UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WEVERSON CLAYTON DA GAMA FRANCO

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EDO'S E APLICAÇÕES EM MODELOS EPIDÊMICOS

MACEIÓ – AL

2022

WEVERSON CLAYTON DA GAMA FRANCO

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE EDO'S E APLICAÇÕES EM MODELOS EPIDÊMICOS

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), para aquisição de diploma no curso de Licenciatura Plena em Matemática, no campus A.C. Simões da Universidade Federal de Alagoas – UFAL.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Nobrega de Oliveira Lucena.

MACEIÓ – AL

2022

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

F825t Franco, Weverson Clayton da Gama.
Teoremas de existência e unicidade de soluções de EDO's e aplicações em modelos epidêmicos / Weverson Clayton da Gama Franco. - 2022.
45 f. : il.

Orientador: Rafael Nobrega de Oliveira Lucena.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 44-45.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Modelagem matemática. 3. Modelo SEIR. 4. Sistemas de equações diferenciais ordinárias. I. Título.

CDU: 517.91

9

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.matl@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Declaramos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Licenciatura que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **WEVERSON CLAYTON DA GAMA FRANCO**, matrícula nº **15111130**, intitulado **"Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções de EDOs e Aplicações em Modelos Epidêmicos**", foi avaliado e recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: **___8,0___** (**oito**), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena (Orientador): ___7,5____
Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima: ___7,5____
Profa. Dra. Elisa Fonseca Sena e Silva: ___9____

Maceió, __19___ de abril de 2022.

____

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

____

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima

____

Profa. Dra. Elisa Fonseca Sena e Silva

À Deus, Jurema Sagrada, minha família, minha namorada e meus amigos.

Agradecimentos

À Deus e a Jurema Sagrada por toda força, fé que iria dar certo, saúde e oportunidades.

À minha família, em especial ao meu pai, Tirso, e a minha mãe, Creusima, por todo esforço de me manter bem mesmo que eu esteja longe.

À minha tia Sônia, que mesmo que não seja um laço sanguíneo, me recebeu em sua casa como família.

À minha família do grupo “ACCC”, pelo aprendizado, incentivo e ajuda.

À minha amada namorada, Tayná, por todo companheirismo, conversas, confiança, por estar comigo em todos os momentos.

Aos meus amigos, em especial, Aryadyne, Bárbara, Carolina, Gabriel, Gisele, Gleydson, Symon, Tayná, por todos os momentos, inclusive os de incentivo, cobrança, de conselhos e por cada momentos de simples ouvintes. E também aos meus amigos da “Tribo”.

Ao professor Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena pela oportunidade de orientação, paciência, aprendizado e conversas.

À professora Dr. Elisa Sena pela amizade, conselhos, conversas sejam elas em momentos bons ou ruins.

À professora Dr. Viviane Oliveira, simplesmente por tudo.

À secretária de assuntos estudantis, Karenn Lima de Melo, por toda ajuda ao longo do curso e, principalmente, nessa parte final do mesmo.

Aos Centro Acadêmico de Matemática, por entender a importância de trabalho em grupo e por ajudar outros colegas da graduação.

A mim por persistir neste caminho apesar das dificuldades e impedimentos. Por todo momento de esforço, estudo, persistência. Por não perder a essência de quem sou.

“Não sou descendente de escravos. Eu descendo de
seres humanos que foram escravizados.”
(Makota Valdina)

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo apresentar a modelagem de um sistema epidemiológico que medirá a curva de contágio de um vírus em uma população ao decorrer do tempo. O sistema SEIR, construído a partir de Equações Diferenciais Ordinárias – EDO’s, aplicadas em um sistema que definirá a população em cada grupo do modelo. As variáveis do modelo em questão serão representadas da seguinte forma: S para representar a população de Suscetíveis, E para representar a população exposta, I para representar a população de infecciosos, R para representar a população removida e N representa a população total, que nesse modelo será considerada sempre constante.

Palavras-chave: EDO’s, Modelagem, Modelo SEIR, Sistemas de EDO’s.

ABSTRACT

This study aims to present the modeling of an epidemiological system that will measure the contagion curve of a virus in a population over time. The SEIR system, built from Ordinary Differential Equations - ODE's, applied to a system that will define the population in each group of the model. The variables in the model in question will be represented as follows: S to represent the Susceptible population, E to represent the exposed population, I to represent the infectious population, R to represent the removed population, and N represents the total population, which in this model will always be considered constant.

Keywords: EDO's, Modeling, SEIR Model, EDO's Systems.

Sumário

Introdução

A modelagem matemática é uma linha de pesquisa que busca aplicar ferramentas matemáticas para resolver situações diversas do nosso cotidiano, podendo ser aplicadas tanto no ensino da rede de Ensino Básico quanto em pesquisas que auxiliem em políticas públicas. Temos como exemplo, a criação de modelos epidemiológicos que são capazes de criar uma curva de contágio de um vírus ao longo do tempo, visto que o modelo foi utilizado por governos para definir políticas sanitárias que deveriam ser adotadas dado a curva de contágio.

Nesse modelo a população total, denotada por N, será sempre constante e sua principal característica é estabelecer uma relação da população em cada grupo com o tempo. O modelo apresenta os seguintes grupos:

- S, Suscetíveis: Pessoas que podem ser infectadas pelo vírus;
- E, Expostos: Pessoas expostas ao vírus, mas que ainda não estão infectadas;
- I, Infecciosos: Pessoas que foram infectadas pelo vírus e que infectam outras pessoas;
- R, Removidas: Pessoas que foram curadas ou que morreram devido ao vírus.

A construção desse modelo é feita com EDO’s, que definem a população em cada grupo e da variação de pessoas de um grupo para o outro em relação ao tempo. Como cada grupo é composto por uma EDO e teremos quatro equações que estão em função de uma variável comum, teremos ao fim um Sistema de EDO’s como base de construção do modelo.

A construção do modelo permeia diversas áreas de conhecimento, atrelando a sua base teórica de modelagem a definições, conceitos e teoremas de Análise no R^n, Espaços Métricos e EDO. Os principais teoremas atrelados ao estudo e desenvolvimento do modelo serão o Teorema do ponto fixo para contrações, ou Teorema de Banach e o Teorema de Picard. Esses resultados serão observados com mais detalhes ao longo de nosso trabalho.

1 Preliminares

Este capítulo tem como intuito apresenta definições de Análise no $\mathbb{R}^n$ e de espaços Métricos que irão nortear o desenvolvimento do trabalho. Eles darão. embasamento teórico e conceitual à construção de nosso modelo epidêmico.

Os resultados enunciados nesse trabalho podem ser encontrados nas seguintes referências: Análise real, V1, Elon Lages; Análise Matemática para Licenciados, Geraldo Àvila e Espaços Métricos, Elon Lages.

1.1. Espaços Métricos

Definição 1.1.1. Uma **métrica** em um conjunto M é uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância entre x e y, que para todo $x, y\ e\ z \in M$ satisfaz as seguintes condições:

i. $d(x,y) = d(y,x)$;
ii. $d(x,y) \geq 0$;
iii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Definição 1.1.2. Um **espaço métrico** é um par (X, d), onde X é um conjunto qualquer não vazio e d é uma métrica em X.

Exemplo 1.1.1. A métrica “zero um”. Seja M um conjunto qualquer não vazio, podemos defini-lo como um espaço métrico de maneira simples. Basta definir a métrica $d: M \times M \to \mathbb{R}$, para a qual temos

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, se\ x = y \\ 1, se\ x \neq y. \end{cases}$$

As condições de métrica (i) e (iv) são facilmente verificadas. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial.

Definição 1.1.3. Métrica Usual. Sejam dois prontos $x, y \in \mathbb{R}$, a distância entre eles é dada por $d(x, y) = |x - y|$. A função distância diz-se a **métrica usual** da reta.

Exemplo 1.1.2. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a métrica usual d, definida acima, isto é, $(\mathbb{R}, d)$ é um dos exemplos mais importante de espaço métrico.

Neste texto, sempre que nos referimos ao espaço métrico $\mathbb{R}$, estamos considerando em $\mathbb{R}$ a métrica usual d definida no exemplo anterior.

Definição 1.1.4. Norma em uma espaço vetorial. Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial real. Uma norma em $\mathbb{E}$ é uma função real $\|\ \|: \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, a qual associa a cada vetor $v \in \mathbb{E}$ um valor real $\|v\|$, chamado a norma de v, que deve satisfazer as condições abaixo para quaisquer $v, w \in \mathbb{E}$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\|v\| \geq 0$, onde $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definição 1.1.5. Um **espaço vetorial normado** é um par $(\mathbb{E}, \|\ \|)$, onde $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial real e $\|\ \|$ é uma norma em $\mathbb{E}$.

Definição 1.1.6. Um espaço de funções limitadas. Seja X um conjunto qualquer. Uma função real $f: X \to \mathbb{R}$ é dita **limitada** quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k, \forall\, x \in X$. Aqui começa a descrição de um espaço de funções.

$$B(X, \mathbb{R}) = \{f: X \to \mathbb{R}; f \text{ é limitada}\},$$

o conjunto das funções limitadas $f: X \to \mathbb{R}$. Note que se f e g pertencem a $B(X, \mathbb{R})$, então $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ também pertencem à $B(X, \mathbb{R})$. É fácil verificar essas afirmações. Para isto, sejam f e g funções limitadas, ou seja, $|f(x)| \leq a$ e $|g(x)| \leq b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, somando essas desigualdades temos:

$$|f(x)| + |g(x)| \leq a + b, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, temos que:

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq a + b,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

De forma inteiramente análoga mostraremos que $f - g$, λf e $f \cdot g$ são limitadas.

Definição 1.1.7. Dadas f e g funções em $B(X, \mathbb{R})$, definimos a métrica do supremo, também denominada métrica da convergência uniforme, por

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

1.2. Bolas

A seguir definiremos um objeto essencial no estudo da continuidade de funções em espaços métricos. No que se segue a é um ponto de um espaço métrico M e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, com $\varepsilon > 0$.

Definição 1.2.1. Uma **bola aberta** de centro a e raio $\varepsilon > 0$, denominada por $B_\varepsilon(a)$, é o conjunto constituído por todos os pontos de M, cuja distância ao ponto a é menor que ε. Ou seja,

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Definição 1.2.2. Uma **bola fechada** de centro a e raio ε é o conjunto denominada por $\overline{B_\varepsilon(a)}$, formado pelos pontos de M, cuja distância ao ponto a é menor ou igual a ε. Ou seja,

$$\overline{B_\varepsilon(a)} = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \varepsilon\}.$$

Com as definições postas de espaços métricos e bolas abertas, estaremos em condições de definir o conceito de continuidade em um ponto num espaço métrico.

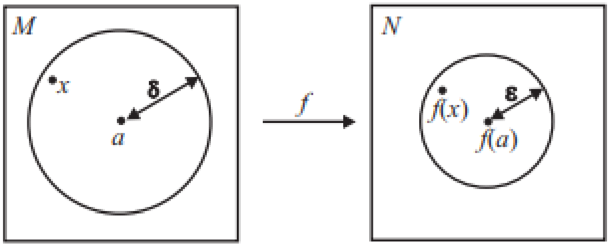
1.3. Funções Contínuas

Definição 1.3.1. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) dois espaços métricos. Dizemos que uma função $f: M \to N$ é **continua em $\boldsymbol{a} \in M$** se:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } d_2\big(f(a), f(x)\big) < \varepsilon \text{ sempre que } d_1(a, x) < \delta.$$

Diz-se que $f: M \to N$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Figura 1: Diagrama de continuidade de $\boldsymbol{a \in M}$.

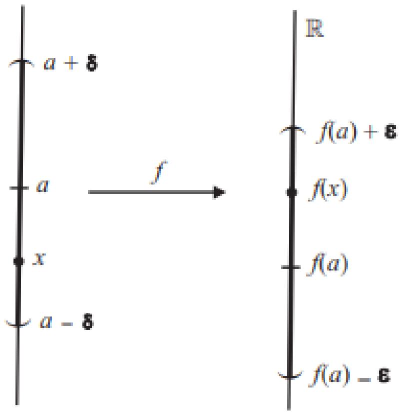


Fonte: Elon Lajes Lima, 2014.

Equivalentemente, $f: M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar $B = B(a, \delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

No caso particular em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f: M \to \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$, significa afirmar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$, implicam $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Ou seja, f associa os pontos de M que estão no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ em pontos do intervalo aberto $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Figura 2: Continuidade local



Fonte: Referência 7, Elon Lajes Lima, 2014.

Definição 1.3.2. Uma função $f: M \to N$ é **Lipschitz**, se existe uma constante $k \geq 0$ tal que

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq k d_1(x, y),\ \forall\ x, y \in M,$$

onde k é dita uma constante de Lipschitz de f. Além disso, podemos definir a menor constante de Lipschitz por

$$k_0 = \sup \frac{d_2\big(f(x), f(y)\big)}{d_1(x,y)}.$$

Proposição 1.3.1. Sejam (M, d_1) e (N, d_2) espaços métricos. Se $f: M \to M$ é Lipschitz, então f é continua em todos os pontos de M.

Demonstração: Dado $a \in N$ e $\varepsilon > 0$. Seja k uma constante de Lipschitz de f. Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, se $d_1(a, y) < \delta$, como f é de Lipschitz, temos que:

$$d_2\big(f(y), f(a)\big) \leq k d_1(y, a) \leq k\delta = k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$d_2\big(f(y), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Dessa forma, como $d_1(x, a) < \delta$ implicou que $d_2\big(f(x), f(a)\big) \leq \varepsilon$, temos que f é contínua em a.

■

Exemplo 1.3.1. Como exemplo de funções Lipschitz, podemos citar funções constantes e a função norma num espaço vetorial. Como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.2. Seja $(\mathbb{E}, \|\ \|)$ um espaço normado. A norma desse espaço é uma função de Lipschitz. De fato, usando a desigualdade triangular obtemos as seguintes desigualdades:

a. $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
b. $\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \Rightarrow -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|$,

donde, concluímos que

$$\max\{\|x\| - \|y\|, -(\|x\| - \|y\|)\} \leq \|x - y\| \Rightarrow |\|x\|| - |\|y\|| \leq |\|x - y\||.$$

Portanto, $\| \|$ é Lipschitz com $k = 1$.

■

Observação:

- Se f é Lipschitz com $k = 1$, dizemos que f é uma contração fraca.
- Se f é Lipschitz com $k < 1$, dizemos que f é uma contração.

Assim, de acordo com a observação acima, concluímos que a função norma é sempre uma contração fraca.

Proposição 1.3.2. Seja d uma métrica em X. Para $x_0 \in X$ fixo, definimos uma função do conjunto X em $\mathbb{R}$ pela igualdade $d_{x_0}(y) = d(x_0, y)$, ou seja,

$$d_{x_0}: X \to R$$

$$x \longmapsto d_{x_0}(x) = d(x_0, x).$$

Demonstração: Como d é uma métrica, temos

- $d_{x_0}(y) = d(x_0, y) \leq d(x_0, z) + d(z, y) \Rightarrow d_{x_0}(y) - d_{x_0}(z) \leq d(z, y)$
- $d_{x_0}(z) = d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) \Rightarrow d_{x_0}(z) - d_{x_0}(y) \leq d(z, y)$,

portanto

$$-\left(d_{x_0}(y) - d_{x_0}(z)\right) \leq d(z, y).$$

Donde concluímos que:

$$\max\left\{d_{x_0}(y) - d_{x_0}(z), -\left(d_{x_0}(y) - d_{x_0}(z)\right)\right\} \leq d(z, y).$$

Consequentemente,

$$\left|d_{x_0}(y) - d_{x_0}(z)\right| \leq d(z, y).$$

Logo, a desigualdade acima caracteriza uma contração fraca. Portanto temos que d_{x_0} é Lipschitz.

■

1.4. Sequências

Definição 1.4.1. Uma **sequência** de números reais é uma função

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x_n)$$

Denotaremos a sequência como $\boldsymbol{x_n}$. O número n na notação é dito **índice** da sequência e x_n é dito o **n-ésimo** termo da sequência ou seu **termo geral**.

Exemplo 1.4.1. Seja a sequência (x_n) dos números pares positivos, ou seja,

$$(2, 4, 6, 8, \cdots,)$$

ou ainda,

$$x_n = 2n, \text{com } n \in 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

Exemplo 1.4.2. A sequência (x_n) dos números ímpares positivos dada por

$$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots)$$

De forma geral, usando o fato que os termos da sequência são números ímpares, podemos escrever o termo geral dessa sequência de duas formas distintas:

$$x_n = 2n + 1, \text{com } n \geq 0$$

ou

$$x_n = 2n - 1, \text{com } n \geq 1.$$

Convém observar que nem sempre podemos definir uma lei de formação para o termo geral de uma sequência. No entanto, as vezes há uma lei de formação bem definida que nos permite determinar o termo geral da sequência, como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.3. Seja (x_n) a sequência dos números primos dada por

$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \cdots)$$

Nesse exemplo, apesar de não existe uma fórmula que determine o termo geral desta sequência, porém existe uma lei de formação bem definida que nos permite determinar cada elemento desta sequência. De fato, cada termo dessa sequência é um número primo.

Definição 1.4.2. Uma sequência (x_n) é dita ser **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, ou seja, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa dizer que todos os elementos da sequência pertencem ao intervalo fechado $[a, b]$.

Todo intervalo fechado $[a, b]$ está contido em um intervalo da forma $[-c, c]$, com $c > 0$ (intervalo simétrico). Para isto, basta tomar $c = \max\{|a|, |b|\}$. Como a condição $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leq c$, temos que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos que (x_n) é limitada se, e somente se, a sequência $(|x_n|)$ é limitada.

Definição 1.4.3. Uma sequência (x_n) é dita ser **limitada superiormente**, quando dado um número real b, temos que

$$x_n \leq b, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observe que dizer que uma sequência é limitada superiormente implica dizer que todo elemento da sequencia x_n pertence ao intervalo $(-\infty, b]$.

Definição 1.4.4. Uma sequência (x_n) é dita ser **limitada inferiormente** quando dado um número real a, temos que

$$a \leq x_n, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, todos os termos de x_n pertencem ao intervalo $[a, +\infty)$.

É fácil ver que uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada inferiormente e superiormente.

Definição 1.4.5. Uma sequência (x_n) chama-se **crescente,** quando

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se ocorrer a desigualdade

$$x_n \leq x_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é dita **não-decrescente**.

Definição 1.4.6. Uma sequência (x_n) chama-se **decrescente**, quando

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > x_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se ocorrer a desigualdade

$$x_n \geq x_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é dita **não-crescente**.

Definição 1.4.7. As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são ditas **sequências monótonas.**

Definição 1.4.8. Dada uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$, dizemos que o limite de (x_n) é igual a a e denotamos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = a,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $|x_n - a| < \varepsilon$. Neste caso dizemos que (x_n) é convergente.

Assumiremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\, x_n$ de agora em diante, a menos que seja implícito outro índice do limite.

Teorema 1.4.1. Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Demonstração: A hipótese de a sequência x_n ser limitada significa que ela é limitada superiormente e inferiormente, logo seu conjunto de valores possui um valor supremo S e um valor ínfimo I. Iremos dividir em dois casos: onde assumiremos (x_n) uma sequência não-decrescente, e o outro caso, onde assumiremos (x_n) uma sequência não-crescente. Iremos provar inicialmente que S é o limite da sequência não-decrescente (x_n), isto é, que a sequência x_n converge para S.

Dado $\varepsilon > 0$, existe um elemento da sequência, com um certo índice N, tal que $S - \varepsilon < x_N \leq S$. Ora, como a sequência é não-decrescente, $x_N \leq x_n$ para todo $n > N$, de modo que

$$n > N \Rightarrow S - \varepsilon < x_n \leq S < S + \varepsilon,$$

portanto, $|x_n - S| < \varepsilon$.

Donde segue que a sequência (x_n) é convergente.

Agora, supondo a sequência x_n não-crescente, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe um termo da sequência, com um certo índice N, tal que $I \leq x_N < I + \varepsilon$. Como a sequência é não-crescente, $x_N \geq x_n$ para todo $n > N$, de sorte que

$$n > N \Rightarrow I - \epsilon < I \leq x_n < I + \varepsilon.$$

Portanto, $|x_n - I| < \varepsilon, \forall\, n > N$, que é o que queríamos demonstrar.

■

Proposição 1.4.1. Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência da sequência (x_n) converge para a.

Demonstração: Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que: se $n > n_0$, então $d(x_n, a) < \varepsilon$ e $n > n_{k_0}$, então $d(x_n, a) < \varepsilon$, $n_{k_0} > n_0$. Logo,

$$k > \max\{k_0, n_0\}, \text{temos que } d\left(x_{n_k}, a\right) < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n_k} = a.$$

■

1.5. Sequências em Espaços Métricos

Definição 1.5.1. Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto a no espaço métrico é o limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Escreve-se então, $\lim x_n = a$, com $n \to \infty$ ou $a = \lim\, x_n$ com $n \in \mathbb{N}$. Diz-se também que x_n tende para a ou escreve-se ainda $x_n \to a$. Quando existe $\lim x_n = a \in M$, diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M, e converge para a. Se não existe $\lim\, x_n$ em M, dizemos que a sequência é divergente em M.

Dizer que uma sequência é convergente em um espaço métrico M, ou seja, $\lim x_n = a$, equivale a dizer que toda bola aberta, B, em M de centro a contém todos os termos da sequência, exceto para um número finito de termos.

A proposição a seguir expressa que quando o limite de uma sequência existe, ele é único.

Proposição 1.5.1. Se a e b são limites de uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X,d), então $a = b$.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M, e sejam os valores $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, tais que: se $n > n_0$, então $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e se $n > n_1$, então $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos agora $n = \max\{n_0, n_1\}$. Então,

$$d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \varepsilon.$$

Dessa forma, temos que $0 \leq d(a,b) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Pela arbitrariedade de épsilon, concluímos que $d(a,b) = 0$ e, portanto, $a = b$.

■

Teorema 1.5.1. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$ num espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a,1)$. Dessa forma, a sequência (x_n) está contida no seguinte conjunto: $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\} \cup B(a,1)$. Note que o conjunto A é a união de dois conjuntos limitados e, portanto, A também é limitado.

■

Observação: A recíproca deste teorema é falsa, pois há casos de sequências que são limitadas, mas não são convergentes. Por exemplo, a sequência $(0, 1, 0, 1, \cdots)$ é limitada, porém não convergente porque possui duas subsequências que convergem para limites diferentes.

Dessa forma, o teorema da unicidade de limites nos garante que tal sequência não é convergente.

Proposição 1.5.2. Uma função f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência (x_n), com $x_n \to a$, implica que $f(x_n) \to f(a)$. Ou seja,

$$f(\lim x_n) = \lim f(x_n).$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua em a, e seja $\delta > 0$ tal que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $d(x_n, a) < \delta$. Donde concluímos pela continuidade da função f que, $d\big(f(x_n), f(a)\big) < \varepsilon\ \forall\ n > n_0$. Portanto, como f é contínua em a, vale que $\lim f(x_n) = f(a)$.

Por outro lado, tome $f(x_n) \to f(a)$, iremos provar que f é contínua em um ponto a. Para isso, suponhamos por absurdo que f não seja contínua em a. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, é possível obter uma sequência $x_n \in M$, com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $d\big(f(x_n), f(a)\big) \geq \varepsilon$. Isto nos dá uma sequência (x_n) em M, com x_n convergindo para a sem que $f(x_n)$ convirja para $f(a)$.

■

Definição 1.5.2. Dizemos que uma aplicação $f: X \to (M, d)$, definida em um conjunto qualquer X e tomando valores no espaço métrico M, é limitada se a imagem de f, ou seja, $f(X)$ for um subconjunto limitado de M.

Retomando a definição de **um espaço de função**, podemos fazer uma generalização para um espaço de funções limitadas.

Definição 1.5.2. Seja X um conjunto qualquer e M um espaço métrico. Indicamos por $B(X, M)$ o conjunto das funções $f: X \to M$ limitadas.

Dadas $f, g \in B(X, M)$, o conjunto $\{d\big(f(x), g(x)\big); x \in X\} \subset \mathbb{R}^+$ é um conjunto limitado, pois como f e g são limitadas, temos que o conjunto $f(X) \cup g(X) \subset M$ é limitado.

Portanto, se $f, g \in B(X, M)$, poderemos definir a distância entre duas funções limitadas, da seguinte forma:

$$d(f, g) = \sup_{x \epsilon X} d\big(f(x), g(x)\big).$$

Portanto, obtemos uma métrica em $B(X,M)$, a qual denominamos de **métrica do sup**, ou **métrica da convergência uniforme**. É de fácil verificação as condições que d_0 é uma métrica.

1.6. Sequências de Cauchy

Definição 1.6.1. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma **sequência de Cauchy** quando,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Vale salientar que toda subsequência de uma sequência de Cauchy, é também de Cauchy.

Proposição 1.6.1. Toda sequência convergente em um espaço métrico M é de Cauchy.

Demonstração: Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se tomarmos $m,n > n_0$ teremos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n)é de Cauchy.

■

Proposição 1.6.2. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots\}$ é limitado e tem diâmetro menor do que ou igual a 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_1, \cdots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots\}$$

é limitado.

■

Proposição 1.6.3. Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente. Além disso, a sequência converge para o mesmo limite da subsequência.

Demonstração: Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e $\left(x_{n_k}\right)$ uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Com efeito, como a subsequência $\left(x_{n_k}\right)$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k > p \Rightarrow d\left(x_{n_k}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, como a sequência é de Cauchy, existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{p, q\}$, para todo $n > n_0$, existe $n_k > n_0$ tal que

$$d(x_n, a) \leq d\left(x_n, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim x_n = a$.

■

Definição 1.6.2. Diz-se que o espaço métrico M é **completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 1.6.1. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a métrica usual é um espaço métrico completo. Para mostrar isso, considere uma sequência de Cauchy $(x_n) \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definindo o subconjunto $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, temos claramente que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e também que os conjuntos X_n são limitados. Seja $a_n = \inf X_n, n = 1, 2, \cdots$. Então temos $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b = \sup X_1$. Consequentemente a sequência a_n é monótona e, portanto, convergente. Ou seja, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim\ a_n$.

Afirmamos que $a = \lim\ x_n$. Para provar essa afirmação basta mostrar que a é o limite de uma subsequência de (x_n), ou seja, dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a + \varepsilon, a - \varepsilon)$. Ora, sendo $a = \lim\ a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Por outro lado, como $a_m = \inf X_m$, existe $n \geq m$, por transitividade $n > n_1$, tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, ou seja, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Definição 1.6.3. Seja (M, d) um espaço métrico e $B(X, M) = \{f\colon X \to M\ |f \text{ é limitada}\}$. Em B definimos a função d_0 por

$$d_0(f_1, f_2) = \sup d\big(f_1(x), f_2(x)\big).$$

A função d_0 acima é uma métrica em B.

Dado uma função $\alpha: X \to M$, definamos

$$B_\alpha(X, M) \coloneqq \{f: X \to M \mid d_0(f, \alpha) < +\infty\}.$$

Proposição 1.6.4. Se M é um espaço métrico completo, então $B_\alpha(X, M)$ é completo com a métrica d_0. Em outros termos, se o espaço métrico M é completo, então $B_\alpha(X, M)$ é completo, sejam quais forem X e $\alpha: X \to M$.

Demonstração: Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $B_\alpha(X, M)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $n, m > k,$ com $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow d_0(f_n, f_m) < k. \Rightarrow \sup d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow d(f_n(x), f_m(x) \leq \sup d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leq \varepsilon, \forall\, x \in M.$$

Logo, para todo $x \in M, \big(f_n(x)\big)$ é uma sequência de Cauchy em M. Como M é completo, $\lim f_n = a$. Definimos a função $f: X \to M$ por $f(x) = \lim f_n\,(x)$.

Como (f_n) é uma sequência de Cauchy, dado $x \in X$, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n, m > k$, tal que $d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon$. Tomando o limite em m, pois como a métrica é uma função contínua (veja exemplo 1.3.1.), fixando a primeira coordenada e variando a segunda, temos que é possível a igualdade da métrica do limite ser igual ao limite da métrica. Daí,

$$\lim d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leq \varepsilon \Rightarrow d\Big(f_n(x), \lim\big(f_m(x)\big)\Big) \leq \varepsilon \Rightarrow d\big(f_n(x), f(x)\big) \leq \varepsilon, \forall\, x \in X$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \sup d\big(f_n(x), f(x)\big) \leq \varepsilon \Rightarrow d_0\big(f_n(x), f(x)\big) \leq \varepsilon.$$

Portanto, a sequência f_n converge para f na métrica d_0.

Como $(f_n)_n$ é de Cauchy, temos que f_n é limitada. Segue então que, $d_0(f_n, \alpha) < r\ \ \forall\, n$ e para algum r. Com isso, temos

$$d\big(f_n(x), \alpha(x)\big) \leq d_0(f_n, \alpha) \leq r, \forall\, n\; e\; \forall\, x.$$

Tomando o limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f_n(x), \alpha(x)\big) \leq r \ \Rightarrow d\left(\lim\big(f_n(x)\big), \alpha(x)\right) \leq r \Rightarrow d\big(f(x), \alpha(x)\big) \leq r$$

$$\Downarrow$$

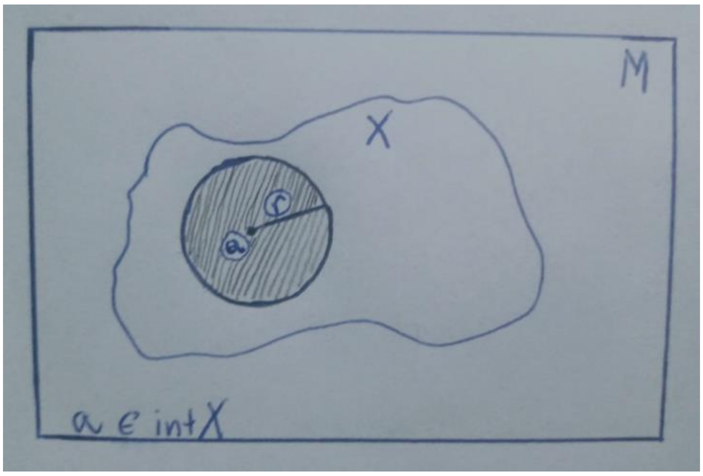
$$d_0(f, \alpha) \leq r.$$

Portanto, $f \in B_\alpha(X, M)$ e $(B_\alpha(X, M), d_0)$ é um espaço métrico completo.

■

Definição 1.6.4. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ diz-se um **ponto interior** a X quando é centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r$ implica que $x \in X$. Além disso, chama-se **interior** de X em M ao conjunto $int\, X$ formado pelos pontos interiores a X.

Figura 3: Ponto interior.



Fonte: Autor, 2022.

Denotaremos os pontos interiores a X por $int\, X$.

Definição 1.6.5. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se **conjunto aberto** quando $A = intA$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A.

Proposição 1.6.5. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é **fechado** se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.

(A demonstração deste resultado pode ser encontrada no livro do Elon Lages de Lima, Análise Real, vol. 1, p. 51, seção 2.)

Definição 1.6.6. Seja $a \in M$, a é dito **ponto aderente** de F se existe $(x_n) \subset F$ tal que $\lim (x_n) = a$.

Definição 1.6.7. Chama-se o **fecho** de um conjunto X ao conjunto $\bar{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X.

Proposição 1.6.6. Um conjunto X é dito ser um **conjunto fechado** quando $X = \bar{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X.

Demonstração: Chamaremos de fecho de $F,$ o conjunto $\bar{F} \coloneqq \{a \in M | a \text{ é aderente } de\ F\}$. Temos que F é fechado se, e somente se, $F = \bar{F}$. Observe que para demonstrar isto, basta mostrar a dupla continência. Como temos que é sempre verdade para $F \subset \bar{F}$. Daí, seja $(x_n) \subset F$ uma sequência de Cauchy. Então $(x_n) \subset M$ é de Cauchy. Como M é completo, existe $\lim(x_n) = a$. Logo a é um ponto aderente e como F é fechado, temos que $a \in F$. Logo (x_n) converge em F. E, portanto, $\bar{F} \subset F$.

■

Proposição 1.6.7. Se (M, d) é um espaço métrico completo e $F \subset M$ é fechado, então (F, d) é também um espaço métrico completo. Em outros termos, um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Além disso, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.

Demonstração: Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Seja $(x_n) \subset F$ uma sequência de Cauchy, então (x_n) é de Cauchy em M. Logo $\lim x_n = a$. Portanto, a é aderente a F. Como F é fechado $a \in F$. Daí, (x_n) é convergente em F e segue então, que F é completo. Ademais, se $M \subset N$ é um espaço completo, dada a sequência de pontos $(x_n) \in M$, com $\lim x_n = a \in M$, a sequência (x_n) é de Cauchy, pois é convergente. Logo existe $b \in M$ tal que $\lim\ x_n = b$. Como temos a unicidade do limite, tem-se $a = b$ e, portanto, M é fechado em N.

■

Definição 1.6.8. Chama-se **cobertura** de um conjunto X a uma família C de conjuntos C_λ cuja reunião contém X. A condição $X \subset U_{\lambda \in L} C_\lambda$ significa que, para cada $x \in X$, deve existir, ao menos, um $\lambda \in L$, com L sendo o conjunto dos índices, tal que $x \in C_\lambda$.

Definição 1.6.9. Dada a cobertura C, quando todos os conjuntos C_λ são abertos, diz-se que C é uma **cobertura aberta**.

Definição 1.6.10. Quando $L = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ é um conjunto finito, diz-se que $X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n}$ é uma cobertura finita. Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset U_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$, diz-se que $C' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$ é uma **subcobertura** de C.

Definição 1.6.11. Um espaço métrico (M, d) diz-se compacto quando toda cobertura aberta de M admite uma subcobertura finita. Noutros termos, M compacto significa que se $M = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada A_λ é aberto em M, então existem $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in L$ tais que $M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Notação: $M = \ \cup A_\lambda$ com cada A_λ aberto $\Rightarrow M = A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}$.

Exemplo 1.6.3. Dado $B(I_a, B_b)$ um espaço métrico completo com a métrica d_0. Definimos $C^0(I_a, B_b) = \{f: I_a \to B_b; f \text{ é continua }\}$. Além disso, sabemos que $C^0(I_a, B_b) \subset B(I_a, B_b)$, pois toda função contínua definida num compacto é limitada (ver referência 6, teorema de Weierstrass, p. 82). Portanto, $(C^0(I_a, B_b), d_0)$ é completo pois este conjunto é fechado de $B(I_a, B_b)$ (ver proposição 1.6.7.). De fato, vamos mostrar que $C^0(I_a, B_b) \subset B(I_a, B_b)$ é fechado. Se fixarmos um ponto $x_0 \in I_a$, também é fechado em $B(I_a, B_b)$ o conjunto F_a formado pelas aplicações $g = I_a \to B_b$ que estão a uma distância finita de f e são contínuas no ponto x_0.

1.7. Teorema de Banach

O teorema a seguir é um dos importantes resultados para a construção do presente trabalho. Como requisitos importantes para apresenta-lo, considere $F^n(x)$ definido por $F\left(F^{n-1}(x)\right)$ e a definição de ponto atrator.

Teorema 1.7.1. Teorema da Contração. Sejam (M, d) um espaço métrico e $F: (M, d) \to (M, d)$ uma contração. Então existe um único ponto fixo p para F. Isto é,

$$\exists!\ p \in M \text{ tal que } F(p) = p.$$

Mais ainda, p é um ponto atrator de F, isto é, $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$, para todo $x \in (M, d)$.

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, temos que provar a unicidade e a existência.

- Unicidade

Suponha que $p\ e\ p_1$, são pontos fixos, e para $0 \leq k < 1$. Então, por ser uma contração, satisfaz

$$d(p, p_1) = d\big(F(p), F(p_1)\big) \leq kd(p, p_1).$$

Suponha que $p \neq p_1$, então $d(p, p_1) > 0$, o que implica que $1 \leq k$ o que é uma contradição. Logo, $p = p_1$.

Portanto, a unicidade está provada.

- Existência

Seja $x \in M$, considere a sequência $x_n \coloneqq F^n(x)$. Note que

$$d(x_1, x_2) = d\big(f(x_0), f(x_1)\big) \leq kd(x_0, x_1),$$

$$d(x_2, x_3) = d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leq kd(x_1, x_2) \leq k^2 d(x_0, x_1),$$

de forma geral, temos

$$d(x_{r+n}, x_n) \leq k^n d(x_r, x). \tag{1}$$

Como F é uma contração, vale

- $d\big(F(x), F(y)\big) \leq kd(x, y)$
- $d\big(F^2(x), F^2(y)\big) \leq kd\big(F^2(x), F^2(y)\big) \leq k^2 d(x, y)$

$$\vdots$$

- $\mathrm{d}\big(F^n(x), F^n(y)\big) \leq k^n d(x, y).$

De fato,

$$d(x_{r+n}, x_n) = d\big(F^n(x_r), F^n(x)\big) \leq k^n d(x_r, x).$$

Além disso,

$$d(x_r, x) = d(F^r(x), x\ ) \leq d\big(F^r(x), F^{r-1}(x)\big) + d(F^{r-1}(x), x)$$

$$= d\left(F^{r-1}\big(F(x)\big), F^{r-1}(x)\right) + d(F^{r-1}(x), x)$$

$$\leq k^{r-1} d(F(x), x) + d(F^{r-1}(x), x) = k^{r-1}A + d(F^{r-1}(x), x)$$

$$\leq k^{r-1}A + d\big(F^{r-1}(x), F^{r-2}(x)\big) + d(F^{r-2}(x), x)$$

$$= k^{r-1}A + d\left(F^{r-2}\big(F(x)\big), F^{r-2}(x)\right) + d(F^{r-2}(x), x)$$

$$\leq k^{r-1}A + k^{r-2} d(F(x), x) + d(F^{r-2}(x), x)$$

$$= k^{r-1}A + k^{r-2}A + d(F^{r-2}(x), x)$$

$$\vdots$$

$$\leq k^{r-1}A + k^{r-2}A + k^{r-3}A + \cdots + kd(F(x), x) \quad r-1\ vezes$$

$$= A[k + k^2 + \cdots + k^{r-3} + \cdots + k^{r-1}] = A\sum_{i=1}^{r-1} k^i\,, k < 1$$

$$\leq A\sum_{i=1}^{r-1} k^i = \frac{A}{1-k} = \frac{d(F(x), x)}{1-k}, \forall\, r. \qquad (2)$$

Por (1) e (2), temos

$$d(x_{r+n}, x_n) \leq k^n d(x_r, x)$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k} * d(F(x), x)$$

$$\Rightarrow d(x_{r+n}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(F_x, x).$$

Como estamos em uma contração, o valor de $0 \leq k < 1$, vale que $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$, donde segue que:

- dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0\ tal\ que\ n > n_0\ e\ r \in \mathbb{N}$, então $d(x_{r+n}, x_n) < \varepsilon$.

Logo (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como M é completo (x_n) é convergente, ou seja, $\exists\, p \in M$ tal que $\lim\ x_n = p$. Afirmação: $F(p) = p$.

De fato,

$$F(p) = F(\lim F(x_n)) = \lim F(x_n)$$

$$= \lim F \cdot F^n{}_x = \lim F^{n+1} x = p.$$

Donde $F(p) = p$ e p é fixo.

Como $x \in M$ foi tomado arbitrariamente, temos que p é um ponto fixo atrator.

■

Definição 1.7.1. Seja $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dizemos que f é **Lipschitz na segunda variável**, se existir $k > 0$ tal que $\forall\ t \in \mathbb{R}$ e para todo $(t,\ x),\ (t,\ y) \in \Omega$, vale:

$$|f(t,\ x) - f(t,\ y)| \leq k|x - y|.$$

2 Equações Diferenciais Ordinárias – EDO's e Sistemas de EDO's

Este capítulo tem como intuito formular o que seriam Equações Diferenciais Ordinárias – EDO's, assim como um sistema de EDO's. Além de apresentar o teorema de existência e unicidade de soluções de EDO, mostrando que ele vale tanto localmente, quanto globalmente em casos particulares.

Os resultados encontrados aqui, também podem ser encontrados no livro Lições de Equações Diferenciais Ordinárias de Jorge Sotomayor e Equações Diferenciais Ordinárias de Claus I. Doering.

2.1. Existência e Unicidade de solução para EDO's

Seja Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano n-dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por (t, x), com $t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $\mathbb{E}$, adotaremos em $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ a norma: $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$ onde $|x|$ denota uma norma em $\mathbb{E}$, podendo citar como exemplo $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ ou $|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ ou ainda $|x| = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Seja $f = \Omega \to \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser aberto, fechado ou semifechado, finito ou infinito.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma função diferenciável $\phi = I \to \mathbb{E}$ é uma solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

no intervalo I se:

i. o gráfico de ϕ em I, ou seja, $\{(t, \phi(t));\ t \in I\}$ está contigo em Ω; e

ii. $\frac{d\phi}{dt}(t) = f\big(t, \phi(t)\big)$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

Definição 2.1.2. A equação (1) é denominada **Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem** e é comummente representada por

$$x' = f(t, x) \qquad (2)$$

Sejam $f_i: \Omega \to \mathbb{R}$, com i variando de 1 até n, as componentes de f. Então $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, com $\phi_i: I - \mathbb{R}$ é uma solução de (2) se, e somente se cada ϕ_i é diferenciável no intervalo I, $\big(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\big) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_1}{dt}(t) = f_1\big(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\big) \\ \dfrac{d\phi_2}{dt}(t) = f_2\big(t, \phi_1\,(t), \dots, \phi_n(t)\big) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d\phi_n}{dt}(t) = f_n\big(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\big) \end{cases} \qquad (3)$$

para todo $t \in I$.

Por esta razão diz-se que a equação diferencial "vetorial" (2) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n), \text{com } i = 1, \cdots, n \qquad (4)$$

Considere o Problema de Valor Inicial – PVI:

$$\begin{cases} x' = f(t,\, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \; onde\; f\!: \,\Omega\; \subset \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

para $t_0 \in \mathbb{R}\; e\; x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.1. Teorema de Picard. Seja $f: I_a \times B_b \to \mathbb{R}^n$ donde temos que $I_a = \{t \in \mathbb{R}^n; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$ uma aplicação de Lipschitz na segunda variável e contínua, onde $|f(x)| \leq M\; \forall\, x \in I_a \times B_b$. Então existe uma única função

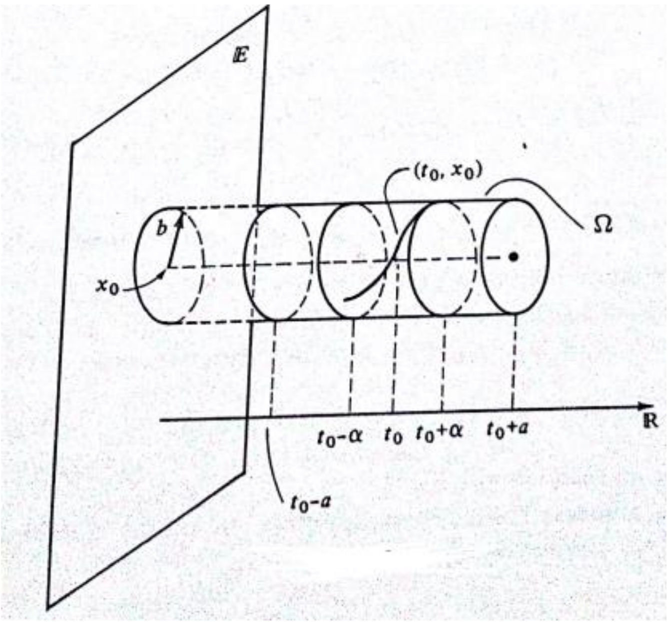
$$\varphi: I_a \to B_b, onde\; \alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

que é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,\ x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Podendo ser representada geometricamente por:

Figura 4: Solução de uma EDO.



Fonte: Referência 10, Sotomayor, 1979.

Demonstração: Seja $X = C^0(I_a, B_b)$ com a métrica

$$d_0(\varphi_1, \varphi_2) = \sup|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Considere $\begin{matrix} \text{F: } C^0 \to C^0 \\ \varphi \to F(\varphi) \end{matrix}$ definida por:

$$F(\varphi(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi(s))ds.$$

Temos que mostrar que

1. $F\,(X\,) \subseteq\ X$
2. F^n é uma contração para n suficientemente grande.

Note que,

$$F\big(\varphi(t)\big) = (x_{01} + \int_{t_0}^{t} f_1\big(s,\ \varphi(s)\big)ds\,,\ x_{02} + \int_{t_0}^{t} f_2\big(s,\ \varphi(s)\big)ds\,,\ \ldots, x_{0n}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f_n\big(s,\ \varphi(s)\big)ds).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F\big(\varphi'(t)\big) = \Big(f_1\big(t,\varphi(t)\big), f_2\big(t,\varphi(t)\big), \ldots, f_n\big(t,\varphi(t)\big)\Big)\,.$$

Daí, $F(\varphi)$ é contínua.

Agora queremos mostrar que $F(\varphi) \in C^0(I_\alpha, B_b)$. Ou seja,

$$F\big(\varphi(t)\big) \in B_b\ \forall\ t \in\ I_\alpha.$$

Para isso, sabemos que $F\varphi$: $I_a \to B_b$ está bem definida, pois

$$F\big(\varphi(t)\big) \in B_b\ \forall\ t \in\ I_\alpha.$$

Note que $F \circ \varphi'(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}\ f\big(s,\ \varphi(s)\big)ds$. Portanto,

$$|F \circ \varphi'(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t}\ f\big(s,\ \varphi(s)\big)ds\right|$$

$$\leq \int_{t}^{t_0}\ \big|f\big(s,\ \varphi(s)\big)ds\big| \leq \sup|f| \int_{t}^{t_0}\ ds$$

$$\leq M(t_0 - t) \leq M\alpha \leq \frac{Mb}{M} = b.$$

Logo $F\big(\varphi(t)\big) \in B_b\ \forall\ t \in I_\alpha$.

Portanto F: $C^0(I_a, B_b) \to C^0(I_a, B_b)$ está bem definida.

Assim concluímos 1.

■

Note que

$$|F\varphi_1(t) - F\varphi_2(t)| = |\int_{t_0}^{t} f\big(s,\ \varphi_1(s)\big) - f\big(s,\ \varphi_2(s)\big)ds|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |\, f\big(s,\ \varphi_1(s)\big) - f\big(s,\ \varphi_2(s)\big)|\ ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} k\,|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|ds$$

$$\leq kd_0(\varphi_1, \varphi_2) \int_{t_0}^{t} ds = kd_0(\varphi_1, \varphi_2)(t - t_0)$$

$$\leq kd_0(\varphi_1, \varphi_2)|t - t_0|$$

$$\leq k\alpha d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\Rightarrow |F \circ \varphi_1(t) - F \circ \varphi_2(t)| \leq k\alpha d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$d_0(F\varphi_1, F\varphi_2) \leq k\alpha d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

onde k é a constante de Lipschitz de f e $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Com isso, concluímos que F é contínua.

Agora vamos mostrar que

$$|F^n \circ \varphi_1(t) - F^n \circ \varphi_2(t)| \leq \frac{K^n|t - t_0|^n}{n!} * d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usaremos indução para demonstrar que F é uma contração, ou seja, F é uma função que satisfaz as seguintes condições:

- $d\big(F(x), F(y)\big) \leq kd(x, y), \forall\, x, y \in M$, com M sendo um espaço métrico completo;
- $0 \leq k < 1$;
- α é um ponto fixo atrator, ou seja, $\exists \alpha \in M, tal\ que\ F(\alpha) = \alpha$.

A relação é válida para $n = 0$. Suponha que (1) vale para $n = k$.

$$|F^{k+1} \circ \varphi_1(t) - F^{k+1} \circ \varphi_2(t)| = \left|F^1\Big(F^k \circ \varphi_1(t)\Big) - F^1\Big(F^k \circ \varphi_2(t)\Big)\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f\Big(s,\ F^k \circ \varphi_1(s)\Big) - \int_{t_0}^{t} f\Big(s,\ F^k \circ \varphi_2(s)\Big)ds\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f\Big(s,\ F^k \circ \varphi_1(s)\Big) - f\Big(s,\ F^k \circ \varphi_2(s)\Big)ds\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \left| f\left(s,\ F^k \circ \varphi_1(s)\right) - f\left(s,\ F^k \circ \varphi_2(s)\right) \right| ds$$

$$\int_{t_0}^{t} k|F^k \circ \varphi_1(s) - F^k \circ \varphi_2(s)|\, ds \leq k \int_{t_0}^{t} \frac{K^k * |s - t_0|^n}{n!} * d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$\leq \frac{K * K^k}{n!} \left(\int_{t_0}^{t} |s - t_0|^n\, ds \right) d_0(\varphi_1, \varphi_2).$$

Teremos dois casos:

1. $t \geq t_0$
2. $t < t_0$

Provaremos apenas o primeiro caso uma vez que a prova do segundo caso é semelhante. Nessa direção, suponhamos que $t \geq t_0$:

$$\frac{K * K^k}{n!} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n ds\, d_0(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{K^{k+1}}{n!} * \frac{(s - t_0)^{n+1}}{n+1} \Big|_{t_0}^{t} * d_0(\varphi_1, \varphi_2),$$

$$\frac{K^{k+1}}{n+1!} (t - t_0)^{\ n+1} * d_0(\varphi_1, \varphi_2) \leq \frac{K^{k+1}}{n+1!} |t - t_0|^{\ n+1} * d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

Tomando o supremo

$$d_0(F^n\varphi_1, F^n\varphi_2) \leq \frac{K^n}{n!} \alpha^n * d_0(\varphi_1, \varphi_2)$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{K^n}{n!} = 0.$

Temos que existe m tal que $\frac{K^m}{m!} * \alpha^m < 1.$ Portanto, para este $m,\ F^m$ será uma contação.

Aplicando o **teorema 1.6.1**, existe $\varphi \in C^0(I_\alpha, B_b)$ tal que $F(\varphi) = \varphi.$

Logo

$$\varphi(t) = F\big(\varphi(t)\big) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\ \varphi(s)\big) ds.$$

Observamos que $\varphi(t_0) = x_0$ e que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Ou seja, $\varphi: I_a \to B_b$ é solução para o PVI, e como o ponto fixo é único, temos que φ é a única solução.

Concluindo, assim, a prova de existência e unicidade de soluções para EDO's.

■

2.2. Sistemas de EDO's

Alguns dos resultados presentes aqui podem ser obtidos no livro de Equações Diferenciais Ordinárias, cap. 10, de Claus I. Doering.

Tomando coordenadas na base canônica de $\mathbb{R}^n$ e escrevendo $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\big)$ e $f(t,x) = \big(f_1(t,x), f_2(t,x), \cdots, f_n(t,x)\big)$, vemos que a nossa equação diferencial vetorial $x' = f(t,x)$ em $\mathbb{R}^n$ pode ser interpretada como um **sistema de equações diferenciais escalares**

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) \\ x'_2(t) &= f_2\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= f_n\big(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big). \end{aligned}$$

Temos então, uma condição inicial para esse sistema é dada por

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Uma solução desse sistema mencionado acima consiste em n funções reais deriváveis $x_j: I \to \mathbb{R}$ tais que, para cada $t \in I$,

$$x'_0(t) = f_j\big(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\big),$$

Enquanto a n-upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dessas funções constitui uma solução da equação $x' = f(t,x)$ em $\mathbb{R}^n$.

De agora em diante, a menos de menção explícita em contrário, consideramos uma aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$ contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ com aplicação derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}: U \to M(n)$ contínua em U, ou seja, tal que cada derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, para $1 \leq i, j \leq n$. Dado um ponto qualquer $(t_0, x_0) \in U$, novamente tomamos $a, b > 0$ tais que

$$R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U,$$

onde $I_a = \{t \in \mathbb{R}^n; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$ são as mesmas bolas citadas anteriormente.

Teorema 2.2.1. Picard-Lindelöf. Sejam $f: U \to R^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$. Se $f(t, x)$ é lipschitziana no retângulo $R_{a,b}$, então existe uma única solução do PVI definida no intervalo I tal que $t_0 \in I \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subseteq I_a$ e $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, em que $M > 0$ é alguma cota superior qualquer de $|f(t, x)|$ no retângulo $R_{a,b}$.

Lema 2.2.1. Dado qualquer $0 < \varepsilon \leq \delta$ existe um caminho contínuo $x_\varepsilon: I(\delta) \to R^n$ tal que, para quaisquer $t, u \in I(\delta)$, valem

$$|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(u)| \leq M|t - u| \text{ e } |x_\varepsilon(t) - x_0| \leq b$$

e, para qualquer $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, vale

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_\varepsilon(s - \varepsilon)\big)\, ds.$$

Demonstração: Definimos $x_\varepsilon(t) = x_0$ para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$ e

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_\varepsilon(s - \varepsilon)\big)\, ds$$

para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha_1$, onde $\alpha_1 = \min\{\alpha, \varepsilon\}$. É imediato ver que as desigualdades definidas no lema 2.2.1. são satisfeitas para $t_0 - \delta \leq t, u \leq t_0$ e que, para todo $t_0 \leq t, u \leq t_0 + \alpha_1$, temos

$$|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(u)| = \left|\int_{u}^{t} f\big(s, x_\varepsilon(s - \varepsilon)\big) ds\right| \leq M|t - u|$$

e

$$|x_\varepsilon(t) - x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, x_\varepsilon(s - \varepsilon)\big) ds\right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha_1 \leq M\alpha \leq M \cdot \frac{b}{M} \leq b,$$

de modo que resta observar que, em particular, se $u \leq t_0 \leq t$, temos

$$|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(u)| = |x_\varepsilon(t) - x_0| \leq M|t - t_0|,$$

o que conclui as desigualdades do lema acima são válidas, para quaisquer que sejam $t_0 - \delta \leq t, u \leq t_0 + \alpha_1$.

Por definição vale $x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon)\big)\, ds$ e também é imediato constatar que x_ε é um caminho contínuo e $[t_0 - \delta, t_0 + \alpha_1]$. Se $\alpha_1 = \alpha$, terminamos a prova; se $\alpha_1 < \alpha$, tomamos $\alpha_2 = \min\{\alpha, 2\varepsilon\}$ e definimos

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_\varepsilon(s-\varepsilon)\big)\, ds$$

para $t \in [t_0 + \alpha_1, t_0 + \alpha_2]$. Assim, estendemos x_ε a um caminho contínuo que, como antes, satisfaz as desigualdades do lema acima. Mas agora, isso é válido com quaisquer $t_0 - \delta \leq t, u \leq t_0 + \alpha_2$ e $x_\varepsilon(t)$ vale para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha_2$. E continuamos a estender x_ε até obter um caminho contínuo $x_\varepsilon\colon [t_0 - \delta, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz as desigualdades do lema 2.2.1. em seu domínio e x_ε vale em $[t_0, t_0 + \alpha]$.

■

Teorema 2.2.2. Cauchy-Peano. Sejam $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in U$ um ponto e $a, b > 0$ tais que $R_{a,b} = I_a \times B_b \subseteq U$. Então existe uma solução do PVI definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha > 0$ satisfaz $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, com $M > 0$ alguma cota superior para qualquer de $|f(t,x)|$ no retângulo $R_{a,b}$.

Demonstração: Nas hipóteses do teorema, fixamos $\delta > 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos o caminho $x_n = x_{\varepsilon_n}$ fornecido pelo lema 2.2.1. se $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Pelo lema 2.2.1., a sequência (x_n) em $C\big(I(\delta), R_{a,b}\big)$ assim obtida satisfaz as duas hipóteses do Teorema de Ascoli (ver referência 4, p. 347), que então garante a existência de um caminho contínuo $x\colon I(\delta) \to \mathbb{R}^n$ que é o limite uniforme de (x_n). Da convergência uniforme $x_n(s) \to x(s)$ em $I(\delta)$ e da continuidade uniforme de f no compacto $R_{a,b}$ decorre a convergência uniforme de $f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) \to f\big(s, x(s)\big)$ em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Fixado $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, isso nos permite tomar o limite com $n \to \infty$ de ambos os lados de x_ε, daí

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds,$$

para obter

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds,$$

o que significa, como sabemos, que $x(t)$ é uma solução do PVI.

■

Teorema 2.2.3. Se $f(t,x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ são aplicações contínuas de (t,x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então, dado qualquer ponto $(t_0,x_0) \in U$, **existe uma única solução** do problema de valor inicial $x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ centrado em t_0, para certo $\alpha = \alpha(t_0,x_0) > 0$.

Proposição 2.2.1. Se $f(t,x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ são aplicações contínuas de (t,x) em todo espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ e se $f(t,x)$ é limitada em todo $\mathbb{R}^{n+1}$, então para cada ponto $(t_0,x_0) \in U$ existe uma única solução da equação diferencial $x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$ definida em toda reta $\mathbb{R}$.

Demonstração: Como f é limitada, temos que existe $M > 0$, tal que $|f(t,x)| \leq M$, para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Então para cada $a,b > 0$ temos que o retângulo $R_{a,b}$ está contido em R^{n+1}. Assim, aplicando o Teorema de Cauchy-Peano, existe uma solução da equação diferencial $x' = f(t,x)$ e $x(t_0) = x_0$, onde (t_0,x_0) é um ponto qualquer de R^{n+1} definida no intervalo fechado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Podemos observar que M não depende de a nem de b, pois é a constante que limita a função em todos os pontos do $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, se tomarmos $a \to +\infty$ e $b \to +\infty$, então teremos $\alpha \to +\infty$. Desta forma,

$$t_0 - \alpha \to -\infty \text{ e } t_0 + \alpha \to +\infty$$

ou seja, o intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Então obtemos uma solução de $x' = f(t,x)$ e $x(t_0) = x_0$ definida em $\mathbb{R}$. Isto é, $\mathbb{R} = \cup[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

■

Portanto, com o exercício e os teoremas enunciados acima, podemos definir a existência e a unicidade de soluções de EDO's de uma forma global.

3 Modelo SEIR

O modelo SEIR é um modelo matemático que reproduz a propagação de um vírus ao longo do tempo. Nesse modelo a população total, denominada por N, é dividida em quatro grupos (compartimentos), denotados por S, E, I e R, cuja nomenclatura está especificada logo abaixo.

- Suscetíveis – S: Pessoas que podem contrair o vírus;
- Expostos – E: Pessoas que contraíram o vírus, mas não infectam ainda;
- Infecciosos – I: Pessoas que foram expostas que podem infectar pessoas suscetíveis;
- Removidos – R: Pessoas curadas ou mortas;

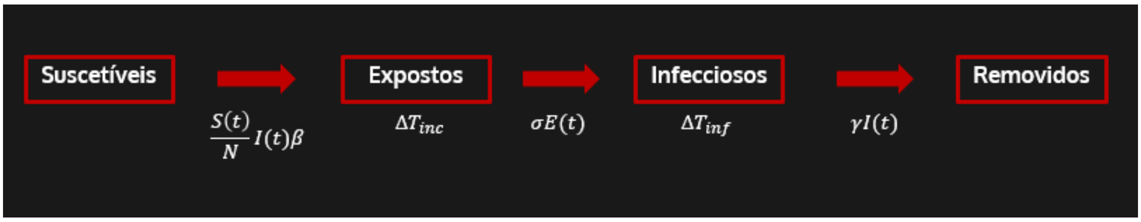
Assumimos que todas as variáveis do modelo S, E, I, R são funções diferenciáveis com relação a variável temporal, que indicaremos por t.

Além disso, nesse modelo a população total N é considerada constante e, nesse caso, temos a seguinte relação:

$$N \coloneqq S + E + I + R.$$

No fluxograma abaixo, dada uma taxa de transmissão e infecção entre os grupos, entenderemos melhor o fluxo das relações entre esses grupos no decorrer do tempo.

Figura 5: Diagrama da população em relação ao tempo



Fonte: Autor, 2022.

Para entender o fluxo de indivíduos entre os grupos com o decorrer do tempo, iremos definir algumas variáveis, sendo elas

- $R_0 \coloneqq$ quantidade de pessoas suscetíveis que um infeccioso infecta, enquanto permanece infeccioso;

- $\Delta T_{inc} \coloneqq$ tempo que um indivíduo fica no compartimento E. Isto é, após ΔT_{inc} dias ele passa de E para I;
- $\Delta T_{inf} \coloneqq$ tempo que um indivíduo fica no compartimento I. Isto é, após ΔT_{inf} dias ele passa de I para R;
- $\beta = \frac{R_0}{\Delta T_{inf}}$ quantidade de suscetíveis que um indivíduo infeccioso infecta, por unidade de tempo (dia);
- $\sigma = \frac{1}{\Delta T_{inc}}$ mede a quantidade de indivíduos que é transferido de E para I por unidade de tempo, por indivíduo;
- $\gamma = \frac{1}{\Delta T_{inf}}$ mede a quantidade de indivíduos que é transferido de E para I por unidade de tempo, por indivíduo.

Definidas essas variáveis, podemos mostrar como chegamos às equações que ditam a tramitação entre os grupos com o decorrer do tempo. Daí, demonstraremos as equações de $S \to E, E \to I, I \to R$. Como assumimos que a população geral N é constante, não iremos considerar que um indivíduo removido possa ter uma reinfecção.

Assim, de $S \to E$ temos do grupo de Suscetíveis

$$S(t + \Delta t) - S(t) = -\beta I(t) * \frac{S(t)}{N} \Delta t$$

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\beta I(t) * \frac{S(t)}{N}$$

tomando o limite, temos

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -\beta I(t) * \frac{S(t)}{N} = -\beta I(t) * \frac{S(t)}{N}.$$

Logo,

$$\frac{dS}{dt} = -\beta I(t) * \frac{S(t)}{N}. \tag{1}$$

Para a população de Expostos teremos

$$E(t+\Delta t) - E(t) = \beta I(t)\Delta t * \frac{S(t)}{N} - \sigma E(t)\Delta t$$

então

$$\frac{E(t+\Delta t) - E(t)}{\Delta t} = \beta I(t) * \frac{S(t)}{N} - \sigma E(t)$$

daí,

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(t+\Delta t) - E(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \beta I(t) * \frac{S(t)}{N} - \sigma E(t) = \beta I(t) * \frac{S(t)}{N} - \sigma E(t).$$

Logo,

$$\frac{dE}{dt} = \beta I(t) * \frac{S(t)}{N} - \sigma E(t). \qquad (2)$$

Da mesma forma, para a população em Infecciosos temos

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \sigma E(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t$$

então

$$\frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \sigma E(t) \ - \gamma I(t)$$

daí,

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sigma E(t) - \gamma I(t) \ = \sigma E(t) - \gamma I(t)$$

Logo,

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E(t) - \gamma I(t). \qquad (3)$$

Por fim, para a população em Removidos, temos

$$R(t+\Delta t) - R(t) = \gamma I(t)\Delta t$$

então

$$\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t}=\gamma I(t)$$

daí,

$$\frac{dR}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\gamma I(t)=\gamma I(t).$$

Logo,

$$\frac{dR}{dt}=\gamma I(t) \tag{4}$$

Portanto, utilizando as equações diferenciais 1, 2, 3 e 4, podemos formular o seguinte sistema de EDO's que define o modelo epidêmico SEIR:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt}=-\beta I(t)*\dfrac{S(t)}{N} \\ \dfrac{dE}{dt}=\beta I(t)*\dfrac{S(t)}{N}-\sigma E(t) \\ \dfrac{dI}{dt}=\sigma E(t)-\gamma I(t) \\ \dfrac{dR}{dt}=\gamma I(t). \end{cases} \tag{5}$$

Como assumimos que as funções $S(t), E(t), I(t)\ e\ R(t)$ são diferenciáveis, o Teorema de Picard garante que esse sistema possui solução local para qualquer PVI definido a partir dele. Ademais, pela proposição 2.2.1, que garante a existência e unicidade de solução do PVI na reta real, temos que o sistema de EDO's que constituem o modelo SEIR admitem solução em $\mathbb{R}$ já que suas funções são diferenciáveis e limitadas (N=S+E+I+R), por hipótese.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivos principais estudar diversos teoremas de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações deles. Explanamos algumas definições de Espaços Métricos, Análise Real e Análise Funcional bem como resultados importantes que tiveram suas demonstrações expostas com detalhes.

No quesito aplicações, o trabalho foi motivado devido aos diversos usos que o Modelo SEIR teve para modelar a evolução do SARSCOV-2 em diversas populações do mundo.

A construção do modelo SEIR é um processo que passa por várias áreas de conhecimento. Mostrando dois resultados importantes na parte de modelagem de EDO's para aplicações em situações epidêmicas, que seriam o Teorema de Banach e o Teorema de Picard. Os dois garantem a existência e unicidade de soluções de EDO's ou para um Sistema de EDO's, tanto localmente quanto, em alguns casos, globalmente. O que nos dá base para a construção do sistema de EDO's que compõe tal modelo.

O modelo SEIR é uma ferramenta muito útil para se estimar uma curva de contágio apenas com dados iniciais sobre taxa de transmissão do vírus. O que pode auxiliar na criação de políticas públicas que visem administrar a evolução dessa curva. Por exemplo, evitando superlotação em hospitais.

REFERÊNCIAS

1. ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. Ed. Edgard Blücher, 3 ed., 2006.

2. BARROS, Cícero D. Vieira. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações**. Tese de mestrado. ProfMat na Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: arquivototal.pdf (ufpb.br). Acessado em: 17 fev. 2021.

3. BOYCE, William E.; DiPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Ed. LTC, 10 ed., 2015.

4. DOERING, Claus Ivo; LOPES, Artur Oscar. **Equações Diferenciais Ordinárias**, IMPA, 6 ed., 2016.

5. ENDO, D. H. Cavamura. **Espaços Métricos: uma introdução**. São Carlos, 2015. Disponível em: DanielaEndo.pdf (ufscar.br). Acesso em: 23 fev. 2022.

6. LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de Uma Variável, volume 1**. IMPA (Coleção Matemática Universitária), 1 ed., 2014.

7. LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. IMPA, 1 ed., 2014.

8. LUCENA, Rafael Nobrega de Oliveira. Mestrado em Matemática – Equações Diferenciais Ordinárias [material de aula]. Matemática, 2021. Universidade Federal de Alagoas. Disponível em: Rafael Lucena - Pós-graduação (google.com). Acesso em: 20 set. 2020.

9. OLIVEIRA, Isabel Mesquita. **Modelos Epidemiológicos SEIR**. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2008.

Disponível em: 98626_TESE-371_TM_01_P.pdf (up.pt). Acesso em: 19 mai. 2021.

10. SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA (Projeto Euclides), 1979.

11. VITORINO, Alfredo; RUGGIERO, M. A. Gomes. **Espaço com Produto Interno: norma e distância**. Unicamp, 2016. Disponível em: Algebra Linear e Aplicações (unicamp.br). Acesso em: 09 mar. 2022.