UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO COM UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

DIEGO ALVES ADAUTO

ÍNDICE DE MORSE E O PRIMEIRO NÚMERO DE BETTI DE SUBVARIEDADE MINIMAS

Maceió - AL
2021

DIEGO ALVES ADAUTO

ÍNDICE DE MORSE E O PRIMEIRO NÚMERO DE BETTI DE SUBVARIEDADES MINIMAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió - AL

10 de Fevereiro de 2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A221i Adauto, Diego Alves.
Índice de Morse e o primeiro número de Betti de subvariedades mínimas / Diego Alves Adauto. – 2021.
78 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2021.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia.

Bibliografia: f. 76-78.

1. Subvariedades mínimas. 2. Morse, Teoria de. 3. Betti, Primeiro número de. I. Título.

CDU: 514.764.27

ÍNDICE DE MORSE E O PRIMEIRO NÚMERO DE BETTI DE SUBVARIEDADES MINIMAS

DIEGO ALVES ADAUTO

Tese de doutorado na área de concentração Matemática com ênfase em Análise Geométrica apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas no dia 10 de Fevereiro de 2021, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de doutor em Matemática.

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Orientador - UFAL

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Lucas Coelho Ambrozio - IMPA

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante - UFAL

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes - UFMA

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório - UFAL

AGRADECIMENTOS

Primeiro à Deus, por toda generosidade, por todas às vezes que me capacitou, por ter estado comigo em todos os momentos. Agradeço também por todas as pessoas que o Senhor pôs em meu caminho e que me ajudaram nessa trajetória.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais, por tudo que já fizeram por mim e por todo apoio ao longo desses anos de formação acadêmica.

Aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas por todo conhecimento transmitido ao longo desses anos, em especial, aos professores Márcio Batista, Marcos Petrúcio, Feliciano Vitório e demais professores do grupo de Análise Geométrica. Todos em algum momento me deram apoio e votos de confiança que muito me motivaram e contribuíram para minha formação.

Ao professor Márcio Batista devo inúmeros outros agradecimentos. O mais significativo para mim vem do voto de confiança depositado por ele em mim ao me orientar desde a graduação. Fato esse que me levou à crescimentos pessoais e acadêmicos. Tenho muito respeito e admiração pelo senhor, além de ser muito grato. Obrigado!

Aos meus amigos de curso pela amizade, pelas contribuições e inúmeros cafezinhos. Em especial, agradeço aos meus amigos Micael Dantas, Anderson Lima, Iury Domingos, Emanuel e Moreno Bonuti pela amizade, por tantas conversas sobre a matemática, pelo apoio e resenhas.

A todos, meu sincero sentimento de gratidão, o qual está longe de ser fielmente representado pelas palavras acima.

RESUMO

Nesta tese de doutorado estamos interessados em obter condições para que subvariedades mínimas fechadas ou compactas fronteira livre possam ter seu índice de Morse estimado por uma quantidade topológica, mais especificamente por seu primeiro número de Betti. Seguimos as abordagens de Savo [21] e Ambrozio, Carlotto e Sharp [2] para o caso fechado e Sargent [20] e Ambrozio, Carlotto e Sharp [3] para o caso de fronteira livre.
Palavras-chave: Subvariedades mínimas; Índice de Morse; Primeiro número de Betti.

ABSTRACT

In this manuscript we are interested in obtaining sufficent conditions for closed minimal or compact minimal free boundary submanifolds to have their Morse index estimated by topological quantities, more precisely, by the first Betti number. We use here the approach developed by Savo [21] and Ambrozio, Carlotto and Sharp [2] for the closed case and Sargent [20] and Ambrozio, Carlotto and Sharp [3] for the compact case.
Keywords: Minimal submanifolds; Morse Index; first Betti number.

Sumário

INTRODUÇÃO **8**

1 Noções Básicas **13**

1.1 Fibrados Tensoriais 14

1.1.1 Fibrados Vetoriais 14

1.1.2 Tensores 15

1.1.3 Contrações Tensoriais 15

1.1.4 Fibrados Tensoriais 16

1.1.5 Métricas de Fibrados 17

1.1.6 Derivada Covariante de Campos Tensoriais 17

1.1.7 Segunda Derivada Covariante de Campos Tensoriais 18

1.1.8 Teoria Espectral de Operadores Diferenciais Fortemente Elípticos em um Fibrado 19

1.2 Operador de Hodge-Laplace e Formas Harmônicas 22

1.3 Problemas de Bordo para o Operador de Hodge-Laplace 23

1.4 Tensores de Curvatura 25

1.5 Geometria das Subvariedades 26

1.6 Estabilidade de Subvariedades Mínimas 28

1.7 Estabilidade de Subvariedade Mínimas com fronteira Livre 29

1.8 Seções Teste 31

2 Subvariedades Mínimas da Esfera **31**

2.3 Conceitos e Resultados Preliminares 32

2.4 Resultados Principais 39

3 Subvariedades Mínimas de Ambientes Mergulhando no Euclidiano **44**

3.1 Resultados Principais 45

3.2 Aplicações 54

3.2.1 Esferas Euclidianas 54

3.2.2 Espaços Projetivos Reais 55

3.2.3 Espaços Projetivos Quaterniônicos 57

3.2.4 Plano de Cayley 59

3.2.5 Hipersuperfícies Pinçadas do Espaço Euclidiano 61

3.2.6 Produto do Círculo e Esferas Euclidianas 63

4 Subvariedades Mínimas Com Fronteira Livre de Regiões Convexas **67**

4.1 Resultados Prévios 68

4.2 Resultados Principais 72

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA **75**

INTRODUÇÃO

O estudo de subvariedades mínimas e suas características é considerado um tema clássico na Geometria Diferencial. Em particular, questões envolvendo o índice de Morse. De modo intuitivo, se Σ é uma subvariedade mínima fechada de uma variedade Riemanniana M, seu Índice de Morse, Indice(Σ), indica o quanto Σ deixa de ser um mínimo local do seu funcional área.

Existem muitos trabalhos que destacam a relação existente entre o Índice e características geométricas e topológicas das subvariedades mínimas. Em seu famoso trabalho [23], Simons estima o Índice de subvariedades mínimas Σ^n da esfera unitária $\mathbb{S}^{n+p+1}$ por meio da desigualdade Indice(Σ) $\geq p + 1$. No mesmo trabalho, Simons ainda caracteriza as subvariedades totalmente geodésicas da esfera como as únicas subvariedades que satisfazem a igualdade. Trabalhos posteriores caracterizam subvariedades mínimas de um dado Índice, enquanto outros estimam o Índice de subvariedades mínimas de espaços ambientes suficientemente simétricos. Como exemplos temos os trabalhos de Lawson e Simons [16] que caracterizam as subvariedades complexas como as únicas mínimas estáveis (Índice nulo) do espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^m$. Ohnita [19] completa a classificação das mínimas estáveis dos espaços simétricos compactos de posto um. Mais tarde, do Carmo, Ritoré e Ros [11] classificam as hipersuperfícies mínimas com dois lados Σ^n e Indice(Σ) $= 1$ no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+1}$.

Recentemente, temos trabalhos como Torralbo e Urbano [25], no qual é feita uma classificação de subvariedades mínimas estáveis em produtos de esferas unitárias com variedades Rimannianas arbitrárias. Perdomo [17] classifica as hipersuperfícies de Clifford como as únicas hipersuperfícies mínimas Σ^n de $\mathbb{S}^{n+1}$ com simetria antipodal e com Indice(Σ) $= n+3$ e Savo [21] obtém um teorema que promove a comparação entre os espectros do operador de estabilidade e o operador de Hodge-Laplace em 1-formas de hipersuperfícies mínimas de $\mathbb{S}^{n+1}$, o qual implica uma estimativa do Índice por uma função afim do primeiro número de Betti. Ambrozio, Carlotto e Sharp [2] generalizam a estimativa do Índice por meio de uma função do primeiro número de Betti obtido por Savo para o caso de hipersuperfícies de variedades Riemannianas mergulhadas em espaços Euclidianos quando verificada uma certa condição sobre o mergulho considerado. Trabalhos como os de Savo [22] e Ambrozio, Carlotto e Sharp [2] dão suporte à conjectura devida a Schoen, Marques e Neves:

Conjectura: *Seja M^{n+1} uma variedade Riemannina fechada com curvatura de Ricci positiva. Então existe uma constate positiva C tal que para qualquer hipersuperfície mínima mergulhada Σ^n de M temos*

$$\text{Indice}(\Sigma) \geq Cb_1(\Sigma)$$

onde $b_1(\Sigma)$ é o primeiro número de Betti de Σ.

Há um pensamento heurístico presente na Geometria Diferencial de que muitos resultados da teoria das subvariedades mínimas de variedades Riemannianas fechadas possuem análogos na teoria de subvariedades mínimas com fronteira livre de variedades Riemannianas compactas. Uma variedade com bordo não-vazio Σ, imersa em uma variedade Riemanniana compacta M, é dita ser mínima com fronteira livre se é um ponto crítico do funcional área de variações que deixam o seu bordo $\partial\Sigma$ contido no bordo ∂M de M. O Indice(Σ) de uma subvariedade mínima com fronteira livre Σ é definido de modo similar ao de mínimas fechadas.

Assim como o caso fechado, existem alguns trabalhos que relacionam o Índice de subvariedades mínimas com fronteira livre e os seus aspectos geométricos e topológicos. Cheng, Fraser e Pang [7] mostram que as únicas superfícies mínimas com fronteira livre estáveis e dois lados em uma 3-variedade compacta com curvatura escalar não-negativa e bordo convexo em média, são os discos topológicos e os anéis totalmente geodésicos. Fraser e Schoen [13] caracterizam o disco flat como a única hipersuperfície mínima com fronteira livre com Índice 1 da bola Euclidiana. Mais recentemente temos os trabalhos da Sargent [20] e Ambrozio, Carlotto e Sharp [3]. Sargent [20] obtém resultados para hipersuperfícies mínimas com fronteira livre de regiões convexas dos espaços Euclidianos. Sargent [20] segue as ideias de Savo [22]. Já Ambrozio, Carlotto e Sharp [3] obtém estimativas de índice de hipersuperfícies mínimas com fronteira livre de regiões com bordo convexo em média dos espaços Euclidianos em termos da Cohomologia relativa das hipersuperfícies consideradas.

De um modo geral, seja para o caso fechado ou compacto, calcular ou estimar o Índice de subvariedades mínimas é um problema difícil, mesmo no caso em que a codimensão é

1. Esse fato implica um número pequeno de trabalhos nessa linha. Quando a codimensão é mais alta que 1, a quantidade de trabalhos existentes na literatura atual é ainda mais escassa. Entretanto, resultados desse tipo vêm se mostrado importantes na geometria, como é o caso do trabalho de Urbano [26], o qual tem um papel importante na demonstração da Conjectura de Willmore dada por Marques e Neves [18].

Motivados pela conjectura de Schoen, Marques e Neves e pelos recentes trabalhos que a sustentam, nos perguntamos se é possível obter estimativas do índice para alguma família de subvariedades mínimas de um variedade Riemanniana em função do primeiro número de Betti dos membros dessa família. Em resposta, estendemos os resultados de Savo [22] e Ambrozio, Carlotto e Sharp [2] para subvariedades fechadas e Sargent [20] e Ambrozio, Carlotto e Sharp [3] para subvariedades compactas com codimensão arbitrária.

Nosso trabalho esta organizado da seguinte forma. O Capítulo 1 é dedicado a uma breve revisão da linguagem utilizada e de resultados fundamentais que iremos considerar ao longo do texto. Nele também introduzimos algumas noções e notações que serão adotadas. No Capítulo 2, empregamos a abordagem de Savo [21] a uma família de seções normais que introduzimos, e assim, obtemos o seguinte teorema de comparação entre os espectros do operador de estabilidade e do operador de Hodge-Laplace em 1-formas de uma subvariedade mínima fechada Σ^n de $\mathbb{S}^{n+p+1}$:

Seja Σ^n uma subvariedade mínima fechada de $\mathbb{S}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente pela constante real C , então temos que

$$\lambda_\alpha(L) \leq \lambda_{m(\alpha)}(\Delta_1) - 2\left(\frac{n-1}{p+1}\right) - 2\left(\frac{p}{p+1}\right)C,$$

onde $m(\alpha) = \binom{n+p+2}{2}(\alpha-1)+1$.

Onde acima, Δ_1 é operador de Hodge-Laplace de Σ em 1-formas diferenciais e L é o operador de estabilidade de Σ.

Sob adequada hipótese na curvatura de Ricci de Σ, obtemos como consequência a seguinte estimativa para seu índice:

Seja Σ^n uma subvariedade minima fechada de $\mathbb{S}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$ e $n \geq 2$. Se $p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > -(n-1)$, então

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

No Capítulo 3 seguimos a abordagem de Ambrozio, Carlotto e Sharp [2] para generalizar a estimativa do índice acima à subvariedades de espaços ambientes mergulhados em algum espaço Euclidiano. Mais precisamente, os principais resultados desse capítulo são os seguintes

Seja M^{n+p+1} uma variedade Riemanniana fechada e isometricamente mergulhada no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$, com $p \geq 0$. Se Σ^n é uma subvariedade mínima fechada de M^{n+p+1} e C uma constante real tal que

$$-\frac{2p}{p+1}\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g + \frac{1}{p+1}\int_\Sigma \mathrm{ACS}(X,X)dv_g < C\int_\Sigma |X|^2 dv_g$$

para todo campo de vetores X não-nulo no espaço $\mathcal{L}_m$ da soma direta dos m primeiros autoespaços de Δ_1, então

$$\alpha := \sharp\{\lambda_i(L)|\lambda_i(L) < \lambda_m(\Delta_1) + C\} \geq \frac{m}{\binom{d}{2}}.$$

onde ACS *é uma aplicação bilinear no espaço dos campos tangentes a Σ e a qual é definida em termos de M e do mergulho de M em $\mathbb{R}^d$.*

e

Seja M^{n+p+1} uma subvariedade mergulhada em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$, com $p \geq 0$. Se Σ^n é uma subvariedade mínima fechada de M^{n+p+1}, tal que $2p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > \mathrm{ACS}$, então temos

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{d}{2}} \tag{1}$$

Nós consideramos o resultado acima em algumas variedades ambientes particulares e, ao estimarmos a aplicação ACS superiormente, obtemos condições mais explicitas na curvatura de Ricci. Um dos casos considerados é $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+p}$, onde $p \geq 1$ e $n > p+6$, e cujo mergulho $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+p+3}$ considerado é o canônico. Para este caso, a condição na curvatura de Ricci de uma subvariedade mínima Σ^n de M para que a estimativa (1) seja verdadeira, é

$$2p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > -(n-p-6).$$

Motivados pelo mesmo pensamento heurístico citado anteriormente, no Capítulo 4 apresentamos versões de resultados presentes no Capítulo 2 para subvariedades mínimas com fronteira livre de regiões convexas de espaços Euclidianos. Mais precisamente, obtemos os seguintes resultados de comparação espectral:

Seja Σ^n uma subvariedade mínima compacta com fronteira livre em uma região convexa M^{n+p+1} do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente pela contante real C e L é o operador de estabilidade de Σ, então temos que

$$\lambda_\alpha(L) \leq \lambda^a_{m(\alpha)}(\Delta_1) - 2\left(\frac{p}{p+1}\right)C,$$

onde $m(\alpha) = \binom{n+p+2}{2}(\alpha - 1) + 1$ e $\lambda^a_{m(\alpha)}(\Delta_1)$ é o $m(\alpha)$-ésimo autovalor do operador de Hodge-Laplace Δ_1 de Σ restrito à 1-formas diferenciais que satisfazem à condição de bordo absoluto.

e

Seja Σ^n uma subvariedade mínima compacta com fronteira livre em uma região convexa M^{n+p+1} do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente pela contante real C e L é o operador de estabilidade de Σ, então temos que

$$\lambda_\alpha(L) \leq \lambda^r_{m(\alpha)}(\Delta_1) - 2\left(\frac{p}{p+1}\right)C,$$

onde $m(\alpha) = \binom{n+p+2}{2}(\alpha - 1) + 1$ e $\lambda^r_{m(\alpha)}(\Delta_1)$ é o $m(\alpha)$-ésimo autovalor do operador de Hodge-Laplace Δ_1 de Σ restrito à 1-formas diferenciais que satisfazem à condição de bordo relativo.

Em resumo, nossos resultados implicam que, sob certas hipóteses, subvariedades mínimas com grande número de Betti são muito instáveis.

1 Noções Básicas

1.1 Fibrados Tensoriais

1.1.1 Fibrados Vetoriais

Definição 1.1.1. Seja Σ uma variedade diferenciável. Um fibrado vetorial (diferenciável) de posto k sobre Σ é uma variedade diferenciável E em conjunto com uma submersão sobrejetiva $\pi : E \to \Sigma$ tal que

1. Para cada $x_0 \in \Sigma$, $E_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$ é um espaço vetorial real de dimensão k.

2. Para cada $x_0 \in \Sigma$, existe uma aplicação diferenciável $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, onde U é algum aberto de Σ contendo x_0, tal que $\pi \circ \phi = \pi_1$ em $\pi^{-1}(U)$ e $\pi_2 \circ \phi|_{E_x}$ é um isomorfismo linear de E_x em $\mathbb{R}^k$, onde $\pi_1, \pi_2 : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ são dadas por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$.

Observação 1.1.1. *Na definição acima, E é o espaço total, Σ é o espaço base, os espaços E_x são chamados de fibras de E, enquanto as aplicações ϕ são chamadas de trivializações locais de E.*

Definição 1.1.2. Uma seção de um fibrado vetorial $\pi : E \to \Sigma$ é uma aplicação diferenciável $s : \Sigma \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_\Sigma$, onde Id_Σ é aplicação identidade de Σ. O conjunto de todas as seções do fibrado é um espaço vetorial real, quando considerado em conjunto com a adição pontual e a multiplicação por escalares. Esse espaço será indicada por $\Gamma(E)$.

Exemplo 1.1.1. Sejam Σ uma variedade diferenciável , $E = \Sigma \times \mathbb{R}^k$, para algum k inteiro positivo e $\pi : E \to \Sigma$ a projeção sobre o primeiro fator. O conjunto (E, π) constitui um fibrado vetorial de posto k sobre Σ, denominado fibrado trivial de posto k sobre Σ. Neste caso temos a identificação $\Gamma(E) \approx C^\infty(\Sigma; \mathbb{R}^k)$ (Ver [6]).

Exemplo 1.1.2. Se $\pi : E \to \Sigma$ é um fibrado vetorial sobre Σ e $U \subset \Sigma$ é um aberto, a restrição de π à $\pi^{-1}(U)$ define o fibrado $\pi_{|U} : \pi^{-1}(U) \to U$ sobre U, o qual indicamos por $E_{|U}$ e referimos como restrição de π à U. A restrição $s_{|U}$ de uma seção $s \in \Gamma(E)$ define uma seção de $E_{|U}$, ou seja, $s_{|U} \in \Gamma(E_{|U})$ (Ver [6]).

Definição 1.1.3. Um referencial local de uma fibrado vetorial E de posto k é uma sequência $\{s_1, ..., s_k\}$ formado por k seções de E tal que $\{s_1(x), ..., s_k(x)\}$) é uma base da fibra E_x para todo x em algum aberto $U \subset \Sigma$.

1.1.2 Tensores

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Um k-tensor covariante em V é uma aplicação k-linear $T : V^k \to \mathbb{R}$. Um l-tensor contravariante em V é uma aplicação l-linear $T : (V^*)^l \to \mathbb{R}$. Um $\binom{k}{l}$-tensor em V é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Os espaços dos k-tensores covariantes, l-tensores contravariantes e $\binom{k}{l}$-tensores mistos em V serão indicados por $\mathcal{T}^k(V)$, $\mathcal{T}_l(V)$ e $\mathcal{T}_l^k(V)$, respectivamente.

Se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é uma base de V e $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ é a base dual associada, temos que os tensores da forma

$$\phi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{j_l} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

constituem uma base para $\mathcal{T}_l^k(V)$.

1.1.3 Contrações Tensoriais

A noção de traço de uma matriz quadrada é invariante em classes de matrizes semelhantes e portanto pode ser estendida a $\mathrm{End}(V)$ e consequentemente a $\mathcal{T}_1^1(V)$, uma vez que $\mathcal{T}_1^1(V) \simeq \mathrm{End}(V)$.

O traço $\mathrm{tr}(T)$ de um tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ é definido como o traço da imagem de T pelo isomorfismo linear $\Psi : \mathcal{T}_1^1(V) \to \mathrm{End}(V)$ que associa cada elemento $\phi_i \otimes e_j$ de uma base de $\mathcal{T}_1^1(V)$ à aplicação linear $\Psi(\phi_i \otimes e_j) : v \in V \mapsto \phi_i(v)e_j \in V$. Assim, fica bem definido a aplicação $\mathrm{tr} : T_1^1(V) \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^n T(\phi_i, e_i)$. Mais geralmente, define-se

$$\mathrm{tr} : T_{k+1}^{l+1}(V) \to T_k^l(V)$$

por

$$\mathrm{tr}(T)(\omega_1, \dots, \omega_l, X_1, \dots, X_k) = \mathrm{tr}(T(\omega_1, \dots, \omega_l, \cdot, X_1, \dots, X_k, \cdot)).$$

Existem outras formas de contrações que podem ser consideradas além da apresentada acima. É possível considerar qualquer par de componentes para tomarmos o traço, não apenas aquele da definição anterior. Por exemplo, dado $T \in \mathcal{T}_2^1(V)$, *temos a contração* $\mathrm{tr}_{12}(T)$ *de* T *obtidos quando tomamos o traço em termos da primeira e segunda componentes de* T, *isto é,* $\mathrm{tr}_{12}(T)(X) = \mathrm{tr}(T(\cdot, \cdot, X))$, *o qual é, em geral, diferente da contração* $\mathrm{tr}(T)$.

Podemos também tomar o traço múltiplas vezes. Por exemplo, dado $T \in \mathcal{T}_2^2(V)$, *a contração* $\mathrm{tr}_{23}\mathrm{tr}_{14}(T)$ *de* T *é obtido ao tomarmos o traço de* T *em relação a primeira e quarta componente de* T *e em seguida em relação a segunda e terceira.*

Quando V *esta munido de um produto interno* g, *existe um isomorfismo canônico entre* V *e* V^*

$$\begin{array}{rcl} \flat : V & \to & V^* \\ x & \mapsto & x^\flat \end{array}$$

onde $x^\flat(y) = g(x, y)$ *para todo* $y \in V$. *É comum, quando adotamos um produto interno* g *em* V, *considerarmos o produto escalar* g^{-1} *em* V^* *dado, em termos de* g *e do isomorfismo inverso*

$$\begin{array}{rcl} \sharp : V^* & \to & V \\ \omega & \mapsto & \omega^\sharp \end{array}$$

de $\flat$, *por* $g^{-1}(\omega, v) = g(\omega^\sharp, v^\sharp)$ *para todo* $w, v \in V^*$. *A estrutura de um produto interno* g *no espaço* V *permite-nos ainda considerar outra forma de variação das contrações : contrações que são obtidas por tomarmos o traço em componentes que correspondem a pares de vetores ou covetores. Por exemplo, se* $T \in \mathcal{T}^2(V)$, *o traço* $\mathrm{tr}_g(T)$ *de* T *com relação a* g *é definido como*

$$\mathrm{tr}_g(T) = \mathrm{tr}_{13}\mathrm{tr}_{24}(g^{-1} \otimes T).$$

1.1.4 Fibrados Tensoriais

Para uma variedade diferenciável Σ, *as noções acima, consideradas de modo pontual, nos permitem considerar o fibrado tensorial* $\mathcal{T}_l^k\Sigma$ *sobre* Σ, *cujo espaço total é definido como*

$$\mathcal{T}_l^k\Sigma := \bigcup_{x\in\Sigma} \mathcal{T}_l^k(T_x\Sigma) = \bigcup_{x\in\Sigma} \otimes^l T_x^*\Sigma \otimes^k T_x\Sigma$$

e a projeção $\pi : \mathcal{T}_l^k\Sigma \to \Sigma$ é tomada de modo natural. A cada parametrização φ de Σ temos o referencial local associado

$$dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_l} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}.$$

As trivializações de $\mathcal{T}_l^k\Sigma$ podem ser definidas ao consideramos as componentes dos tensores $T \in \cup_{x\in U}\mathcal{T}_l^k(T_x\Sigma)$ em termos da base $\{dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_l} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}\}$.

Observação 1.1.2. *Note que $\mathcal{T}_1^0\Sigma = T\Sigma$ e $\mathcal{T}_0^1\Sigma = \Omega^1(\Sigma)$.*

1.1.5 Métricas de Fibrados

Definição 1.1.4. Uma métrica em uma fibrado vetorial $\pi : E \to \Sigma$ é uma seção do fibrado $E^* \otimes E^*$ tal que, em cada ponto $x \in \Sigma$, g_x é um produto interno na fibra E_x.

Uma métrica g de um fibrado E pode ser usada para definir uma métrica g^{-1} no fibrado dual E^* de tal modo que para cada $x \in E$, g_x^{-1} é induzido pelo isomorfismo $\sharp : E_x^* \to E_x$. g^{-1} é chamada de métrica inversa de g.

Quando um fibrado E estiver sendo considerado em conjunto com uma métrica g, convencionaremos que a métrica considerada no fibrado dual E^* é inversa g^{-1} de g, a menos quando dito o contrário.

1.1.6 Derivada Covariante de Campos Tensoriais

Definição 1.1.5. Uma conexão ∇ em uma fibrado vetorial E é uma aplicação $\nabla : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, com $(X, s) \mapsto \nabla_X s$, o qual satisfaz as seguintes propriedades

1. $\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}s = f_1\nabla_{X_1}s + f_2\nabla_{X_2}s$, para $f_1, f_2 \in C^\infty(\Sigma)$.

2. $\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X s_1 + \nabla_X s_2$.

3. $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$, para $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Definição 1.1.6. Um fibrado Riemanniano é um fibrado vetorial E munido de uma métrica g e uma conexão ∇ compatível com g, ou seja, uma conexão ∇ tal que

$$Xg(r, s) = g(\nabla_X r, s) + g(r, \nabla_X s)$$

quaisquer que sejam $X \in \Gamma(T\Sigma)$ e $r, s \in \Gamma(E)$.

Proposição 1.1.1 (Derivada Covariante)**.** *Uma conexão ∇ no fibrado tangente $T\Sigma$ de uma variedade diferenciável Σ induz uma única conexão nos fibrados tensoriais de Σ, também indicada por ∇ e a qual satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Em $T\Sigma$, ∇ coincide com a conexão dada;*

2. *Em $C^\infty(\Sigma) = \mathfrak{T}^0(\Sigma)$, é a derivação usual de Σ, i.e.,*

$$\nabla_X f = X(f)$$

   qualquer que seja $f \in C^\infty(\Sigma)$.

3. *∇ satisfaz a regra do produto em relação ao produto tensorial:*

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$$

4. $\mathrm{tr}(\nabla_X F) = \nabla_X \mathrm{tr}(F)$ *para qualquer tensor F.*

Demonstração. Ver [4]. □

Proposição 1.1.2. *Para qualquer tensor $T \in \mathfrak{T}^k_l(\Sigma)$, k campos de vetores $Y_1, \ldots, Y_k$ e l 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_l$, temos*

$$(\nabla_X T)(\omega_1, \ldots, \omega_l, Y_1, \ldots, Y_k) = XT(\omega_1, \ldots, \omega_l, Y_1, \ldots, Y_k)$$
$$-\sum_{i=1}^{l} T(\omega_1, \ldots, \nabla_X \omega_i, \ldots, \omega_l, Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_{j=1}^{k} T(\omega_1, \ldots, \omega_l, Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_k)$$

Demonstração. Ver [4]. □

1.1.7 Segunda Derivada Covariante de Campos Tensoriais

A derivada covariante no fibrado $\mathfrak{T}^k_l\Sigma$ permite-nos considerar a derivada de segunda ordem de um tensor. Observe que dado $T \in \mathfrak{T}^k_l\Sigma$, temos que $\nabla T \in \Gamma(T^*\Sigma \otimes \mathfrak{T}^k_l\Sigma)$, isto é, $\nabla T \in \Gamma(\mathfrak{T}^{k+1}_l\Sigma)$. Portanto podemos considerar a derivada $\nabla\nabla T = \nabla(\nabla T) \in \Gamma(T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma \otimes \mathfrak{T}^k_l\Sigma)$, o qual nos referimos como derivada segunda de T. Pode-se mostrar que

$$\nabla_X \nabla_Y T = \nabla_X(\nabla_Y T) - \nabla_{\nabla_X Y} T,$$

para $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$.

Definição 1.1.7. Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana considerada com a conexão de Levi-Civita. Dado um tensor $T \in \mathcal{T}_l^k\Sigma$, chamamos de traço-laplaciano de T o tensor $\nabla^2 T \in \mathcal{T}_l^k(\Sigma)$ definido como

$$\nabla^2 T = \operatorname{tr}_g\big((X,Y) \in T\Sigma \times T\Sigma \mapsto \nabla_X \nabla_Y T\big)$$

1.1.8 Teoria Espectral de Operadores Diferenciais Fortemente Elípticos em um Fibrado

Nesta seção estamos interessados em abordar alguns aspectos da teoria espectral de operadores diferenciais entre espaços de seções de fibrados sobre um mesmo espaço base. Para isso faremos uso das seguintes convenções.

Um multi-índice em $\mathbb{R}^n$ é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de inteiros não-negativos. A ordem de um multi-índice α é o inteiro não negativo $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Seja V um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Dados $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^\infty(V; \mathbb{R}^n)$ e um multi-índice α, indicamos por $\partial^\alpha f$ a aplicação $\partial^\alpha f = (\partial^\alpha f_1, \ldots, \partial^\alpha f_k) \in C^\infty(V; \mathbb{R}^k)$, cujas funções componentes são

$$\partial^\alpha f_i = \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Mediante as convenções anteriores, temos

Definição 1.1.8. Sejam $\pi_1 : E_1 \to \Sigma$ e $\pi_2 : E_2 \to \Sigma$ fibrados vetoriais sobre uma variedade diferenciável Σ de posto k e l, respectivamente. Um operador diferencial linear entre os fibrados E_1 e E_2 é uma aplicação linear real $P : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ tal que

$$\operatorname{supp}(Ps) \subset \operatorname{supp}(s)$$

para toda seção $s \in \Gamma(E_1)$.

Teorema 1.1.1. *Sejam $\pi_1 : E_1 \to \Sigma$ e $\pi_2 : E_2 \to \Sigma$ fibrados vetoriais de postos k e l, respectivamente, sobre uma variedade diferenciável Σ^n, $P : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ um operador diferencial linear e U uma vizinhança parametrizada de Σ associada a trivializações locais de E_1 e E_2. Dado um aberto U' de Σ, compactamente contida em U, existe um inteiro não-negativo m, tal que, quando considerada as identificações $\Gamma(E_1) \approx C^\infty(U; \mathbb{R}^k)$ e $\Gamma(E_2) \approx C^\infty(U; \mathbb{R}^l)$, temos*

$$(Pf)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha f(x) \tag{1.2}$$

para todo $f \in \Gamma(E_1)$, onde para cada multi-índice α com ordem $|\alpha| \leq m$, $a_\alpha \in C^\infty(U; M_{l\times k}(\mathbb{R}))$

Demonstração. Ver [6]. □

(1.2) é chamada de expressão local de P.

Definição 1.1.9. Seja $P : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ um operador diferencial linear entre fibrados E_1 e E_2 de uma variedade diferenciável e topologicamente compacta Σ. Dado um ponto x_0 de Σ, seja

$$(Pf)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha f(x) \tag{1.3}$$

uma expressão local de P em uma vizinhança x_0. A ordem de P em x_0 é definido como

$$\mathrm{Ord}(P)_{x_0} = \max\{|\alpha| \leq m; a_\alpha(x_0) \neq 0\}.$$

A ordem de P em Σ é

$$\mathrm{Ord}(P) = \sup\{\mathrm{Ord}(P)_x; x \in \Sigma\}.$$

Observação 1.1.3. *A hipótese de Σ ser compacta implica que* $\mathrm{Ord}(P) < \infty$ *(ver [6]).*

De agora em diante, nesta seção, consideraremos Σ uma variedade Riemanniana fechada e orientada, E um fibrado Riemanniano de Σ e $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ um operador diferencial linear, a menos de quando dito o contrário.

O produto interno L^2 $(\cdot,\cdot)$ de $\Gamma(E)$ é definido por

$$(s, r) = \int_\Sigma \langle r, s\rangle dv_g$$

para todas as seções $s, r \in \Gamma(E)$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é a métrica considerada em E.

A cada $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, temos associado um operador diferencial linear $P^* : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ o qual é definido pela relação

$$(Ps, r) = (s, P^*r)$$

para todas as seções $s, r \in \Gamma(E)$ (ver [6]). P^* é chamado de operador adjunto de P.

Definição 1.1.10. Um operador diferencial $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ é dito autoadjunto se $P^* = P$.

Definição 1.1.11. Seja $P : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ um operador diferencial linear de ordem m entre fibrados vetoriais E_1 e E_2 de uma variedade diferencial compacta Σ^n de postos k e l, respectivamente. Dado $x \in \Sigma$, seja U uma vizinhança parametrizada de x associada a trivializações locais de E_1 e E_2. Considerando $T_x^*\Sigma \approx \mathbb{R}^n$, o polinômio característico de P em x é a aplicação que associa a cada $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in T_x^*\Sigma$ a matriz $p_P(x,\omega) \in M_{k\times l}(\mathbb{R})$ dada por

$$p_P(x,\omega) = \sum_{|\alpha|=m} \omega^\alpha a_\alpha(x),$$

onde a_α é dado como em (1.2) e $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \omega_n^{\alpha_n}$.

Definição 1.1.12. Um operador diferencial linear $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ de ordem m é fortemente elíptico se, para cada ponto x_0 em Σ, P admite uma expressão local $P : C^\infty(U;\mathbb{R}^k) \to C^\infty(U;\mathbb{R}^k)$ numa vizinhança U de x_0 tal que

$$\langle p_P(x,\omega)v, v\rangle \geq C|\omega|^m|v|^2,$$

para todo $x \in U$, $\omega \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^k$, onde C é uma constante positiva.

Dado $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, dizemos que uma seção não identicamente nula $s \in \Gamma(E)$ é uma auto-seção de P associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se

$$Ps = \lambda s.$$

Neste caso, o conjunto

$$\Gamma(E)_\lambda = \{s \in \Gamma(E); Ps = \lambda s\}$$

é um subespaço vetorial de $\Gamma(E)$, chamado de autoespaço de λ.

Teorema 1.1.2 (Espectral)**.** *Sejam $P, T : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ operadores diferenciais lineares autoadjuntos, com P positivo semidefinido e fortemente elíptico. Se a $\mathrm{Ord}(T) < \mathrm{Ord}(P)$, então*

a) $P+T$ é fortemente elíptico e seu espectro (o conjunto de autovalores não considerados com suas multiplicidades) é constituído de uma sequência $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to +\infty$.

b) $\dim \Gamma(E)_{\lambda_i} < \infty$ para todo $i \leq 1$.

c) $\Gamma(E) = \oplus_{i\geq 1}\Gamma(E)_{\lambda_i}$, soma direta ortogonal.

d) Se $\mathcal{N}(E)$ *é o maior subespaço de* $\Gamma(E)$ *no qual* $P+T$ *é negativo definido em relação* $(\cdot,\cdot)$, *então*

$$\mathcal{N}(E) = \oplus_{\lambda_i<0}\Gamma(E)_{\lambda_i}.$$

Em particular $\dim \mathcal{N}(E) < \infty$.

Demonstração. Ver [6]. □

Proposição 1.1.3. *O traço-laplaciano* $\nabla^2 : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ *é um operador diferencial linear de segunda ordem, autoadjunto, negativo semidefinido em relação ao produto* L^2 *e fortemente elíptico.*

Demonstração. Ver [6]. □

1.2 Operador de Hodge-Laplace e Formas Harmônicas

Em uma variedade Riemanniana Σ, *o operador de Hodge-Laplace* $\Delta_p : \Omega^p(\Sigma) \to \Omega^p(\Sigma)$ *é o operador diferencial de segunda ordem dado por*

$$\Delta_p = dd^* + d^*d,$$

onde d *é a derivada exterior e* d^* *é sua adjunta formal com relação ao produto interno* L^2.

A fórmula de Bocnher-Weitzenböck determina a relação existente entre o operador de Hodge-Laplace Δ_p *e o traço-laplaciano* ∇^2 *de* $\Omega^p(\Sigma)$:

Teorema 1.2.1 (Bocnher-Weitzenböck)**.** *Se* Δ_p *e* ∇^2 *são os operadores de Hodge-Laplace e o traço-laplaciano de* $\Omega^p(\Sigma)$, *respectivamente, então temos que*

$$\Delta_p = -\nabla^2 + S \tag{1.4}$$

onde S *é operador diferencial linear em* $\Omega^p(\Sigma)$ *dado, numa vizinhança de um ponto* x *de* Σ, *por*

$$(S\omega)(X_1,\ldots,X_p) = \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^j(R(X_j,e_i)\omega)(e_i,X_1,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_p),$$

onde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ *um referencial ortonormal qualquer definido na referida vizinhança de* x, *enquanto* $R : \Gamma(T\Sigma)\times\Gamma(T\Sigma)\times\Omega^p(\Sigma) \to \Omega^p(\Sigma)$ *é o operador de curvatura de* $\Omega^p(\Sigma)$, *o qual é dado por*

$$R(X,Y)\omega = \nabla_X\nabla_Y\omega - \nabla_Y\nabla_X\omega - \nabla_{[X,Y]}\omega$$

quaisquer que sejam $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$ *e* $\omega \in \Omega^p(\Sigma)$.

Demonstração. Ver [6]. □

No caso particular em que consideramos Δ_1, a identidade (1.4) é dada por

$$\Delta_1\omega = -\nabla^2\omega + \mathrm{Ric}_\Sigma(\omega^\sharp, \cdot), \tag{1.5}$$

para toda 1-forma $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$.

Uma consequência direta da fórmula de Bocnher-Weitzenböck é que o operador de Hodge-Laplace Δ_p é fortemente elíptico, autoadjunto e positivo semidefinido em relação ao produto L^2 (ver [6], Corolário 7.60) e portanto, seus autovalores, contados com suas multiplicidades, formam uma sequência monótona não-decrescente de números reais não-negativos:

$$0 \leq \lambda_1(\Delta_p) \leq \lambda_2(\Delta_p) \leq \cdots \to +\infty.$$

Uma forma $\omega \in \Omega^p(\Sigma)$ é chamada de harmônica se $\Delta_p\omega = 0$. As p-formas harmônicas de uma variedade Riemanniana Σ estão associadas a alguns de seus invariantes topológicos. O Teorema de Hodge-de Rham estabelece esta relação:

Teorema 1.2.2 (Hodge-de Rham)**.** *Se Σ é uma variedade Riemanniana fechada e orientada, então, para todo $p \geq 0$, cada classe de cohomologia de de Rham $\mathcal{H}^p(\Sigma)$ contém exatamente uma p-forma harmônica.*

Demonstração. Ver [6]. □

Em particular,o espaço das p-formas harmônicas é isomorfo a $\mathcal{H}^p(\Sigma)$. Sendo o p-ésimo número de Betti $b_p(\Sigma)$ igual ao número de classes de cohomologia de $\mathcal{H}^p(\Sigma)$, temos, como consequência dos Teorema de Hodge-de Rham, que $\lambda_i(\Delta_p) = 0$, para $i = 1, ..., b_p(\Sigma)$.

1.3 Problemas de Bordo para o Operador de Hodge-Laplace

Dada uma variedade Riemanniana compacta e orientada Σ^n, as generalizações das fórmulas de Green para p-formas diferenciais $\omega \in \Omega^p(\Sigma)$ são dadas por

$$\int_\Sigma \langle \Delta\omega, v\rangle dv_g = \int_\Sigma \langle d\omega, dv\rangle + \langle d^*\omega, d^*v\rangle dv_g + \int_{\partial\Sigma} \langle (d^*\omega) \wedge \eta, v\rangle + \langle d\omega, v \wedge \eta\rangle da_g \tag{1.6}$$

e

$$\int_{\Sigma}\langle\Delta\omega,v\rangle dv_g=\int_{\Sigma}\langle d\omega,dv\rangle+\langle d^*\omega,d^*v\rangle dv_g-\int_{\partial\Sigma}(\langle d^*\omega,\iota_\eta v\rangle+\langle\iota_\eta d\omega,v\rangle)da_g \tag{1.7}$$

onde $\omega\wedge v$ *é o produto exterior em* $\Omega^k(\Sigma)$, ι_η *é o produto interior pelo campo de vetores conormal* η *de* $\partial\Sigma$ *e , se* $*$ *é operador estrela de Hodge,* $\langle\omega,v\rangle=*(w\wedge *v)$ *(Ver [24]). Estas fórmulas permite-nos considerar condições de bordo que generalizam as condições de Dirichlet e Neumann de funções (0-formas) para p-formas. Estas condições são dadas, respectivamente, por:*

$$\omega\wedge\eta=0\quad e\quad d^*\omega\wedge\eta=0\ em\ \partial\Sigma \tag{1.8}$$

e

$$\iota_\eta\omega=0\quad e\quad \iota_\eta d\omega=0\ em\ \partial\Sigma \tag{1.9}$$

A primeira condição é conhecida como condição relativa de bordo e a segunda como condição absoluta de bordo. Se $\omega\in\Omega^1(\Sigma)$ *satisfaz a condição relativa de bordo, então* $\omega^\sharp$ *é paralelo a* η *em* $\partial\Sigma$, *enquanto que se* ω *satisfaz a condição absoluta de bordo, temos que* $\omega^\sharp$ *é tangente a* $\partial\Sigma$ *em pontos correspondentes.*

A cada uma dessas condições, temos associado um problema de autovalor do operador de Hodge-Laplace Δ_p *:*

Um número real λ *é autovalor de* Δ_p *com respeito ao problema relativo de bordo se existe uma p-forma não-nula* $\omega\in\Omega^p(\Sigma)$ *tal que*

$$\begin{cases}\Delta_p\omega=\lambda\omega\\ \omega\wedge\eta=0\\ d^*\omega\wedge\eta=0\end{cases} \tag{1.10}$$

O espectro de (1.10) *é formado por uma sequência monótona não-decrescente de números não-negativos*

$$\lambda_1^r(\Delta_p)\le\lambda_2^r(\Delta_p)\le\ldots\to+\infty.$$

Analogamente, λ *é autovalor de* Δ_p *com respeito a condição absoluta de bordo se*

$$\begin{cases}\Delta_p\omega=\lambda\omega\\ \iota_\eta\omega=0\\ \iota_\eta d\omega=0\end{cases} \tag{1.11}$$

para alguma p-forma não-nula $\omega \in \Omega^p(\Sigma)$. *O espectro de* (1.11) *é formado por uma sequência monótona não-decrescente de números não-negativos*

$$\lambda_1^a(\Delta_p) \leq \lambda_2^a(\Delta_p) \leq \ldots \to \infty.$$

O espaço

$$\mathcal{H}_p^R = \{\omega \in \Omega^p(\Sigma)|\ \Delta_p\omega = 0,\ \omega \text{ satisfaz a (1.8)}\}$$

é isomorfo ao p-ésimo grupo relativo de cohomologia $\mathcal{H}^p(\Sigma, \partial\Sigma)$ *de* Σ, *enquanto o espaço*

$$\mathcal{H}_p^A = \{\omega \in \Omega^p(\Sigma)|\ \Delta_p\omega = 0,\ \omega \text{ satisfaz a (1.9)}\}$$

é isomorfo ao p-ésimo grupo de cohomologia $\mathcal{H}^p(\Sigma)$ *de* Σ.

Além disso, o operador estrela de Hodge $*$ *induz um isomorfismo* $* : \mathcal{H}_p^R(\Sigma, \partial\Sigma) \to \mathcal{H}_{n-p}^A(\Sigma)$.

Para maiores detalhes sobre a teoria, ver [24].

1.4 Tensores de Curvatura

Seja (Σ^n, g) *uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão* $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, *conhecida como conexão de Levi-Civita ou Riemanniana, a qual satisfaz as seguintes propriedades*

1. *(Compatibilidade com g): O* $\binom{2}{0}$*-tensor* $\nabla_X g$ *é identicamente nulo;*
2. *(Simetria):* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, *para todo* $X, Y \in \Gamma(TM)$, *onde* $[\cdot, \cdot]$ *indica o Cochete de Lie ;*

As noções de curvatura em Σ *são definidas em termos dessa conexão como segue:*

Definição 1.4.1 (Tensor Curvatura)**.** O tensor curvatura (Riemanniana) de Σ

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X, Y, W) &\mapsto R(X, Y)W \end{aligned}$$

é definido por

$$R(X, Y)W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W.$$

Associado ao tensor de curvatura R, temos o $\binom{4}{0}$-tensor $\mathcal{R} : \Gamma(T\Sigma) \otimes \Gamma(T\Sigma) \otimes \Gamma(T\Sigma) \otimes \Gamma(T\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ dado por $\mathcal{R}(X, T, W, Y) = g(R(X, T)W, Y)$.

A curvatura seccional e o tensor de Ricci de Σ são definidos em termos de $\mathcal{R}$ como segue:

Definição 1.4.2 (Curvatura seccional)**.** Seja σ um plano de $T_x\Sigma$ gerado pelos vetores $v, w \in T_x\Sigma$. A curvatura seccional de Σ em x, segundo σ, é definido por

$$K(x, \sigma) = \frac{\mathcal{R}(v, w, v, w)}{|v|^2|w|^2 - g(v, w)^2}.$$

Definição 1.4.3 (Tensor de Ricci)**.** O tensor de Ricci de Σ é $\binom{2}{0}$-tensor $\mathrm{Ric} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(\Sigma)$ é definido como

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}_{24_g}(\mathcal{R})(X, Y),$$

onde $\mathrm{tr}_{24_g}(\mathcal{R})$ é traço de $\mathcal{R}$, tomado em respeito a sua segunda e terceira componentes.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local de Σ, podemos expressar o tensor de Ricci localmente como

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i)Y, e_i \rangle.$$

Variedades Riemannianas com curvatura seccional constante, isto é, aquelas em que $K(x, \sigma)$ independe do ponto x e do plano σ, são consideradas as variedades com estruturas geométricas mais simples. Em particular temos a seguinte caracterização para o tensor de curvatura destas variedades.

Lema 1.4.1. *Seja Σ uma variedade Riemanniana com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Σ tem curvatura seccional constante igual a $K \in \mathbb{R}$ se, e somente se, seu tensor de curvatura R é dado por*

$$R(X, Y)W = K\left(\langle X, W \rangle Y - \langle Y, W \rangle X\right),$$

para todo $X, Y, W \in \Gamma(T\Sigma)$.

Demonstração. Ver [12]. $\square$

1.5 Geometria das Subvariedades

Uma imersão $\varphi : \Sigma^n \to M^{n+k}$ de uma variedade diferenciável Σ em uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, define em Σ uma métrica Riemannianna, a qual também indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando identificamos Σ com sua imagem $\varphi(\Sigma) \subset M$ e os vetores tangentes

$v \in T_x\Sigma$ com $d\varphi_x(v) \in T_{\varphi(x)}M$ de modo que

$$\langle v, w\rangle_x = \langle d\varphi_x(v), \langle d\varphi_x(w)\rangle_{\varphi(x)},$$

para todo $x \in \Sigma$.

As identificações acima permite-nos considerar as decomposições

$$T_xM = T_x\Sigma \oplus T_x\Sigma^{\perp}$$

para todo $x \in \Sigma$. É possível verificar que, se ∇ e $\bar{\nabla}$ indicam as conexões de Levi-Civita de Σ e M, respectivamente, então

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^{\top}$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$, onde $(\bar{\nabla}_X Y)^{\top}$ é a componente tangencial de $\bar{\nabla}_X Y$ em Σ. O termo $(\bar{\nabla}_X Y)^{\perp}$ define o tensor (vetorial) bilinear simétrico

$$\begin{array}{rcl} B : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) & \to & \Gamma(T\Sigma^{\perp}) \\ (X, Y) & \mapsto & (\bar{\nabla}_X Y)^{\perp} \end{array}$$

conhecido como segunda forma fundamental (vetorial) de Σ em M. Desde que B é simétrico, a cada $Z \in \Gamma(T\Sigma^{\perp})$, temos associado uma aplicação linear autoadjunta, com respeito a métrica Riemanniana, $A_Z : \Gamma(T\Sigma) \to \Gamma(T\Sigma)$ dada por $A_Z X = -(\bar{\nabla}_X Z)^{\top}$ e a qual satisfaz à relação

$$\langle B(X, Y), Z\rangle = \langle A_Z X, Y\rangle$$

para todo $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$. A_Z é conhecido como operador forma de Σ em M na direção de Z.

O vetor curvatura média (não-normalizado) de $H \in \Gamma(T\Sigma^{\perp})$ de Σ em M é

$$H = \mathrm{tr}_g(B),$$

ou seja, se x é um ponto de Σ, então

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)(x)$$

onde $\{e_i, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal arbitrário de Σ em uma vizinhança de x.

Associada à Σ, ou mais precisamente, à imersão φ, temos um conjunto de equações conhecidas como equação fundamentais. Dessas faremos um uso particular das equações de Gauss e Codazzi. Essas equações expressão as componentes do tensor de curvatura $\bar{R}$ de M em termos do tensor de curvatura R de Σ e da segunda forma fundamental de Σ.

Teorema 1.5.1. *Se Σ é uma subvariedade da variedade Riemanniana M e $X, Y, W \in \Gamma(T\Sigma)$, então:*

1. *(Gauss)* $R(X,Y)W = (\bar{R}(X,Y)W)^{\top} + A_{B(X,W)}Y - A_{B(Y,W)}X$.

2. *(Codazzi)* $(\bar{R}(X,Y)W)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X B)(Y,W) - (\nabla^{\perp}_Y B)(X,W)$, *onde* $(\nabla^{\perp}_X B)(Y,W) = \nabla^{\perp}_X B(Y,W) - B(\nabla_X Y, W) - B(Y, \nabla_X W)$.

Demonstração. Ver [6]. □

Corolário 1.5.1 (Gauss)**.** *Se Σ é uma subvariedade da variedade Riemanniana M e $X, Y, W, T \in \Gamma(T\Sigma)$, então*

$$\langle R(W,X)Y,T\rangle = \langle \bar{R}(W,X)Y,T\rangle + \langle B(W,Y), B(X,T)\rangle - \langle B(W,T), B(X,Y)\rangle$$

Demonstração. Ver [6]. □

Corolário 1.5.2. *Se M tem curvatura seccional constante, então*

$$(\nabla^{\perp}_X B)(Y,W) = (\nabla^{\perp}_Y B)(X,W),$$

para todo $X, Y, W \in \Gamma(T\Sigma)$.

Demonstração. Ver [12]. □

1.6 Estabilidade de Subvariedades Mínimas

Uma subvariedade fechada Σ^n de uma variedade Riemanniana M^m é dita mínima se é ponto crítico do funcional área associado a toda variação de Σ em M. Ou seja, para qualquer aplicação suave $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \to M$ com as propriedades

1. *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\phi_t := \phi|_{\{t\}\times\Sigma}$ é uma imersão de Σ em M;*

2. *ϕ_0 é aplicação inclusão de Σ em M;*

temos que a Primeira Variação de Volume

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \langle H, Z\rangle dv_g = 0,$$

onde $\Sigma_t := \phi_t(\Sigma)$, $\mathrm{Vol}(\Sigma_t)$ é o volume de Σ_t, $Z = \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t=0}$ e H é o vetor curvatura média de Σ (ver [22]). É possível verificar que Σ é mínima se, e somente se, H é identicamente nulo.

Em particular, se Σ é mínima, para qualquer $Z \in \Gamma(T\Sigma^\perp)$, fazendo $\phi(t,x) = \exp_x(tZ(x))$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde exp *é a aplicação exponencial de M, temos*

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma \langle \nabla^2 Z + \tilde{R}(Z) + \tilde{B}(Z), Z\rangle\, dv_g$$

com $\tilde{R}(Z) = \sum_{i=1}^n (\bar{R}(Z,e_i)e_i)^\perp$ e $\tilde{B}(Z) = \sum_{i,j=1}^n \langle Z, B(e_i,e_j)\rangle B(e_i,e_j)$, onde $\{e_1,...,e_n\}$ é um referencial ortonormal local de Σ (ver [22]).

O lado direito da fórmula acima define uma forma quadrática em $\Gamma(T\Sigma^\perp)$, que passaremos a indicar por Q. Assim,

$$Q(Z) = -\int_\Sigma \langle \nabla^2 Z + \tilde{R}(Z) + \tilde{B}(Z), Z\rangle\, dv_g,$$

para todo $Z \in \Gamma(T\Sigma^\perp)$. Q é conhecida na literatura como a forma do Índice. Já o operador linear associado à Q,

$$LZ = -\nabla^2 Z - \tilde{R}(Z) - \tilde{B}(Z),$$

é chamado de operador de estabilidade. L é um operador diferencial fortemente elíptico em variedades compactas, cujo espectro é formado por uma sequência monótona não-decrescente ilimitada:

$$\lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \cdots \to +\infty.$$

O $\mathrm{Indice}(\Sigma)$ *pode ser definido como o número de autovalores negativos de L. Σ é dita estável se* $\mathrm{Indice}(\Sigma) = 0$ *e instável quando* $\mathrm{Indice}(\Sigma) > 0$.

O $\mathrm{Indice}(\Sigma)$ *mede o quanto Σ deixa de ser um mínimo local do funcional área.*

1.7 Estabilidade de Subvariedade Mínimas com fronteira Livre

Seja M^m uma variedade Riemanniana compacta e isometricamente imersa em $\mathbb{R}^m$. Uma subvariedade compacta Σ^n de M^m com $\partial\Sigma \subset \partial M$ é dita mínima com fronteira livre se é ponto crítico do funcional área de variações que deixam o bordo $\partial\Sigma$ de Σ sobre o bordo ∂M de M. Isto é, se $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \to M$ é uma aplicação suave que satisfaz às propriedades:

1. *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\phi_t := \phi|_{\{t\}\times\Sigma}$ é uma imersão de Σ*

2. *ϕ_0 é aplicação de inclusão de Σ em M.*

3. O campo de variação $Z := \frac{\partial \phi}{\partial t}\big|_{t=0}$ *de* ϕ *é tangente a* ∂M

então temos que

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Sigma_t) = -\int_{\Sigma} \langle H, Z\rangle dv_g + \int_{\partial\Sigma} \langle Z, \eta\rangle da_g = 0,$$

onde $\Sigma_t := \phi_t(\Sigma)$, H *é vetor curvatura média de* Σ *em* M *e* η *é campo de vetores cornomal ao bordo* $\partial\Sigma$. *Em particular, se* Σ *é mínima com fronteira livre, então* H *é identicamente nulo e* η *coincide com o campo de vetores conormal de* ∂M.

Uma campo $Z \in \Gamma(T\Sigma^{\perp})$ *será dito admissível se é o campo de uma variação* ϕ *satisfazendo as propriedades 1-3.*

A fórmula para a segunda variação do funcional área

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n} |D^{\perp}_{e_k} Z|^2 - \langle \tilde{B}(Z), Z\rangle dv_g + \int_{\partial\Sigma} \langle D_Z Z, \nu\rangle da_g,$$

onde D *é conexão de Levi-Civita de* $M = \mathbb{R}^m$ *(aqui tratamos apenas o caso do ambiente ser o espaço Euclidiano), defina sobre o espaço dos campos admissíveis a forma quadrática*

$$Q(Z) = \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n} |D^{\perp}_{e_k} Z|^2 - \langle \tilde{B}(Z), Z\rangle dv_g + \int_{\partial\Sigma} \langle D_Z Z, \nu\rangle da_g.$$

Associado à essa forma, temos o operador de estabilidade

$$LZ = -\nabla^2 Z - \tilde{B}(Z).$$

Um número real λ *é dito um autovalor de* L, *se existe um campo vetores admissível não-nulo* $Z \in \Gamma(T\Sigma^{\perp})$ *tal que*

$$\begin{cases} LZ = \lambda Z \\ (D_\nu Z - D_Z \nu)^{\top_{\partial M}} = 0 \end{cases}$$

onde $(\cdot)^{\top_{\partial M}}$ *indica a projeção normal de um campo sobre* ∂M. *O espectro de* L *é formando por uma sequência monótona não-decrescente*

$$\lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \cdots \to +\infty.$$

O Indice(Σ) *é definido como o número de autovalores negativos de* L, *contados com suas multiplicidades.* Σ *é dita estável se* Indice$(\Sigma) = 0$ *e instável, caso contrário. O* Indice(Σ) *mede o quanto* Σ *deixa de ser um mínimo local do funcional área.*

1.8 Seções Teste

Ao logo do texto iremos considerar uma família de seções normais a subvariedade mínima considerada Σ^n com a finalidade de determinar os principais resultados dessa monografia.

Uma técnica usual na estimativa do Índice de uma subvariedade mínima esta baseada no lema abaixo e consiste em determinar seções normais com uma certa propriedade.

Lema 1.8.1 (Princípio do min-máx)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana. Se Σ é uma subvariedade mínima de M, então o k-ésimo autovalor $\lambda_k(L)$ do operador de estabilidade L de Σ é dado por*

$$\lambda_k(L) = \inf_{Z \neq 0} \frac{Q(Z)}{\int_\Sigma |Z|^2 dv_g}$$

onde o ínfimo é tomado sobre as seções não-nulas $Z \in \Gamma(T\Sigma^\perp)$ ortogonais ao espaço $\mathcal{L}_{k-1}$ que gerado pelos $(k-1)$ primeiros autoespaços de L.

Demonstração. Ver [10]. $\square$

Uma consequência imediata do Princípio do min-máx é que

$$\lambda_k(L) \leq \frac{Q(Z)}{\int_\Sigma |Z|^2 dv_g}$$

qualquer que seja a seção $Z \in \mathcal{L}_{k-1}^\perp \backslash \{0\}$. Quando o objetivo é estimar o autovalor $\lambda_k(L)$, os campos $Z \in \mathcal{L}_{k-1}^\perp \backslash \{0\}$ são chamados de seções testes para $\lambda_k(L)$.

A técnica mencionada consiste em determinarmos seções testes apropriadas do autovalor considerado.

Nesse trabalho iremos considerar seções testes que fazem parte da família de seções definida abaixo.

Definição 1.8.1. Seja Σ^n uma subvariedade de uma variedade Riemanniana M^m mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$. Dado campos de vetores paralelos V e W de $\mathbb{R}^d$ e um campo tangente X de Σ, indicaremos por Z_X ou $Z_X(V,W)$ o campo de vetores normal a Σ dado por

$$Z_X = Z_X(V,W) = \langle W, X \rangle V^\perp - \langle V, X \rangle W^\perp,$$

onde $V^\perp$ e $W^\perp$ indicam as componentes normais a Σ das projeções de V e W sobre M.

2 Subvariedades Mínimas da Esfera

Antes de começarmos, gostaríamos de estabelecer as notações e convenções que serão adotadas ao longo do capítulo.

Seja $\mathbb{S}^{n+p+1}$ *a esfera unitária do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^{n+p+2}$*. Considerando* $\mathbb{S}^{n+p+1}$ *como uma subvariedade isometricamente mergulhada em* $\mathbb{R}^{n+p+2}$*, o campo de vetores normal unitário* η *adotado em* $\mathbb{S}^{n+p+1}$ *é aquele cuja a segunda forma fundamental é o operador identidade, ou seja,* $-D_X\eta = X$ *para todo* $X \in \Gamma(T\mathbb{S}^{n+p+1})$*, onde* D *é a conexão de Levi-Civita de* $\mathbb{R}^{n+p+2}$*.*

Ao logo do capítulo Σ^n *é uma subvariedade* n*-dimensional mínima fechada e orientada de* $\mathbb{S}^{n+p+1}$*.*

2.3 Conceitos e Resultados Preliminares

Lema 2.3.1. *Seja* V *um campo de vetores paralelo de* $\mathbb{R}^{n+p+2}$*. Se* $V^\top$ *é a componente tangente e* $V^\perp$ *é a componente normal em* $\mathbb{S}^{n+p+1}$ *da projeção de* V *sobre* $\mathbb{S}^{n+p+1}$ *em* Σ*, então temos que*

(a) $\nabla^\perp_X V^\perp = -B(X, V^\top)$*, para todo* $X \in \Gamma(T\Sigma)$

(b) $\nabla_X V^\top = \langle V, \eta\rangle X + A_{V^\perp}X$*, para todo* $X \in \Gamma(T\Sigma)$

(c) $\nabla\langle V, \eta\rangle = -V^\top$

(d) $\Delta\langle V, \eta\rangle = n\langle V, \eta\rangle$

(e) $\nabla^2 V^\perp = -\tilde{B}(V^\perp)$

(f) $\tilde{R}(V^\perp) = nV^\perp$

Demonstração.

a) - b) Da decomposição $V = \langle V, \eta\rangle\eta + V^{\perp} + V^{\top}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 = D_X V &= -\langle V, X\rangle\eta - \langle V, \eta\rangle X + D_X V^{\perp} + D_X V^{\top} \\ &= -\langle V, X\rangle\eta - \langle V, \eta\rangle X + \langle D_X V^{\perp}, \eta\rangle\eta + \langle D_X V^{\top}, \eta\rangle\eta + \bar{\nabla}_X V^{\perp} + \bar{\nabla}_X V^{\top} \end{aligned}$$

Assim ao considerarmos as componentes tangente e normal à Σ em $\mathbb{S}^{n+p+1}$ da última igualdade acima, obtemos que

$$\nabla_X V^{\top} = (\bar{\nabla}_X V^{\top})^{\top} = \langle V, \eta\rangle X - (\bar{\nabla}_X V^{\perp})^{\top} = \langle V, \eta\rangle X + A_{V^{\perp}} X$$

e

$$\nabla^{\perp}_X V^{\perp} = -(\nabla_X V^{\top})^{\perp} = -B(X, V^{\top}),$$

respectivamente, provando assim as partes (a) e (b).

Na demonstração dos demais itens, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial geodésico ortonormal em ponto arbitrário x de Σ. Os cálculos apresentados abaixo são efetuados em x.

c) Uma vez que $\nabla\langle V, \eta\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i\langle V, \eta\rangle e_i$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla\langle V, \eta\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(\langle D_{e_i} V, \eta\rangle + \langle V, D_{e_i}\eta\rangle)e_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\langle V, e_i\rangle e_i = -V^{\top} \end{aligned}$$

o que conclui a parte (c).

d) Como $\Delta\langle V, \eta\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\nabla\langle V, \eta\rangle, e_i\rangle$, segue das partes (c) e (b) que

$$\begin{aligned} \Delta\langle V, \eta\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} V^{\top}, e_i\rangle \\ &= n\langle V, \eta\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle V, B(e_i, e_i)\rangle \\ &= n\langle V, \eta\rangle + \langle V, H\rangle, \end{aligned}$$

onde H é o vetor curvatura média de Σ em $\mathbb{S}^{n+p+1}$. Como Σ é mínima, temos que $\Delta\langle V, \eta\rangle = n\langle V, \eta\rangle$.

e) Desde que $\nabla^2 V^{\perp} = \sum_{i=1}^{n} \nabla^{\perp}_{e_i}\nabla^{\perp}_{e_i} V^{\perp}$, temos da parte (a) que

$$\nabla^2 V^{\perp} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla^{\perp}_{e_i} B(V^{\top}, e_i)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\nabla^2 V^\perp &= -\sum_{i=1}^n (\nabla^\perp_{e_i} B)(V^\top, e_i) - \sum_{i=1}^n B(\nabla_{e_i} V^\top, e_i) - \sum_{i=1}^n B(V^\top, \nabla_{e_i} e_i)\\ &= \sum_{i=1}^n (\nabla^\perp_{e_i} B)(V^\top, e_i) - \sum_{i=1}^n B(\nabla_{e_i} V^\top, e_i),\end{aligned}$$

onde $(\nabla^\perp_{e_i} B)$ é a derivada covariante de B na direção de e_i. Aplicando a equação de Codazzi e a parte (b) deste lema no primeiro e segundo termo do lado direito da última equação acima, respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned}\nabla^2 V^\perp &= -\sum_{i=1}^n (\nabla^\perp_{V^\top} B)(e_i, e_i) - \langle V, \eta\rangle \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^n B(A_{V^\perp} e_i, e_i)\\ &= -\sum_{i=1}^n (\nabla^\perp_{V^\top} B)(e_i, e_i) - \langle V, \eta\rangle \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i) + \sum_{i,j=1}^n \langle V^\perp, B(e_i, e_j)\rangle B(e_i, e_j)\\ &= -\mathrm{tr}(\nabla^\perp_{V^\top} B) - \langle V, \eta\rangle \mathrm{tr}(B) - \tilde{B}(V^\perp)\\ &= -\nabla^\perp_{V^\top} (\mathrm{tr}(B)) - \langle V, \eta\rangle \mathrm{tr}(B) - \tilde{B}(V^\perp)\\ &= -\nabla^\perp_{V^\top} H - \langle V, \eta\rangle H - \tilde{B}(V^\perp),\end{aligned}$$

o que implica que

$$\nabla^2 V^\perp = -\tilde{B}(V^\perp).$$

f) Aplicando a equação de Gauss ao mergulho canônico de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ em $\mathbb{R}^{n+p+2}$, obtemos que o tensor de curvatura $\bar{R}$ de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ é dado por

$$\bar{R}(X, Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y$$

quaisquer que sejam os campos de vetores tangentes X, Y e Z de $\mathbb{S}^{n+p+1}$. Assim temos que

$$\tilde{R}(V^\perp) = \sum_{i=1}^n (\bar{R}(V^\perp, e_i)e_i)^\perp = nV^\perp.$$

Concluímos assim a prova do lema. □

A relação biunívoca existente entre os campos tangentes e as 1*-formas diferenciais de uma variedade Riemanniana* Σ *permite-nos considerar conceitos em* $\Gamma(T\Sigma)$ *que a princípio estão definidos em* $\Omega^1(\Sigma)$*. Um exemplo particularmente importante, para o que segue, é o que chamaremos aqui de Laplaciano de Hodge para campos, o qual é definido abaixo.*

Definição 2.3.1. Dado uma campo $X \in \Gamma(T\Sigma)$, se $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ é a formal dual a X, então o Laplaciano de Hodge ΔX de X é dado por

$$\Delta X = (\Delta_1 \omega)^\sharp.$$

X será dito um campo harmônico se $\Delta X = 0$.

Usando a notação da definição anterior, podemos observar que como $\nabla^2 X$ é o campo dual a 1-forma $\nabla^2\omega$, então vale a seguinte versão da fórmula de Bocnher-Weitzenböck:

$$\langle \Delta X, \cdot \rangle = -\langle \nabla^2 X, \cdot \rangle + \mathrm{Ric}(X, \cdot) \tag{2.12}$$

qualquer que seja o campo $X \in \Gamma(T\Sigma)$ considerado.

Lema 2.3.2. *Seja X um campo de vetores tangente de Σ e V um campo de vetores paralelo de $\mathbb{R}^{n+p+2}$. Então são válidas as seguintes identidades*

(a)

$$\nabla^2 X = -\Delta X + (n-1)X - \sum_{i=1}^{n} A_{B(e_i, X)} e_i$$

(b)

$$\Delta V^\top = nV^\top$$

(c)

$$\nabla^2 V^\top = -V^\top - \sum_{i=1}^{n} A_{B(e_i, V^\top)} e_i$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial ortonormal qualquer de Σ.

Demonstração.

a) De (2.12), sabemos que

$$\langle \Delta X, Y \rangle = -\langle \nabla^2 X, Y \rangle + \mathrm{Ric}_\Sigma(X, Y)$$

para todo $Y \in \Gamma(T\Sigma)$. Como pela equação de Gauss

$$\langle R(X, e_i)e_i, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, e_i \rangle \langle Y, e_i \rangle + \langle B(X, Y), B(e_i, e_i) \rangle - \langle B(X, e_i), B(Y, e_i) \rangle.$$

temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_\Sigma(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} \big(\langle X, Y \rangle - \langle X, e_i \rangle \langle Y, e_i \rangle + \langle B(X, Y), B(e_i, e_i) \rangle - \langle B(X, e_i), B(Y, e_i) \rangle \big) \\
&= n\langle X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle + \langle B(X, Y), H \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A_{B(X, e_i)} e_i, Y \rangle \\
&= \langle (n-1)X - \sum_{i=1}^{n} A_{B(e_i, X)} e_i, Y \rangle
\end{aligned}$$

o que por sua vez implica que

$$\nabla^2 X = -\Delta X + (n-1)X - \sum_{i=1}^{n} A_{B(e_i,X)}e_i.$$

b) Seja ω a 1-forma de Σ a qual $V^\top$ é dual. Como operador de Hodge-Laplace Δ e a diferencial exterior d comutam entre si, isto é, $\Delta \circ d = d \circ \Delta$, temos das partes (c) e (d) do Lema 2.3.1 que

$$\langle \Delta V^\top, Y\rangle = \Delta\omega(Y) = -\Delta(d\langle V,\eta\rangle)(Y) = -d(\Delta\langle V,\eta\rangle)(Y) = n\langle V^\top, Y\rangle,$$

para todo $Y \in \Gamma(T\Sigma)$. Logo $\Delta V^\top = nV^\top$.

c) Como sabemos de (a),

$$\nabla^2 V^\top = -\Delta V^\top + (n-1)V^\top - \sum_{i=1}^{n} A_{B(e_i,V^\top)}e_i$$

e assim decorre de (b) que

$$\nabla^2 V^\top = -V^\top - \sum_{i=1}^{n} A_{B(e_i,V^\top)}e_i.$$

□

Lema 2.3.3. *Seja V um campo de vetores paralelo de $\mathbb{R}^{n+p+2}$ e X um campo vetores tangente de Σ. Dado $x \in \Sigma$, temos*

(a) $\Delta\langle V, X\rangle(x) = -(n-2)\langle V, X\rangle + \langle V, \Delta X\rangle - 2\operatorname{div}(X)\langle V,\eta\rangle + 2\sum_{i=1}^{n}\langle B(e_i, V^\top), B(e_i, X)\rangle - 2\sum_{i=1}^{n}\langle A_{V^\perp}e_i, \nabla_{e_i}X\rangle$

(b) $\nabla\langle V, X\rangle(x) = \langle V,\eta\rangle X + A_{V^\perp}X + \sum_{i=1}^{n}\langle V, \nabla_{e_i}X\rangle e_i$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma referencial geodésico arbitrário de Σ em x.

Demonstração.

a) Desde que

$$-\Delta\langle V, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i\langle V, X\rangle = \langle \nabla^2 V^\top, X\rangle + \langle \nabla^2 X, V\rangle + 2\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}V^\top, \nabla_{e_i}X\rangle,$$

temos dos lemas 2.3.1 e 2.3.2 que

$$\begin{aligned}-\Delta\langle V, X\rangle = &-\langle V, X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle A_{B(e_i,V^\top)}e_i, X\rangle - \langle \Delta X, V\rangle + (n-1)\langle X, V\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle A_{B(e_i,X)}e_i, V\rangle \\ &+ 2\langle V,\eta\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_i}X\rangle + 2\sum_{i=1}^{n}\langle A_{V^\perp}e_i, \nabla_{e_i}X\rangle\end{aligned}$$

e portanto

$$-\Delta\langle V,X\rangle(x)=(n-2)\langle V,X\rangle-\langle V,\Delta X\rangle+2\mathrm{div}(X)\langle V,\eta\rangle-2\sum_{i=1}^{n}\langle B(e_i,V^{\top}),B(e_i,X)\rangle$$
$$+2\sum_{i=1}^{n}\langle A_{V^{\perp}}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle.$$

b) Como

$$\nabla\langle V,X\rangle=\sum_{i=1}^{n}e_i\langle V,X\rangle e_i=\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}V^{\top},X\rangle e_i+\sum_{i=1}^{n}\langle V,\nabla_{e_i}X\rangle e_i.$$

decorre do Lema 2.3.1 que

$$\nabla\langle V,X\rangle=\langle V,\eta\rangle\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,X\rangle e_i+\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,A_{V^{\perp}}X\rangle e_i+\sum_{i=1}^{n}\langle V,\nabla_{e_i}X\rangle e_i$$

ou seja,

$$\nabla\langle V,X\rangle=\langle V,\eta\rangle X+A_{V^{\perp}}X+\sum_{i=1}^{n}\langle V,\nabla_{e_i}X\rangle e_i.$$

$\square$

Lema 2.3.4. *Sejam V e W campos de vetores paralelos de $\mathbb{R}^{n+p+2}$ e X um campo de vetores tangente de Σ. Se Z_X é como na Definição 1.8.1, então*

$$LZ_X=-2(n-1)Z_X+Z_{\Delta X}+2N$$

onde

$$N=-\mathrm{div}(X)(\langle W,\eta\rangle V^{\perp}-\langle V,\eta\rangle W^{\perp})+\sum_{i=1}^{n}(\langle B(e_i,W^{\top}),B(e_i,X)\rangle V^{\perp}-\langle B(e_i,V^{\top}),B(e_i,X)\rangle W^{\perp})$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(\langle A_{V^{\perp}}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle W^{\perp}-\langle A_{W^{\perp}}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle V^{\perp})+(B(\nabla\langle W,X\rangle,V^{\top})-B(\nabla\langle V,X\rangle,W^{\top})).$$

Demonstração. Como $LZ_X=L(\langle W,X\rangle V^{\perp})-L(\langle V,X\rangle W^{\perp})$, para calcular LZ_X é suficiente calcularmos $L(\langle W,X\rangle V^{\perp})$ e $L(\langle V,X\rangle W^{\perp})$. Assim, para provarmos o lema, iremos calcular inicialmente $L(\langle W,X\rangle V^{\perp})$.

Por meio de calculo direto é possível verificarmos que

$$\nabla^2(\langle W,X\rangle V^{\perp})=-\Delta\langle W,X\rangle V^{\perp}+2\nabla^{\perp}_{\nabla\langle W,X\rangle}V^{\perp}+\langle W,X\rangle\nabla^2V^{\perp}$$

e assim os lemas 2.3.1 e 2.3.3 implicam que

$$\begin{aligned}\nabla^2(\langle W,X\rangle V^{\perp})&=-\Delta\langle W,X\rangle V^{\perp}-2B(\nabla\langle W,X\rangle,V^{\perp})-\langle W,X\rangle\tilde{B}(V^{\perp})\\&=(n-2)\langle W,X\rangle V^{\perp}-\langle W,\Delta X\rangle V^{\perp}+2\mathrm{div}(X)\langle W,\eta\rangle V^{\perp}\\&\quad-2\sum_{i=1}^{n}\langle B(e_i,W^{\top}),B(e_i,X)\rangle V^{\perp}+2\sum_{i=1}^{n}\langle A_{W^{\perp}}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle V^{\perp}\\&\quad-2B(\nabla\langle W,X\rangle,V^{\perp})-\langle W,X\rangle\tilde{B}(V^{\perp})\end{aligned}$$

Como $\bar{R}(V^\perp) = nV^\perp$, temos da identidade acima que

$$\begin{aligned} L(\langle W, X\rangle V^\perp) &= -\nabla^2(\langle W, X\rangle V^\perp) - \langle W, X\rangle \tilde{R}(V^\perp) - \langle W, X\rangle \tilde{B}(V^\perp) \\ &= -2(n-1)\langle W, X\rangle V^\perp + \langle W, \Delta X\rangle V^\perp - 2\mathrm{div}(X)\langle W, \eta\rangle V^\perp \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n}\langle B(e_i, W^\top), B(e_i, X)\rangle V^\perp - 2\sum_{i=1}^{n}\langle A_{W^\perp} e_i, \nabla_{e_i} X\rangle V^\perp \\ &+ 2B(\nabla\langle W, X\rangle, V^\top) \end{aligned}$$

Por sua vez, argumentos análogos aos empregados no calculo de $L(\langle W, X\rangle V^\perp)$ implicam que

$$\begin{aligned} -L(\langle V, X\rangle W^\perp) = 2(n-1)&\langle V, X\rangle W^\perp - \langle V, \Delta X\rangle W^\perp + 2\mathrm{div}(X)\langle V, \eta\rangle W^\perp \\ &-2\sum_{i=1}^{n}\langle B(e_i, V^\top), B(e_i, X)\rangle W^\perp + 2\sum_{i=1}^{n}\langle A_{V^\perp} e_i, \nabla_{e_i} X\rangle W^\perp \\ &-2B(\nabla\langle V, X\rangle, W^\top) \end{aligned}$$

e assim obtemos que

$$LZ_X = -2(n-1)Z_X + Z_{\Delta X} + 2N,$$

o que conclui a prova do lema. $\square$

O seguinte lema será utilizado não apenas nesse capítulo, como em todos os demais, sendo um argumento recorrente na prova dos principais resultados. Por essa razão adotamos uma notação mais geral do que a usada até aqui.

Lema 2.3.5. *Dado vetores X, Y de $\mathbb{R}^d$, temos que*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, X\rangle\langle x, Y\rangle dx = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{d}\langle X, Y\rangle.$$

Demonstração. Seja V o campo de vetores tangente da bola fechada e unitária $\mathbb{B}^d$ de $\mathbb{R}^d$ tal que a cada ponto $x \in \mathbb{B}^d$ associa o vetor $V(x) = \langle x, X\rangle Y$. Considerando $\mathbb{S}^{d-1}$ como o bordo $\partial\mathbb{B}^d$, temos do Teorema da Divergência para variedades compactas que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, X\rangle\langle x, Y\rangle dx = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, V\rangle dx = \int_{\mathbb{B}^d} \mathrm{div}(V) dv_{\mathbb{B}^d}.$$

Assim, como

$$\mathrm{div}(V) = \sum_{i=1}^{d}\langle D_{E_i} V, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{d}\langle X, E_i\rangle\langle Y, E_i\rangle = \langle X, Y\rangle,$$

onde $\{E_1, ..., E_d\}$ é um referencial ortonormal de $\mathbb{B}^d$, e

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) = d \cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{B}^d),$$

temos que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle x, X\rangle\langle x, Y\rangle dx = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{d}\langle X, Y\rangle.$$

$\square$

A seguinte convenção também será frequente nesse texto e por esse motivo a apresentamos com uma notação mais geral.

Definição 2.3.2. Seja U o conjunto de todos os campos de vetores paralelos unitários de $\mathbb{R}^d$. Identificando os elementos de U de modo natural com os pontos de $\mathbb{S}^{d-1}$, podemos considerar em U a medida $\mu = d \cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})^{-1} dv_{\mathbb{S}^{d-1}}$. No que segue, μ será a medida considerada em U.

Observem que a identidade

$$\int_U \langle V, X\rangle\langle V, Y\rangle d\mu(V) = \langle X, Y\rangle$$

válida para todos os vetores X e Y de $\mathbb{R}^{n+p+2}$, é uma consequência imediata do lema e da definição acima.

Com esse lema, encerramos a primeira parte do capítulo. Na próxima seção iremos enunciar e demostrar os principais resultados do capítulo.

2.4 Resultados Principais

Teorema A. *Seja Σ^n uma subvariedade mínima fechada de $\mathbb{S}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferior pela contante C, então temos que*

$$\lambda_\alpha(L) \leq \lambda_{m(\alpha)}(\Delta_1) - 2\left(\frac{n-1}{p+1}\right) - 2\left(\frac{p}{p+1}\right)C,$$

onde $m(\alpha) = \binom{n+p+2}{2}(\alpha - 1) + 1$.

Demonstração. Seja $\{N_1, N_2, \ldots\}$ uma base ortonormal, referente ao produto L^2, do espaço das seções normais $\Gamma(T\Sigma^\perp)$ formada por autovetores de L, de modo que N_i está associado à $\lambda_i(L)$.

Dado um inteiro $\alpha > 1$, mostraremos que existe um inteiro positivo m tal que o espaço $\mathcal{L}_m$ gerado pelos m primeiros autosespaços do operador de Hodge-Laplace Δ_1 de Σ possui um campo de vetores não-nulo X tal que

$$\int_\Sigma \langle Z_X(V, W), N_1\rangle = \int_\Sigma \langle Z_X(V, W), N_2\rangle = \cdots = \int_\Sigma \langle Z_X(V, W), N_{\alpha-1}\rangle = 0, \tag{2.13}$$

para todo par de campos de vetores paralelos V e W.

Como Z_X é uma aplicação bilinear anti-simétrica em relação a V e W e o espaço dos campos de vetores paralelos de $\mathbb{R}^{n+p+2}$ tem dimensão $(n+p+2)$, o problema de determinarmos X é equivalente a encontrarmos uma solução não trivial para um sistema homogêneo com $\binom{n+p+2}{2}(\alpha-1)$ equações e m incógnitas. Logo podemos afirmar que um campo X, como o descrito acima, exite no espaço $\mathcal{L}_m$, com

$$m = m(\alpha) = \binom{n+p+2}{2}(\alpha-1)+1.$$

Fixado um tal campo X, o Princípio do min-máx 1.8.1 implica que

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(L)\int_\Sigma |Z_X(V,W)|^2 &\leq \int_\Sigma \langle LZ_X(V,W), Z_X(V,W)\rangle \\ &= -2(n-1)\int_\Sigma |Z_X(V,W)|^2 + \int_\Sigma \langle Z_{\Delta X}, Z_X(V,W)\rangle \\ &+ 2\int_\Sigma \langle N, Z_X(V,W)\rangle,\end{aligned} \tag{2.14}$$

para todo par de vetores paralelos V e W de $\mathbb{R}^{n+p+2}$.

Para conclusão da demonstração, faremos uso de um argumento de integração que envolve o Lema 2.3.5 e expressões pontuais dos integrandos presentes na desigualdade acima, os quais passaremos a calcular agora.

Dado $x \in \Sigma$, sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico de Σ em x e $\{\eta_1, ..., \eta_{p+1}\}$ referencial ortonormal local de $\Gamma(T\Sigma^\perp)$ definidos em uma mesma vizinhança de x. Em termos desses referenciais, temos que

$$|Z_X|^2 = \langle W,X\rangle^2 \sum_{m=1}^{p+1}\langle V,\eta_m\rangle^2 - 2\sum_{m=1}^{p+1}\langle W,X\rangle\langle W,\eta_m\rangle\langle V,\eta_m\rangle\langle V,X\rangle + \sum_{m=1}^{p+1}\langle V,X\rangle^2\langle W,\eta_m\rangle^2,$$

$$\begin{aligned}\langle Z_{\Delta X}, Z_X\rangle = &\langle W,X\rangle\langle W,\Delta X\rangle \sum_{m=1}^{p+1}\langle V,\eta_m\rangle^2 - \sum_{m=1}^{p+1}\langle W,\Delta X\rangle\langle W,\eta_m\rangle\langle V,X\rangle\langle V,\eta_m\rangle \\ &- \sum_{m=1}^{p+1}\langle V,\Delta X\rangle\langle V,\eta_m\rangle\langle W,X\rangle\langle W,\eta_m\rangle + \langle V,X\rangle\langle V,\Delta X\rangle\sum_{m=1}^{p+1}\langle W,\eta_m\rangle^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\langle W,\eta\rangle V^\perp - \langle V,\eta\rangle W^\perp, Z_X\rangle = &\langle W,X\rangle\langle W,\eta\rangle\sum_{j=1}^{n}\langle V,e_j\rangle^2 - \langle W,\eta\rangle\langle W^\perp, V^\perp\rangle\langle V,X\rangle \\ &- \langle V,\eta\rangle\langle V^\perp, W^\perp\rangle\langle W,X\rangle + \langle V,X\rangle\langle V,\eta\rangle\sum_{j=1}^{n}\langle W,e_j\rangle^2,\end{aligned}$$

$$\langle\langle B(W^\top,e_i),B(X,e_i)\rangle V^\perp-\langle B(V^\top,e_i),B(X,e_i)\rangle W^\perp,Z_X\rangle=-\langle B(W^\top,e_i),B(X,e_i)\rangle\langle W^\perp,V^\perp\rangle\langle V,X\rangle$$

$$-\langle B(V^\top,e_i),B(X,e_i)\rangle\langle V^\perp,W^\perp\rangle\langle W,X\rangle+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle W,X\rangle\langle W,e_j\rangle\langle B(e_j,e_i),B(X,e_j)\langle V,e_k\rangle^2$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle V,X\rangle\langle V,e_j\rangle\langle B(e_j,e_i),B(X,e_i)\rangle\langle W,e_k\rangle^2,$$

$$\langle\langle A_{V^\perp}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle W^\perp-\langle A_{W^\perp}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle V^\perp,Z_X\rangle=\sum_{m=1}^{p+1}\langle A_{V^\perp}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle\langle W,X\rangle\langle W,\eta_m\rangle\langle\eta_m,V\rangle$$

$$-\sum_{m=1}^{p+1}\langle V,\eta_m\rangle\langle A_{\eta_m}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle\langle V,X\rangle|W^\perp|^2-\sum_{m=1}^{p+1}\langle W,\eta_m\rangle\langle A_{\eta_m}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle\langle W,X\rangle|V^\perp|^2$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\langle A_{W^\perp}e_i,\nabla_{e_i}X\rangle\langle V,X\rangle\langle W,\eta_m\rangle\langle\eta_m,V\rangle$$

e

$$\langle B(\nabla\langle W,X\rangle,V^\top)-B(\nabla\langle V,X\rangle,W^\top),Z_X\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle W,\eta\rangle\langle W,X\rangle\langle V,e_j\rangle\langle B(X,e_j),V\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{p+1}\langle W,X\rangle\langle V,e_i\rangle\langle W,\eta_m\rangle\langle B(A_{\eta_m}X,e_i),V\rangle+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle W,\nabla_{e_j}X\rangle\langle W,X\rangle\langle V,e_k\rangle\langle B(e_j,e_k),V\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\langle W,\eta\rangle\langle V,X\rangle\langle V,e_j\rangle\langle B(X,e_j),W\rangle-\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{p+1}\langle V,X\rangle\langle V,e_j\rangle\langle W,\eta_m\rangle\langle B(A_{\eta_m}X),e_j),W\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle W,\nabla_{e_j}X\rangle\langle V,X\rangle\langle V,e_k\rangle\langle B(e_j,e_k),W\rangle-\sum_{j=1}^{n}\langle V,\eta\rangle\langle W,X\rangle\langle W,e_j\rangle\langle B(X,e_j),V\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{p+1}\langle W,X\rangle\langle W,e_j\rangle\langle V,\eta_m\rangle\langle B(A_{\eta_m}X),e_j),V\rangle-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle V,\nabla_{e_j}X\rangle\langle W,X\rangle\langle W,e_i\rangle\langle B(e_j,e_i),V\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\langle V,\eta\rangle\langle V,X\rangle\langle W,e_j\rangle\langle B(X,e_j),W\rangle+\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{p+1}\langle V,X\rangle\langle W,e_j\rangle\langle V,\eta_m\rangle\langle B(A_{\eta_m}X,e_i),W\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\langle V,\nabla_{e_j}X\rangle\langle V,X\rangle\langle W,e_i\rangle\langle B(e_j,e_i),W\rangle$$

Seja U como na Definição 2.3.2 com $d = (n+p+2)$. Considerando em $U \times U$ a medida produto, ao aplicarmos o Teorema de Fubini e o Lema 2.3.5 ao conjuntos das expressões pontuais obtemos as seguintes equações:

$$\int_{U\times U} |Z_X|^2(x)d\mu(V)d\mu(W) = 2(p+1)|X|^2(x),$$

$$\int_{U\times U} \langle Z_{\Delta X}, Z_X\rangle(x)d\mu(V)d\mu(W) = 2(p+1)\langle X, \Delta X\rangle(x),$$

$$\int_{U\times U} \mathrm{div}(X)\langle\langle W,\eta\rangle V^{\perp} - \langle V,\eta\rangle W^{\perp}, Z_X\rangle(x)d\mu(V)d\mu(W) = 0,$$

$$\int_{U\times U} \langle\langle B(W^{\top},e_i), B(X,e_i)\rangle V^{\perp} - \langle B(V^{\top},e_i), B(X,e_i)\rangle W^{\perp}, Z_X\rangle(x)d\mu(V)d\mu(W) =$$
$$2(p+1)|B(X,e_i)|^2(x),$$

$$\int_{U\times U} \langle\langle A_{V^{\perp}}e_i, \nabla_{e_i}X\rangle W^{\perp} - \langle A_{W^{\perp}}e_i, \nabla_{e_i}X\rangle V^{\perp}, Z_X\rangle(x)d\mu(V)d\mu(W) = 0,$$

e

$$\int_{U\times U} \langle B(\nabla\langle V,X\rangle, W^{\top}) - B(\nabla\langle W,X\rangle, V^{\top}), Z_X\rangle(x)d\mu(V)d\mu(W) = -2\sum_{m=1}^{p+1}|A_{\eta_m}X|^2(x)$$

Por outro lado

$$\sum_{i=1}^{n}|B(X,e_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{p+1}\langle B(X,e_i),\eta_k\rangle^2 = \sum_{m=1}^{p+1}\sum_{i=1}^{n}\langle A_{\eta_m}X, e_i\rangle^2 = \sum_{m=1}^{p+1}|A_{\eta_m}X|^2$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}|B(X,e_i)|^2 = (n-1)|X|^2 - \mathrm{Ric}_{\Sigma}(X,X),$$

onde a segunda equação decorre da equação de Gauss e minimalidade de Σ. Combinando as três ultimas equações obtemos ainda que

$$\int_{U\times U} \langle B(\nabla\langle V,X\rangle, W^{\top}) - B(\nabla\langle W,X\rangle, V^{\top}), Z_X\rangle(x)d\mu(V)d\mu(W) = -2(n-1)|X|^2 + 2\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X,X).$$

Assim, ao integrarmos a desigualdade (4.37) com respeito a $(V,W) \in U\times U$, o Teorema de Fubini e as equações anteriores implicam que

$$\begin{aligned}
2(p+1)\lambda_{\alpha}(L)\int_{\Sigma}|X|^2dv_g &\le -4(n-1)\int_{\Sigma}|X|^2dv_g + 2(p+1)\int_{\Sigma}\langle X,\Delta X\rangle dv_g - 4p\int_{\Sigma}\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X,X)dv_g \\
&\le -4(n-1)\int_{\Sigma}|X|^2dv_g + 2(p+1)\lambda_{m(\alpha)}(\Delta_1)\int_{\Sigma}|X|^2dv_g \\
&\quad - 4p\int_{\Sigma}\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X,X)dv_g
\end{aligned}$$

e consequentemente que

$$\lambda_\alpha(L) \leq \lambda_{m(\alpha)}(\Delta_1) - 2\left(\frac{n-1}{p+1}\right) - 2\left(\frac{p}{p+1}\right)C,$$

uma vez que $X \in \mathcal{L}_{m(\alpha)} \backslash \{0\}$. Concluímos assim a demostração da nossa afirmação. $\square$

Teorema B. *Seja Σ^n uma subvariedade mínima fechada de $\mathbb{S}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$ e $n \geq 2$, tal que Σ^n não está em nenhuma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+p+1}$. Se $p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > -(n-1)$, então*

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

Demonstração. Com a mesma notação usada na prova do teorema anterior, ao considerarmos

$$\alpha = \left\lfloor \frac{b_1(\Sigma) + \binom{n+p+2}{2} - 1}{\binom{n+p+2}{2}} \right\rfloor,$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa a função maior menor inteiro, temos que $m(\alpha) \leq b_1(\Sigma)$. Assim o Teorema de Hodge-de Rham implica que $\mathcal{L}_{m(\alpha)}$ é um subespaço do espaço dos campos harmônico de Σ e portanto que $\lambda_m(\Delta_1) = 0$. Esse último fato, juntamente com o Teorema A e nossa hipótese, implica que

$$\lambda_\alpha(L) < 0$$

e portanto que $\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \alpha$. Como $\alpha \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}$, temos que

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

$\square$

Podemos observar que a hipótese na curvatura de Ricci das subvariedade mínimas de Σ consideradas no Teorema B induz uma estimativa superior para o quadrado de suas segunda formas fundamentais B. De fato, se Σ^n é uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^{n+p+1}$, temos da equação de Gauss que

$$\langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle = \langle e_i, e_i\rangle\langle e_j, e_j\rangle - \langle e_i, e_j\rangle^2 + \langle B(e_i, e_i), B(e_j, e_j)\rangle - |B(e_i, e_j)|^2$$

qualquer que seja o referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de Σ considerado. Assim, se Σ é mínima e tal que $p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > -(n-1)$, então temos da identidade acima que

$$|B|^2 < \frac{n(n-1)(p+1)}{p} \tag{2.15}$$

Chern, do Carmo e Kobayashi [9] consideram uma estimativa sobre o quadrado da segunda forma fundamental de subvariedades mínimas de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ satisfeita apenas por uma família de subvariedades mínimas de topologia restrita:

Teorema 2.4.1 (Chern-do Carmo-Kobayashi)**.** *A superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4$ e as hipersuperfícies de Clifford de $\mathbb{S}^{n+1}$ são as únicas subvariedades mínimas fechadas Σ^n de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ cuja segunda forma fundamental B é tal que*

$$|B|^2 \leq \frac{n(p+1)}{2p+1}. \tag{2.16}$$

Demonstração. Ver [9]. □

A comparação entre as estimativas de (2.16) e (2.15), mostram que a cota em (2.15) é maior que a cota em (2.16). Esse fato nos faz crer na existência de exemplos de subvariedades mínimas com topologias mais complexas, isto é, com primeiro número de Betti relativamente altos e portanto mais instáveis, segundo o Teorema B.

3 Subvariedades Mínimas de Ambientes Mergulhados em Espaços Euclidianos

Neste capítulo iremos considerar o espaço ambiente M *mergulhando em algum espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^d$*. Essa hipótese pode ser considerada natural, uma vez que Teorema de Mergulho de Nash afirma que toda variedade Riemanniana pode ser isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano.*

Assim, ao considerarmos um mergulho $M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$*, indicaremos por* II *a sua segunda forma fundamental e por* D *e* $\bar{\nabla}$ *a conexões de Levi-Civita de* $\mathbb{R}^d$ *e* M*, respectivamente, de modo que temos*

$$D_X Y = \bar{\nabla}_X Y + II(X, Y)$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$*. Quando consideramos uma subvariedade de* Σ*, temos ainda as seguintes identidades*

$$D_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) + II(X, Y) \tag{3.17}$$

e

$$D_X Z = \nabla^{\perp}_X Z - A_Z(X) + II(X, Z) \tag{3.18}$$

quaisquer que sejam $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$ *e* $Z \in \Gamma(T\Sigma^{\perp})$*.*

3.1 Resultados Principais

O objetivo desse capítulo é obter condições para que uma dada subvariedade mínima Σ *de* M *possa ter seu Índice estimado por seu número de Betti* $b_1(\Sigma)$*. A condição que obtemos é dada em termos da curvatura de Ricci de* Σ *e uma forma bilinear de* $\Gamma(T\Sigma)$*, a qual indicamos por* ACS *e definimos a seguir.*

Definição 3.1.1. Dada uma subvariedade Σ de M, a aplicação $\mathrm{ACS} : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ de Σ, associada ao mergulho $M^{n+p+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, é definida em termos dos tensores

$$\begin{aligned} T_1 : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) &\to C^\infty(\Sigma), \\ (X, Y, T, W) &\mapsto \langle \bar{R}(X, Y)T, W \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) &\to C^\infty(\Sigma), \\ (X, Y, T, W) &\mapsto \langle II(X, Y), II(T, W) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 : \Gamma(T\Sigma^\perp) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma^\perp) &\to C^\infty(\Sigma) \\ (N, X, Y, Z) &\mapsto \langle \bar{R}(N, X)Y, Z \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_4 : \Gamma(T\Sigma^\perp) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma^\perp) &\to C^\infty(\Sigma) \\ (N, X, Y, Z) &\mapsto \langle II(N, X), II(Y, Z) \rangle \end{aligned}$$

como

$$\mathrm{ACS} = (p-1)\mathrm{tr}_{g_{23}}(T_1) + (p+1)\mathrm{tr}_{g_{23}}(T_2) + \mathrm{tr}_g(\mathrm{tr}_{g_{23}}(T_4)) \cdot g - \mathrm{tr}_{\mathrm{g}}(\mathrm{tr}_{g_{23}}(T_3)) \cdot g$$

onde g é a métrica Riemanniana de M.

Lema 3.1.1. *Seja Σ^n uma subvariedade de M^{n+p+1}. Dados um ponto x e campos de vetores $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$, temos que*

$$\begin{aligned} \mathrm{ACS}(X, Y)(x) = (p-1)\sum_{k=1}^{n} \langle \bar{R}(X, e_k)e_k, Y \rangle + (p+1)\sum_{k=1}^{n} \langle II(X, e_k), II(e_k, Y) \rangle \\ + \langle X, Y \rangle \sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n} \langle II(\eta_l, e_k), II(\eta_l, e_k) \rangle - \langle X, Y \rangle \sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n} \langle \bar{R}(\eta_l, e_k)e_k, \eta_l \rangle, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam referenciais ortonormais locais $\{e_1, ..., e_n\}$ e $\{\eta_1, ..., \eta_{p+1}\}$ de $\Gamma(T\Sigma)$ e $\Gamma(T\Sigma^\perp)$, respectivamente, definidos numa vizinhança de x.

Demonstração. A afirmação é uma consequência direta da definição de ACS. □

Com as considerações acima podemos enunciar e provar os principais resultados desse capítulo. No que segue, M é uma variedade Riemanniana fechada .

Teorema C. *Seja $M^{n+p+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ um mergulho isométrico de uma variedade Riemanniana M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, com $p \geq 0$. Se Σ^n é uma subvariedade mínima fechada de M e C uma constante real tal que*

$$-\frac{2p}{p+1}\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X, X)dv_g + \frac{1}{p+1}\int_\Sigma \mathrm{ACS}(X, X)dv_g < C\int_\Sigma |X|^2 dv_g \tag{3.19}$$

para todo campo de vetores X não-nulo no espaço $\mathfrak{L}_m$ gerado pelos m primeiros autoespaços do operador de Hodge-Laplace Δ_1 de Σ, então

$$\alpha := \sharp\{\lambda_i(L)|\lambda_i(L) < \lambda_m(\Delta_1) + C\} \geq \frac{m}{\binom{d}{2}}.$$

Demonstração. Suponha que nossa afirmação não seja verdadeira, isto é, $\alpha < \frac{2}{d(d-1)}m$. Fixadas uma base L^2-ortonormal $\{N_1, N_2, \dots\}$ do espaço $\Gamma(T\Sigma^\perp)$ formada por autovetores do operador estabilidade L de Σ, de modo que N_i está associada à $\lambda_i(L)$, e uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_{\bar{d}}\}$ do espaço dos campos de vetores paralelos de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$, com $\bar{d} = \frac{d(d-1)}{2}\alpha$, temos que a aplicação linear

$$X \in \mathfrak{L}_m \mapsto \left(\int_\Sigma \langle Z_X(E_i, E_j), N_1\rangle dv_g, \int_\Sigma \langle Z_X(E_i, E_j), N_2\rangle dv_g, \dots, \int_\Sigma \langle Z_X(E_i, E_j), N_\alpha\rangle dv_g \right),$$

não é injetiva e assim existe $X \in \mathfrak{L}_m$ não-nulo tal que

$$\int_\Sigma \langle Z_X(E_i, E_j), N_1\rangle dv_g = \int_\Sigma \langle Z_X(E_i, E_j), N_2\rangle dv_g = \cdots = \int_\Sigma \langle Z_X(E_i, E_j), N_\alpha\rangle dv_g = 0, \quad (3.20)$$

para todo $1 \leq i < j \leq n$. Fixado X, podemos observar que (3.20) equivale a termos

$$\int_\Sigma \langle Z_X(V, W), N_1\rangle dv_g = \int_\Sigma \langle Z_X(V, W), N_2\rangle dv_g = \cdots = \int_\Sigma \langle Z_X(V, W), N_\alpha\rangle dv_g = 0, \quad (3.21)$$

para todo par de campos de vetores paralelos V e W de $\mathbb{R}^d$, uma vez que Z_X é uma forma bilinear anti-simétrica no espaço dos campos paralelos de $\mathbb{R}^d$. Decorre portanto do Princípio do min-máx que

$$\lambda_{\alpha+1}(L) \int_\Sigma |Z_X(V, W)|^2 dv_g \leq \int_\Sigma \langle LZ_X(V, W), Z_X(V, W)\rangle dv_g \quad (3.22)$$

Para prosseguirmos com a demostração precisamos de expressões pontuais dos integrandos presentes na desigualdade acima, as quais calcularemos a seguir.

Dado um ponto x de Σ, sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico de Σ em x e $\{\eta_1, \dots, \eta_{p+1}\}$ referencial ortonormal de $\Gamma(T\Sigma^\perp)$ definidos em uma mesma vizinhança de x em Σ. Como

$$\begin{aligned}
\nabla^\perp_{e_k} Z_X &= \sum_{l=1}^{p+1} \langle \nabla^\perp_{e_k} Z_X, \eta_l\rangle \eta_l \\
&= \sum_{l=1}^{p+1} (e_k \langle Z_X, \eta_l\rangle \eta_l - \langle Z_X, \nabla^\perp_{e_k}\eta_l\rangle)\eta_l \\
&= \sum_{l=1}^{p+1} (\langle \langle W, D_{e_k}X\rangle V - \langle V, D_{e_k}X\rangle W, \eta_l\rangle + \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, D_{e_k}\eta_l\rangle - \langle Z, \nabla^\perp_{e_k}\eta_l\rangle)\eta_l
\end{aligned}$$

as equações 3.17 e 3.18 implicam que

$$\nabla^{\perp}_{e_k} Z_X = \sum_{l=1}^{p+1} \big(\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle + \langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle$$
$$+ \langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle + \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\big)$$
$$- \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle)\eta_l$$

Assim, calculando $|\nabla^{\perp}_{e_k} Z_X|^2$ por meio da identidade acima, obtemos que

$$|\nabla^{\perp}_{e_k} Z_X|^2 = \sum_{l=1}^{p+1} \big(\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle^2 + \langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle^2$$
$$+ \langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle^2 + \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\rangle^2$$
$$+ \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle^2)$$
$$+ 2\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle$$
$$+ 2\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle$$
$$+ 2\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\rangle$$
$$- 2\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle$$
$$+ 2\langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle$$
$$+ 2\langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\rangle$$
$$- 2\langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle$$
$$+ 2\langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\rangle$$
$$- 2\langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle$$
$$- 2\langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\rangle \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle\big)$$

Desenvolvendo os termos presentes no lado direito da equação acima, temos

$$\langle \langle W, II(e_k,X)\rangle V - \langle V, II(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle^2 = \langle W, II(e_k,X)\rangle^2 \langle V, \eta_l\rangle^2$$
$$- 2l\langle W, II(e_k,X)\rangle \langle V, \eta_l\rangle \langle V, II(e_k,X)\rangle \langle W, \eta_l\rangle + \langle V, II(e_k,X)\rangle^2 \langle W, \eta_l\rangle^2,$$

$$\langle \langle W, B(e_k,X)\rangle V - \langle V, B(e_k,X)\rangle W, \eta_l\rangle^2 = \langle W, B(e_k,X)\rangle^2 \langle V, \eta_l\rangle^2$$
$$- 2l\langle W, B(e_k,X)\rangle \langle V, \eta_l\rangle \langle V, B(e_k,X)\rangle \langle W, \eta_l\rangle + \langle V, B(e_k,X)\rangle^2 \langle W, \eta_l\rangle^2,$$

$$\langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle^2 = \langle W, \nabla e_k X\rangle^2 \langle V, \eta_l\rangle^2$$
$$- 2\langle W, \nabla e_k X\rangle \langle V, \eta_l\rangle \langle V, \nabla e_k X\rangle \langle W, \eta_l\rangle + \langle V, \nabla e_k X\rangle^{\langle} W, \eta_l\rangle^2$$

$$\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W, II(e_k,\eta_l)\rangle^2=\langle W,X\rangle^2\langle V,II(e_k,\eta_l)\rangle^2$$
$$-2\langle W,X\rangle\langle V,II(e_k,\eta_l)\rangle\langle V,X\rangle\langle W,II(e_k,\eta_l)\rangle+\langle V,X\rangle^2\langle W,II(e_k,\eta_l)\rangle^2,$$

$$\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W, A_{\eta_l}e_k\rangle^2=\langle W,X\rangle^2\langle V,A_{\eta_l}e_k\rangle^2$$
$$-2\langle W,X\rangle\langle V,A_{\eta_l}e_k\rangle\langle V,X\rangle\langle W,A_{\eta_l}e_k\rangle+\langle V,X\rangle^2\langle W,A_{\eta_l}e_k\rangle^2,$$

$$\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,B(e_k,X)\rangle V-\langle V,B(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle=$$
$$\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,B(e_k,X)\rangle\langle V,\eta_l\rangle^2-\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,B(e_k,X)\rangle$$
$$-\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,B(e_k,X)\rangle+\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,B(e_k,X)\rangle\langle W,\eta_l\rangle^2,$$

$$\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle V-\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle W,\eta_l\rangle=$$
$$\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle\langle V,\eta_l\rangle^2-\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle$$
$$-\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle+\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle\langle W,\eta_l\rangle^2,$$

$$\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle=$$
$$\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,X\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,II(e_k,\eta_l)\rangle-\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,II(e_k,\eta_l)\langle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,X\rangle$$
$$-\langle V,II(e_k,X)\rangle\rangle\langle V,II(e_k,\eta_l)\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,X\rangle+\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,X\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,II(e_k,\eta_l)\rangle,$$

$$\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle=$$
$$\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,X\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,A_{\eta_l}e_k\rangle-\langle W,II(e_k,X)\rangle\langle W,A_{\eta_l}e_k\langle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,X\rangle$$
$$-\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,A_{\eta_l}e_k\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,X\rangle+\langle V,II(e_k,X)\rangle\langle V,X\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,A_{\eta_l}e_k\rangle,$$

$$\langle\langle W,B(e_k,X)\rangle V-\langle V,B(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle V-\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle W,\eta_l\rangle=$$
$$\langle W,B(e_k,X)\rangle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle\langle V,\eta_l\rangle^2-\langle W,B(e_k,X)\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle$$
$$-\langle V,B(e_k,X)\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle+\langle V,B(e_k,X)\rangle\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle\langle W,\eta_l\rangle^2,$$

$$\langle\langle W,B(e_k,X)\rangle V-\langle V,B(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle=$$
$$\langle W,B(e_k,X)\rangle\langle W,X\rangle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,II(e_k,\eta_l)\rangle-\langle W,B(e_k,X)\rangle\langle W,II(e_k,\eta_l)\langle\langle V,\eta_l\rangle\langle V,X\rangle$$
$$-\langle V,B(e_k,X)\rangle\rangle\langle V,II(e_k,\eta_l)\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,X\rangle+\langle V,B(e_k,X)\rangle\langle V,X\rangle\langle W,\eta_l\rangle\langle W,II(e_k,\eta_l)\rangle,$$

$$\langle\langle W, B(e_k, X)\rangle V - \langle V, B(e_k, X)\rangle W, \eta_l\rangle\langle\langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle =$$
$$\langle W, B(e_k, X)\rangle\langle W, X\rangle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, A_{\eta_l} e_k\rangle - \langle W, B(e_k, X)\rangle\langle W, A_{\eta_l} e_k\langle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, X\rangle$$
$$- \langle V, B(e_k, X)\rangle\langle V, A_{\eta_l} e_k\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, X\rangle + \langle V, B(e_k, X)\rangle\langle V, X\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, A_{\eta_l} e_k\rangle,$$

$$\langle\langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle\langle\langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k, \eta_l)\rangle =$$
$$\langle W, \nabla e_k X\rangle\langle W, X\rangle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, II(e_k, \eta_l)\rangle - \langle W, \nabla e_k X\rangle\langle W, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, X\rangle$$
$$- \langle V, \nabla e_k X\rangle\rangle\langle V, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, X\rangle + \langle V, \nabla e_k X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, II(e_k, \eta_l)\rangle,$$

$$\langle\langle W, \nabla_{e_k} X\rangle V - \langle V, \nabla_{e_k} X\rangle W, \eta_l\rangle\langle\langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k, \eta_l)\rangle =$$
$$\langle W, \nabla_{e_k} X\rangle\langle W, X\rangle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, II(e_k, \eta_l)\rangle - \langle W, \nabla_{e_k} X\rangle\langle W, II(e_k, \eta_l)\langle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, X\rangle$$
$$- \langle V, \nabla_{e_k} X\rangle\rangle\langle V, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, X\rangle + \langle V, \nabla_{e_k} X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, II(e_k, \eta_l)\rangle,$$

$$\langle\langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle\langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle =$$
$$\langle W, X\rangle\langle W, X\rangle\langle V, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle V, A_{\eta_l} e_k\rangle - \langle W, X\rangle\langle W, A_{\eta_l} e_k\rangle\langle V, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle V, X\rangle$$
$$- \langle V, X\rangle\langle V, A_{\eta_l} e_k\rangle\langle W, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle W, X\rangle + \langle V, X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, II(e_k, \eta_l)\rangle\langle W, A_{\eta_l} e_k\rangle$$

e

$$\langle\langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle\langle\langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle =$$
$$\langle W, \nabla e_k X\rangle\langle W, X\rangle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, A_{\eta_l} e_k\rangle - \langle W, X\rangle\langle W, A_{\eta_l} e_k\rangle\langle V, \eta_l\rangle\langle V, X\rangle$$
$$- \langle V, \nabla e_k X\rangle\langle V, A_{\eta_l} e_k\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, X\rangle + \langle V, \nabla e_k X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, \eta_l\rangle\langle W, A_{\eta_l} e_k\rangle.$$

Além disso, valem as seguintes equações:

$$\langle \tilde{R}(Z_X), Z_X\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l,m=1}^{p+1}\big(\langle W, X\rangle^2\langle V, \eta_l\rangle\langle V, \eta_m\rangle\langle \bar{R}(\eta_l, e_k)e_k, \eta_m\rangle$$
$$- \langle W, \eta_l\rangle\langle W, X\rangle\langle V, \eta_m\rangle\langle V, X\rangle\langle \bar{R}(\eta_l, e_k)e_k, \eta_m\rangle - \langle V, \eta_l\rangle\langle V, X\rangle\langle W, \eta_m\rangle\langle W, X\rangle\langle \bar{R}(\eta_l, e_k)e_k, \eta_m\rangle$$
$$+ \langle V, X\rangle^2\langle W, \eta_l\rangle\langle W, \eta_m\rangle\langle \bar{R}(\eta_l, e_k)e_k, \eta_m\rangle\big)$$

e

$$\langle \tilde{B}(Z_X), Z_X\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\big(\langle W, X\rangle^2\langle V, B(e_i, e_j)\rangle^2 - 2\langle W, X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, B(e_i, e_j)\rangle\langle V, B(e_i, e_j)\rangle$$
$$+ \langle V, X\rangle^2\langle W, B(e_i, e_j)\rangle^2\big).$$

Seja U o conjunto dos campos de vetores paralelos e unitários de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$. Considerando em $U \times U$ medida produto, ao integrarmos as expressões pontuais acima em relação a (U, V), o Teorema de Fubini e o Lema 2.3.5 implicam que

$$\int_{U\times U} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} \langle \langle W, II(e_k, X)\rangle V - \langle V, II(e_k, X)\rangle W, \eta_l\rangle^2 d\mu(V) d\mu(W) = 2(p+1) \sum_{k=1}^{n} |II(e_k, X)|^2$$

$$\int_{U\times U} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} \langle \langle W, B(e_k, X)\rangle V - \langle V, B(e_k, X)\rangle W, \eta_l\rangle^2 d\mu(V) d\mu(W) = 2p \sum_{k=1}^{n} |B(e_k, X)|^2$$

$$= 2p \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{R}(X, e_k)e_k, X\rangle - 2p\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X, X), \qquad ,$$

onde a equação $2p \sum_{k=1}^{n} |B(e_k, X)|^2 = \sum_{k=1}^{n} 2p\langle \bar{R}(X, e_k)e_k, X\rangle - 2p\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X, X)$ é consequência da equação de Gauss e de Σ ser mínima.

$$\int_{U\times U} \langle \langle W, \nabla e_k X\rangle V - \langle V, \nabla e_k X\rangle W, \eta_l\rangle^2 d\mu(V) d\mu(W) = 2(p+1) \sum_{k=1}^{n} |\nabla_{e_k} X|^2$$

$$2(p+1) \sum_{l=1}^{p+1} (e_k \langle \nabla_{e_k} X, X\rangle - \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} X, X\rangle) = 2(p+1) \sum_{l=1}^{p+1} (\frac{1}{2} e_k e_k (|X|^2) - \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} X, X\rangle)$$

$$= -(p+1)\Delta(|X|^2) - 2(p+1)\langle \nabla^2 X, X\rangle$$

$$\int_{U\times U} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, II(e_k, \eta_l)\rangle^2 d\mu(V) d\mu(W) = 2|X|^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} |II(e_k, \eta_l)|^2$$

$$\int_{U\times U} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} \langle \langle W, X\rangle V - \langle V, X\rangle W, A_{\eta_l} e_k\rangle^2 d\mu(V) d\mu(W) = 2|X|^2 |B|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} |B(e_k, X)|^2$$

$$= 2|X|^2 |B|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{R}(X, e_i)e_i, X\rangle + 2\mathrm{Ric}_{\Sigma}(X, X),$$

$$\int_{U\times U} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} \langle \langle W, II(e_k, X)\rangle V - \langle V, II(e_k, X)\rangle W, \eta_l\rangle \langle \langle W, B(e_k, X)\rangle V - \langle V, B(e_k, X)\rangle W, \eta_l\rangle d\mu(V) d\mu(W)$$

$$= 0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle V-\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle W,\eta_l\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,II(e_k,X)\rangle V-\langle V,II(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,B(e_k,X)\rangle V-\langle V,B(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,\nabla_{e_k}X\rangle V-\langle V,\nabla_{e_k}X\rangle W,\eta_l\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,B(e_k,X)\rangle V-\langle V,B(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,B(e_k,X)\rangle V-\langle V,B(e_k,X)\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,\nabla e_kX\rangle V-\langle V,\nabla e_kX\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,\nabla e_kX\rangle V-\langle V,\nabla e_kX\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,\nabla e_kX\rangle V-\langle V,\nabla e_kX\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,II(e_k,\eta_l)\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\langle W,\nabla e_k X\rangle V-\langle V,\nabla e_k X\rangle W,\eta_l\rangle\langle\langle W,X\rangle V-\langle V,X\rangle W,A_{\eta_l}e_k\rangle d\mu(V)d\mu(W)=0$$

$$\int_{U\times U}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\tilde{R}(Z_X),Z_X\rangle d\mu(V)d\mu(W)=2|X|^2\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p+1}\langle\bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle$$

$$\int_{U\times U}\langle\tilde{B}(Z_X),Z_X\rangle d\mu(V)d\mu(W)=2|X|^2|B|^2$$

Assim, Integrando agora a desigualdade (4.37) com respeito a (V,W), obtemos do Teorema de Fubini e das equações acima que

$$2(p+1)\lambda_{\alpha+1}(L)\int_\Sigma |X|^2 dv_g\leq\int_\Sigma\big(2(p+1)\langle\Delta X,X\rangle-4p\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)+2\mathrm{ACS}(X,X)\big)dv_g. \tag{3.23}$$

Por outro lado, como pela definição de α,

$$\lambda_{\alpha+1}(L)>\lambda_m(\Delta_1)+C$$

e além disso, temos

$$\lambda_m(\Delta_1)|X|^2\geq\langle\Delta X,X\rangle,$$

já que $X\in\mathcal{L}_m$, temos da desigualdade acima que

$$2(p+1)(\lambda_m(\Delta_1)+C)\int_\Sigma |X|^2 dv_g\leq\int_\Sigma\big(2(p+1)\lambda_m(\Delta_1)|X|^2-4p\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)+2\mathrm{ACS}(X,X)\big)dv_g, \tag{3.24}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Assim, temos que

$$\alpha:=\sharp\{\lambda_i(L)|\lambda_i(L)<\lambda_m(\Delta_1)+C\}\geq\frac{m}{\binom{d}{2}}.$$

□

Uma consequência direta do resultado acima lê-se como:

Teorema D. *Seja $M^{n+p+1}\hookrightarrow\mathbb{R}^d$ um mergulho isométrico de uma variedade Riemanniana M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, com $p\geq 0$. Se Σ^n é uma subvariedade mínima fechada de M, tal que $2p\cdot\mathrm{Ric}_\Sigma>\mathrm{ACS}$, então*

$$\mathrm{Indice}(\Sigma)\geq\frac{b_1(\Sigma)}{\binom{d}{2}}. \tag{3.25}$$

Demonstração. Observem que a hipótese de que $2p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > \mathrm{ACS}$ implica que

$$-\frac{2p}{p+1}\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g + \frac{1}{p+1}\int_\Sigma \mathrm{ACS}(X,X)dv_g < C\int_\Sigma |X|^2 dv_g$$

com $C = 0$, para todo campo de vetores $X \in \Gamma(T\Sigma)$. Em partícula, a desigualdade acima é verdadeira para todo campo harmônico X de Σ. Assim, utilizando a mesma notação que a empregada no Teorema C, se $m = b_1(\Sigma)$, o Teorema de Hodge-de Rham implica que o espaço dos campos tangentes harmônicos de Σ coincide com $\mathcal{L}_m$ e que $\lambda_m = 0$. Segue portanto do Teorema C que

$$\alpha \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{d}{2}},$$

onde $\alpha = \sharp\{\lambda_i(L) < 0\}$. Como por definição $\mathrm{Indice}(\Sigma) = \alpha$, temos que

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{d}{2}}.$$

□

3.2 Aplicações

Nesta parte do texto iremos considerar subvariedades mínimas imersas em espaços ambientes particulares. Os resultados aqui apresentam estimativas de índice do tipo (3.25) sobre hipóteses adequadas sobre curvatura de Ricci das subvariedades.

3.2.1 Esferas Euclidianas

Considerando $\mathbb{S}^{n+p+1}$ com seu mergulho canônico em $\mathbb{R}^{n+p+2}$, o Teorema D implica que em subvariedades mínimas Σ^n de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ que satisfazem a condição de

$$p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > -(n-1)$$

o índice é tal que

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

Essa é uma consequência direta do fato de que, em Σ^n, a ACS *é dada por*

$$\mathrm{ACS} = -2(n-1)\langle\cdot,\cdot\rangle,$$

já que temos que

$$\langle \bar{R}(V,W)W,V\rangle = |V|^2|W|^2 - \langle V,W\rangle^2$$

e

$$|II(V,W)| = |\langle V,W\rangle|,$$

para todo $V, W \in \Gamma(T\mathbb{S}^{n+p+1})$.

Podemos observar que a condição na curvatura de Ricci das subvariedades mínimas de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ *e a estimativa obtida sobre seu índice são idênticas às aquelas do Teorema B. Isso mostra que a técnica utilizada neste capítulo estende aquela aplicada no Capítulo 2, a qual é considerada em subvariedades mínimas de* $\mathbb{S}^{n+p+1}$*, apenas.*

3.2.2 Espaços Projetivos Reais

Nesta seção, os espaços ambiente considerados são os espaços projetivos reais.

Teorema 3.2.1. *Seja* Σ^n *uma subvariedade mínima fechada e orientada de* $\mathbb{RP}^{n+p+1}$*, com* $p \geq 0$ *e* $n \geq 2$*. Se* $p \cdot \mathrm{Ric}_\Sigma > -(n-1)$*, então*

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

Demonstração. A cada subvariedade mínima fechada Σ^n do espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+p+1}$, corresponde uma subvariedade mínima fechada e orientada $\tilde{\Sigma}^n$ de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ invariante pela aplicação antípoda $\sigma : \mathbb{S}^{n+p+1} \to \mathbb{S}^{n+p+1}$e a qual é aplicada sobrejetivamente pela projeção $\pi : \mathbb{S}^{n+p+1} \to \mathbb{RP}^{n+p+1}$ usual de $\mathbb{S}^{n+p+1}$ em $\mathbb{RP}^{n+p+1}$ sobre Σ.

Sejam $\bar{V}$ e $\bar{W}$ campos de vetores paralelos de $\mathbb{R}^{n+p+2}$ e ω uma 1-forma harmônica de Σ. Se V e W são as projeções de $\bar{V}$ e $\bar{W}$ sobre $\mathbb{S}^{n+p+1}$, respectivamente, então $\sigma_* V = -V$ e $\sigma_* W = -W$. Consequentemente, se $V^\perp$ e $W^\perp$ são componentes normais a $\tilde{\Sigma}$ de V e W, temos que $\sigma_* V^\perp = -V^\perp$ e $\sigma_* W^\perp = -W^\perp$.

Por sua vez, $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ é uma 1-forma harmônica de $\tilde{\Sigma}$ tal que $\tilde{\omega}(-x) = -\tilde{\omega}(x)$ para todo x de $\tilde{\Sigma}$. Além disso, se X e $\tilde{X}$ são os campos duais de ω e $\tilde{\omega}$, respectivamente, então X e $\tilde{X}$ estão relacionados por $X = \pi_*\tilde{X}$ e $\tilde{X}$ é tal que é $\sigma_*\tilde{X} = \tilde{X}$.

Segue-se portanto das propriedades acima que o campo $\tilde{Z}_X(V,W) \in \Gamma(T\tilde{\Sigma}^\perp)$

$$\tilde{Z}_X(V,W) = \langle \tilde{X}, W\rangle V^\perp - \langle \tilde{X}, V\rangle W^\perp$$

é tal que $\sigma_*\tilde{Z} = \tilde{Z}$ e assim $Z_X(V,W) = \pi_*\tilde{Z}_X(V,W)$ é um campo bem definido de vetores normais a Σ em $\mathbb{RP}^{n+p+1}$.

Seja $\{N_1, N_2, \dots\}$ uma base L^2-ortonormal de $\Gamma(T\Sigma^\perp)$ tal que N_i é um autovetor associado ao i-ésimo autovalor $\lambda_i(L)$ do operador de estabilidade L de Σ. Se $m = b_1(\Sigma)$, então o Teorema de Hodge-de Rham implica o espaço dos campos harmônicos de Σ coincide com o espaço $\mathcal{L}_m$ gerado pelos m. Suponha que afirmação de que

$$\text{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

não seja verdadeira. Se $\alpha = \text{Indice}(\Sigma)$, $\{E_1, \ldots, E_{\bar{d}}\}$ é uma base ortonormal do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{\bar{d}}$, com $\bar{d} = \binom{n+p+2}{2}\alpha$, e $\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \ldots\}$ é a base L^2-ortonormal de $\Gamma(T\tilde{\Sigma}^{\perp})$ tal que $\pi_* \tilde{N}_i = N_i$, temos que a aplicação linear

$$X \in \mathcal{L}_m \mapsto \left(\int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{Z}_X(E_i, E_j), \tilde{N}_1 \rangle dv_g, \int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{Z}_X(E_i, E_j), \tilde{N}_2 \rangle dv_g, \ldots, \int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{Z}_X(E_i, E_j), \tilde{N}_\alpha \rangle dv_g \right),$$

não é injetiva e assim existe $X \in \mathcal{L}_m$ não-nulo tal que

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{Z}_X(E_i, E_j), \tilde{N}_1 \rangle dv_g = \int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{Z}_X(E_i, E_j), \tilde{N}_2 \rangle dv_g = ... = \int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{Z}_X(E_i, E_j), \tilde{N}_\alpha \rangle dv_g = 0,$$

para todo $1 \leq i < j \leq n$. Fixado um tal X, podemos observar que as equações acima são equivalentes as seguintes igualdades:

$$\int_{\Sigma} \langle Z_X(V, W), N_1 \rangle dv_g = \int_{\Sigma} \langle Z_X(V, W), N_2 \rangle dv_g = ... = \int_{\Sigma} \langle Z_X(V, W), N_\alpha \rangle dv_g = 0. \quad (3.26)$$

para todo par de campos paralelos V e W de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$. Segue portanto do Princípio do min-max 4.37 que

$$\lambda_{\alpha+1}(L) \leq \frac{\int_{\Sigma} \langle L Z_X(V, W), Z_X(V, W) \rangle dv_g}{\int_{\Sigma} |Z_X(V, W)|^2 dv_g},$$

quaisquer que sejam os campo de vetores paralelos V e W de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$. Como $\alpha = \text{Indice}(\Sigma)$, temos que $\lambda_{\alpha+1}(L) \geq 0$ e portanto que

$$0 \leq \int_{\Sigma} \langle L Z_X(V, W), Z_X(V, W) \rangle dv_g$$

Por outro lado, se $\tilde{L}$ é o operador de estabilidade de $\tilde{\Sigma}$ em $\mathbb{S}^{n+p+1}$, como a aplicação $\pi : \mathbb{S}^{n+p+1} \to \mathbb{RP}^{n+p+1}$ é uma isometria local, podemos verificar que

$$\int_{\Sigma} \langle L Z(V, W), Z(V, W) \rangle dv_g = \int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{L} \tilde{Z}_X(V, W), \tilde{Z}_X(V, W) \rangle dv_g.$$

Logo

$$0 \leq \int_{\tilde{\Sigma}} \langle \tilde{L} \tilde{Z}_X(V, W), \tilde{Z}_X(V, W) \rangle dv_g.$$

Aplicando um argumento de integração análogo ao usado na demonstração do Teorema C à desigualdade acima, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\tilde{\Sigma}} -2(n-1)|\tilde{X}|^2 - 2p \text{Ric}_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{X}, \tilde{X}) dv_g \\ &= \int_{\Sigma} -2(n-1)|X|^2 - 2p \text{Ric}_{\Sigma}(X, X) dv_g \\ &< 0 \end{aligned}$$

onde a equação é decorrente do fato de π ser uma isometria local de $\tilde{\Sigma}$ de em Σ. Como a desigualdade acima é uma contradição, obtemos que

$$\text{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}$$

e assim concluímos a prova do teorema. $\square$

3.2.3 Espaços Projetivos Quaterniônicos

Os quaterniônicos são elementos z da álgebra associativa $\mathbb{H}$, a qual é uma extensão dos números complexos $\mathbb{C}$. Mais precisamente $\mathbb{H}$ é formado pelos elementos z da forma

$$z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k,$$

onde $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ e i,j e k são unidades imaginárias distintas, isto é, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, tais que $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ e $ik = -j$.

O conjugado $\bar{z}$ de um quatérnio $z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k \in \mathbb{H}$ é definido como

$$\bar{z} = z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k$$

enquanto seu modulo é o número real

$$|z| = \sqrt{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

O espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{HP}^m$ é o espaço quociente da esfera unitária $\mathbb{S}^{4(m+1)-1}$ de $\mathbb{H}^{m+1} = \mathbb{R}^{4(m+1)}$ obtido ao identificarmos $z = (z_0, \ldots, z_m)$ com $(cz_0, \ldots, cz_m)$, qualquer que seja o $c \in \mathbb{H}$ tal que $|c| = 1$. $\mathbb{HP}^m$ é uma variedade Riemanniana $4m$-dimensional que, considerada com as coordenadas homogêneas $[z_0, \ldots, z_m]$ de seus pontos z, faz da projeção

$$\pi : \mathbb{S}^{4(m+1)-1} \to \mathbb{HP}^m$$

uma submersão Riemanniana. $\mathbb{HP}^m$ é um variedade de Einstein, cuja constante de Einstein é $e = 4m + 8$, além disso, a curvatura seccional de $\mathbb{HP}^m$ varia entre 1 e 4.

Se $M(m+1; \mathbb{H})$ é o conjunto das matrizes quadradas de ordem $m+1$ com coeficientes em $\mathbb{H}$, o espaço das matrizes hermitianas

$$H(m+1; \mathbb{H}) = \{A \in M(m+1; \mathbb{H}); \bar{A}^t = A\}$$

munido com a métrica

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\text{tr}(AB))$$

pode ser identificado com o espaço euclidiano $(2m+1)(m+1)$*-dimensional.*

A aplicação $\varphi : \mathbb{HP}^m \to H(m+1;\mathbb{H})$ *dada por*

$$\varphi(z) = \varphi[z_0, \ldots, z_m] = \begin{pmatrix} |z_0|^2 & z_0\bar{z}_1 & \ldots & z_0\bar{z}_m \\ z_1\bar{z}_0 & |z_1|^2 & \ldots & z_1\bar{z}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m\bar{z}_0 & z_m\bar{z}_1 & \ldots & |z_m|^2 \end{pmatrix}$$

é um mergulho isométrico bem-definido de $\mathbb{HP}^m$ *em* $H(m+1;\mathbb{H})$*, cuja imagem é*

$$M = \{A \in H(m+1;\mathbb{H}); A^2 = A, \mathrm{tr}(A) = 1\}.$$

A segunda forma fundamental II *do mergulho* φ *é tal que*

$$|II(X,X)|^2 = 4, \tag{3.27}$$

para todo ponto $z \in \mathbb{HP}^m$ *e todo vetor unitário* $X \in T_z\mathbb{HP}^m$*,*

Teorema 3.2.2. *Seja* Σ^n *uma subvariedade mínima fechada e orientada do espaço projetivo quaterniônico* $\mathbb{HP}^m$*, com* $4m = n+2$ *e* $n = 2$ *ou* $n = 6$*. Se* $\mathrm{Ric}_\Sigma > \frac{1}{3}(n-18)$ *(ou equivalentemente, se a curvatura seccional* K_Σ *de* Σ *é tal que* $K_\Sigma > -\frac{8}{3}$*, para* $n = 2$*), então*

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{(2m+1)(m+1)}{2}}.$$

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{HP}^m$, se $X, Y \in T_z\mathbb{HP}^m$ são ortonormais, como $|X+Y|^2 = |X-Y|^2 = 2$ temos de (3.27) que

$$8 = \left|II\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 + \left|II\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\right|^2$$

Assim

$$\begin{aligned} 32 &= 2|II(X,X)|^2 + 2|II(Y,Y)|^2 + 8|II(X,Y)|^2 + 4\langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle \\ &= 16 + 8|II(X,Y)|^2 + 4\langle II(X,X), II(Y,Y)\rangle \end{aligned}$$

Assim equação Gauss aplicada ao mergulho φ e a equação acima implicam que

$$|II(X,Y)|^2 = \frac{1}{3}(4 - \langle \bar{R}(X,Y)Y, X\rangle) \tag{3.28}$$

Sejam $X \in \Gamma(T\Sigma)$ e z um ponto arbitrário de Σ. Nos casos considerados aqui, $\mathrm{ACS}(X,X)$ pode ser escrito em z na forma

$$\begin{aligned} \mathrm{ACS}(X,X) &= 2\Sigma_{k=1}^n |II(X,e_k)|^2 + |X|^2\Sigma_{k=1}^n |II(\eta_1,e_k)|^2 + |X|^2\Sigma_{k=1}^n |II(\eta_2,e_k)|^2 \\ &\quad - |X|^2\Sigma_{k=1}^n \langle \bar{R}(\eta_1,e_k)e_k\eta_1\rangle - |X|^2\Sigma_{k=1}^n \langle \bar{R}(\eta_2,e_k)e_k\eta_2\rangle \end{aligned}$$

Se $X(z)$ é não-nulo, podemos considerar uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_z\Sigma$, tal que $e_1 = \frac{X}{|X|}$ e assim

$$|II(X, e_k)|^2 = |X|^2 |II(e_1, e_k)|^2.$$

Se $X(z)$ é nulo, equação acima permanece verdadeira independentemente da base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ e assim, sem perda de generalidade, podemos reescrever $\mathrm{ACS}(X, X)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\mathrm{ACS}(X,X) &= 2|X|^2|II(e_1,e_1)|^2 + 2|X|^2\Sigma_{k=2}^n|II(e_1,e_k)|^2 + |X|^2\Sigma_{k=1}^n|II(\eta_1,e_k)|^2\\ &+ |X|^2\Sigma_{k=1}^n|II(\eta_2,e_k)|^2 - |X|^2\Sigma_{k=1}^n\langle\bar{R}(\eta_1,e_k)e_k\eta_1\rangle - |X|^2\Sigma_{k=1}^n\langle\bar{R}(\eta_2,e_k)e_k\eta_2\rangle\end{aligned}$$

Assim por (3.27) e (3.28)

$$\begin{aligned}\mathrm{ACS}(X,X) &= 8|X|^2 + \frac{2}{3}|X|^2\sum_{k=2}^{n}(4 - \langle\bar{R}(e_1,e_k)e_k,e_i\rangle) + \frac{1}{3}|X|^2\sum_{k=1}^{n}(4 - \langle\bar{R}(\eta_1,e_k)e_k,\eta_1\rangle)\\ &+ \frac{1}{3}|X|^2\sum_{k=1}^{n}(4 - \langle\bar{R}(\eta_2,e_k)e_k,\eta_2\rangle) - |X|^2\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(\eta_1,e_k)e_k\eta_1\rangle - |X|^2\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(\eta_2,e_k)e_k\eta_2\rangle\\ &= (8 + \frac{8}{3}(n-1) + \frac{8}{3}(-\mathrm{Ric}(e_1,e_1) + \langle\bar{R}(e_1,\eta_1)\eta_1,e_1\rangle + \langle\bar{R}(e_1,\eta_2)\eta_2,e_1\rangle) + \frac{4}{3}n\\ &- \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(\eta_1,e_k)e_k\eta_1\rangle - \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(\eta_2,e_k)e_k\eta_2\rangle)|X|^2\\ &= \frac{1}{3}(12n - 2\mathrm{Ric}(e_1,e_1) + 2\langle\bar{R}(e_1,\eta_1)\eta_1,e_1\rangle + 2\langle\bar{R}(e_1,\eta_2)\eta_2,e_1\rangle\\ &- 4\mathrm{Ric}(\eta_1,\eta_1) - 4\mathrm{Ric}(\eta_2,\eta_2) + 8\langle\bar{R}(\eta_1,\eta_2)\eta_2,\eta_1\rangle + 16)|X|^2\\ &= \frac{1}{3}(12n - 2(n+10) - 4(n+10) - 4(n+10) + 8\langle\bar{R}(\eta_1,\eta_2)\eta_2,\eta_1\rangle\\ &+ 2\langle\bar{R}(e_1,\eta_1)\eta_1,e_1\rangle + 2\langle\bar{R}(e_1,\eta_2)\eta_2,e_1\rangle + 16)|X|^2\end{aligned}$$

onde a última equação é decorrente do fato de $\mathbb{HP}^m$ ser Einstein com constante de Einstein $e = n + 10$ nos casos considerados. Como a curvatura seccional de $\mathbb{HP}^m$ é limitada superiormente por 4, temos que

$$\mathrm{ACS}(X,X) \leq \frac{1}{3}(2n - 36)|X|^2.$$

$\square$

3.2.4 Plano de Cayley

O plano de Cayley $Ca\mathbb{P}^2$ é uma variedade Riemanniana de dimensão 16 com descrição similar ao do espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{HP}^m$ e pode ser considerada como uma subvariedade do espaço euclidiano de dimensão 27.

Assim como $\mathbb{HP}^m$, $Ca\mathbb{P}^2$ é uma variedade de Einstein, com $e = 36$, e cuja curvatura seccional está entre 1 e 4. Além disso, se II é a segunda forma fundamental de $Ca\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^{27}$, então II satisfaz à (3.27) e consequentemente à (3.28).

Teorema 3.2.3. *Seja Σ^n uma subvariedade mínima fechada e orientada de $Ca\mathbb{P}^2$, com $2 \leq n \leq 7$ ou $12 \leq n \leq 15$. Se $(15-n)\mathrm{Ric}_\Sigma > (-n^2 + 19n - 84)$, então*

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{27}{n}}.$$

Demonstração. Seja $p = 15 - n$. Dados um campo $X \in \Gamma(T\Sigma)$ e um ponto x de Σ, temos que $\mathrm{ACS}(X,X)$ é dado em x por

$$\begin{aligned}\mathrm{ACS}(X,X) &= (p-1)\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(X,e_k)e_k, X\rangle + (p+1)\sum_{k=1}^{n}|II(X,e_k)|^2 \\ &\quad + |X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(\eta_l,e_k)|^2 - |X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle,\end{aligned}$$

Podemos considerar uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_x\Sigma$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(X,e_k)e_k, X\rangle = |X|^2\sum_{k=2}^{n}\langle \bar{R}(e_1,e_k)e_k,e_1\rangle$$

e

$$\sum_{k=1}^{n}|II(X,e_k)|^2 = |X|^2\sum_{k=1}^{n}|II(e_1,e_k)|^2$$

e assim temos

$$\begin{aligned}\mathrm{ACS}(X,X) &= \Big((p-1)\sum_{k=2}^{n}\langle \bar{R}(e_1,e_k)e_k,e_1\rangle + (p+1)|II(e_1,e_1)|^2 + (p+1)\sum_{k=2}^{n}|II(e_1,e_k)|^2 \\ &\quad + \sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(\eta_l,e_k)|^2 - \sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle\Big)|X|^2 \\ &= \Big((p-1)\sum_{k=2}^{n}\langle \bar{R}(e_1,e_k)e_k,e_1\rangle + \frac{(p+1)}{3}\sum_{k=2}^{n}(4 - \langle \bar{R}(e_1,e_k)e_k,e_1\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}(4 - \langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle) - \sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle + 4(p+1)\Big)|X|^2 \\ &= \frac{1}{3}\Big(2(p-2)\sum_{k=2}^{n}\langle \bar{R}(e_1,e_k)e_k,e_1\rangle - 4\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle \\ &\quad + 12(p+1) + 4(p+1)(n-1) + 4(p+1)n\Big)|X|^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\big(2(p-2)\mathrm{Ric}_M(e_1,e_1) - 4\sum_{l=1}^{p+1}\mathrm{Ric}_M(\eta_l,\eta_l) + 4\sum_{l=1}^{p+1}\langle\bar{R}(e_1,\eta_l)\eta_l,e_1\rangle$$

$$-2p\sum_{l=1}^{p+1}\langle\bar{R}(e_1,\eta_l)\eta_l,e_1\rangle + 4\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{=1}^{p+1}\langle\bar{R}(\eta_l,\eta_m)\eta_m,\eta_l\rangle + 8(p+1)(n+1)\big)|X|^2$$

$$= \frac{1}{3}\big(2(p-2)e - 4(p+1)e + 4\sum_{l=1}^{p+1}\langle\bar{R}(e_1,\eta_l)\eta_l,e_1\rangle - 2p\sum_{l=1}^{p+1}\langle\bar{R}(e_1,\eta_l)\eta_l,e_1\rangle$$

$$+4\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{=1}^{p+1}\langle\bar{R}(\eta_l,\eta_m)\eta_m,\eta_l\rangle + 8(p+1)(n+1)\big)|X|^2$$

Da limitação da curvatura de $Ca\mathbb{P}^2$, segue que

$$\mathrm{ACS}(X,X) \leq \frac{1}{3}\big(-(2p+8)e + 16(p+1) - 2p(p+1) + 4p(p+1) + 8(p+1)(n+1))|X|^2$$
$$= 2\big(-n^2+19n-84\big).$$

$\square$

3.2.5 Hipersuperfícies Pinçadas do Espaço Euclidiano

Nesta seção iremos considerar como ambientes hipersuperfícies M^m fechadas e orientadas de espaços euclidianos cujas curvaturas principais $0 < k_1 \leq \cdots \leq k_m$ do operador forma S associada ao campo de vetores conormal η de M são positivas e suficientemente pinçada.

Teorema 3.2.4. *Seja M^{n+p+1} uma hipersuperfície fechada e orientada do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p+2}$, com $p \geq 0$, a qual satisfaz à condição*

$$\frac{k_{n+p+1}}{k_1} < \sqrt{\frac{(n+2)p+2(n+1)}{(n+2)p+4}}.$$

Se Σ^n é uma subvariedade mínima fechada e orientada de M com

$$2p\cdot\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) > ((n+2)p+4)k_{n+p+1}^2 - ((n+2)p+2(n+1))k_1^2,$$

então

$$\mathrm{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

Demonstração. Desde que pela equação de Gauss

$$\langle\bar{R}(V,W)W,V\rangle = \langle II(V,V),II(W,W)\rangle - |II(V,W)|^2$$

para todo $V,W \in \Gamma(TM)$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ACS}(X,X) = (p-1)\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(X,e_k)e_k, X\rangle + (p+1)\sum_{k=1}^{n}|II(X,e_k)|^2\\
&+|X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(\eta_l,e_k)|^2 - |X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle\\
&=(p-1)(\sum_{k=1}^{n}\langle II(X,X), II(e_k,e_k)\rangle - \sum_{k=1}^{n}|II(X,e_k)|^2)\\
&+(p+1)\sum_{k=1}^{n}|II(X,e_k)|^2 + |X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(\eta_l,e_k)|^2\\
&-|X|^2(\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle II(\eta_l,\eta_l), II(e_k,e_k)\rangle - \sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(\eta_l,e_k)|^2)\\
&=p(\langle SX,X\rangle\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle SX,e_k\rangle^2) + ((p+2)\sum_{k=1}^{n}\langle SX,e_k\rangle^2\\
&+2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle S\eta_l,e_k\rangle^2|X|^2) - (\langle SX,X\rangle + |X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\langle S\eta_l,\eta_l\rangle)\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle\\
&=p(\langle SX,X\rangle\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle SX,e_k\rangle^2) + (p+2)(|SX|^2 - \sum_{r=1}^{p+1}\langle SX,\eta_r\rangle^2)\\
&+2\sum_{l=1}^{p+1}(|S\eta_l|^2 - \sum_{r=1}^{p+1}\langle S\eta_l,\eta_r\rangle^2|X|^2)) - (\langle SX,X\rangle + \sum_{l=1}^{p+1}\langle S\eta_l,\eta_l\rangle|X|^2)\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle\\
&\le p\langle SX,X\rangle\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle + (p+2)(|SX|^2 + \sum_{l=1}^{p+1}(|S\eta_l|^2 - \langle S\eta_l,\eta_l\rangle^2)|X|^2)\\
&-(\langle SX,X\rangle + |X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\langle S\eta_l,\eta_l\rangle)\sum_{k=1}^{n}\langle Se_k,e_k\rangle.
\end{aligned}
$$

Observando que

$$k_1|Y|^2 \le \langle SY,Y\rangle \le k_{n+p+1}|Y|^2$$

e

$$k_1^2|Y|^2 \le |SY|^2 \le k_{n+p+1}^2|Y|^2$$

para todo $Y \in \Gamma(TM)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ACS}(X,X) &\le pnk_{n+p+1}^2|X|^2 + (p+2)(k_{n+p+1}^2 + (p+1)(k_{n+p+1}^2 - k_1^2))|X|^2 - n(p+2)k_1^2|X|^2\\
&= \big((pn + (p+2)^2)k_{n+p+1}^2 - (p+2)(p+n+1)k_1^2\big)|X|^2.
\end{aligned}
$$

Segue portanto de nossa da hipótese que $2p\cdot\mathrm{Ric}_\Sigma > \mathrm{ACS}$ e assim que

$$\text{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+2}{2}}.$$

$\square$

3.2.6 Produto do Círculo e Esferas Euclidianas

Nesta seção estamos interessados no caso em que variedade ambiente é um produto do círculo por uma esferas Euclidiana, isto é, $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^q$, para algum inteiro positivo q. O mergulho de M que iremos considerar é o usual no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{q+3}$.

Teorema 3.2.5. *Seja Σ^n uma subvariedade minima fechada e orientada de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+p}$, com $p \geq 1$ e $n > (p+6)$. Se $2p \cdot \text{Ric}_\Sigma > -(n-p-6)$, então*

$$\text{Indice}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+p+3}{2}}.$$

Demonstração. Desde de que $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+p}$, temos que

$$\langle \bar{R}(X,Y)Y, X\rangle = |\pi_2(X)|^2|\pi_2(Y)|^2 - \langle \pi_2(X), \pi_2(Y)\rangle^2$$

e

$$|II(X,Y)|^2 = \langle \pi_1(X), \pi_1(Y)\rangle^2 + \langle \pi_2(X), \pi_2(Y)\rangle^2,$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, onde $\pi_1 : M \to \mathbb{S}^1$ e $\pi_2 : M \to \mathbb{S}^{n+p}$ são as projeções de M sobre $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^{n+p}$, respectivamente. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |II(e_k, X)|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, \pi_1(X)\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, \pi_2(X)\rangle^2 \\
&= |\pi_1(X)|^2 + |\pi_2(X)|^2 - \sum_{l=1}^{p+1} \langle \eta_l, \pi_1(X)\rangle^2 - \sum_{l=1}^{p+1} \langle \eta_l, \pi_2(X)\rangle^2 \\
&= |X|^2 - \sum_{l=1}^{p+1} \langle \eta_l, \pi_1(X)\rangle^2 - \sum_{l=1}^{p+1} \langle \eta_l, \pi_2(X)\rangle^2 \\
&= |X|^2 - 2\sum_{l=1}^{p+1} \langle \eta_l, \pi_1(X)\rangle^2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X,e_k)e_k,X\rangle &= |\pi_1(X)|^2\sum_{k=1}^{n}|\pi_1(e_k)|^2+|\pi_2(X)|^2\sum_{k=1}^{n}|\pi_2(e_k)|^2-\sum_{k=1}^{n}\langle e_k,\pi_1(X)\rangle^2\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n}\langle e_k,\pi_2(X)\rangle^2\\
&= |\pi_1(X)|^2\sum_{k=1}^{n}|\pi_1(e_k)|^2+|\pi_2(X)|^2\sum_{k=1}^{n}|\pi_2(e_k)|^2+\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l,\pi_1(X)\rangle^2\\
&\quad +\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l,\pi_2(X)\rangle^2-|X|^2.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Argumentos análogos implicam ainda as equações

$$
\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(e_k,\eta_l)|^2=(p+1)-\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{m=1}^{p+1}\langle \eta_m,\pi_1(\eta_l)\rangle^2-\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{m=1}^{p+1}\langle \eta_m,\pi_2(\eta_l)\rangle^2
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle &= \Big(\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|\pi_1(e_k)|^2\Big)+\Big(\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_2(\eta_l)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|\pi_2(e_k)|^2\Big)\\
&\quad +\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{m=1}^{p+1}\langle \eta_m,\pi_1(\eta_l)\rangle^2+\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{m=1}^{p+1}\langle \eta_m,\pi_2(\eta_l)\rangle^2-(p+1)
\end{aligned}
$$

das quais decorrem as desigualdades

$$
\begin{aligned}
|II(e_k,\eta_l)|^2 &\le (p+1)-\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l,\pi_1(\eta_l)\rangle^2-\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l,\pi_2(\eta_l)\rangle^2\\
&= (p+1)-\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^4-\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_2(\eta_l)|^4\\
&= 2\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^2-2\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^4
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle \bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle &\ge \Big(\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|\pi_1(e_k)|^2\Big)+\Big(\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_2(\eta_l)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|\pi_2(e_k)|^2\Big)\\
&\quad +\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l,\pi_1(\eta_l)\rangle^2+\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l,\pi_2(\eta_l)\rangle^2-(p+1)\\
&= \Big(\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|\pi_1(e_k)|^2\Big)+\Big(\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_2(\eta_l)|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}|\pi_2(e_k)|^2\Big)\\
&\quad +\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_1(\eta_l)|^4+\sum_{l=1}^{p+1}|\pi_2(\eta_l)|^4-(p+1)
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Fixado um ponto arbitrário $x = (x_1, x_2)$ de Σ, existem ao menos $(n-1)$ vetores linearmente independentes de $T_x(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n+p})$ que são tangentes a Σ em x e os quais pertencem à $T_{x_2}\mathbb{S}^{n+p}$. Podemos assim considerar uma base ortonormal $\{f_1, \ldots, f_{n-1}, v_1, \ldots, v_{p+1}\}$ de $T_{x_2}\mathbb{S}^{n+p}$ tal que $\{f_1, ..., f_{n-1}\} \subset T_x\Sigma$. Dados um vetor tangente unitário ω de $T_{x_1}\mathbb{S}^1$ em e uma base ortonormal $\{T, f_1, ..., f_{n-1}, \eta_1, ..., \eta_{p+1}\}$ de T_xM, existe uma matriz ortogonal (a_{ij}), com $0 \leq i, j \leq p+1$, tal que

$$T = a_{00}w + a_{01}v_1 + \cdots + a_{0(p+1)}v_{p+1}$$

e

$$\eta_l = a_{l0}w + a_{l1}v_1 + \cdots + a_{l(p+1)}v_{p+1}$$

para $l = 1, \ldots, p+1$. Em particular temos

$$\langle X, w\rangle = a_{00}\cos\theta|X|$$

e

$$\langle X, v_l\rangle = a_{0l}\cos\theta|X|,$$

onde θ é o ângulo entre X e T.

Fazendo $e_1 = T$ e $e_i = f_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, (n-1)$, temos

$$|\pi_1(X)|^2 = a_{00}^2\cos^2\theta|X|^2,$$

$$|\pi_1(\eta_l)|^2 = a_{l0}^2$$

e

$$\langle \eta_l, \pi_1(X)\rangle = a_{l0}^2 a_{00}^2 \cos^2\theta|X|^2$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|II(e_k, X)|^2 &= (1 - 2a_{00}^2\cos^2\theta\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2)|X|^2 \\ &= (1 - 2a_{00}^2\cos^2\theta(1 - a_{00}^2))|X|^2 \\ &= (1 - 2a_{00}^2\cos^2\theta + 2a_{00}^4\cos^2\theta)|X|^2,\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(X,e_k)e_k,X\rangle &= \Bigg(a_{00}^4\cos^2\theta+\cos^2\theta\Big(\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2\Big)\Big(n-1+\sum_{m=1}^{p+1}a_{0m}^2\Big)+a_{00}^2\cos^2\theta\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2\\
&+\cos^2\theta\sum_{l=1}^{p+1}\Big(\sum_{m=1}^{p+1}a_{lm}a_{0m}\Big)^2-1\Bigg)|X|^2\\
&= \Bigg(a_{00}^4\cos^2\theta+\cos^2\theta\Big(\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2\Big)\Big(n-1+\sum_{m=1}^{p+1}a_{0m}^2\Big)+a_{00}^2\cos^2\theta\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2\\
&+a_{00}^2\cos^2\theta\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2-1\Bigg)|X|^2\\
&= (a_{00}^4\cos^2\theta+\cos^2\theta(1-a_{00}^2)(n-a_{00}^2)+a_{00}^2\cos^2\theta(1-a_{00}^2)\\
&+a_{00}^2\cos^2\theta(1-a_{00}^2)-1)|X|^2\\
&= (n\cos^2\theta-(n-1)a_{00}^2\cos^2\theta-1)|X|^2
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
|II(e_k,\eta_l)|^2 &\le 2\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2-2\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^4\\
&= 2-2a_{00}^2-2\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^4
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(\eta_l,e_k)e_k,\eta_l\rangle &\ge a_{00}^2\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2+(n-a_{00}^2)\Big(\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{m=1}^{p+1}a_{lm}^2\Big)+\sum_{l=1}^{p+1}\Big(\sum_{m=1}^{p+1}a_{lm}^2\Big)^2+\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^4\\
&-(p+1)\\
&= a_{00}^2\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^2+(n-a_{00}^2)\Big(\sum_{l=1}^{p+1}(1-a_{l0}^2)\Big)+\sum_{l=1}^{p+1}(1-a_{l0}^2)^2+\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^4\\
&-(p+1)\\
&= a_{00}^2(1-a_{00}^2)+(n-a_{00}^2)(p+a_{00}^2)+\sum_{l=1}^{p+1}(1-a_{l0}^2)^2+\sum_{l=1}^{p+1}a_{l0}^4-(p+1)\\
&= (n+3-p)a_{00}^2-2a_{00}^4+2\sum_{l=1}a_{l0}^4+pn-2
\end{aligned}
$$

implicando assim que

$$
\mathrm{ACS}(X,X)=(p-1)\sum_{k=1}^{n}\langle\bar{R}(X,e_k)e_k,X\rangle+(p+1)\sum_{k=1}^{n}|II(e_k,X)|^2+|X|^2\sum_{l=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{n}|II(e_k,\eta_l)|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&-|X|^2 \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{n} \langle \bar{R}(\eta_l, e_k)e_k, \eta_l \rangle \\
\leq &\Big((p-1)n\cos^2\theta-(p-1)(n-1))a_{00}^2\cos^2\theta-(p-1)+(p+1)-2(p+1)a_{00}^2\cos^2\theta+2(p+1)a_{00}^4\cos^2\theta \\
&-(n+1-p)a_{00}^2-2a_{00}^4-4\sum_{l=1}^{p+1} a_{l0}^4-np+4\Big)|X|^2 \\
\leq &\Big(-(p-1)(n-1))a_{00}^2\cos^2\theta-2(p+1)a_{00}^2\cos^2\theta+2(p+1)a_{00}^4\cos^2\theta-(n+1)a_{00}^2-2a_{00}^4 \\
&-4\sum_{l=1}^{p+1} a_{l0}^4-(n-p-6)\Big)|X|^2 \\
\leq &-(n-p-6)|X|^2
\end{aligned}
$$

□

4 Subvariedades Mínimas Com Fronteira Livre de Regiões Convexas

Neste capítulo obtemos resultados que promovem a comparação entre os autovalores do operador de estabilidade e autovalores de problemas de bordo para 1*-formas diferenciais de subvariedade mínimas com fronteira livre* Σ *de regiões convexas* M^m *do espaços euclidiano* $\mathbb{R}^m$*, isto é, variedades Riemannianas compactas* M^m *que estão isometricamente imersas em espaços Euclidianos de mesma dimensão* m *e cuja segunda forma fundamental* $II^{\partial M}$ *do bordo* ∂M *é positiva definida com respeito ao campo de vetores normal* η *que apontando para fora de* M^m*.*

4.1 Resultados Prévios

Lema 4.1.1. *Seja* V *um campo de vetores paralelos de* $\mathbb{R}^{n+p+1}$*. Se* $V^\top$ *e* $V^\perp$ *são as componentes tangente e normal de* V *em* Σ *, então temos que*

(a) $D^\perp_X V^\perp = -B(X, V^\top)$*, para todo* $X \in \Gamma(T\Sigma)$*.*

(b) $\nabla_X V^\top = A_{V^\perp} X$*, para todo* $X \in \Gamma(T\Sigma)$*.*

Demonstração. Como V é um campo de vetores paralelos, temos que

$$0 = D_X V = D_X V^\perp + D_X V^\top,$$

para todo campo de vetores $X \in \Gamma(T\Sigma)$. Em particular, vale a equação

$$D_X V^\perp = -D_X V^\top.$$

Assim, tomando as componentes tangente e normal em Σ da equação acima, obtemos

$$\nabla_X V^\top = A_{V^\perp} X$$

e

$$D^{\perp}_X V^{\perp} = -B(X, V^{\top}),$$

o que conclui a prova desse lema. $\square$

Lema 4.1.2. *Seja X um campo de vetores tangentes de Σ. Se X é dual a uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ que satisfaz à condição absoluta de bordo, então temos que*

$$\langle \nabla_{\eta} X, X \rangle = II^{\partial M}(X, X).$$

Demonstração. Como $\iota_\eta d\omega$ é identicamente nula em $\partial\Sigma$, temos que

$$0 = d\omega(\eta, Y) = \eta(\omega(Y)) - Y(\omega(\eta)) + \omega([Y, \eta]) = \nabla_{\eta}\omega(Y) - \nabla_{Y}\omega(\eta)$$

para todo $Y \in \Gamma(T\partial\Sigma)$. Em particular, como X é tangente ao bordo $\partial\Sigma$, temos

$$\nabla_{\eta}\omega(X) = \nabla_{X}\omega(\eta)$$

e portanto

$$\langle \nabla_{\eta} X, X \rangle = \langle \nabla_{X} X, \eta \rangle,$$

uma vez que $\nabla_{\eta} X$ e $\nabla_{X} X$ são os campos duais as 1-formas $\nabla_{\eta}\omega$ e $\nabla_{X}\omega$, respectivamente. $\square$

Lema 4.1.3. *Seja X um campo de vetores tangentes de Σ. Se X é dual a uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ que satisfaz a condição absoluta de bordo*

i. $\iota_\eta \omega = 0$

ii. $\iota_\eta d\omega = 0$

então

$$\int_\Sigma \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{e_k} X|^2 dv_g = \int_\Sigma \langle X, \Delta X \rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X, X) dv_g + \int_{\partial\Sigma} II^{\partial M}(X, X) da_g$$

Demonstração. Observando que

$$|\nabla_{e_k} X|^2 = e_k \langle \nabla_{e_k} X, X \rangle - \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} X, X \rangle = \frac{1}{2} e_k e_k(|X|^2) - \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} X, X \rangle$$

temos que $\sum_{k=1}^{n} |\nabla_{e_k} X|^2 = -\frac{1}{2}\Delta(|X|^2) - \langle X, \nabla^2 X \rangle$. Assim, ao integrarmos $\sum_{i=1}^{n} |\nabla_{e_k} X|^2$, o Teorema da Divergência para variedades compactas implica

$$\int_\Sigma \sum_{k=1}^{n} |\nabla_{e_k} X|^2 dv_g = -\int_\Sigma \langle X, \nabla^2 X \rangle dv_g + \int_{\partial M} \frac{1}{2} \eta(|X|^2) da_g$$

Segue portanto da Fórmula de Bochner e do Lema 4.1.2 que

$$\int_\Sigma \sum_{i=1}^n |\nabla_{e_k} X|^2 dv_g = \int_\Sigma \langle X, \Delta X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} II^{\partial\Sigma}(X,X) da_g.$$

□

Lema 4.1.4. *Seja X um campo de vetores tangentes de Σ. Se X é dual a uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ que satisfaz à condição relativa de bordo*

i. $\omega \wedge \eta = 0$

ii. $d^*\omega \wedge \eta = 0$

então

$$\int_\Sigma \sum_{k=1}^n |\nabla_{e_k} X|^2 = \int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma}|X|^2 da_g$$

Demonstração. Observem que as condições (i) e (ii) equivalem para 1-formas a termos que $X = \alpha\eta$ e que $\mathrm{div}X = 0$ em $\partial\Sigma$, onde $\alpha : \partial\Sigma \to \mathbb{R}$ é alguma função suave. Assim, se $x \in \partial\Sigma$ e $\{t_1, \dots, t_n\}$ é uma base ortonormal $T_x\Sigma$ com $t_1 = \eta$, temos de (ii) que

$$\langle \nabla_\eta X, \eta\rangle = -\sum_{k=2}^n \langle \nabla_{t_k} X, t_k\rangle = -\alpha \sum_{k=2}^n \langle \nabla_{t_k}\eta, t_k\rangle = \alpha H^{\partial\Sigma}$$

onde $H^{\partial\Sigma}$ é curvatura média de $\partial\Sigma$ em Σ. Como

$$\int_\Sigma \sum_{k=1}^n |\nabla_{e_k} X|^2 dv_g = \int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2}\eta(|X|^2) da_g$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sum_{k=1}^n |\nabla_{e_k} X|^2 dv_g &= \int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2}\eta(|X|^2) da_g \\ &= \int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} \alpha\langle \nabla_\nu X, \eta\rangle da_g \\ &= \int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} \alpha^2 \cdot H^{\partial\Sigma} da_g \\ &= \int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - \int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) dv_g - \int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma}|X|^2 da_g\end{aligned}$$

o que prova a demonstração do presente lema. □

Lema 4.1.5. *Sejam V e W campos de vetores paralelos de $\mathbb{R}^{n+p+1}$, X um campo de vetores tangentes de Σ e Z_X o campo de vetores normais em Σ determinado por V, W e X como na Definição 1.8.1. Dado um ponto x de Σ, então temos que* *(a)* $\sum_{k=1}^n |\nabla^\perp_{e_k} Z_X|^2(x) = \sum_{k=1}^n \big(\langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle^2|V^\perp|^2 + \langle A_{V^\perp}e_k, X\rangle^2|W^\perp|^2 + \langle W, \nabla_{e_k}X\rangle^2|V^\perp|^2$

$+\langle V, \nabla_{e_k}X\rangle^2|W^\perp|^2 + \langle W, X\rangle^2|B(V^\top, e_k)|^2 + \langle V, X\rangle^2|B(W^\top, e_k)|^2$

$-2\langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle\langle A_{V^\perp}e_k, X\rangle\langle V^\perp, W^\perp\rangle - 2\langle W, X\rangle\langle V, X\rangle\langle B(V^\top, e_k), B(W^\top, e_k)\rangle\big) + 2N,$

onde

$$N = \sum_{k=1}^n \big(\langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle\langle W^\top, \nabla_{e_k}X\rangle|V^\perp|^2 - \langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle\langle V, \nabla_{e_k}X\rangle\langle V^\perp, W^\perp\rangle$$

$$-\langle W, X\rangle\langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle\langle V, B(V^\top, e_k)\rangle + \langle V, X\rangle\langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle\langle V, B(W^\top, e_k)\rangle$$

$$-\langle A_{V^\perp}e_k, X\rangle\langle W, \nabla_{e_k}X\rangle\langle W^\perp, V^\perp\rangle + \langle A_{V^\perp}e_i, X\rangle\langle V, \nabla_{e_k}X\rangle|W^\perp|^2$$

$$+\langle A_{V^\perp}e_k, X\rangle\langle W, X\rangle\langle W, B(V^\top, e_k)\rangle - \langle A_{V^\perp}e_k, X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, B(W^\top, e_k)\rangle$$

$$-\langle W, \nabla_{e_k}X\rangle\langle V, \nabla_{e_k}X\rangle\langle V^\perp, W^\perp\rangle + \langle W, \nabla_{e_k}X\rangle\langle W, X\rangle\langle V, B(V^\top, e_k)\rangle$$

$$-\langle W, \nabla_{e_k}X\rangle\langle V, X\rangle\langle V, B(W^\top, e_k)\rangle + \langle V, \nabla_{e_k}X\rangle\langle W, X\rangle\langle W, B(V^\top, e_k)\rangle$$

$$-\langle V, \nabla_{e_k}X\rangle\langle V, X\rangle\langle W, B(W^\top, e_k)\rangle\big)$$

(b) $\langle \tilde{B}(Z_X), Z_X\rangle(x) =$
$\langle W, X\rangle^2 \sum_{i,j=1}^n \langle V, B(e_i, e_j)\rangle^2 - \langle W, X\rangle\langle V, X\rangle \sum_{i,j=1}^n \langle W, B(e_i, e_j)\rangle\langle V, B(e_i, e_j)\rangle$
$+\langle V, X\rangle^2 \sum_{i,j=1}^n \langle W, B(e_i, e_j)\rangle^2$
Se $x \in \partial\Sigma$*, temos adicionalmente que*

(c) $\langle D_{Z_X} Z_X, \eta\rangle(x) = -\langle W, X\rangle^2\langle V^\perp, D_{V^\perp}\eta\rangle - \langle V, X\rangle^2\langle W^\perp, D_{W^\perp}\eta\rangle + \langle W, X\rangle\langle V, X\rangle\langle V^\perp, D_{W^\perp}\eta\rangle$
$+\langle W, X\rangle\langle V, X\rangle\langle W^\perp, D_{V^\perp}\eta\rangle$
onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é um referencial geodésico ortonormal de* Σ *em* x *e* $\{\eta_1, \ldots, \eta_{p+1}\}$ *referencial ortonormal local de* $\Gamma(T\Sigma^\perp)$ *definidos em uma mesma vizinhança de* x *em* Σ.

Demonstração. Observem que a parte (b) é obtido por calculo direto e por essa razão iremos provar apenas as partes (a) e (c).

a) Como

$$\nabla^\perp_{e_k} Z_X = \langle \nabla_{e_k} W^\top, X\rangle V^\perp + \langle W, \nabla_{e_k}X\rangle V^\perp + \langle W, X\rangle \nabla^\perp_{e_k} V^\perp$$

$$-\langle \nabla_{e_k} V^\top, X\rangle W^\perp - \langle V, \nabla_{e_k}X\rangle W^\perp - \langle V, X\rangle \nabla^\perp_{e_k} W^\perp.$$

o Lema 4.1.1 implica que

$$\nabla^\perp_{e_k} Z_X = \langle A_{W^\perp}e_k, X\rangle V^\perp - \langle A_{V^\perp}e_k, X\rangle W^\perp + \langle W, \nabla_{e_k}X\rangle V^\perp$$

$$-\langle V, \nabla_{e_k} X\rangle W^{\perp} - \langle W, X\rangle B(V^{\top}, e_k) + \langle V, X\rangle B(W^{\top}, e_k)$$

A afirmação (a) decorre da equação acima quando calculamos $|\nabla^{\perp}_{e_k} Z_X|^2$ usamos o lado direito dela.

c) Observem que $\langle D_{Z_X} Z_X, \eta\rangle = -\langle Z_X, D_{Z_X}\eta\rangle$, então da definição de Z_X e desse última igualdade, temos que

$$\langle D_{Z_X} Z_X, \eta\rangle = -\langle W, X\rangle^2 \langle V^{\perp}, D_{V^{\perp}}\eta\rangle - \langle V, X\rangle^2 \langle W^{\perp}, D_{W^{\perp}}\eta\rangle$$

$$+\langle W, X\rangle\langle V, X\rangle\langle V^{\perp}, D_{W^{\perp}}\eta\rangle + \langle W, X\rangle\langle V, X\rangle\langle W^{\perp}, D_{V^{\perp}}\eta\rangle.$$

□

Nesse ponto estamos prontos para enunciar e demostrar os principais resultados desse capítulo.

4.2 Resultados Principais

Teorema E. *Seja Σ^n uma subvariedade mínima com fronteira livre de uma região convexa M^{n+p+1} do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+p+1}$, com $p \geq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente por uma contante C, então*

$$\lambda_{\alpha}(L) \leq \lambda^a_{m(\alpha)}(\Delta_1) - \left(\frac{2p}{p+1}\right) C,$$

onde $m(\alpha) = \binom{n+p+2}{2}(\alpha - 1) + 1$ e $\lambda^a_{m(\alpha)}(\Delta_1)$ é o $m(\alpha)$-ésimo autovalor do problema de bordo absoluto.

Demonstração. Seja $\{N_1, N_2, \dots\}$ uma base L^2-ortonormal do espaço dos campos de variações admissíveis formada por autovetores de L, onde N_i esta associado à $\lambda_i(L)$.

Dado um inteiro $\alpha > 1$, se $\mathcal{L}_m$ é o espaço gerado pelos m primeiros autoespaços do problema de bordo absoluto, queremos determinar um $\mathcal{L}_m$ no qual exista um campo de vetores não-nulo X tal que

$$\int_{\Sigma} \langle Z_X(V, W), N_1\rangle = \int_{\Sigma} \langle Z_X(V, W), N_2\rangle = \cdots = \int_{\Sigma} \langle Z_X(V, W), N_{\alpha-1}\rangle = 0, \qquad (4.36)$$

para todo par de campos de vetores paralelos V e W de $\mathbb{R}^{n+p+1}$.

Como Z_X é uma aplicação bilinear anti-simétrica sobre V e W e o espaço dos campos de vetores paralelos de $\mathbb{R}^{n+p+1}$ tem dimensão igual à $(n + p + 1)$, o problema de determinarmos

X em $\mathcal{L}_m$ equivale ao problema de encontrarmos uma solução não trivial de um sistema de equações homogêneas lineares com $\binom{n+p+1}{2}(\alpha-1)$ equações e m incógnitas. Logo, podemos garantir que X existe quando

$$m = m(\alpha) = \binom{n+p+1}{2}(\alpha-1)+1.$$

Neste caso, ao fixarmos X, o Princípio do min-máx implica

$$\lambda_\alpha(L)\int_\Sigma |Z_X|^2 \leq \int_\Sigma \sum_{k=1}^n |\nabla^\perp_{e_k} Z_X|^2 - \langle \tilde{B}(Z_X), Z_X\rangle dv_g + \int_{\partial\Sigma}\langle D_{Z_X}Z_X, \eta\rangle da_g. \tag{4.37}$$

Adotando em $U\times U$ a medida produto, onde U é conjuntos dos campos de vetores paralelos unitários de $\mathbb{R}^{n+p+1}$, ao integrarmos os integrandos da desigualdade anterior em relação à (V,W), obtemos dos lemas 2.3.5 e 4.1.5 e do Teorema de Fubini que

$$\int_{U\times U} N(x) = 0,$$

$$\int_{U\times U}\langle \tilde{B}(Z_X), Z_X\rangle(x)dVdW = 2|X|^2|B|^2,$$

$$\int_{U\times U}\langle D_{Z_X}Z_X, \eta\rangle = -2\sum_{l=1}^{p+1}\langle \eta_l, D_{\eta_l}\eta\rangle |X|^2 = 2\sum_{l=1}^{p+1} II^{\partial M}(\eta_l,\eta_l)|X|^2$$

e

$$\begin{aligned}\int_{U\times U}\sum_{k=1}^n |\nabla^\perp_{e_k}Z_X|^2(x)d\mu(V)d\mu(W) &= 2(p-1)\sum_{k=1}^n |B(e_k,X)|^2 + 2(p+1)\sum_{k=1}^n|\nabla_{e_k}X|^2 + 2|X|^2|B|^2\\ &= -2(p-1)\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) + 2(p+1)\sum_{k=1}^n |\nabla_{e_k}X|^2 + |X|^2|B|^2,\end{aligned}$$

onde a última equação segue do fato que $\sum_{k=1}^n |B(e_k,X)|^2 = \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)$, uma vez que Σ é mínima.

Integrando agora a desigualdade (4.37) em relação à $(V,W)\in U\times U$, o Teorema Fubini, as equações acima e o Lema 4.1.3 implicam que

$$\begin{aligned}2(p+1)\lambda_\alpha(L)\int_\Sigma |X|^2 dv_g &\leq 2(p+1)\int_\Sigma \sum_{i=1}^n |\nabla_{e_k}X|^2 dv_g - 2(p-1)\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g\\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} 2\sum_{l=1}^{p+1} II^{\partial M}(\eta_l,\eta_l)|X|^2 dv_g\\ &\leq 2(p+1)\int_\Sigma \langle X, \Delta X\rangle dv_g - 4p\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g\end{aligned}$$

$$+2\int_{\partial\Sigma}(p+1)II^{\partial M}(X,X)+\sum_{l=1}^{p+1}II^{\partial M}(\eta_l,\eta_l)|X|^2da_g$$

$$\leq 2(p+1)\lambda_{m(\alpha)}\int_{\Sigma}|X|^2dv_g-4p\inf_{v\in\mathcal{L}_{m(\alpha)}\backslash\{0\}}(\mathrm{Ric}_{\Sigma}(v,v))\int_{\Sigma}|X|^2dv_g$$

$$+2(p+2)\sup_{v\in\Gamma(T\partial M)\backslash\{0\}}(II^{\partial M}(v,v))\int_{\partial\Sigma}|X|^2da_g$$

$$\leq 2(p+1)\lambda_{m(\alpha)}\int_{\Sigma}|X|^2dv_g-4p\inf_{v\in\mathcal{L}_{m(\alpha)}\backslash\{0\}}(\mathrm{Ric}_{\Sigma}(v,v))\int_{\Sigma}|X|^2dv_g$$

Como $X\in\mathcal{L}_{m(\alpha)}\backslash\{0\}$, segue das desigualdades acima que

$$\lambda_\alpha(L)\leq\lambda^a_{m(\alpha)}(\Delta_1)-\left(\frac{2p}{p+1}\right)C.$$

□

Teorema F. *Seja Σ^n uma subvariedade mínima com fronteira livre de uma região convexa M^{n+p+1} do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+p+1}$, com $p\geq 0$. Se a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente por uma contante C, então*

$$\lambda_\alpha(L)\leq\lambda^r_{m(\alpha)}(\Delta_1)-\left(\frac{2p}{p+1}\right)C,$$

onde $m(\alpha)=\binom{n+p+2}{2}(\alpha-1)+1$ e $\lambda^r_{m(\alpha)}(\Delta_1)$ é o $m(\alpha)$-ésimo autovalor do problema de bordo relativo.

Demonstração. Seja $\alpha>1$ um número inteiro positivo qualquer. Se

$$m=m(\alpha)=\binom{n+p+1}{2}(\alpha-1)+1,$$

argumentos análogos àqueles utilizados na prova do Teorema E mostram que existe um campo de vetores não-nulo $X\in\mathcal{L}_{m(\alpha)}$ tal que

$$2(p+1)\lambda_\alpha(L)\int_\Sigma|X|^2dv_g\leq 2(p+1)\int_\Sigma\sum_{i=1}^n|\nabla_{e_k}X|^2dv_g-2(p-1)\int_\Sigma\mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g$$

$$+\int_{\partial\Sigma}2\sum_{l=1}^{p+1}II^{\partial M}(\eta_l,\eta_l)|X|^2dv_g.$$

Segue portanto do Lema 4.1.4 que

$$\begin{aligned}
2(p+1)\lambda_\alpha(L)\int_\Sigma |X|^2 dv_g &\leq 2(p+1)\int_\Sigma \langle \Delta X, X\rangle dv_g - 4p\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g \\
&+ \int_{\partial\Sigma} 2((p+1)H^{\partial\Sigma} + \sum_{l=1}^{p+1} II^{\partial M}(\eta_l,\eta_l))|X|^2 da_g \\
&\leq 2(p+1)\lambda_m^r(\Delta_1)\int_\Sigma |X|^2 dv_g - 4p\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g \\
&+ 2\int_{\partial\Sigma}(pH^{\partial\Sigma} + H^{\partial M})|X|^2 da_g \\
&\leq 2(p+1)\lambda_m^r(\Delta_1)\int_\Sigma |X|^2 dv_g - 4p\int_\Sigma \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X)dv_g
\end{aligned}$$

o que por sua vez implica que

$$\lambda_\alpha(L) \leq \lambda_{m(\alpha)}^r(\Delta_1) - \left(\frac{2p}{p+1}\right)C,$$

já que X é não-nulo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] *Alías, L. J., Brasil, A. Jr., Sousa, L. A. M. A characterization of Clifford tori with constant scalar curvature one by the first stability eigenvalue, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 35 (2004), no. 2, 165 - 175.*

[2] *Ambrozio, L.; Carlotto, A.; Sharp, B. Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces. J. Differential Geom. 108 (2018), no. 3, 379–410*

[3] *Ambrozio, L., Carlotto, A., Sharp, B. Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces , Math. Ann. (2018), 370:1063–1078*

[4] *Andrews, B., Hopper, C. The Ricci Flow in Riemannian Geometry - A Complet Proof of the Differentiable* 1/4 *- Pinching Sphere Theorem. Spring 2011.*

[5] *Besse, A. Einstein manifolds. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.*

[6] *Caminha, A. Tópicos de Geometria Diferencial. SBM, 2014.*

[7] *Chen,J., Frsaser, A. Pang, C. Minimal immersions of compact bordered Riemann surfaces with free boundary, Trans. Am. Math. Soc. 367(4), 2487–2507 (2015).*

[8] *Chen, B. On the First Eigenvalue of Laplacian of Compact Minimal Submanifolds of Rank One Symmetric Spaces Chinese Journal of Mathematics, Vol. 11, No. 4 (December 1983), pp. 259-273.*

[9] *Chern, S. S., do Carmo, M., Kobayashi, S. Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Lenght Springer-Verlag Berlin·Heidelberg·New York 1970*

[10] *Davies, E. B. Spectral Theory and Diferential Operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.*

[11] do Carmo, M., Ritoré, M., Ros, A. *Compact minimal hypersurfaces with index in the real projective space, Comment. Math. Helv. 75 (2000), 247-254.*

[12] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana 5 ed. IMPA, 2011.*

[13] Fraser, A., Schoen, R. *Sharp eigenvalue bounds andminimal surfaces in the ball. Invent.Math. 203(3),823–890 (2016).*

[14] Gorodski, C.; Mendes, R. A. E.; Radeschi, M. *Robust index bounds for minimal hypersurfaces of isoparametric submanifolds and symmetric spaces. Calc. Var. Partial Differential Equations 58 (2019), no. 4, Paper No. 118, 25 pp.*

[15] Jost, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analisys. 6 ed. Springer 2011.*

[16] Lawson, H. B., Simons, J. *On Stable Currents and Their Application to Problems in Real and Complex Geometry, Ann. of Math. 98 (1973), no. 3, 427-450.*

[17] Perdomo, O. *Low Index Miminimal Hypersurfaces of Spheres, Asian J. Math. 5 (2001), no 4, 741-750.*

[18] Marques, F., Neves, A. *Min-max theory and the Willmore conjecture, Preprint. arXiv:1202.6036, 2013.*

[19] Ohnita, Y. *Stable Minimal Submanifolds in Compact Rank One Symmetric Spaces, Tôhoku Math. Journ. 38 (1986), 199-217.*

[20] Sargent, P. *Index Bounds for Free Boundary Minimal Surface of Convex Bodies. Preprint. arXiv:1605.09143v1, 2016.*

[21] Savo, A. *Index Bounds for Minimal Hypersurfaces of the Sphere , Indiana University Mathematics Journal, 59 (2010), no 3, 823-837.*

[22] Schwarz, G. *Hodge Decomposition - A Method for Solving Boundary Value Problems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995*

[23] Simons, J. *Minimal varieties in riemaniann manifolds, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 62-105.*

[24] Taylor, M. *Partial Differential Equations I: Basic Theory, Springer- Verlag, New York, 1996.*

[25] *Torralbo, F., Urbano, F. On Stable Compact Minimal Submanifolds, Proc. Amer. Math. Journal, 142 (2014), 651-658.*

[26] *Urbano, F. Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere. Proc. Amer.Math. Soc.,108 (1990), no. 4, 989-992.*

[27] *Wallach, N. R., Minimal immersions of symmetric spaces into spheres. Pure and Appl. Math. (1972), Vol. 8, 1–40.*