Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Bacharelado em Matemática

Vitor de Lima Alves

O Teorema de Milnor Schwartz

Maceió
2021

Vitor de Lima Alves

O Teorema de Milnor-Schwartz

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Maceió

2021

Vitor de Lima Alves

O Teorema de Milnor-Schwartz

Trabalho de conclusão de curso aprovado pelo corpo docente do Curso de Matemática Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Banca Examinadora:

gov.br
Documento assinado digitalmente
Isnaldo Isaac Barbosa
Data: 04/03/2022 08:20:56-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió
Orientador

Wagner Ranter

Prof. Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió

Márcio Cavalcante de Melo

Prof. Dr. Marcio Cavalcante de Melo
Instituto de Matemática - IM/UFAL, Maceió

Maceió, 26 de julho de 2021

"Se o estudo ao qual você se dedica tende a enfraquecer seus afetos e destruir seu gosto pelos prazeres simples, que nada deveria poluir, então esse estudo certamente não se justifica, não é adequado à mente humana."

Mary Shelley

Agradecimentos

Agradeço à minha família, ao Instituto de Matemática da UFAL e ao professor Isnaldo Barbosa.

Resumo

Neste trabalho, nós provaremos o Teorema de Milnor-Schwartz. Além disso, veremos alguns consequências do mesmo e alguns resultados envolvendo variedades riemannianas.

Palavras-chave: **Topologia, Geometria Riemanniana, Grupo Fundamental, Recobrimento e Quasi-Isometria.**

Abstract

In this work, we will show the Milnor-Schwartz Theorem. In addition, we will see some consequences of the same and some results involving Riemannian manifolds.

Keywords: **Topology, Geometria Riemannian Geometry, Foundamental Group, Covering Spaces and quasi-isometries.**

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo

1

Variedades Diferenciáveis

1.1 Definição e Exemplos

Definição 1.1.1. *Uma varidade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico M hausdorff e com base enumerável que possui uma família de mapas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ que é um homeomorfismo sobre a imagem tais que*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
2. *Para cada α e β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, então:*

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \to x_\beta^{-1}(W)$$

   é um difeomorfismo.

Exemplo 1.1.2 (Espaço Projetivo). *Dizemos que dois $x \equiv y$, onde $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ se existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $x = \lambda y$. Temos que $\cong$ é uma relação e denotamos por $\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\equiv$. A relação $\equiv$ induz em $\mathbb{P}^n$ uma estrutura de espaço topológico hausdorff e com base enumerável. Seja $[x] \in \mathbb{P}^n$, onde $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Se $x_i \neq 0$, então*

$$[(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n] = [(x_1/x_i, \ldots, 1, \ldots, x_{n+1}/x_i)].$$

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{P}^n$:

$$Y_i = \{[(x_1, \dots, x_{n+1})];\ x_i \neq 0\},\ i = 1, \dots n+1.$$

Para cada $i = 1, \dots, n+1$, defina o seguinte sistema de coordenadas :

$$x_i : \mathbb{R}^n \to Y_i$$

dado por

$$x_i(y_1, \dots, y_n) = [(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n+1})].$$

Cada mapa é um homeomorfismo sobre a imagem e $\bigcup x_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^n$.

Além disso,

$$Y_i \cap Y_j = \{[(y_1, \dots, y_{n+1})];\ y_i, y_j \neq 0\}.$$

Se $i > j$, então

$$x_i^{-1}(Y_i \cap Y_j) = \{(y_1, \dots, y_n);\ y_j \neq 0\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_j^{-1} \circ x_i(y_1, \dots, y_n) &= x_j^{-1}[y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_1, \dots, y_n] \\ &= x_j^{-1}[y_1/y_j, \dots, 1, y_{j+1}/y_j, \dots 1/y_j, \dots y_n/y_j] \\ &= (y_1/y_j, \dots, y_{j-1}/y_j, y_{j+1}/y_j, \dots, y_n/y_j), \end{aligned}$$

que é diferenciável.

Isso dá a $\mathbb{P}^n$ uma estrutura de variedade diferenciável.

1.2 Aplicações diferenciáveis e Plano Tangente

Definição 1.2.1. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis de dimensões n e m, respectivamente. Um mapa $\phi : M^n \to N^m$ é diferenciável em $p \in M^n$ se dada uma parametrização $y : V \to N^m$ em $\phi(p)$ existe uma parametrização $x : U \to M^n$ em p tal que $\phi(x(U)) \subset y(V)$ e o mapa*

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$. Se $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, então $\alpha'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_n'(0))$. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$, onde $p \in U$. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \alpha}{dt}(0) &= \sum \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \\ &= \left(\sum x_i'(0) \frac{d}{dx_i} \right) f. \end{aligned}$$

Definição 1.2.2. *Seja* M *uma variedade diferenciável. Uma função diferenciável* α : $(-\epsilon, \epsilon) : M$ *é chamada de curva diferenciável. Suponha que* $\alpha(0) = p \in M$. *Seja* $\mathcal{D}$ *o conjunto das funções diferenciáveis em* $p \in M$. *O vetor tangente à curva* α *em* $t = 0$ *é a função:*

$$\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\alpha'(0) f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(0).$$

Um vetor tangente em $p \in M$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável α como $\alpha(0) = p$. O conjunto de vetores tangente em p será denotado por T_pM.

Escolha uma parametrização $x : U \to M^n$ com $p \in x(U)$. Podemos expressas a curva α e a função diferenciável α nesta parametrização por

$$f \circ x(q) = f(x_1, \ldots, x_n), \ x \in U$$

e

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots x_n(t)).$$

Portanto, restringindo f a α, temos que:

$$\begin{aligned}\alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(0)\\ &= \frac{d}{dt}f(x_1(t),\dots,x_n(t))(0)\\ &= \sum x_i'\frac{df}{dx_i}\\ &= \left(\sum x_i'(0)\frac{d}{dx_i}\right)f,\end{aligned}$$

onde $\frac{d}{dx_i}$ é a curva tangente em p no ponto $x_i \mapsto x(0,\dots,\underbrace{x_i}_{i},\dots,x_n)$. Portanto, uma parametrização $x : U \to M$ determina uma base ortognal $\{\frac{d}{dx_1},\dots,\frac{d}{dx_n}\}$ em T_pM e isto dá a T_pM uma estrutura de espaço vetorial de dimensão n. Este espaço será chamado de *espaço tangente* à M em p.

Exemplo 1.2.3 (Fibrado Tangente). *Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p,v) : p\ inM, v \in T_pM\}$ Seja $\{(x_\alpha, U_\alpha\}$ uma estrutura diferenciável em M. Denote por $(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\{\frac{d}{dx_1^\alpha},\dots,\frac{d}{dx_n^\alpha}\}$ a base associada ao espaço tangente de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para todo α, defina*

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$$

por

$$y_\alpha(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha,u_1,\dots,u_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha), \sum u_i\frac{d}{dx_i^\alpha}\right).$$

Temos que estão aplicações dão a TM uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$.

1.3 Orientação e Colchete de Lie

Definição 1.3.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(x_\alpha, U_\alpha\}$ tal que para todos α e β como $x_\alpha(U_\alpha)\cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenada $x_\beta^{-1}\circ x_\alpha$ tem determinante positivo.*

Um *campo vetorial* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(P) \in T_pM$. Vamos denotar por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis em M. Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização. Podemos escrever um campo vetorial $X \in \mathfrak{x}(M)$ nesta parametrização como:

$$X(p) = \sum a_i(p)\frac{d}{dx_i},$$

onde $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $\{\frac{d}{dx_i}\}$ é a base associada a x.

Assim, podemos pensar em X como sendo um mapa $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, onde $\mathcal{D}$ é o conjunto das funções diferenciáveis em M e F o conjunto das funções em M. Temos que

$$Xf(p) = \sum a_i(p)\frac{df}{dx_i}(p).$$

Se X e Y são campos vetoriais em M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, então podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Além disso, existe um único campo vetorial Z tal que $Zf = XYf - YXf$.

Definição 1.3.2. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $[X,Y] = XY - YX$. Essa operação é chama de colchete de Lie .*

O colchete de Lie satisfaz as seguintes identidades:

1. $[X,Y] = -[Y,X]$
2. $[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z] + X] = 0.$

Capítulo

2

Grupos Finitamente Gerados

2.1 Grupos finitamente gerados e finitamente apresentados

Um grupo G o qual tem um numero finito de geadores é dito *finitamente gerado*, ou seja, existe $S \subset G$ finito tal que cada $g \in G$ é protuto finito de elementos de S, $g = s_1 ... s_k$ com $s_i \in S$.

Exemplo 2.1.1. $(\mathbb{Z}, +)$, *o conjuto* $S = \{\pm 1\}$ *gera* $\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Q}, +)$ *não é finitamente gerado.*

Proposição 2.1.2.

1. *Sejam G um grupo e $N \triangleleft G$ subgrupo normal. Se N e G/N finitamente apresentados, então G também o é.*

2. *jam G um grupo e $N \triangleleft G$ subgrupo normal. Se G é finitamente apresentados, então G/N também o é.*

Demonstração.

1. Tome um conjunto finito de geradores $\{n_1, \dots, n_k\}$ de N, e um conjunto finito de geradores $\{g_1 N, \dots, g_m N\}$ de G/N. Então, o conjunto finito

$$\{n_i, g_j; \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m\}$$

gera G.

2. Basta tomar a imagem pela projeção canônica dos geradores de G.6

□

Observação 2.1.3. *G e G/N finitamente gerados não implica N finitamente gerado.*

Exemplo 2.1.4. *Seja H o subgrupo das permutações de $\mathbb{Z}$ gerado por $t = (0, 1)$ e $s(i) = i + 1$. Seja H_n o subgrupo das permutações de $\mathbb{Z}$ suportadas em $[-n, n]$, e H_ω o subgrupo das permutações suportadas $\mathbb{Z}$,(i.e., o grupo das bijeções de $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que f é a identidade fora de um conjunto finito de $\mathbb{Z}$)*

$$H_\omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n.$$

Então H_ω é um grupo normal em H e $H/H_\omega \cong \mathbb{Z}$, mas H_ω não é finitamente gerado. De fato, da relação $s^k t s^{-k} = (kk + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ segue que H_ω é subgrupo de H, pois sabemos que toda permutação é gerada por transposições. Para ver que H_ω é subgrupo normal, basta mostar que $t^k H_\omega t^{-k} \subset H_\omega$ e $s^k H_\omega s^{-k} \subset H_\omega$, seja $f \in H_n$ temos que $s^k f s^{-k}(i) = s^k f(i - k) = f(i - k) + k$, agora se $i - k \geq n$ temos $f(i - k) = i - k$ portanto $s^k f s^{-k}$ é a identidade fora de $[-(k + n), k + n]$,i.e., $f \in H_{k+n}$, donde segue que $s^k H_\omega s^{-k} \subset H_\omega$, quanto a outra inclusão $t^k H_\omega t^{-k} \subset H_\omega$ esta é imediata ($t \in H_1$).

Se $g_1, \ldots, g_k$ é um conjunto finito gerando H_ω, então existe um $i \in \mathbb{N}$ tal que todos os $g_j \in H_i$ (por exemplo, $i = max$ dos suuportes dos g_j), portanto $H_\omega = H_i$. Por outro lado, H_i é subgrupo próprio de H_ω.

2.1.1 Grupos Livres

Contruiremos agora um grupo livre com base em X.
Seja X um conjunto. Seus elementos são chamados *letras* ou *símbolos*. Definimos o conjunto de *letras inversas* $X^{-1} = \{x^{-1}; x \in X\}$. Vamos pensar em $X \cup X^{-1}$ como um *alfabeto*. Uma *palavra* em $X \cup X^{-1}$ é uma sequência finita (possivelmente vazia) de letras em $X \cup X^{-1}$, i.e., uma expressão da forma $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ onde $x_{i_j}^{\varepsilon_j} \in X$ e $\varepsilon_j = \pm 1$. Vamos denotar por 1 a palavra vazia.

Denotamos por $W(X)$ o conjunto de todas as palavras no alfabeto $X \cup X^{-1}$. Por exemplo,

$$x_1 x_2 x_2 x_1 x_1^{-1} \in W(X).$$

O *comprimento* de uma palavra w é o número de letras da palavra neste alfabeto. O comprimento do palavra vazia é 0. Uma palavra é *reduzida* se não contém par de letras consecutivas da forma $x^{-1}x$ ou xx^{-1}, $x \in X$. Uma *redução* de uma palavra $w \in W(X)$ é a eliminação de todos os pares consecutivas da forma $x^{-1}x$ ou xx^{-1} $x \in X$. Por exemplo,

$$1, x_1, x_1^{-1}, x_1x_2$$

são reduzidas, enquanto,

$$x_1x_2x_2x_1x_1^{-1}$$

não é reduzida.

Definimos uma relação de equivalência em $W(X)$ por $w \sim w'$ se, e só se, w pode ser obtida de w' por uma sequência finita de reduções. Exemplo, $ux^{-1}xv \sim uv$, onde $u, v \in W(X)$.

Proposição 2.1.5. *Cada palavra em $W(X)$ é equivalente a uma única palavra reduzida.*

Seja $F(X)$ o conjunto de todas as palavras reduidas em $X \cup X^{-1}$. A proposição acima implica que $W(X)/\sim$ pode ser identificado com $F(X)$.

Definição 2.1.6. *O grupo livre com base X é o conjunto $F(X)$ equipado com o produto definido por $w \cdot w'$ é a unica palavra reduzida equivalente a ww'. A unidade do grupo é a palavra vazia.*

A cardinalidade de X é chamado o *posto* de $F(X)$.

Observação 2.1.7. *Um grupo livre com posto ≥ 2 não é abeliano. Assim, um grupo livre não abeliano é um grupo livre de posto maior ou igual a 2.*

Proposição 2.1.8 (Propiedade universal)**.** *Uma função $f : X \to G$, do conjunto X para um grupo G pode ser extendida a um único homomorfismo $\varphi : F(X) \to G$.*

Corolário 2.1.9. *Qualquer grupo G é o quociente de um grupo livre.*

2.1.2 Apresentação de Grupos

Seja G um grupo e S um conjunto de geradores de G. Seja $i : S \to G$ a inclusão, pela propriedade universal dos grupos livres i extende para um único homomorfismo

$\pi_S : F(S) \to G$. Os elementos de $\ker(\pi_S)$ são chamados *relações* do grupo G com geradores S.

Se $R = \{r_i | i \in I\}$ é tal que $\ker(\pi_S)$ é o menor subgrupo normal contendo R, neste caso, denotaremos por $\ker(\pi_S) = \langle\langle R \rangle\rangle$. Então dizemos que o par ordenado $\langle S|R\rangle := F(S)/\langle\langle R\rangle\rangle$ é uma apresentação de G.

Um grupo G é dito ser *finitamente apresentado* se existe uma apresentação finita, i.e., existem S e R finitos tal que $\langle S|R\rangle$ é uma apresentação de G.

Exemplo 2.1.10. *1. $\langle x_1, \ldots, x_n | \quad [x_i, x_j], \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}\rangle$ é uma apresentação finita de $\mathbb{Z}^n$;*

2. $\langle x, y | x^n, y^2, yxyx\rangle$ é uma apresentação do grupo Dihedral finito D_{2n};

3. $\langle x, y | x^2, y^3, xyx^{-1}y^{-1}\rangle$ é uma apresentação do grupo ciclico $\mathbb{Z}_6$.

Seja $\langle S|R\rangle$ uma apresentação de um grupo G. Seja H um grupo e $\varphi : S \to H$ uma função que preserva as relações, i.e., $\varphi(r) = 1$ para cada $r \in R$ (Rigorosamente estamos identificando φ com sua extenção definida no grupo livre com base em S e pedindo que sua extenção preserve os relatores). Então:

Proposição 2.1.11 (Propriedade Universal para grupos apresentavéis)**.** *A função φ extende para um homomorfismo $\tilde{\varphi} : G \to H$.*

Demonstração. Seja H um grupo e $\varphi : S \to H$ uma função que preserva as relações, pela propiedade universal dos grupos livres φ extentende a um único homomorfismo $\varphi : F(S) \to H$, como por hipótese $R \subset \ker \varphi$ temos que $\langle\langle R\rangle\rangle \subset \ker \varphi$. Portanto, φ desce ao quociente para um homomorfismo $\tilde{\varphi} : G \to H$ dado por $\tilde{\varphi} \circ \pi_S = \varphi$. □

Proposição 2.1.12 (Finitamente gerado não depende da escolha de geradores)**.** *Assuma que G tem apresentação finita $\langle S|R\rangle$, e seja $\langle X|T\rangle$ uma abritária apresentação de G, tal que X é finito.*

2.2 Grafo de Cayley

Antes de definir o grafo de Cayley relembramos a definição de grafo.

Definição 2.2.1. *Um grafo é uma par $\Gamma = (V, A)$ de conjuntos disjuntos onde A é um subconjuntos das pates de V com a propriedade de que cada elemento de A tem cardinalidade dois.*

Chamamos os elementos de V de vétices e os elemtos de A de arestas.

Exemplo 2.2.2.

Seja $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e*
$A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}\}$ *o par* $\Gamma_1 = (V, A)$ *é um grafo que podemos desenhar como segue*

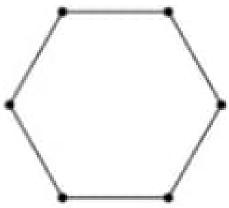

Figura 2.1: Grafo Γ_1

Definição 2.2.3. *O grafo de Cayley $Cay(G, S)$ com respeito a S é o grafo com*

1. *conjuto de vértices é G;*

2. *uma aresta contecta $g, h \in G$ se $g^{-1}h \in S$, i.e., se e só se, existe $s \in S$ tal que $h = gs$.*

Aqui estão alguns gráficos Cayley que são fáceis de descrever e desenhar

1. $Cay(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$ é isométrico a $\mathbb{R}$:

Figura 2.2: $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$

2. Alterar o conjunto de geradores faz mudar os gráficos Cayley. Por exemplo, $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{\pm 2, \pm 3\})$ é:

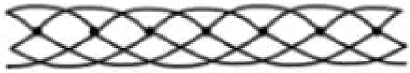

Figura 2.3: Cay($\mathbb{Z}$, ($\mathbb{Z}$, $\{\pm 2, \pm 3\}$)

3. Cay($\mathbb{Z}^2, \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$) é:

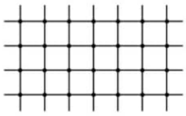

Figura 2.4: Cay($\mathbb{Z}^2, \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$)

4. Cay($F_2, \{x^{\pm}, y^{\pm}\}$) é uma árvore 4 regular,

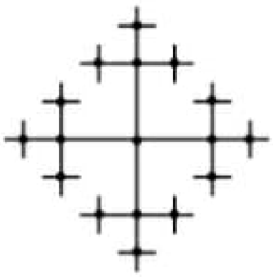

Figura 2.5: Cay($\mathbb{Z}^2, \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$)

Como S gera G temos que $Cay(G, S)$ é conexo. Um problema em teoria dos grafos é saber se dado grafo $\Gamma = (V, A)$ é k- *colorível*, i.e., se podemos atribuir k cores para colorir os vértices V de modo que vértices adjacentes possuam cores diferentes. Note que como em cada vértice do grafo de Cayley saem no máximo $\#S$ arestas, podemos sempre colorir $Cay(G, S)$ com $\#S$ cores.

Podemos supor que cada aresta é isométrica ao intervalo $[0, 1]$. Assim, temos uma maneira natural de definir o comprimento de um caminho que consiste na concatenação (finita) de subcaminhos de arestas. Definimos a distância $d(x, y)$ entre dois pontos $x, y \in Cay(G, S)$ como o ínfimo dos comprimentos de caminhos como acima conectando x a y.

A restrição G desta métrica é chamada de *métrica das palavras*.

Observação 2.2.4. • *G age por isometrias em $Cay(G, S)$. Tal ação estende a ação de G em si mesmo por translação a esquerda.*

Mais formalmente, a fim de definir uma ação por isometrias de G em $Cay(G, S)$ temos que atribuir a cada $g \in G$ uma isometria φ_g. Tal isometria pode ser escrita como segue. Para $x \in G$, $\varphi_g(x)$ é justamente gx. Para x na aresta, digamos, h_1 a h_2, $\varphi_g(x)$ é o único ponto na aresta de gh_1 a gh_2 satisfazendo $d_S(gh_1, \varphi_g(x)) = d_S(h_1, x)$.

- *O espaço métrico $Cay(G, S)$ é próprio, i.e., bolas fechadas são compactas.*

Com efeito, como fechado de um compacto é compacto, basta considerar bolas fechadas com raio natural. Agora, observe que em cada bola fechada(centrada no elemento neutro) de raio n existem no máximo $\sum_{j=1}^{n} \#S(\#S - 1)^{j-1}$ arestas, ou seja, cada bola de raio natural é a união de uma quantidade finita de arestas e como cada aresta é compacta o resultado segue.

2.3 Geometria e Topologia Grossas

O objetivo dessa aula é introduzir o conceito de quasi-isometria.

Definição 2.3.1. *Seja (X, d_X) espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é ε-separado se $d_X(a_1, a_2) \geq \varepsilon$ para todo $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$.*

Relembramos que a distância de Hausdorff entre dois subconjuntos de um espaço métrico X, é dada por $d_{Haus}(A, B) := \inf\{r, A \subset \mathcal{N}_r(B) \quad B \subset \mathcal{N}_r(A)\}$, onde $\mathcal{N}_r(B) := \{x \in X; d(x, B) \leq r\}$.

Um subconjunto S de um espaço métrico X é dito ser r-denso em X se a distância de Hausdorff entre S e X é, no máximo, r. Em outras palavras, para cada $x \in X$, temos a desigualdade $d(x; S) \leq r$.

Definição 2.3.2. *Seja (X, d_X) espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é uma rede ε-separado se A é ε-separado e 2ε-denso em X.*

Proposição 2.3.3. *Um conjunto ε-separado maximal em X é uma rede ε-separada.*

Demonstração. Seja N um conjunto ε-separado maximal em X. Para todo $x \in X \backslash N$, $N \cup \{x\}$ não é ε-separado, pela maximalidade de N. Então existe $y \in N$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$. □

Pelo lema de Zorn sempre existe uma rede ε-separada em X maximal.

Exemplo 2.3.4. *Se (X,d) é compacto então cada subconjunto ε-separado é finito. Com efeito, seja $N \subset X$ uma rede ε-separado. Logo é discreto (lembre da definição de ε-separado) e $\bigcup_{x \in N} B_{2\varepsilon}(x) = X$ (lembre da definição de 2ε-denso), portanto N é finito. Agora dado qualquer subconjunto ε-separado este está contido num subconjunto ε-separado maximal e pela proposição acima, está contido numa rede ε-separada aqual vimos que é finita. E como subconjunto de um conjunto finito é finito temos o afirmado.*

Definição 2.3.5. *Sejam $(X,d_X),(Y,d_Y)$ espaços métricos. Dizemos que X e Y são quasi-isométricos se existem $A \subset X$ e $B \subset Y$ redes sepadadas tais que $(A, d_X|_A)$ e $(B, d_X|_B)$ são bi-Lipschitz equivalentes.*

Exemplo 2.3.6.

1. *Seja X com diâmetro finito. Então X é quasi-isométrico a um ponto.*
2. *$\mathbb{R}^n$ é quasi-isométrico a $\mathbb{Z}^n$.*

Ao tentar provar que a relação quasi-isometria é uma relação de equivalência, reflexividade e simetria são simples, mas, ao tentar provar transitividade, a seguinte pergunta surge naturalmente:

Questão*(Gromov, 1993) Pode um espaço ter duas redes separadas que não são bi-Lipschitz?*

A pergunta de Gromov foi respondido por

Teorema 2.3.7 (Burago-Kleiner 98')**.** *Existe uma rede separada em $\mathbb{R}^2$ que não é bi-Lipschitz a $\mathbb{Z}^2$.*

Problema_(Burago-Kleiner, 2002) O seguinte espaço_

$$X := \{x; x \text{é o baricentro de uma telha de Penrose}\}$$

é bi-Lipschitz equivalente a $\mathbb{Z}^2$_? Resposta: Sim. Resolvida por Y. Solomon arXiv:0711.3707._

Definição 2.3.8. _Sejam_ X, Y _espaços métricos. Uma aplicação_ $f : X \to Y$ _é chamada_ (L, C)_-grossa Lipschitz se_

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') + C$$

para todos $x, x' \in X$_. Uma aplicação_ $f : X \to Y$ _é chamada mergulho_ (L, C)_-quasi-isométrico se_

$$L^{-1} d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x') + C$$

para todos $x, x' \in X$_._

Note que a um mergulho quasi-isométrico não tem que ser um mergulho no sentido usual, no entanto pontos distantes têm imagens distintas.

Exemplo 2.3.9.
1. _A função parte inteira,_ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [[x]]$ _é_ $(0, 1)$_-grossa Lipschitz. Esta função é um mergulho quasi-isométrico de_ $\mathbb{R}$ _em_ $\mathbb{Z}$_._
2. _A função,_ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ _não é grossa Lipschitz._

_Se_ X _é um intervalo finito_ $[a, b]$ _então um mergulho_ (L, C)_-grossa Lipschitz_ $q : X \to Y$ _é chamado um (segmento)_ $(L, C)-$_quasi-geodésico. Se_ $a = -\infty$ _ou_ $b = \infty$ _então_ q _é chamado um raio_ $(L, C)-$_quasi-geodésico. Se ambos_ $a = -\infty$ _e_ $b = \infty$ _então_ q _é chamado uma linha_ $(L, C)-$_quasi-geodésico._

Definição 2.3.10. _Um espaço métrico_ X _é quasi-geodésico se existem constantes positivas_ L, C _tais que para todo_ $x, y \in X$ _existe uma (L,C)-quasi-geodésica ligando_ x _a_ y_._

Definição 2.3.11. *Aplicações de espaços métricos $f : X \to Y; \overline{f} : Y \to X$ são ditas C-grosso inversas entre si, se*

$$d_X(\overline{f} \circ f; Id_X) \leq C; d_Y(f\overline{f}; Id_Y) \leq C$$

.

Em particular, um mapa inverso 0-grossa é o mapa inverso, no sentido usual. Por fim, podemos definir quasi-isometrias:

Definição 2.3.12. *Um mapa $f : X \to Y$ entre espaços métricos é chamado de quasi-isometria se é um mergulho (L, C)-grosso Lipschitz e admite uma quasi-inversa que também é um mergulho (L', C')-grossa Lipschitz. Dois espaços X métricos Y são quasi-isométricos se existe uma quasi-isometria $f : X \to Y$.*

Exemplo 2.3.13.

1. *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função L-Lipschitz. Então a aplicação*

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (x, h(x))$$

   é um mergulho quasi-isométrico. Com efeito,

   $$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(f(x), f(y)) \\ &= \sqrt{(x-y)^2 + (h(x) - h(y))^2} \\ &= \sqrt{d(x,y)^2 + d(h(x), h(y))^2} \;\cdot \\ &\leq \sqrt{d(x,y)^2 + L^2 d(x,y)^2} \\ &= \sqrt{1 + L^2} d(x,y) \end{aligned}$$

   Portanto,

   $$\frac{1}{\sqrt{1+L^2}} d(x,y) \leq d(f(x), f(y)) \leq \sqrt{1+L^2} d(x,y)$$

   e f é um mergulho $(\sqrt{1+L^2}, 0)$-grossa Lipschitz.

2. *Seja $\varphi : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\lim_{r \to \infty} \varphi(r) = \infty$, e existe $C \in \mathbb{R}$ para o qual $|r\varphi'(r)| \leq C$ para todo r. Defina a função $F : \mathbb{R}^2 \backslash B_1(0) \to \mathbb{R}^2 \backslash B_1(0)$*

em coordenadas polares por $F(r,\theta) = (r, \theta + \varphi(r))$. F *é L-bi-Lipschitz com* $L = \sqrt{1+C^2}$. *De fato, a métrica euclideana em coordenadas polares é dada por*

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Então,

$$F^*(ds^2) = [(r\varphi'(r))^2 + 1]dr^2 + r^2 d\theta^2$$

e a afirmação segue. Podemos estender F *como identidade em* $B_1(0)$. *Então,* $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é um mergulho quasi-isométrico sobrejetivo, o que implica que* $\tilde{F}$ *é uma quasi-isometria.*

Proposição 2.3.14. *Dois espaços métricos* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *são quasi-isométricos no sentido de 2.3.5 se e somente se existe uma quasi-isometria* $f : X \to Y$.

Demonstração. Vamos usar o seguinte lema:

Lema 2.3.15. *Se* $f : X \to Y$ *é um mergulho quasi-isométrico e* $f(X)$ *é* r*-denso em* Y, *então* f *é quasi-isometria.*

Assuma que existe uma (L,C)-quasi-isometria $f : X \to Y$. Seja $\delta = L(C+1)$, dado $\varepsilon > 0$ existe (lema de zorn) em X uma ε-rede δ-separada A. Então $B = f(A)$ é uma $(L\varepsilon + 2C)$-rede 1-separada.

De fato, como A é δ separado, dados b_1 e $b_2 \in B = f(A)$ temos $d(b_1, b_2) = d(f(a_1), f(a_2)) \geq \frac{1}{L} d(a_1, a_2) - C \geq \frac{1}{L}\delta - C = 1$, logo B é 1-separado.

Dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $d(f(x), y) \leq C$ (tome por exemplo $x = \overline{f}(y)$ onde $\overline{f}$ é a quasi-inversa de f). Como A é ε-denso existe $a \in A$ tal que $d(a,x) \leq \varepsilon$ donde $d(f(a), y) \leq d(f(a), f(x)) + d(f(x), y) \leq Ld(a,x) + C + C \leq L\varepsilon + 2C$ e portanto B é $(L\varepsilon + 2C)$-rede 1-separada.

Além disso, para cada $a, a' \in A$,

$$d(f(a), f(a')) \leq Ld(a,a') + C \leq \left(L + \frac{C}{\delta}\right) d(a,a')$$

e

$$d(f(a), f(a')) \geq \frac{1}{L} d(a,a') - C \geq \left(\frac{1}{L} - \frac{C}{\delta}\right) d(a,a')$$

. Portanto, se existe (L, C)-quasi-isometria $f : X \to Y$ então os espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) são quasi-isométricos no sentido de 2.3.5.

Reciprocamente, assuma que $A \subset X$ e $B \subset Y$ são duas δ-redes ε-separadas, e que existe um aplicação bi-Lipschitz (sobrejetiva) $g : A \to B$. Podemos definir $f : X \to Y$ por $x \in X \mapsto g(a_x) \in B = g(A)$, onde a_x é tal que $d(x, a_x) \leq \delta$. Como $f(X) = g(A) = B$ a imagem da f é ε-densa. Além disso, para cada $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) = d(g(a_x), g(a_y)) \leq Ld(a_x, a_y) \leq L(d(x, y) + 2\varepsilon)$$

e

$$d(f(x), f(y)) = d(g(a_x), g(a_y)) \geq \frac{1}{L}d(a_x, a_y) \geq \frac{1}{L}(d(x, y) - 2\varepsilon)$$

. Assim, a proposição segue do lema 1.3.1. $\square$

Capítulo

3

Variedades Riemannianas

Uma das maiores realizações de Carl Friedrich Gauss(1777–1855) foi um teorema tão surpreendente que lhe deu o nome Theorema Egregium ou teorema destacado. Em 1828, ele publicou sua "Disquisitiones generales circa superficies curvas", ou investigação geral de superfícies curvas. Inspirado em seu trabalho sobre elaboração de mapas e medições na superfície terrestre(cartografia), Gauss mostrou que a curvatura gaussiana K de uma superfície é independente do sistema de coordenada adotado, i.e., a curvatura gaussiana caracteriza a geometria intrínseca de uma superfície. Uma consequência deste resultado na cartografia, temos que não existe mapa plano que seja uma isometria local com o globo terrestre, pois a curvatura gaussiana da esfera é 1 e a curvatura gaussiana do plano é 0.

Inspirado no teorema egregium de Gauss, Bernhard Riemann(1826-1866) deu uma nova visão sobre geometria, quebrando as limitações existentes na época. Ele deu as noções de tensor de curvatura, superfícies de Riemann, etc. A geometria que Riemann desenvolveu permitiu 60 anos mais tarde o desenvolvimento da *Teoria da Relatividade* de Albert Einstein(1879–1955).

Neste capítulo estudaremos *variedades riemannianas*, daremos exemplos de tais variedades e estudaremos a relação entre métrica e propriedades topológicas da variedade. Por fim, daremos uma condição para podermos estudar propriedades globais das variedades riemannianas.

3.1 Métricas Riemannianas

Definição 3.1.1. *Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma métrica riemanniana é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M^n$ um produto interno $\langle , \rangle_p$, que é simétrico, bilinear e positivo definido, no plano tangente T_pM^n e é diferenciável no seguinte sentido: Se $\phi : U \to M$ é um sistema de coordenadas em p, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_i j(x_1, \ldots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Uma *variedade riemanniana* é uma variedade diferenciável munida de uma métrica riemanniana $\langle , \rangle$.

Exemplo 3.1.2. *Seja $f : M^n \to N^{n+k}$ uma imersão, i.e., f é diferenciável e $Df(p) : T_pM^n \to T_pN^{n+k}$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se N é uma variedade riemanniana com métrica $\langle , \rangle^N$, podemos munir M de uma métrica riemanniana dada por: para todo $p \in M$ e todos $u, v \in T_pM$, definimos $\langle u, v \rangle_p^M = \langle Df(p).u, Df(p).v \rangle_{f(p)}^N$*

Exemplo 3.1.3. *Seja $h : M^{n+k} \to N^n$ diferenciável e $q \in N$ um valor regular, i.e., $Dh(p) : T_pM \to T_qN$ é sobrejetiva para todo $p \in h^{-1}(q)$. Temos então que $h^{-1}(q)$ é uma subvariedade de M. Se M é uma variedade riemanniana, podemos munir $h^{-1}(q)$ de uma métrica riemanniana dada pela inclusão. Assim, podemos munir a esfera $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1\}$ de uma métrica riemanniana induzida pela inclusão em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Exemplo 3.1.4 (Grupos de Lie)**.** *Seja G um grupo de Lie. Dado $\langle , \rangle_e$ um produto interno em T_eM, podemos utilizar translações a esquerda para induzir uma métrica riemanniana em G :*

$$\langle u, v \rangle_x = \langle (DL_{x^{-1}})_x \cdot u, (DL_x^{-1})_x \cdot v \rangle_e,$$

onde $x \in G$, $u, v \in T_pM$ e $L_{x^{-1}} : G \to G$ é a translação a esquerda por x^{-1}.

3.1.1 Comprimento de Curvas

Seja $c : [a, b] \to M$ uma curva diferenciável numa variedade riemanniana M. Definimos o comprimento de c como o número:

$$l(c) = \int_a^b \langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \rangle^{1/2} dt$$

3.2 Conexões Afins

Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

tal que $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ é tal que para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e todas funções diferenciáveis $f, g : M \to M$ tem-se:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3. $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$

3.2.1 Derivada covariante

Dada uma conexão afim ∇, existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial V sobre uma curva $cI \to M$ um campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ sobre c satisfazendo

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt} V + f\frac{DV}{dt}$,

onde f é uma função diferenciável. Além disso, se $V(t) = Y(c(t))$, então:

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$$

3.2.2 Compatibilidade e Simetria

Definição 3.2.1. *Seja M uma variedade riemanniana e ∇ uma conexão afim em M. Dizemos que ∇ é compatível com a métrica de M se, para todas as curvas diferenciáveis $c : I \to M$ e todos os campos vetoriais V e W sobre c, temos que*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle.$$

Definição 3.2.2. *Dada uma variedade diferenciável M e ∇ uma conexão afim em M, dizemos que ∇ é simétrica se para todos $X, Y\mathfrak{X}(M)$ temos que*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Note que a noção de conexão afim independe da noção de métrica riemanniana. A única possível relação que vimos até agora foi a noção de compatibilidade. Uma pergunta que fica é: Dada uma variedade riemanniana M, sempre existe uma conexão afim ∇ em M que se relacione de alguma maneira com a métrica de M? A resposta é positiva e é o enunciado do próximo teorema.

Teorema 3.2.3 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ que é simétrica e compatível com a métrica de M.*

A conexão dada pelo teorema acima é chamada de *conexão de Levi-Civita.* A partir de agora, sempre que falarmos sobre variedade riemanniana, estaremos considerando também a conexão de Levi-Civita associada a ela.

3.3 Geodésicas e Vizinhanças Normais

Nesta seção discutiremos como derivadas

Seja M uma variedade riemanniana e $\gamma : I \to M$ uma curva diferenciável. Dizemos que γ é uma geodésica se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}(t)) = 0$ para todo $t \in I$.

Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe uma geodérica $\gamma : (-\delta, delta) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Uma *curva diferenciável por partes* é uma curva $c : [a, b] \to M$ tal que existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \ldots, k-1$, são diferenciáveis.

Definição 3.3.1. *Uma geodésica $\gamma : [a, b] \to M$ é dita minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, para toda curva diferenciável por partes $c : [a, b] \to M$ tal que $\gamma(a) = c(a)$ e $\gamma(b) = c(b)$.*

3.3.1 Fluxo Geodésico

Dado $p \in M$, existem V vizinhança de p e $\epsilon > 0$ e um mapa:

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M,$$

onde $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM : q \in V, w \in T_q M, |w| < \epsilon\}$, tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ é a única geodésica que passa por q com velocidade w. O mapa γ é chamado de *fluxo geodésico*.

Definimos $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q \to M$ por $\exp_q(v) = \gamma(1, q, v)$. Para algum $\epsilon' < \epsilon$, $\exp : B'_\epsilon(o) \subset T_q M \to M$ é um difeomorfismo. Chamamos $\exp_p(B'_\epsilon(0)) = V$ é chamado de *vizinhança normal* de p.

Proposição 3.3.2. *Sejam $p \in M$ e $B \subset V$ uma bola dentro de uma vizinhança normal de p e $\gamma : [0, 1] \to B$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \to M$ é uma curva diferenciável por partes que liga $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $l(\gamma) \leq l(c)$.*

A propósição acima nos mostra que geodésicas são localmente minimizantes. Mais na frente mostraremos condições suficientes para que geodésicas sejam minimizantes locais.

3.4 Curvatura

3.4.1 Curvatura Seccional

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a aplicação:

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \tag{3.4.1}$$

dada por $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$.

Dados um plano bidimensional $\sigma \in T_pM$ e $x, y \in T_pM$ dois vetores linearmente independentes, definimos

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}, \tag{3.4.2}$$

onde $(x,y,x,y) = \langle R(x,y)x, y\rangle$ e $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$

Temos que $K(x,y)$ é constante para qualquer escolha de vetores linearmente independentes em σ. Assim, podemos definir $K(\sigma) = K(x,y)$, $x, y \in \sigma$ linearmente independentes, que chamaremos de *curvatura seccional* de σ.

Sempre que falarmos que $K > 0$ ou que $K < 0$ em uma variedade riemanniana M significará que $K(\sigma) < 0$ ou $K(\sigma) > 0$ para todos os pontos $p \in M$ e todos os planos bidimensionais $sigma \in T_pM$.

3.4.2 Curvatura de Ricci

Considere $p \in M$ e $x \in T_pM$ não nulo. Se $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ é uma base ortonormal ao hiperplano de T_pM ortogonal a x, definimos

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x, z_i, x, z_i).$$

Temos que $Ric_p(x)$ não depende de base. Chamaremos este valor de $curvaturedeRicci$ de x.

3.5 Variedades Completas e o Teorema de Hopf-Rinow

Definição 3.5.1. *Sejam M uma variedade riemanniana e $p, q \in M$. definimos $d(p,q) =$ ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q.*

Temos que d é uma distância em M e a topologia gerada por d coincide com a topologia de M.

O próximo teorema mostra que se (M, d) é um espaço métrico completo, então as geodésicas possuem propriedades minimizantes.

Teorema 3.5.2 (Hopf-Rinow). *Seja M uma variedade riemanniana e um ponto $p \in M$. São equivalentes:*

1. $\exp_p$ *está definida em todo T_pM*

2. *Todo limitado e fechado de M, com respeito a métrica d, é compacto.*

3. *$(M,\ d)$ é completo como espaço métrico.*

4. *Existe uma sequência de subconjuntos compactos e encaixados $K_n \subset M$, $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup K_n = M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \to \infty$.*

Além disso, se alguma dos itens acima vale, então dados $p, q \in M$ existe geodésica γ ligando p a q tal que $d(p, q) = l(\gamma)$.

Capítulo

4

Grupo Fundamental de Variedades

4.1 Teorema de Milnor-Schwarz

Definição 4.1.1. *Um espaço métrico é dito próprio se para todo $x \in X$ e $R > 0$ temos que a bola fechada $\overline{B_R(x)}$ é compacta.*

Exemplo 4.1.2. *Qualquer métrica que em $\mathbb{R}^n$ nos dará um espaço métrico próprio.*

Exemplo 4.1.3. *Um exemplo de espaço que não é próprio é um espaço vetorial de dimensão infinita munida de qualquer norma.*

Definição 4.1.4. *Uma geodésica é uma isometria $\alpha : [a, b] \to X$. Dizemos que o espaço métrico X égeodésico se dados dois pontos $x, y \in X$, existe geodésica $\alpha : [a, b] \to X$ com $\alpha(a) = x$ and $\alpha(b) = y$.*

Exemplo 4.1.5. *Pelo teorema de Hopf-Rinow, toda varidade riemanniana completa é um espaço métrico geodésico.*

Exemplo 4.1.6. *Todo espaço que não é conexo por caminhos é um exemplo de espaço métrico não geodésico.*

Exemplo 4.1.7. *Um exemplo de espaço métrico conexo por caminhos que não é geodésico é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Basta considerar os pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.*

Definição 4.1.8. *Um grupo topológico é um grupo G equipado com uma topologia tal que as oprerações de grupo (multiplicação e inversão) são contínuas, dizemos que uma ação $\mu : G \curvearrowright X$ é uma ação topológica se G é um grupo topológico e $\mu : G \times X \to X$ é contínua.*

Exemplo 4.1.9. *Considere o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Temos que a topologia de $\mathbb{R}^n$ induz em $\mathbb{T}^n$ uma estrutura de grupo topológico. Além disso, como $\mathbb{Z}^n$ pode ser visto como um subgrupo de isometria de $\mathbb{R}^n$, temos que $\mathbb{T}^n$ é um grupo de Lie.*

Definição 4.1.10. *A ação topológica $\mu : G \curvearrowright X$ é própria se para todo par de compactos K_1 e K_2 de X, o conjunto $G_{K_1,K_2} := \{g \in G; gK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ é compacto. Se G é discreto um ação própria também é chamada de propriamente descontínua. Note que neste caso G_{K_1,K_2} são conjuntos finitos.*

Definição 4.1.11. *Uma ação topológica $\mu : G \curvearrowright X$ é cocompacta se existe um compacto K de X tal que $G \cdot K := \bigcup_{g\in G} gK = X$.*

Exemplo 4.1.12. *A ação de G (finitamente gerado) no grafo de Cayley $Cay(G, S)$ é cocompacta (note que G com a topologia dada pela métrica das palavras é discreto, em particular a ação de G em $Cay(G, S)$ é topológica). Basta tomar K a bola fechada de raio 1.*

Definição 4.1.13. *Uma ação topológica $\mu : G \curvearrowright X$ é colimitada se existe uma constante R e $x \in X$ tal que $G \cdot B_R(X) := \bigcup_{g\in G} gB_R(X) = X$.*

Proposição 4.1.14. *Seja X é um espaço métrico próprio. Uma ação $\mu : G \curvearrowright X$é cocompacta se, e somente, é codelimitada.*

Demonstração. Suponha que μ é cocompacta e considere $\Pi : X \to X/G$. Como X é próprio, dado $x \in X$ a bola fechada $\overline{B}(x, 1)$ uma vizinhança compacta. Temos que $\bigcup \Pi(B(x, 1))$ é cobre X/G. Logo, existem $x_1, \dots, x_n$ tais que $\bigcup_{i=1}^{n} \Pi(B(x_i, 1)) = X/G$. Considere agora o compacto $C = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$ Existem $x \in X$ e $R > 0$ tais que $C \subset B(x, R)$. Temos que $GB(x, R) = X$. □

Definição 4.1.15. *Uma ação geométrica de um grupo G num espaço métrico X é uma ação por isometrias, propriamente descontínua e colimitada.*

<u>Teorema</u> 4.1.16. *Todo grupo finitamente gerado age propriamente e colimitadamente por isometrias em um espaço métrico geodésico e próprio. Um exemplo de tal ação é a ação natural no seu grafo de Cayley.*

<u>Teorema</u> 4.1.17 (Milnor-Schartz)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico próprio e geodésico. Seja G um grupo agindo geometricamente em X. Então,*

1. *G é finitamente gerado*

2. *G com a métrica das palavras é quasi-isométrico a (X, d) com quasi-isometria dada por $g \in G \mapsto gx \in X$ para cada $x \in X$.*

Demonstração. **Passo 1:** *Os geradores de G.* Cada ação de $G \curvearrowright X$ geométrica é colimitada logo, existe uma bola fechada B de raio $D > 0$, tal que $G\overline{B} = X$. Como, X é próprio segue que $\overline{B}$ é compacto. Defina

$$S = \{s \in G; \quad s\overline{B} \cap \overline{B} \neq \emptyset\}.$$

Observe que S é finito porque a ação de G é propria, e que $1 \in S^{-1} = S$ por definição de S. Se $S = G$, então não há nada a provar; Assumimos, portanto, que $G \neq S$.

Passo 2: *Fora do conjunto de geradores.* Considere

$$2d := \inf\{d(\overline{B}, g\overline{B}); g \in G \setminus S\}.$$

Tome $g \in G \setminus S$ então por definição de S temos que a distância $d(\overline{B}, g\overline{B})$ é uma constante positiva R. O subconjunto $H \subset G$ dos elementos $h \in G$ tal que $d(\overline{B}, h\overline{B}) \leq R$ está contido no conjunto finito (novamente pois a ação é propria)

$$\{g \in G; g\overline{B}(x, D + R) \cap \overline{B}(x, D + R) \neq \emptyset\}$$

logo, H é finito. Assim,

$$\inf\{d(\overline{B}, g\overline{B}); g \in G \setminus S\} = \inf\{d(\overline{B}, g\overline{B}); g \in H \setminus S\}.$$

E o último infimum é sobre um conjunto finito de números positivos. Portanto, existe $h_0 \in H \setminus S$ tal que $d(\overline{B}; h_0\overline{B})$ atinge o infimum, que é, portanto, positivo. Pela definição, $d(\overline{B}; g\overline{B}) < 2d$ implica que $6g \in S$.

Passo 3: *G é finitamente gerado.* Considere a geodésica $\overline{xgx} \subset X$ e defina

$$k = \left[\frac{d(x, gx)}{d}\right].$$

Então existe uma sequência finita de pontos sobre a geodésica $\overline{xgx}$, $\quad y_0 = x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} = gx$ tal que $d(y_i, y_{i+1}) \leq d$ para $i = 0, \ldots, k$. Para cada $i = 1, \ldots, k$ seja $h_i \in G$ tal que $y_i \in h_i\overline{B}$ e tome $h_0 = 1$, $h_{k+1} = g$. Como

$$d(\overline{B}, h_i^{-1}h_{i+1}\overline{B}) = d(h_i\overline{B}, h_{i+1}\overline{B}) \leq d(h_i, h_{i+1}) \leq d$$

segue que $h_i^{-1}h_{i+1} = s_i \in S$. Logo, $g = s_0s_1 \ldots s_k$. Provamos, assim, que G é gerado por S, consequentemente G é finitamente gerado.

Passo 4: *A quasi-isometria.* Como todas as métricas de palavra em G são bi-Lipschitz equivalentes, basta provar a parte (2) para a métrica das palavras d_S em G, onde S é o conjunto gerador finito encontrado acima para o ponto escolhido x. O espaço X está contido (pela definição de colimitada) na vizinhança $2D$-tubular da imagem Gx da aplicação órbita $G \to X$. Portanto, resta provar que o mapa órbita é um mergulho quasi-isométrico. Vimos no passo anterior que $g = s_0s_1 \ldots s_k$ logo (pela definição da métrica das palavras e de k) temos

$$|g|_S \leq k + 1 \leq \frac{1}{d}d(x, gx) + 1.$$

Por outro lado, pela desigualdade triangular temos

$$d(x, gx) = d(x, s_0s_1 \ldots s_kx)$$

$$\leq d(x, s_0x) + d(s_0x, s_0s_1x) + \ldots + d(s_0s_1 \ldots s_{k-1}x, s_0s_1 \ldots s_kx)$$

$$= d(x, s_0x) + d(x, s_1x) + \ldots + d(x, s_kx) \leq (k + 1)m = m|g|_S$$

onde $m = \max_{s \in S} d(x, sx)$. Assim para todo $g \in G$ temos

$$dd_S(1,g) - d \leq d(x, gx) \leq md_S(1,g).$$

Como tanto a métrica palavra $|\cdot|_S = d_S(1,\cdot)$ como a métrica $d(\cdot,\cdot)$ em X são invariantes à esquerda em relação à ação de G, na desigualdade acima, 1 pode ser substituída por qualquer elemento $h \in G$. □

4.2 Resultados Sobre Grupos fundamentais de Variedades

Nesta seção, daremos algumas aplicações interessantes do teorema de Milnor-Schwartz. A nossa primeira e principal aplicação mostra como o grupo fundamental de uma variedade e seu recobrimento universal estão intimamente relacionados. Antes disso, vamos definir algumas ferramentas interessantes.

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $\tilde{M}$ seu recobrimento universal e $\pi : \tilde{M} \to M$ a sua aplicação de recobrimento. Temos que, como M é uma variedade diferenciável, π induz em $\tilde{M}$ uma estrutura diferenciável. Além disso, podemos induzir em $\tilde{M}$ uma métrica, que será chamada de *métrica do recobrimento*. Ela é definida da seguinte forma: dado $p \in \tilde{M}$ e $v, w \in T_p\tilde{M}$, defina $\tilde{g}(u, v) = g(d\pi.v, d\pi.w)$. Temos que $\tilde{M}$ munido de $\tilde{g}$ é uma variedade Riemanniana e que π é uma isometria local.

Antes disso, mostraremos algumas resultados que nos auxiliarão na nossa aplicação.

Definição 4.2.1. *Dizemos que dois grupos G_1, G_2 se existem dois subgrupos de índices finitos $H_1 \subset G_1$ e $H_2 \subset G_2$ e subgrupos normais finitos $N_1 \triangleleft H_1$ e $N_2 \triangleleft H_2$ tais que H_2/N_2 é isomorfo a H_1/N_1.*

Proposição 4.2.2. *Seja G um grupo finitamente gerado. Então:*

1. *Se $G_1 \subset G$ é um subgrupo de índice finito, então G_1 é finitamente gerado e quasi-isométrico a G.*

2. *Se $N \triangleleft G$ é um subgrupo normal e finito, então G e G/N são quasi-isométrico.*

3. *Se G_1 e G_2 são virtualmente isomorfos, então são quasi-isométricos.*

Demonstração. **1:** Basta considerar um grafo de Cayley X de G . Temos que G_1 age geometricamente em X. Então G_1 é finitamente gerado e quasi-isométrico a X. Como X é quasi-isométrico a G, segue o resultado.

2: Seja X um grafo de cayley de G/N. Temos que G age geometricamente em X. Portanto G é quasi-isométrico a G.

3: Consequência imediata de 1 e 2. □

Proposição 4.2.3. *Se (M, g) é completa, então $(\tilde{M}, \tilde{g})$ também é completa.*

Demonstração. Dados $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, sejam $p = \pi(\tilde{v})$ e $v = d\pi(\tilde{v})$. Como M é completa, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Como π é um recobrimento, existe uma curva diferenciável $\tilde{\gamma} \to \tilde{M}$ tal que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ e $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$. Temos que $\tilde{\gamma}$ é uma geodésica e está definida em todo $\mathbb{R}$. Pelo teorema de Hopf-Rinow, temos que $\tilde{M}$ é completa. □

Proposição 4.2.4. *$(\tilde{M}, \tilde{g})$ é um espaço métrico geodésico.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior e do teorema de Hopf-Rinow.

□

Teorema 4.2.5. *Seja M uma variedade compacta, $\tilde{M}$ seu recobrimento universal e $\pi_1(M)$ seu grupo fundamental. Temos que $\pi_1(M)$ é finitamente gerado e quasi-isométrico a $\tilde{M}$.*

Demonstração. Temos que $\tilde{M}$ é completa, que $\pi_1(M)$ age geometricamente em $\tilde{M}$ e que $\tilde{M}/\pi_1(M) = M$. Portanto, pelo teorema de Milnor-Schwarz, $\pi_1(M)$ é finitamente gerado e quasi-isométrico a $\tilde{M}$. □

Uma pergunta que fica é a seguinte: a condição de compacidade é necessária?

Exemplo 4.2.6. *Seja $K = \mathbb{T}^2 \setminus K$, onde K é um conjunto formado por infinitos pontos distintos de $\mathbb{T}^2$. Temos que $\pi_1(L)$ não é finitamente gerado.*

Sabemos que existência de métricas de curvatura positiva tem relação com o grupo fundamental. O próximo teorema, que não daremos a prova, relaciona curvatura seccional não negativa e grupo fundamental.

Teorema 4.2.7 (Gromov)**.** *Seja M^n uma variedade riemanniana completa de dimensão n com curvatura seccional $K \geq 0$. Temos que $\pi_1(M)$ é finitamente gerado e possui um conjunto de geradores com no máximo 3^n elementos.*

Dado o Teorema 2.0.1, podemos perguntar o seguinte: Dada uma variedade compacta M, qual condição geométrica podemos colocar para que o grupo fundamental de M seja finito? Para nos auxiliar, vamos utilizar o seguinte resultado:

Teorema 4.2.8 (Bonnet-Myers)**.** *Seja M uma variedade riemanniana completa tal que $Ric \geq 1/k^2 > 0$, onde Ric é a curvatura de Ricci de M. Temos que M é compacta e $diam(M) \leq \pi k$.*

Corolário 4.2.9. *Seja M uma variedade riemanniana completa tal que $Ric \geq 1/k^2 > 0$, onde Ric é a curvatura de Ricci de M. Temos que $\pi_1(M)$ é finito.*

Demonstração. Seja $\tilde{M}$ o recobrimento universal de M. Induzindo a métrica de M em $\tilde{M}$, temos que $Ric_{\tilde{M}} \geq 1/k^2$ e que $\tilde{M}$ é completa. Logo, pelo teorema de Bonnet-Myers, $\tilde{M}$ é compacta. Segue portanto que $\pi_1(M)$ é finito. $\square$

Referências Bibliográficas

[kap] Druţu, C. and Kapovich, M. *Geometric Group Theory* , Colloquium Publications, 2018.

[Man] do Carmo, M.P., *Riemannian Geometry* , Mathematics (Boston, Mass.), 1992.

[L] E. L. Lima., *Elementos de Topologia Geral.*, Coleção Textos Universitários : SBM, 2010.

[E] ima, E.L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento: Segunda Ediçao*.Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 1998.