



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# Incompressibilidade de Toros Transversais a Fluxos Axioma A

Alexsandro da Silva Néo

Maceió  
Dezembro de 2009

ALEXSANDRO DA SILVA NÉO

Incompressibilidade de Toros Transversais a  
Fluxos Axioma A

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 18 de dezembro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Enoch Humberto Apaza Calla

Maceió  
2009

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

N438i Néo, Alessandro da Silva.  
Incompressibilidade de toros transversais a fluxos axioma A / Alessandro da Silva Néo, 2009.  
vii, 36 f.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.  
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 33-34.  
Índices: f. 35-36.

1. Topologia. 2. Variedade irreduzível. 3. Campo de vetores axioma A.  
4. Toro (Geometria). I. Título.

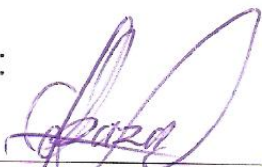
CDU: 515.1

ALEXSANDRO DA SILVA NÉO

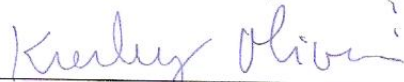
Incompressibilidade de Toros Transversais a  
Fluxos Axioma A

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 18 de dezembro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

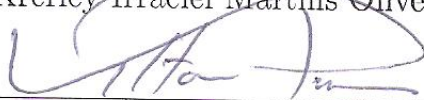
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Enoch Humberto Apaza Calla - UFAL



Prof. Dr. Krerley Irraciél Martins Oliveira - UFAL



Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro - UFBA

Aos meus pais,  
Gisélio e Maria Irene,  
e aos meus irmãos,  
Giseldo e Michelle.

# Agradecimentos

Agradeço ao professor Enoch Apaza por sua orientação, sua amizade e pela paciência durante todo esse tempo.

Agradeço ao professor Hilário Alencar pelas boas conversas, sua amizade, apoio acadêmico e motivação nos estudos.

Agradeço ao professor Valdenberg Araújo - UFS pela motivação para ser um pesquisador.

Agradeço aos professores Krerley Oliveira e a Vilton Pinheiro pelas sugestões dadas a esta dissertação.

Agradeço a Ana Maria Menezes de Jesus pelas várias sugestões dadas a este texto.

E finalmente agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL pelo suporte financeiro.

# Resumo

Provaremos que um toro transversal a um campo de vetores Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto sobre uma variedade tridimensional, fechada, irredutível é incompressível.

**Palavras-chave:** Variedade irredutível, campo de vetores Axioma A, toro incompressível.

# Abstract

We prove that a torus transverse to an Axiom A vector field that does not exhibit sinks, sources or null homotopic periodic orbits on a closed irreducible 3-manifold is incompressible.

**Keywords:** Irreducible Manifold, Axiom A vector field, incompressible tori.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Conjuntos Hiperbólicos . . . . .	2
1.2 Grupo de Homotopia . . . . .	8
1.3 Aspectos Topológicos . . . . .	13
1.4 Folheações . . . . .	15
<b>2 Resultado Principal</b>	<b>22</b>
2.1 Lemas . . . . .	22
2.2 Teorema Principal . . . . .	30
<b>3 Consequências e Comentários</b>	<b>31</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>33</b>

# Introdução

Esta dissertação foi baseada no artigo *Incompressibility of Tori Transverse to Axiom A Flows* do prof. Carlos Morales, publicado no Proceedings of the American Mathematical Society, volume 136, no ano de 2008.

Neste artigo é demonstrado que todo toro transversal a um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte ou órbita periódica homotópica a um ponto sobre uma variedade tridimensional fechada e irredutível é incompressível. Esse é o teorema principal da dissertação.

Uma das consequências desse resultado é que todo fluxo Anosov sobre uma variedade tridimensional fechada e atoroidal é transitivo. Esse teorema fornece uma generalização dos trabalhos feitos por Mosher (1992) [15], Brunella (1993) [4] e Fenley (1995) [6].

No Capítulo 1 destinamos a estabelecer a linguagem e os fatos básicos necessários à compreensão do texto.

No Capítulo 2 demonstramos os lemas e o teorema principal.

**Teorema Principal.** Sejam  $M$  uma variedade tridimensional fechada, irredutível e  $X_t$  um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em  $M$ . Então todo toro contido em  $M$  transversal ao fluxo  $X_t$  é incompressível.

E o Capítulo 3, dedicamos às consequências e mostramos que as condições do teorema principal são necessárias.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos, dentre eles: estrutura hiperbólica, fluxo Axioma A e variedade incompressível. Além disso, são mencionados alguns teoremas clássicos como o Teorema da Decomposição Espectral e o Teorema de Novikov. Exibiremos também algumas demonstrações e alguns exemplos. O objetivo deste capítulo é fixarmos conceitos, notações e resultados básicos para uma compreensão melhor do texto.

### 1.1 Conjuntos Hiperbólicos

Vamos denotar por  $M$  uma variedade Riemanniana tridimensional de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ ,  $X : M \rightarrow TM$  um campo de vetores sobre  $M$  de classe  $C^1$  e  $X_t : M \rightarrow M$  o fluxo gerado por  $X$  em  $M$  de classe  $C^1$ .

Seja  $A$  um subconjunto de  $M$ . Denotaremos por  $Int(A)$ ,  $\bar{A}$  e  $A^c$ , o interior, o fecho e o complementar de  $A$  em  $M$ , respectivamente.

**Definição 1.1.1.** A órbita de um ponto  $p \in M$  para um fluxo  $X_t$  é o conjunto  $O(p) = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$ .

**Definição 1.1.2.** A órbita positiva de um ponto  $p \in M$  para um fluxo  $X_t$  é o conjunto  $O^+(p) = \{X_t(p); t \geq 0\}$  e a órbita negativa de um ponto  $p \in M$  para um fluxo  $X_t$  é o conjunto  $O^-(p) = \{X_t(p); t \leq 0\}$ .

**Definição 1.1.3.** Um ponto  $p \in M$  é chamado ponto fixo para um fluxo  $X_t$  se  $X_t(p) = p$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Um ponto fixo também é chamado de ponto singular ou ponto de equilíbrio.

**Definição 1.1.4.** Um ponto  $p \in M$  é chamado ponto periódico para um fluxo  $X_t$  se existe  $T > 0$  tal que  $X_T(p) = p$  e  $X_t(p) \neq p$ , para todo  $0 < t < T$ .

A órbita de um ponto periódico é chamada de *órbita periódica*. Uma *órbita fechada* é uma órbita que é um conjunto fechado. Assim as órbitas fechadas em conjuntos compactos são as singularidades e as órbitas periódicas.

**Definição 1.1.5.** O conjunto  $\omega$ -limite de um ponto  $p \in M$  é definido por

$$\omega(p) = \left\{ y \in M; \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{t_n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) = y \right\},$$

ou seja,  $\omega(p)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de  $p$ . Analogamente, o conjunto  $\alpha$ -limite de um ponto  $p \in M$  é definido por

$$\alpha(p) = \left\{ y \in M; \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{t_n \rightarrow -\infty} X_{t_n}(p) = y \right\},$$

ou seja,  $\alpha(p)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de  $p$ .

O exemplo a seguir mostra um campo de vetores com singularidades e exhibe os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite.

**Exemplo 1.1.1.** Consideremos  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  a esfera unitária com centro na origem. Sejam  $p_N = (0, 0, 1)$  e  $p_S = (0, 0, -1)$ , o pólo norte e o pólo sul da esfera  $S^2$ , respectivamente. Definimos o campo de vetores  $X$  de classe  $C^\infty$  em  $S^2$  por

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

As singularidades de  $X$  são os pontos  $(x, y, z) \in S^2$  tais que

$$(-xz, -yz, x^2 + y^2) = (0, 0, 0).$$

Daí,

$$x = y = 0.$$

Como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

temos que as singularidades são  $p_N = (0, 0, 1)$  e  $p_S = (0, 0, -1)$ .

Uma parametrização da esfera  $S^2$  é dada por

$$Y(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, \sin \theta).$$

Para cada  $\varphi$  fixado temos uma parametrização de um meridiano. Notemos que o campo de vetores  $X$  é tangente aos meridianos de  $S^2$ . De fato, seja

$$\alpha(\theta) = (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, \sin \theta)$$

a parametrização de um meridiano da esfera. Assim,

$$\alpha'(\theta) = (-\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta\cos\varphi, \cos\theta)$$

e

$$\begin{aligned} X(\alpha(\theta)) &= \cos\theta(-\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta\cos\varphi, \cos\theta) \\ &= \cos\theta\alpha'(\theta). \end{aligned}$$

Mostramos assim que o campo de vetores  $X$  é tangente aos meridianos de  $S^2$ . Como o campo de vetores  $X$  é tangente aos meridianos da esfera apontando para cima,  $\omega(p) = p_N$  e  $\alpha(p) = p_S$ , se  $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$ .

**Definição 1.1.6.** *Um subconjunto compacto  $\Lambda \subset M$  é invariante para um fluxo  $X_t$  se  $X_t(\Lambda) = \Lambda$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 1.1.7.** *Um ponto  $p \in M$  é não-errante para um fluxo  $X_t$  se, para qualquer vizinhança  $V$  de  $p$  e qualquer número real  $T > 0$ , existe  $t$  tal que  $|t| > T$  e  $X_t(V) \cap V \neq \emptyset$ . Se um ponto  $p \in M$  não é não-errante, então ele é dito ser ponto errante.*

Denotaremos por  $\Omega(X_t)$  o conjunto dos pontos não-errantes para um fluxo  $X_t$ . O conjunto  $\Omega(X_t)$  é fechado, invariante e contém o conjunto dos pontos periódicos de  $X_t$ . A presença de um ponto não-errante de um fluxo implica a existência de uma certa complexidade nas trajetórias dos pontos vizinhos, pois algumas destas trajetórias, por mais que se afastem do ponto não-errante, depois de decorrido algum tempo devem retornar e voltar a ficar novamente próximas do ponto não-errante.

A próxima definição envolve a noção da decomposição  $E_\Lambda^1 \oplus E_\Lambda^2 \oplus E_\Lambda^3$  do espaço fibrado tangente de uma variedade  $M$  restrito a um subconjunto  $\Lambda \subset M$ . Vamos entender tal *decomposição* como sendo uma aplicação  $x \mapsto (E_x^1, E_x^2, E_x^3)$  que associa a cada ponto  $x \in \Lambda$  três subespaços do espaço tangente  $T_x M$ . Dizemos que a *decomposição é contínua* se dado qualquer ponto  $p \in \Lambda$  existe campos de vetores contínuos  $X_1, \dots, X_u, Y_1, \dots, Y_s, Z_1, \dots, Z_l$  sobre uma vizinhança  $U \subset \Lambda$  de  $p$ , linearmente independentes para todo ponto e tal que  $E_x^1$  é o subespaço gerado por  $X_1(x), \dots, X_u(x)$ ,  $E_x^2$  é o subespaço gerado por  $Y_1(x), \dots, Y_s(x)$  e  $E_x^3$  é o subespaço gerado por  $Z_1(x), \dots, Z_l(x)$ , para todo  $x \in U$ .

**Definição 1.1.8.** *Um subconjunto invariante  $\Lambda \subset M$  para um fluxo  $X_t$  é dito ser hiperbólico ou possuir estrutura hiperbólica se existe uma decomposição contínua do espaço fibrado tangente de  $M$  restrito a  $\Lambda$  tal que*

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^s$$

com

$$\begin{aligned} D(X_t)_p E_p^u &= E_{X_t(p)}^u, \\ D(X_t)_p E_p^s &= E_{X_t(p)}^s, \\ D(X_t)_p X(p) &= X(X_t(p)), \end{aligned}$$

e existem constantes  $\mu > 0$  e  $c \geq 1$  tais que para todo  $t \geq 0$

$$\|D(X_t)_p v\| \leq ce^{-\mu t} \|v\| \text{ para todo } v \in E_p^s \text{ e}$$

$$\|D(X_{-t})_p v\| \leq ce^{-\mu t} \|v\| \text{ para todo } v \in E_p^u.$$

**Observação 1.1.1.** Em conjuntos que não possuem singularidades temos que  $\dim(E_x^X) = 1$ , para todo  $x \in \Lambda$ .

Em outras palavras, um subconjunto invariante  $\Lambda \subset M$  para um fluxo  $X_t$  é hiperbólico se existe uma decomposição contínua do espaço fibrado tangente  $T_\Lambda M = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^s$  sobre  $\Lambda$  consistindo de um subfibrado contrátil  $E_\Lambda^s$ , um subfibrado expensor  $E_\Lambda^u$  e um subfibrado  $E_\Lambda^X$  gerado por  $X$ .

**Definição 1.1.9.** Um subconjunto  $\Lambda \subset M$  compacto, invariante é transitivo para um fluxo  $X_t$  se possui uma órbita que é densa em  $\Lambda$ .

**Definição 1.1.10.** Um fluxo  $X_t : M \rightarrow M$  é transitivo, se existe um ponto  $x \in M$  tal que sua órbita  $O(x)$  é densa em  $M$ .

**Definição 1.1.11.** Uma superfície  $S$  é transversal ao campo de vetores  $X$  em  $M$  se  $X(x) \notin T_x S$ , para todo  $x \in S$ .

**Definição 1.1.12.** Um atrator  $\Lambda \subset M$  de  $X_t$  é um conjunto transitivo tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$$

para alguma vizinhança compacta  $U$  de  $\Lambda$ . Essa vizinhança é denominada bacia de atração quando for uma variedade tridimensional compacta com bordo  $\partial U$  não-vazio transverso a  $X_t$ . Um repulsor é um atrator para o fluxo  $-X_t$ .

Um atrator com estrutura hiperbólica é chamado de *atrator hiperbólico*.

**Definição 1.1.13.** Um poço é um ponto fixo atrator ou uma órbita periódica atratora. Uma fonte é um ponto fixo repulsor ou uma órbita periódica repulsora.

**Exemplo 1.1.2.** Considerando o Exemplo 1.1.1 temos que o ponto  $p_N$  é um poço e o ponto  $p_S$  é uma fonte.

**Observação 1.1.2.** Notemos que  $\dim(E_\Lambda^u) = 0$  quando  $\Lambda$  é um poço.

**Definição 1.1.14.** Os conjuntos

$$W^{ss}(p) = \{q \in M; d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e

$$W^{uu}(p) = \{q \in M; d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente variedade estável e instável forte do ponto  $p$  para o campo de vetores  $X$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , a variedade estável local de tamanho  $\epsilon$  do ponto  $p \in M$  é o conjunto  $W_\epsilon^{ss}(p)$  dos pontos  $y \in M$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X_t(p), X_t(y)) = 0$$

e

$$d(X_t(p), X_t(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

De forma análoga se definem a variedade instável forte  $W^{uu}(p)$  e a variedade instável local  $W_\epsilon^{uu}(p)$  de um ponto  $p \in M$ .

**Teorema 1.1.1** (Teorema da Variedade Estável para Fluxos). *Seja  $\Lambda \subset M$  um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo  $X_t$ . Então existe um  $\epsilon > 0$  tal que para cada ponto  $p \in \Lambda$  existem dois discos mergulhados  $W_\epsilon^{ss}(p)$  e  $W_\epsilon^{uu}(p)$  os quais são tangentes a  $E_p^s$  e  $E_p^u$ , respectivamente.*

**Demonstração.** Ver [7], página 545 ou ver [10]. □

O Teorema da Variedade Estável para Fluxos assegura que se  $p$  pertence a um conjunto hiperbólico, então  $W^{ss}(p)$  e  $W^{uu}(p)$  são subvariedades imersas em  $M$  de classe  $C^1$  e, conseqüentemente, a variedade estável e instável

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(X_t(p))$$

também são subvariedades imersas em  $M$ .

Se  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico para um fluxo  $X_t$ , então  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  são variedades tangentes a  $E_p^s \oplus E_p^X$  e  $E_p^u \oplus E_p^X$ , respectivamente, e dependem continuamente de  $p$ . Para maiores detalhes ver [10].

**Observação 1.1.3.** Um fato importante sobre a variedade estável de cada ponto (respectivamente instável) é que são cópias imersas do espaço linear  $E_p^s$  ( $E_p^u$ ). Por meio disto, a aplicação  $\sigma^s : E_p^s \rightarrow M$  ( $\sigma^u : E_p^u \rightarrow M$ ) cuja imagem é igual a  $W^s(p)$  ( $W^u(p)$ ) é injetiva e não precisa ter inversa contínua. Este fato diz que a variedade estável (instável) são cópias imersas dos espaços lineares o que implica que não são círculos ou cilindros. Para maiores detalhes ver [20], página 272. Em particular,  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  não podem ser compactos.

**Definição 1.1.15.** Um fluxo  $X_t$  é Anosov se  $M$  é um conjunto hiperbólico para  $X_t$ .

Um fluxo Anosov em uma variedade  $M$  é *codimensão um* se a dimensão do espaço  $E^s$  ou a dimensão do espaço  $E^u$  é igual a um, onde  $TM = E^u \oplus E^s$ .

**Definição 1.1.16.** Um fluxo  $X_t$  é Axioma A se:

1.  $\Omega(X_t)$  é hiperbólico e
2.  $\Omega(X_t)$  é o fecho das órbitas fechadas de  $X_t$ .

**Exemplo 1.1.3.** Um fluxo Anosov é Axioma A.

**Exemplo 1.1.4.** Todo fluxo  $X_t : M \rightarrow M$  Axioma A transitivo é Anosov. De fato, como o fluxo  $X_t$  é transitivo, existe um ponto  $x \in M$  tal que sua órbita  $O(x)$  é densa em  $M$ . Então,

$$\overline{O(x)} = M \text{ e } O(x) \subset \Omega(X_t).$$

Assim,

$$M = \overline{O(x)} \subset \overline{\Omega(X_t)} = \Omega(X_t),$$

ou seja,

$$M \subset \Omega(X_t).$$

Como  $\Omega(X_t) \subset M$  segue-se

$$\Omega(X_t) = M.$$

Como o fluxo é Axioma A temos que  $\Omega(X_t) = M$  é hiperbólico. Logo, o fluxo  $X_t$  é Anosov.



**Teorema 1.1.2** (Teorema da Decomposição Espectral para Fluxos). *Se o fluxo  $X_t : M \rightarrow M$  é Axioma A, então o conjunto não-errante  $\Omega(X_t)$  se decompõe de maneira única e finita*

$$\Omega(X_t) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k,$$

*como uma união disjunta de conjuntos fechados, invariantes e  $X_t|_{\Omega_i}$  é transitivo. Estes  $\Omega_i$ 's são chamados de conjuntos básicos de  $\Omega(X_t)$ .*

**Demonstração.** Ver [20]. □

**Definição 1.1.17.** *Uma curva diferenciável  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  é chamada de  $\epsilon$ -órbita para um fluxo  $X_t : M \rightarrow M$  se  $\| \dot{c}(t) - X(c(t)) \| < \epsilon$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se a curva  $c$  é periódica então é chamada de  $\epsilon$ -órbita fechada. Uma curva diferenciável  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  é chamada de  $\delta$ -sombreada por uma órbita de  $x \in M$  se existe uma função  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $|\frac{d}{dt}s - 1| < \delta$  tal que  $d(c(s(t)), X_t(x)) < \delta$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 1.1.3** (Teorema do Sombreamento para fluxos). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $X_t : M \rightarrow M$  e  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $X_t$ . Então existe uma vizinhança  $U(\Lambda) \supset \Lambda$  de  $\Lambda$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe um  $\epsilon > 0$  tal que toda  $\epsilon$ -órbita é  $\delta$ -sombreada por uma órbita de  $X_t$ .*

## 1.2 Grupo de Homotopia

O objetivo desta seção é definir o primeiro grupo de homotopia, conhecido como grupo fundamental, e o segundo grupo de homotopia. Para maiores detalhes indicamos o livro [11].

Sejam  $M, N$  variedades,  $f, g : M \rightarrow N$  duas aplicações contínuas e  $I = [0, 1]$ .

**Definição 1.2.1.** *Dizemos que  $f$  e  $g$  são homotópicas se existe uma aplicação contínua*

$$F : M \times I \rightarrow N$$

*tal que*

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x),$$

*para todo  $x \in M$ . A aplicação  $F$  é chamada de homotopia entre  $f$  e  $g$ . Escreve-se, neste caso,  $F : f \simeq g$ , ou simplesmente  $f \simeq g$ .*

A homotopia é pensada como sendo um processo de deformação contínuo da aplicação  $f$  na aplicação  $g$ . O parâmetro  $t$  pode ser imaginado como sendo o tempo do processo de deformação.

**Proposição 1.2.1.** *A relação de homotopia,  $f \simeq g$ , é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de  $M$  em  $N$ .*

**Demonstração.** Para toda aplicação  $f : M \rightarrow N$  contínua, a aplicação

$$F : M \times I \rightarrow N$$

dada por  $F(x, t) = f(x)$ , para todo  $x \in M$ , é uma homotopia entre  $f$  e  $f$ . Assim  $\simeq$  é uma relação reflexiva. Seja agora

$$F : M \times I \rightarrow N$$

uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Temos

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x).$$

Definindo

$$K : M \times I \rightarrow N$$

por  $K(x, t) = F(x, 1 - t)$ , para todo  $x \in M$ , obtemos uma homotopia entre  $g$  e  $f$ . Assim a relação de homotopia é simétrica. Sejam  $F : f \simeq g$  e  $K : g \simeq f$ . Temos

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x),$$

$$K(x, 0) = g(x) \text{ e } K(x, 1) = f(x).$$

Definimos

$$L : M \times I \rightarrow N$$

por

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A aplicação  $L$  é uma homotopia entre  $f$  e  $h$ . Logo a relação de homotopia é transitiva.  $\square$

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são denominadas *classes de homotopia*. Uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  chama-se uma *equivalência homotópica* quando existe  $g : N \rightarrow M$  contínua tal que  $g \circ f \simeq id_M$  e  $f \circ g \simeq id_N$ . Diz-se então que  $g$  é um *inverso homotópico* de  $f$  e que as variedades  $M$  e  $N$  têm o mesmo *tipo de homotopia*. Escreve-se, neste caso,  $f : M \equiv N$  ou  $M \equiv N$ .

**Definição 1.2.2.** *Dizemos que  $\alpha, \beta : I \rightarrow M$  são homotópicas com extremos fixos se existe uma homotopia*

$$F : I \times I \rightarrow M$$

tal que dados  $s, t \in I$  valem

$$F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s),$$

$$F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0) \text{ e } F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1).$$

Usamos a notação  $[\alpha]$  para designar a classe de homotopia da curva  $\alpha$ .

**Definição 1.2.3.** O primeiro grupo de homotopia de uma variedade  $M$ , com ponto base  $x_0$ , que se representa por  $\pi_1(M, x_0)$ , é o grupo constituído pelo conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas  $\alpha : I \rightarrow M$  tais que  $\alpha(\partial(I)) = \{x_0\}$ , munido com a operação justaposição (descrita abaixo).

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  caminhos em  $M$  tais que o fim de  $\alpha$  coincide com o início de  $\beta$ , isto é,  $\alpha(1) = \beta(0)$ . Definimos a justaposição  $\alpha * \beta : I \rightarrow M$  por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

O caminho inverso de  $\alpha$  é, por definição, o caminho  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ . Este produto induz naturalmente uma estrutura de grupo em  $\pi_1(M, x_0)$  com a multiplicação  $([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha * \beta]$ . Isto decorre da seguinte proposição.

**Proposição 1.2.2.** Sejam  $[\alpha], [\beta]$  e  $[\gamma] \in \pi_1(M, x_0)$ . Valem as seguintes propriedades:

1. Se  $\alpha' \simeq \alpha$  rel  $x_0$  e  $\beta' \simeq \beta$  rel  $x_0$  então  $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$  rel  $x_0$ ;
2. Se  $\alpha' \simeq \alpha$  então  $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1}$ ;
3.  $\alpha * \alpha^{-1} \simeq C_{x_0}$ , onde  $C_{x_0}$  denota a curva constante  $C_{x_0}(t) = x_0$ ;
4.  $C_{x_0} * \alpha \simeq \alpha * C_{x_0} \simeq \alpha$ ;
5.  $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$ .

As propriedades 1) e 2) nos dizem que o produto e o inverso estão bem definidos em  $\pi_1(M, x_0)$ . As propriedades 3), 4) e 5) nos dizem que  $\pi_1(M, x_0)$  possui estrutura de grupo com identidade  $[C_{x_0}]$ . A identidade será denotada por 1. Quando  $M$  é conexo por caminhos e  $\pi_1(M, x_0) = 1$  dizemos que  $M$  é simplesmente conexo. A proposição abaixo mostra que o grupo fundamental independe do ponto base escolhido. Portanto, podemos representar o grupo fundamental por  $\pi_1(M)$ , sem nenhuma referência explícita ao ponto básico.

**Observação 1.2.1.** Recordemos o seguinte fato. Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  satisfazem  $g \circ f = id_X$  então  $f$  é injetiva e  $g$  é sobrejetiva. Se  $f \circ g = id_Y$  então  $g$  é injetiva e  $f$  é sobrejetiva.

**Proposição 1.2.3.** *Seja  $M$  conexo por caminhos. Dados  $x_0, x_1 \in M$  e  $\eta : I \rightarrow M$  tal que  $\eta(0) = x_0$  e  $\eta(1) = x_1$ , então existe um isomorfismo entre  $\pi_1(M, x_0)$  e  $\pi_1(M, x_1)$ .*

**Demonstração.** Seja  $\eta : I \rightarrow M$  um caminho tal que  $\eta(0) = x_0$  e  $\eta(1) = x_1$ . Se  $\alpha$  é uma curva fechada de  $x_0$  então  $\eta^{-1} * \alpha * \eta$  é uma curva fechada de  $x_1$ . Dado um elemento  $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$ , a aplicação acima induz um único elemento  $[\alpha'] = [\eta^{-1} * \alpha * \eta] \in \pi_1(M, x_1)$ . Denotaremos esta aplicação por

$$P_\eta : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_1)$$

tal que  $[\alpha'] = P_\eta([\alpha])$ .

$P_\eta$  é um isomorfismo. Com efeito, dados  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, x_0)$  temos

$$\begin{aligned} P_\eta([\alpha] * [\beta]) &= [\eta^{-1} * [\alpha] * [\beta] * \eta] \\ &= [\eta^{-1} * [\alpha] * \eta] * [\eta^{-1} * [\beta] * \eta] \\ &= P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]). \end{aligned}$$

Assim,  $P_\eta$  é um homomorfismo. Para mostrar que  $P_\eta$  é bijetivo, vamos introduzir a inversa de  $P_\eta$ . Seja

$$P_\eta^{-1} : \pi_1(M, x_1) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$$

tal que

$$P_\eta^{-1}([\alpha']) = [\eta * \alpha' * \eta^{-1}].$$

$P_\eta^{-1}$  é a inversa de  $P_\eta$ . De fato,

$$\begin{aligned} P_\eta^{-1}P_\eta([\alpha]) &= P_\eta^{-1}([\eta^{-1} * \alpha * \eta]) \\ &= [\eta * \eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1}] \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

Assim

$$P_\eta^{-1}P_\eta = id_{\pi_1(M, x_0)}$$

e por simetria

$$P_\eta P_\eta^{-1} = id_{\pi_1(M, x_1)}.$$

Utilizando a Observação 1.2.1 obtemos que  $P_\eta$  é injetiva e sobrejetiva. Logo  $P_\eta$  é um isomorfismo.  $\square$

**Proposição 1.2.4.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades conexas por caminhos. Então  $\pi_1(M \times N) = \pi_1(M) \times \pi_1(N)$ .*

Os resultados acima podem ser generalizados e suas demonstrações seguem a mesma linha de raciocínio. Para maiores detalhes ver [16], Capítulo 4.

**Definição 1.2.4.** O  $n$ -ésimo grupo de homotopia de uma variedade  $M$ , com ponto base  $x_0$ , que se representa por  $\pi_n(M, x_0)$ , é o grupo constituído pelo conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas  $\alpha : I^n \rightarrow M$  tais que  $\alpha(\partial(I^n)) = \{x_0\}$ , munido com a operação justaposição, onde  $I^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ .

Usaremos neste texto o primeiro e o segundo grupo de homotopia.

**Proposição 1.2.5.** Seja  $M$  conexo por caminhos. Dados  $x_0, x_1 \in M$  e  $\eta : I \rightarrow M$  tal que  $\eta(0) = x_0$  e  $\eta(1) = x_1$ , então existe um isomorfismo entre  $\pi_n(M, x_0)$  e  $\pi_n(M, x_1)$ .

**Proposição 1.2.6.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades conexas por caminhos. Então  $\pi_n(M \times N) = \pi_n(M) \times \pi_n(N)$ .

**Exemplo 1.2.1.** Alguns exemplos do segundo grupo de homotopia. Ver [16], página 120.

$$\pi_2(S^1) = 1, \quad \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}, \quad \pi_2(S^2 \times S^1) = \pi_2(S^2) \times \pi_2(S^1) = \mathbb{Z}.$$

**Definição 1.2.5.** Uma variedade  $M$  é contrátil quando ela tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto (uma aplicação constante).

**Proposição 1.2.7.**  $M$  é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade  $id : M \rightarrow M$  é homotópica a uma aplicação constante  $p : M \rightarrow M$ .

**Proposição 1.2.8.** Se  $M$  ou  $N$  é contrátil então toda aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  é homotópica a uma constante.

**Demonstração.** Seja  $M$  contrátil. Utilizando a Proposição 1.2.7 existe uma homotopia

$$H : M \times I \rightarrow M$$

entre  $id_M$  e uma aplicação constante  $g$ , digamos  $g : M \rightarrow M$  com  $g(x) = p$ , para todo  $x \in M$ . Temos

$$H(x, 0) = id_M(x) = x \text{ e } H(x, 1) = g(x) = p,$$

para todo  $x \in M$ . Dada qualquer aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$ , tomemos

$$F : M \times I \rightarrow N$$

definida por

$$F(x, t) = (f \circ H)(x, t) = f(H(x, t)).$$

Assim,

$$F(x, 0) = f(H(x, 0)) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = f(H(x, 1)) = f(p).$$

Logo  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e a constante  $f(p)$ .

Se  $N$  for contrátil, então existe a homotopia

$$K : N \times I \rightarrow N$$

entre  $id_N$  e uma constante. Definindo

$$L : M \times I \rightarrow N$$

por

$$L(x, t) = K(f(x), t),$$

teremos que  $L$  é uma homotopia entre  $f : M \rightarrow N$  e uma aplicação constante.  $\square$

**Observação 1.2.2.** Conseguimos com a proposição anterior que toda órbita periódica em uma bola é homotópica a uma constante, já que uma bola é contrátil.

## 1.3 Aspectos Topológicos

Em toda esta dissertação chamaremos de bola uma variedade homeomorfa à bola unitária de dimensão 3 do  $\mathbb{R}^3$ , esfera uma variedade homeomorfa à esfera unitária do  $\mathbb{R}^3$  e um toro sólido uma variedade tridimensional compacta homeomorfa à  $D^2 \times S^1$ .

**Definição 1.3.1.** *Uma variedade é fechada se for compacta, conexa e sem bordo.*

**Exemplo 1.3.1.** O toro é um exemplo de uma variedade fechada.

**Definição 1.3.2.** *Uma superfície  $S$  separa  $M$  se  $M \setminus S$  é desconexa.*

**Definição 1.3.3.** *Uma variedade  $M$  é irredutível se toda esfera  $S^2 \subset M$  é bordo de uma bola  $B^3 \subset M$ . Se  $M$  não é irredutível dizemos que  $M$  é redutível.*

**Exemplo 1.3.2.** O toro sólido  $D^2 \times S^1$  e a variedade  $S^3$  são irredutíveis. Detalhes em [1], página 45.

**Definição 1.3.4.** *Uma variedade  $F \subset M$  compacta é 2-sided se existe um mergulho  $h : F \times [-1, 1] \rightarrow M$  com  $h(x, 0) = x$ , para todo  $x \in F$  e  $h(F \times [-1, 1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [-1, 1])$ .*

Uma superfície  $S \subset M$  2-sided separa a variedade  $M$ . Ver [9].

**Definição 1.3.5.** *Uma superfície  $S \subset M$  2-sided sem componentes  $S^2$  ou  $D^2$  é dita ser incompressível se para todo disco  $D \subset M$  com  $D \cap S = \partial D$  existe outro disco  $D' \subset S$  com  $\partial D' = \partial D$ . O disco  $D$  com  $D \cap S = \partial D$  é chamado disco de compressão para  $S$ . Se  $S$  não é incompressível dizemos que é compressível.*

**Proposição 1.3.1.** *Uma variedade 2-sided  $S \subset M$  é incompressível se o homomorfismo  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  induzido pela inclusão for injetivo.*

**Demonstração.** Ver [8], página 10. □

**Exemplo 1.3.3.** Todo toro  $T = S^1 \times S^1$  em  $S^3$  é compressível. De fato, o homomorfismo  $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(S^3)$  induzido pela inclusão não é injetivo, pois  $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  é infinito enquanto que  $\pi_1(S^3) = 1$  é finito. Logo, usando a proposição anterior segue que  $T$  é compressível em  $S^3$ .

**Proposição 1.3.2.** *Se um toro é compressível em uma variedade irredutível  $M$  então o toro é bordo de um toro sólido em  $M$  ou o toro está contido em uma bola contida em  $M$ .*

**Demonstração.** Ver [8], página 11. □

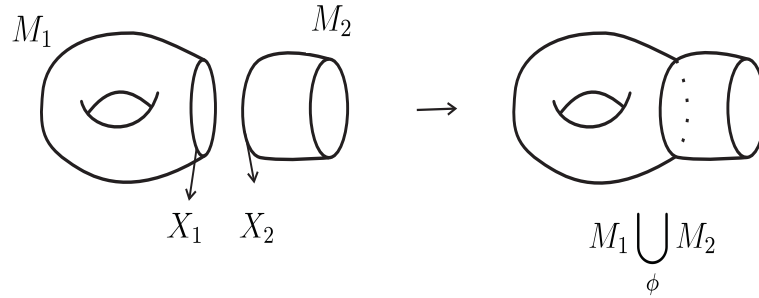
**Definição 1.3.6.** *Uma variedade tridimensional, fechada  $M$  é atoroidal se  $M$  não contém toro incompressível. Dizemos que  $M$  é toroidal quando  $M$  não é atoroidal.*

**Exemplo 1.3.4.** O toro sólido  $D^2 \times S^1$  é uma variedade atoroidal.

**Definição 1.3.7.** *Sejam  $M_1, M_2$  variedades com bordo,  $X_1 \subset \partial M_1, X_2 \subset \partial M_2$  abertos e fechados e  $\phi : X_1 \xrightarrow{\cong} X_2$  um difeomorfismo. Então escrevemos*

$$M_1 \bigcup_{\phi} M_2 = M/\tau,$$

onde  $M = M_1 \cup M_2$  (união disjunta) e  $\tau : X_1 \cup X_2 \rightarrow X_1 \cup X_2$  (união disjunta) é dado por  $\tau|_{X_1} = \phi, \tau|_{X_2} = \phi^{-1}$ .



Em particular, se  $M$  e  $N$  são variedades com bordos e  $\partial M = \partial N$  então  $M \cup_{id} N$ ,  $id : \partial M \rightarrow \partial N$ , é uma variedade sem bordo.

**Exemplo 1.3.5.** Podemos colar dois toros sólidos  $D^2 \times S^1$  pelo bordo e obtermos uma variedade  $D^2 \times S^1 \cup_{id} D^2 \times S^1$ ,  $id : \partial(D^2 \times S^1) \rightarrow \partial(D^2 \times S^1)$ , difeomorfo a  $S^2 \times S^1$ . Detalhes em [8], página 31.

## 1.4 Folheações

A ideia intuitiva de folheação corresponde a decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

**Definição 1.4.1.** *Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ . Uma folheação de classe  $C^r$  de dimensão  $n$  de  $M$  é um atlas máximo  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  em  $M$  com as seguintes propriedades:*

1. Se  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  então

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são discos abertos de  $\mathbb{R}^n$  e de  $\mathbb{R}^{m-n}$ , respectivamente.

2. Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{F}$  são tais que

$$U \cap V \neq \emptyset$$

então a mudança de coordenadas

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é da forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$



Neste caso dizemos que  $M$  é folheada por  $\mathcal{F}$  ou ainda que  $\mathcal{F}$  é uma folheação de codimensão  $q = m - n$  de  $M$ .

**Definição 1.4.2.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação de classe  $C^r$  de dimensão  $n$ ,  $0 < n < m$ , de  $M^m$  e  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $\mathcal{F}$  tal que*

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

*Os conjuntos da forma  $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ ,  $c \in U_2$  são chamados placas de  $U$ , ou placas de  $\mathcal{F}$ .*

Fixando  $c \in U_2$ , a aplicação  $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$  é uma subvariedade conexa de dimensão  $n$  e de classe  $C^r$  de  $M$ . Portanto, se  $\alpha$  e  $\beta$  são placas de  $U$  então  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  ou  $\alpha = \beta$ .

**Definição 1.4.3.** *Um caminho de placas de  $\mathcal{F}$  é uma sequência  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de placas tal que  $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ , para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .*

Dado que a variedade  $M$  é coberta por placas de  $\mathcal{F}$ , podemos definir em  $M$  uma relação de equivalência: " $pRq$  se existe um caminho de placas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  com  $p \in \alpha_1$ ,  $q \in \alpha_k$ ." A classe de equivalência da relação  $R$  são chamadas folhas de  $\mathcal{F}$ . Por definição segue-se que as folhas de  $\mathcal{F}$  são subconjuntos de  $M$  conexos por caminhos.

**Definição 1.4.4.** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação de uma variedade  $M$ , então um subconjunto  $S \subset M$  é dito ser  $\mathcal{F}$ -saturado ou simplesmente saturado se é uma união de folhas de  $\mathcal{F}$ .*

**Observação 1.4.1.** Seja  $E^u \oplus E^X \oplus E^s$  a decomposição do fibrado tangente da Definição 1.1.8. Sabe-se que os subfibrados  $E^u \oplus E^X$ ,  $E^s \oplus E^X$ ,  $E^u$ ,  $E^s$  são unicamente integráveis e que as variedades integráveis são de classe  $C^r$ . As variedades integráveis determinam folheações de  $M$  as quais são denotadas por  $\mathcal{F}^u$ ,  $\mathcal{F}^s$ ,  $\mathcal{F}^{uu}$ ,  $\mathcal{F}^{ss}$ , respectivamente. Se  $x \in M$  então as respectivas folhas dessas folheações contendo  $x$  são  $W^u(x)$ ,  $W^s(x)$ ,  $W^{uu}(x)$ ,  $W^{ss}(x)$ , respectivamente, ver [19].

Recordemos a definição de submersão e o Teorema da Forma Local das Submersões.

**Definição 1.4.5.** *Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  é uma submersão se  $(df)_p$  é sobrejetiva para cada ponto  $p \in M^m$ , isto é, o posto da matriz jacobiana  $(Jf)_p$  é igual a  $n$  para todo ponto  $p \in M^m$ .*

**Teorema 1.4.1** (Forma Local das Submersões). *Sejam  $f : M^m \rightarrow N^n$  de classe  $C^r$ ,  $r \leq 1$  e  $(df)_p : T_pM \rightarrow T_qN$ ,  $q = f(p)$ , sobrejetiva. Então existem cartas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $p \in U$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $q \in V$  e uma decomposição  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  tal que  $f(U) \subset V$  e  $f$  é expressa em cartas  $(U, \varphi), (V, \psi)$  com  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x$ . Em outras palavras,  $f$  é localmente equivalente a projeção  $(x, y) \mapsto x$ .*

**Proposição 1.4.1.** *Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma submersão de classe  $C^r$ . Então as curvas de nível  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in N$ , são folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de codimensão  $n$  e classe  $C^r$  de  $M$ .*

**Demonstração.** Utilizando o Teorema da Forma Local das Submersões temos que dados  $x \in M$  e  $q = f(x) \in N$ , existem cartas locais  $(U, \varphi)$  em  $M$ ,  $(V, \psi)$  em  $N$  tais que  $x \in U$ ,  $q \in V$ ,

1.  $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m}$
2.  $\psi(V) = U_2 \subset \mathbb{R}^{n-m}$
3.  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) = \pi_2$

As cartas dadas pelo Teorema da Forma Local das Submersões de  $M$  definem uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$ . Com efeito, o Item 1 da Definição 1.4.1, definição de folheação, é satisfeito como podemos ver acima. Para mostrarmos o Item 2 da Definição 1.4.1 basta mostrar que a composição do Item 2 independe de  $x$ . Sejam  $(U, \varphi)$  e  $(\bar{U}, \bar{\varphi})$  cartas de  $M$  fornecidas pelo Teorema da Forma Local das Submersões. Mostraremos, agora, que  $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$  independe de  $x \in U_1$ .

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} &= \bar{\psi} \circ f \circ (\bar{\varphi})^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2. \end{aligned}$$

Então

$$\pi_2 \circ (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = (\bar{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \pi_2$$

não depende de  $x \in U_1$ . Isto prova que  $\mathcal{F}$  é uma folheação de classe  $C^r$  e codimensão  $m - n$  de  $M$ . Por definição as placas de  $\mathcal{F}$  estão contidas nas curvas de nível de  $f$ . Isto prova que as folhas de  $\mathcal{F}$  são precisamente os conjuntos de nível de  $f$  e segue o resultado.  $\square$

**Exemplo 1.4.1.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação definida por

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z,$$

onde

$$r^2 = x^2 + y^2$$

e

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação  $C^\infty$  tal que

$$\alpha(0) = 1, \alpha(1) = 0 \text{ e } \alpha'(t) < 0,$$

para todo  $t > 0$ .

*Afirmção:*  $f$  é uma submersão.

Suponhamos, por absurdo, que  $f$  não seja uma submersão. Então existe um ponto  $(x, y, z)$  tal que

$$\nabla f(x, y, z) = 0,$$

ou seja,

$$(2\alpha'(r^2)xe^z, 2\alpha'(r^2)ye^z, \alpha(r^2)e^z) = (0, 0, 0).$$

Daí,

$$x = y = 0 \text{ e } \alpha(r^2) = 0$$

e, portanto,

$$x = y = 0 \text{ com } x^2 + y^2 = 1,$$

contradição. Logo  $f$  é uma submersão e como visto no Teorema 1.4.1 as curvas de nível são folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de codimensão um e de classe  $C^\infty$  de  $M$ .

As folhas desta folheação são descritas por

$$f(x, y, z) = c,$$

ou seja,

$$\alpha(r^2)e^z = c.$$

Se  $c = 0$  então  $\alpha(r^2) = 0$  e, portanto,  $x^2 + y^2 = 1$ . Aqui as curvas de nível correspondem ao cilindro de raio 1.

Se  $c > 0$  então  $\alpha(r^2)e^z = c > 0$ . Assim  $\alpha(r^2) > 0$ . Mais precisamente,

$$z = \ln(c) - \ln(\alpha(r^2)).$$

Quando  $c = 1$  temos

$$z = -\ln(\alpha(r^2)).$$

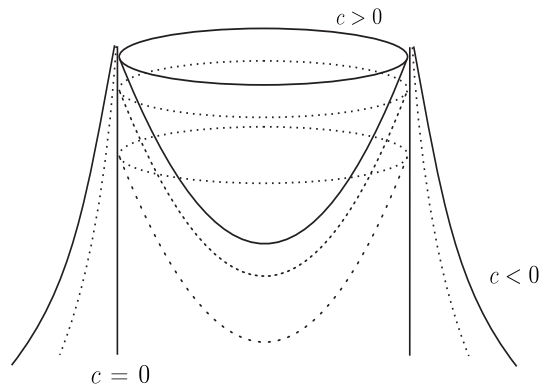
O gráfico da curva acima no plano  $y = 0$  é dado por

$$z = -\ln(\alpha(x^2)).$$

Daí,

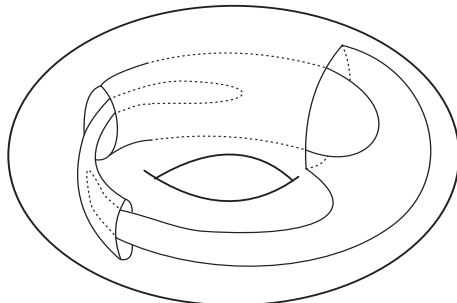
$$z' = -\frac{2\alpha(x^2)}{\alpha(x^2)} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então  $x = 0$  é o único ponto crítico de  $z$ . Temos  $z \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow 1^+$  ou  $1^-$ . O gráfico de  $z$  é uma parábola. O gráfico das folhas de  $\mathcal{F}$  está representado logo abaixo.

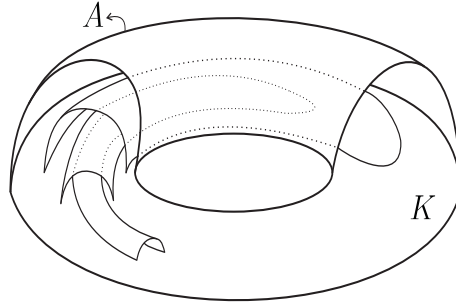


Consideremos a folheação  $\mathcal{F}$  construída no exemplo acima restrita ao cilindro sólido  $\{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1\}$ . As folhas desta folheação são invariantes pela translação  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 1)$ . Notemos que a variedade quociente cilindro sólido/ $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 1)$  é um toro sólido  $D^2 \times S^1$ . Assim a folheação  $\mathcal{F}$  induz uma folheação no toro sólido, como na figura abaixo. Esta folheação é chamada de *folheação de Reeb no toro sólido*. Notemos que  $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$  é uma folha compacta na folheação de Reeb.

Uma componente de Reeb de uma folheação  $\mathcal{F}$  é um toro sólido cujo interior é união de superfícies disjuntas que são planos topológicos espiralando assintoticamente ao bordo. Como descrito acima.



**Definição 1.4.6.** Uma semicomponente de Reeb de uma folheação  $\mathcal{F}$  sobre uma variedade tridimensional  $N$  com bordo é um subconjunto saturado  $H \subset N$ , cujo bordo é formado por uma folha  $A \in \mathcal{F}$ ,  $A \simeq S^1 \times [0, 1]$ , e um anel  $K \subset \partial N$  com  $\partial K = \partial A$ , tal que a variedade dupla  $H \cup_{id_A} H \subset N \cup_{id_{\partial N}} N$  é uma componente de Reeb da folheação dupla  $2\mathcal{F}$ .



**Proposição 1.4.2.** Uma variedade  $M$  fechada possui uma folheação  $\mathcal{F}$  de codimensão um se, e somente se,  $\chi(M) = 0$ , ou seja, a característica de Euler de  $M$  é zero.

**Demonstração.** Ver [22], página 250. □

**Proposição 1.4.3.** Se  $F$  é uma folha não compacta de uma folheação de codimensão um de uma variedade compacta, então para todo  $p \in F$  existe uma curva fechada transversal a  $F$ , passando por  $p$ .

**Demonstração.** Ver [17], página 271. □

**Teorema 1.4.2** (Novikov). Se existe uma curva fechada homotópica a um ponto, transversal às folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de uma variedade tridimensional, então  $\mathcal{F}$  tem uma folha compacta.

**Demonstração.** Ver [5], capítulo VII ou ver [17]. □

**Teorema 1.4.3** (Novikov). Seja  $M$  uma variedade tridimensional, orientável, fechada com uma folheação  $\mathcal{F}$  sem componentes de Reeb, então ou  $\mathcal{F}$  é a folheação produto sobre  $M = S^2 \times S^1$  ou  $\pi_2(M) = 0$ .

**Demonstração.** Ver [17]. □

**Definição 1.4.7.** Uma aplicação  $p : M^* \rightarrow M$  chama-se uma aplicação de recobrimento (ou, simplesmente, um recobrimento) quando cada ponto  $x \in M$  pertence a um aberto  $V \subset M$  tal que  $p^{-1}(V) = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$  é uma união de abertos  $U_{\alpha}$  de  $M^*$ , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por  $p$  homeomorficamente sobre  $V$ . O espaço  $M^*$  chama-se espaço de recobrimento de  $M$ .

**Definição 1.4.8.** *Um recobrimento  $p : M^* \rightarrow M$  com  $M^*$  simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos chama-se um recobrimento universal.*

**Proposição 1.4.4.** *Seja  $M$  uma variedade e  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento. Então  $M$  é irredutível.*

**Demonstração.** Ver [21], página 131. □

**Observação 1.4.2.** Seja  $\pi : M^* \rightarrow M$  o espaço de recobrimento universal de  $M$ . As folheações estáveis  $\mathcal{F}^s$  e instáveis  $\mathcal{F}^u$  do fluxo Anosov induz folheações  $\mathcal{F}_*^s$  e  $\mathcal{F}_*^u$  em  $M^*$ . As folhas de  $\mathcal{F}_*^s$  e  $\mathcal{F}_*^u$  são topologicamente planas (ver [18]) e então  $M^*$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  (ver [17]). Como podemos ver a hipótese do teorema acima é satisfeita e, portanto,  $M$  é irredutível. Concluímos que toda variedade tridimensional que admite fluxo Anosov é irredutível.

# Capítulo 2

## Resultado Principal

### 2.1 Lemas

**Lema 2.1.1.** *Sejam  $ST^1, ST^2 \subset ST$ , onde  $ST^1, ST^2$  e  $ST$  são toros sólidos. Se  $\partial(ST^1) \subset \text{Int}(ST^2)$  então  $ST^1 \subset \text{Int}(ST^2)$ .*

**Demonstração.** Como

$$\partial(ST^1) \subset \text{Int}(ST^2)$$

e

$$\text{Int}(ST^2) \cap \partial(ST^2) = \emptyset$$

então,

$$\partial(ST^1) \cap \partial(ST^2) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Suponhamos, por absurdo, que  $ST^1 \not\subset \text{Int}(ST^2)$ .

*Afirmção 1.*  $ST^1 \cap \partial(ST^2) \neq \emptyset$ .

Seja  $x \in \partial(ST^1) \subset \text{Int}(ST^2)$ . Tomemos  $y \in ST^1$  tal que  $y \notin \text{Int}(ST^2)$ . A existência de  $y$  é garantida pois estamos supondo  $ST^1 \not\subset \text{Int}(ST^2)$ . Se o ponto  $y$  pertence ao bordo de  $ST^2$  então  $ST^1 \cap \partial(ST^2) \neq \emptyset$ . Caso contrário,  $y \in ST \setminus ST^2$ . Como  $ST^1$  é conexo por caminhos, existe um caminho em  $ST^1$  que liga  $x$  a  $y$ , e este caminho passa por  $\partial(ST^2)$  pois  $x \in \text{Int}(ST^2)$  e  $y \in ST \setminus ST^2$  ( $\partial(ST^2)$  separa  $ST$  em duas componentes conexas). Logo existe um ponto  $z$  no caminho em  $ST^1$  tal que  $z \in \partial(ST^2)$  e, portanto,  $ST^1 \cap \partial(ST^2) \neq \emptyset$ .

*Afirmção 2.*  $\partial(ST^2) \subset \text{Int}(ST^1)$ .

Notemos que o conjunto  $ST^1 \cap \partial(ST^2)$  é aberto e fechado em  $\partial(ST^2)$ . Com efeito, utilizando (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} ST^1 \cap \partial(ST^2) &= (Int(ST^1) \cup \partial(ST^1)) \cap \partial(ST^2) \\ &= (Int(ST^1) \cap \partial(ST^2)) \cup (\partial(ST^1) \cap \partial(ST^2)) \\ &= Int(ST^1) \cap \partial(ST^2). \end{aligned}$$

Daí,  $ST^1 \cap \partial(ST^2)$  é aberto em  $\partial(ST^2)$ . Sendo  $ST^1$  e  $\partial(ST^2)$  fechados em  $ST$  segue-se que o conjunto  $ST^1 \cap \partial(ST^2)$  é fechado em  $ST$  e, portanto,  $ST^1 \cap \partial(ST^2) \subset \partial(ST^2)$  é fechado em  $\partial(ST^2)$ .

Como  $ST^1 \cap \partial(ST^2)$  é aberto e fechado no conjunto conexo  $\partial(ST^2)$  temos

$$ST^1 \cap \partial(ST^2) = \partial(ST^2).$$

Assim,

$$\partial(ST^2) \subset ST^1 = Int(ST^1) \cup \partial(ST^1)$$

e utilizando novamente (2.1) vem

$$\partial(ST^2) \subset Int(ST^1).$$

Provamos assim a afirmação 2.

Como os bordos de  $ST^1$  e  $ST^2$  estão contidos um no interior do outro,  $\partial(ST^2) \subset Int(ST^1)$  (afirmação 2) e  $\partial(ST^1) \subset Int(ST^2)$  (hipótese), concluimos então que

$$\begin{aligned} ST^1 \cup ST^2 &= Int(ST^1) \cup \partial(ST^1) \cup Int(ST^2) \cup \partial(ST^2) \\ &= Int(ST^1) \cup Int(ST^2). \end{aligned}$$

Logo  $ST^1 \cup ST^2$  é um conjunto fechado e ao mesmo tempo aberto e sem bordo em  $ST$ . Visto que  $ST$  é conexo, podemos concluir  $ST^1 \cup ST^2 = ST$ . Isto nos leva a uma contradição dado que  $ST$  tem bordo e  $ST^1 \cup ST^2$  não. Provamos assim o lema.  $\square$

**Lema 2.1.2.** *Sejam  $ST$  um toro sólido e  $U \subset ST$  uma variedade tridimensional compacta, conexa e cujo bordo  $\partial U = T_1 \cup \dots \cup T_n$  é a união disjunta de toros. Se cada toro  $T_i$  é bordo de um toro sólido  $ST_i$  em  $ST$  então existe  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $ST_i \cap U = T_i$ , para todo  $i \neq i_0$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$  e*

$$U \cup \left( \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0} ST_i \right) \subset ST_{i_0}.$$

*Em particular, se  $n = 1$ , então  $U$  é um toro sólido.*



**Demonstração.** Notemos que por hipótese cada toro  $T_i$  separa o toro sólido  $ST$  em duas componentes, onde uma delas é o toro sólido  $ST_i$ .

Mostraremos que  $U$  está contido em  $ST_i$ , para algum  $i$ . Suponhamos, por absurdo, que  $U \not\subset ST_i$ , para todo  $i$ . Fazendo a união de  $U$  com todos os toros sólidos  $ST_i$

$$\bigcup_i (U \cup_{id} ST_i)$$

obtemos um conjunto fechado, aberto e sem bordo em  $ST$ .

Dado que  $ST$  é conexo e o conjunto acima descrito é fechado e aberto em  $ST$  temos que o conjunto descrito é o toro sólido  $ST$ , o que é uma contradição, pois  $ST$  possui bordo. Portanto existe  $i_0$  em  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$U \subset ST_{i_0}. \quad (2.2)$$

Daí,

$$T_i \subset \partial U \subset U \subset ST_{i_0},$$

ou seja,

$$T_i \subset ST_{i_0},$$

para todo  $i \neq i_0$ . Como  $T_i \cap T_j = \emptyset$  para todo  $i, j$  temos

$$T_i \subset \text{Int}(ST_{i_0}),$$

para todo  $i \neq i_0$  e aplicando o Lema 2.1.1 temos

$$ST_i \subset \text{Int}(ST_{i_0}),$$

para todo  $i \neq i_0$ . Daí,

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0} ST_i \subset \text{Int}(ST_{i_0}) \subset ST_{i_0}. \quad (2.3)$$

Por (2.2) e (2.3) obtemos um dos resultados desejados,

$$U \cup \left( \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0} ST_i \right) \subset ST_{i_0}.$$

Mostraremos, agora, que  $ST_i \cap U = T_i$ , para todo  $i \neq i_0$  em  $\{1, \dots, n\}$ . Fixamos  $i \neq i_0$  em  $\{1, \dots, n\}$  de modo arbitrário. O bordo de  $ST_i$  separa  $ST$  em duas componentes,  $ST_i$  e  $ST \setminus ST_i$ . Observemos que

$$\text{Int}(U) \subset ST_i$$

ou

$$\text{Int}(U) \subset ST \setminus ST_i,$$

pois caso contrário teríamos

$$\text{Int}(U) \cap T_i \neq \emptyset$$

o que é absurdo, pois

$$T_i \subset \partial U$$

e

$$\text{Int}(U) \cap \partial U = \emptyset.$$

Se  $\text{Int}(U) \subset ST_i$  então  $\partial U \subset ST_i$  e, portanto,

$$T_{i_0} \subset \partial U \subset ST_i \subset \text{Int}(ST_{i_0})$$

o que é uma contradição, pois  $T_{i_0} \not\subset \text{Int}(ST_{i_0})$ .

Logo  $\text{Int}(U) \subset ST \setminus ST_i$ , ou seja,  $\text{Int}(U) \cap ST_i = \emptyset$ . Assim

$$ST_i \cap U = T_i,$$

para todo  $i \neq i_0$ , dado que  $T_i \subset ST_i$  e  $T_i \subset \partial U$ .

Para o caso particular  $n = 1$ , temos  $\partial U = T_1$ , onde  $T_1$  é bordo de um toro sólido  $ST_1$  em  $ST$ . Pela primeira parte da prova temos  $U \subset ST_1$ . O conjunto  $U$  é o toro sólido  $ST_1$ . De fato, como  $U \subset ST_1$  e  $\partial U = \partial(ST_1)$  obtemos  $\text{Int}(U) \subset \text{Int}(ST_1)$ . Mostraremos, agora, que  $\text{Int}(ST_1) \subset \text{Int}(U)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $\text{Int}(ST_1) \not\subset \text{Int}(U)$ . Então o conjunto  $A = \text{Int}(ST_1) - \text{Int}(U)$  é não-vazio. Notemos que  $A$  é aberto em  $ST^1$  pois  $A^c$  é fechado em  $ST^1$ . De fato,

$$\begin{aligned} A &= \text{Int}(ST^1) - \text{Int}(U) \\ &= \text{Int}(ST^1) \cap [\text{Int}(U)]^c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^c &= \text{Int}(ST^1)^c \cup [\text{Int}(U)]^{cc} \\ &= \partial(ST^1) \cup \text{Int}(U) \\ &= \partial U \cup \text{Int}(U) \\ &= U. \end{aligned}$$

Como  $U$  é fechado em  $ST^1$  segue-se que  $A^c$  é fechado em  $ST^1$  e, portanto,  $A$  é aberto em  $ST^1$ . Dessa forma,  $A$  e  $\text{Int}(U)$  são abertos em  $ST^1$  tais que

$$\begin{aligned} A \cap \text{Int}(U) &= \text{Int}(ST^1) \cap [\text{Int}(U)]^c \cap \text{Int}(U) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A \cup \text{Int}(U) &= (\text{Int}(ST_1) - \text{Int}(U)) \cup \text{Int}(U) \\ &= \text{Int}(ST_1). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto  $\text{Int}(ST_1)$  é desconexo, contradição, pois  $\text{Int}(ST^1)$  é conexo. Visto que  $\partial(ST^1) = \partial U$  e  $\text{Int}(U) = \text{Int}(ST_1)$  temos que  $U$  é o toro sólido  $ST^1$ . Finalizando assim a demonstração do lema.  $\square$

O próximo lema garante que um atrator hiperbólico contendo um toro sólido como bacia de atração é um poço.

**Lema 2.1.3.** *Seja  $X$  um campo de classe  $C^1$  numa vizinhança de um toro sólido  $ST$  apontando para dentro e transversal ao bordo de  $ST$ . Se*

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(ST)$$

*é atrator hiperbólico, então  $\Lambda$  é um poço.*

**Demonstração.** Seja  $E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^s$  a decomposição do fibrado tangente de  $M$  restrito a  $\Lambda$ . Lembremos que, para que  $\Lambda$  seja um poço é suficiente provar que a dimensão do subfibrado expansor  $E_\Lambda^u$  é igual a zero.

Suponhamos, por absurdo, que  $E_x^u \neq 0$ , para algum  $x \in \Lambda$ . Dado que  $\Lambda$  é conexo então  $E_x^u \neq 0$ , para todo  $x \in \Lambda$ . Com efeito, seja

$$A = \{x \in \Lambda; E_x^u \neq 0\}.$$

Temos que  $A$  é aberto em  $\Lambda$ . Mostraremos que  $A$  é fechado em  $\Lambda$ .

$$\begin{aligned} A^c &= \{x \in \Lambda; E_x^u = 0\} \\ &= \{x \in \Lambda; E_x^s \neq 0\}. \end{aligned}$$

Assim  $A^c$  é aberto em  $\Lambda$  e, portanto,  $A$  é fechado em  $\Lambda$ . Como  $A$  é aberto e fechado no conexo  $\Lambda$ , segue-se que  $E_x^u \neq 0$ , para todo  $x \in \Lambda$ . E como  $\Lambda$  é atrator também temos que  $E_x^s \neq 0$ , para todo  $x \in \Lambda$ .

Em particular, não existe uma singularidade no atrator  $\Lambda$ , pois se existisse uma singularidade  $p$ , teríamos  $E_p^u = 0$ , o que é uma contradição pois  $E_x^u \neq 0$ , para todo  $x \in \Lambda$ .

Como visto na Observação 1.1.1 temos que

$$\dim(E_\Lambda^X) = 1.$$

Como

$$1 \leq \dim(E_\Lambda^s) \leq 2,$$

$$1 \leq \dim(E_\Lambda^u) \leq 2$$

e

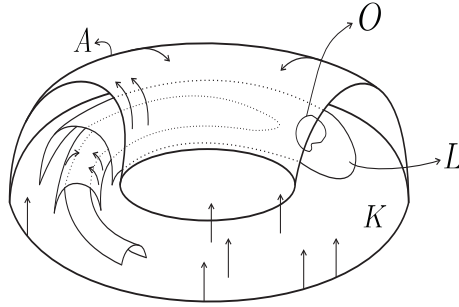
$$\dim(E_\Lambda^u) + \dim(E_\Lambda^s) + \dim(E_\Lambda^X) = \dim(T_\Lambda M) = 3$$

segue-se que  $\dim(E_\Lambda^s) = \dim(E_\Lambda^u) = 1$ .

Assim as variedades estáveis  $\{W^s(x); x \in \Lambda\}$  induzem uma folheação  $\mathcal{F}$  de codimensão um em  $ST$  transversal a  $\partial(ST)$ . Ver Observação 1.4.1.

$\mathcal{F}$  não contém componente de Reeb. De fato, uma vez que  $\mathcal{F}$  é induzido por variedades estáveis temos pela Observação 1.1.3 que  $\mathcal{F}$  não contém folhas compactas em  $Int(ST)$  e como toda componente de Reeb exibe uma folha compacta temos consequentemente que  $\mathcal{F}$  não contém componente de Reeb.

$\mathcal{F}$  não contém semicomponente de Reeb. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que existe uma semicomponente de Reeb  $H$  em  $\mathcal{F}$ . Então  $H \subset ST$  é, por definição, um subconjunto saturado, cujo bordo é formado por uma folha em forma de anel  $A$  e existe outro anel  $K \subset \partial(ST)$  com  $\partial K = \partial A$ . Tomemos  $x \in Int(H)$ . Por  $\mathcal{F}$  ser transversal a  $\partial(ST)$  obtemos que a órbita positiva de  $x$  não intersecta  $A$ . Como  $X$  aponta para dentro de  $ST$ , veja a figura abaixo, temos que  $\omega(x) \subset Int(H)$ . Como  $\Lambda$  é um atrator hiperbólico com  $ST$  como bacia de atração de  $X$  e  $x \in ST$  temos  $\omega(x) \subset \Lambda$ . Dado  $\omega(x) \subset \Lambda$  podemos encontrar uma órbita periódica  $O \subset Int(H)$  de  $X$  por  $\omega(x)$  aplicando o Lema do Sombreamento.



Temos que  $O$  está contido numa folha  $L$  de  $\mathcal{F}$  e como  $O \subset Int(H)$  e  $A \subset \partial H$  segue  $L \neq A$ . A última propriedade implica que  $L$  é um semiplano, e então,  $L$  é simplesmente conexo. Consequentemente, a órbita periódica  $O$  é o bordo de um disco em  $L$ . Aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson podemos encontrar uma singularidade em  $H$ , o que é absurdo, pois  $\Lambda$  não possui singularidades.

Tomemos agora a folheação dupla  $2\mathcal{F}$  definida sobre a variedade dupla  $M = 2ST$ . Como  $ST$  é um toro sólido  $D^2 \times S^1$  então  $M$  é difeomorfo a

$S^2 \times S^1$ , ver Exemplo 1.3.5, página 20. Consequentemente,

$$\pi_2(M) = \pi_2(S^2 \times S^1) = \pi_2(S^2) \times \pi_2(S^1) = \mathbb{Z} \neq 0.$$

Uma vez que  $\mathcal{F}$  não tem componente e nem semicomponente de Reeb temos que  $2\mathcal{F}$  não tem componente de Reeb. Então, aplicando o Teorema 1.4.3 segue-se que  $2\mathcal{F}$  é a folheação produto  $S^2 \times *$  de  $M = S^2 \times S^1$ . Assim,  $\mathcal{F}$  é uma folheação produto  $D \times *$  pelos discos meridianos sobre  $ST$  e então as folhas de  $\mathcal{F}$  são discos invariantes. Mas aplicando novamente o Teorema de Poincaré-Bendixson em um dos discos, podemos encontrar uma singularidade de  $X$  em  $\text{Int}(ST)$ , o que é absurdo, pois  $\Lambda$  não possui singularidades. Portanto,  $E_x^u = 0$ , para todo  $x \in \Lambda$  o que nos diz que  $\Lambda$  é um poço.  $\square$

**Lema 2.1.4.** *Seja  $M$  uma variedade tridimensional e orientável. Sejam  $X$  um campo de vetores em  $M$ ,  $\Lambda$  um atrator hiperbólico e  $U$  bacia de atração de  $\Lambda$  com  $X$  transversal ao bordo de  $U$  apontando para dentro. Então o bordo de  $U$  é uma união de toros.*

**Demonstração.** Como  $\Lambda$  é hiperbólico, a sua estrutura hiperbólica pode ser estendida a  $U$ . Portanto, a variedade estável dos pontos de  $U$  determina uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão dois em  $U$  transversal a  $\partial U$ . Assim, a folheação  $\mathcal{F}$  induz uma outra folheação  $\mathcal{F}^*$  de dimensão um no bordo de  $U$ . Aplicando a Proposição 1.4.2 em  $\partial U$ , temos que cada componente conexa de  $\partial U$  tem característica de Euler zero e, portanto, é um toro ou uma garrafa de Klein. Como  $M$  é orientável, as componentes conexas de  $\partial U$  são união de toros.  $\square$

**Lema 2.1.5.** *Seja  $M$  uma variedade tridimensional fechada e seja  $X_t$  um fluxo Axioma A. Se existe um toro sólido em  $M$  tal que seu bordo é transversal ao fluxo  $X_t$ , então o fluxo  $X_t$  exibe poço, fonte ou órbita periódica homotópica a um ponto.*

**Demonstração.** Seja  $ST$  o toro sólido nas condições do lema. Podemos assumir que  $X$  aponta para dentro de  $ST$ , pois caso contrário podemos substituir  $X$  por  $-X$  dentro do mesmo argumento. Uma consequência do Teorema da Decomposição Espectral é que existe um atrator hiperbólico  $\Lambda$  de  $X$  em  $ST$ . Suponhamos que  $\Lambda$  não é um poço, pois caso contrário não há nada a provar. Como o fluxo  $X_t$  não é transitivo ( $X$  aponta para dentro de  $ST$  transversal a  $\partial(ST)$ ) segue-se que o atrator  $\Lambda$  é próprio. Seja  $U \subset ST$  bacia de atração de  $\Lambda$ . O bordo de  $U$  é uma união disjunta de toros, ou seja,  $\partial U = \cup_{i=1}^n T_i$ .

Suponhamos, adicionalmente, que  $X_t$  não exibe órbita periódica homotópica a um ponto. Afirmamos que os toros do bordo de  $U$  são bordos de toros

sólidos em  $ST$ . Suponhamos, por absurdo, que existe um toro em  $\partial U$  o qual não é bordo de um toro sólido em  $ST$ . Como  $ST$  é irredutível e atoroidal podemos aplicar a Proposição 1.3.2 e, portanto, tal toro está contido em uma bola pertencente a  $ST$ . Então tal toro divide  $ST$  em duas componentes conexas, uma das quais está contida na bola. Portanto, podemos encontrar uma órbita periódica dentro da bola, ou seja, uma órbita periódica homotópica a um ponto, contradição, pois estamos supondo que  $X_t$  não exibe órbita periódica homotópica a um ponto. Assim provamos que os toros do bordo de  $U$  são bordos de toros sólidos em  $ST$ .

Aplicando o Lema 2.1.2 em  $U$  e observando que  $ST$  é o  $ST_{i_0}$  do lema, podemos assumir que  $\partial(ST)$  é uma das componentes do bordo de  $U$ . Se  $\partial(ST)$  for a única componente de  $\partial U$  então  $U$  será um toro sólido através do Lema 2.1.2 (caso particular,  $n = 1$ ). Aplicando o Lema 2.1.3 teremos que  $\Lambda$  é um poço, contradição, já que estamos supondo que  $\Lambda$  não é poço. Portanto, existe uma outra componente no bordo de  $U$ , digamos  $T^1$ . Seja  $ST^0 = ST$  e  $ST^1$  o toro sólido de bordo  $T^1$  em  $ST^0$  (ver Lema 2.1.2).

Notemos que  $X$  aponta para fora de  $ST^1$  transversal a  $T^1$  e como consequência do Teorema da Decomposição Espectral temos que  $ST^1$  contém um repulsor  $R_1$  em  $ST^1$ . Podemos assumir que  $R_1$  não é fonte, senão acabou a prova.

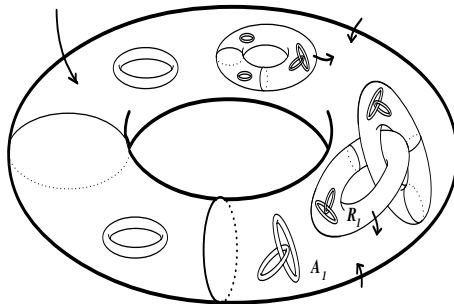
Repetindo o argumento acima temos uma sequência encaixante de toros sólidos

$$ST^0 \supset ST^1 \supset ST^2 \supset \dots \supset ST^k \supset \dots$$

podemos reescrever a sequência

$$ST^{A_0} \supset ST^{R_0} \supset ST^{A_1} \supset \dots \supset ST^{R_i} \supset \dots$$

com  $ST^{A_i} \supset A_i$  e  $ST^{R_i} \supset R_i$ , onde  $A_i$  são atratores e  $R_i$  são repulsores.



Como o número de conjuntos básicos de  $\Lambda$  é finito a sequência acima é finita. Logo existe um toro sólido  $ST^k$  que é bacia de atração (ou repulsão) de um atrator (ou repulsor) hiperbólico de  $X$ . Por conseguinte,  $X_t$  exibe um poço ou uma fonte pelo Lema 2.1.3. Isto conclui a prova.  $\square$

## 2.2 Teorema Principal

Agora podemos provar o Teorema Principal.

**Teorema 2.2.1** (Teorema Principal). *Sejam  $M$  uma variedade tridimensional fechada, irredutível e  $X_t$  um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em  $M$ . Então todo toro contido em  $M$  transversal ao fluxo  $X_t$  é incompressível.*

**Demonstração.** Seja  $T \subset M$  um toro transversal ao fluxo  $X_t$  Axioma A, onde  $M$  é uma variedade tridimensional fechada, irredutível e  $X_t$  não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em  $M$ .

Suponhamos, por absurdo, que o toro  $T$  seja compressível. Como  $M$  é irredutível e  $T$  compressível segue-se pela Proposição 1.3.2 que  $T$  é bordo de um toro sólido em  $M$  ou  $T$  está contido numa bola em  $M$ .

Se  $T$  é bordo de um toro sólido em  $M$ , aplicando o Lema 2.1.5, o fluxo  $X_t$  exibirá um poço, uma fonte ou uma órbita periódica homotópica a um ponto, o que contradiz a hipótese.

Se  $T$  está contido em uma bola, então existe uma órbita periódica na bola e, portanto, essa órbita é homotópica a um ponto. Assim,  $X_t$  exibirá uma órbita periódica homotópica a um ponto, ver Observação 1.2.2, o que contradiz a hipótese.

Em ambos os casos, chegamos a uma contradição e, portanto,  $T$  é incompressível, como queríamos.  $\square$

# Capítulo 3

## Consequências e Comentários

**Corolário 3.0.1.** *Seja  $X_t$  um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em  $M$ , onde  $M$  é tridimensional, fechada, orientável e irredutível. Se  $M$  é atoroidal então  $X_t$  é um fluxo Anosov transitivo.*

**Demonstração.** Suponhamos, por absurdo, que o fluxo  $X_t$  não seja transitivo. Utilizando o Teorema da Decomposição Espectral obtemos que um dos conjuntos básicos de  $\Omega(X_t)$  é atrator. Como o fluxo é não transitivo o atrator é próprio. Para esse atrator existe uma bacia de atração  $U$  tal que  $\partial U$  é transversal ao fluxo  $X_t$ . Logo usando o Lema 2.1.4 temos que  $\partial U$  é formado por uma união de toros transversais a  $X_t$ , os quais são incompressíveis por conta do Teorema Principal, Teorema 2.2.1, o que é um absurdo, dado que a variedade  $M$  é atoroidal. Portanto o fluxo  $X_t$  é transitivo.

Como todo campo de vetores Axioma A transitivo é Anosov (ver Exemplo 1.1.4) temos que  $X_t$  é um fluxo Anosov transitivo.  $\square$

**Corolário 3.0.2.** *Seja  $M$  uma variedade tridimensional, fechada, orientável e atoroidal. Se o fluxo  $X_t$  é Anosov então o fluxo  $X_t$  é transitivo.*

**Demonstração.** Se mostrarmos que todo fluxo Anosov sobre uma variedade tridimensional, fechada e atoroidal satisfaz as hipóteses do Corolário 3.0.1 então obteremos o resultado desejado. Vejamos que o fluxo  $X_t$  realmente satisfaz as hipóteses:

É de conhecimento geral que todo fluxo Anosov é Axioma A, que fluxo Anosov não tem poço e nem fonte. E como visto na Observação 1.4.2,  $M$  é irredutível. Nós resta, demonstrarmos que o fluxo  $X_t$  não exibe órbita periódica homotópica a um ponto. De fato, pois para uma órbita periódica hiperbólica  $\alpha$  as folhas estáveis são acumuladas à folha correspondente a  $\alpha$ . Usando a Proposição 1.4.3, podemos encontrar uma curva  $\beta$  homotópica a  $\alpha$ ,



transversal as folhas da folheação estável. Se  $\alpha$  for homotópica a um ponto,  $\beta$  também será. Logo, pela Proposição 1.4.2 existe uma folha compacta, o que é uma contradição, já que as folhas da folheação são geradas pelas variedades estáveis e elas não podem ser compactas, ver Observação 1.1.3. Portanto, o fluxo  $X_t$  não exibe órbita periódica homotópica a um ponto.

Logo as hipóteses são satisfeitas e o resultado desejado segue do corolário anterior.  $\square$

Podemos retirar a hipótese “ $X_t$  não exibe órbita periódica homotópica a um ponto” do teorema principal, Teorema 2.2.1, e mostrar que a conclusão é falsa. Em [2], página 3, podemos encontrar um toro em  $S^3$  transversal a um fluxo Axioma A sem poço nem fonte.

Logo,  $S^3$  é uma variedade tridimensional, fechada, irredutível e existe um fluxo Axioma A sem poço nem fonte, contendo um toro transversal ao fluxo (todo toro em  $S^3$  é compressível).

# Referências Bibliográficas

- [1] Apaza, E., *Sobre Atratores e Consequências Topológicas*. Tese de Doutorado (2006), UFRJ.
- [2] Apaza, E., Soares, R., *Axiom A Flows Without Sinks nor Sources on  $n$ -Manifolds*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 21 (2008), no. 2, 393-401.
- [3] Bowen, R., *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Second edition. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
- [4] Brunella, M., *Separating the basic sets of a nontransitive Anosov flow*, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), no. 5, 487-490.
- [5] Camacho, C., Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações*. Primeira Edição. Publicação IMPA, 1979.
- [6] Fenley, S. R., *Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of flows lines*, J. Differential Geom. 41 (1995), no. 2, 479-514.
- [7] Katok, A., Hasselblat, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [8] Hatcher, A., *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Disponível na homepage Hatcher: [www.math.cornell.edu](http://www.math.cornell.edu).
- [9] Hempel, J., *3-manifolds*, Annals of Math. Studies No. 86, Princeton University Press, Princeton, 1976.
- [10] Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M., *Invariant Manifolds*. Lec. Not. in Math. 583, Spring-Verlag, 1977.
- [11] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Segunda Edição. Publicação IMPA, 1999.

- [12] Morales, C., *Incompressibility of Tori Transverse to Axiom A Flows*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 4349-4354.
- [13] Morales, C., *Poincaré-Hopf Index and Partial Hyperbolicity*, Ann. Fac. Sic. Toulouse Math. XVII (2008), no. 1, 193-206.
- [14] Morales, C., Scárdua, B., *Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds*. Publicação IMPA. Colóquio Brasileiro de Matemática 24, 2003.
- [15] Mosher, L., *Dynamical systems and the homology norm of a 3-manifolds. I. Efficient intersection of surfaces and flows*, Duke Math. J. 65 (1992), no. 3, 449-500.
- [16] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*. First edition. Graduate Student Series in Physics. 1990.
- [17] Novikov, S. P., *Topology of Foliations*. Trans. Moscow Math. Soc 14 (1963) 268-305.
- [18] Palmeira, C., *Open Manifolds Foliated by Planes*. Annals of Math., 107 (1970), 109-131.
- [19] Plante, J., *Anosov Flows*. Am. Journal of Mathematics, 94 (1972), 327-361.
- [20] Robinson, C., *Dynamical System. Stability, Symbolic Dynamics, and chaos*. Second edition. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [21] Rosenberg, H., *Foliations by Planes*. Topology, vol 7 (1968), 131-138.
- [22] Thurston, W., *Existence of Codimension One Foliations*, The Annals of Math., 104 (1976), no. 2, 249-268.

# Índice Remissivo

- $\delta$ -sombreada, 8
- $\epsilon$ -órbita, 8
- Aplicação
  - submersão, 16
- Atrator, 5
  - hiperbólico, 5
- Caminho de placas, 16
- Conjunto
  - $\alpha$ -limite, 3
  - $\omega$ -limite, 3
  - hiperbólico, 4
  - invariante, 4
  - saturado, 16
  - transitivo, 5
- Fluxo
  - Anosov, 7
  - Axioma A, 7
  - transitivo, 5
- Folheação, 15
  - codimensão, 16
  - de Reeb, 19
- Fonte, 5
- Grupo de Homotopia
  - primeiro, 10
  - segundo, 12
- Homotópia, 8
- Órbita, 2
  - fechada, 3
  - negativa, 2
  - periódica, 3
  - positiva, 2
- Operação justaposição, 10
- Placas, 16
- Poço, 5
- Ponto
  - errante, 4
  - fixo, 2
  - não-errante, 4
  - periódico, 2
- Recobrimento, 20
  - universal, 21
- Repulsor, 5
- Semicomponente de Reeb, 20
- Separa, 13
- Superfície
  - incompressível, 14
  - transversal, 5
- Teorema
  - da Decomposição Espectral, 8
  - da Variedade Estável, 6
  - de Novikov, 20
  - do Sombreamento, 8
  - Local das Submersões, 17
  - Principal, 30
- Variedade
  - 2-sided, 14
  - atoroidal, 14
  - contrátil, 12
  - estável forte, 6

estável local, 6  
fechada, 13  
instável forte, 6  
instável local, 6  
irreduzível, 13