rho(v)$ é finito, o ponto $\gamma_v(\rho(v)) = \exp_p(\rho(v)v)$ é chamado ponto mínimo de p na direção v . O cut locus de p em M é o conjunto formado pelos pontos mínimos de p em M , indicado por $\text{Cut}(p)$.*

Agora consideremos o conjunto

$$C_p := \{\rho(v)v; \rho(v) < +\infty, v \in T_pM, |v| = 1\}.$$

Note que o cut locus de $p \in M$ é dado por $Cut(p) = \exp_p(C_p)$. Seja Σ_p o conjunto definido por

$$\Sigma_p := \{tv; 0 \leq t < \rho(v), v \in T_pM, |v| = 1\}.$$

Portanto

$$M = \{\exp_p(tv); 0 \leq t \leq \rho(v), v \in T_pM, |v| = 1\} = \exp_p(\Sigma_p) \cup \exp_p(C_p) = \exp_p(\Sigma_p) \cup Cut(p).$$

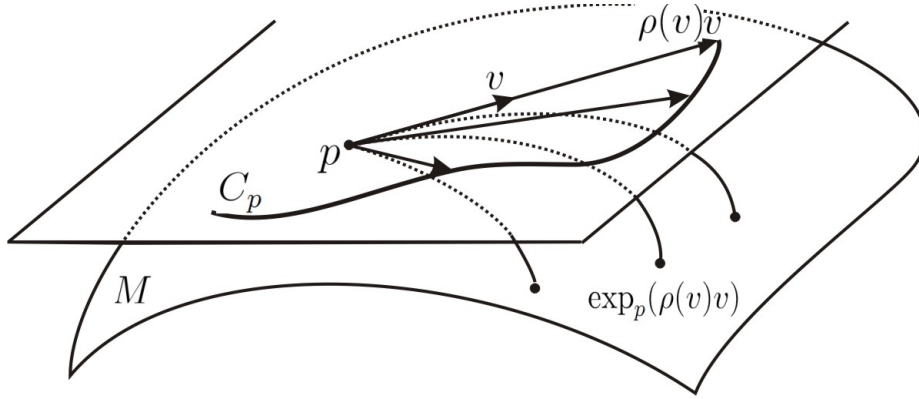


Figura 1.3: Pontos mínimos.

Observe que o conjunto Σ_p coincide com o conjunto dos vetores $v \in T_pM$ tais que $\gamma_v(t) = \exp_p(tv) \in M \setminus Cut(p)$ para todos $0 \leq t \leq 1$, que por sua vez está contido em E_p , isto é,

$$\Sigma_p = \{v \in T_pM; \exp_p(tv) \in M \setminus Cut(p)\} \subset E_p.$$

Proposição 1.1.2. *Seja $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$ uma geodésica. Suponha que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ ao longo de γ . Então,*

- (a) *ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ ;*
- (b) *ou existe uma geodésica minimizante $\sigma \neq \gamma$ ligando p a $\gamma(t_0)$.*

Reciprocamente, se (a) ou (b) se verifica, então existe $\tilde{t} \in (0, t_0]$, tal que $\gamma(\tilde{t})$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ .

Demonstração. Ver [6], página 296, Proposição 2.2.

□

Exemplo 1.1.1. *Seja $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n -dimensional. Se $p \in \mathbb{S}^n$, então é podemos verificar que $Cut(p) = \{-p\}$. Além disso, o cut locus coincide com o lugar dos pontos conjugados.*

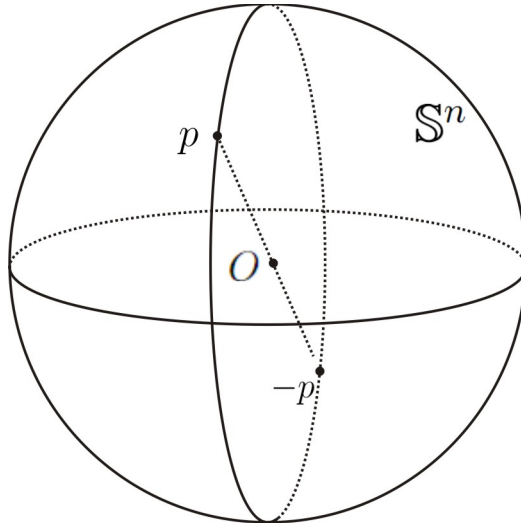


Figura 1.4: Cut locus de um ponto na esfera.

Corolário 1.1.1. *Seja M variedade Riemanniana completa. Se $p \in M$ e $q \in M \setminus \text{Cut}(p)$, então existe uma única geodésica minimizante γ ligando p a q . Em particular, q não é conjugado a p ao longo de γ .*

Demonstração. Seja $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t_0) = q$. Suponha que p liga-se a q por duas geodésicas minimizantes, ou suponha q conjugado a p ao longo de γ . Usando a Proposição 1.1.2, existe $\tilde{t} \in (0, t_0]$, tal que $\gamma(\tilde{t})$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ . Como $q \notin \text{Cut}(p)$ e $\tilde{t} < t_0$, isso nos afirma que γ não é minimizante em $(0, t_0]$, uma contradição. □

Corolário 1.1.2. *Seja M variedade Riemanniana completa. Então a aplicação exponencial $\exp_p : \Sigma_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Sejam $q \in M \setminus \text{Cut}(p)$ e

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$$

a única geodésica normalizada e minimizante ligando $p = \gamma(0)$ a $q = \gamma(1)$ garantida pelo Corolário 1.1.1. Em particular, q não é conjugado a p ao longo de γ . Deste modo, $v \in T_p M$ não é ponto crítico de \exp_p . Assim \exp_p é um difeomorfismo local. Como

$$\exp_p(\Sigma_p) = M \setminus \text{Cut}(p),$$

resta-nos mostrar que \exp_p é injetiva. De fato, suponha que existem $v, w \in \Sigma_p$ distintos, tais que

$$\gamma(t) = \exp_p(tv) \quad \text{e} \quad \alpha(t) = \exp_p(tw)$$

são geodésicas minimizantes ligando p a $q = \gamma(1) = \alpha(1)$. Note que $q \notin \text{Cut}(p)$, daí $\gamma|_{[0,1]}$ e $\alpha|_{[0,1]}$ não é minimizante. Sem perda de generalidade, suponha γ não minimizante. Portanto existe $0 < t_0 < 1$, tal que

$$\exp_p(t_0v) = \gamma(t_0) \in \text{Cut}(p).$$

Isso contradiz o fato de que $v \in \Sigma_p$.

□

Observação 1.1.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância em M a partir de $p \in M$. Observe que*

$$(r \circ \exp_p)(v) = d(p, \exp_p(v)) = |v|,$$

logo $r \circ \exp_p$ é diferenciável em $\Sigma_p \setminus \{0\}$. Decorre da Proposição 1.1.2 que $\exp_p : \Sigma_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é um difeomorfismo; e, portanto, r é diferenciável em $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$.

Teorema 1.1.1. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ uma geodésica minimizante e normalizada partindo de p . Então*

$$\nabla r(\gamma(t)) = \gamma'(t) \quad \forall 0 \leq t \leq a.$$

Em particular, $|\nabla r(x)| = 1$ para todo $x \in M \setminus \text{Cut}(p)$.

Demonstração. Seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq a$, e $q = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_q M$, $w \perp \gamma'(t_0)$, segue do lema de Gauss (ver [6], página 77, Lema 3.5), a existência de $W \in T_v(T_p M) \approx T_p M$ tal que $g(W, v) = 0$ e $(d \exp_p)_{t_0 v} W = w$. Tomemos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma_p$, tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0 v$ e $\alpha'(0) = W$. Como a geodésica minimizante ligando $\exp_p(\alpha(s))$ a p é única, temos

$$r(\exp_p(\alpha(s))) = t_0.$$

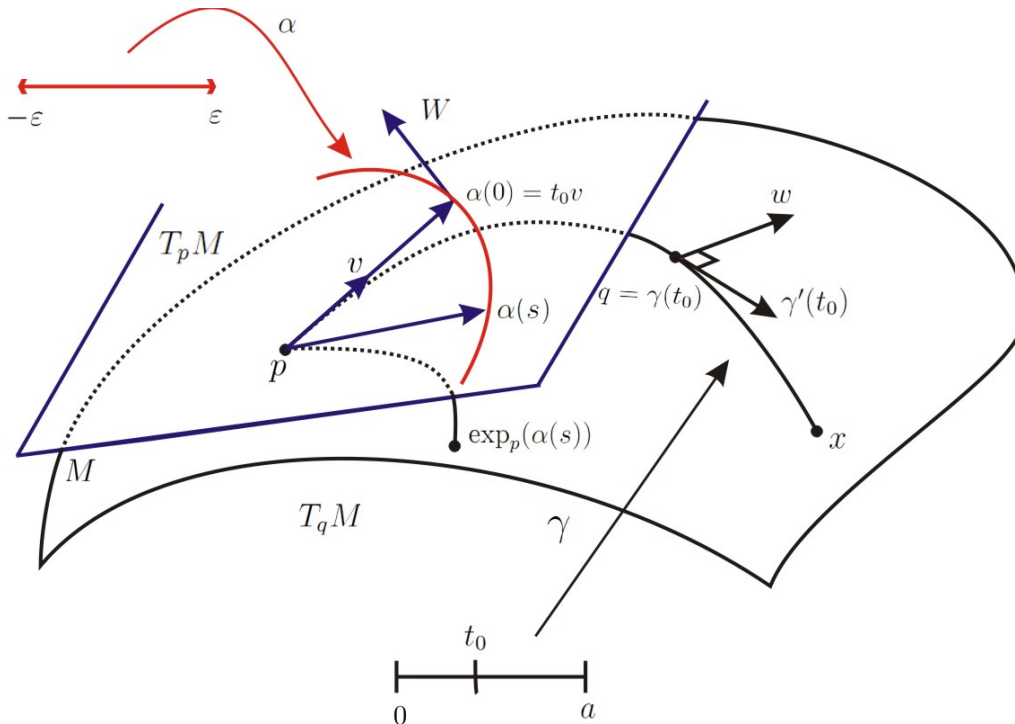


Figura 1.5: Ilustração da demonstração do Teorema 1.1.1.

Daí

$$0 = g(\nabla r(q), (d \exp_p)_{t_0 v} W) = g(\nabla r(q), w).$$

Como a igualdade acima vale para todo $w \perp \gamma'(t_0)$. Assim $\nabla r(q)$ é um múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Mas $r(\gamma(t)) = t$, $0 \leq t \leq a$, logo

$$g(\nabla r(\gamma(t)), \gamma'(t)) = 1.$$

Portanto

$$\nabla r(\gamma(t)) = \gamma'(t).$$

Em particular, sendo γ uma geodésica normalizada, temos

$$|\nabla r(x)| = |\nabla r(\gamma(a))| = |\gamma'(a)| = 1.$$

□

1.2 Variedades Complexas

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Uma *estrutura complexa* em V é um endomorfismo $J : V \rightarrow V$, tal que $J^2 = -1$, onde -1 denota o operador identidade em V . Tal estrutura torna V um espaço vetorial complexo via a multiplicação da unidade imaginária i por um vetor $v \in V$ definida por $iv := Jv$. Reciprocamente, todo espaço vetorial complexo possui uma estrutura complexa dada por $Jv := iv$. De fato,

$$J^2(v) = J(J(v)) = J(iv) = iJ(v) = i^2v = -v \quad \forall v \in V,$$

isto é, $J^2 = -1$.

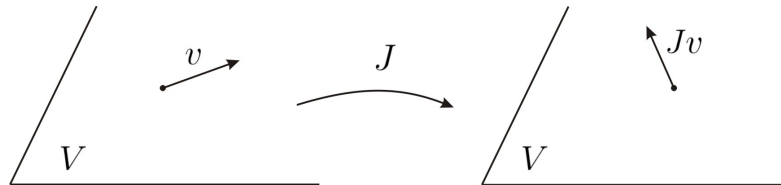


Figura 1.6: Estrutura complexa

Exemplo 1.2.1. Seja \mathbb{C}^m o espaço Euclidiano complexo. Escrevemos um vetor de \mathbb{C}^m como a m -upla

$$z = (z_1, \dots, z_m) = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)$$

e identificamos com o vetor $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ em \mathbb{R}^{2m} . Observe que o espaço Euclidiano complexo \mathbb{C}^m com as operações usuais de adição e multiplicação em \mathbb{C} , torna-se um espaço vetorial complexo. Assim podemos definir uma estrutura complexa J em \mathbb{C}^m por $J_m z = iz$, ou seja,

$$J_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (-y_1, \dots, -y_m, x_1, \dots, x_m).$$

A estrutura complexa J_m definida acima é chamada *estrutura complexa canônica*. Ao longo do texto, usaremos a identificação

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) \quad (1.1)$$

de \mathbb{C}^m com \mathbb{R}^{2m} e a estrutura complexa canônica J_m em \mathbb{R}^{2m} sem fazer referência.

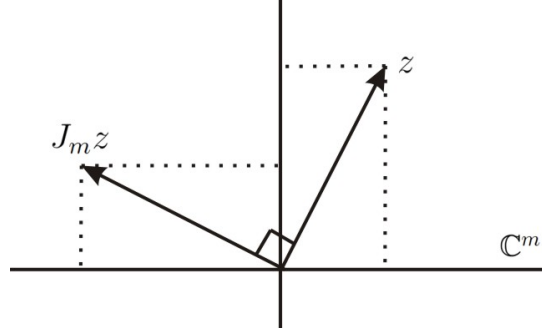


Figura 1.7: Estrutura complexa canônica

Sejam U um aberto de \mathbb{C}^m e $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função. Usando a identificação em (1.1), podemos escrever

$$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m), \\ g_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)).$$

Dizemos que $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é de classe C^1 , quando $F : U \subset \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é diferenciável e as derivadas parciais

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\beta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta}$$

são contínuas para todos $1 \leq \beta \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$.

Definição 1.2.1. *Seja U um aberto de \mathbb{C}^m . Dizemos que uma função $F : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é diferenciável (no sentido complexo) em $a \in U$, se existe uma aplicação \mathbb{C} -linear $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que*

$$F(a + h) = F(a) + L(h) + o(h), \quad \text{com} \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|}, \quad (1.2)$$

para todo $h \in \mathbb{C}^m \approx \mathbb{R}^{2m}$ de norma suficientemente pequena. A função $F : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é holomorfa em $a \in U$ se, e somente se, F é diferenciável (no sentido complexo) em uma vizinhança de a em U . Além disso, dizemos que F é holomorfa em U , se F é holomorfa em todo ponto de U .

Proposição 1.2.1. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^m$ aberto e $F = f + ig : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função de classe C^1 . Então F é holomorfa em U se, e somente se,*

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\beta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\beta} = -\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad \text{em} \quad U, \quad (1.3)$$

para todos $1 \leq \beta \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$.

Demonstração. Ver [7], página 29, Teorema 6.3. □

As equações em (1.3) são denominadas de *equações de Cauchy-Riemann* para a função $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Proposição 1.2.2. *Sejam U um aberto de \mathbb{C}^m e $F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função de classe C^1 . Então F é holomorfa em U se, e somente se,*

$$dF(z) \circ J_m = J_n \circ dF(z) \quad \forall z \in U,$$

onde J_m e J_n denotam as estruturas complexas canônicas de \mathbb{C}^m e \mathbb{C}^n , respectivamente.

Demonstração. Observe que a matriz de

$$J_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = (-y_1, \dots, -y_m, x_1, \dots, x_m)$$

na base canônica de \mathbb{R}^{2m} é a matriz quadrada de ordem $2m$ dada por

$$J_m = \begin{pmatrix} 0_m & -1_m \\ 1_m & 0_m \end{pmatrix}$$

onde 1_m e 0_m denotam a matriz identidade e a matriz nula de ordem m , respectivamente. Note que as condições de Cauchy-Riemann para a função

$$F = (f_1 + ig_1, \dots, f_n + ig_n) : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$$

são equivalentes à igualdade matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m}(z) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_m}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_m & -1_m \\ 1_m & 0_m \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m}(z) \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_m}(z) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a diferencial de F em $z \in U$ é uma aplicação linear $dF(z) : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, cuja representação nas bases canônicas de \mathbb{R}^{2m} e \mathbb{R}^{2n} é

$$dF(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(z) & \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(z) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_m}(z) \end{pmatrix}.$$

Logo, usando a Proposição 1.2.1, obtemos que $F : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é holomorfa se, e somente se,

$$dF(z) \circ J_m = J_n \circ dF(z) \quad \forall z \in U.$$

□

Definição 1.2.2. *Uma variedade complexa M de dimensão complexa m é uma variedade diferenciável de dimensão real $2m$, munida de um atlas formado por cartas $\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{C}^m \approx \mathbb{R}^{2m}$, tais que a mudança de coordenadas*

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma função holomorfa, sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

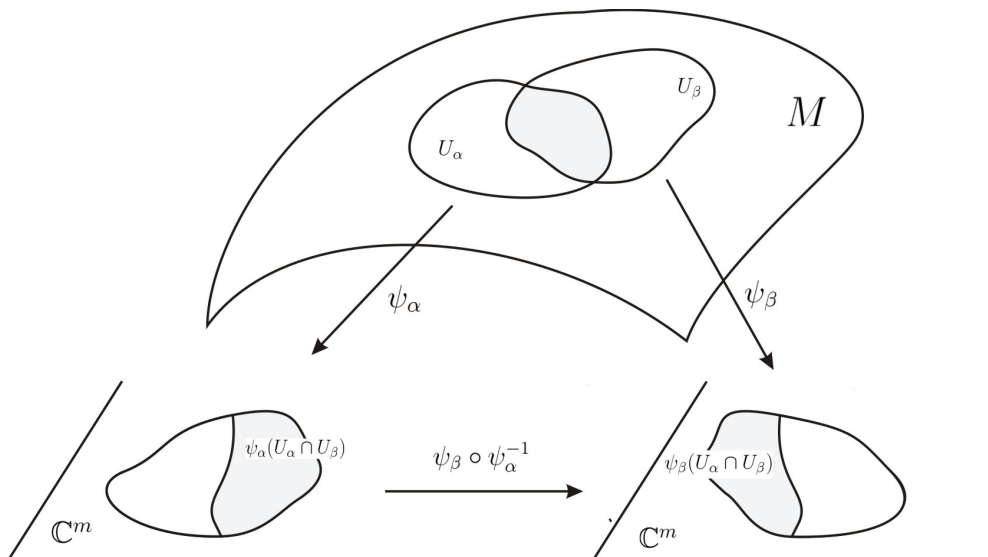


Figura 1.8: Mudança de coordenadas em uma variedade complexa.

O par (U_α, z_α) é denominado *carta coordenada holomorfa* ou *sistema de coordenadas complexas*. A coleção de todas as cartas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ é chamada *atlas complexo* para M . Se o atlas complexo $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ é maximal, dizemos que $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ é uma *estrutura complexa*.

Exemplo 1.2.2. Sejam M uma variedade complexa de dimensão complexa m e $U \subset M$ um aberto não-vazio. Observe que $U \subset M$, munido com o atlas induzido por M é também uma variedade complexa de dimensão complexa m .

No final da seção 2.4, daremos mais alguns exemplos de variedades complexas.

1.3 Variedades Quase-Complexas e Integrabilidade

Nesta seção vamos definir variedades quase-complexas e integrabilidade de uma estrutura quase-complexa. Também demonstraremos alguns resultados básicos referentes à variedades quase-complexas e enunciaremos um importante teorema provado em 1957 por Newlander e Nirenberg, ver [15]. Finalmente, introduziremos o conceito de métrica Hermitiana.

Definição 1.3.1. Uma estrutura quase-complexa em uma variedade diferenciável M é um campo de endomorfismos diferenciável J que associa a cada $p \in M$ um $(1, 1)$ -tensor $J(p) = J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ tal que $J_p^2 = -1$, onde 1 é o operador identidade em $T_p M$. Uma variedade diferenciável M , munida de uma estrutura quase-complexa J , é dita variedade quase-complexa.

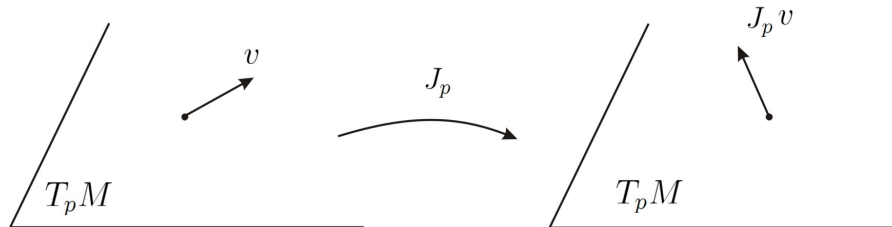


Figura 1.9: Estrutura quase-complexa

Proposição 1.3.1. Toda variedade quase-complexa (M, J) tem dimensão real par e, além disso, M é orientável.

Demonstração. Observe que podemos tornar o espaço tangente $T_p M$ em um espaço vetorial complexo definindo em $T_p M$ a multiplicação por um número complexo da seguinte forma

$$(a + ib)X = aX + bJX.$$

Suponhamos que a dimensão complexa de $T_p M$ é m e seja $\{X_1, \dots, X_m\}$ a base de $T_p M$ sobre \mathbb{C} . Daí $\{X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m\}$ é um conjunto linearmente independente que gera $T_p M$ sobre \mathbb{R} , ou seja, $\{X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m\}$ é uma base de $T_p M$ sobre \mathbb{R} .

\mathbb{R} . Portanto $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$. Agora, para concluir a demonstração dessa proposição, resta-nos mostrar que M é orientável, ou seja, as bases $\{X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m\}$ e $\{Y_1, \dots, Y_m, JY_1, \dots, JY_m\}$ distintas induzem a mesma orientação em $T_p M$. Com efeito, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, podemos escrever

$$Y_j = \sum_{k=1}^m a_{kj} X_k + \sum_{k=1}^m b_{kj} JX_k \quad \text{e} \quad JY_j = -\sum_{k=1}^m b_{kj} X_k + \sum_{k=1}^m a_{kj} JX_k$$

e considerar as matrizes quadradas de ordem m , $a = (a_{kj})$ e $b = (b_{kj})$. Note que a matriz de mudança de base pode ser representada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} \det(A) &= (\det(a))^2 + (-1)^m (\det(b)) (\det(-b)) = (\det(a))^2 + (-1)^{2m} (\det(b))^2 \\ &= (\det(a))^2 + (\det(b))^2 > 0, \end{aligned}$$

segue que M é orientável. □

Exemplo 1.3.1. As variedades complexas são variedades quase-complexas. De fato, seja M uma variedade complexa de dimensão m . Podemos definir em uma vizinhança coordenada complexa (U_α, ψ_α) o operador

$$J = (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha,$$

onde $J_m(z) = iz$. Veja que o operador J é um endomorfismo e está globalmente definido, pois se tomarmos outra carta complexa (U_β, ψ_β) com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e sendo a mudança de coordenada $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ holomorfa, temos

$$\begin{aligned} (d\psi_\beta)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\beta &= (d\psi_\beta)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\beta \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ d\psi_\alpha \\ &= (d\psi_\beta)^{-1} \circ d\psi_\beta \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha \\ &= (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J^2 &= ((d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha) \circ ((d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha) \\ &= (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m^2 \circ d\psi_\alpha \\ &= -(d\psi_\alpha)^{-1} \circ d\psi_\alpha \\ &= -1. \end{aligned}$$

Logo J é uma estrutura quase-complexa em M .

A estrutura quase-complexa J obtida no exemplo acima é denominada *estrutura quase-complexa canônica*.

Definição 1.3.2. Sejam M e N duas variedades complexas de dimensão complexa m e n , respectivamente. Uma função $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se, para todas as cartas coordenadas complexas $\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{C}^m$ e $\varphi_\beta : U_\beta \subset N \rightarrow \mathbb{C}^n$, com $f(U_\alpha) \subset U_\beta$, a expressão em coordenadas de f ,

$$\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \varphi_\beta(U_\beta) \subset \mathbb{C}^n,$$

é uma função holomorfa.

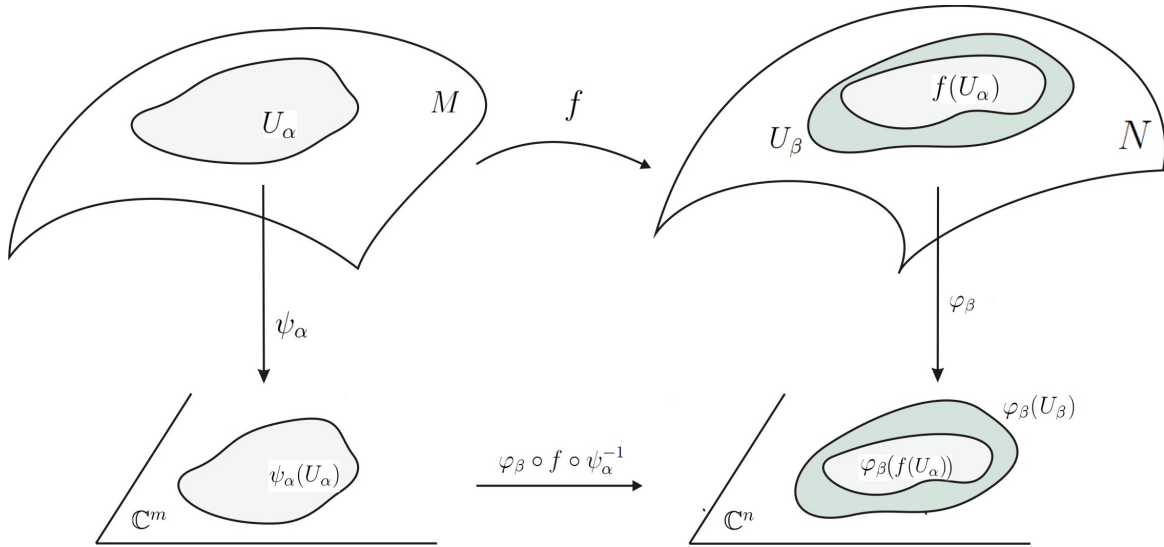


Figura 1.10: Aplicação holomorfa.

Observação 1.3.1. Sejam M e N variedades complexas de dimensão complexa m e n , respectivamente. Decorre da Definição 1.3.2 que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se,

$$\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \varphi_\beta(U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

é uma função holomorfa. Usando a Proposição 1.2.2, obtemos que $\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ é holomorfa se, e somente se,

$$d(\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ J_m = J_n \circ d(\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}),$$

donde

$$d\varphi_\beta \circ df \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m = J_n \circ d\varphi_\beta \circ df \circ (d\psi_\alpha)^{-1},$$

o que implica

$$df \circ (d\psi_\alpha)^{-1} \circ J_m \circ d\psi_\alpha = (d\varphi_\beta)^{-1} \circ J_n \circ d\varphi_\beta \circ df.$$

Logo $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se,

$$df \circ J = J' \circ df,$$

onde J e J' são as estruturas quase-complexas canônicas de M e N , respectivamente.

Observação 1.3.2. Consideremos M^m uma variedade complexa de dimensão complexa m e J a estrutura complexa canônica de M . Sejam $z_k = x_k + iy_k$ a k -ésima coordenada da carta coordenada complexa ψ e $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{2m} . Afirmamos que

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

De fato, por definição,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = (d\psi)^{-1}(e_k) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y_k} = (d\psi)^{-1}(e_{m+k})$$

para $1 \leq k \leq m$, onde

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$$

é um referencial local em M . Visto que J é a estrutura quase-complexa canônica de M , então

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = ((d\psi)^{-1} \circ J_m \circ d\psi)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = (d\psi)^{-1}(J_m(e_k)) = (d\psi)^{-1}(e_{m+k}) = \frac{\partial}{\partial y_k}$$

e

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = ((d\psi)^{-1} \circ J_m \circ d\psi)\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = (d\psi)^{-1}(J_m(e_{m+k})) = -(d\psi)^{-1}(e_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Sejam (M, J) uma variedade quase-complexa. A aplicação $N_J : TM \times TM \rightarrow TM$, definida por

$$N_J(X, Y) = 2\{[JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\}, \quad (1.4)$$

é um $(2, 1)$ -tensor sobre M , denominado o *tensor de Nijenhuis* (ou *torção*).

Definição 1.3.3. Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. Dizemos que J é uma estrutura integrável, se $N_J \equiv 0$.

Proposição 1.3.2. Sejam M^{2m} uma variedade complexa e J a estrutura quase-complexa canônica de M . Então J é integrável.

Demonstração. Seja $z_k = x_k + iy_k$ a k -ésima coordenada da carta coordenada complexa (U, ψ) . Segue da Observação 1.3.2 que

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (1.5)$$

para cada $1 \leq k \leq m$. Como N_J é um tensor, então para verificar que $N_J(X, Y) = 0$, para todos $X, Y \in TM$, basta mostrar que N_J é nulo nos campos coordenados. Para isto, observe que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right] = 0, \quad (1.6)$$

com $1 \leq j, k \leq n$. Substituindo as igualdades em (1.6) na expressão em (1.4) e usando (1.5), obtemos

$$N_J \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = N_J \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = N_J \left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = 0.$$

□

A recíproca desta proposição foi provada em 1957, por Newlander e Nirenberg, ver [15], página 393, Teorema 1.1. A saber:

Teorema 1.1 (Newlander e Nirenberg). *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. Se a estrutura quase-complexa J é integrável, então M admite uma única estrutura de variedade complexa em relação à qual J é a estrutura quase-complexa canônica.*

Veremos agora uma outra interpretação para a integrabilidade de J . Para isto, vamos considerar (M^{2m}, J) uma variedade quase-complexa de dimensão complexa m . A complexificação do espaço tangente de M em $p \in M$ é o produto tensorial $T_p M^{\mathbb{C}} = T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, cujos vetores são da forma $Z = X + iY$, com $X, Y \in T_p M$. Assim, $T_p M^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial complexo com dimensão complexa $2m$.

A estrutura quase-complexa J_p pode ser estendida a $T_p M^{\mathbb{C}}$ do seguinte modo:

$$J_p(X + iY) = J_p X + iJ_p Y \quad \forall X, Y \in T_p M.$$

Observe que

$$J_p^2(X + iY) = J_p(J_p(X) + iJ_p(Y)) = J_p^2(X) + iJ_p^2(Y) = -(X + iY),$$

isto é, $J_p^2 = -1$. Logo a extensão de J_p ao espaço vetorial $T_p M^{\mathbb{C}}$ é uma estrutura quase-complexa.

Agora considere

$$T_p^{1,0} M = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}}; J_p Z = iZ\} \quad \text{e} \quad T_p^{0,1} M = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}}; J_p Z = -iZ\} \quad (1.7)$$

os auto-espaços associados aos autovalores i e $-i$ de J_p , respectivamente. O auto-espaço $T_p^{1,0} M$ é chamado *espaço tangente complexificado*.

Lema 1.3.1. *Seja (M^{2m}, J) uma variedade quase-complexa de dimensão real $2m$. Os auto-espaços $T_p^{1,0} M$ e $T_p^{0,1} M$ de $T_p M^{\mathbb{C}}$, definidos em (1.7), têm dimensão complexa m e satisfazem*

- (i) $T_p^{1,0} M = \{X - iJX; X \in T_p M\}$;
- (ii) $T_p^{0,1} M = \{X + iJX; X \in T_p M\}$;
- (iii) $T_p M^{\mathbb{C}} = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M$.

Demonstração. Inicialmente, considere $\{e_1, \dots, e_m, J_p(e_1), \dots, J_p(e_m)\}$ uma base real de T_pM . Se

$$u_k = \frac{1}{2}(e_k - iJ_p(e_k)), \quad 1 \leq k \leq m,$$

então $\bar{u}_k = \frac{1}{2}(e_k + iJ_p(e_k))$ e $\{u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ é uma base complexa de $T_pM^{\mathbb{C}}$. Portanto a dimensão complexa de $T_pM^{\mathbb{C}}$ é $2m$. Note que

$$e_k = u_k + \bar{u}_k \quad \text{e} \quad J_p(e_k) = i(u_k - \bar{u}_k).$$

Daí

$$J_p(u_k) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) - iJ_p^2(e_k)) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) + ie_k) = \frac{i}{2}(e_k - iJ_p(e_k)) = iu_k$$

e

$$J_p(\bar{u}_k) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) + iJ_p^2(e_k)) = \frac{1}{2}(J_p(e_k) - ie_k) = -\frac{i}{2}(e_k + iJ_p(e_k)) = -i\bar{u}_k.$$

Logo $u_k \in T_p^{1,0}M$ e $\bar{u}_k \in T_p^{0,1}M$, para $1 \leq k \leq m$. Por outro lado,

$$T_p^{1,0}M \cap T_p^{0,1}M = \{0\}.$$

Deste modo $\{u_1, \dots, u_m\}$ e $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ são bases de $T_p^{1,0}M$ e $T_p^{0,1}M$, respectivamente. Assim concluímos os itens (i) e (ii). Além disso, obtemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_p^{1,0}M = \dim_{\mathbb{C}} T_p^{0,1}M = m.$$

Finalmente, o item (iii) decorre do fato da dimensão real de T_pM ser $2m$.

□

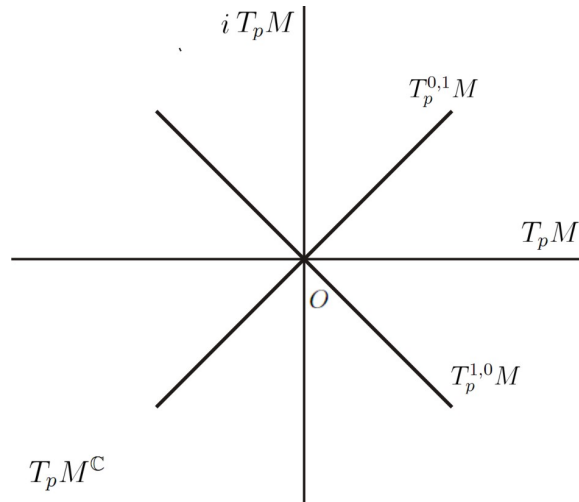


Figura 1.11: Espaço tangente complexificado.

Seja $TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a complexificação do fibrado tangente da variedade M , cujos elementos são da forma $Z = X + iY$, com $X, Y \in TM$. Tal elemento $Z \in TM^{\mathbb{C}}$ é

denominado *campo de vetores complexos* sobre M . A decomposição de $T_p M^{\mathbb{C}}$, para cada $p \in M$, em soma direta obtida no Lema (1.3.1), item (iii), induz uma decomposição na complexificação do fibrado tangente $TM^{\mathbb{C}}$ na soma de Whitney

$$TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus_W T^{0,1}M, \quad (1.8)$$

onde

$$T^{1,0}M = \{Z \in TM^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} = \{X - iJX; X \in TM\}$$

e

$$T^{0,1}M = \{Z \in TM^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\} = \{X + iJX; X \in TM\}.$$

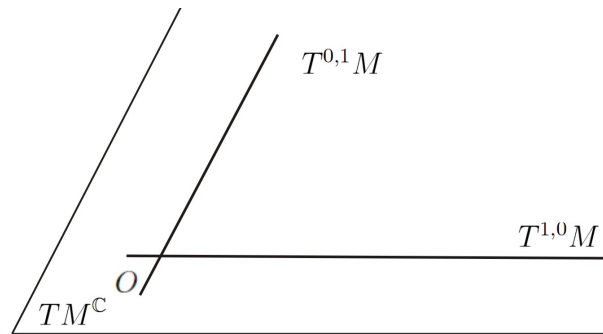


Figura 1.12: Complexificação do fibrado tangente.

Observe que podemos estender o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ à campos vetoriais complexos, do seguinte modo:

$$[X + iY, X' + iY'] = [X, X'] - [Y, Y'] + i([X, Y'] + [Y, X']).$$

Proposição 1.3.3. *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. A estrutura quase-complexa J é integrável se, e somente se, o colchete de Lie deixa invariante $T^{1,0}M$ (resp. $T^{0,1}M$), isto é,*

$$Z_1, Z_2 \in T^{1,0}M \text{ (resp. } Z_1, Z_2 \in T^{0,1}M) \implies [Z_1, Z_2] \in T^{1,0}M \text{ (resp. } [Z_1, Z_2] \in T^{0,1}M).$$

Demonstração. Seja $W = [X, Y] - [JX, JY]$. Note que

$$\begin{aligned} [X - iJX, Y - iJY] &= [X, Y] - [JX, JY] - i([X, JY] + [JX, Y]) \\ &= [X, Y] - [JX, JY] - iJ([X, Y] - [JX, JY]) + iJ([X, Y] \\ &\quad - [JX, JY]) - i([X, JY] + [JX, Y]) \\ &= W - iJW - iJ([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]) \\ &= W - iJW - \frac{1}{2}iJ(N_J(X, Y)). \end{aligned}$$

Logo o colchete de Lie deixa $T^{1,0}M$ invariante se, e somente se, $N_J \equiv 0$.

□

Exemplo 1.3.2. Qualquer variedade (M^2, J) quase-complexa de dimensão real 2 é integrável, ou seja, toda superfície munida de uma estrutura quase-complexa é integrável. Com efeito, seja $\{X_0, JX_0\}$ um referencial local em M . Usando a anti-simetria do colchete de Lie, obtemos

$$N_J(X_0, X_0) = 2 \{[JX_0, JX_0] - [X_0, X_0] - J[JX_0, X_0] - J[X_0, JX_0]\} = 0,$$

$$\begin{aligned} N_J(JX_0, JX_0) &= 2 \{[J^2X_0, J^2X_0] - [JX_0, JX_0] - J[J^2X_0, JX_0] - J[JX_0, J^2X_0]\} \\ &= 2 \{[X_0, X_0] - [JX_0, JX_0] + J[X_0, JX_0] + J[JX_0, X_0]\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N_J(X_0, JX_0) &= 2 \{[JX_0, J^2X_0] - [X_0, JX_0] - J[JX_0, JX_0] - J[X_0, J^2X_0]\} \\ &= 2 \{-[JX_0, X_0] - [X_0, JX_0] - J[JX_0, JX_0] + J[X_0, X_0]\} \\ &= 2 \{[X_0, JX_0] - [X_0, JX_0] - J[JX_0, JX_0] + J[X_0, X_0]\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como o tensor N_J é bilinear e nulo no referencial $\{X_0, JX_0\}$, obtemos

$$N_J(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in TM.$$

Definição 1.3.4. *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa. Uma métrica Hermitiana em M é uma métrica Riemanniana g , tal que J é uma isometria, ou seja,*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Uma variedade quase-complexa (M, J) , munida de uma métrica Hermitiana g , é chamada variedade quase-Hermitiana. No caso em que M é uma variedade complexa, dizemos que (M, g, J) é uma variedade Hermitiana.

Exemplo 1.3.3. *Seja g uma métrica Riemanniana em uma variedade quase-complexa (M, J) . Então sempre podemos obter uma métrica Hermitiana a partir de g . De fato, definindo $\hat{g} : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\hat{g}(X, Y) = \frac{1}{2}(g(X, Y) + g(JX, JY)) \quad \forall X, Y \in TM,$$

temos

$$\begin{aligned} \hat{g}(JX, JY) &= \frac{1}{2}(g(JX, JY) + g(J^2X, J^2Y)) \\ &= \frac{1}{2}(g(X, Y) + g(JX, JY)) \\ &= \hat{g}(X, Y). \end{aligned}$$

Teorema 1.3.1. *Seja (M, g, J) uma variedade quase-complexa. A métrica Riemanniana g em M é Hermitiana se, e somente se, $g(X, JX) = 0$ para todo $X \in TM$.*

Demonstração. Suponha que g é Hermitiana. Decorre da Definição 1.3.4 que

$$g(X, JX) = g(JX, J^2X) = -g(JX, X) = -g(X, JX),$$

donde

$$g(X, JX) = 0. \quad (1.9)$$

Agora iremos mostrar a recíproca. Se $g(X, JX) = 0$ para todo $X \in TM$, então

$$0 = g(X+Y, J(X+Y)) = g(X, JX) + g(X, JY) + g(Y, JX) + g(Y, JY) = g(X, JY) + g(Y, JX),$$

ou seja,

$$g(X, JY) = -g(Y, JX). \quad (1.10)$$

Portanto

$$g(JX, JY) = -g(Y, J^2X) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Logo g é Hermitiana. □

Definição 1.3.5. *Seja (M, g, J) uma variedade quase-Hermitiana. A 2-forma fundamental de M é uma 2-forma ω dada por*

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

para todos $X, Y \in TM$.

Dada uma métrica Riemanniana qualquer g em M , podemos estendê-la a um 2-tensor simétrico

$$g_{\mathbb{C}} : TM^{\mathbb{C}} \times TM^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$$

escrevendo

$$g_{\mathbb{C}}(X + iY, X' + iY') = g(X, X') - g(Y, Y') + i(g(X, Y') + g(X', Y)).$$

A extensão da métrica Riemanniana g a $TM^{\mathbb{C}}$ é chamada *complexificação da métrica g* e também é denotada por g .

Proposição 1.3.4. *A complexificação da métrica Riemanniana g satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\overline{g(Z, W)} = g(\overline{Z}, \overline{W}) \quad \forall Z, W \in TM$;
- (ii) $g(Z, \overline{Z}) > 0 \quad \forall Z \in TM^{\mathbb{C}}$;
- (iii) $g(Z, W) = 0 \quad \forall Z, W \in T^{1,0}M$ (ou $\forall Z, W \in T^{0,1}M$).

Demonstração. De fato, considere $Z = X + iY$ e $W = X' + iY'$.

(i) Usando a expressão da complexificação da métrica, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{g(Z, W)} &= \overline{g(X + iY, X' + iY')} \\
&= g(X, X') - g(Y, Y') - i(g(X, Y') + g(X', Y)) \\
&= g(X - iY, X' - iY') \\
&= g(\overline{Z}, \overline{W}).
\end{aligned}$$

(ii) Observe que

$$\begin{aligned}
g(Z, \overline{Z}) &= g(X + iY, X - iY) \\
&= g(X, X) + g(Y, Y) + i(-g(X, Y) + g(X, Y)) \\
&= g(X, X) + g(Y, Y),
\end{aligned}$$

assim concluímos que $g(Z, \overline{Z}) > 0$.

(iii) Como para $X - iJX, Y - iJY \in T^{1,0}M$ temos

$$g(X - iJX, Y - iJY) = g(X, Y) - g(JX, JY) - i(g(X, JY) + g(JX, Y)),$$

usando a expressão em (1.10) e o fato da métrica g ser Hermitiana, segue que

$$g(X - iJX, Y - iJY) = 0.$$

Analogamente,

$$g(X + iJX, Y + iJY) = g(X, Y) - g(JX, JY) + i(g(X, JY) + g(JX, Y)) = 0,$$

onde $X + iJX, Y + iJY \in T^{0,1}M$.

□

Sejam g a métrica Hermitiana de M^m e $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base do espaço tangente complexificado $T_x^{1,0}M$. Decorre da Proposição 1.3.4, item (iii), que

$$g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta) = 0 \quad \text{e} \quad g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g(e_{\bar{\alpha}}, e_{\bar{\beta}}) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Além disso, existem únicos $\tau_1, \dots, \tau_m \in T_x M$ tais que

$$e_1 = \frac{1}{2}(\tau_1 - iJ\tau_1), \quad \dots, \quad e_m = \frac{1}{2}(\tau_m - iJ\tau_m).$$

Dizemos que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é uma *base unitária* de $T_x^{1,0}M$, quando

$$\{\tau_1, J\tau_1, \dots, \tau_m, J\tau_m\}$$

é uma base ortonormal de $T_x M$, isto é,

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\bar{\beta}} &= g(e_\alpha, e_{\bar{\beta}}) = \frac{1}{4}g(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha, \tau_\beta + iJ\tau_\beta) \\
&= \frac{1}{4}\{g(\tau_\alpha, \tau_\beta) + g(J\tau_\alpha, J\tau_\beta) + i(g(\tau_\alpha, J\tau_\beta) - g(J\tau_\alpha, \tau_\beta))\} \\
&= \frac{1}{2}(g(\tau_\alpha, \tau_\beta) + ig(\tau_\alpha, J\tau_\beta)) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

para todos $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Iremos obter as expressões da métrica Hermitiana g e da 2-forma fundamental $\omega = g(J, \cdot)$ no sistema de coordenadas complexas (U, ψ) de M , no qual J é a estrutura quase-complexa canônica de M . Considere $z_k = x_k + iy_k$ a k -ésima coordenada de z e definamos os campos complexos

$$\frac{\partial}{\partial z_k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right),$$

onde

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$$

é a base coordenada associada as coordenadas $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$. Podemos escrever

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial y_k} \quad \text{e} \quad J \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (1.12)$$

ver Observação 1.3.2. Deste modo, usando o Lema 1.3.1,

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - iJ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \in T^{1,0}M \quad (1.13)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + iJ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \in T^{0,1}M, \quad (1.14)$$

e, portanto, $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m} \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \right\}$ são bases de $T_x^{1,0}M$ e $T_x^{0,1}M$, respectivamente. Decorre da soma direta em (1.8) que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \right\}$$

é uma base da complexificação do fibrado tangente $TM^{\mathbb{C}}$. Com isso, concluímos que

$$g \left(\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right) = g \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) = 0, \quad 1 \leq k, j \leq m.$$

Agora denotando

$$g \left(\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) = g_{k\bar{j}},$$

obtemos a expressão em coordenadas da métrica Hermitiana g em uma variedade complexa M , munida de uma estrutura quase-complexa J , a saber:

$$ds^2 = \sum_{k,j=1}^m g_{k\bar{j}} dz_k \odot d\bar{z}_j,$$

onde $dz_k \odot d\bar{z}_j := dz_k d\bar{z}_j + d\bar{z}_j dz_k$, $dz_k d\bar{z}_j$ denota um produto tensorial, $dz_k = dx_k + idy_k$ e $d\bar{z}_j = dx_k - idy_k$. Usando a notação de Einstein, escrevemos somente

$$ds^2 = g_{k\bar{j}} dz_k \odot d\bar{z}_j. \quad (1.15)$$

Também podemos obter uma simples expressão da 2-forma fundamental de M , no caso em que M é munida de uma estrutura quase-complexa canônica J . De fato, usando as igualdades em (1.13) e (1.14), obtemos

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right) = g \left(J \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right) = ig \left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right) = 0.$$

Analogamente,

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) = 0.$$

Visto que

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) = g \left(J \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) = ig \left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) = ig_{j\bar{k}},$$

então temos

$$\omega = ig_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k. \quad (1.16)$$

Capítulo 2

Variedades Kähler

2.1 Definições e Alguns Resultados Básicos

Seja (M, g, J) uma variedade Hermitiana com estrutura quase-complexa J e métrica Hermitiana g . A derivada covariante do tensor J é dada por

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y. \quad (2.1)$$

Definição 2.1.1. *Sejam (M, g, J) uma variedade Hermitiana e ∇ a conexão de Levi-Civita. A variedade M é dita variedade Kähler, se $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in TM$, ou seja, se J é paralelo.*

Lema 2.1.1. *Sejam (M, g, J) uma variedade Hermitiana e ∇ a conexão de Levi-Civita, então*

$$(i) \quad (\nabla_Y J)JX = -J(\nabla_Y J)X \quad \forall X, Y \in TM;$$

$$(ii) \quad g((\nabla_Y J)X, Z) = -g(X, (\nabla_Y J)Z) \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

Demonstração. Veja que, derivando covariantemente $J(JX) = -X$ com respeito a Y e usando a igualdade em (2.1), obtemos

$$-\nabla_Y X = \nabla_Y (J(JX)) = (\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y JX) = (\nabla_Y J)(JX) + J((\nabla_Y J)X + J\nabla_Y X),$$

para todos $X, Y \in TM$, donde

$$-\nabla_Y X = (\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y J)X - \nabla_Y X.$$

Assim

$$(\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y J)X = 0,$$

para todos $X, Y \in TM$. Isso conclui o item (i). Agora mostraremos o item (ii). Observe que, sendo g Hermitiana, vimos em (1.9) que $g(X, JX) = 0$ para todo $X \in TM$. Deste modo,

$$Y(g(X, JX)) = 0,$$

donde

$$g(\nabla_Y X, JX) + g(X, \nabla_Y JX) = 0 \Rightarrow g(\nabla_Y X, JX) + g(X, (\nabla_Y J)X) + g(X, J\nabla_Y X) = 0.$$

Como $g(X, J\nabla_Y X) = -g(JX, \nabla_Y X) = -g(\nabla_Y X, JX)$, segue que

$$g(X, (\nabla_Y J)X) = 0.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} 0 &= g(X + Z, (\nabla_Y J)(X + Z)) \\ &= g(X, (\nabla_Y J)X) + g(X, (\nabla_Y J)Z) + g(Z, (\nabla_Y J)X) + g(Z, (\nabla_Y J)Z) \\ &= g(X, (\nabla_Y J)Z) + g(Z, (\nabla_Y J)X). \end{aligned}$$

Logo

$$g(X, (\nabla_Y J)Z) = -g(Z, (\nabla_Y J)X).$$

Isso conclui o item (ii). □

Proposição 2.1.1. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Então a estrutura quase-complexa J é integrável.*

Demonstração. Note que, por definição,

$$\frac{1}{2}N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY].$$

Usando o Lema 2.1.1 e sabendo que ∇ é a conexão de Levi-Civita, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N_J(X, Y) &= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X - J\nabla_{JX}Y + J\nabla_Y JX \\ &\quad - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY}X \\ &= (\nabla_{JX}JY - J\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}JX - J\nabla_{JY}X) \\ &\quad + (\nabla_Y X + J\nabla_Y JX) - (\nabla_X Y + J\nabla_X JY) \\ &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y. \end{aligned}$$

Como $\nabla J \equiv 0$, segue que $N_J \equiv 0$. Logo, por definição, J é integrável. □

Seja ω uma k -forma diferencial sobre uma variedade diferenciável M . A diferencial de ω é uma $(k+1)$ -forma denotada por $d\omega$. Dizemos que ω é *fechada* quando $d\omega = 0$. Considere agora $\omega \in \Omega^2 M$ uma 2-forma diferencial sobre M e definimos a derivada covariante de ω por

$$(\nabla_Z \omega)(X, Y) := Z(\omega(X, Y)) - \omega(\nabla_Z X, Y) - \omega(X, \nabla_Z Y)$$

para todos $X, Y, Z \in TM$.

Lema 2.1.2 (Fórmula de Koszul). *Se ω é uma 2-forma diferencial, então a diferencial é uma 3-forma que satisfaz*

$$d\omega(X, Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X).$$

Demonstração. Ver [5], página 49, Proposição 2. □

Lema 2.1.3. *Sejam (M, g, J) uma variedade Hermitiana e ∇ a conexão de Levi-Civita. Se $\omega = g(J, \cdot)$ é a 2-forma fundamental sobre M , então*

$$d\omega(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z) - g((\nabla_Y J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, Y)$$

para todos $X, Y, Z \in TM$.

Demonstração. Observe que a 2-forma fundamental ω é definida por

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Aplicando a fórmula de Koszul em ω , obtemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) - g(J\nabla_X Y - J\nabla_Y X, Z) \\ &\quad + g(J\nabla_X Z - J\nabla_Z X, Y) - g(J\nabla_Y Z - J\nabla_Z Y, X) \\ &= (X(\omega(Y, Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) + g(J\nabla_X Z, Y)) \\ &\quad - (Y(\omega(X, Z)) + g(J\nabla_Y X, Z) - g(J\nabla_Y Z, X)) \\ &\quad + (Z(\omega(X, Y)) - g(J\nabla_Z X, Y) + g(J\nabla_Z Y, X)) \\ &= (X(\omega(Y, Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z)) \\ &\quad - (Y(\omega(X, Z)) + \omega(\nabla_Y X, Z) + \omega(X, \nabla_Y Z)) \\ &\quad + (Z(\omega(X, Y)) - \omega(\nabla_Z X, Y) - \omega(X, \nabla_Z Y)), \end{aligned}$$

isto é, a diferencial de ω é a 3-forma dada por

$$d\omega(X, Y, Z) = (\nabla_X \omega)(Y, Z) - (\nabla_Y \omega)(X, Z) + (\nabla_Z \omega)(X, Y) \quad (2.2)$$

para todos $X, Y, Z \in TM$. Agora encontraremos as expressões de

$$(\nabla_X \omega)(Y, Z), \quad (\nabla_Y \omega)(X, Z) \quad e \quad (\nabla_Z \omega)(X, Y)$$

em função da métrica g . De fato, usando a definição de derivada covariante de 2-forma diferencial, temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X \omega)(Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= X(g(JY, Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\ &= g((\nabla_X J)Y, Z). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$(\nabla_X \omega)(X, Z) = g((\nabla_Y J)X, Z) \quad \text{e} \quad (\nabla_Z \omega)(X, Y) = g((\nabla_Z J)X, Y).$$

Substituindo estas expressões na igualdade em (2.2), concluímos o resultado. \square

Teorema 2.1.1. *Sejam (M, g, J) uma variedade Hermitiana e ∇ a conexão de Levi-Civita. Então a variedade M é Kähler se, e somente se, a estrutura quase-complexa J é integrável e 2-forma fundamental $\omega = g(J, \cdot)$ é fechada.*

Demonstração. Se $\nabla J = 0$, decorre do Lema 2.1.3 que $d\omega = 0$. Agora, usando a Proposição 2.1.1, obtemos que J é integrável. Reciprocamente, observe que

$$\begin{aligned} (\nabla_Y J)JX + J(\nabla_Y J)X &= \nabla_Y J^2 X - J\nabla_Y JX + J(\nabla_Y JX - J\nabla_Y X) \\ &= -\nabla_Y X - J\nabla_Y JX + J\nabla_Y JX + \nabla_Y X \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Usando o Lema 2.1.3, juntamente com a igualdade em (2.3) e o caráter Hermitiano da métrica g , obtemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) - d\omega(JX, JY, Z) &= g((\nabla_X J)Y, Z) - g((\nabla_Y J)X, Z) + g((\nabla_Z J)X, Y) - g((\nabla_{JX} J)JY, Z) \\ &\quad + g((\nabla_{JY} J)JX, Z) - g((\nabla_Z J)JX, JY) \\ &= g(-J^2(\nabla_X J)Y, Z) - g(-J^2(\nabla_Y J)X, Z) + g((\nabla_Z J)X, Y) + g(J(\nabla_{JX} J)Y, Z) \\ &\quad - g(J(\nabla_{JY} J)X, Z) + g((\nabla_Z J)X, Y) \\ &= g(-J^2(\nabla_X J)Y + J^2(\nabla_Y J)X + J(\nabla_{JX} J)Y - J(\nabla_{JY} J)X, Z) \\ &\quad + g((\nabla_Z J)X + (\nabla_Z J)X, Y) \\ &= g(J(J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_{JY} J)X), Z) + 2g((\nabla_Z J)X, Y) \\ &= \frac{1}{2}g(JN_J(X, Y), Z) + 2g((\nabla_Z J)X, Y) \end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in TM$. Como, por hipótese, $d\omega = N_J = 0$, então

$$g((\nabla_Z J)X, Y) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

Logo $\nabla J = 0$. \square

Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Decorre do Teorema 2.1.1 que a 2-forma fundamental ω é fechada. Nesse caso, ω é chamada *forma Kähler* e a métrica Hermitiana g é denominada *métrica Kähler*. Segue do teorema de Newlander-Nirenberg, juntamente com Teorema 2.1.1, que a estrutura quase-complexa J é a estrutura quase-complexa canônica de M . Deste modo, a métrica Kähler e a forma Kähler são expressas, ver (1.15) e (1.16), em coordenadas por

$$ds^2 = g_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \odot d\bar{z}_\beta \quad \text{e} \quad \omega = ig_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta. \tag{2.4}$$

Teorema 2.1.2. *Seja (M^m, g, J) uma variedade Hermitiana de dimensão complexa m . Então a variedade M é Kähler se, e somente se, em cada $p \in M$, existem coordenadas holomorfas $z = (z_1, \dots, z_m)$ tais que*

$$g(z) = 1 + O(|z|^2).$$

Demonstração. Ver [1], página 47, Teorema 4.17, item 7. □

Este resultado é bastante útil, pois ele garante em variedades Kähler, a existência de um sistema de coordenadas bastante simples chamado *sistema de coordenadas normais holomorfas*. Além disso, nos afirma que a métrica Kähler coincide localmente com a métrica Euclidiana.

2.2 Curvaturas em Variedades Kähler

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita. O *tensor curvatura* é um $(3,1)$ -tensor R definido por

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

A partir deste tensor, podemos definir o $(4,0)$ -tensor

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W) \quad \forall X, Y, Z, W \in TM,$$

denominado *tensor curvatura Riemanniana*.

O lema abaixo compõe-se em propriedades básicas do tensor curvatura Riemanniana. A demonstração dessas propriedades pode ser consultada em [6].

Lema 2.2.1. *O tensor curvatura Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$,
- (ii) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ (*anti-simetria*),
- (iii) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ (*primeira identidade de Bianchi*),
- (iv) $(\nabla_X R)(Y, Z, W, T) + (\nabla_Y R)(Z, X, W, T) + (\nabla_Z R)(X, Y, W, T) = 0$ (*segunda identidade de Bianchi*)

para todos $X, Y, Z, W, T \in TM$.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local de TM . O *tensor de Ricci* da variedade Riemanniana M^n é definido por

$$Ric_M(X, Y) := \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Decorre diretamente da simetria do tensor curvatura Riemanniana que o tensor de Ricci de qualquer variedade Riemanniana é simétrico, ou seja,

$$Ric_M(X, Y) = Ric_M(Y, X) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Proposição 2.2.1. *Seja (M^n, g, J) uma variedade Kähler. Então*

$$(i) \quad R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y),$$

$$(ii) \quad R(X, Y, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W),$$

$$(iii) \quad Ric(JX, Y) = -Ric(X, JY)$$

para todos $X, Y, Z, W \in TM$.

Demonstração. Como M é uma variedade Kähler, J é paralelo com respeito a conexão de Levi-Civita. Portanto

$$\begin{aligned} R(X, Y)JZ &= \nabla_X \nabla_Y JZ - \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_{[X, Y]} JZ \\ &= \nabla_X ((\nabla_Y J)Z + J\nabla_Y Z) - \nabla_Y ((\nabla_X J)Z + J\nabla_X Z) - (\nabla_{[X, Y]} J)Z - J\nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \nabla_X J\nabla_Y Z - \nabla_Y J\nabla_X Z - J\nabla_{[X, Y]} Z \\ &= (\nabla_X J)\nabla_Y Z + J\nabla_X \nabla_Y Z - (\nabla_Y J)\nabla_X Z - J\nabla_Y \nabla_X Z - J\nabla_{[X, Y]} Z \\ &= J(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= JR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

isto é,

$$R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z \quad \forall X, Y \in TM. \quad (2.5)$$

Assim concluímos o item (i). Agora usando as igualdades em (2.5) e (1.10), temos

$$g(R(X, Y)JZ, W) = g(JR(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)Z, JW),$$

donde

$$R(X, Y, JZ, W) = -R(X, Y, Z, JW),$$

Logo segue-se o item (ii),

$$R(X, Y, JZ, JW) = -R(X, Y, Z, J^2W) = R(X, Y, Z, W) \quad \forall X, Y, Z, W \in TM. \quad (2.6)$$

Mostraremos finalmente o item (iii). Veja que

$$\begin{aligned} Ric(JX, Y) &= \sum_{i=1}^n R(e_i, JX, Y, e_i) = -\sum_{i=1}^n R(Je_i, X, Y, e_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n R(Je_i, X, -J^2Y, e_i) = -\sum_{i=1}^n R(Je_i, X, JY, Je_i). \end{aligned}$$

Como J é uma isometria, então $\{Je_1, \dots, Je_n\}$ ainda é um referencial ortonormal local de TM . Daí

$$Ric(JX, Y) = -Ric(X, JY) \quad (2.7)$$

para todos $X, Y \in TM$.

□

2.3 Símbolos de Christoffel e Tensor Curvatura em Coordenadas

Sejam (M^m, g, J) uma variedade Kähler de dimensão complexa m , ∇ a conexão de Levi-Civita e (U, z) um sistema de coordenadas complexas. Consideremos o referencial local associado à complexificação do fibrado tangente $TM^{\mathbb{C}}$:

$$Z_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad Z_{\bar{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq m. \quad (2.8)$$

Assim como a métrica g tem extensões \mathbb{C} -lineares para $TM^{\mathbb{C}}$, a conexão de Levi-Civita ∇ , o tensor curvatura R e o tensor de Ricci também podem ser estendidos por \mathbb{C} -linearidade a $TM^{\mathbb{C}}$, por exemplo:

$$\begin{aligned} \nabla_{(U+iV)}(X+iY) &= \nabla_{(U+iV)}X + i\nabla_{(U+iV)}Y \\ &= (\nabla_U X + i\nabla_V X) + i(\nabla_U Y + i\nabla_V Y) \\ &= (\nabla_U X - \nabla_V Y) + i(\nabla_U Y + \nabla_V X). \end{aligned}$$

Considere as seguintes convenções:

- (i) $A, B, C, \dots \in \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}$,
- (ii) $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \{1, \dots, m\}$,
- (iii) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Usando a convenção acima, definimos os símbolos de Christoffel relativos a base $\{Z_A\} = \{Z_1, \dots, Z_m, Z_{\bar{1}}, \dots, Z_{\bar{m}}\}$ de $TM^{\mathbb{C}}$ por

$$\nabla_{Z_A} Z_B := \sum_C \Gamma_{AB}^C Z_C.$$

A simetria da conexão de Levi-Civita ∇ , implica que

$$\Gamma_{AB}^C = \Gamma_{BA}^C. \quad (2.9)$$

Visto que $\overline{\nabla_{Z_A} Z_B} = \nabla_{\bar{Z}_A} \bar{Z}_B$, obtemos

$$\sum_C \overline{\Gamma_{AB}^C} Z_C = \overline{\sum_C \Gamma_{AB}^C Z_C} = \sum_C \Gamma_{\bar{A}\bar{B}}^{\bar{C}} Z_C = \sum_C \Gamma_{\bar{A}\bar{B}}^{\bar{C}} Z_{\bar{C}},$$

e, portanto,

$$\overline{\Gamma_{AB}^C} = \Gamma_{\bar{A}\bar{B}}^{\bar{C}}. \quad (2.10)$$

Proposição 2.3.1. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Se $Z \in T^{1,0}M$ (resp. $Z \in T^{0,1}M$), então $\nabla_W Z \in T^{1,0}M$ (resp. $\nabla_W Z \in T^{0,1}M$) para todo $W \in TM^{\mathbb{C}}$.*

Demonstração. Considere $W = U + iV \in TM^{\mathbb{C}}$ e $X \in TM$. Veja que

$$\begin{aligned}\nabla_W(X - iJX) &= (\nabla_U X + \nabla_V JX) + i(-\nabla_U JX + \nabla_V X) \\ &= (\nabla_U X + J\nabla_V X) + i(-J\nabla_U X - J^2\nabla_V X) \\ &= (\nabla_U X + J\nabla_V X) - iJ(\nabla_U X + J\nabla_V X)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla_W(X + iJX) &= (\nabla_U X - \nabla_V JX) + i(\nabla_U JX + \nabla_V X) \\ &= (\nabla_U X - J\nabla_V X) + i(J\nabla_U X - J^2\nabla_V X) \\ &= (\nabla_U X - J\nabla_V X) + iJ(\nabla_U X - J\nabla_V X).\end{aligned}$$

Logo $\nabla_W(X - iJX) \in T^{1,0}M$ e $\nabla_W(X + iJX) \in T^{0,1}M$, para qualquer $W \in TM^{\mathbb{C}}$ e $X \in TM$. □

Proposição 2.3.2. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Então os símbolos de Christoffel Γ_{AB}^C satisfazem*

$$\Gamma_{A\alpha}^{\bar{\beta}} = \Gamma_{A\bar{\alpha}}^{\beta} = 0$$

para todos $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$ e $A \in \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}$.

Demonstração. Visto que $Z_\alpha \in T^{1,0}M$, usando a Proposição 2.3.1, temos

$$\nabla_{Z_A} Z_\alpha = \sum_C \Gamma_{A\alpha}^C Z_C \in T^{1,0}M,$$

consequentemente, $\Gamma_{A\alpha}^{\bar{\beta}} = 0$. Analogamente, $Z_{\bar{\alpha}} \in T^{0,1}M$ e $\nabla_{Z_A} Z_{\bar{\alpha}} = \sum_C \Gamma_{A\bar{\alpha}}^C Z_C \in T^{0,1}M$, o que implica, $\Gamma_{A\bar{\alpha}}^{\beta} = 0$. □

Uma consequência direta e bastante útil da Proposição 2.3.2 é expressa no seguinte resultado:

Corolário 2.3.1. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Os únicos símbolos de Christoffel Γ_{AB}^C , possivelmente não-nulos, são do tipo*

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}$$

para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, m\}$.

Vamos calcular os símbolos de Christoffel no sistema de coordenadas complexas dadas em (2.8). Com efeito,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z_\beta} &= Z_\beta(g(Z_\alpha, Z_{\bar{\delta}})) = g(\nabla_{Z_\beta} Z_\alpha, Z_{\bar{\delta}}) + g(Z_\alpha, \nabla_{Z_\beta} Z_{\bar{\delta}}) \\ &= g\left(\sum_\eta \Gamma_{\alpha\beta}^\eta Z_\eta, Z_{\bar{\delta}}\right) + g\left(Z_\alpha, \sum_\eta \Gamma_{\beta\bar{\delta}}^\eta Z_\eta\right) = g\left(\sum_\eta \Gamma_{\alpha\beta}^\eta Z_\eta, Z_{\bar{\delta}}\right) \\ &= \sum_\eta \Gamma_{\alpha\beta}^\eta g_{\eta\bar{\delta}}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Denotemos por $(g^{\alpha\bar{\beta}})$ a matriz inversa da matriz fundamental $(g_{\alpha\bar{\beta}})$, isto é,

$$\sum_{\beta=1}^m g_{\alpha\bar{\beta}} g^{\gamma\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Portanto

$$\sum_{\delta} g^{\gamma\bar{\delta}} \frac{\partial g_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z_{\beta}} = \sum_{\delta} \sum_{\eta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} g_{\eta\bar{\delta}} g^{\gamma\bar{\delta}} = \sum_{\eta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \delta_{\eta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad (2.12)$$

ou seja,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \sum_{\delta} g^{\gamma\bar{\delta}} \frac{\partial g_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z_{\beta}} = \sum_{\delta} g^{\gamma\bar{\delta}} \frac{\partial g_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_{\alpha}} \quad (2.13)$$

e

$$\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = \overline{\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}} = \sum_{\delta} g^{\bar{\gamma}\delta} \frac{\partial g_{\bar{\alpha}\delta}}{\partial \bar{z}_{\beta}} = \sum_{\delta} g^{\bar{\gamma}\delta} \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial \bar{z}_{\alpha}}. \quad (2.14)$$

A seguir veremos o que ocorre com o tensor curvatura em variedades Kähler. Observe que

$$R(Z_A, Z_B)Z_C = \sum_D R_{ABC}^D Z_D,$$

o que define as coordenadas R_{ABC}^D do tensor curvatura R no sistema de coordenada complexa (U, z) . Definiremos também os coeficientes de R por

$$R_{ABCD} := R(Z_A, Z_B, Z_C, Z_D). \quad (2.15)$$

Daí

$$\begin{aligned} R_{ABCD} &= g\left(\sum_E R_{ABC}^E Z_E, Z_D\right) = \sum_E R_{ABC}^E g(Z_E, Z_D) \\ &= \sum_E R_{ABC}^E g_{ED} = \sum_E g_{DE} R_{ABC}^E. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Lema 2.3.1. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Se Z_C é um campo de tipo $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$), então $R(Z_A, Z_B)Z_C$ é um campo de tipo $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$).*

Demonstração. Note que, por definição,

$$R(Z_A, Z_B)Z_C = \nabla_{Z_A} \nabla_{Z_B} Z_C - \nabla_{Z_B} \nabla_{Z_A} Z_C - \nabla_{[Z_A, Z_B]} Z_C.$$

Além disso, a Proposição 2.3.1 afirma que ∇ preserva campos de tipo $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Logo concluímos que $R(Z_A, Z_B)Z_C$ é de tipo $(1, 0)$. Analogamente, ∇ também preserva campos de tipo $(0, 1)$, deste modo, se Z_C é um campo de tipo $(0, 1)$, obtemos que $R(Z_A, Z_B)Z_C$ é de tipo $(0, 1)$.

□

Lema 2.3.2. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Então as coordenadas e coeficientes do tensor curvatura R satisfazem*

$$R_{AB\bar{\beta}}^\alpha = R_{AB\beta}^{\bar{\alpha}} = 0 \quad \text{e} \quad R_{AB\alpha\beta} = R_{AB\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$$

para todos $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$ e $A, B \in \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}$.

Demonstração. Note que $Z_\beta \in T^{1,0}M$, usando o Lema 2.3.1, obtemos que

$$R(Z_A, Z_B)Z_\beta = \sum_C R_{AB\beta}^C Z_C \in T^{1,0}M.$$

Logo

$$R_{AB\beta}^{\bar{\alpha}} = 0.$$

Analogamente, podemos obter $R_{AB\bar{\beta}}^\alpha = 0$. Como $g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$, concluímos

$$R_{AB\alpha\beta} = \sum_E g_{\beta E} R_{AB\alpha}^E = \sum_\gamma g_{\beta\bar{\gamma}} R_{AB\alpha}^{\bar{\gamma}} = 0$$

e

$$R_{AB\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \sum_E g_{\bar{\beta} E} R_{AB\bar{\alpha}}^E = \sum_\gamma g_{\bar{\beta}\gamma} R_{AB\bar{\alpha}}^\gamma = 0.$$

□

Proposição 2.3.3. *Seja (M, g, J) uma variedade Kähler. Os únicos coeficientes R_{BCD}^A e R_{ABCD} , possivelmente não nulos, são os do tipo*

$$R_{\bar{\beta}\gamma\delta}^\alpha, \quad R_{\beta\bar{\gamma}\delta}^\alpha, \quad R_{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^{\bar{\alpha}}, \quad R_{\beta\bar{\gamma}\bar{\delta}}^{\bar{\alpha}}, \quad R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\delta}, \quad R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta}, \quad R_{\bar{\alpha}\beta\gamma\delta} \quad \text{e} \quad R_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}$$

para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, m\}$.

Demonstração. O resultado decorre diretamente do Lema 2.3.2.

□

Iremos calcular os coeficientes do tensor curvatura no sistema de coordenadas complexas dado em (2.8). Note que

$$\begin{aligned} R(Z_\beta, Z_\gamma)Z_\delta &= \nabla_{Z_\beta} \nabla_{Z_\gamma} Z_\delta - \nabla_{Z_\gamma} \nabla_{Z_\beta} Z_\delta - \nabla_{[Z_\beta, Z_\gamma]} Z_\delta \\ &= \nabla_{Z_\beta} \left(\sum_A \Gamma_{\bar{\gamma}\delta}^A Z_A \right) - \nabla_{Z_\gamma} \left(\sum_B \Gamma_{\beta\delta}^B Z_B \right) \\ &= -\nabla_{Z_\gamma} \left(\sum_B \Gamma_{\beta\delta}^B Z_B \right) \\ &= -\sum_\eta \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\eta}{\partial \bar{z}_\gamma} Z_\eta - \sum_\eta \Gamma_{\beta\delta}^\eta \nabla_{Z_\gamma} Z_\eta \\ &= -\sum_\eta \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\eta}{\partial \bar{z}_\gamma} Z_\eta. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{\eta} R_{\beta\bar{\gamma}\delta}^{\eta} Z_{\eta} = R(Z_{\beta}, Z_{\bar{\gamma}}) Z_{\delta} = - \sum_{\eta} \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\eta}}{\partial \bar{z}_{\gamma}} Z_{\eta},$$

donde

$$R_{\beta\bar{\gamma}\delta}^{\alpha} = - \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial \bar{z}_{\gamma}}. \quad (2.17)$$

Analogamente, podemos obter

$$R_{\beta\bar{\gamma}\delta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha}}{\partial \bar{z}_{\beta}}. \quad (2.18)$$

Usando as igualdades em (2.16), (2.17), (2.11) e (2.13), segue que

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} &= \sum_{\tau} g_{\bar{\delta}\tau} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma}^{\tau} = - \sum_{\tau} g_{\bar{\delta}\tau} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau}}{\partial \bar{z}_{\beta}} \\ &= - \sum_{\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\beta}} (g_{\bar{\delta}\tau} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau}) + \sum_{\tau} \frac{\partial g_{\bar{\delta}\tau}}{\partial \bar{z}_{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau} \\ &= - \sum_{\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{\beta}} \left(\frac{\partial g_{\gamma\bar{\delta}}}{\partial z_{\alpha}} \right) + \sum_{\tau} \frac{\partial g_{\bar{\delta}\tau}}{\partial \bar{z}_{\beta}} \sum_{\eta} g^{\bar{\eta}\tau} \frac{\partial g_{\gamma\bar{\eta}}}{\partial z_{\alpha}} \\ &= - \frac{\partial^2 g_{\gamma\bar{\delta}}}{\partial \bar{z}_{\beta} \partial z_{\alpha}} + \sum_{\tau, \eta} g^{\bar{\eta}\tau} \frac{\partial g_{\gamma\bar{\eta}}}{\partial z_{\alpha}} \frac{\partial g_{\bar{\delta}\tau}}{\partial \bar{z}_{\beta}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Logo o tensor curvatura Riemanniana em coordenadas complexas é dado por

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = - \frac{\partial^2 g_{\gamma\bar{\delta}}}{\partial \bar{z}_{\beta} \partial z_{\alpha}} + g^{\bar{\eta}\tau} \frac{\partial g_{\gamma\bar{\eta}}}{\partial z_{\alpha}} \frac{\partial g_{\bar{\delta}\tau}}{\partial \bar{z}_{\beta}}. \quad (2.20)$$

A seguir, mostraremos a identidade de Ricci para funções $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{∞} definidas em variedades Kähler (M^m, g, J) de dimensão complexa m .

Considere um referencial local unitário

$$\{e_1, \dots, e_m\} \subset T^{1,0}M$$

de M , ou seja,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = g(e_{\alpha}, e_{\bar{\beta}}) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}.$$

Lema 2.3.3. *Sejam M^m uma variedade Kähler e $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{∞} . Então*

$$f_{ABC} - f_{ACB} = \frac{\partial}{\partial e_B} (\Gamma_{AC}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \frac{\partial}{\partial e_C} (\Gamma_{AB}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \Gamma_{AB}^D \Gamma_{DC}^E \frac{\partial f}{\partial e_E} + \Gamma_{AC}^D \Gamma_{DB}^E \frac{\partial f}{\partial e_E}.$$

Demonstração. Usaremos sucessivamente a simetria dos símbolos de Christoffel sem fazer menção. Note que

$$f_{AB} = \frac{\partial^2 f}{\partial e_B \partial e_A} - \Gamma_{AB}^D \frac{\partial f}{\partial e_D}$$

e

$$f_{AC} = \frac{\partial^2 f}{\partial e_C \partial e_A} - \Gamma_{AC}^D \frac{\partial f}{\partial e_D}.$$

Daí

$$f_{ABC} = \frac{\partial f_{AB}}{\partial e_C} - \Gamma_{AC}^D f_{DB} - \Gamma_{BC}^D f_{DA}$$

e

$$f_{ACB} = \frac{\partial f_{AC}}{\partial e_B} - \Gamma_{AB}^D f_{DC} - \Gamma_{BC}^D f_{DA}.$$

Usando as duas expressões acima, obtemos que

$$f_{ABC} - f_{ACB} = \frac{\partial f_{AB}}{\partial e_C} - \frac{\partial f_{AC}}{\partial e_B} + \Gamma_{AB}^D f_{DC} - \Gamma_{AC}^D f_{DB}. \quad (2.21)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f_{AB}}{\partial e_C} = \frac{\partial^3 f}{\partial e_C \partial e_B \partial e_A} - \frac{\partial}{\partial e_C} (\Gamma_{AB}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \Gamma_{AB}^D \frac{\partial^2 f}{\partial e_C \partial e_D}$$

e

$$\frac{\partial f_{AC}}{\partial e_B} = \frac{\partial^3 f}{\partial e_B \partial e_C \partial e_A} - \frac{\partial}{\partial e_B} (\Gamma_{AC}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \Gamma_{AC}^D \frac{\partial^2 f}{\partial e_B \partial e_D}.$$

Logo, substituindo estes resultados na igualdade em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} f_{ABC} - f_{ACB} &= \frac{\partial}{\partial e_B} (\Gamma_{AC}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \frac{\partial}{\partial e_C} (\Gamma_{AB}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} + \Gamma_{AC}^D \frac{\partial^2 f}{\partial e_B \partial e_D} - \Gamma_{AB}^D \frac{\partial^2 f}{\partial e_C \partial e_D} \\ &\quad + \Gamma_{AB}^D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_C \partial e_D} - \Gamma_{DC}^E \frac{\partial f}{\partial e_E} \right) - \Gamma_{AC}^D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_B \partial e_D} - \Gamma_{DB}^E \frac{\partial f}{\partial e_E} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial e_B} (\Gamma_{AC}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \frac{\partial}{\partial e_C} (\Gamma_{AB}^D) \frac{\partial f}{\partial e_D} - \Gamma_{AB}^D \Gamma_{DC}^E \frac{\partial f}{\partial e_E} + \Gamma_{AC}^D \Gamma_{DB}^E \frac{\partial f}{\partial e_E}. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3.4. *Sejam M^m uma variedade Kähler e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Então*

$$(i) \quad f_{\beta\gamma\bar{\delta}} - f_{\beta\bar{\delta}\gamma} = 2f_\eta R_{\bar{\eta}\gamma\bar{\delta}\beta};$$

$$(ii) \quad f_{\beta\gamma\bar{\delta}} - f_{\beta\bar{\delta}\gamma} = -2f_{\bar{\eta}} R_{\eta\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}};$$

$$(iii) \quad f_{\beta\gamma\bar{\delta}} - f_{\beta\bar{\delta}\gamma} = 0,$$

onde $\beta, \gamma, \delta, \eta \in \{1, \dots, m\}$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos a primeira igualdade. Decorre do Corolário 2.3.1 e Lema 2.3.3 que

$$f_{\beta\gamma\bar{\delta}} - f_{\beta\bar{\delta}\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \bar{e}_\delta} (\Gamma_{\beta\gamma}^\eta) \frac{\partial f}{\partial e_\eta}.$$

Usando a expressão em (2.18), podemos obter

$$\frac{\partial}{\partial \bar{e}_\delta} (\Gamma_{\beta\gamma}^\eta) = R_{\bar{\delta}\beta\gamma}^\eta = 2g(R_{\bar{\delta}\beta\gamma}^\mu e_\mu, e_\eta) = 2g(R(e_{\bar{\delta}}, e_\beta)e_\gamma, e_\eta) = 2R_{\bar{\delta}\beta\gamma\eta} = -2R_{\eta\gamma\bar{\delta}\beta}.$$

Logo

$$f_{\beta\gamma\bar{\delta}} - f_{\beta\bar{\delta}\gamma} = 2f_\eta R_{\eta\gamma\bar{\delta}\beta}.$$

Agora mostraremos o item (ii). De fato, usando o Corolário 2.3.1 e o Lema 2.3.3, temos

$$f_{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} - f_{\bar{\beta}\bar{\delta}\gamma} = \frac{\partial}{\partial e_\gamma} (\Gamma_{\bar{\beta}\bar{\delta}}^{\bar{\eta}}) \frac{\partial f}{\partial \bar{e}_\eta}.$$

Por outro lado, segue da expressão em (2.17) que

$$\frac{\partial}{\partial e_\gamma} (\Gamma_{\bar{\beta}\bar{\delta}}^{\bar{\eta}}) = -R_{\bar{\delta}\gamma\bar{\beta}}^{\bar{\eta}} = -2g(R_{\bar{\delta}\gamma\bar{\beta}}^{\bar{\mu}} e_{\bar{\mu}}, e_\eta) = -2g(R(e_{\bar{\delta}}, e_\gamma)e_{\bar{\beta}}, e_\eta) = -2R_{\bar{\delta}\gamma\bar{\beta}\eta} = -2R_{\eta\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}.$$

Assim, podemos concluir

$$f_{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} - f_{\bar{\beta}\bar{\delta}\gamma} = -2f_{\bar{\eta}} R_{\eta\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}.$$

O item (iii) decorre diretamente do uso do Corolário 2.3.1 no Lema 2.3.3.

□

2.4 Curvatura Bissecional Holomorfa

Ao longo desta seção, (M^m, g, J) denotará uma variedade Kähler de dimensão complexa m e $T_x M$ o espaço tangente de M em $x \in M$. Um plano bidimensional $\sigma \subset T_x M$ é chamado um *plano holomorfo*, se σ é invariante por J , isto é, $J(\sigma) \subset \sigma$.

Definição 2.4.1. *Sejam σ_1 e σ_2 dois planos holomorfos contidos em $T_x M$. A curvatura bissecional holomorfa é definida por*

$$KB_M(\sigma_1, \sigma_2) = R(X, JX, JY, Y),$$

onde X é um vetor unitário em σ_1 e Y é um vetor unitário em σ_2 .

Na Definição 2.4.1, a curvatura bissecional holomorfa depende apenas dos planos σ_1 e σ_2 . Ver [6], página 104, Proposição 3.1.

Sejam g a métrica Kähler de M^m e $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base unitária do espaço tangente complexificado $T_x^{1,0} M$. Assim existem únicos $\tau_1, \dots, \tau_m \in T_x M$ tais que

$$e_1 = \frac{1}{2}(\tau_1 - iJ\tau_1), \dots, e_m = \frac{1}{2}(\tau_m - iJ\tau_m),$$

onde

$$\{\tau_1, J\tau_1, \dots, \tau_m, J\tau_m\}$$

é uma base ortonormal de $T_x M$, isto é,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

para todos $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, m\}$. Vimos em (2.15) que

$$R_{ABCD} = R(e_A, e_B, e_C, e_D) = g(R(e_A, e_B)e_C, e_D)$$

denota os coeficientes do tensor curvatura Riemanniana na base $\{e_1, \dots, e_m\}$ do espaço tangente complexificado $T_x^{1,0}M$, onde $A, B, C, D \in \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{m}\}$.

Definição 2.4.2. *Seja M^m uma variedade Kähler de dimensão complexa m . A curvatura bissecional holomorfa de M é limitada por uma constante $K_0 \in \mathbb{R}$, denotada por $KB_M \geq K_0$, se*

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} \geq \frac{1}{2}K_0(1 + \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.23)$$

para qualquer base unitária $\{e_1, \dots, e_m\}$ do espaço tangente complexificado $T_x^{1,0}M$. Quando em (2.23) ocorre a igualdade, dizemos que a curvatura bissecional holomorfa de M é constante igual a K_0 . Além disso, nesse caso, M é dita um espaço de curvatura bissecional holomorfa constante K_0 .

Proposição 2.4.1. *Seja M^m uma variedade Kähler de dimensão complexa m . Se $KB_M = K_0$, então*

$$R(\tau_\alpha, J\tau_\alpha, J\tau_\beta, \tau_\beta) = 2K_0(1 + \delta_{\alpha\beta}),$$

onde $\{\tau_1, J\tau_1, \dots, \tau_m, J\tau_m\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$.

Demonstração. Consideremos a base unitária $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $T_x^{1,0}M$, tal que

$$e_\alpha = \frac{1}{2}(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha) \quad \forall \alpha \in 1, \dots, m.$$

Note que

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} &= g(R(e_\alpha, e_{\bar{\alpha}})e_\beta, e_{\bar{\beta}}) = \frac{1}{16}g(R(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha, \tau_\alpha + iJ\tau_\alpha)(\tau_\beta - iJ\tau_\beta), \tau_\beta + iJ\tau_\beta) \\ &= \frac{1}{4}g(R(\tau_\alpha, J\tau_\alpha)J\tau_\beta, \tau_\beta). \end{aligned}$$

Logo, usando a Definição 2.4.2 e a igualdade acima, obtemos

$$R(\tau_\alpha, J\tau_\alpha, J\tau_\beta, \tau_\beta) = 2K_0(1 + \delta_{\alpha\beta}).$$

□

Observação 2.4.1. Sejam $X, Y \in T_x M$. Usando a primeira identidade de Bianchi, obtemos que

$$\begin{aligned} R(X, JX, JY, Y) &= -R(JY, X, JX, Y) - R(JX, JY, X, Y) \\ &= R(X, JY, JY, X) + R(X, Y, Y, X). \end{aligned}$$

Logo a curvatura bisseccional holomorfa está intimamente relacionada com a curvatura seccional da variedade Kähler M .

A seguir apresentaremos alguns exemplos de variedades Kähler e calcularemos a curvatura bisseccional de tais variedades.

Exemplo 2.4.1 (Espaço Euclidiano Complexo). O espaço Euclidiano complexo \mathbb{C}^m , munido com o atlas formado pela aplicação identidade, é uma variedade complexa de dimensão complexa m . Considere em \mathbb{C}^m a estrutura quase-complexa canônica J e a métrica Euclidiana canônica g . Observe que J e g tornam \mathbb{C}^m uma variedade Kähler. Com efeito, seja $(z_1, \dots, z_m) = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ a coordenada canônica em $\mathbb{C}^m \approx \mathbb{R}^{2m}$, daí

$$g\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right),$$

$$g\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\right) = g\left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)$$

e

$$g\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) = 0 = g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)$$

para todos $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$. Logo a métrica g é Hermitiana.

Agora iremos mostrar que g é uma métrica Kähler. Veja que, para cada $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$, temos

$$\begin{aligned} g_{\alpha\bar{\beta}} &= g\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = g\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} + i\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Logo a expressão da 2-forma fundamental $\omega(.,.) = g(J.,.)$ em coordenadas, ver (2.4), é dada por

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^m \delta_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta.$$

Assim

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{i}{2}(dx_\alpha + idy_\alpha) \wedge (dx_\alpha - idy_\alpha) \\ &= \frac{i}{2}(-idx_\alpha \wedge dy_\alpha + idy_\alpha \wedge dx_\alpha) \\ &= dx_\alpha \wedge dy_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto $d\omega = 0$. Logo ω é uma forma Kähler, com respectiva métrica Kähler g .

Além disso, observemos que a curvatura bissecional holomorfa de \mathbb{C}^m é nula. De fato, basta substituir $g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ na expressão do tensor curvatura Riemanniana em coordenada, ver (2.20),

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = -\frac{\partial^2 g_{\gamma\bar{\delta}}}{\partial\bar{z}_\beta\partial z_\alpha} + g^{\bar{\eta}\tau} \frac{\partial g_{\gamma\bar{\tau}}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial g_{\delta\bar{\tau}}}{\partial\bar{z}_\beta} = 0. \quad (2.24)$$

Em particular,

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = 0.$$

Usando a igualdade acima e a Definição 2.4.2, obtemos que

$$KB_{\mathbb{C}^m} = 0.$$

Logo (\mathbb{C}^m, g, J) é um espaço de curvatura bissecional holomorfa constante nula.

Exemplo 2.4.2 (Espaço Projetivo Complexo). Considere em $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ os pontos $z = (z_0, \dots, z_m)$, $w = (w_0, \dots, w_m)$ e a relação de equivalência \sim , tal que

$$z \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z_j = \lambda w_j \forall j \in \{0, \dots, m\},$$

e denotamos a classe de equivalência de z por

$$[z] := \{w \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}; w \sim z\}.$$

O *espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é o conjunto quociente de $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ pela relação de equivalência \sim , isto é,

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^m = \{[z]; z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}\}.$$

Assim podemos ver que o espaço projetivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é o espaço de todas as retas complexas em \mathbb{C}^{m+1} . Denotamos por $[z]$ a reta gerada por z e por (z_0, \dots, z_m) as coordenadas homogêneas de $[z]$. Para $0 \leq j \leq m$, definimos

$$U_j = \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m; z_j \neq 0\} \text{ e } V_j = \{z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}; z_j \neq 0\}.$$

Consideremos em $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ a topologia induzida pela aplicação $\pi : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ dada por $\pi(z) = [z]$, ou seja, os abertos $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ são da forma $\pi(V)$, com V aberto em $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$. Logo $U_j = \pi(V_j)$ é um aberto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Note que

$$W_j = \{(z_0, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_m) \in V_j; z_j = 1\}$$

é isomorfo a \mathbb{C}^m , daí podemos definir as aplicações $a_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^m$ por

$$a_j([z]) = \frac{1}{z_j}(z_0, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_m), \quad (2.25)$$

com a z_j -ésima coordenada retirada, ver Figura 2.1. Veja que a_j está bem definida e temos que a_j é contínua e bijetiva. Portanto a_j é um homeomorfismo. Agora para provar que

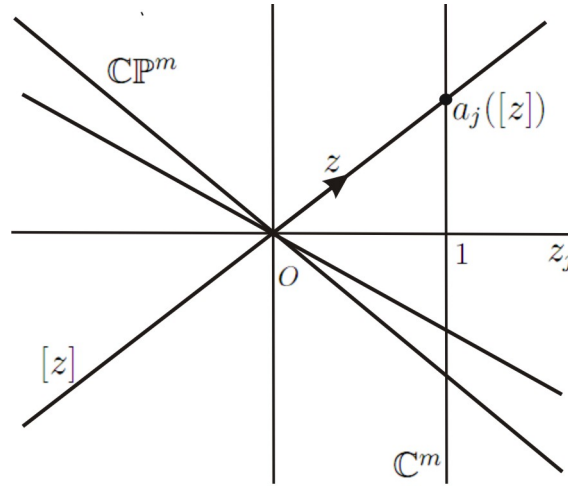


Figura 2.1: Cartas complexas do espaço projetivo complexo.

(U_j, a_j) é um sistema de coordenadas complexas em $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, resta mostrar que a mudança de coordenadas

$$a_k \circ a_j^{-1} : a_j(U_j \cap U_k) \rightarrow a_k(U_j \cap U_k)$$

é holomorfa. Com efeito,

$$\begin{aligned} a_k \circ a_j^{-1}(z_0, \dots, 1, \dots, z_m) &= a_k([z_0, \dots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \dots, z_m]) \\ &= \frac{1}{z_k}(z_0, \dots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \dots, z_m) \\ &= \left(\frac{z_0}{z_k}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_k}, \frac{1}{z_k}, \frac{z_{j+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_m}{z_k} \right) \end{aligned}$$

para todo $0 \leq j, k \leq m$. Isso mostra que a mudança de coordenadas é uma função holomorfa de m variáveis complexas. Logo $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é uma variedade complexa de dimensão complexa m .

Sejam $z = (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ e $w = (w_0, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$. Definiremos o produto interno Hermitiano em \mathbb{C}^{m+1} por

$$\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^{m+1}} = z_0 \bar{w}_0 + \dots + z_m \bar{w}_m.$$

Seja

$$\mathbb{S}^{2m+1} = \{z = (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1}; \langle z, z \rangle_{\mathbb{C}^{m+1}} = 1\}$$

a esfera unitária em \mathbb{C}^{m+1} . Observe que a aplicação π restrita a \mathbb{S}^{2m+1} continua sendo sobrejetiva. Além disso, $\pi : \mathbb{S}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é uma aplicação holomorfa, pois a expressão local de π nas coordenadas (2.25) é dada por

$$\begin{aligned} \pi(z_0, \dots, z_m) &= \frac{1}{z_j}(z_0, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_m) \\ &= \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_m}{z_j} \right) \end{aligned}$$

para $z = (z_0, \dots, z_m) \in U_j$.

Agora mostraremos que π é uma submersão. Como π é sobrejetiva, basta provarmos que a aplicação diferencial $d\pi_z : T_z\mathbb{S}^{2m+1} \rightarrow T_{\pi(z)}\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ tem posto m . De fato, o Jacobiano complexo de π é a matriz de ordem $(m+1) \times m$

$$d\pi_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_j} & 0 & \dots & 0 & -\frac{z_0}{z_j^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_j} & \dots & 0 & -\frac{z_1}{z_j^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{z_j} & -\frac{z_{j-1}}{z_j^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{z_{j+1}}{z_j^2} & \frac{1}{z_j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{z_m}{z_j^2} & 0 & \dots & \frac{1}{z_j} \end{pmatrix}$$

a qual contém o menor inversível $m \times m$ obtido ao excluirmos a j -ésima coluna. Logo $d\pi_z$ tem posto m .

Note que, cada fibra $\pi^{-1}([z]) \subset \mathbb{S}^{2m+1}$ é um grande círculo na esfera \mathbb{S}^{2m+1} , isto é, $\pi^{-1}([z]) = \{e^{i\theta}z; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. A submersão $\pi : \mathbb{S}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é conhecida como a *fibração de Hopf*. Como $\pi^{-1}([z])$ é um grande círculo em \mathbb{S}^{2m+1} , então dados $U, V \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, existem únicos $\bar{U}, \bar{V} \in T_z\mathbb{S}^{2m+1}$ ortogonais à fibra $\pi^{-1}([z])$, tais que

$$d\pi_z(\bar{U}) = U \quad \text{e} \quad d\pi_z(\bar{V}) = V.$$

Os campos \bar{U} e \bar{V} são os levantamentos horizontais de U e V a $T_z\mathbb{S}^{2m+1}$, respectivamente. Deste modo, podemos definir uma métrica Riemanniana g sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ por

$$g(U, V) = \langle \bar{U}, \bar{V} \rangle_{\mathbb{C}^{m+1}}. \quad (2.26)$$

A métrica definida em (2.26) é denominada a *métrica de Fubini-Study*. A estrutura quase-complexa canônica J de $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é uma isometria com respeito a métrica de Fubini-Study g . Além disso, g é uma métrica Kähler, ver [9], página 159, Exemplo 6.3.

Agora iremos calcular a curvatura bissecional holomorfa de $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Considere a métrica de Fubini-Study em coordenadas

$$ds^2 = 4 \frac{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)(dz_\alpha d\bar{z}_\alpha) - (\sum \bar{z}_\gamma dz_\gamma)(\sum z_\gamma d\bar{z}_\gamma)}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2},$$

ou seja,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = 2 \frac{\delta_{\alpha\bar{\beta}}}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)} - 2 \frac{\bar{z}_\alpha z_\beta}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2}.$$

Fazendo alguns cálculos, obtemos

$$\frac{\partial g_{\beta\bar{\tau}}}{\partial z_\alpha} = -2\delta_{\beta\tau} \frac{\bar{z}_\alpha}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} - 2\delta_{\alpha\tau} \frac{\bar{z}_\beta}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} + 4 \frac{\bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta z_\tau}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{\beta\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\alpha \partial z_\alpha} &= -2 \frac{1}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} + 4 \frac{z_\alpha \bar{z}_\alpha}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} - 2\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} \\ &+ 4\delta_{\alpha\beta} \frac{z_\alpha \bar{z}_\beta}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} + 4 \frac{\bar{z}_\beta^2}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} + 8\delta_{\alpha\beta} \frac{\bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} \\ &- 12 \frac{z_\alpha \bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta^2}{(1 + \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^4}. \end{aligned}$$

Consideremos $(z_1, \dots, z_m) = (0, \dots, 0)$. Daí

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial g_{\beta\bar{\tau}}}{\partial z_\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g_{\beta\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\alpha \partial z_\alpha} = -2(1 + \delta_{\alpha\beta}).$$

Observe que $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right\}_{\alpha=1}^m$ não é unitário. Assim para obter a curvatura bisseccional holomorfa de $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ necessitaremos dividir por $g_{\alpha\bar{\alpha}}g_{\beta\bar{\beta}}$ a expressão do tensor curvatura Riemanniana em coordenadas, ver (2.20), isto é,

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = \frac{R(e_\alpha, e_{\bar{\alpha}}, e_\beta, e_{\bar{\beta}})}{g(e_\alpha, e_{\bar{\alpha}})g(e_\beta, e_{\bar{\beta}})} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{\alpha\beta}).$$

Logo, decorre da Definição 2.4.2 que

$$KB_{\mathbb{C}\mathbb{P}^m} = 1.$$

Exemplo 2.4.3 (Espaço Hiperbólico Complexo). Considere no espaço Euclidiano complexo \mathbb{C}^{m+1} a forma sesquilinear $((\cdot, \cdot)) : \mathbb{C}^{m+1} \times \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$((z, w)) := -z_0 \bar{w}_0 + \sum_{i=1}^m z_i \bar{w}_i,$$

onde $z = (z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ e $w = (w_0, \dots, w_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$. Assim, através desta forma sesquilinear, podemos definir uma pseudo-métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{C}^{m+1} \times \mathbb{C}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle := \operatorname{Re} ((z, w)).$$

O conjunto dado por

$$\begin{aligned} H_1^{2m+1} &= \{z \in \mathbb{C}^{m+1}; \langle\langle z, z \rangle\rangle = -1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^{m+1}; |z_0|^2 = 1 + |z_1|^2 + \dots + |z_m|^2\}, \end{aligned}$$

é conhecido como *espaço anti-de Sitter*. Note que $e^{i\theta} z \in H_1^{2m+1}$, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$. De fato, se $z \in H_1^{2m+1}$, então para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle\langle e^{i\theta} z, e^{i\theta} z \rangle\rangle = e^{i\theta} \overline{e^{i\theta}} \langle\langle z, z \rangle\rangle = -|e^{i\theta}|^2 = -1.$$

Desse modo, podemos definir em H_1^{2m+1} a relação de equivalência \sim dada por

$$z \sim w \iff w = e^{i\theta}z, \quad \text{para algum } \theta \in \mathbb{R}.$$

Seja $[z] = \{w \in H_1^{2m+1}; w \sim z\}$ a classe de equivalência de $z \in H_1^{2m+1}$. O *espaço hiperbólico complexo* é o conjunto $\mathbb{C}H^m = \{[z]; z \in H_1^{2m+1}\}$. Pode ser visto em [9], página 282, Exemplo 10.7, que $\mathbb{C}H^m$ é uma variedade complexa.

Também, o espaço hiperbólico complexo pode ser visto como a bola unitária aberta

$$D_m = \{(z_1, \dots, z_m); \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma < 1\},$$

munida com a métrica

$$ds^2 = 4 \frac{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)(dz_\gamma d\bar{z}_\gamma) - (\sum \bar{z}_\gamma dz_\gamma)(\sum z_\gamma d\bar{z}_\gamma)}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2},$$

isto é,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = 2 \frac{\delta_{\alpha\bar{\beta}}}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)} - 2 \frac{\bar{z}_\alpha z_\beta}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2}.$$

Podemos ver em [9], página 169, Teorema 7.8, que a métrica acima é Kähler. Fazendo alguns cálculos, obtemos

$$\frac{\partial g_{\beta\bar{\tau}}}{\partial z_\alpha} = 2\delta_{\beta\tau} \frac{\bar{z}_\alpha}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} - 2\delta_{\alpha\tau} \frac{\bar{z}_\beta}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} - 4 \frac{\bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta z_\tau}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{\beta\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\alpha \partial z_\alpha} &= 2 \frac{1}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} + 4 \frac{z_\alpha \bar{z}_\alpha}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} + 2\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^2} \\ &\quad - 4\delta_{\alpha\beta} \frac{z_\alpha \bar{z}_\beta}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} - 4 \frac{\bar{z}_\beta^2}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} - 8\delta_{\alpha\beta} \frac{\bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^3} \\ &\quad - 12 \frac{z_\alpha \bar{z}_\alpha \bar{z}_\beta^2}{(1 - \sum z_\gamma \bar{z}_\gamma)^4}. \end{aligned}$$

Consideremos $(z_1, \dots, z_m) = (0, \dots, 0)$. Portanto,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial g_{\beta\bar{\tau}}}{\partial z_\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g_{\beta\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\alpha \partial z_\alpha} = 2(1 + \delta_{\alpha\beta}).$$

Usando a expressão do tensor curvatura Riemanniana em coordenadas, ver (2.20), obtemos

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = \frac{-1}{2}(1 + \delta_{\alpha\beta}).$$

Logo, decorre da Definição 2.4.2 que

$$KB_{\mathbb{C}H^m} = -1.$$

2.5 Os Operadores Gradiente e Laplaciano em Variedade Kähler

Seja (M^m, g, J) uma variedade Kähler de dimensão complexa m , ∇ a conexão de Levi-Civita e (U, ψ) um sistema de coordenadas complexas.

Iremos obter as expressões dos operadores gradiente e Laplaciano em um referencial unitário do espaço tangente complexificado $T^{1,0}M$ na vizinhança coordenada U da variedade Kähler M .

Seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ um referencial unitário em $T^{1,0}M$, tal que

$$e_\alpha = \frac{1}{2}(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha), \quad 1 \leq \alpha \leq m,$$

onde

$$\{\tau_1, J\tau_1, \dots, \tau_m, J\tau_m\} \subset TM$$

é um referencial geodésico em uma vizinhança $U \subset M^m$ de um ponto $p \in U$. Daí, em p ,

$$\nabla_{\tau_\alpha} \tau_\beta = \nabla_{J\tau_\alpha} \tau_\beta = \nabla_{\tau_\alpha} J\tau_\beta = \nabla_{J\tau_\alpha} J\tau_\beta = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}.$$

Além disso, veja que

$$\tau_\alpha = e_\alpha + e_{\bar{\alpha}} \quad \text{e} \quad J\tau_\alpha = i(e_\alpha - e_{\bar{\alpha}}). \quad (2.27)$$

Definição 2.5.1. *Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo de vetores real ∇f definido por*

$$g(\nabla f, X) = X(f)$$

para todo $X \in TM$.

Seja $\{\tau_\alpha, J\tau_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ um referencial geodésico e $f \in C^\infty(M)$. Como

$$g(\nabla f, \tau_\alpha) = \tau_\alpha(f) \quad \text{e} \quad g(\nabla f, J\tau_\alpha) = (J\tau_\alpha)(f), \quad (2.28)$$

então

$$\nabla f = \sum_{\alpha=1}^m \tau_\alpha(f) \tau_\alpha + \sum_{\alpha=1}^m (J\tau_\alpha)(f) J\tau_\alpha. \quad (2.29)$$

Proposição 2.5.1. *Sejam $f, h \in C^\infty(M)$ e $\{e_1, \dots, e_m\} \subset T^{1,0}M$ um referencial unitário em uma vizinhança $U \subset M$. Então o gradiente de f em U é dado por*

$$\nabla f = 2 \sum_{\alpha=1}^m f_{\bar{\alpha}} e_\alpha + 2 \sum_{\alpha=1}^m f_\alpha e_{\bar{\alpha}},$$

onde $f_\alpha = g(\nabla f, e_\alpha)$ e $f_{\bar{\alpha}} = g(\nabla f, e_{\bar{\alpha}})$. Consequentemente,

$$g(\nabla f, \nabla h) = 2 \sum_{\alpha=1}^m (f_\alpha h_{\bar{\alpha}} + f_{\bar{\alpha}} h_\alpha).$$

Demonstração. Usando notação de Einstein na expressão em (2.29), podemos escrever

$$\nabla f = \tau_\alpha(f)\tau_\alpha + (J\tau_\alpha)(f)J\tau_\alpha.$$

Logo, substituindo as igualdades em (2.28) na expressão acima,

$$\begin{aligned} \nabla f &= g(\nabla f, \tau_\alpha)\tau_\alpha + g(\nabla f, J\tau_\alpha)J\tau_\alpha = g(\nabla f, \tau_\alpha)(e_\alpha + e_{\bar{\alpha}}) + ig(\nabla f, J\tau_\alpha)(e_\alpha - e_{\bar{\alpha}}) \\ &= (g(\nabla f, \tau_\alpha) + ig(\nabla f, J\tau_\alpha))e_\alpha + (g(\nabla f, \tau_\alpha) - ig(\nabla f, J\tau_\alpha))e_{\bar{\alpha}} \\ &= 2g\left(\nabla f, \frac{1}{2}(\tau_\alpha + iJ\tau_\alpha)\right)e_\alpha + 2g\left(\nabla f, \frac{1}{2}(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha)\right)e_{\bar{\alpha}} \\ &= 2g(\nabla f, e_{\bar{\alpha}})e_\alpha + 2g(\nabla f, e_\alpha)e_{\bar{\alpha}} \\ &= 2f_{\bar{\alpha}}e_\alpha + 2f_\alpha e_{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} g(\nabla f, \nabla h) &= g(2f_{\bar{\alpha}}e_\alpha + 2f_\alpha e_{\bar{\alpha}}, 2h_{\bar{\beta}}e_\beta + 2h_\beta e_{\bar{\beta}}) = 4(f_{\bar{\alpha}}h_\beta g(e_\alpha, e_{\bar{\beta}}) + f_\alpha h_{\bar{\beta}} g(e_{\bar{\alpha}}, e_\beta)) \\ &= 2(f_{\bar{\alpha}}h_\beta \delta_{\alpha\bar{\beta}} + f_\alpha h_{\bar{\beta}} \delta_{\bar{\alpha}\beta}) = 2f_{\bar{\alpha}}h_\alpha + 2f_\alpha h_{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

□

Definição 2.5.2. Seja $X \in TM$. A divergência de um campo de vetores X é uma função $\operatorname{div} X : M^m \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$(\operatorname{div} X)(x) = \operatorname{tr} \{Y(x) \mapsto (\nabla_{Y(x)} X)\},$$

onde $Y(x) \in T_x M$ e tr denota o traço de um operador linear.

Lema 2.5.1. Sejam $X \in TM$ e $\{e_1, \dots, e_m\} \subset T^{1,0}M$ um referencial unitário em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = A^\alpha e_\alpha + \overline{A^\alpha} e_{\bar{\alpha}}$, então a divergência de X em U é dada por

$$\operatorname{div} X = e_\alpha(A^\alpha) + e_{\bar{\alpha}}(\overline{A^\alpha}),$$

onde $\overline{A^\alpha}$ denota o conjugado de A^α .

Demonstração. Seja $\{\tau_\alpha, J\tau_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ o referencial geodésico em uma vizinhança $U \subset M$, tal que

$$e_\alpha = \frac{1}{2}(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha), \quad 1 \leq \alpha \leq m.$$

Suponhamos que $A^\alpha = \frac{a^\alpha + ib^\alpha}{2}$. Daí

$$\begin{aligned} X &= A^\alpha e_\alpha + \overline{A^\alpha} e_{\bar{\alpha}} = A^\alpha \frac{1}{2}(\tau_\alpha - iJ\tau_\alpha) + \overline{A^\alpha} \frac{1}{2}(\tau_\alpha + iJ\tau_\alpha) \\ &= \frac{A^\alpha + \overline{A^\alpha}}{2} \tau_\alpha + \frac{i(\overline{A^\alpha} - A^\alpha)}{2} J\tau_\alpha \\ &= a^\alpha \tau_\alpha + b^\alpha J\tau_\alpha. \end{aligned}$$

Decorre da definição de divergência de um campo de vetores que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= g(\nabla_{\tau_\alpha} X, \tau_\alpha) + g(\nabla_{J\tau_\alpha} X, J\tau_\alpha) \\
&= \tau_\alpha(g(X, \tau_\alpha)) - g(\nabla_{\tau_\alpha} \tau_\alpha, X) + (J\tau_\alpha)(g(X, J\tau_\alpha)) - g(\nabla_{J\tau_\alpha} J\tau_\alpha, X) \\
&= \tau_\alpha(g(X, \tau_\alpha)) + J\tau_\alpha(g(X, J\tau_\alpha)) \\
&= \tau_\alpha(a^\alpha) + (J\tau_\alpha)(b^\alpha).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$a^\alpha = \frac{A^\alpha + \overline{A^\alpha}}{2}, \quad b^\alpha = \frac{i(\overline{A^\alpha} - A^\alpha)}{2}, \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha + e_{\bar{\alpha}}) \quad \text{e} \quad J\tau_\alpha = \frac{i}{2}(e_\alpha - e_{\bar{\alpha}}).$$

Logo

$$\operatorname{div} X = \tau_\alpha(a^\alpha) + J\tau_\alpha(b^\alpha) = e_\alpha(A^\alpha) + e_{\bar{\alpha}}(\overline{A^\alpha}).$$

□

Definição 2.5.3. *Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O Laplaciano de f é a função real $\Delta f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Proposição 2.5.2. *Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $\{e_1, \dots, e_m\} \subset T^{1,0}M$ um referencial unitário em uma vizinhança $U \subset M$. Então o Laplaciano de f em U é dado por*

$$\Delta f = 4 \sum_{\alpha=1}^m f_{\alpha\bar{\alpha}},$$

onde $f_{\alpha\bar{\alpha}} = g(\nabla_{e_\alpha} \nabla f, e_{\bar{\alpha}})$.

Demonstração. Observe que $\nabla f = 2f_{\bar{\alpha}}e_\alpha + 2f_\alpha e_{\bar{\alpha}}$, ver Proposição 2.5.1. Decorre do Lema 2.5.1 que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = 2e_\alpha(f_{\bar{\alpha}}) + 2e_{\bar{\alpha}}(f_\alpha) = 2f_{\bar{\alpha}\alpha} + 2f_{\alpha\bar{\alpha}} = 4f_{\alpha\bar{\alpha}}.$$

□

Nos exemplos a seguir, iremos obter as expressões do Laplaciano da função distância r nos espaços modelos \mathbb{C}^m , $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ e $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$. Nesse contexto, suponha que (M^m, g, J) é uma variedade Kähler de dimensão complexa m e seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a x . Consideremos em p uma base ortonormal $\{\tau_1, J\tau_1, \dots, \tau_m, J\tau_m\}$ do espaço tangente $T_p M$, tal que

$$\tau_1 = \gamma'(0) = \nabla r(p).$$

Seja ε_{2k-1} o transporte paralelo de τ_k ao longo de γ para cada $k = 1, \dots, m$. Como J é paralelo, obtemos que $J\varepsilon_{2k-1} =: \varepsilon_{2k}$ é o transporte paralelo de $J\tau_k$ ao longo de γ . Decorre da isometria do transporte paralelo que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m}\}$ é um referencial ortonormal

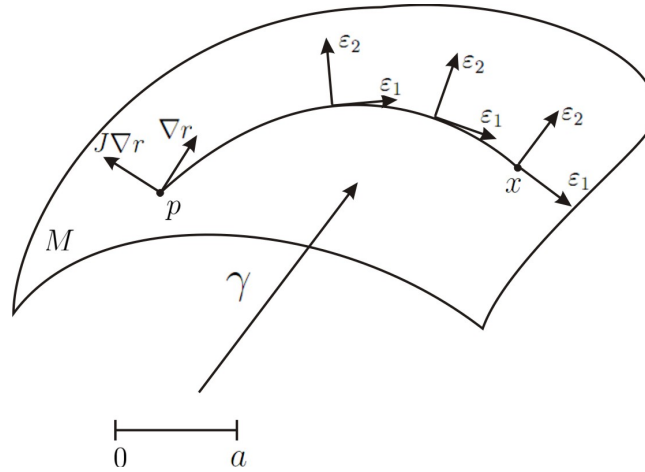


Figura 2.2: Transporte paralelo de ∇r e $J\nabla r$ ao longo de γ .

geodésico ao longo de γ . Além disso, aplicando o Teorema 1.1.1 e a unicidade de campos paralelos, vemos que

$$\varepsilon_1 = \gamma'(t) = \nabla r(\gamma(t)).$$

Observe que

$$|\nabla r|^2 = g(\nabla r, \nabla r) = \sum_{k=1}^{2m} r_k^2,$$

onde $r_k = g(\nabla r, \varepsilon_k)$. Derivando covariante a expressão acima, obtemos

$$|\nabla r|_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{2m} (r_k^2)_{ij} = 2 \sum_{k=1}^{2m} (r_k r_{ki})_j = 2 \sum_{k=1}^{2m} r_{kj} r_{ki} + 2 \sum_{k=1}^{2m} r_k r_{kij}. \quad (2.30)$$

Usando a identidade de Ricci (ver [11], página 15),

$$r_{kij} = r_{ikj} = r_{ijk} + \sum_{\eta=1}^{2m} r_\eta R_{\eta ijk}, \quad (2.31)$$

onde $R_{\eta ijk} = g(R(\varepsilon_\eta, \varepsilon_i)\varepsilon_j, \varepsilon_k)$. Agora substituindo a igualdade em (2.31) na expressão em (2.30), temos

$$|\nabla r|_{ij}^2 = 2 \sum_{k=1}^{2m} r_{ik} r_{kj} + 2 \sum_{k=1}^{2m} r_k r_{ijk} + 2 \sum_{k,\eta=1}^{2m} r_k r_\eta R_{\eta ijk}.$$

Visto que

$$\varepsilon_1 = \nabla r = \sum_{k=1}^{2m} r_k \varepsilon_k,$$

então $r_1 = 1$ e $r_k = 0$ para $1 < k \leq 2m$. Daí

$$|\nabla r|_{ij}^2 = 2 \sum_{k=1}^{2m} r_{ik} r_{kj} + 2r_{ij1} + 2R_{1ij1}. \quad (2.32)$$

Usando o Teorema 1.1.1 e a igualdade em (2.32), obtemos que

$$\sum_{k=1}^{2m} r_{ik}r_{kj} + r_{ij1} + R_{1ij1} = 0. \quad (2.33)$$

Agora considere a matriz hessiana H da função distância r ao longo de γ dada por

$$H(t) := (r_{ij}(\gamma(t)))_{2m \times 2m}$$

e denotemos

$$R(t) := (R_{1ij1}(\gamma(t)))_{2m \times 2m}.$$

Logo para obter $H(t)$, basta resolver a equação diferencial ordinária de valor inicial

$$\begin{cases} H^2(t) + H'(t) + R(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} tH(t) = G, \end{cases} \quad (2.34)$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Observação 2.5.1. O limite em (2.34) decorre do fato que a métrica Riemanniana coincide localmente com a métrica Euclidiana. Com efeito, seja $\tilde{r} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância a um ponto fixado de \mathbb{C}^m . Podemos ver no Exemplo 2.5.1 que no espaço Euclidiano complexo

$$\tilde{r}_{11}(\tilde{\gamma}(t)) = 0, \quad \tilde{r}_{ii}(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{1}{t} \quad \text{e} \quad \tilde{r}_{ij}(\tilde{\gamma}(t)) = 0, \quad i \neq j.$$

Logo se H denota a matriz hessiana da função distância na variedade Kähler M , temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} tH(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t\tilde{H}(t) = G,$$

onde G é como em (2.35).

Exemplo 2.5.1 (Espaço Euclidiano Complexo). Sejam $\tilde{r} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância a um ponto $p \in \mathbb{C}^m$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}^m$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a $x \in \mathbb{C}^m$. Visto que

$$R_{1ij1} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, 2m,$$

então, para obter a hessiana \tilde{H} de \tilde{r} , devemos resolver o problema de valor inicial, ver (2.34),

$$\begin{cases} H^2(t) + H'(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} tH(t) = G, \end{cases} \quad (2.36)$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\tilde{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t^{-1} \end{pmatrix}$$

é a única solução do problema de valor inicial em (2.36). Assim

$$\tilde{\Delta}\tilde{r}(\tilde{\gamma}(t)) = \text{tr } H(t) = (2m - 1)t^{-1}.$$

Como $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica normalizada, isto é, $\tilde{r}(\tilde{\gamma}(t)) = t$, concluímos que

$$\tilde{\Delta}\tilde{r}(x) = (2m - 1)(r(x))^{-1},$$

onde $\tilde{\Delta}$ denota o operador Laplaciano em \mathbb{C}^m .

Exemplo 2.5.2 (Espaço Projetivo Complexo). Sejam $\tilde{r} : \mathbb{C}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância a um ponto $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a $x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Como a curvatura bissecional holomorfa de $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ é 1, então decorre da Proposição 2.4.1 e da Observação 2.4.1 que

$$R_{1111} = 0, \quad R_{1221} = 4, \quad R_{1(2i-1)(2i-1)1} = 1 \quad \text{e} \quad R_{1(2i)(2i)1} = 1 \quad \forall i = 2, \dots, m.$$

Além disso, os demais coeficientes do tensor curvatura Riemanniana em $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ são nulos. Portanto para obter a hessiana \tilde{H} de \tilde{r} devemos resolver o problema de valor inicial, ver (2.34),

$$\begin{cases} H^2(t) + H'(t) + R(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} tH(t) = G, \end{cases} \quad (2.37)$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Com efeito,

$$\tilde{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 \cotg(2t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cotg(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cotg(t) \end{pmatrix}$$

é a única solução do problema de valor inicial em (2.37). Logo

$$\tilde{\Delta}\tilde{r}(x) = \operatorname{tr} \tilde{H}(r(x)) = 2(m-1) \cotg(r(x)) + 2 \cotg(2r(x)),$$

onde $\tilde{\Delta}$ denota o operador Laplaciano em $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Exemplo 2.5.3 (Espaço Hiperbólico Complexo). Sejam $\tilde{r} : \mathbb{C}\mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância a um ponto $p \in \mathbb{C}\mathbb{H}^m$ e $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{H}^m$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a $x \in \mathbb{C}\mathbb{H}^m$. Como a curvatura bissecional holomorfa de $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$ é -1 , então decorre da Proposição 2.4.1 e da Observação 2.4.1 que

$$R_{1111} = 0, \quad R_{1221} = -4, \quad R_{1(2i-1)(2i-1)1} = -1 \quad \text{e} \quad R_{1(2i)(2i)1} = -1 \quad \forall i = 2, \dots, m.$$

Além disso, os demais coeficientes do tensor curvatura Riemanniana em $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$ são nulos. Portanto para obter a hessiana \tilde{H} de \tilde{r} devemos resolver o problema de valor inicial, ver (2.34),

$$\begin{cases} H^2(t) + H'(t) + R(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} tH(t) = G, \end{cases} \quad (2.38)$$

onde

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\tilde{H}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 \cotgh(2t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cotgh(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cotgh(t) \end{pmatrix}$$

é a única solução do problema de valor inicial em (2.38). Logo

$$\tilde{\Delta}\tilde{r}(x) = \operatorname{tr} \tilde{H}(r(x)) = 2(m-1) \cotgh(r(x)) + 2 \cotgh(2r(x)),$$

onde $\tilde{\Delta}$ denota o operador Laplaciano em $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$.

Capítulo 3

Teoremas de Comparação em Variedades Kähler

Estimativas do operador Laplaciano, por exemplo os teoremas de comparação, são ferramentas importantes para a análise de propriedades globais em variedades. Neste capítulo, apresentaremos as demonstrações dos teoremas de comparação do Laplaciano da função distância para variedades Kähler completas. Como aplicação decreveremos a prova do Teorema de Comparação de Bishop-Gromov para variedades Kähler, obteremos uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano em variedades Kähler e mostraremos uma versão global de comparação de volume. Na demonstração de tais resultados, usaremos técnicas introduzidas por Li e Wang no artigo “Comparison Theorem for Kähler Manifolds and Positivity of Spectrum”, publicado no Journal of Differential Geometry em 2005.

3.1 Teoremas de Comparação do Laplaciano da Função Distância

Iniciaremos esta seção enunciando um resultado clássico e bastante conhecido, denominado Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades Riemannianas, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [16].

Teorema 3.1 (Comparação do Laplaciano). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão real n e \mathbb{M}_k a forma espacial de curvatura seccional constante k . Se $\text{Ric}_M \geq (n-1)k$, então*

$$\Delta r(x) \leq \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)) \quad \forall x \in M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\}),$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida em \mathbb{M}_k .

Em 2005, Li e Wang [12], usando técnicas de Análise Complexa, provaram os teoremas de comparação do Laplaciano para variedades Kähler. A seguir descreveremos a demonstração de tais resultados.

Teorema 3.1.1. *Seja M^m uma variedade Kähler completa de dimensão complexa m com $BK_M \geq -1$. Então, em $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$, temos*

$$\begin{aligned} \Delta r(x) &\leq 2(m-1) \cotgh(r(x)) + 2 \cotgh(2r(x)) \\ &= \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida em $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$.

Demonstração. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a x . Consideremos em p uma base unitária $\{e_1, \dots, e_m\}$, tal que

$$e_1 = \frac{1}{2}(\gamma'(0) - iJ\gamma'(0)) = \frac{1}{2}(\nabla r(p) - iJ\nabla r(p)).$$

Seja $\varepsilon_\alpha = e_\alpha(t)$ o transporte paralelo de e_α ao longo de γ para cada $\alpha = 1, \dots, m$. Decorre da isometria do transporte paralelo que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ é um referencial unitário em γ . Além disso, aplicando o Teorema 1.1.1 e a unicidade de campos paralelos, vemos que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\gamma'(t) - iJ\gamma'(t)) = \frac{1}{2}(\nabla r(\gamma(t)) - iJ\nabla r(\gamma(t))).$$

Observe que $\varepsilon_1 \in T^{1,0}M$, portanto $J\varepsilon_1 = i\varepsilon_1$, donde

$$J\nabla r = 2i\varepsilon_1 - i\nabla r.$$

Assim podemos verificar que

$$r_{1\bar{1}} = -r_{1\bar{1}}. \quad (3.1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} r_{1\bar{1}} &= g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \varepsilon_{\bar{1}}) = \frac{1}{2}g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \nabla r) + \frac{i}{2}g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, J\nabla r) \\ &= \frac{1}{2}g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \nabla r) + \frac{i}{2}g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, 2i\varepsilon_1 - i\nabla r) \\ &= g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \nabla r) - g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \varepsilon_1) \\ &= -r_{11}, \end{aligned}$$

pois $g(\nabla r, \nabla r) = 1$, o que implica $g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \nabla r) = 0$. Usando o Teorema 1.1.1, temos

$$|\nabla r|^2 = 1,$$

derivando covariantemente a expressão acima ambos os lados,

$$|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 = 0 \quad (3.2)$$

para cada $\alpha = 1, \dots, m$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 &= (g(\nabla r, \nabla r))_{\alpha\bar{\alpha}} = 4 \sum_{\delta=1}^m (r_{\delta} r_{\bar{\delta}})_{\alpha\bar{\alpha}} = 4 \sum_{\delta=1}^m (r_{\delta\alpha} r_{\bar{\delta}} + r_{\delta} r_{\bar{\delta}\alpha})_{\bar{\alpha}} \\
&= 4 \sum_{\delta=1}^m (r_{\delta\alpha\bar{\alpha}} r_{\bar{\delta}} + r_{\delta\alpha} r_{\bar{\delta}\bar{\alpha}} + r_{\delta\bar{\alpha}} r_{\bar{\delta}\alpha} + r_{\delta} r_{\bar{\delta}\alpha\bar{\alpha}}) \\
&= 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\alpha}|^2 + 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\bar{\alpha}}|^2 + 4 \sum_{\delta=1}^m r_{\delta\alpha\bar{\alpha}} r_{\bar{\delta}} + 4 \sum_{\delta=1}^m r_{\delta} r_{\bar{\delta}\alpha\bar{\alpha}}. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Decorre da identidade de Ricci que

$$r_{\delta\alpha\bar{\alpha}} = r_{\alpha\delta\bar{\alpha}} = r_{\alpha\bar{\alpha}\delta} + 2 \sum_{\eta=1}^m r_{\eta} R_{\eta\bar{\eta}\delta\bar{\alpha}\alpha} = r_{\alpha\bar{\alpha}\delta} + 2 \sum_{\eta=1}^m r_{\eta} R_{\alpha\bar{\alpha}\delta\eta} \tag{3.4}$$

e

$$r_{\bar{\delta}\alpha\bar{\alpha}} = r_{\alpha\bar{\delta}\bar{\alpha}} = r_{\alpha\bar{\alpha}\bar{\delta}}. \tag{3.5}$$

Substituindo as igualdades em (3.4) e (3.5) na expressão em (3.3), obtemos

$$|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 = 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\alpha}|^2 + 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\bar{\alpha}}|^2 + 4 \sum_{\delta=1}^m r_{\delta} r_{\alpha\bar{\alpha}\bar{\delta}} + 4 \sum_{\delta=1}^m r_{\bar{\delta}} r_{\alpha\bar{\alpha}\delta} + 8 \sum_{\delta,\eta=1}^m r_{\eta} r_{\bar{\delta}} R_{\alpha\bar{\alpha}\delta\eta}.$$

Por outro lado, $r_1 = r_{\bar{1}} = 1/2$ e $r_{\alpha} = r_{\bar{\alpha}} = 0$ para cada $\alpha = 2, \dots, m$, daí

$$|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 = 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\alpha}|^2 + 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\bar{\alpha}}|^2 + 2r_{\alpha\bar{\alpha}\bar{1}} + 2r_{\alpha\bar{\alpha}1} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}\bar{1}\bar{1}}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
r_{\alpha\bar{\alpha}\bar{1}} + r_{\alpha\bar{\alpha}1} &= \varepsilon_{\bar{1}}(r_{\alpha\bar{\alpha}}) + \varepsilon_1(r_{\alpha\bar{\alpha}}) \\
&= \frac{1}{2}(\nabla r + iJ\nabla r)(r_{\alpha\bar{\alpha}}) + \frac{1}{2}(\nabla r - iJ\nabla r)(r_{\alpha\bar{\alpha}}) \\
&= \frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 &= 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\alpha}|^2 + 4 \sum_{\delta=1}^m |r_{\delta\bar{\alpha}}|^2 + 2 \frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}\bar{1}\bar{1}} \\
&\geq 4|r_{\alpha\alpha}|^2 + 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2 \frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}\bar{1}\bar{1}}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\alpha = 1$ na desigualdade em (3.6),

$$|\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 4|r_{11}|^2 + 4|r_{1\bar{1}}|^2 + 2 \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2R_{1\bar{1}\bar{1}\bar{1}}.$$

Visto que $r_{11} = -r_{1\bar{1}}$, temos

$$|\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2R_{1\bar{1}1\bar{1}}.$$

Por hipótese $BK_M \geq -1$, então usando a Definição 2.4.2, vemos que

$$R_{1\bar{1}1\bar{1}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)(-1)(1 + \delta_{11}) = -1.$$

Logo

$$|\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} - 2.$$

Decorre da igualdade (3.2), juntamente com a desigualdade acima, que

$$8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} \leq 2,$$

ou seja,

$$4|r_{1\bar{1}}|^2 + \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} \leq 1. \quad (3.7)$$

Consideremos a função $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = r_{1\bar{1}}(\gamma(t)),$$

assim

$$f'(t) = \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r}.$$

Substituindo $f(t)$ e $f'(t)$ na desigualdade (3.7), obtemos

$$4f^2(t) + f'(t) \leq 1. \quad (3.8)$$

Como a métrica Riemanniana coincide localmente com a métrica Euclidiana (ver Observação 2.5.1), então podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow 0} tf(t) = \frac{1}{4},$$

pois

$$\begin{aligned} r_{1\bar{1}} &= g(\nabla_{\varepsilon_1} \nabla r, \varepsilon_{\bar{1}}) = \frac{1}{4}g(\nabla_{\gamma' - iJ\gamma'} \nabla r, \gamma' + iJ\gamma') \\ &= \frac{1}{4}g(\nabla_{\gamma'} \nabla r, \gamma') - \frac{i}{4}g(\nabla_{J\gamma'} \nabla r, \gamma') + \frac{i}{4}g(\nabla_{\gamma'} \nabla r, J\gamma') + \frac{1}{4}g(\nabla_{J\gamma'} \nabla r, J\gamma') \\ &= -\frac{i}{4}g(\nabla_{J\gamma'} \nabla r, \gamma') + \frac{i}{4}g(\nabla_{\gamma'} \nabla r, J\gamma') + \frac{1}{4}g(\nabla_{J\gamma'} \nabla r, J\gamma'). \end{aligned}$$

Visto que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} 4f^2(t) + f'(t) \leq 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} tf(t) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.9)$$

tem uma única solução. Então para obter f , basta resolver o problema em (3.9). De fato, seja $T = \inf\{t \in (0, a); 4f^2(t) - 1 = 0\}$. Daí

$$4f^2(t) - 1 > 0 \quad t \in (0, T).$$

Logo, no intervalo $(0, T)$, temos

$$4f^2(t) + f'(t) \leq 1 \iff f'(t) \leq 1 - 4f^2(t) \iff \frac{f'(t)}{1 - 4f^2(t)} \geq 1. \quad (3.10)$$

Como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{cotgh}^{-1}(2f(t)) = \frac{f'(t)}{1 - 4f^2(t)},$$

então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{cotgh}^{-1}(2f(t)) \geq 1,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cotgh}^{-1}(2f(t)) \geq 2.$$

Integrando de 0 a t a desigualdade acima,

$$\operatorname{cotgh}^{-1}(2f(t)) - \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{cotgh}^{-1}(2f(t)) \geq 2t,$$

donde

$$\operatorname{cotgh}^{-1}(2f(t)) \geq 2t.$$

Como a função cotangente hiperbólica é decrescente, vemos que

$$2f(t) \leq \operatorname{cotgh}(2t),$$

ou seja,

$$f(t) \leq \frac{1}{2} \operatorname{cotgh}(2t) \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.11)$$

Se $T \leq t < a$, então

$$f(t) \leq \frac{1}{2}.$$

De fato, se $f(t_1) > \frac{1}{2}$ para algum $t_1 > T$, então existiria $t_2 \in (T, t_1)$, tal que $f(t_2) > \frac{1}{2}$ e $f'(t_2) \geq 0$. Neste caso teríamos

$$4f^2(t_2) + f'(t_2) > 1.$$

Isto contradiz a desigualdade obtida em (3.8). Como $\operatorname{cotgh}(t) > 1$ para todo $t > 0$,

$$f(t) \leq \frac{1}{2} \operatorname{cotgh}(2t), \quad T \leq t < a.$$

Logo podemos concluir

$$f(t) \leq \frac{1}{2} \cotgh(2t) \quad \forall t \in (0, a). \quad (3.12)$$

Agora fazendo $\alpha = 2, \dots, m$ na desigualdade (3.6),

$$\begin{aligned} |\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 &\geq 4|r_{\alpha\alpha}|^2 + 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}} \\ &\geq 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2\left(\frac{1}{2}\right)(-1)(1 + \delta_{\alpha 1}) \\ &= 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} - 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Decorre da igualdade (3.2), juntamente com a desigualdade acima, que

$$4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} \leq 1.$$

Seja $\omega(t) = r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t))$. Logo

$$4\omega^2(t) + 2\omega'(t) \leq 1. \quad (3.14)$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\omega(t) = \frac{1}{2}.$$

Determinaremos ω resolvendo o problema de valor inicial

$$\begin{cases} 4\omega^2(t) + 2\omega'(t) \leq 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0} t\omega(t) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Com efeito, seja $S = \inf\{t \in (0, a); 4\omega^2(t) - 1 = 0\}$. Portanto

$$4\omega^2(t) - 1 > 0 \quad \forall t \in (0, S).$$

Logo, no intervalo $(0, S)$, temos

$$4\omega^2(t) + 2\omega'(t) \leq 1 \implies 2\omega'(t) \leq 1 - 4\omega^2(t) \implies \frac{2\omega'(t)}{1 - 4\omega^2(t)} \geq 1. \quad (3.15)$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \cotgh^{-1}(2\omega(t)) \geq 1,$$

integrando de 0 a t a desigualdade acima,

$$\cotgh^{-1}(2\omega(t)) \geq t.$$

Portanto

$$\omega(t) \leq \frac{1}{2} \cotgh(t) \quad \forall t \in (0, S). \quad (3.16)$$

Se $S \leq t < a$, então

$$\omega(t) \leq \frac{1}{2}.$$

De fato, se $\omega(t_1) > \frac{1}{2}$, para algum $t_1 > S$, então existiria $t_2 \in (S, t_1)$, tal que $\omega(t_2) > \frac{1}{2}$ e $\omega'(t_2) \geq 0$. Neste caso teríamos

$$4\omega^2(t_2) + 2\omega'(t_2) > 1.$$

Isto contradiz a desigualdade obtida em (3.14). Logo podemos concluir

$$\omega(t) \leq \frac{1}{2} \cotgh(t) \quad \forall t \in (0, a). \quad (3.17)$$

Finalmente, ao longo de γ , temos

$$\begin{aligned} \Delta r(\gamma(t)) &= 4 \sum_{\alpha=1}^m r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t)) = 4r_{1\bar{1}}(\gamma(t)) + 4 \sum_{\alpha=2}^m r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t)) \\ &= 4f(t) + 4 \sum_{\alpha=2}^m \omega(t). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades (3.12) e (3.17), obtemos

$$\Delta r(\gamma(t)) \leq 2 \cotgh(2t) + 2(m-1) \cotgh(t).$$

Logo, sendo γ uma geodésica minimizante, então $r(\gamma(t)) = t$, com isso concluímos que

$$\Delta r(x) \leq 2(m-1) \cotgh(r(x)) + 2 \cotgh(2r(x)) = \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)),$$

onde a igualdade decorre do Exemplo 2.5.3.

□

Teorema 3.1.2. *Seja M^m uma variedade Kähler completa de dimensão complexa m com $BK_M \geq 1$. Então, em $M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$, temos*

$$\begin{aligned} \Delta r(x) &\leq 2(m-1) \cotg(r(x)) + 2 \cotg(2r(x)) \\ &= \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância definida em $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Demonstração. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a x . Consideremos em p uma base unitária $\{e_1, \dots, e_m\}$, tal que

$$e_1 = \frac{1}{2} (\gamma'(0) - iJ\gamma'(0)) = \frac{1}{2} (\nabla r(p) - iJ\nabla r(p)).$$

Seja $\varepsilon_\alpha = e_\alpha(t)$ o transporte paralelo de e_α ao longo de γ para cada $\alpha = 1, \dots, m$. Decorre da isometria do transporte paralelo que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ é também um referencial unitário em γ . Além disso, aplicando o Teorema 1.1.1 e a unicidade de campos paralelos, vemos que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (\gamma'(t) - iJ\gamma'(t)) = \frac{1}{2} (\nabla r(\gamma(t)) - iJ\nabla r(\gamma(t))).$$

Fazendo cálculos análogos aos usados na demonstração do Teorema 3.1.1, podemos verificar que

$$r_{11} = -r_{1\bar{1}} \tag{3.18}$$

e

$$|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 \geq 4|r_{\alpha\alpha}|^2 + 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}}. \tag{3.19}$$

para cada $\alpha = 1, \dots, m$.

Agora fazendo $\alpha = 1$ na desigualdade em (3.19),

$$|\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 4|r_{11}|^2 + 4|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2R_{1\bar{1}1\bar{1}}.$$

Visto que $r_{11} = -r_{1\bar{1}}$, temos

$$|\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2R_{1\bar{1}1\bar{1}}.$$

Por hipótese $BK_M \geq 1$, então usando a Definição 2.4.2, vemos que

$$R_{1\bar{1}1\bar{1}} \geq \left(\frac{1}{2}\right) (1 + \delta_{11}) = 1.$$

Logo

$$0 = |\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2,$$

ou seja,

$$4|r_{1\bar{1}}|^2 + \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} \leq -1. \tag{3.20}$$

Consideremos a função $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = r_{1\bar{1}}(\gamma(t)),$$

assim

$$f'(t) = \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r}.$$

Substituindo $f(t)$ e $f'(t)$ na desigualdade (3.20), obtemos

$$4f^2(t) + f'(t) \leq -1. \quad (3.21)$$

Portanto

$$\frac{f'(t)}{1 + 4f^2(t)} \leq -1.$$

Observe que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{tg}^{-1}(2f(t)) = \frac{f'(t)}{1 + 4f^2(t)}.$$

Daí, podemos concluir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{tg}^{-1}(2f(t)) \leq -1,$$

donde

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg}^{-1}(2f(t)) \leq -2.$$

Integrando de 0 a t a desigualdade acima,

$$\operatorname{tg}^{-1}(2f(t)) - \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{tg}^{-1}(2f(t)) \leq -2t.$$

Visto que a métrica Riemanniana coincide localmente com a métrica Euclidiana (ver Observação 2.5.1), temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} tf(t) = \frac{1}{4}.$$

Logo

$$\operatorname{tg}^{-1}(2f(t)) \leq \frac{\pi}{2} - 2t.$$

Como a função tangente é crescente, vemos que

$$2f(t) \leq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) = \operatorname{cotg}(2t),$$

isto é,

$$f(t) \leq \frac{1}{2} \operatorname{cotg}(2t) \quad \forall t \in (0, a). \quad (3.22)$$

Agora fazendo $\alpha = 2, \dots, m$ na desigualdade (3.19),

$$\begin{aligned} 0 = |\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 &\geq 4|r_{\alpha\alpha}|^2 + 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}} \\ &\geq 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2\left(\frac{1}{2}\right)(1 + \delta_{\alpha 1}) \\ &= 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Daí

$$4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} \leq -1.$$

Seja $\omega(t) = r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t))$. Assim

$$4\omega^2(t) + 2\omega'(t) \leq -1. \quad (3.24)$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\omega(t) = \frac{1}{2}.$$

Logo

$$4\omega^2(t) + 2\omega'(t) \leq -1 \iff \frac{2\omega'(t)}{1 + 4\omega^2(t)} \leq -1 \iff \frac{d}{dt} \operatorname{tg}^{-1}(2\omega(t)) \leq -1. \quad (3.25)$$

Integrando de 0 a t a última das desigualdades acima e usando que $\lim_{t \rightarrow 0} t\omega(t) = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\operatorname{tg}^{-1}(2\omega(t)) \leq \frac{\pi}{2} - t.$$

Como a função tangente é crescente, vemos que

$$2\omega(t) \leq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{cotg}(t),$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \frac{1}{2} \operatorname{cotg}(t) \quad \forall t \in (0, a). \quad (3.26)$$

Finalmente, ao longo de γ , temos

$$\begin{aligned} \Delta r(\gamma(t)) &= 4 \sum_{\alpha=1}^m r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t)) = 4r_{1\bar{1}}(\gamma(t)) + 4 \sum_{\alpha=2}^m r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t)) \\ &= 4f(t) + 4 \sum_{\alpha=2}^m \omega(t). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades em (3.22) e (3.26), obtemos

$$\Delta r(\gamma(t)) \leq 2 \operatorname{cotg}(2t) + 2(m-1) \operatorname{cotg}(t).$$

Logo sendo γ uma geodésica minimizante, temos $r(\gamma(t)) = t$, com isso concluímos que

$$\Delta r(x) \leq 2(m-1) \operatorname{cotg}(r(x)) + 2 \operatorname{cotg}(2r(x)) = \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)),$$

onde a igualdade decorre do Exemplo 2.5.2.

□

O Teorema 3.1.3 foi inspirado no Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades Kähler quaterniônicas obtido por Kong, Li e Zhou em [8] e cuja prova segue da aplicação das técnicas de Análise Complexa introduzidas por Li e Wang em [12].

Teorema 3.1.3. *Seja M^m uma variedade Kähler completa com $BK_M \geq 0$. Então, em $M \setminus (Cut(p) \cup \{p\})$, temos*

$$\Delta r(x) \leq (2m - 1)(r(x))^{-1} = \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)),$$

onde $\tilde{\Delta}$ e \tilde{r} denotam, respectivamente, o Laplaciano e a função distância em \mathbb{C}^m .

Demonstração. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante e normalizada ligando p a x . Consideremos em p uma base unitária $\{e_1, \dots, e_m\}$, tal que

$$e_1 = \frac{1}{2}(\gamma'(0) - iJ\gamma'(0)) = \frac{1}{2}(\nabla r(p) - iJ\nabla r(p)).$$

Seja $\varepsilon_\alpha = e_\alpha(t)$ o transporte paralelo de e_α ao longo de γ para cada $\alpha = 1, \dots, m$. Decorre da isometria do transporte paralelo que $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ é também um referencial unitário em γ . Além disso, aplicando o Teorema 1.1.1 e a unicidade de campos paralelos, vemos que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\gamma'(t) - iJ\gamma'(t)) = \frac{1}{2}(\nabla r(\gamma(t)) - iJ\nabla r(\gamma(t))).$$

Fazendo cálculos análogos aos cálculos feitos na demonstração do Teorema 3.1.1, podemos verificar que

$$r_{11} = -r_{1\bar{1}} \tag{3.27}$$

e

$$|\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 \geq 4|r_{\alpha\alpha}|^2 + 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}}. \tag{3.28}$$

Agora, fazendo $\alpha = 1$ na desigualdade em (3.28),

$$|\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 4|r_{11}|^2 + 4|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2R_{1\bar{1}1\bar{1}}.$$

Visto que $r_{11} = -r_{1\bar{1}}$, temos

$$0 = |\nabla r|_{1\bar{1}}^2 \geq 8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} + 2R_{1\bar{1}1\bar{1}}.$$

Por hipótese $BK_M \geq 0$, então usando a Definição 2.4.2, vemos que

$$R_{1\bar{1}1\bar{1}} \geq 0.$$

Logo

$$8|r_{1\bar{1}}|^2 + 2\frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} \leq 0,$$

ou seja,

$$4|r_{1\bar{1}}|^2 + \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r} \leq 0. \quad (3.29)$$

Consideremos a função $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = r_{1\bar{1}}(\gamma(t)),$$

assim

$$f'(t) = \frac{\partial r_{1\bar{1}}}{\partial r}.$$

Substituindo $f(t)$ e $f'(t)$ na desigualdade (3.29), obtemos

$$4f^2(t) + f'(t) \leq 0. \quad (3.30)$$

Portanto

$$-\frac{f'(t)}{f^2(t)} \geq 4.$$

Daí, podemos concluir

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{f(t)} \geq 4.$$

Integrando de 0 a t a desigualdade acima,

$$\frac{1}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{f(t)} \geq 4t.$$

Como a métrica Riemanniana coincide localmente com a métrica Euclidiana (ver Observação 2.5.1), então podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t f(t) = \frac{1}{4}.$$

Logo

$$\frac{1}{f(t)} \geq 4t,$$

ou seja,

$$f(t) \leq \frac{1}{4t} \quad \forall t \in (0, a). \quad (3.31)$$

Agora fazendo $\alpha = 2, \dots, m$ na desigualdade (3.28),

$$\begin{aligned} 0 = |\nabla r|_{\alpha\bar{\alpha}}^2 &\geq 4|r_{\alpha\alpha}|^2 + 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} + 2R_{\alpha\bar{\alpha}1\bar{1}} \\ &\geq 4|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + 2\frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Portanto

$$2|r_{\alpha\bar{\alpha}}|^2 + \frac{\partial r_{\alpha\bar{\alpha}}}{\partial r} \leq 0.$$

Seja $\omega(t) = r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t))$. Logo

$$2\omega^2(t) + \omega'(t) \leq 0 \iff -\frac{\omega'(t)}{\omega^2(t)} \geq 2 \iff \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega(t)} \geq 2. \quad (3.33)$$

Integrando de 0 a t a última das desigualdades acima e usando que $\lim_{t \rightarrow 0} t\omega(t) = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{\omega(t)} \geq 2t,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \frac{1}{2t} \quad \forall t \in (0, a). \quad (3.34)$$

Finalmente, ao longo de γ , temos

$$\begin{aligned} \Delta r(\gamma(t)) &= 4 \sum_{\alpha=1}^m r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t)) = 4r_{1\bar{1}}(\gamma(t)) + 4 \sum_{\alpha=2}^m r_{\alpha\bar{\alpha}}(\gamma(t)) \\ &= 4f(t) + 4 \sum_{\alpha=2}^m \omega(t). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades (3.31) e (3.34), obtemos

$$\Delta r(\gamma(t)) \leq t^{-1} + 2(m-1)t^{-1} = (2m-1)t^{-1}.$$

Logo sendo γ uma geodésica minimizante, temos $r(\gamma(t)) = t$, com isso concluímos que

$$\Delta r(x) \leq (2m-1)(r(x))^{-1} = \tilde{\Delta} \tilde{r}(r(x)).$$

onde a igualdade decorre do Exemplo 2.5.1.

□

3.2 Aplicações

3.2.1 Comparação de Volume de Bishop-Gromov

Suponha que M^n é uma variedade Riemanniana completa e orientada com elemento de volume dM , e seja $p \in M$ um ponto fixado. Decorre do Corolário 1.1.2 que a aplicação exponencial $\exp_p : \Sigma_p \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é um difeomorfismo.

Definição 3.2.1. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. Um campo de vetores B ao longo de γ é um campo de Jacobi, se B satisfaz a equação de Jacobi*

$$\frac{D^2 B}{dt^2} + R(B, \gamma')\gamma' = 0 \quad \forall t \in [0, a].$$

Considere $t_0 \in \mathbb{R}$ e $v \in T_p M$ unitário, tal que $t_0 v \in \Sigma_p$, e seja $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ a geodésica normalizada dada por $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Observe que o campo de Jacobi B ao longo de γ que satisfaz $B(0) = 0$ é definido por

$$B(t) = (d \exp_p)_{tv}(tB'(0)), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Se $w = B'(0)$, vemos que

$$(d \exp_p)_{tv}(w) = \frac{1}{t}(d \exp_p)_{tv}(tB'(0)) = \frac{1}{t}B(t). \quad (3.35)$$

Também

$$(d \exp_p)_{tv}(v) = \gamma'(t). \quad (3.36)$$

Seja $\{e_1 = v, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva de $T_p M$ e

$$B_i(t) = (d \exp_p)_{tv}(te_i)$$

o campo de Jacobi ao longo de γ com $B_i(0) = 0$ e $B'_i(0) = e_i$ para cada $2 \leq i \leq n$. Usando o lema de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} g(B(t), \gamma'(t)) &= g((d \exp_p)_{tv}(te_i), (d \exp_p)_{tv}(v)) \\ &= tg(e_i, v) = tg(e_i, e_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

para cada $i = 2, \dots, n$.

Se μ denota a medida de Lebesgue e $K \subset M$ é um subconjunto de M , então $\mu(\text{Cut}(p)) = 0$ e

$$\text{vol}_M(K) = \int_K dM = \int_{K \setminus \text{Cut}(p)} dM = \int_L (\exp_p)^* dM, \quad (3.38)$$

onde $L = \exp_p^{-1}(K \setminus \text{Cut}(p))$ e $(\exp_p)^* dM$ é uma determinada n -forma em $T_p M$.

A seguir, vamos explicitar $(\exp_p)^* dM$. Usando as expressões em (3.35) e (3.36), e a igualdade em (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} ((\exp_p)^* dM)_{tv}(e_1, e_2, \dots, e_n) &= dM_{\exp_p(tv)}((d \exp_p)(e_1), (d \exp_p)(e_2), \dots, (d \exp_p)(e_n)) \\ &= dM_{\exp_p(tv)}(\gamma'(t), \frac{1}{t}B_2(t), \dots, \frac{1}{t}B_n(t)) \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} dM_{\exp_p(tv)}(\gamma'(t), B_2(t), \dots, B_n(t)) \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \sqrt{\det D(t)}, \end{aligned}$$

onde $D(t)$ denota uma matriz de ordem $n - 1$, cuja ij -ésima entrada é o elemento $g(B_i(t), B_j(t))$ para cada $t \in (0, t_0]$.

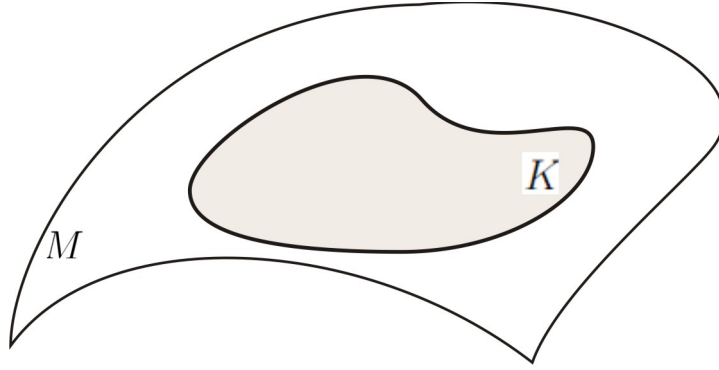


Figura 3.1: Subconjunto K de M .

Considere para $v \in T_p M$ unitário e $0 \leq t \leq \rho(v)$ a aplicação A dada por

$$A(t, v) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 0, \\ \frac{1}{t^{n-1}} \sqrt{\det D(t)}, & \text{se } 0 < t < \rho(v). \end{cases} \quad (3.39)$$

Daí

$$((\exp_p)^* dM)_{tv} = A(t, v) du_1 \wedge \dots \wedge du_n,$$

onde du_i é a 1-forma dual de e_i em $T_p M$. Se denotarmos por $d\theta$ o elemento de volume da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset T_p M$. Segue do teorema de integração em coordenadas polares que

$$((\exp_p)^* dM)_{tv} = A(t, v) t^{n-1} dt \wedge d\theta. \quad (3.40)$$

Logo, usando a igualdade em (3.38), obtemos

$$\text{vol}_M(K) = \int_{\exp_p^{-1}(K \setminus \text{Cut}(p))} (\exp_p)^* dM = \int_{\exp_p^{-1}(K \setminus \text{Cut}(p))} A(t, v) t^{n-1} dt \wedge d\theta, \quad (3.41)$$

onde n é a dimensão de M .

Lema 3.2.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa orientada e $p \in M$ um ponto fixado. Se $\gamma : [0, a] \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ é a geodésica normalizada $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ e $A(t, v)$ é como em (3.39), então*

$$\Delta r(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \log(t^{n-1} A(t, v)).$$

Demonstração. Fixado $0 < t_0 \leq a$, considere $q = \gamma(t_0)$, $\{e_1 = \gamma'(t_0), e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva de $T_q M$ e B_i o campo de Jacobi ao longo de γ , tal que $B_i(0) = 0$ e $B_i(t_0) = e_i$. Observe que

$$\begin{aligned} \Delta r(q) &= (\text{Hess } r)_q(e_1, e_1) + \sum_{i=2}^n (\text{Hess } r)_q(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=2}^n g(B'_i, B_i)(t_0) \end{aligned}$$

para cada $i = 2, \dots, n$. Além disso, $\{B'_2(0), \dots, B'_n(0)\}$ é uma base do complemento ortogonal de $v = \gamma'(0)$, pois decorre da igualdade (3.37) que $g(B'_i(0), \gamma'(0)) = 0$. Sejam $\{v, E_2, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal e positiva de T_pM . Note que

$$E_i = \sum_{j=2}^n a_{ij} B'_j(0)$$

para cada $i = 2, \dots, n$. Portanto

$$\begin{aligned} A(t, v) &= ((\exp_p)^* dM)_{tv}(v, E_2, \dots, E_n) \\ &= \det(a_{ij}) ((\exp_p)^* dM)_{tv}(v, B'_2(0), \dots, B'_n(0)) \\ &= \frac{\det(a_{ij})}{t^{n-1}} \sqrt{\det D(t)} \\ &= \frac{c}{t^{n-1}} \sqrt{\det D(t)}, \end{aligned}$$

onde $c = \det(a_{ij})$. Visto que

$$\begin{aligned} A'(t, v) &= \frac{d}{dt} A(t, v) = -\frac{(n-1)c}{t^n} \sqrt{\det D(t)} + \frac{c}{t^{n-1}} \frac{(\det D)'(t)}{2\sqrt{\det D(t)}} \\ &= -\frac{(n-1)c}{t^n} \sqrt{\det D(t)} + \frac{c}{2t^{n-1}} (\det D(t)) \operatorname{tr}(D'(t)D(t)^{-1}) \end{aligned}$$

e $D(t)$ coincide com a aplicação identidade, vemos que

$$A'(t, v) = -\frac{(n-1)c}{t^n} + \frac{c}{2t^{n-1}} \operatorname{tr} D'(t).$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tr} D'(t_0) = \sum_{i=2}^n 2g(B'_i, B_i)(t_0) = 2\Delta r(q),$$

de maneira que

$$A'(t_0, v) = \frac{-(n-1)c}{t_0^n} + \frac{c}{t_0^{n-1}} \Delta r(q).$$

Logo

$$\frac{A'(t_0, v)}{A(t_0, v)} = -\frac{n-1}{t_0} + \Delta r(q),$$

isto é,

$$\Delta r(q) = \frac{n-1}{t_0} + \frac{A'(t_0, v)}{A(t_0, v)} = \frac{d}{dt} \log(t_0^{n-1} A(t_0, v)).$$

□

Definição 3.2.2. Se \exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança V de $0 \in T_pM$, $\exp_p V = U$ é chamada uma vizinhança normal de p . Se $\varepsilon > 0$ é tal que a bola aberta $B_{T_pM}(0; \varepsilon) \subset T_pM$ centrada na origem e de raio ε está inteiramente contida em V , denominamos $\exp_p(B_{T_pM}(0; \varepsilon)) = B_M(p; \varepsilon)$ a bola geodésica (ou normal) e $\partial \overline{B_M(p; \varepsilon)} = S_M(p; \varepsilon)$ a esfera geodésica.

Aplicação 3.2.1. *Seja M^m uma variedade Kähler completa com $BK_M \geq -1$. Então, para todo $x \in M$ e $0 \leq \varepsilon \leq R$, o volume das bolas geodésicas satisfazem*

$$\frac{V_x(R)}{V_x(\varepsilon)} \leq \frac{V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R)}{V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(\varepsilon)}$$

e

$$V_x(R) \leq V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R),$$

onde $V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(\varepsilon)$ denota o volume da bola geodésica de raio ε em $\mathbb{C}\mathbb{H}^m$.

Demonstração. Decorre da Proposição 1.3.1 que M^m é orientável e tem dimensão real $n = 2m$. Observe que, $T_p M$ e $T_{\tilde{p}} \mathbb{C}\mathbb{H}^m$ são espaços vetoriais n -dimensionais munidos com um produto interno. Daí, uma transformação linear $\iota : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \mathbb{C}\mathbb{H}^m$ que aplica uma base ortonormal de $T_p M$ em uma base ortonormal de $T_{\tilde{p}} \mathbb{C}\mathbb{H}^m$ é uma isometria, logo preserva as esferas unitárias centradas na origem dos espaços vetoriais $T_p M$ e $T_{\tilde{p}} \mathbb{C}\mathbb{H}^m$. Doravante, fixe uma tal ι e considere $\tilde{v} = \iota(v)$, onde $v \in T_p M$ é um vetor fixado. Sejam $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M \setminus \text{Cut}(p)$ e $\tilde{\gamma} : [0, \tilde{t}_0] \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{H}^m \setminus \text{Cut}(\tilde{p})$ as geodésicas dadas por

$$\gamma(t) = \exp_p(tv) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(t) = \exp_{\tilde{p}}(t\tilde{v}).$$

Ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, defina

$$A(t) = t^{2m-1} A(t, v) \quad \text{e} \quad \tilde{A}(t) = t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}).$$

Decorre do Lema 3.2.1 que

$$\Delta r(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \log(t^{2m-1} A(t, v)) = \frac{d}{dt} \log(A(t))$$

e

$$\tilde{\Delta} \tilde{r}(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt} \log(t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v})) = \frac{d}{dt} \log(\tilde{A}(t)).$$

Aplicando o Teorema de Comparação do Laplaciano para variedades Kähler, ver Teorema 3.1.1, obtemos

$$\frac{d}{dt} \log(A(t)) \leq \frac{d}{dt} \log(\tilde{A}(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \log \frac{A(t)}{\tilde{A}(t)} \leq 0.$$

Assim $\log \frac{A(t)}{\tilde{A}(t)}$ é uma função não-crescente. Portanto, para $0 < \varepsilon \leq R$, temos

$$\log \frac{A(R)}{\tilde{A}(R)} \leq \log \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)}.$$

Como a função logarítma é crescente, então

$$\frac{A(R)}{\tilde{A}(R)} \leq \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)}, \quad 0 < \varepsilon \leq R. \quad (3.42)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_0^R A(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt &= \left(\int_0^\varepsilon A(t)dt + \int_\varepsilon^R A(t)dt \right) \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt \\ &= \int_0^\varepsilon A(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt + \int_\varepsilon^R A(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Por outro lado, usando a desigualdade em (3.42),

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^R A(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt &= \int_\varepsilon^R \frac{A(t)}{\tilde{A}(t)} \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt \leq \int_\varepsilon^R \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)} \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt \\ &= \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)} \int_\varepsilon^R \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt = \int_\varepsilon^R \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)} \tilde{A}(t)dt \\ &\leq \int_\varepsilon^R \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon \frac{A(t)}{\tilde{A}(t)} \tilde{A}(t)dt \\ &= \int_\varepsilon^R \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon A(t)dt. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Substituindo a desigualdade em (3.44) na igualdade em (3.43), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^R A(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt &\leq \int_0^\varepsilon A(t)dt \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt + \int_\varepsilon^R \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon A(t)dt \\ &= \int_0^\varepsilon A(t)dt \left(\int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt + \int_\varepsilon^R \tilde{A}(t)dt \right) \\ &= \int_0^R \tilde{A}(t)dt \int_0^\varepsilon A(t)dt. \end{aligned}$$

Daí

$$\int_0^R A(t)dt \leq \int_0^\varepsilon A(t)dt \frac{\int_0^R \tilde{A}(t)dt}{\int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt},$$

com $0 < \varepsilon \leq R$. Portanto

$$\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^R A(t)dt \wedge d\theta \leq \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^\varepsilon A(t)dt \wedge d\theta \frac{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^R \tilde{A}(t)dt \wedge d\theta}{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^\varepsilon \tilde{A}(t)dt \wedge d\theta}$$

o que implica,

$$\frac{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^R t^{2m-1} A(t, v)dt \wedge d\theta}{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^\varepsilon t^{2m-1} A(t, v)dt \wedge d\theta} \leq \frac{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^R t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v})dt \wedge d\theta}{\int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^\varepsilon t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v})dt \wedge d\theta}.$$

Assim

$$\frac{\int_{B_{T_p M}(0;R)} t^{2m-1} A(t, v) dt \wedge d\theta}{\int_{B_{T_p M}(0;\varepsilon)} t^{2m-1} A(t, v) dt \wedge d\theta} \leq \frac{\int_{B_{T_p \mathbb{C}H^m}(0;R)} t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}) dt \wedge d\theta}{\int_{B_{T_p \mathbb{C}H^m}(0;\varepsilon)} t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}) dt \wedge d\theta}.$$

Logo, usando a definição de bola geodésica e a expressão em (3.42), concluímos que

$$\frac{V_p(R)}{V_p(\varepsilon)} \leq \frac{V_{\tilde{p}}(R)}{V_{\tilde{p}}(\varepsilon)} \quad \forall \tilde{p} \in \mathbb{C}H^m,$$

isto é,

$$\frac{V_p(R)}{V_p(\varepsilon)} \leq \frac{V_{\mathbb{C}H^m}(R)}{V_{\mathbb{C}H^m}(\varepsilon)}.$$

Agora iremos mostrar que $V_x(R) \leq V_{\mathbb{C}H^m}(R)$. De fato, segue da expressão em (3.43) que

$$\frac{A(t)}{\tilde{A}(t)} \leq \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)} \quad \forall 0 < \varepsilon \leq t. \quad (3.45)$$

Visto que a métrica Riemanniana coincide localmente com a métrica Euclidiana, temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\varepsilon)}{\tilde{A}(\varepsilon)} = 1.$$

Daí, aplicando o limite na desigualdade em (3.45), obtemos

$$A(t) \leq \tilde{A}(t).$$

Logo

$$\int_{B_{T_p M}(0;R)} t^{2m-1} A(t, v) dt \wedge d\theta \leq \int_{B_{T_p M}(0;R)} t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}) dt \wedge d\theta,$$

isto é,

$$V_p(R) \leq V_{\mathbb{C}H^m}(R).$$

□

3.2.2 Estimativa do Primeiro Autovalor do Laplaciano

Nessa subseção, quando não mencionado, M simplesmente denotará uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com fronteira não vazia.

Definição 3.2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Dizemos que um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do operador Laplaciano $-\Delta$, quando o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta f + \lambda f = 0 & \text{em } M \setminus \partial M \\ f = 0 & \text{em } \partial M \end{cases}$$

tem uma solução não trivial em $C^\infty(\text{int } M) \cap C^0(\partial M)$. Neste caso, a função f correspondente é uma autofunção associada ao autovalor λ .

Seja $L^2(M)$ o espaço das funções mensuráveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\int_M |f|^2 dM < +\infty.$$

Consideremos em $L^2(M)$ o produto interno dado por

$$(f, h) = \int_M fh dM,$$

cujas norma correspondente é

$$|f| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_M |f|^2 dM \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que este produto interno torna $L^2(M)$ um espaço de Hilbert.

Teorema 3.2.1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta e com bordo. Então o conjunto dos autovalores do operador Laplaciano $-\Delta$ consiste de uma sequência infinita*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \rightarrow +\infty.$$

Demonstração. Ver [4], página 8, Teorema 1.

□

O conjunto

$$\text{Spec}(\Delta) = \{0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \rightarrow +\infty\}$$

é chamado *espectro* do Laplaciano sobre M . O *primeiro autovalor* do operador Laplaciano é definido por

$$\lambda_1(M) = \inf \text{Spec}(\Delta)$$

Em 1975, S. Y. Cheng [3] obteve uma limitação para o primeiro autovalor do Laplaciano em variedades Riemannianas, a saber:

Teorema 3.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão real n . Se $\text{Ric}_M \geq -(n-1)$, então o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz*

$$\lambda_1(M) \leq \frac{(n-1)^2}{4} = \lambda_1(\mathbb{H}^n). \quad (3.46)$$

A estimativa obtida por Cheng é atigida. De fato, a igualdade é verificada para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , cuja curvatura de Ricci é igual a $-(n-1)$. No caso em que M é uma variedade Kähler, Li e Wang obtiveram a seguinte estimativa para $\lambda_1(M)$:

Aplicação 3.2.2. *Seja M^m uma variedade Kähler completa com $BK_M \geq -1$. Então o primeiro autovalor do Laplaciano em M satisfaz*

$$\lambda_1(M) \leq m^2 = \lambda_1(\mathbb{C}\mathbb{H}^m).$$

Demonstração. Note que, fazendo $\varepsilon = 1$ na Aplicação 3.2.1, obtemos

$$V_p(R) \leq \frac{V_p(1)}{V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(1)} V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R) \leq C_1 V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R),$$

onde $C_1 = \frac{V_p(1)}{V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(1)}$ é uma constante real. Observe que $V_{\mathbb{C}\mathbb{H}^m}(R) \leq C_2 e^{2mR}$ para todo $R \geq 1$. De fato, seja $\tilde{p} \in \mathbb{C}\mathbb{H}^m$, usando a expressão em (3.41),

$$V_{\tilde{p}}(R) = \int_{B_{T_{\tilde{p}}}\mathbb{C}\mathbb{H}} t^{2m-1} A(t, v) dt \wedge d\theta. \quad (3.47)$$

Por outro lado, decorre do Exemplo 2.5.3 e do Lema 3.2.1 que

$$\frac{A'(t, v)}{A(t, v)} = -\frac{n-1}{t} + 2(m-1) \operatorname{cotgh}(t) + 2 \operatorname{cotgh}(2t).$$

Portanto

$$A(t, v) = t^{-(2m-1)} \sinh^{2(m-1)}(t) \sinh(2t).$$

Agora substituindo a igualdade acima em (3.47), temos que

$$\begin{aligned} V_{\tilde{p}}(R) &= \int_{B_{T_{\tilde{p}}}\mathbb{C}\mathbb{H}} \sinh^{2(m-1)}(t) \sinh(2t) dt \wedge d\theta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^R \sinh^{2(m-1)}(t) \sinh(2t) dt \wedge d\theta \\ &= w \int_0^R 2 \sinh^{2m-1}(t) \cosh(t) dt \\ &= \frac{w}{m} \sinh^{2m}(R) = \frac{w}{m} \left(\frac{e^R - e^{-R}}{2} \right)^{2m} \\ &\leq C_2 e^{2mR}, \end{aligned}$$

onde w denota o volume da esfera $\mathbb{S}^{2m-1} \subset T_{\tilde{p}}\mathbb{C}\mathbb{H}^m$ e $C_2 = \frac{w}{m}$. Assim

$$V_p(R) \leq C e^{2mR} \quad \forall R \geq 1, \quad (3.48)$$

onde $C \geq C_1 C_2$. Por outro lado, em [13], Li e Wang provaram que

$$V_p(R) \geq C \exp(2\sqrt{\lambda_1(M)}R). \quad (3.49)$$

Usando (3.48) e (3.49), concluímos

$$C \exp(2\sqrt{\lambda_1(M)}R) \leq C e^{2mR}.$$

Logo

$$\lambda_1(M) \leq m^2.$$

A igualdade $\lambda_1(\mathbb{C}\mathbb{H}^m) = m^2$ pode ser vista em [12], na página 46.

□

3.2.3 Comparação de Volume: Versão Global

Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância a um ponto fixado $p \in M$. Observemos que

$$\Delta r(x) = H(x),$$

onde $H(x)$ denota a curvatura média da esfera geodésica $S_M(x; r(x))$ centrada em $x \in M \setminus (Cut(p) \cup \{p\})$ e raio $r(x)$ (ver [11], página 22). Além disso, o volume de uma variedade compacta M é dada por

$$\text{vol}(M) = V_p(d(M)),$$

onde $V_p(d(M))$ é o volume da bola geodésica centrada em p e raio igual ao diâmetro de M , denotado por $d(M)$.

Aplicação 3.2.3. *Seja M^m uma variedade Kähler completa com $BK_M \geq 1$. Então M é compacta e diâmetro de M satisfaz*

$$d(M) \leq \frac{\pi}{2} = d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m).$$

Além disso,

$$\text{vol}(M) \leq \text{vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m).$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $d(M) > \frac{\pi}{2}$. Portanto, existem $p \in M$ e $x \in M \setminus (Cut(p) \cup \{p\})$, tal que

$$r(x) > \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos a geodésica normalizada e minimizante $\gamma : [0, a] \rightarrow M \setminus Cut(p)$ ligando p a x , isto é, $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = x$. Visto que a função distância é diferenciável em $M \setminus Cut(p)$, então existe $t_0 \in (0, a)$, tal que

$$r(\gamma(t_0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Como γ está normalizada, temos que $t_0 = \pi/2$. Agora, seja $x_0 = \gamma(\pi/2)$. Aplicando o Teorema 3.1.2,

$$\Delta r(x_0) \leq 2(m-1) \cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cotg\left(2 \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} t\right) = -\infty. \quad (3.50)$$

Por outro lado, a curvatura média da esfera geodésica $S_M(x; r(x))$ satisfaz

$$H(x_0) = \Delta r(x_0).$$

Daí, substituindo a igualdade acima na expressão em (3.50), obtemos $H(x_0) = -\infty$. Isto é um absurdo. Logo

$$d(M) \leq \frac{\pi}{2} = d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m).$$

Agora iremos mostrar que $\text{vol}(M) \leq \text{vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m)$. Com efeito, usando o Lema 3.2.1 e o Teorema 3.1.2,

$$\frac{d}{dt} \log(t^{2m-1} A(t, v)) \leq \frac{d}{dt} \log(t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v})),$$

e, portanto,

$$t^{2m-1} A(t, v) \leq t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}).$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &= V_p(d(M)) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^{d(M)} t^{2m-1} A(t, v) dt \wedge d\theta \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^{d(M)} t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}) dt \wedge d\theta \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \int_0^{d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m)} t^{2m-1} \tilde{A}(t, \tilde{v}) dt \wedge d\theta \\ &= V_{\tilde{p}}(d(\mathbb{C}\mathbb{P}^m)) = \text{vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^m). \end{aligned}$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Ballmann, W. *Lectures on Kähler Manifolds*. ESI Lectures on Mathematics and Physics, European Mathematical Society, Zurich, 2006.
- [2] Bishop, R. e Crittenden, R. *Geometry of Manifolds*. Academic Press, New York and London, 1964.
- [3] Cheng, S. Y. *Eigenvalue Comparison Theorems and its Geometric Applications*. Math. Z. **143** (1975), 289-297.
- [4] Chavel, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1985.
- [5] Do Carmo, M. *Formas Diferenciais e Aplicações*. Monografias de Matemática n° 37, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.
- [6] Do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. 4ª edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] Fritzsche, K. e Grauert, H. *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [8] Kong, S., Li, P. e Zhou, D. *Spectrum of the Laplacian on Quaternionic Kähler Manifolds*. Journal of Differential Geometry **78** (2008), 295-332.
- [9] Kobayashi, S. e Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry II*. Interscience Publishers, New York, 1996.
- [10] Lee, J. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] Li, P. *Lecture Notes on Geometric Analysis*. University of California, Irvine, USA, 2009.
- [12] Li, P. e Wang, J. *Comparison Theorem for Kähler Manifolds and Positivity of Spectrum*. Journal of Differential Geometry **69** (2005), 43-74.
- [13] Li, P. e Wang, J. *Complete Manifolds with Positive Spectrum*. Journal of Differential Geometry **58** (2001), 501-534.
- [14] Moroianu, A. *Lectures on Kähler Geometry*. Cambridge University Press, École Polytechnique, Paris, 2004.

- [15] Newlander, A. e Nirenberg, L. *Complex Analytic Coordinates in almost Complex Manifolds*. Ann. of Math. **65** (1957), 391-404.
- [16] Schoen R. e Yau, S. -T. *Lectures on Differential Geometry*. Volume I, International Press, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, 1994.

Índice Remissivo

- 2-forma fundamental, 29
- Aplicação
 - exponencial, 12
- Atlas complexo, 21
- Autofunção, 78
- Autovalor, 78
- Base unitária, 30
- Bola geodésica, 75
- Campo de Jacobi, 72
- Campo de vetores complexos, 27
- Carta coordenada holomorfa, 21
- Complexificação
 - da métrica, 29
- Curvatura bisseccional holomorfa, 45
 - constante, 46
 - limitada, 46
- Cut locus, 13
- Divergência, 54
- Equações
 - de Cauchy-Riemann, 19
- Esfera geodésica, 75
- Espaço
 - anti-de Sitter, 51
 - de curvatura bisseccional holomorfa
 - constante, 46
 - hiperbólico complexo, 52
 - projetivo complexo, 48
 - tangente complexificado, 25
- Espectro, 79
- Estrutura
 - complexa, 17, 21
 - complexa canônica, 18
 - integrável, 24
 - quase-complexa, 21
 - canônica, 22
- Fibração de Hopf, 50
- Forma
 - fechada, 34
 - Kähler, 36
- Função
 - de classe C^1 , 18
 - diferenciável, 18
 - holomorfa, 18, 23
- Gradiente, 53
- Homogeneidade de geodésica, 13
- Laplaciano, 55
- Métrica
 - de Fubini-Study, 50
 - Hermitiana, 28
 - Kähler, 36
- Plano holomorfo, 45
- Ponto mínimo, 13
- Primeiro autovalor, 79
- Sistema de coordenada
 - normal holomorfa, 37
- Sistema de coordenadas
 - complexas, 21
- Tensor
 - curvatura, 37
 - Riemanniana, 37
 - de Nijenhuis, 24
 - de Ricci, 37
- Torção, 24
- Variedade
 - completa, 13

complexa, 20
Hermitiana, 28
Kähler, 33
quase-complexa, 21
quase-Hermitiana, 28
Vizinhança normal, 75