IM

MATEMÁTICA – UFAL

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA AS EQUAÇÕES KdV E mKdV

por

Carlos Alberto Silva dos Santos

sob a orientação de

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Maceió – Fevereiro – 2009

Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-graduação em Matemática

O Problema de Cauchy para as equações KdV e mKdV

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maceió, 12 de fevereiro de 2009.

Banca Examinadora :

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros (Orientador)

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández

Prof. Dr Lucas Catão de Freitas Ferreira

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237p Santos, Carlos Alberto Silva dos.
O problema de Cauchy para as equações KdV e mKdV / Carlos Alberto Silva dos Santos, 2009.
86 f.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 84-86.

1. Cauchy, problemas de. 2. Sobolev, Espaço de. 3.Equação KdV. 4. Equação mKdV. 5. Boa colocação local. I. Título.

CDU: 517.955

À minha avó (em memória), aos meus pais Aristeu e Eunice e aos meus irmãos José Cicero, Valéria e Cristiano.

Agradecimentos

Ao meu "Papai do Céu", que nunca desiste de minha vida e insiste em me abençoar mesmo sem eu merecer. Tenho plena consciência que sem Ele não estaria aqui, sem Ele não sou nada e não posso nada - "Te amo Senhor".

À minha querida avó Maria e aos meus avôs que estão ao lado de Deus torcendo pelo meu sucesso e dos meus irmãos.

Aos meus queridos pais Aristeu e Eunice que me sustentam com seu amor.

Aos meus amados irmãos José Cicero, Valéria e Cristiano, pelo grande amor que me dão.

À minha família que sempre acreditou em mim, em especial à minha prima Alcira, pelo apoio e incentivo.

Aos meus amigos em especial a Silvanilda, presente de Deus, por todo apoio, incentivo e carinho.

Ao Prof. Dr. Amauri da Silva Barros pela orientação nesse trabalho de dissertação, pelo incentivo, pela paciência durante este tempo e por ter acreditado em mim desde o princípio - "Que Deus o abençoe".

Pelo companheirismo de todos os alunos e amigos que fazem parte do Instituto de Matemática e do Programa de Pós-graguação em Matemática, em especial pela amizade de Alex Santana, Arlyson Alves, Darliton Romão, Everson Feitosa, Erikson Alexandre, Fábio Bóia, Isnaldo Isaac, Leandro Favacho e Priscila Ramos, pessoas com quem dividi tantos momentos alegres e também os não tão alegres durante esses dois anos.

Aos professores deste Instituto que contribuíram na minha formação acadêmica. Destaco a presença dos professores: Prof. Dr. Adán José Corcho

Fernández, por quem tive a honra de ser orientado no projeto de Iniciação Científica e no Trabalho de Conclusão de Curso da Graduação; Prof. Antonio José S. C. de Gusmão, pelo incentivo, pela grande contribuição acadêmica e principalmente pela amizade; Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva, pelo incentivo e pelas dicas; e Prof. Francisco Vieira Barros e Prof. Paulo Roberto Lemos de Messias que foram de grande importância, visto que foram professores não só nas disciplinas desse curso, mas em humildade, desempenho, respeito, e ensinamento para minha vida.

Ao Prof. Dr Lucas Catão de Freitas Ferreira pela revisão e contribuição deste trabalho na etapa final.

Aos funcionários desta Universidade, pela eficiência e presteza, especialmente a "Dona Maria".

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Âmparo a Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL), pelo apoio financeiro. Apoio esse que proporcionou um maior desenvolvimento acadêmico, incentivando a pesquisa, e assim ao meu crescimento.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Deus abençoe a todos.

Carlos Alberto Silva dos Santos.

Resumo

Neste trabalho demonstraremos que o problema de Cauchy associado as equações de Korteweg-de Vries, denotada por KdV, e de Korteweg-de Vries modificada, denotada por mKdV, com dado inicial no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, é bem posto localmente em $H^s(\mathbb{R})$, com $s > 3/4$ para a KdV e $s \geq 1/4$ para a mKdV, onde a noção de boa postura inclui a existência, unicidade, a propriedade de persistência da solução e dependência contínua da solução com relação ao dado inicial. Este resultado é baseado nos trabalhos de Kenig, Ponce e Vega em [6]. A técnica utilizada para obter tais resultados se baseia no Teorema do Ponto Fixo de Banach combinada com os efeitos regularizantes do grupo associado com a parte linear.

Abstract

In this work we will demonstrate that the Cauchy problem associated with the Korteweg-de Vries equation, denoted by KdV, and Korteweg-de Vries modified equation, denoted by mKdV, with initial data in the space of Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, is locally well-posed on $H^s(\mathbb{R})$, with $s > 3/4$ for KdV and $s \geq 1/4$ for mKdV, where the notion of well-posedness includes existence, uniqueness, persistence property of solution and continuous dependence of solution with respect to the initial data. This result is based on the works of Kenig, Ponce and Vega in [6]. The technique used to obtain these results is based on fixed point Banach theorem combined with the regularizantes effects of the group associated with the linear part.

Sumário

Introdução

Consideremos a família

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u^k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

das conhecidas equação Korteweg-de Vries generalizada de ordem k e denotada por k-gKdV.

Nesta trabalho estudaremos o problema de Cauchy também chamado de Problema de Valor Inicial ou simplesmente PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u^k \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

para $k = 1, 2$. Para o caso $k = 1$ temos a conhecida equação Korteweg-de Vries denotada por KdV. A equação no caso $k = 2$ é chamada de equação modificada Korteweg-de Vries e denotada por mKdV.

A equação de Korteweg-de-Vries batizada dessa forma devido a seus criadores Diederik Johannes Korteweg e Gustav de Vries, teve como base para sua criação as observações de John Scott Russell durante o século XIX. Russell, engenheiro naval britânico, primeiro observou o que se denominou a grande "onda de translação"(a onda solitária). Isto ocorreu enquanto ele observava o movimento de um barco, que era puxado rapidamente ao longo de um estreito canal por um par de cavalos, quando o barco repentinamente parou, formando assim uma grande elevação solitária, um arredondamento, suave e bem-definido monte d'água, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Ele a seguiu sobre seu cavalo até perdê-la na curva do canal. Após 1834, Russell dedicou-se a este tópico experimentalmente, e aparentemente verificou ser de interesse matemático.

O trabalho de Diederik Johannes Korteweg e Gustav de Vries em 1895 mostrou que o mesmo estava correto. Neste trabalho eles deduziram uma equação para o movimento de ondas d'água baixas, regularmente pequenas, e por esse meio encontraram exemplos de ondas viajantes uniformes.

Existe uma relação importante entre estas duas equações dada pela transformação de Miura, ver [17].

As equações KdV e mKdV tem infinitas leis de conservações, do tipo polinomial, isto é, funcionais do tipo $A(u)$ que são invariantes com o tempo quando u satisfaz a equação. em consideração, ver [17] e [18]. Para a equação k-gKdV temos as seguintes leis de conservação, ver [18],

$$A_1(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx,$$

$$A_2(u) = \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)dx,$$

e

$$A_3(u) = \int_{\mathbb{R}} ((\partial_x u)^2 - c_k u^{k+2})(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{d}{dx} u_0 \right)^2 - c_k u_0^{k+2} \right)(x)dx,$$

onde $c_k = 2\left\{(k+1)(k+2)\right\}^{-1}$.

Para estudarmos o problema (2) precisaremos de alguns conceitos que serão mencionados no capítulo 1, e principalmente de uma introdução à teoria de grupos que será feita no capítulo 2.

Nos capítulos 3 e 4 estão todo o desenvolvimento dos cálculos necessários para alcançarmos o objetivo principal do trabalho que é mostrar a existência e unicidade de solução para o problema (2) numa certa classe.

Já no capítulo 5 faremos nossas considerações finais apresentando algumas propriedades da equação KdV.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo apresentar a teoria necessária para o desenvolvimento dos capítulos posteriores deste trabalho. As demonstrações de alguns teoremas e lemas serão omitidas, mas indicaremos precisamente onde encontrá-las.

1.1 Resultados Básicos

Nesta seção escreveremos algumas desigualdades e teoremas, que serão aplicados nos próximos capítulos. Resultados importantes como a desigualdade de Hölder, Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema da Função Implícita. Estes resultados constituem ferramentas necessárias para obtermos certas estimativas que aparecem no contexto deste trabalho.

Definição 1.1 *Seja $p \geq 1$. Denotaremos por $L^p(\mathbb{R})$ o espaço das funções mensuráveis com a norma p finita, isto é*

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

o número $\|f\|_p$ é a norma de f. Se $p = \infty$, então

$$||f||_\infty = \inf \{c : |f(x)| \leq c, x \in \mathbb{R}\}.$$

Segue que $L^p(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach, ver [11], $L^p(\mathbb{R})$ é espaço de Hilbert se *e somente se $p = 2$. Neste caso o produto interno definido é dado por*

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx.$$

Alem disso, $L^q(\mathbb{R})$ é o espaço dual de $L^p(\mathbb{R})$ satisfazendo a relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Lema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ onde $p, q \geq 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} . \tag{1.1}$$

A demonstração deste resultado pode ser vista em [1].

Lema 1.2 (Desigualdade Integral de Minkowski) *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| \, dx \right)^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

A demonstração deste resultado pode ser vista em [1].

Lema 1.3 *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e $p, q, p_1, p_2, q_2 \in (1, \infty), q_1 \in (1, \infty]$ tal que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \text{ e } \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Então

$$\|D^\alpha F(f)\|_{L^p_x L^q_T} \leq c \, \|F'(f)\|\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T} \|D^\alpha f\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T}$$

A demonstração deste resultado pode ser vista em [6]. O mesmo será utilizado na demonstração de algumas desigualdades do capítulo 4.

Lema 1.4 *Seja $\alpha \in (0, 1), \alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ onde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Seja $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$ tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2}$. Então*

$$\|D^\alpha_x(fg) - fD^\alpha_x g - gD^\alpha_x f\|_{L^p_x L^q_T} \leq c \, \|D^{\alpha_1}_x f\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T} \|D^{\alpha_2}_x g\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T} . \tag{1.2}$$

Além disso, para $\alpha_1 = 0$ o valor $q_1 = \infty$ é escolhido.

A demonstração deste resultado pode ser vista em [6]. O mesmo será utilizado na demonstração de algumas desigualdades dos capítulos 3 e 4.

Teorema 1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach.) *Sejam M um espaço métrico completo, onde $M \neq \emptyset$, e $f : M \to M$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo em M, isto é, existe $x \in M$ tal que $f(x) = x$.*

A demonstração deste resultado pode ser vista em [7].

1.2 Interpolação de Operadores

A seguir enunciaremos resultados básicos sobre interpolação de operadores nos espaços L^p e o teorema de Stein, ver [8], que serão usados na demonstração da desigualdade (2.21).

Definição 1.2 *Seja $\mathcal{F}$ a faixa definida por $\mathcal{F} = \{z = x + iy : 0 \leq x \leq 1\}$. Suponhamos que para cada $z \in \mathcal{F}$ corresponde um operador linear T_z. A família de operadores $\{T_z\}$ é chamada admissível se a aplicação*

$$z \mapsto \int_Y (T_Z f) g d\nu$$

é analítica no interior de $\mathcal{F}$, contínua sobre $\mathcal{F}$ e existe uma constante $a < \pi$ tal que

$$e^{-a|y|} \log \left| \int_Y (T_Z f) g d\nu \right|$$

é uniformemente limitada na faixa F.

Definição 1.3 *Seja $0 < \alpha < n$. O potencial de Riez de ordem α, denotado por I_α é definido por*

$$I_\alpha f(x) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = c_\alpha k_\alpha * f(x), \tag{1.3}$$

onde $c_\alpha = \pi^{n/2} 2^\alpha \Gamma(n/2 - \alpha/2)$, e Γ é a função gama, definida por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Teorema 1.2 (Hardy-Littlewood-Sobolev) *Seja $0 < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$, com $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$.*

1. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R})$*, então a integral* (1.3) *é absolutamente convergente para quase todo ponto* $x \in \mathbb{R}$

2. *Se* $p > 1$*, então* I_α *é do tipo* (p,q)*, isto é,*

$$||I_\alpha f|| \leq c_{p,\alpha,n}||f||_p. \tag{1.4}$$

A demonstração deste resultado pode ser vista em [10].

Teorema 1.3 (Stein) *Supondo que* $\{T_z\}, z \in \mathcal{F}$*, seja uma família admissível de operadores satisfazendo*

$$\|T_{iy}f\|_{q_0} \leq M_0(y)\,\|f\|_{p_0} \quad \textit{e} \quad \|T_{1+iy}f\|_{q_1} \leq M_1(y)\,\|f\|_{p_1}$$

para todas funções simples $f \in L^{p_1}$ *, onde* $1 \leq p_j,\ q_j \leq \infty,\ M_j(y),\ j = 0,1,$ *são independentes de* f *e satisfazem a desigualdade*

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{b|y|} \log M_j(y) < \infty,$$

para algum $b < \pi$*. Se* $0 \leq t \leq 1$*, existe uma constante* M_t *tal que*

$$\|T_t f\|_{q_t} \leq M_t\,\|f\|_{p_t},$$

para toda funcão simples f *e*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

A demonstração deste resultado pode ser vista em [8].

1.3 A Transformada de Fourier

Nesta seção estudaremos as principais propriedades da transformada de Fourier no espaço $\mathcal{L}^1$. Dedicaremos uma sub-seção ao estudo desta no espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ressaltando a grande riqueza da transformada de Fourier neste espaço. Para finalizar, definiremos a convolução para funções não-periódicas.

1.3.1 A Transformada em $\mathcal{L}^1$

Definição 1.4 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função integrável em cada intervalo $[a, b]$ e*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b |f(x)|\, dx = \|f\|_1 < \infty \tag{1.5}$$

diremos que f é absolutamente integrável.

Notemos que se f é absolutamente integrável, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx &= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(\int_a^b f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right) \\
&= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(\int_a^b f(x) \left[\cos \xi x - i \sin \xi x \right] dx \right) \\
&= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(\int_a^b f(x) \cos \xi x dx - i \int_a^b f(x) \sin \xi x dx \right),
\end{aligned}$$

e este limite existe. Portanto, podemos definir a transformada de Fourier para uma função absolutamente integrável como segue

Definição 1.5 *A função $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \ , \ \xi \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

é chamada transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Denotaremos por $\mathcal{L}^1$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integráveis, isto é, integravéis em qualquer intervalo $[a, b]$ e satisfazendo (1.5).

Vamos, a partir de agora, voltar nosso estudo para a verificação de algumas propriedades da transformada de Fourier.

Proposição 1.1 *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integráveis, então:*

(i) $(f + \lambda g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \lambda \widehat{g}(\xi)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$;

(ii) $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$;

(iii) $se\ y \in \mathbb{R}\ e\ f_y(x) = f(x - y)$, $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f_y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-i\xi y}$;

(iv) $\left|\widehat{f}(x)\right| \leq (2\pi)^{-1/2} \|f\|_1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Provaremos apenas os itens (i) e (iv). Os outros podem ser vista em [19].

(i) Usando a linearidade da integral temos as seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
(f+\lambda g)\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} [(f+\lambda g)(x)] e^{-i\xi x} dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\xi x} dx \right) \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx + \lambda \cdot (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \widehat{f}(\xi) + \lambda \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

(iv) Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(\xi)\right| &= \left| (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\
&\leq (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) e^{-i\xi x} \right| dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \|f\|_1 .
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 1.4 *Seja $f \in \mathcal{L}^1$. Então sua transformada de Fourier $\widehat{f}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Como f é absolutamente integrável, então dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$
\int_{|x|>M} |f(x)| \, dx < \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \epsilon.
$$

Seja $N > 0$ tal que $N \geq \|f\|_1$. Como a função $y \to e^{iy}$ é contínua em $y = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|y| < \delta_1 \Rightarrow \left|e^{iy} - 1\right| < \frac{\sqrt{2\pi}}{2N}\epsilon.$$

Mas então, se $\delta = \delta_1/M$,

$$|\eta| < \delta \Rightarrow |x\eta| < \delta_1, \forall x \in [-M, M]$$

e portanto, como $|e^{i\eta x} - 1| \leq 2, |\eta| < \delta \Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i(\xi+\eta)x}dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}\right| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{-i\xi x}\right| \left|e^{-i\eta x} - 1\right| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{i\eta x} - 1\right| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\leq M} |f(x)| \left|e^{i\eta x} - 1\right| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>M} |f(x)| \left|e^{i\eta x} - 1\right| dx \\
&< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2N}\epsilon\int_{|x|\leq M} |f(x)|\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\int_{|x|>M} |f(x)|\, dx \\
&< \frac{\epsilon}{2N}\|f\|_1 + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.2 *Se $f \in \mathcal{L}^1$, então*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Demonstração:

Tomemos $\epsilon > 0$ e, a seguir, um intervalo $[-a, a]$ tal que

$$\int_{|x|>a} |f(x)|\, dx < \epsilon/2.$$

Por outro lado, a proposição anterior assegura que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} f(x)dx = 0.$$

Logo, para $|\xi| > \xi_0$, para um ξ_0 conveniente, temos

$$\left|\widehat{f}\,(\xi)\right| \leq \left|\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} f(x)dx\right| + \int_{|x|>a} |f(x)|\, dx < \epsilon.$$

□

O principal objetivo da teoria é recuperar a função f através de sua transformada. Nem sempre é possível alcançar esse objetivo. Na verdade, queremos provar a fórmula da inversão

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \tag{1.7}$$

O espaço $\mathcal{L}^1$ é "muito grande" para podermos inverter a transformada de Fourier: se $f \in \mathcal{L}^1$ nem sempre $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, logo a integral acima pode não existir.

1.3.2 O Espaço de Schwartz

Definição 1.6 *O Espaço de Schwartz, que denotaremos por $\mathcal{S} = \mathcal{S}\,(\mathbb{R})$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que, para quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ com*

$$\left|x^{\alpha} f^{(\beta)}\,(x)\right| \leq C_{\alpha,\beta}, \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

onde $f^{(\beta)}$ é a β-ésima derivada de f.

Proposição 1.3 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então a função $g(x) = x^{\alpha} f^{(\beta)}(x)$ também está em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$.*

Demonstração:

A função g é infinitamente diferenciável e $x^{\alpha'} g^{(\beta')}(x)$, quaisquer que sejam $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^+$, é uma soma finita de termos da forma $x^n f^{(m)}(x)$, logo limitada.

□

Proposição 1.4 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $f \in \mathcal{L}^1$.*

Demonstração:

Em cada intervalo $[-M, N]$, a função f é contínua, e, portanto, limitada e integrável, o que implica que $|f|$ seja integrável aí.

Para mostrar que a integral imprópria de f converge, usamos (1.8) com $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ para fazer a seguinte estimativa

$$\left|x^2 f(x)\right| \leq C_{2,0} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{C_{2,0}}{|x^2|}, x \neq 0.$$

Então

$$\int_{|x|\geq 1} |f(x)|\, dx \leq C_{2,0} \int_{|x|\geq 1} |x|^{-2}\, dx = 2C_{2,0}$$

e, daí,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \leq \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx + 2C_{2,0} < \infty.$$

□

Agora podemos iniciar o estudo do tema central desta seção, a saber, o comportamento da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.5 *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então $f^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ e*

$$(f^{\alpha})\widehat{\ }(\xi) = (i\xi)^{\alpha} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Demonstração:

Já vimos que $f^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Agora note que integrando por partes obtem-se,

$$\begin{aligned}
(f')\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, e^{-i\xi x} dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left[f(x)\, e^{-i\xi x}|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}} (-i\xi) f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right] \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left[f(x)\, e^{-i\xi x}|_{x=-\infty}^{x=\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right] \\
&= i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

pois os termos de fronteira são nulos uma vez que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Agora, vamos utilizar indução simples bem como integração por partes para concluir a demonstração. Suponha que a sentença é válida para todo $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < \alpha$.

Então,

$$\begin{aligned}
(f^{\alpha})\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f^{(\alpha)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left(f^{(\alpha-1)} e^{-i\xi x}|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} f^{(\alpha-1)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \right) \\
&= i\xi i^{\alpha-1} \xi^{\alpha-1} \widehat{f}(\xi) \\
&= i^{\alpha} \xi^{\alpha} \widehat{f}(\xi) .
\end{aligned}$$

□

O teorema acima, apesar de seu aspecto inocente, tem extrema relevância na teoria. Ele nos diz que o operador $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ agindo em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é transformado no operador de multiplicação por $(i\xi)$. Por exemplo se $\alpha = 2$ temos,

$$\left(-\frac{d^2 f}{dx^2} \right)\widehat{\ }(\xi) = \xi^2 \widehat{f}(\xi) . \tag{1.10}$$

Isso nos permite transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e nos pemitirá, mais tarde, reduzir equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias.

Tendo em vista as observações precedentes, é natural tentar identificar a imagem de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sob a transformada de Fourier e descobrir se podemos invertê-la.

Proposição 1.5 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $\widehat{f}$ será infinitamente diferenciável e*

$$\hat{f}^{(\beta)}(\xi) = (-i)^{\beta} \left(x^{\beta} f \right)\widehat{\ }(\xi) . \tag{1.11}$$

Demonstração:

Pelo fato de podermos derivar abaixo do sinal de integral quantas vezes quisermos, mostramos que $\widehat{f}$ é infinitamente diferenciável e

$$\hat{f}^{(\beta)}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} (-ix)^{\beta} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \\
&= (-i)^{\beta} \left(x^{\beta} f\right)\widehat{}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Agora, podemos começar a identificar a imagem de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sob a transformada de Fourier provando o seguinte o seguinte teorema:

Teorema 1.6 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração:

Se α , $\beta \in \mathbb{Z}^{+}$, usando a proposição 1.6 e o teorema 1.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
\xi^{\alpha} \hat{f}^{(\beta)}(\xi) &= (-i)^{\beta+\alpha} (i\xi)^{\alpha} \left(x^{\beta} f\right)\widehat{}(\xi) \\
&= (-i)^{\beta+\alpha} \left(\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \left(x^{\beta} f\right)\widehat{}(\xi)\right) \\
&= \widehat{g}(\xi),
\end{aligned}
$$

onde $g = (-i)^{\beta+\alpha} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \left(x^{\beta} f\right)$. Então, vemos que $g \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}^{1}$, logo, $\widehat{g}$ é limitada, isto é, $\xi^{\alpha} \hat{f}^{(\beta)}(\xi)$ é limitada, o que prova que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

$\square$

Assim, podemos saber quem é o espaço das transformadas de $\mathcal{S}$:

Teorema 1.7 *A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ define uma bijeção linear de $\mathcal{S}$ em si mesmo e sua inversa é dada por*

$$
\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x) = f^{\vee}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi,\ x \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{S}. \tag{1.12}
$$

Observe que, se soubermos que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é uma bijeção, as fórmulas

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{1.13}
$$

e (1.12) são equivalentes. De fato, se (1.13) é válida, como $\mathcal{F}$ é uma bijeção, toda $f \in \mathcal{S}$ é da forma $f = \widehat{g}$ para algum $g \in \mathcal{S}$ e portanto

$$
\left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} g\right)(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi;
$$

reciprocamente, se (1.22) é válida,

$$
f(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f\right)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1} \widehat{f}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi
$$

1.3.3 Operação de Convolução

Definição 1.7 *Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é limitada e seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado, a convolução de f e g é a função $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy, \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Uma observação importante a fazer é a de que, a integral em (1.14) converge, pois como g é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto

$$|f(y)\, g(x-y)| \leq M\, |f(y)| \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(y)\, g(x-y)|\, dy \leq M \|f\|_1 < +\infty.$$

O estudo da convolução para funções de $\mathcal{L}^1$ é bem delicado. Se f e g são funções de $\mathcal{L}^1$, não é verdade, em geral, que o produto fg pertença a $\mathcal{L}^1$; portanto, para tais funções a integral em (1.14) pode não estar definido para todo x. Por esse motivo, vamos estudar a convolução no espaço de Schwarz, que é um bom espaço para a convolução; mostraremos mais adiante que a convolução de fato define uma operação em $\mathcal{S}$.

Lema 1.5 *Se $f, g \in \mathcal{S}$, então $f * g \in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1$ e*

$$\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1 . \tag{1.15}$$

Demonstração:

Como a função $F(x,y) = f(y)\, g(x-y)$ é infinitamente diferenciável e, para cada x fixo, $F(x,\cdot)$ e todas as suas derivadas estão em $\mathcal{S}$ (logo, em particular, em $\mathcal{L}^1$), pelo teorema 2.1 do capítulo 9 de [19], podemos ver que $f * g$ é infinitamente diferenciável.

Para mostrar então que $f * g \in \mathcal{L}^1$ e que vale a desigualdade (1.15), é suficiente mostrar que

$$\int_a^b |(f * g)(x)|\, dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\,(f * g)(x)\,| dx &= \int_a^b \left| \int_{\mathbb{R}} |f(y)\, g(x-y)|\, dy \right| dx \\
&\leq \int_a^b \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy\ dx \\
&= \int_a^b \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy\ dx \\
&= \int_a^b \lim_{n \to +\infty} G_n(x)\, dx,
\end{aligned}$$

onde

$$G_n(x) = \int_{-n}^{n} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy.$$

Pelo fato de $G_n \in C(\mathbb{R})$, logo para trocar a ordem da integral com o limite acima basta mostrar que o limite é uniforme (veja o teorema 1.4 do capítulo 7 de [19]): de fato, como g é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M,\ \forall x \in \mathbb{R};$$

por outro lado, como $f \in \mathcal{L}^1$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)|\, dx < \frac{\epsilon}{M};$$

então, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $n \geq N$ implica que

$$\begin{aligned}
\left| G_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy \right| &\leq \int_{|y| \geq n} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy \\
&\leq M \int_{|y| \geq n} |f(y)|\, dy < \epsilon,
\end{aligned}$$

logo G_n converge uniformemente para

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, |g(x-y)|\, dy$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\left(f*g\right)(x)|dx &\leq \lim_{n\to+\infty}\int_a^b\int_{-n}^n |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\ dx\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^n dy\,|f(y)|\int_a^b dx\,|g(x-y)|\,dx\ dy\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}|f(y)|\int_{\mathbb{R}}|g(x-y)|\,dx\ dy\\
&= \int_{\mathbb{R}}|f(y)|\int_{\mathbb{R}}|g(z)|\,dz\ dy\\
&\leq \|f\|_1\,\|g\|_1\,.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6 *Seja* $f, g, h \in \mathcal{S}$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Então:*

(i) $f * g = g * f$,

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(iii) $(f + g) * h = f * h + g * h$,

(iv) $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$.

Demonstração:

Demonstraremos apenas os itens (i) e (iv) os outros podemos ver em [19]. Usando a definição de convolução temos

(i)

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz\\
&= \int_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z)dz = (g*f)(x)
\end{aligned}$$

e

(iv)

$$\begin{aligned}((\lambda f)*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}}(\lambda f)(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\lambda f(y)g(x-y)dy \\ &= \lambda\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \lambda(f*g)(x).\end{aligned}$$

$\square$

Observação 1 *Salientamos que a expressão* $(f*g)*h$ *faz sentido uma vez que* $f*g\in\mathcal{L}^1$ *pelo Lema 1.5 anterior e* h *é limitada.*

Vamos agora introduzir um produto interno em $\mathcal{S}$. Se $f,g\in\mathcal{S}$, então

$$<f,g>=\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.16}$$

É fácil ver que $<f,g>$ definido em (1.16) é de fato um produto interno em $\mathcal{S}$.
Se $f\in\mathcal{S}$, definiremos

$$\|f\|_2=(<f,f>)^{1/2}=\left[\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right]^{1/2}. \tag{1.17}$$

Além disso temos que $\|\cdot\|_2$ definida por (1.17) define uma norma em $\mathcal{S}$.

Teorema 1.8 *Se* $f,g\in\mathcal{S}$*, então* $f*g\in\mathcal{S}$ *e*

$$(f*g)\widehat{\ }(\xi)=\sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi),\ \forall\xi\in\mathbb{R}. \tag{1.18}$$

Além disso vale a identidade de Parseval

$$\|f\|_2^2=\left\|\hat{f}\right\|_2^2. \tag{1.19}$$

Demonstração:

Como $f*g\in\mathcal{L}^1$ pelo Lema 1.5, podemos calcular a transformada de Fourier de $f*g$; além disso, como as integrais convergem uniformemente (veja a demonstração do Lema 1.5), podemos trocar a ordem de integração obtendo

$$(f*g)\widehat{\ }(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy\ dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}g(x-y)dx\ dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-i\xi y}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z}g(z)dz\ dy\\
&= \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

Como $f, g \in \mathcal{S}$, $\widehat{f}(\xi), \widehat{g}(\xi) \in \mathcal{S}$, logo $(f*g)\widehat{\ } \in \mathcal{S}$ e portanto, $f*g \in \mathcal{S}$. Falta apenas mostrar (1.19). Para isso, note primeiro que, usando (1.18) e a fórmula de inversão em $\mathcal{S}$, se $f, g \in \mathcal{S}$,

$$
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (f*g)\widehat{\ }(\xi)\, d\xi = (f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(-y)dy,
$$

mas então, dada $f \in \mathcal{S}$, se $g(y) = \overline{f(-y)}$, $g \in \mathcal{S}$ e sua transformada de Fourier é

$$
\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}e^{-i\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}e^{i\xi x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx} = \overline{\hat{f}\ (\xi)},
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
\left\|\hat{f}\right\|_2^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\\
&= (f*g)(0)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(-y)dy\\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2 .
\end{aligned}
$$

$\square$

1.4 Distribuições Temperadas

Definição 1.8 *O conjunto das distribuições temperadas, denotado por $S'(\mathbb{R})$, é o dual topológico de $S(\mathbb{R})$. Em outras palavras $T \in S'(\mathbb{R})$ se e só se $T : S'(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ é* *um funcional linear contínuo. Notemos que para verificar que um funcional linear* $T : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *é contínuo, basta provar que* $T\varphi_k \to 0$ *para toda* $\varphi_k \to 0$.

Vamos considerar o seguinte exemplo: os elementos de $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ definem distribuições temperadas através da fórmula,

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \ f \in L^p(\mathbb{R}), \ \varphi \in S(\mathbb{R}). \tag{1.20}$$

De fato, pela desigualdade de Hölder temos,

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^p} |\varphi|_{L^q}, \ \ p^{-1} + q^{-1} = 1 \tag{1.21}$$

e a afirmação acima segue de (1.21) e do seguinte fato que encontra demonstrado em [16], na página 325: Se $f_k \to f$ então $f_k \to f, 1 \leq p \leq \infty$.

1.5 Os Espaços de Sobolev

Sejam $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz e $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ o espaço das distribuições temperadas. Para $s \in \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev (de tipo L^2) em $\mathbb{R}$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$H^s := H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

cuja norma é

$$\|f\|_{H^s} := \|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{1/2}. \tag{1.22}$$

O espaço $H^s(\mathbb{R}), \ s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno,

$$< f, g >_s = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \tag{1.23}$$

Em particular, $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. No caso de $s \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|f\|_s^2 = \sum_{j=0}^{s} \left\|\partial_x^j f\right\|_0^2, \tag{1.24}$$

onde $\|\cdot\|_0$ denota a norma em $L^2(\mathbb{R})$.

Também utilizaremos os espaços de Sobolev homogêneos, definidos para $s \in \mathbb{R}$ por

$$\dot{H}^s := \dot{H}^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) ; D^s f \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

com

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left\| \widehat{D^s f} \right\|_0 \tag{1.25}$$

onde $\widehat{D^s f}(\xi) = |\xi|^s \widehat{f}(\xi)$.

Notemos que $H^s(\mathbb{R}) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R})$, para todo $s \in \mathbb{R}$, pois se $f \in H^s(\mathbb{R})$, então

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left\| \widehat{D^s f} \right\|_0 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\frac{s}{2}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Já o espaço de Sobolev com peso $H^s(x^2 dx)$, para $s \in \mathbb{N}$, é definido por

$$H^s\left(x^2 dx\right) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) ;\ x\partial_x^i f \in L^2(\mathbb{R})\ ,\ 0 \leq i \leq s \right\},$$

cuja norma é

$$\|f\|_{s,2}^2 := \|f\|_{H^s(x^2 dx)}^2 = \sum_{i=0}^{s} \left\| x\partial_x^i f \right\|_0^2. \tag{1.26}$$

Exibiremos agora algumas propriedades dos espaços definidos anteriormente.

Proposição 1.7

(i) *Se $s > \frac{1}{2}$, então $H^s(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Banach com relação à multiplicação de funções. Além disso, para $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ vale*

$$\|fg\|_s \leq c(s) \|f\|_s \|g\|_s ;$$

(ii) *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ com $s > \frac{1}{2} + k$, então $H^s(\mathbb{R}) \subseteq C_\infty^k(\mathbb{R})$.*

A demonstração deste resultado pode ser vista em [1].

1.6 Espaços de Banach Mistos e Propriedades

Para $1 \leq p, q < \infty$. $L^p_x L^q_T$ é o espaço de Banach Misto definido por

$$L^p_x L^q_T := \left\{ f : \mathbb{R} \times [-T, T] \to \mathbb{R} : \|f\|_{L^p_x L^q_T} < +\infty \right\},$$

onde

$$\|f\|_{L^p_x L^q_T} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.27}$$

Quando $p = \infty$ ou $q = \infty$ usaremos uma definição similar, envolvendo a norma do supremo essencial. O espaço $L^p_T L^q_x$ é definido como acima, invertendo-se apenas a ordem de integração. Vale mencionar também que se escrevemos $T = t$ na norma acima significa

$$\|f\|_{L^p_x L^q_t} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.28}$$

Um resultado que será utilizado com muita frequência e por isso, será demonstrada, é a desigualdade dada pelo lema a seguir.

Lema 1.6 *Sejam $f \in L^2_x L^\infty_T$ e $g \in L^\infty_x L^2_T$, então $fg \in L^2_x L^2_T$ e vale*

$$\|fg\|_{L^2_x L^2_T} \leq \|f\|_{L^2_x L^\infty_T} \|g\|_{L^\infty_x L^2_T}.$$

Demonstração:

Pela desigualdade de Hölder, (1.1), temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^2_x L^2_T} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^{T} |(fg)(x,t)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 |g(x,t)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^{T} \sup_{[-T,T]} \left\{ |f(x,t)|^2 \right\} |g(x,t)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{[-T,T]} \left\{ |f(x,t)|^2 \right\} \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{[-T,T]} \left\{ |f(x,t)|^2 \right\} \ \sup_x \left\{ \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt \right\} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{[-T,T]} \left\{ |f(x,t)|^2 \right\} dx \ \sup_x \left\{ \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sup_{[-T,T]} \{ |f(x,t)| \} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_x \left\{ \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \|f\|_{L^2_x L^\infty_T} \, \|g\|_{L^\infty_x L^2_T} \, ,
\end{aligned}
$$

o que prova o Lema.

$\square$

Capítulo 2

Grupo Associado à KdV Linear

Neste capítulo descreveremos algumas propriedades do grupo associado à equação KdV linear, que serão úteis na demonstração dos teoremas de boa colocação.

2.1 KdV Linear

Consideremos o problema de Cauchy envolvendo a equação Korteweg-de-Vries (KdV) linear, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

Aplicando formalmente a transformada de Fourier neste sistema obtemos as relações

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema anterior pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$ temos a equação

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(\xi,t) = 0.$$

Observando que

$$\partial_t \left(\widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} \right) = \partial_t \widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(\xi,t)$$

obtemos a relação

$$\partial_t \left(\widehat{u}(\xi,t)e^{(i\xi)^3 t}\right) = 0.$$

Integrando em relação a variável t, temos a igualdade

$$\widehat{u}_t(\xi,t)e^{(i\xi)^3 t} = \widehat{u}_0(\xi),$$

ou seja,

$$\widehat{u}_t(\xi,t) = e^{-(i\xi)^3 t}\widehat{u}_0(\xi) = e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi).$$

Agora aplicando a transformada inversa obtemos uma descrição para a solução do sistema (2.1) que é da forma

$$u(x,t) = (e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x) = ((e^{i\xi^3 t})\check{}\, * u_0)(x). \tag{2.2}$$

Denotaremos por $W(t)$ o operador de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$W(t)u_0(x) := (S_t * u_0)(x),$$

onde

$$S_t(x) = (e^{i\xi^3 t})\check{}\,(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^3 t}e^{i\xi x}d\xi.$$

Temos então

$$u(x,t) = W(t)u_0(x) := (S_t * u_0)(x).$$

Além disso, temos que $W(t)u_0$ é dado por

$$W(t)u_0(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi)e^{i\xi^3 t}e^{i\xi x}d\xi,$$

onde c é uma contante real.

2.2 Propriedades do Operador associado à KdV

Definição 2.1 *Uma família $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de aplicações lineares de um espaço de Banach X em X é chamada um grupo se as seguintes condições são satisfeitas*

(i) $S_0 = Id$,

(ii) $S_{t+s} = S_t \circ S_r, \forall\ t, s \in \mathbb{R}$,

(iii) *para qualquer* $u \in X$ *a aplicação* $t \to S_t u$ *é contínua, de* $\mathbb{R} \to X$*.*

Se além disso tivermos $||S_t u||_X = ||u||_X$ *ou equivalentemente* $||S_t u||_X = 1$*, o grupo* S_t *é chamado unitário. Caso ocorra* $||S_t u||_X \leq 1$*, o grupo é chamado grupo de contrações.*

Teorema 2.1 *A família de operadores* $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *satisfaz as condições da Definição 2.1, com* $X = L^2(\mathbb{R})$*.*

Demonstração:

(i) Usando a desigualdade (2.2) e as propriedades de transformada de Fourier obtemos

$$\begin{aligned} W(0)u_0(x) &= (e^{i\xi^3 0}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x) \\ &= (\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x) \\ &= u_0(x) = Id\ u_0(x). \end{aligned}$$

(ii) De modo análogo obtemos

$$\begin{aligned} W(t+s)u_0(x) &= (e^{i\xi^3(t+s)}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x) \\ &= (e^{i\xi^3 t} \cdot e^{i\xi^3 s})\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x) \\ &= (e^{i\xi^3 t}((e^{i\xi^3 s}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x))\widehat{}\,(\xi))\check{}\,(x) \\ &= W(t)\left[(e^{i\xi^3 s}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x)\right] \\ &= W(t)\left[W(s)u_0(x)\right] \\ &= \left[W(t)\circ W(s)\right]u_0(x). \end{aligned}$$

(iii) Finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{u\to u_0} W(t)u(x) &= \lim_{u\to u_0}(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi))\check{}\,(x) \\ &= \left(\lim_{u\to u_0} e^{i\xi^3 t}\widehat{u}(\xi)\right)\check{}\,(x) \\ &= (e^{i\xi^3 t}\widehat{u_0}(\xi))\check{}\,(x) \\ &= W(t)u_0(x). \end{aligned}$$

Então temos que $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo de operadores em $L^2(\mathbb{R})$.

$\square$

Segue abaixo algumas propriedades deste operador.

Propriedades 2.1

1. *(Isometria do Operador $W(t)$)*

$$||W(t)\phi||_{L^2} = ||\phi||_{L^2}. \tag{2.3}$$

2. *(Comutatividade da Derivada com o Operador $W(t)$)*

$$\partial_x W(t)\phi(x) = W(t)\partial_x\phi(x). \tag{2.4}$$

3.
$$D^\alpha W(t)\phi(x) = W(t)D^\alpha\phi(x), \ \ onde \ D^\alpha f(x) = (|\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi))\check{}\,(x). \tag{2.5}$$

4. *(Simetria do Operador $W(t)$)*

$$\langle (W(t)\phi)(\cdot), \psi(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \phi(\cdot), (W(t)\psi)(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.6}$$

5.
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} W(t)\phi(x)\psi(x,t)dtdx = \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\left(\int_{\mathbb{R}} W(t)\psi(x,t)dt\right)dx. \tag{2.7}$$

6.
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \partial_x W(t)\phi(x)\psi(x,t)dtdx = -\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_x W(t)\psi(x,t)dt\right)dx. \tag{2.8}$$

7.
$$\langle (D^\alpha W(t)\phi)(\cdot), \psi(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \phi(\cdot), (D^\alpha W(t)\psi)(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.9}$$

8.
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (D^\alpha W(t)\phi)(x)\psi(x,t)dtdx = \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\left(\int_{\mathbb{R}} (D^\alpha W(t)\psi)(x,t)dt\right)dx. \tag{2.10}$$

Demonstração:

1. Calculando a norma em L^2 de $W(t)\phi$ e usando o Teorema de Pancherel, na variável x, obtemos as relações

$$\begin{aligned}
||W(t)\phi||_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |W(t)\phi(x)|^2\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|(e^{i\xi^3 t}\widehat{\phi}(\xi))\check{}\,(x)\right|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{i\xi^3 t}\widehat{\phi}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\phi}(\xi)\right|^2 d\xi. \\
&= ||\widehat{\phi}||_{L^2}^2 = ||\phi||_{L^2}^2
\end{aligned}$$

2. Derivando com relação a variável x e usando as propriedades de transformada de Fourier obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\partial_x W(t)\phi(x) &= \partial_x \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi^3 t+\xi x)}\widehat{\phi}(\xi)d\xi\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x\left[e^{i(\xi^3 t+\xi x)}\right]\widehat{\phi}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi^3 t+\xi x)} i\xi\widehat{\phi}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi^3 t+\xi x)}\widehat{\partial_x\phi}(\xi)d\xi \\
&= W(t)\partial_x\phi(x).
\end{aligned}$$

3. Usando as propriedades da Tranformada de Fourier e a dedinição de D^α obtemos

$$\begin{aligned}
D^\alpha W(t)u_0(x) &= D^\alpha\left[(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x)\right] \\
&= |\xi|^\alpha((e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,)\hat{}\,(\xi))\check{}\,(x) \\
&= (|\xi|^\alpha(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x) \\
&= (e^{i\xi^3 t}((|\xi|^\alpha(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,)\hat{}\,(\xi))\check{}\,(x) \\
&= W(t)\left[(|\xi|^\alpha(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0(\xi))\check{}\,(x)\right] \\
&= W(t)D^\alpha u_0(x).
\end{aligned}$$

4. Usando as propriedades de produto interno em L^2 e as propriedades da transformada de Fourier segue-se que

$$\begin{aligned}
\langle (W(t)\phi)(\cdot), \psi(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\langle (e^{i\xi^3 t}\widehat{\phi}(\xi))\check{}\,(\cdot), \psi(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle e^{i\xi^3 t}\widehat{\phi}(\xi)(\cdot), \widehat{\psi}(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle \widehat{\phi}(\xi)(\cdot), e^{i\xi^3 t}\widehat{\psi}(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle \phi(\cdot), (e^{i\xi^3 t}\widehat{\psi}(\xi))\check{}\,(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \langle \phi(\cdot), (W(t)\psi)(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}$$

5. Basta usar o Teorema de Fubini e escrever a igualdade (2.6) na igualdade (2.7).

6. Basta usar a desigualdade (2.6) e integração por partes obtemos a desigualdade (2.8).

7. Usando as propriedades do produto interno em L^2, o item (2.5) e as propriedades da transformada de Fourier temos

$$\begin{aligned}
\langle (D^\alpha W(t)\phi)(\cdot), \psi(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle (W(t)D^\alpha\phi)(\cdot), \psi(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle (W(t)(|\xi|^\alpha\widehat{\phi}(\xi))\check{}\,(\cdot), \psi(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle (e^{i\xi^3 t}|\xi|^\alpha\widehat{\phi}(\xi))\check{}\,(\cdot), \psi(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle e^{i\xi^3 t}|\xi|^\alpha\widehat{\phi}(\xi)(\cdot), \widehat{\psi}(\xi)(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle \widehat{\phi}(\xi)(\cdot), e^{i\xi^3 t}|\xi|^\alpha\widehat{\psi}(\xi)(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle \phi(\cdot), (e^{i\xi^3 t}|\xi|^\alpha\widehat{\psi}(\xi))\check{}\,(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left\langle \phi(\cdot), (W(t)(|\xi|^\alpha\widehat{\psi}(\xi))\check{}\,(\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \langle \phi(\cdot), (W(t)D^\alpha\psi)(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \langle \phi(\cdot), (D^\alpha W(t)\psi)(\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}$$

8. Da mesma forma podemos expressar a relação (2.9) na identidade (2.10).

□

2.3 Estimativas Lineares

Teorema 2.2

1. *Se* $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *então*
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} W(t)u_0 \right\|_{L^\infty_x L^2_t} \leq c||u_0||_{L^2} \tag{2.11}$$
e
$$\left\| D^s_x \frac{\partial}{\partial x} W(t)u_0 \right\|_{L^\infty_x L^2_t} \leq c||D^s u_0||_{L^2}, s \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

2. *Se* $g \in L^1_x L^2_t$, *então para qualquer* $T > 0$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t W(t-t')g(x,t')dt' \right\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq c||g||_{L^1_x L^2_T} \tag{2.13}$$
e
$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t W(t-t')g(x,t')dt' \right\|_{L^\infty_x L^2_t} \leq c||g||_{L^1_x L^2_t}. \tag{2.14}$$

Demonstração:

1. Consideremos $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e
$$W(t)u_0(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi)e^{i\xi^3 t}e^{i\xi x}d\xi.$$

Derivando $W(t)u_0(x)$ com relação a variável x e fazendo a mudança de variável $\xi^3 = \eta$ temos
$$\begin{aligned}
\partial_x W(t)u_0(x) &= \partial_x\left[c\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi)e^{i\xi^3 t}e^{i\xi x}d\xi\right] \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi)e^{i\xi^3 t}i\xi e^{i\xi x}d\xi \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\eta^{1/3})e^{i\eta t}\eta^{1/3}e^{i\eta^{1/3}x}\eta^{-2/3}d\eta \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\eta + x\eta^{1/3})}\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\eta^{-1/3}d\eta.
\end{aligned}$$

Usando agora o Teorema de Plancherel, na variável t, temos
$$\|\partial_x W(t)u_0\|^2_{L^2_t} = \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x W(t)u_0(x)|^2 dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left|c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\eta+x\eta^{1/3})}\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\eta^{-1/3}d\eta\right|^2 dt\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\eta^{-1/3}e^{ix\eta^{1/3}}\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\right]e^{it\eta}d\eta\right|^2 dt\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\eta^{-1/3}e^{ix\eta^{1/3}}\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\right|^2 d\eta\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\eta^{-1/3}\right|^2\left|e^{ix\eta^{1/3}}\ \right|^2\left|\ \widehat{u}_0(\eta^{1/3})\right|^2 d\eta\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}|\eta|^{-2/3}\left|\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\right|^2 d\eta\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\xi^3\right|^{-2/3}\left|\widehat{u}_0(\xi)\right|^2\xi^2 d\eta\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{u}_0(\xi)\right|^2 d\eta\\
&= c\left\|\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2 = c\left\|u_0\right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{\left\|\partial_x W(t)u_0\right\|_{L_t^2}\right\}\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{c\left\|u_0\right\|_{L_t^2}\right\}\\
&= c\left\|u_0\right\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

o que demonstra (2.11).

Para demonstrarmos (2.12) observemos que

$$
\begin{aligned}
D^s\left[\partial_x W(t)u_0(x)\right] &= D^s\left[W(t)\partial_x u_0(x)\right]\\
&= W(t)D^s\left[\partial_x u_0(x)\right]\\
&= W(t)\partial_x\left[D^s u_0(x)\right]\\
&= \partial_x\left[W(t)D^s u_0(x)\right].
\end{aligned}
$$

Agora usando a observação acima e a desigualdade (2.11) temos

$$
\begin{aligned}
\left\|D_x^s\partial_x W(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \left\|\partial_x\left[W(t)D^s u_0(x)\right]\right\|_{L_x^\infty L_t^2}\\
&\leq c||D^s u_0||_{L^2}\\
&\leq c||u_0||_{L^2},
\end{aligned}
$$

o que completa a demostração de (2.12).

2. Inicialmente afirmamos que

$$\left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_2 \leq c \|g\|_{L_x^1 L_t^2}. \tag{2.15}$$

De fato, por dualidade, temos

$$\begin{aligned} &\left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_2 = \\ = \;& \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) f(x)\, dx; \forall f \in L_x^2 \text{ com } \|f\|_2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Integrando por partes, e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz bem como a desigualdade (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) f(x)\, dx \right| \\ = \;& \left| - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t')\, \partial_x W(-t')\, f(x)\, dt' dx \right| \\ \leq \;& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(x,t')\, \partial_x W(-t')\, f(x) \right| dt' dx \\ \leq \;& \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x,t')|^2\, dt' \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x W(-t')\, f(x)|^2\, dt' \right)^{1/2} \right] dx \\ \leq \;& \sup_x \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x W(-t')\, f(x)|^2\, dt' \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x,t')|^2\, dt' \right)^{1/2} dx \\ = \;& \|\partial_x W(-t')\, f\|_{L_x^\infty L_t^2} \|g\|_{L_x^1 L_t^2} \\ \leq \;& c \|f\|_0 \|g\|_{L_x^1 L_t^2}, \end{aligned}$$

donde concluímos a afirmação aplicando o $\sup$ em ambos os membros e usando o fato de que $\|f\|_2 = 1$.

Agora, repetindo os argumentos acima e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que para $t \in [0,T] (T > 0)$ vale

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x \int_0^t W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L_T^\infty L_x^2} &= \left\| \partial_x \int_0^t W(t)\, W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &= \left\| W(t)\, \partial_x \int_0^t W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &= \sup_{t \in [0,T]} \left\| W(t)\, \partial_x \int_0^t W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{t\in[0,T]} \left\| \partial_x \int_0^t W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_2 \\
&\leq c \|g\|_{L^1_x L^2_t}.
\end{aligned}
$$

Desta útima desigualdade e do fato de o grupo $W(t)$ conserva a norma em $L^2(\mathbb{R})$, temos o item (2.13).

Para provar (2.14), inicialmente relembramos que $f \in D_\otimes(\mathbb{R}^2)$ quando podemos escrevê-la como $f(x,t) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, \tilde{f}_i(t)$, com $f_i, \tilde{f}_i \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, para $i = 1, 2, ..., N$. Além disso, Pode-se demonstrar que $\overline{D_\otimes(\mathbb{R}^2)} = L^p_x L^q_t$ e $\overline{D_\otimes(\mathbb{R}^2)} = L^q_t L^p_x$, para $p, q \in [1, \infty)$, veja [6].

Afirmamos agora que

$$
\left\| \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L^\infty_x L^2_T} \leq c \|g\|_{L^1_x L^2_t}. \tag{2.16}
$$

De fato, para $f \in D_\otimes(\mathbb{R}^2)$ com $\|f\|_{L^1_x L^2_t} = 1$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&= \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right) f(x,t)\, dx dt;\ \|f\|_{L^1_x L^2_t} = 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando o Teorema de Fubini, as propriedades do grupo $W(t)$, integração por partes, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade (2.13), temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')\, g(x,t')\, dt' \right) f(x,t)\, dx dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) W(t)\, f(x,t)\, dt dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(t)\, f(x,t)\, dt \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right) \left(\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t)\, f(x,t)\, dt \right) \right| dx \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t)\, f(x,t)\, dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= \left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t')\, g(x,t')\, dt' \right\|_{L^2_x} \left\| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} W(-t)\, f(x,t)\, dt \right\|_{L^2_x} \\
&\leq c \|g\|_{L^1_x L^2_t} \|f\|_{L^1_x L^2_t}.
\end{aligned}
$$

Assim, tomando o $\sup$ em ambos os membros da desigualdade acima e usando o fato de que $\|f\|_{L_x^1 L_t^2} = 1$, obtemos a desigualdade (2.16).

Agora, afirmamos que

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\tau)\, \hat{g}^{(t)}(y,\tau)\, dy \right) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c\, \|g\|_{L_x^1 L_t^2},$$

onde $K(z,\tau) := \lim\limits_{\epsilon \to 0} \displaystyle\int_{\epsilon < |\xi^3 - \tau| < \frac{1}{\epsilon}} e^{iz\xi} \frac{\xi^2}{\xi^3 - \tau} d\xi$.

De fato, usando a identidade de Parserval e a desigualdade de Minkowsky, temos

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\tau)\, \hat{g}^{(t)}(y,\tau)\, dy \right) d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
= \;& \sup_x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{it\tau} d\tau \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
= \;& \sup_x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \check{f}(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
= \;& \sup_x \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
\leq \;& \sup_x \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| K(x-y,\tau)\, \hat{g}^{(t)}(y,\tau) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} dy \\
\leq \;& c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(y,\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} dy \\
= \;& c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y,t)|^2 dt \right)^{1/2} dy = c\, \|g\|_{L_x^1 L_t^2}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 *Se* $u_0 \in \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ *então*

$$\|W(t)u_0\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq c \left\| D^{1/4} u_0 \right\|_{L^2}. \tag{2.17}$$

Demonstração:

Fazendo $D_x^{1/4} u_0 = v_0$ e portanto $u_0 = D_x^{-1/4} v_0$, temos que a desigualdade (2.17) é equivalente a seguinte desigualdade

$$\left\| D_x^{-1/4} W(t) v_0 \right\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq c\, \|v_0\|_2. \tag{2.18}$$

Agora demonstraremos que a desigualdade (2.18) é equivalente a estimativa

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot,t) dt \right\|_2 \leq c \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1}. \tag{2.19}$$

com $g \in L_x^{4/3} L_t^1$.

Para isto, usando argumentos de dualidade, isto é,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot,t) dt \right\|_2 = \sup_{v_0} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(x,t) v_0(x) dt dx \right| : \left(\int |v_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 1 \right\}$$

e as desigualdades (1.1) e (2.18) obtemos as estimativas

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot,t) dt \right\|_2 &\leq \sup_{v_0} \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1} \left\| D_x^{-1/4} W(t) v_0 \right\|_{L_x^4 L_t^\infty} \\ &\leq c \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1} \left\| v_0 \right\|_2 \leq c \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando os mesmos argumentos, obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{-1/4} W(t) v_0(x) \right\|_{L_x^4 L_x^\infty} &= \sup_g \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) v_0(x) g(x,t) dx dt \right| : \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1} = 1 \right\} \\ &\leq \sup_g \left| \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) g(x,t) dt dx \right| \\ &\leq \sup_g \left\| v_0 \right\|_2 \left\| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) g(x,t) dt \right\|_{L_x^2} \\ &\leq c \left\| v_0 \right\|_2 \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1} \leq c \left\| v_0 \right\|_2. \end{aligned}$$

Resta mostrar a desigualdade (2.19). Para isto usamos as relações

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) g(\cdot,t) dt \right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) g(t) dt \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) g(t) dt \right) \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t') g(t') dt' \right)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(t) g(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/4} W(-t') \overline{g}(t') dt' \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/2} W(t-t') \overline{g}(t') dt' \right) dt dx \\ &\leq \left\| g \right\|_{L_x^{4/3}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/2} W(t-t') \overline{g}(t') dt' \right\|_{L_x^4 L_t^\infty}. \end{aligned}$$

Sendo que na última passagem, usamos a desigualdade de Hölder, (1.1). Assim é suficiente provar que

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/2} W(t-t') g(\cdot,t') dt' \right\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leq c \left\| g \right\|_{L_x^{4/3} L_t^1}.$$

Para isto observemos as relações

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/2} W(t-t')g(\cdot,t')dt'\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\xi|^{-1/2} e^{i(t-t')\xi^3} \widehat{g}(\xi,t')\right)^{\vee} dt'\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\xi|^{-1/2} e^{i(t-t')\xi^3}\right)^{\vee} * g(x,t')dt'\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi-(t-t')\xi^3)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right) * g(\xi,t')dt'\right| \\ &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi-(t-t')\xi^3)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right) * g(\xi,t')\right| dt' \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi-(t-t')\xi^3)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2}}\right| * |g(\xi,t')|\, dt'.\end{aligned}$$

Afirmamos agora que para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$|I_t(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi-t\xi^3)} \frac{d\xi}{|\xi|^{1/2+i\gamma}}\right| \leq \frac{c(1+|\gamma|)}{|x|^{1/2}},$$

para γ real.

A demonstração dessa afirmação se encontra em [5].

Usando a afirmação acima obtemos a seguinte estimativa

$$\left|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} W(t-t')g(\cdot,t')dt'\right| \leq \frac{c}{|x|^{1/2}} * \int_{-\infty}^{\infty} |g(\cdot,t')|\, dt'.$$

Logo, segue do Teorema 1.2, que o operador $\dfrac{c}{|x|^{1/2}}*$ é do tipo $(4/3, 4)$, isto é,

$$\frac{c}{|x|^{1/2}} * : L^{4/3} \to L^4,$$

com

$$\left\|\frac{c}{|x|^{1/2}} * \int_{-\infty}^{\infty} |g(\cdot,t')|\, dt'\right\|_{L^4_x} \leq c \left\|\int_{-\infty}^{\infty} |g(\cdot,t')|\, dt'\right\|_{L^{4/3}_x}.$$

Assim obtemos as estimativas

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}} D_x^{-1/2} W(t-t')g(\cdot,t')dt'\right\|_{L^4_x} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-1/2} W(t-t')g(\cdot,t')dt'\right|^4 dx\right)^{1/4} \\ &\leq \left\|\frac{c}{|x|^{1/2}} * \int_{-\infty}^{\infty} |g(\cdot,t')|\, dt'\right\| \leq c\, \|g\|_{L^{4/3}_x L^1_t},\end{aligned}$$

o que demonstra (2.17).

$\square$

Lema 2.1 *Seja* $s > 3/4$*. Então para qualquer* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *e qualquer* $\rho > 3/4$

$$||W(t)u_0||_{L^2_x L^\infty_T} \leq c(1+T)^\rho ||u_0||_{s,2}. \tag{2.20}$$

A demonstração dessa desigualdade podem ser vistas em [6].

Teorema 2.4 *Se* $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *então*

(i)

$$\|W(t)u_0\|_{L^5_x L^{10}_t} \leq c\,\|u_0\|_{L^2}. \tag{2.21}$$

(ii)

$$\|D_x W(t)u_0\|_{L^{20}_x L^{5/2}_t} \leq \left\|D^{1/4}u_0\right\|_{L^2}. \tag{2.22}$$

(iii)

$$\left\|D^{1/4}_x W(t)u_0\right\|_{L^4_t L^\infty_x} \leq c||u_0||_{L^2}. \tag{2.23}$$

Demonstração:

(i) Consideremos a família de operadores admissíveis, definida por

$$T_x u_0 = D_x^{-z/4} D_x^{(1-z)} W(t)u_0, \quad com \;\; z \in \mathbb{C}. \tag{2.24}$$

Fazendo $z = i\gamma$ em (2.24), temos a igualdade

$$\begin{aligned} T_{i\gamma}u_0 &= D_x^{-i\gamma/4} D_x^{(1-i\gamma)} W(t)u_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} W(t) D^{-i5\gamma/4} u_0. \end{aligned}$$

Assim pela estimativa (2.11) temos as desigualdades

$$\begin{aligned} \|T_{i\gamma}u_0\|_{L^\infty_x L^2_t} &= \left\|\frac{\partial}{\partial x} W(t) D^{-i5\gamma/4} u_0\right\|_{L^\infty_x L^2_t} \\ &\leq c\left\|D^{-i5\gamma/4}u_0\right\|_{L^2} \leq c\,\|u_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Agora fazendo $z = 1 + i\gamma$ em (2.24), obtemos a relação

$$\begin{aligned} T_{1+i\gamma}u_0 &= D_x^{-i(1+i\gamma)/4} D_x^{(1-i\gamma(1+i\gamma))} W(t)u_0 \\ &= D_x^{-1/4} W(t) D_x^{-i5\gamma/4} u_0. \end{aligned}$$

Logo da estimativa (2.17), temos a desigualdade

$$\begin{aligned} \|T_{1+i\gamma}u_0\|_{L^4_x L^\infty_t} &= \left\|D_x^{-1/4}W(t)D_x^{-i5\gamma/4}u_0\right\|_{L^4_x L^\infty_t} \\ &\leq c\left\|D_x^{-i5\gamma/4}u_0\right\|_{L^2} \leq c\|u_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

A seguir usaremos o Teorema de Stein, Teorema 1.3, com $p_0 = p_1 = 2$ e portanto $p_t = 2$. Fazendo $z = \dfrac{4}{5}$ em (2.24), temos que

$$T_{4/5}u_0 = W(t)u_0.$$

Comparando esta relação com a notação usada no Teorema de Stein, concluímos que $t = \dfrac{4}{5}$, logo obtemos a relação

$$\frac{1}{q_t} = \frac{1}{5q_0} + \frac{4}{5q_1}.$$

Das desigualdades (2.25) e (2.25), obtemos as estimativas

$$\|T_{i\gamma}u_0\|_{L^2_t} \leq c\|u_0\|_2 \text{ e } \|T_{1+i\gamma}u_0\|_{L^\infty_t} \leq \|u_0\|_2.$$

Então temos que $q_0 = 2$ e $q_1 = \infty$, assim $q_t = 10$ e portanto vale a desigualdade

$$\left\|T_{4/5}u_0\right\|_{L^{10}_t} \leq c\|u_0\|_2.$$

Além disso (2.25) e (2.25) fornece outras desigualdades, a saber

$$\|T_{i\gamma}u_0\|_{L^\infty_x} \leq c\|u_0\|_2 \text{ e } \|T_{1+i\gamma}u_0\|_{L^4_x} \leq \|u_0\|_2.$$

Segue então que $q_0 = \infty, q_1 = 4$ e $q_t = 5$, logo obtemos outra estimativa

$$\left\|T_{4/5}u_0\right\|_{L^5_x} \leq c\|u_0\|_2.$$

Assim temos a desigualdade desejada, isto é,

$$\|W(t)u_0\|_{L^5_x L^{10}_t} \leq c\|u_0\|_{L^2}.$$

(ii) e (iii) A demonstração dessas desigualdades podem ser vistas em [6]. As mesmas são de muita importância na demonstração do Teorema 4.1.

$\square$

Capítulo 3

O problema de Cauchy para a equação KdV em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > 3/4$

A seguir desenvolveremos uma das partes principais do nosso trabalho que é a boa colocação local no tempo para o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}. \tag{3.1}$$

Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Consideremos o PVI* (3.1) *e seja* $s > 3/4$*. Então para cada* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(||u_0||_{s,2}) > 0$ (*com* $T(\rho) \to \infty$ *para* $\rho \to 0$) *e uma única solução* $u(t)$ *de* (3.1) *satisfazendo*

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R})), \tag{3.2}$$

$$\partial_x u \in L^4([-T,T] : L^\infty(\mathbb{R})), \tag{3.3}$$

$$\left\| D_x^s \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty \tag{3.4}$$

e

$$\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty. \tag{3.5}$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0, T)$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^s(\mathbb{R})$ tal que a função $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}(t)$ de V sobre a classe definida por $(3.2) - (3.5)$ com T' no lugar de T é Lipschitz.

Antes de demonstramos o Teorema 3.1, faremos uma motivação para o funcional, utilizado na prova deste teorema.

Tomando a transformada de Fourier com respeito a variável x no sitema (3.1), obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi, t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi, t) + \widehat{u\partial_x u}(\xi, t) = 0 \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases} \tag{3.6}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.6) pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$ obtemos

$$\widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} + e^{(i\xi)^3 t} \widehat{f}(t) = 0$$

onde $f(x, t) = u(x, t)\partial_x u(x, t)$ é uma constante.

Observando que,

$$\frac{d}{dt}(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}) = \widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}$$

obtemos a relação

$$\frac{d}{dt}(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}) = -\widehat{f}(t) e^{(i\xi)^3 t}.$$

Integrando em relação a variável t, temos a igualdade

$$e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(t) = \widehat{u_0} - \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt',$$

ou ainda,

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u_0} e^{-(i\xi)^3 t} - e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt'.$$

Portanto, aplicando a transformação inversa obtemos a equação

$$\begin{aligned} u(t) &= (\widehat{u_0} e^{-(i\xi)^3 t})\check{} - \left(e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt' \right)\check{} \\ &= (\widehat{u_0} e^{i\xi^3 t})\check{} - \int_0^t \left(e^{i\xi 3(t-t')} \widehat{f}(t') \right)\check{} dt' \end{aligned}$$

Sabemos que $W(t)u_0 = (e^{i\xi^3 t}\widehat{u_0})\check{}$ e $\left(e^{i\xi^3(t-t')}\widehat{f}(t')\right)\check{} = W(t-t')f(t') = (u\partial_x u)(t')$, então temos a identidade

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t')dt' \tag{3.7}$$

Isto é, se u satisfaz o sistema (3.1) então u satisfaz a equação integral (3.7).

Demonstração do Teorema 3.1:

Consideremos um intervalo [-T, T] e uma função

$$w : \mathbb{R} \times [-T, T] \to \mathbb{R}.$$

Com o objetivo de simplificar as notações considere as normas

$$\lambda_1^T(w) := \max_{t\in[-T,T]} ||w(t)||_{s,2}, \tag{3.8}$$

$$\lambda_2^T(w) := \left(\int_{-T}^T \left\|\frac{\partial w}{\partial x}(\cdot, t)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4}, \tag{3.9}$$

$$\lambda_3^T(w) := \left\|D_x^s \frac{\partial}{\partial x} w\right\|_{L_x^\infty L_T^2} = \sup_x \left(\int_{-T}^T \left|D_x^s \frac{\partial}{\partial x} w(x,t)\right|^2 dt\right)^{1/2}, \tag{3.10}$$

$$\lambda_4^T(w) := (1+T)^{-\rho}||w||_{L_x^2 L_T^\infty}, \text{ para } \rho > 3/4, \tag{3.11}$$

$$\Lambda^T(w) := \max_{j=1,\dots,4} \lambda_j^T(w), \tag{3.12}$$

e também o espaço métrico completo

$$X_T := \{w \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}))/\Lambda^T(w) < \infty\}, \tag{3.13}$$

com a métrica

$$d(w_1, w_2) := \Lambda^T(w_1 - w_2).$$

Vale destacar que a escolha do conjunto de normas acima e do espaço métrico X_T é a essência da demonstração do teorema. Tais escolhas decorre de várias tentativas e observações na busca de estimativas da norma $H^s(\mathbb{R})$.

Vejamos inicialmente que $X_T \neq \emptyset$. Para tanto, obsevemos que se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ então usando as propriedades do grupo e as desigualdades $(2.23), (2.11)$ e (2.20) temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^T(W(t)u_0) &= \max_{t\in[-T,T]} ||W(t)u_0||_{s,2} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} ||u_0||_{s,2} = ||u_0||_{s,2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2^T(W(t)u_0) &= \left(\int_{-T}^{T} \left\|\frac{\partial W(t)u_0}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \\
&= \left\|W(t)\frac{\partial u_0}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
&\leq \left\|W(t)\frac{\partial u_0}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{L_t^4 L_x^\infty} \\
&\leq c\left\|D_x^{1/4}\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_{L^2} \\
&\leq c||u_0||_2 \leq c||u_0||_{s,2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3^T(W(t)u_0) &= \left\|D_x^s\frac{\partial}{\partial x}W(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq \left\|D_x^s\frac{\partial}{\partial x}W(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leq c||D_x^s u_0||_2 \\
&\leq c||u_0||_2 \leq c||u_0||_{s,2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda_4^T(W(t)u_0) &= (1+T)^{-\rho}||W(t)u_0||_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&\leq (1+T)^{-\rho}c(1+T)^{\rho}||u_0||_{s,2} \\
&= c||u_0||_{s,2}.
\end{aligned}$$

Assim, se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ então para qualquer $T > 0$, $W(t)u_0 \in X_T$ com $\Lambda^T(W(t)u_0) = \max\limits_{j=1,\dots,4} \lambda_j^T(W(t)u_0)$ dependendo de $||u_0||_{s,2}$ mas não de T e portanto $X_T \neq \emptyset$.

Nosso principal objetivo agora será mostrar que existe $T = T(||u_0||_{s,2}) > 0$ (dependendo de $||u_0||_{s,2}$ de uma maneira apropriada) e $a = a(||u_0||_{s,2}) > 0$ tal que se

$v \in X_T^a$ então $u = \phi(v) \in X_T^a$ e $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração. Uma vez provado isto segue-se, do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que existe um único $u \in X_T^a$ tal que $\phi_{u_0}(u) = u$, isto é,

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t') \left(u\frac{\partial u}{\partial x} \right)(t')dt'.$$

Para isto, denotemos por $u = \phi(v) = \phi_{u_0}(v)$ a solução do PVI linear não-homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + v\partial_x v = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.14}$$

onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e $X_T^a := \{w \in X_T / \Lambda^T(w) \leq a\}$.

Agora considermos a equação integral de PVI (3.14), ou seja,

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t') \left(v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt'. \tag{3.15}$$

A seguir, estabeleceremos uma sequência de Lemas, a qual fornece estimativas que serão utilizadas mais adiante.

Lema 3.1

$$\left\| D_x^s \left(v\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{L_x^2 L_T^2} + \left\| v\frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq c(1+T)^\rho (\Lambda^T(v))^2. \tag{3.16}$$

Demonstração:

Usando as definições das normas e propriedades do $\sup$ obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\| v\frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_x^2 L_T^2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\| v\frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L_T^2}^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 \left(\sup_x \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right\} \right)^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{-T}^{T} \left(\sup_x \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right\} \right)^2 \left(\sup_{[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 \, dx \right) dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\sup_{[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{-T}^{T} \left(\sup_x \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right\} \right)^2 dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sup_{[0,T]}||v||_{s,2}^2\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_\infty^2 dt\right)^{1/2}\\
&= \sup_{[0,T]}||v||_{s,2}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_\infty^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leq \sup_{[0,T]}||v||_{s,2}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4}\left(\int_{-T}^{T}1dt\right)^{1/4}\\
&= cT^{1/4}\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)\leq c(1+T)^\rho(\Lambda^T(v))^2.
\end{aligned}
$$

Agora, usando o Lema 1.4 deduzimos a seguinte desigualdade

$$
\left\|D_x^s\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2} \leq c\left(\int_{-T}^{T}\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_\infty^2||D_x^s v||_2^2dt\right)^{1/2}+c\left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2dxdt\right)^{1/2}.
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_\infty^2||D_x^s v||_2^2dt\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_\infty^2\left(\sup_{[-T,T]}\{||D_x^s v||_2\}\right)^2 dt\right)^{1/2}\\
&= \sup_{[-T,T]}\{||D_x^s v||_2\}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_\infty^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leq \sup_{[-T,T]}\{||D_x^s v||_2\}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4}\left(\int_{-T}^{T}1dt\right)^{1/4}\\
&\leq cT^{1/4}\sup_{[-T,T]}\{||D_x^s v||_2\}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4}\\
&= cT^{1/4}\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2dxdt\right)^{1/2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\left|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2dtdx\right)^{1/2}\\
&= \left\|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^2L_T^2}\\
&\leq \|v\|_{L_x^2L_T^\infty}\left\|D_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\leq (1+T)^\rho(1+T)^{-\rho}\|v\|_{L_x^2L_T^\infty}\left\|D_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= (1+T)^\rho\lambda_4^T(v)\lambda_3^T(v)
\end{aligned}
$$

obtemos as seguintes sequências de desigualdades

$$\begin{aligned}\left\|D_x^s\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq cT^{1/4}\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)+c(1+T)^{\rho}\lambda_4^T(v)\lambda_3^T(v)\\ &\leq c(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2,\end{aligned}$$

o que completa a demostração da desigualdade (3.16).

□

Lema 3.2

$$\lambda_1^T(u) \;\leq\; ||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'. \tag{3.17}$$

Demonstração:

Usando as propriedades do grupo e a equação (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_1^T(u) &= \max_{t\in[-T,T]}||u||_{s,2}\\ &= \max_{t\in[-T,T]}\left\|W(t)u_0-\int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\\ &= \max_{t\in[-T,T]}\left\|W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{s,2}\\ &= \max_{t\in[-T,T]}\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\\ &\leq \max_{t\in[-T,T]}\left[||u_0||_{s,2}+\left\|-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\right]\\ &\leq \max_{t\in[-T,T]}\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right]\\ &= ||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt',\end{aligned}$$

o que completa a demonstração de (3.17)

□

Lema 3.3

$$\lambda_2^T(u) \;\leq\; c\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right]. \tag{3.18}$$

Demonstração:

Usando as propriedades do grupo, a equação (3.15) e a inequação (2.23) obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\lambda_2^T(u) &= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_\infty^4 dt'\right)^{1/4}\\
&= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_\infty^4 dt'\right)^{1/4}\\
&\leq \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_\infty^4 dt'\right)^{1/4}\\
&\leq c\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2\\
&\leq c\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\\
&\leq c\left[||u_0||_{s,2}+\left\|-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\right]\\
&\leq c\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right].
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4

$$\lambda_3^T(u) \ \leq \ c\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right]. \tag{3.19}$$

Demonstração:

Usando as propriedades do grupo e a desigualdade (2.11) temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_3^T(u) &= \left\|D_x^s\frac{\partial}{\partial x}u\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= \left\|D_x^s\frac{\partial}{\partial x}\left\{W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\}\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\leq \left\|D_x^s\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\\
&\leq c\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right].
\end{aligned}
$$

$\square$

Lema 3.5

$$
\lambda_4^T(u) \leq c\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right]. \tag{3.20}
$$

Demonstração:

Usando as propriedades do grupo e a desigualdade (2.20) temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda_4^T(u) &= (1+T)^{-\rho}||u||_{L_x^2L_T^\infty}\\
&= (1+T)^{-\rho}\left\|W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\\
&\leq (1+T)^{-\rho}c(1+T)^{\rho}\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2}\\
&\leq c\left[||u_0||_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{s,2}(t')dt'\right].
\end{aligned}
$$

$\square$

Agora, tomando o máximo dos $\lambda_i^T(u)$, usando as desigualdades $(3.17)-(3.20)$ e a desigualdade de Minkowski segue-se que

$$
\begin{aligned}
\Lambda^T(u) &= \max_{j=1,\ldots,4}\lambda_j^T(u)\\
&\leq c\left[\|u_0\|_{s,2}+\int_{-T}^{T}\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{s,2}(t)dt\right]\\
&\leq c||u_0||_{s,2}+c\left(\int_{-T}^{T}\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{s,2}^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}1^2dt\right)^{1/2}\\
&\leq c||u_0||_{s,2}+cT^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{s,2}^2(t)dt\right)^{1/2}\\
&\leq c||u_0||_{s,2}+cT^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Agora, escolhemos a e $T > 0$ tal que

$$a = 2c||u_0||_{s,2}, \tag{3.22}$$

com T satisfazendo

$$4cT^{1/2}(1+T)^{\rho}a < 1. \tag{3.23}$$

De nossa escolha em (3.22) e (3.23) resulta que

$$\begin{aligned}
\Lambda^T(\phi(v)) &= \Lambda^T(u) \\
&\leq c||u_0||_{s,2} + cT^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2 \\
&\leq \frac{a}{2} + \frac{1}{4a}\cdot a^2 = \frac{3a}{4} \leq a.
\end{aligned}$$

Assim, $\phi(v) = \phi_{u_0}(v) \in X_a^T$ desde que $v \in X_a^T$. Concluimos que $\phi : X_T^a \to X_T^a$.

Para continuar nossa demonstração, consideremos os seguintes lemas:

Lema 3.6

$$\lambda_1^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) \leq \int_{-T}^{T} \left\| \left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt'.$$

Demonstração:

Das propriedades do grupo obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= \max_{t\in[-T,T]} ||\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})||_{s,2} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| W(t)\int_0^t W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right\|_{s,2} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| \int_0^t W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right\|_{s,2} \\
&\leq \max_{t\in[-T,T]} \int_{-T}^{T} \left\| W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt' \\
&\leq \max_{t\in[-T,T]} \int_{-T}^{T} \left\| \left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt' \\
&= \int_{-T}^{T} \left\| \left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} \right)(t') \right\|_{s,2} dt'.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.7

$$\lambda_2^T(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v})) \;\; \leq \;\; c\left[\int_{-T}^{T}\left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{s,2}dt'\right].$$

Demonstração:

Das propriedades do grupo e da inequação (2.23) temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_2^T(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v}))}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\infty}^{4}dt'\right)^{1/4}\\
&= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)\left[\int_{0}^{t}W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_{\infty}^{4}dt'\right)^{1/4}\\
&\leq c\left\|\int_{0}^{t}W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{2}\\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{s,2}dt'.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.8

$$\lambda_3^T(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v})) \;\; \leq \;\; c\left[\int_{-T}^{T}\left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{s,2}dt'\right].$$

Demonstração:

Das propriedades do grupo e da desigualdade (2.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_3^T(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= \left\|D_x^s\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v}))\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= \left\|D_x^s\frac{\partial}{\partial x}\left[W(t)\int_{0}^{t}W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\leq \left\|D_x^s\left[\int_{0}^{t}W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{2}\\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{s,2}dt'.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.9

$$\lambda_4^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) \quad \leq \quad c\left[\int_{-T}^{T}\left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{s,2} dt'\right].$$

Demonstração:

Das propriedades do grupo e da desigualdade (2.20) temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_4^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= (1+T)^{-\rho}||\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})||_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&= (1+T)^{-\rho}\left\|W(t)\int_0^t W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&\leq (1+T)^{-\rho}c(1+T)^{\rho}\left\|\int_0^t W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2} \\
&= c\left\|\int_0^t W(-t')\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{s,2} \\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{s,2} dt'.
\end{aligned}$$

□

Tomando agora o máximo dos $\lambda_i^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v}))$ obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= \max_{j=1,\dots,4}\lambda_j^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) \\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{s,2}(t)dt \\
&= c\int_{-T}^{T}\left\|\widetilde{v}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} + v\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{s,2}(t)dt \\
&= c\int_{-T}^{T}\left\|(\widetilde{v}-v)\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} + v\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial x}\right\|_{s,2}(t)dt \\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|(\widetilde{v}-v)\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x}\right\|_{s,2} + c\int_{-T}^{T}\left\|v\frac{\partial(\widetilde{v}-v)}{\partial x}\right\|_{s,2}(t)dt \\
&\leq cT^{1/2}(1+T)^{\rho}\Lambda^T(v-\widetilde{v})\{\Lambda^T(v) + \Lambda^T(\widetilde{v})\}.
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração, para isto tomemos $v, \widetilde{v} \in X_T^a$ com a e T satisfazendo (3.22) e (3.23). Note que

$$\Lambda^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) \quad = \quad \max_{j=1,\dots,4}\lambda_j^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v}))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq cT^{1/2}(1+T)^{\rho}\Lambda^{T}(v-\widetilde{v})\{\Lambda^{T}(v)+\Lambda^{T}(\widetilde{v})\} \\
&\leq 2cT^{1/2}(1+T)^{\rho}a\Lambda^{T}(v-\widetilde{v}) \\
&\leq \frac{1}{2}\Lambda^{T}(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

Logo, para valores de T satisfazendo (3.22) e (3.23), $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração e com isso existe um único $u \in X_T^a$ tal que $\phi_{u_0}(u) = u$, isto é,

$$
u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t')dt'.
$$

De modo análogo para $T_1 \in (0,T)$ obtemos

$$
\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) \leq c||u_0-\widetilde{u}_0||_{s,2} + cT_1^{1/2}(1+T_1)^{\rho}\Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v})\{\Lambda^{T_1}(v)+\Lambda^{T_1}(\widetilde{v})\}.
$$

Para ver que a aplicação dado inicial-fluxo é Lipschitz, considere $T_1 \in (0,T)$ e $v, \widetilde{v} \in X_T^a$ com a e T satisfazendo (3.22) e (3.23) . Assim,

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) &= \Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v}) \\
&\leq c||u_0-\widetilde{u}_0||_{s,2} + cT_1^{1/2}(1+T_1)^{\rho}\Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v})\{\Lambda^{T_1}(v)+\Lambda^{T_1}(\widetilde{v})\} \\
&\leq c||u_0-\widetilde{u}_0||_{s,2} + 2acT_1^{1/2}(1+T_1)^{\rho}\Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) \leq K||u_0-\widetilde{u}_0||_{s,2}
$$

onde $K > 0$. Assim, para um $T_1 \in (0,T)$ a aplicação $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}$ de V (vizinhança de u_0 dependendo de T_1) em $X_{T_1}^a$ é Lipschitz.

Para estendermos a unicidade de nossa solução ao intervalo $(0,T)$, consideremos $w \in X_{T_1}$ para $T_1 \in (0,T)$ uma solução do (3.1). O argumento usado em (3.21) mostra que para $T_2 \in (0,T_1)$, $w \in X_{T_2}^a$. Portanto mostra que $w = u$ em $\mathbb{R} \times [-T_2, T_2]$.

Reaplicando este processo, um número finito de vezes, estendemos a unicidade de nossa solução ao intervalo $(0,T)$.

Portanto, está completa a demonstração do Teorema 3.1.

□

Capítulo 4

O Problema de Cauchy para a equação mKdV em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 1/4$

Nosso objetivo neste capítulo é provar a boa colocação local para o seguinte PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} . \tag{4.1}$$

Para isso, demonstraremos o seguinte Teorema:

Teorema 4.1 *Consideremos o PVI* (4.1). *Então para cada* $u_0 \in \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(||D_x^{1/4} u_0||_2) > 0$ *(com* $T(\rho) \to \infty$ *para* $\rho \to 0$*) e uma única solução forte* $u(t)$ *de* (4.1) *satisfazendo*

$$u \in C([-T,T] : \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})), \tag{4.2}$$

$$\left\| D^{1/4} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{4.3}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} < \infty, \tag{4.4}$$

$$||D_x^{1/4} u||_{L_x^5 L_T^{10}} < \infty, \tag{4.5}$$

e

$$\|u\|_{L^4_x L^\infty_T} < \infty. \tag{4.6}$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0,T)$ existe uma vizinhança V de u_0 em $\dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ tal que a função $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}(t)$ de V na classe definida por $(4.2)-(4.6)$, com T' no lugar de T é Lipschitz.

Demonstração:

De maneira análoga ao que fizemos no capítulo anterior consideremos

$$w : \mathbb{R} \times [-T,T] \to \mathbb{R},$$

as normas

$$\mu_1^T(w) := \max_{t\in[-T,T]} ||D_x^{1/4} w||_2, \tag{4.7}$$

$$\mu_2^T(w) := \|D_x w\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T}, \tag{4.8}$$

$$\mu_3^T(w) := \left\|D_x^{1/4} w\right\|_{L^5_x L^{10}_T}, \tag{4.9}$$

$$\mu_4^T(w) := \left\|D_x^{1/4} \frac{\partial w}{\partial x}\right\|_{L^\infty_x L^2_T}, \tag{4.10}$$

$$\mu_5^T(w) := ||w||_{L^4_x L^\infty_T}, \tag{4.11}$$

$$\Omega^T(w) := \max_{j=1,\dots,5} \mu_j^T(w), \tag{4.12}$$

e também o espaço métrico completo

$$Y_T := \{w \in C([-T,T] : \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R}))/\Omega^T(w) < \infty\}, \tag{4.13}$$

com a métrica

$$d(w_1, w_2) = \Omega^T(w_1 - w_2).$$

Vejamos inicialmente que $Y_T \neq \emptyset$.

Usando as propriedades do grupo e as desigualdades $(2.11)-(2.13), (2.17), (2.21), (2.22)$ mostramos que

$$\begin{aligned}
\mu_1^T(W(t)u_0) &:= \max_{t\in[-T,T]} ||D_x^{1/4}W(t)u_0||_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} ||W(t)D_x^{1/4}u_0||_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} ||D_x^{1/4}u_0||_2 = ||D_x^{1/4}u_0||_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2^T(W(t)u_0) &:= \|D_x W(t)u_0\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&\leq ||D_x^{1/4}u_0||_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3^T(W(t)u_0) &:= \left\|D_x^{1/4}W(t)u_0\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\
&= \left\|W(t)D_x^{1/4}u_0\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\
&\leq c||D_x^{1/4}u_0||_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4^T(W(t)u_0) &:= \left\|D_x^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}W(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \left\|\frac{\partial W(t)}{\partial x}D_x^{1/4}u_0\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq c||D_x^{1/4}u_0||_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mu_5^T(W(t)u_0) &:= ||W(t)u_0||_{L_x^4 L_T^\infty} \\
&\leq c||D_x^{1/4}u_0||_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Omega^T(w) := \max_{j=1,\ldots,5} \mu_j^T(w) \leq c||D_x^{1/4}u_0||_2.$$

Assim, se $u_0 \in \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ para qualquer $T > 0$, então $W(t)u_0 \in Y_T$ e portanto $Y_T \neq \emptyset$.

Para $u_0 \in \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ denotemos por $\phi(v) = \phi_{u_0}(v)$ a solução do PVI linear não-homogêneo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + v^2\partial_x v = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.14}$$

onde $v \in X_T^a := \{w \in Y_T / \Omega^T(w) \leq a\}$.

Consideremos a equação integral

$$u(t) = \phi(v(t)) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(v^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'. \tag{4.15}$$

Primeiramente vamos provar a seguinte desigualdade:

Lema 4.1

$$\left\| D_x^{1/4}\left(v^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} \leq c(\Omega^T(v))^3. \tag{4.16}$$

Demonstração:

Usando o Lema 1.4 com $f = v^2$, $g = \partial_x v$, $\alpha = \alpha_1 = 1/4$, $p = q = 2$, $p_2 = 20$ e $q_2 = 5/2$ e o Lema 1.3 deduzimos a seguinte sequência de desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\| D_x^{1/4}\left(v^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2 L_T^2} &\leq c \left\| D_x^{1/4}\left(v^2\right)\right\|_{L_x^{20/9} L_T^{10}} \left\| D_x^{1/4} \frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + c\left\|v^2\right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \left\| D_x^{1/4}\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq c\|v\|_{L_x^4 L_T^\infty} \left\|D_x^{1/4} v\right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \mu_2^T(v) + c(\mu_5^T(v))^2 \mu_4^T(v) \\
&\leq c(\Omega^T(v))^3.
\end{aligned}$$

□

Usando as propriedades do grupo, as desigualdades (2.11)-(2.13), (2.17), (2.21) e (2.22) na equação (4.15) mostramos que

$$\begin{aligned}
\mu_1^T(\phi(v(t))) &:= \max_{t\in[-T,T]} ||D_x^{1/4}\phi(v(t))||_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| D_x^{1/4}\left[W(t)\left(u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right]\right\|_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| W(t)\left[D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right]\right\|_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2 \\
&= \left\| D_x^{1/4}\left(u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2^T(\phi(v(t))) &:= \|D_x\phi(v(t))\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\
&= \left\|D_x\left[W(t)\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right]\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\
&\le \left\|D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_3^T(\phi(v(t))) &:= \|D_x^{1/4}\phi(v(t))\|_{L_x^{5}L_T^{10}}\\
&= \left\|D_x^{1/4}\left[W(t)\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right]\right\|_{L_x^{5}L_T^{10}}\\
&= \left\|W(t)\left[D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right]\right\|_{L_x^{5}L_T^{10}}\\
&\le c\left\|D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_4^T(\phi(v(t))) &:= \left\|D_x^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}\phi(v(t))\right\|_{L_x^{\infty}L_T^{2}}\\
&= \left\|D_x^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}\left[W(t)u_0-\int_0^t W(t-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^{\infty}L_T^{2}}\\
&= \left\|\frac{\partial W(t)}{\partial x}D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^{\infty}L_T^{2}}\\
&\le c\left\|D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mu_5^T(\phi(v(t))) &:= ||\phi(v(t))||_{L_x^{4}L_T^{\infty}}\\
&= \left\|W(t)u_0-\int_0^t W(t-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^{4}L_T^{\infty}}\\
&= \left\|W(t)\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^{4}L_T^{\infty}}\\
&\le c\left\|D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando as desigualdades acima e a inequação (4.16) obtemos

$$
\begin{aligned}
\Omega^T(\phi(v(t))) &:= \max_{j=1,\ldots,5}\mu_j^T(\phi(v(t)))\\
&\le c\left\|D_x^{1/4}\left(u_0-\int_0^t W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right)\right\|_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_2 + c\int_0^t \left\|D^{1/4}W(-t')\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt' \\
&\leq c\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_2 + c\int_{-T}^{T} \left\|D^{1/4}\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt' \\
&\leq c\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_2 + c\left(\int_{-T}^{T} 1\ dt'\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T} \left\|D^{1/4}\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2^2 dt'\right)^{1/2} \\
&= c\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_2 + cT^{1/2}\left(\int_{-T}^{T} \left\|D^{1/4}\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2^2 dt'\right)^{1/2} \\
&= c\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_2 + cT^{1/2}\left\|D^{1/4}\left(v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2} \\
&\leq c\left\|D_x^{1/4}u_0\right\|_2 + cT^{1/2}(\Omega^T(v))^3. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Agora, escolha a e $T > 0$ tal que

$$a = 2c||D_x^{1/4}u_0||_2, \qquad (4.18)$$

com T satisfazendo

$$8cT^{1/2}a^2 < 1. \qquad (4.19)$$

De nossa escolha em (4.18) e (4.19) resulta que

$$
\begin{aligned}
\Omega^T(u(t)) &= \Omega^T(\phi(v(t))) \\
&\leq c||D_x^{1/4}u_0||_2 + cT^{1/2}(\Omega^T(v))^3 \\
&\leq \frac{a}{2} + \frac{1}{8a^2}\cdot a^3 \\
&= \frac{5a}{8} \leq a.
\end{aligned}
$$

Assim, $\phi(v) = \phi_{u_0}(v) \in Y_a^T$ desde que $v \in Y_a^T$, com a e T satisfazendo (4.18) e (4.19). Portanto, podemos concluir que $\phi : Y_T^a \to Y_T^a$.

De modo similar ao que fizemos anteriormente, usando as propriedades do grupo, as desigualdades (2.11)-(2.13), (2.17), (2.21) e (2.22) na equação (4.15) mostramos que

$$
\begin{aligned}
\mu_1^T(\phi(v(t)) - \phi(\tilde{v}(t))) &:= \max_{t\in[-T,T]} ||D_x^{1/4}\left[\phi(v(t)) - \phi(\tilde{v}(t))\right]||_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\|D_x^{1/4}\left[\int_0^t W(t-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| D_x^{1/4}\left[W(t)\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| W(t)\left[D_x^{1/4}\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| D_x^{1/4}\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2 \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| \int_0^t D_x^{1/4}W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2 \\
&\leq \max_{t\in[-T,T]} \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt' \\
&\leq \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2^T(\phi(v(t)) - \phi(\tilde{v}(t))) &:= \left\| D_x\left[\phi(v(t)) - \phi(\tilde{v}(t))\right]\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&= \left\| D_x\left[\int_0^t W(t-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&= \left\| D_x W(t)\left[\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&= \left\| D_x^{1/4}\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2 \\
&= \left\| \int_0^t D_x^{1/4}W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2 \\
&\leq \int_{-T}^T \left\| D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_3^T(\phi(v(t)) - \phi(\tilde{v}(t))) &:= \left\| D_x^{1/4}\left[\phi(v(t)) - \phi(\tilde{v}(t))\right]\right\|_{L_x^{5}L_T^{10}} \\
&= \left\| D_x^{1/4}\left[\int_0^t W(t-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^{5}L_T^{10}} \\
&= \left\| D_x^{1/4}W(t)\left[\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^{5}L_T^{10}} \\
&= \left\| W(t)D_x^{1/4}\left[\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^{5}L_T^{10}} \\
&\leq c\left\| D_x^{1/4}\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c\left\|\int_0^t D_x^{1/4}W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2\\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_4^T(\phi(v(t))-\phi(\tilde{v}(t))) &:= \left\|D_x^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(v(t))-\phi(\tilde{v}(t))\right]\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= \left\|D_x^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^t W(t-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= \left\|D_x^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}W(t)\left[\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= \left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)D_x^{1/4}\left[\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= \left\|D_x^{1/4}\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2\\
&= \left\|\int_0^t D_x^{1/4}W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2\\
&\leq \int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt'
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mu_5^T(\phi(v(t))-\phi(\tilde{v}(t))) &:= \|\phi(v(t))-\phi(\tilde{v}(t))\|_{L_x^4 L_T^\infty}\\
&= \left\|\int_0^t W(t-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^4 L_T^\infty}\\
&= \left\|W(t)\left[\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^4 L_T^\infty}\\
&= c\left\|D_x^{1/4}\int_0^t W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2\\
&= c\left\|\int_0^t D_x^{1/4}W(-t')\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_2\\
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt'.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando as desigualdades acima obtemos

$$
\Omega^T(\phi(v(t))-\phi(\tilde{v}(t))) := \max_{j=1,\ldots,5}\mu_j^T(\phi(v(t))-\phi(\tilde{v}(t)))
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\int_{-T}^{T}\left\|D_x^{1/4}\left(\tilde{v}^2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}-v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_2 dt' \\
&\leq cT^{1/2}\left\{(\Omega^T(v))+(\Omega^T(\widetilde{v}))\right\}^2\Omega^T(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora que $\phi : Y_T^a \to Y_T^a$ é uma contração. Para tanto, tomemos $v, \widetilde{v} \in Y_T^a$ com a e T satisfazendo (4.18) e (4.19) para obter

$$
\begin{aligned}
\Lambda^T(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= \max_{j=1,\dots,4}\lambda_j^T(\phi_{u_0}(v)-\phi_{u_0}(\widetilde{v})) \\
&\leq cT^{1/2}\left\{(\Omega^T(v))+(\Omega^T(\widetilde{v}))\right\}^2\Omega^T(v-\widetilde{v}) \\
&\leq 4cT^{1/2}a^2\Omega^T(v-\widetilde{v}) \\
&\leq \frac{1}{2}\Omega^T(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

Logo, para valores de T satisfazendo (4.18) e (4.19), $\phi : Y_T^a \to Y_T^a$ é uma contração e com isso existe um único $u \in Y_T^a$ tal que $\phi_{u_0}(u) = u$, isto é,

$$
u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t')dt'.
$$

De modo análogo ao que fizemos antes, para $T_1 \in (0,T)$ obtemos

$$
\Omega^{T_1}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) \leq c\left\|D_x^{1/4}(u_0-\widetilde{u}_0)\right\|_2 + cT_1^{1/2}\left\{(\Omega^{T_1}(v))+(\Omega^{T_1}(\widetilde{v}))\right\}^2\Omega^{T_1}(v-\widetilde{v}).
$$

Para ver que a aplicação dado inicial-fluxo é Lipschitz, consideremos $T_1 \in (0,T)$ e $v, \widetilde{v} \in Y_T^a$ com a e T satisfazendo (4.18) e (4.19) . Assim,

$$
\begin{aligned}
\Omega^{T_1}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) &= \Omega^{T_1}(v-\widetilde{v}) \\
&\leq c\left\|D_x^{1/4}(u_0-\widetilde{u}_0)\right\|_2 + cT_1^{1/2}\left\{(\Omega^{T_1}(v))+(\Omega^{T_1}(\widetilde{v}))\right\}^2\Omega^{T_1}(v-\widetilde{v}) \\
&\leq c\left\|D_x^{1/4}(u_0-\widetilde{u}_0)\right\|_2 + 4a^2cT_1^{1/2}\Omega^{T_1}(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\Omega^{T_1}(\phi_{u_0}(v)-\phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) \leq K||D_x^{1/4}(u_0-\widetilde{u}_0)||_2
$$

onde $K > 0$. Assim, para um $T_1 \in (0,T)$ a aplicação $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}$ de V (vizinhança de u_0 dependendo de T_1) em $Y_{T_1}^a$ é Lipschitz.

Para estendermos a unicidade de nossa solução ao intervalo $(0, T)$, consideremos $w \in Y_{T_1}$ para $T_1 \in (0, T)$ uma solução do (4.1). O argumento usado em (4.17) mostra que para $T_2 \in (0, T_1)$, $w \in Y^a_{T_2}$. Portanto mostra que $w = u$ em $\mathbb{R} \times [-T_2, T_2]$.

Reaplicando este processo, um número finito de vezes, estendemos a unicidade de nossa solução ao intervalo $(0, T)$.

Portanto, está completa a demonstração do Teorema 4.1.

$\square$

Como uma conseqüência do Teorema 4.1 temos que o PVI (4.1) para a equação modificada KdV é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1/4$.

Capítulo 5

Considerações finais - Propriedades da equação KdV

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades da solução da equação

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0 \qquad \text{em} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{5.1}$$

tais como sólitons, scaling, leis de conservação, etc. Além disso, comentaremos a importância dessas propriedades no estudo da Boa Colocação da KdV.

5.1 Sólitons

A palavra sóliton foi criada por M. Kruskal ao estudar soluções periódicas da KdV. Com este termo fundiu-se o conceito de onda solitária com a terminação on, radical designando partícula (tal como eletrón, fóton, etc). Muitas definições rigorosas podem ser formuladas; neste texto definiremos sólitons da seguinte forma:

Definição 5.1 *Sóliton é uma solução de uma equação diferencial parcial não-linear que goze das seguintes propriedades:*

(i) *representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma* $v(x - \sigma t)$*, onte* σ *é uma constante real;*

(ii) *é localizada, ou seja,* $v(\xi) \to 0$*, assim como todas suas derivadas, quando* $\xi \to \pm\infty$*;*

(iii) *mantém sua identidade mesmo após interação com outros sólitons (e neste sentido tem um comportamento de partículas, como sugere seu nome).*

Podemos então começar a procurar sólitons para a equação (5.1). Suponhamos que

$$u(x,t) = v(x - \sigma t). \tag{5.2}$$

Então u resolve a equação KdV (5.1), desde que v satisfaz a EDO

$$-\sigma v' + v''' + vv' = 0 \left(' = \frac{d}{ds} \right). \tag{5.3}$$

Integrando (5.3) obtemos

$$-\sigma v + v'' + \frac{1}{2}v^2 = a, \tag{5.4}$$

onde a denota alguma constante. Multiplicando esta igualdade por v' obtemos

$$-\sigma vv' + v''v' + \frac{1}{2}v^2v' = av'$$

e deduzimos que

$$-\sigma\frac{v^2}{2} + \frac{(v')^2}{2} + \frac{1}{6}v^3 = av + b.$$

Portanto,

$$\frac{(v')^2}{2} = -\frac{1}{6}v^3 + \sigma\frac{v^2}{2} + av + b \tag{5.5}$$

onde b é outra constante arbitrária.

Investigado (5.5) olhamos agora somente para as soluções v que satisfazem $v, v', v'' \to 0$ quando $s \to \pm\infty$. Então (5.4), (5.5) implica $a = b = 0$. A equação (5.5) torna-se

$$\frac{(v')^2}{2} = v^2\left(-\frac{1}{6}v + \frac{\sigma}{2}\right).$$

Portanto

$$v' = \pm v\left(\sigma - \frac{1}{3}v\right)^{1/2}.$$

Tomando o sinal negativo acima, por conveniência, obtemos então esta fórmula implícita para v:

$$s = -\int_1^{v(z)} \frac{dz}{z\left(\sigma - \frac{1}{3}z\right)^{1/2}} + c, \tag{5.6}$$

para alguma constante c. Agora substituindo $z = \dfrac{\sigma}{1/3}\operatorname{sech}^2\theta = 3\sigma\operatorname{sech}^2\theta$, segue então que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= 3\sigma\operatorname{sech}\theta(-\operatorname{sech}\theta\tanh\theta) \\ &= -6\sigma\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z\left(\sigma - \frac{1}{3}z\right)^{1/2} &= 3\sigma\operatorname{sech}^2\theta\left(\sigma - \sigma\operatorname{sech}^2\right)^{1/2} \\ &= 3\sigma\operatorname{sech}^2\theta\sigma^{1/2}\left(1 - \operatorname{sech}^2\theta\right)^{1/2} \\ &= 3\sigma^{3/2}\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta. \end{aligned}$$

Portanto (5.6) torna-se

$$\begin{aligned} s &= -\int_1^{v(z)} \frac{dz}{z\left(\sigma - \frac{1}{3}z\right)^{1/2}} + c \\ &= -\int \frac{-6\sigma\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta d\theta}{3\sigma\operatorname{sech}^2\theta\left(\sigma - \frac{1}{3}\cdot 3\sigma\operatorname{sech}^2\theta\right)^{1/2}} + c \\ &= -\int \frac{-6\sigma\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta d\theta}{3\sigma\operatorname{sech}^2\theta\sigma^{1/2}\left(1 - \operatorname{sech}^2\theta\right)^{1/2}} + c \\ &= -\int \frac{-6\sigma\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta d\theta}{3\sigma^{3/2}\operatorname{sech}^2\theta\tanh\theta} + c = 2\sigma^{-1/2}\theta + c, \end{aligned}$$

onde θ é dado implicitamente pela relação

$$3\sigma\operatorname{sech}^2\theta = v(s). \tag{5.7}$$

Combinando (5.7) e (5.7), obtemos

$$\begin{aligned} v(s) &= 3\sigma\operatorname{sech}^2\theta \\ &= 3\sigma\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sigma^{1/2}(s-c)}{2}\right)(s \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Consequentemente, v resolve a EDO (5.3). Como consequência

$$u(x,t) = 3\sigma \text{sech}^2\left(\frac{\sigma^{1/2}(x-\sigma t - c)}{2}\right)(x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0)$$

é uma solução da equação KdV para cada $c \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

É fácil verificar que esta função obdece às duas primeiras exigências para ganhar o nome de sóliton; para a terceira, a demonstração se encontra em [9].

5.2 Sistemas Integráveis e Leis de Conservação

Nesta seção veremos como muitas propriedades das soluções da KdV podem ser obtidas apenas a partir do estudo da expressão da equação, ou seja, de suas propriedades algébricas.

Para começar a estudar tais propriedades reescrevemos a equação (5.1) na seguinte forma:

$$u_t = \partial_x\left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right). \tag{5.8}$$

Integrando sobre a reta e lembrando que $u \to 0$ (assim como todas as suas derivadas) em $x \to \pm\infty$ podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u\ dx = \int_{\mathbb{R}} u_t\ dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right)\ dx = \left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} u\ dx = A_1$$

onde A_1 é uma constante.

A expressão acima é uma grandeza conservada, ou seja, ao longo da evolução ditada pela KdV, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} T_1\ dx$, onde $T_1 = u$ não se altera. Fisicamente significa que a massa não se altera, ou seja, temos uma expressão para a conservação da massa. Podemos começar a procurar por outras grandezas conservadas, em particular associadas a outras entidades físicas.

Multiplicando a equação (5.1) por u obtemos

$$uu_t + uu_{xxx} + u^2u_x = uu_t + \left[(u_xu_{xx} + uu_{xxx}) - u_xu_{xx} + u^2u_x\right] = 0, \tag{5.9}$$

que podemos reescrevê-la

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right)+\partial_x\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{3}u^3\right)=0,$$

ou ainda,

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right)=-\partial_x\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{3}u^3\right). \tag{5.10}$$

Integrando sobre a reta e lembrando que $u \to 0$ (assim como todas as suas derivadas) em $x \to \pm\infty$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}u^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right)dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\partial_x\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{3}u^3\right)dx\\
&= -\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}=0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}}u^2=A_2,$$

onde A_2 é uma constante.

Portanto escrevendo $T_2=u^2$ temos que $\int_{\mathbb{R}}T_2\,dx$ é constante, e temos uma segunda lei de conservação, esta associada a conservação do momento.

Com um pouco mais de trabalho podemos obter uma terceira lei de conservação, desta vez associada a energia.

Assim obtemos $T_3=u^3+\frac{1}{2}u_x^2$ e uma nova lei de conservação, $\int T_3dx.$

É importante notar que sempre que tivermos uma expressão da forma

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial X}{\partial x}=0$$

e condições de contorno apropriadas, no caso $X\to 0$ com $x\to\pm\infty$, teremos uma lei de conservação, que pode ser escrita $\int_{\mathbb{R}}T\,dx=A$, onde A é uma constante.

Dado que em um problema físico típico as leis de conservação aplicadas são exatamente aquelas associadas a massa, momento e energia, poder-se-ia pensar, a primeira vista, que as três leis enunciadas acima esgotam as leis de conservação da KdV. No entanto, com muito esforço, Miura, Gardner e Kruskal em 1968, ver [18], encontraram mais oito leis de conservação independentes, totalizando onze. Para surpresa de muitos provou-se, em seguida, que a KdV possui um número infinito de leis de conservação, e que, além disto, esta característica é compartilhada por um grande número de equações diferenciais (aquelas que recebem o título de sistemas integráveis). Maiores detalhes ver [9].

5.3 Scaling (Solução tipo escala)

Afirmação: Se $u(x,t)$ resolve (5.1) com $u(x,0) = u_0(x)$ então $u_\lambda(x,t) = \lambda^{3/2}(\lambda x, \lambda^3 t)$ $(\lambda > 0)$ com $u_\lambda(x,0) = \lambda^{3/2} u_0(\lambda x)$ também resolve (5.1).

Demonstração

De fato, pelas caracteríticas da parte linear em (5.1) devemos ter

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^\beta u(\lambda x, \lambda^3 t) \ (\lambda > 0). \tag{5.11}$$

Assim,

$$\partial_t u_\lambda(x,t) = \lambda^{\beta+3} u_t(\lambda x, \lambda^3 t) \quad , \ \partial_x u_\lambda(x,t) = \lambda^{\beta+1} u_x(\lambda x, \lambda^3 t),$$

$$\partial_x^2 u_\lambda(x,t) = \lambda^{\beta+2} u_{xx}(\lambda x, \lambda^3 t) \quad \text{e} \quad \partial_x^3 u_\lambda(x,t) = \lambda^{\beta+3} u_{xxx}(\lambda x, \lambda^3 t).$$

Substituindo $u_\lambda(x,t)$ em (5.1) obtemos

$$\partial_t u_\lambda(x,t) + \partial_x^3 u_\lambda(x,t) + u_\lambda(x,t) \partial_x u_\lambda(x,t) = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^{\beta+3} u_t(\lambda x, \lambda^3 t) + \lambda^{\beta+3} u_{xxx}(\lambda x, \lambda^3 t) + \lambda^{2\beta+1} u(\lambda x, \lambda^3 t) u_x(\lambda x, \lambda^3 t) = 0.$$

Para que (5.11) seja solução de (5.1) precisamos que $\lambda^{\beta+3} = \lambda^{2\beta+1}$, ou seja, $\beta = \dfrac{3}{2}$.

Portanto, se $u(x,t)$ resolve (5.1) com $u(x,0) = u_0(x)$ então $u_\lambda(x,t) = \lambda^{3/2}(\lambda x, \lambda^3 t)$ também resolve, o que prova a afirmação.

Agora queremos saber quantas derivadas são permitidas para $\|D^r u_\lambda\|_{L^2}$ se tornar invariante. Tomando a derivada homôgenea de ordem r em $L^2(\mathbb{R})$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|D^r u_\lambda(x,0)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |D^r u_\lambda(x,0)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |(|\xi|^r \widehat{u_\lambda}(\xi,0))\check{}\,(x)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2r} \, |\widehat{u_\lambda}(\xi,0)|^2 \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2r} |y|^{2r} \, |\lambda|^2 \, |\widehat{u_0}(y)|^2 \, \lambda dy \\
&= \lambda^{2r+3} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2r} |\widehat{u_0}(y)|^2 dy \\
&= \lambda^{2r+3} \, \|D^r u_0(x)\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a mudança de variável $y = \dfrac{\xi}{\lambda}$ e a propriedades de dilatação (da transformada de Fourier) para escrever $\widehat{u_\lambda}(\xi) = \lambda^2 \widehat{u_0}(\lambda\xi) = \lambda \widehat{u_0}\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right)$. Portanto, $D^r u_\lambda(x,0)$ é inavariante se $2r+3=0$, ou seja, $r = -\dfrac{3}{2}$.

$\square$

5.4 Conclusões

As propriedades deduzidas acima e muitas outras, são da maior importância no estudo da boa colocação local e global para a equação KdV, conforme a vasta literatura sobre esta equação. Vale destacar ainda que o melhor resultado obtido para a KdV encontra-se em [4], onde Kenig, Ponce e Vega mostram a boa colocação local e global em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq -3/4$. Tal resultado foi obtido utilizando-se os espaços de Bourgain e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para o caso $s = -3/4$ o problema foi resolvido em [13], por Nakanishi, Takaoka e Tsutsumi.

Para a equação modificada KdV, $k = 2$, a boa postura local é estabelecida em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 1/4$, ver [4]. Se $s > 1$ temos resultado global em $H^s(\mathbb{R})$, como pode ser visto em [10].

No caso $k = 3$, temos o resultado local em H^s para $s > -1/6$, estabelecido por Grunrock como pode ser visto em [2].

Além disso nos casos $k = 1$ ou 3, se $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$, para $s > 0$, então $v \in C(\mathbb{R} : H^s(\mathbb{R}))$, ver [10].

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS R. A. *Sobolev Spaces.* New York - San Francisco - London. AP, (1975).

[2] A. GRÜNROCK. *A bilinear airy type estimate with application to the 3-gKdV equation. Preprint.*

[3] A. S. BARROS. *O problema de Cauchy para a equação super Korteweg-de-Vries.* Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituro de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2004.

[4] C. KENIG, G. PONCE, AND V. VEGA. *A bilinear estmative with applications to the KdV equation.* J. Amer. Math. Soc., 9: 573-603, 1996.

[5] C. KENIG, G. PONCE AND V. VEGA. *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* Indiana U. Math., $40 : 33 - 69$, 1991.

[6] C. KENIG, G. PONCE AND V. VEGA. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math., $46 : 527 - 620$, 1993.

[7] ELON LAGES LIMA. *Espaços Métricos.* Rio de Janeiro, Impa-CNPq, 1977.

[8] E. M. STEIN. *Interpolation of linear operators.* Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 482-492.

[9] FÁBIO CHALUD E JORGE ZUBELLI. *Sólitons: Na Crista da Onda por Mais de 100 anos.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.

[10] F. LINARES & G. PONCE. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. v. 1. 243 págs.

[11] H. BRESIS.*Analísis funcional - Teoría e aplicaciones* Madrid, Aliança, 1984.

[12] J. BOURGAIN. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equation.* Geometric and Functional Anal.,3:107-156, 209-262, 1993.

[13] K. NAKANISHI, H. TAKAOKA, AND Y. TSUTSUMI. *Couterexemples to bilinear estimates related with the KdV equation and the nonlinear Schrödinger equation.* Methods Appl. Anal., 8:569-578, 2001.

[14] LAWRENCE C. EVANS. *Partial Differential Equations.* IAMS Bookstore, 1998. v.19. 662 páginas

[15] P. G. DRAZIN AND R. S. JOHNSON. *Solitons: an Introduction.* Cambrigde University Press, Cambrigde, 1989.

[16] RAFAEL JOSÉ IÓRIO & VALÉRIA IÓRIO. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1988.

[17] R. MIURA. *The Korteweg-de Vries equation and generalizations-I. A remarkable explicit nonlinear transformation.* J. Mathematical Phys., 9: 1202-1204, 1968.

[18] R. M. MIURA, C. S. GARDNER AND M. D. KRUSKAL. *Korteweg-de Vries equation and generalizations - 2 - existence of conservation laws and constants of motion.* J. Math. Phys., 9:1204 - 1968.

[19] VALÉRIA IÓRIO. *EDP: Um Curso de Graduação.* Segunda Edição. IMPA: Rio de Janeiro, 2001.