UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO EM MATEMÁTICA LICENCIATURA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

SANDRA CAVALCANTE MARINHO

ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÃO

MACEIÓ
2020

SANDRA CAVALCANTE MARINHO

ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

MACEIÓ

2020

SANDRA CAVALCANTE MARINHO

ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Aprovado em: 13 de abril de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Prof. Dr. Cicero Tiarlos Nogueira Cruz (Orientador)
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo;

Aos meus pais, Daniella e José, por todo amor, por sempre estarem comigo nesta caminhada, por me acolherem, acreditar em mim e sempre me incentivar. Serei eternamente grata a vocês!;

Ao meu irmão, avós, avôs, tias e tios, por todo carinho e cuidado;

Ao meu orientador deste trabalho, Tiarlos Cruz, o qual tenho grande admiração, pela paciência e emprenho para me encaminhar neste trabalho;

A todos os professores do Programa de Apoio as Escolas Públicas do Estado (PAESPE) por todo incentivo para ingressar em um curso superior e sonhar com um futuro melhor. Em especial, ao professor Roberaldo Souza, fundador do programa que transforma vidas, pelos ensinamentos e orientação durante toda essa caminhada;

Ao Programa de Educação Tutorial (PET) por me permitir experienciar o ensino, a pesquisa e extensão de forma fantástica. Por me proporcionar momentos de discussões construtivas, aprender e partilhar conhecimento, além de vivenciar a universidade de forma diferenciada;

Aos meus amigos da escola, da universidade e infância e aqueles que conheci a pouco tempo, mas que já conquistaram a minha confiança e respeito. Em especial, Jandir Gomes, George Tavares, Jefferson Silva, Victor Lohan e Ewellyn Amâncio;

Por fim, mas não menos importante, meus sinceros agradecimentos a todos/as os/as professores/as que compartilharam seus conhecimentos e contribuíram para a minha formação.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

(Cora Carolina)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo definir espaços de Banach e fazer aplicação, sendo esta a demonstração do Teorema de Picard, o qual tem grande relevância no estudo de equações diferenciais ordinárias. Para tal, será abordado alguns resultados importantes sobre espaços métricos e demostrado o Teorema do Ponto Fixo.

Palavras-chave: Espaços Métricos, Teorema de Banach, Aplicação.

ABSTRACT

The present work aims to define Banach spaces and make an application, namely the demonstration of Picard's Theorem, which is of great relevance in the study of ordinary differential equations. In order to do that, some important results about metrical spaces will be approached and the Fixed Point Theorem will be demonstrated.

Keywords: Metrical spaces, Banach spaces, Application

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A noção de métrica, espaços métricos e espaços métricos completos possibilitou a abstração e a generalização de distância, de modo a aplicá- la a diversos tipos de conjuntos que até o século XIX não eram tratados com tanta familiaridade pelos matemáticos.

Uma importante aplicação para resultados obtidos através de espaços métricos é o Teorema de Picard. Este teorema pode ser provado utilizando as condições de espaço de Banach e o Teorema do Ponto Fixo.

O Teorema de Picard é de grande relavância, pois estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de soluções em uma vizinhança para problemas de valor inicial.

No estudo dos espaços métricos, iniciaremos definindo esses espaços e dando alguns exemplos. Em seguida, faremos uma abordagem sobre funções contínuas em espaços métricos e mostraremos exemplos de funções uniformemente contínuas, em especial a aplicação lipschitziana. Daremos continuidade ao trabalho com noções de topologia e sequências nos espaços métricos. No último capítulo, será definido sequência de Cauchy e espaços de Banach, além de provar o Teorema do Ponto Fixo e o Teorema de Picard.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo, serão definidos e exemplificados espaço métrico, bola e conjunto limitado. Estes conceitos são de grande relevância para o estudo dos espaços métricos completos e aplicações sobre existência e unicidade para pontos fixos.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1. Seja M um conjunto qualquer diferente do vazio e seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ uma função. Se d satisfaz as seguintes condições para todo $x, y, z \in M$:

1. $d(x,x) = 0$;
2. $d(x,y) > 0$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$;
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Então, d é chamada de **métrica sobre** M.

Definição 2.1.2. Chamaremos o par (M,d) de **espaço métrico**, onde M é um conjunto e d é uma métrica sobre M.

Exemplo 2.1.1. A função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = |x - y|$ é uma métrica sobre $\mathbb{R}$. Esta é a métrica usual em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.2. (Métrica “zero-um") Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$, se $x \neq y$.

De fato, para todo $x, y, z \in M$,

1. $d(x,x) = 0$, por definição;
2. Se $x \neq y$, então $d(x,y) = 1$ por definição. Logo, $d(x,y) > 0$;
3. Se $x \neq y$, então $d(x,y) = 1 = d(y,x)$;
4. Para provar a quarta condição precisamos dividir em casos. Temos que pode ocorrer $x = z$ ou $x \neq z$.

1º) Se $x = z$ então $d(x,z) = 0$ e, pelas condições 1 e 2 da definição de métrica, temos que $d(x,y) + d(y,z) \geq 0$. Logo, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

2º) Se $x \neq z$ e:

2') $x = y$, então $y \neq z$. Assim, $d(x,z) = d(y,z) = 1$ e $d(x,y) = 0$. Portanto, $d(x,z) = 1 = 0+1 = d(x,y)+d(y,z)$;

2") $x \neq y$, então $d(x,z) = 1 \leq 1+d(y,z) = d(x,y)+d(y,z)$.

Portanto, (M,d) é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.3. Em $\mathbb{R}^n$, conjunto das n-uplas de números reais, as funções d, d', d'': $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

$$d'(x,y) = |x_1-y_1|+...+|x_n-y_n| = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \tag{2.2}$$

$$d''(x,y) = \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} = \max\{|x_i-y_i|, i = 1,2,...n\} \tag{2.3}$$

onde $x = (x_1,x_2,...,x_n)$ e $y = (y_1,y_2,...,y_n)$ são métricas.

De fato, verifiquemos as condições da definição 2.1.1 para mostrar que d,d',d'' são métricas sobre $\mathbb{R}^n$.

I. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$d(x,x) = \sqrt{(x_1-x_1)^2+...+(x_n-x_n)^2} = 0$$
$$d'(x,x) = |x_1-x_1|+...+|x_n-x_n| = 0;$$
$$d''(x,x) = \max\{|x_1-x_1|,...,|x_n-x_n|\} = 0.$$

II. Para cada $x_i,y_i \in \mathbb{R}$, tal que $y_i \neq x_i$ e $i \in \{1,2,...,n\}$, temos:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i-y_i)^2} = |x_i-y_i| > 0;$$
$$d'(x,y) = |x_1-y_1|+...+|x_n-y_n| \geq |x_i-y_i| > 0;$$
$$d''(x,y) = \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} \geq |x_i-y_i| > 0.$$

III. Se $x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2} = d(y,x); \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1|+...+|x_n-y_n| \\ &= |y_1-x_1|+...+|y_n-x_n| = d'(y,x); \\ d''(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} \\ &= \max\{|y_1-x_1|,...,|y_n-x_n|\} = d''(y,x). \end{aligned}$$

Antes de provarmos a propriedade IV para d, provaremos a desigualdade de **Cauchy-Schawarz** no $\mathbb{R}^n$ cujo enunciado é:

Lema 2.1.1. Se $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ são números reais arbitrários, então:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Note que a desigualdade $2pq < p^2 + q^2$ é verídica, pois $(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2 \geq 0$. Assim, se fizermos $a = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ e $b = \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$, temos a relação:

$$2 \cdot \frac{|x_i|}{a} \cdot \frac{|y_i|}{b} \leq \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$. Somando em relação ao índice i, teremos:

$$\frac{2}{ab} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1 + 1 = 2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq a.b &= \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\square$

Agora provaremos IV para a métrica d.

IV. Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} [d(x,z)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i + y_i - z_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \cdot (y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schawarz, segue que

$$\begin{aligned} [d(x,z)]^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}\right)^2 \\ &\leq [d(x,y) + d(y,z)]^2 \end{aligned}$$

Assim, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$$\begin{aligned}
d'(x,z) &= |x_1 - z_1| + ... + |x_n - z_n| \\
&= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + ... + |x_n - y_n + y_n - z_n| \\
&\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + ... + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\
&\leq (|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|) + (|y_1 - z_1| + ... + |y_n - z_n|) \\
&\leq d'(x,y) + d'(y,z),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d''(x,z) &= \max\{|x_1 - z_1|, ..., |x_n - z_n|\} \\
&= \max\{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|, ..., |x_n - y_1 + y_1 - z_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} + \max\{|y_1 - z_1|, ..., |y_n - z_n|\} \\
&\leq d''(x,y) + d''(y,z).
\end{aligned}$$

Portanto, d, d' e d" são métricas em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.1.1. Sejam d, d' e d" as métricas já definidas. Assim, para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n.d''(x,y)$$

Demonstração. A prova da primeira e da terceira desigualdade é simples. Sendo assim, provaremos apenas a segunda desigualdade:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\
&= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2} \\
&\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2 + 2.\sum_{i \neq j} |x_i - y_i|.|x_j - y_j|} \\
&\leq \sqrt{(|x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|)^2} \\
&\leq |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\
&\leq d'(x,y)
\end{aligned}$$

Logo, $d(x,y) \leq d'(x,y)$. □

Exemplo 2.1.4. (Espaço das funções contínuas em um intervalo fechado). Seja $[a,b] \in \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Indiquemos por $C[a,b]$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[a,b]$, cuja métrica dada por $d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} d(f(x), g(x))$ é um espaço métrico.

De fato, verifiquemos as condições para uma métrica:

I. $d(f,f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f(x)| = 0$,

II. Se $f \neq g$, existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) \neq g(x_1)$. Daí, $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \geq |f(x_1) - g(x_1)| > 0$,

III. $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| = d(g,f)$.

IV. Sejam f, g, $h \in C[a,b]$, temos para todo $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\
&\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| \\
&= d(f,h) + d(h,g)
\end{aligned}$$

Portanto, $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$. (Ver [3])

Definição 2.1.3. Seja (M,d) um espaço métrico e seja $S \subset M$, com $S \neq \emptyset$. Quando usado a métrica d entre os elementos de M, temos que S pode ser considerado um espaço métrico. Diante disto, S chama-se **subespaço de** M e a métrica de S diz-se **induzida** pela de M.

Definição 2.1.4. Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $|\ \ | : E \to \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ ao número real $|x|$, chamado **norma do vetor x**, de modo a serem cumpridas as condições, abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

I. Se $x \neq 0$, então $|x| \neq 0$;

II. $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$;

III. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ao par $(E, |\ \ |)$, onde E é um espaço vetorial real e $|\ \ |$ é uma norma em E, chamamos de **espaço vetorial normado**. É importante ressaltar que todo espaço vetorial normado $(E, |\ \ |)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x,y) = |x - y|$.

2.2 Bolas e esferas

Definição 2.2.1. Dado um ponto a qualquer no espaço métrico M e $r > 0$ em número real, chamaremos:

I. **Bola aberta** de centro a e raio r ao conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Isto é,

$$B(a,r) = \{x \in M;\ \ d(x,a) < r\}$$

II. **Bola fechada** de centro a e raio r ao conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Ou seja,

$$B[a,r] = \{x \in M;\ \ d(x,a) \leq r\}$$

III. **Esfera** de centro a e raio r ao conjunto $S(a;r)$ formado pelos pontos de M tais que a distância seja igual ao raio, isto é,

$$S(a;r) = \{x \in M;\ \ d(x,a) = r\}$$

Note que $B[a;r] = S(a;r) \cup B(a;r)$.

Definição 2.2.2. Seja X um subespaço do espaço métrico M, $a \in X$ e $r > 0$. Então chamaremos $B_x(a;r) = B(a;r) \cap X$ de **bola aberta de centro a e raio r relativa à métrica induzida em X.**

Exemplo 2.2.1. Usando a métrica usual da reta para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, tem-se que:

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R};\ \ d(x,a) = |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$$

pois $|x-a| < r$ é equivalente a $-r < x-a < r$, isto é, $a-r < x < a+r$. Da mesma forma, temos que:

$$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R};\ \ d(x,a) = |x-a| \leq r\} = [a-r, a+r]$$

donde $|x-a| \leq r$ é equivalente a $-r \leq x-a \leq r$, isto é, $a-r \leq x \leq a+r$.
Além disso,

$$S[a;r] = \{x \in \mathbb{R};\ \ d(x,a) = |x-a| = r\} = \{a-r, a+r\},$$

pois $|x-a| = r$ equivale a ter $-(x-a) = r$ ou $x-a = r$. Daí, temos $x = a-r$ e $x = a+r$.

Proposição 2.2.1. Dados os pontos $a \neq b$ em um espaço métrico M, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r+s \leq d(a,b)$. Então as bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ são disjuntas.

Demonstração. Se existisse algum ponto $x \in B(a;r) \cap B(b;s)$, teríamos $d(a,x) < r$ e $d(b,x) < s$. Daí, $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < r+s \leq d(a,b)$. Um absurdo. □

Corolário 2.2.1. Se $r+s < d(a,b)$, então as bolas fechadas $B[a,r]$ e $B[b,s]$ são disjuntas.

Demonstração. Tome r' e s' tais que $r < r'$, $s < s'$ e $r+s < r'+s' < d(a,b)$. Então as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b;s]$ estão contidas nas bolas abertas disjuntas $B(a;r')$ e $B(b;s')$, respectivamente. □

2.3 Conjuntos limitados

Definição 2.3.1. Um conjunto $X \neq \emptyset$ de um espaço métrico M chama-se **limitado** quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x,y) \leq c$ para quaisquer $x,y \in X$. A essa constante c é dado o nome de **cota superior** e a menor dessas cotas superiores é chamado de **supremo** ou **diâmetro** de X. Assim, o diâmetro de um conjunto limitado $X \subset M$ é definido por:

$$diam(X) = \sup\{d(x,y);\ \ x,y \in X\}$$

Exemplo 2.3.1. Em um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B(a;r)$ tem diâmetro $2r$.
De fato, dado $x,y \in B(a;r)$, temos que:

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < r + r = 2r$$

Agora, tome $y \in E$, $y \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$ tal que $s < 2t < 2r$. Assim, o vetor $x = \dfrac{t \cdot y}{|y|}$ tem norma t e menor que r. Logo, $a - x$ e $a + x$ pertencem a B. Além disso, $d(a-x, a+x) = |(a+x) - (a-x)| = 2 \cdot |x| = 2 \cdot t > s$. Logo, s não é o diâmetro de $B(a;r)$. Portanto, $diam(B(a,x)) = 2r$.

Definição 2.3.2. Uma função $f : X \to M$, com X um conjunto arbitrário e tomando valores no espaço métrico M, chama-se **limitada** quando sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M. Denotaremos o **conjunto das funções limitadas** por $B(X;M)$.

Proposição 2.3.1. Se E é um espaço vetorial normado então $B(X;E)$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. É notório que a função nula está em $B(X;E)$. Vamos verificar que, para quaisquer $f,g \in B(X;E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, as funções $f+g : X \to E$ e $\lambda f : X \to E$ são limitadas com isso $B(X,E)$ é um espaço vetorial em relação as operações naturais.

i) $f + g : X \to E$ é limitado.

Dado $f : X \to E$ limitada em X, então $f(X)$ é limitado em E. Além disso, $g : X \to E$ limitada em X, segue que $g(X)$ é limitado em E. Como a soma de dois conjuntos limitados é limitada, então $f(X) + g(X) \subset E$ é limitado e, portanto, $f + g$ é limitada e $f + g \subset B(X;E)$.

ii) $\lambda f : X \to E$ é limitada.

Com efeito, como $f : X \to E$ é limitada em X, segue que $f(X)$ é limitado em E. E como $\lambda f(X)$ é limitado em E então λf é limitado e, portanto, $\lambda f \subset B(X;E)$.

iii) Está claro que $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ é uma norma em $B(X;E)$.

$\square$

Definição 2.3.3. Seja M um espaço métrico. Um ponto a $\in M$ chama-se **ponto isolado** de M quando existir $r > 0$ tal que $B(a,r) = a$, ou seja, quando ele é uma bola aberta em M. Assim, um ponto a $\in M$ não é isolado quando para todo $r > 0$ pode-se encontrar $x \in M, x \neq a$ tal que $x \in B(a,r)$, ou seja, $0 < d(x,a) < r$.

Exemplo 2.3.2. Seja $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial normado. Nenhum ponto de E é isolado. De fato, dados a $\in E$ e $r > 0$, mostraremos que a bola $B(a,r)$ contém um elemento $x \neq a$. Como $E \neq \{0\}$, considere $y \neq 0$ em E. Tomando $z = \frac{r}{2||y||}y$ temos $z \in E, z \neq 0$ e $0 < |z| = ||\frac{r}{2||y||}y|| = \frac{r}{2||y||}||y|| = \frac{r}{2} < r$. Logo, $x = a + z$ é tal que $0 < |x-a|$=$|x-a|$=$|z|$ <r. Então, encontramos $x \neq a$ tal que $x \in B(a,r)$. Portanto, a não é isolado e isso vale para todo ponto de E.

3 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Este capítulo aborda a definição e exemplos de função contínua e função uniformemente contínua. Em especial, serão tratadas funções lipchitz que são de grande importância e que neste trabalho será usada para provar o Teorema de Picard.

3.1 Funções contínuas

Definição 3.1.1. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos. Diremos que $f: X_1 \to X_2$ é uma **função contínua num ponto** $x \in X_1$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d_1(x,a) < \delta$, então $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para todo $a \in X_1$. Dizemos que $f: X_1 \to X_2$ é **contínua** quando ela é contínua em todos os pontos $x \in X_1$.

Exemplo 3.1.1. Seja (X,d) espaço métrico e $f: X \to X$ dada por $f(x) = x$, para todo $x \in X$ é contínua.
De fato, fixe $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Considerando $\delta = \varepsilon$, temos que dado $a \in X$ se $d(x,a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) = d(x,a) < \delta = \varepsilon$.

Exemplo 3.1.2. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos, onde d_1 é uma métrica discreta. Então, toda função $f: X_1 \to X_2$ é contínua.
De fato, sejam $x \in X_1$ e $\varepsilon > 0$. Considere $\delta = \dfrac{1}{2}$. Seja $a \in X_1$ tal que $d_1(x,a) < \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = a$. Logo, $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Definição 3.1.2. Sejam M,N espaços métricos e $f: M \to N$ uma função. Dizemos que $f: M \to N$ é uma **função Lipschitziana** se existir $c > 0$ constante, chamada de **constante de Lipschitz**, tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y), \forall x,y \in M.$$

Quando $0 \leq c < 1$ chamaremos a aplicação de **contração**.

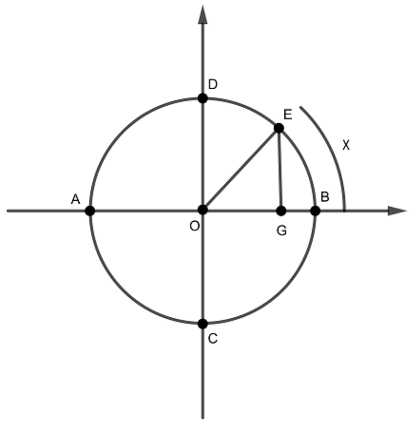
Proposição 3.1.1. Toda função Lipschitz é contínua.

Demonstração. Ver referência [5]. $\square$

Lema 3.1.1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $|sen(x)| \leq |x|$.

Demonstração. Considere o círculo unitário abaixo para mostrarmos que $sen(x) \leq x$, se $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Figura 1: **Círculo unitário**.



Fonte: **Autor**.

De acordo com a figura, temos que:

$$sen(x) = \overline{EG} < l(\overset{\frown}{BE}) = x$$

Daí, $sen(x) < x$. Como $sen(-x) = -sen(x)$, segue que $|sen(x)| \leq |x|$ para $|x| \leq \dfrac{\pi}{2}$. Por outro lado, $|sen(x)| \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$ donde $|sen(x)| \leq |x|$ e $|x| > \dfrac{\pi}{2}$. Portanto, $|sen(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 3.1.3. Dado o espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$, onde d é a métrica usual, a função cosseno é continua.

De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $sen(z) < 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$, temos que:

$$|cos(x) - cos(y)| = 2 \cdot |sen\left(\frac{x-y}{2}\right)| \cdot |sen\left(\frac{x+y}{2}\right)| \leq 2 \cdot \frac{|x-y|}{2} = |x-y|.$$

Portanto, $cos(x)$ é uma função Lipschitz com $c = 1$. Desse modo, uma função contínua.

Proposição 3.1.2. Sejam (X_1, d_1), (X_2, d_2) e (X_3, d_3) espaços métricos. Sejam $f : X_1 \to X_2$ e $g : X_2 \to X_3$ funções contínuas, então $g \circ f$ é contínua.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $a \in X_1$ se $d_1(x, a) < \delta$, então

$$d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon. \tag{I}$$

Como g é contínua, existe δ_g tal que para todos $b \in X_2$, se $d_2(f(x), b) < \delta_g$, então

$$d_3(g(f(x)), g(b)) < \varepsilon. \tag{II}$$

Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $a \in X_1$ tal que:

$$d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g. \tag{III}$$

Vamos mostrar que δ funciona em (I).
De fato, dado $a \in X$ tal que $d_1(x,a) < \delta$, por (III), $d_2(f(x), f(a)) < \delta_g$, então por (II):

$$d_3(g(f(x))), g(f(a))) < \varepsilon$$

□

3.2 Continuidade uniforme

Definição 3.2.1. Dados (M,d) e (N,d). Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se **uniformemente contínua** quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta$ tem-se $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Note que a continuidade uniforme é uma noção global. Evidentemente, toda aplicação uniforme contínua é uma particular aplicação da função contínua, para a qual a escolha de δ a partir do ε dado é independente do ponto onde se analisa a continuidade.
De fato, seja $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, sejam quais forem $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Exemplo 3.2.1. Se $a > 0$ função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uniformemente contínua em $(a, +\infty)$.
De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que:

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy},$$

para quaisquer $x, y \in (a, +\infty)$. Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \frac{|x-y|}{|x| \cdot |y|} \leq \frac{1}{a \cdot a} \cdot |x-y| \\ &\leq \frac{1}{a^2} \cdot |x-y| < \frac{1}{a^2} \cdot a^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Desde que $|x-y| < a^2.\varepsilon = \delta$.Portanto, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uniformemente contínua em $(a, +\infty)$.

Exemplo 3.2.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. A aplicação dada é contínua, mas não é uniformemente contínua.
Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2.|a|+1}\right\}$. Assim, se $|x-a| < \delta$, então $-\delta + a < x < \delta + a$ e como $-|a| \leq a$, segue que $-\delta - |a| \leq -\delta + a < x < \delta + a \leq \delta + |a|$. Isto é,

$|x| < |a| + \delta \leq |a| + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| = |x - a|.|x + a| \\ &< \delta \cdot |x + a| \leq \delta \cdot (|x| + |a|) \\ &< \delta(2|a| + 1) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ e, portanto, f é contínua.
Agora, se pegamos $y = x + n$, então

$$|f(x) - f(y)| = |-2xn - n^2| = |2xn + n^2|$$

para qualquer $\varepsilon > 0$, mesmo tomando n muito pequeno, podemos tomar um x tão grande de tal forma que $|2xn + n^2| > \varepsilon$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, para todo $\delta > 0$, mesmo se fizermos $|x - y| = |n| < \delta$ dependendo do valor de x teríamos que $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Logo, f não é uniformemente contínua.

4 NOÇÕES DE TOPOLOGIA

Este capítulo aborda conjuntos abertos e fechados com definições e resultados de suma importância para o estudo dos assuntos posteriores.

4.1 Conjuntos abertos

Definição 4.1.1. Sejam M um espaço métrico e um subconjunto $X \subset M$. Dizemos que $a \in X$ é um **ponto interior** a X quando existe $r > 0$ tal que a bola aberta de raio r centrada em a está toda contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x,a) < r$ então $x \in X$. Assim, o ponto $b \in X$ não é interior a X se existe algum ponto que não pertence a X em toda bola aberta de centro b.

Definição 4.1.2. Definimos a **fronteira** de X em M (denotamos pelo conjunto ∂X), o conjunto formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém uma parte pertencente a X e a outra no seu complementar $M - X$.

Exemplo 4.1.1. Na reta, o interior do intervalo $[0,1]$ é o intervalo aberto $(0,1)$ e sua fronteira são os pontos 0 e 1 somente.
De fato, se $a \in (0,1)$, ou seja, $0 < a < 1$, e tomando $r = \min\{a, 1-a\}$, então garantimos que $(a-r, a+r) \subset [0,1]$. Logo, a é ponto interior de $[0,1]$. Como todo intervalo aberto de centro 0 contém números negativos e números entre $[0,1)$, então 0 é fronteira de $[0,1)$. Agora, notamos que $1 \notin [0,1)$, mas todo intervalo aberto de centro em 1 contém números positivos menores do que 1 e maiores do que 1, assim $1 \in \partial[1,0)$. Os únicos pontos pertencentes a fronteira são 0 e 1, pois para qualquer outro número a, conseguimos intervalos abertos contidos em a ou totalmente contidos em $[0,1)$ ou não interceptados $[0,1)$.

Definição 4.1.3. Sejam um espaço métrico M e um subconjunto $A \subset M$, dizemos que A é **aberto em** M se todos seus pontos forem pontos interiores. Assim, A é aberto $\Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset \Leftrightarrow$ para cada $x \in A$, podemos obter um raio $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset A$.

Lema 4.1.1. Sejam A e B conjuntos abertos, então $A \cap B$ é aberto.

Demonstração. Se A é aberto, então para cada $a \in A$, existe $r_A > 0$ tal que $B(a;r_A) \subset A$. Do mesmo modo, se B é aberto, então para cada $b \in B$, existe $r_B > 0$ tal que $B(b,r_B) \subset B$. Sejam $A \cap B \neq \emptyset$, então existe $x \in A \cap B$, ou seja, $x \in A$ e $x \in B$. Como A e B são abertos, existem $r_A, r_B > 0$ tais que $B(x;r_A) \subset A$ e $B(x;r_B) \subset B$. Tomando $r = \min\{r_A, r_B\}$, então $B(x;r) \subset B(x;r_A) \subset A$ e $B(x;r) \subset B(x;r_B) \subset B$. Logo, $B(x;r) \subset A \cap B$ e, portanto, $A \cap B$ é aberto. $\square$

Proposição 4.1.1. Em um espaço métrico M qualquer, uma bola aberta $B(a;r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração. Seja $x \in B(a;r)$, então $d(a,x) < r$. Assim, $s = r - d(a,x)$ é um número positivo. Afirmação: $B(x;s) \subset B(x;r)$. De fato, seja $y \in B(x;s)$, então $d(x,y) < s$ e, portanto, $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r$. Logo, $y \in B(a;r)$. □

Exemplo 4.1.2. Em qualquer espaço métrico M, o complementar de uma bola fechada $B[a;r] = \{x \in M|\ d(x,a) \leq r\}$ é um conjunto aberto $A = M - B[a;r] = \{x \in M|\ d(x,a) > r\}$.

Primeiramente, verifiquemos que A é um conjunto aberto. Seja $b \in A$, ou seja, $d(a,b) > r$. Tomemos um número k de modo que $r + k < d(a,b)$. Observe que as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b,k]$ são disjuntas e que $B[a;r] \cap B(b,k) = \emptyset$, ou seja, $B(b;k) \subset M - B[a;r]$. Logo, todo ponto $b \in A$ é interior e, portanto, A é aberto. Agora, seja $H = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um subconjunto finito qualquer de M, se $b \in M - H$ e $r = \min\{d(b,a_1), ..., d(b,a_n)\} > 0$, então a bola aberta $B(b,r)$ não contém nenhum dos pontos $a_1, a_2, ..., a_n$, ou seja, $B(b;r) \subset M - H$. Logo, $M - H$ que é complementar de H é aberto em M.

Proposição 4.1.2. Sejam M, N espaços métricos. A função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ é um subconjunto aberto de M.

Demonstração. Suponhamos que f seja contínua, queremos mostrar que dado A' aberto em N, $f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, temos que $f(a) \in A'$ e daí, por definição, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a);\varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua em a segue que, por definição, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset A'$, ou seja, $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto. Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(A')$ de cada $A' \subset N$ aberto seja um aberto em M. Queremos mostrar que f é continua. De fato, seja $a \in M$. Dado $\varepsilon > 0$, a bola $B(f(a);\varepsilon)$ é um aberto em N. Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto em M, contendo a, então existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset f^{-1}(A')$, ou seja, $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$. E portanto, f é contínua em a.

□

Exemplo 4.1.3. Sejam $f, g : M \to N$ contínuas. O conjunto $A = \{x \in M | f(x) \neq g(x)\}$ é aberto em M.

De fato, seja $x_0 \in A$, então $f(x_0) \neq g(x_0)$. Assim, $d(f(x_0), g(x_0)) > 0$. Sejam $r_f > 0$, $r_g > 0$, satisfazendo $d(f(x_0), g(x_0)) > r_f + r_g$. Assim, $B(f(x_0);r_f) \cap B(g(x_0);r_g) = \emptyset$. Considere o conjunto $B = f^{-1}(B(f(x_0);r_f)) \cap g^{-1}(B(g(x_0);r_g))$, que é aberto, pois f, g são contínuas, imagem inversa de aberto é aberto, intersecção de aberto é aberto. Como $x_0 \in B$ existe $r > 0$ tal que $B(x_0;r) \subset B$. Afirmação: $B \subset A$. De fato, se $x \in B$ então $x \in f^{-1}(B(f(x);r_f))$ e $x \in g^{-1}(B(g(x);r_g))$, ou seja, $f(x) \in B(f(x);r_f)$ e $g(x) \in B(g(x);r_g)$. Então, $f(x) \neq g(x)$, logo $x \in A$. Portanto, $B(x_0;r) \subset A$, prova que A é aberto.

4.2 Conjuntos fechados

Definição 4.2.1. Um ponto aderente a um subconjunto A de um espaço métrico M é definido como um ponto a quando existem pontos de A arbitrariamente próximos de a, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $x \in A$ tal que $d(a,x) < \varepsilon$. Ou equivalentemente:

I. $\forall\, \varepsilon > 0$, existe $x \in B(a;\varepsilon) \cap A$;

II. Para todo aberto A' contendo a, tem-se $A' \cap A \neq \emptyset$;

III. Toda vizinhança de a tem pontos em comum com A.

Exemplo 4.2.1. Todo ponto $a \in A$ é aderente a A. Do mesmo modo, os pontos da fronteira de A também são aderentes a A. Observemos o Exemplo 4.1.1, no intervalo $[0,1)$, 0 é aderente, pois $0 \in [0,1)$ ou por ser ponto de fronteira. Além disso, 1 também é aderente, pois também é fronteira.

Definição 4.2.2. Chamamos de **fecho** ou **aderência** de um conjunto A em um espaço métrico M, o conjunto $\overline{A}$ dos pontos de M em que são aderentes a A. Assim, $a \in \overline{A}$ significa que o ponto a é aderente a A em M. Notemos que $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{M} = M$ e $A \subset \overline{A}$ para todo $A \subset M$. Além disso, $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$, pois $X \subset \overline{X}$ e $Y \subset \overline{Y}$.

Definição 4.2.3. Dizemos que um conjunto F contido no espaço métrico M é **fechado** em M, se seu complementar $M - F$ for aberto em M.

Proposição 4.2.1. Seja $F \subset M$ um conjunto, F é fechado se, e somente se, contém todos os pontos aderentes, ou seja, $\overline{F} = F$.

Demonstração. Temos que f é fechado, ou seja, $M - F$ é aberto, o que significa que para todo $a \in M - F$ existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset M - F$. Assim, para todo $a \in M - F$, existe $B(a;r)$ que não contém pontos de F. Logo, esses pontos que não pertencem a F também não são aderentes a ele, pois $B(a;r) \cap F = \emptyset$. Agora provemos a volta, ou seja, F contém todos os seus pontos aderentes de F. Assim, os pontos que não pertencem a F também não são aderentes a le, ou seja, para todo $a \in M - F$, podemos encontrar $B(a;r) \cap F = \emptyset$. Então, para todo $a \in M - F$, existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subset M - F$, ou seja, $M - F$ é aberto e. portanto, F é fechado. $\square$

Exemplo 4.2.2. Seja M um espaço métrico, toda bola fechada $B[a;r]$ é um subconjunto fechado de M.
De fato, toda bola fechada $B[a;r]$, de acordo com o Exemplo 4.1.2, tem que seu complementar um conjunto aberto, logo, pela definição 4.2.3 garantimos que $B[a;r]$ é um subconjunto fechado de M.

Exemplo 4.2.3. A fronteira ∂X de qualquer conjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M. De fato, o conjunto ∂X contém os seus pontos aderentes, pois todos são pontos de fronteira de X. De acordo, com a Proposição 4.2.1 acima podemos garantir então que o conjunto ∂X é fechado.

Observação 4.2.1. Seja F um conjunto e F^c seu complementar, queremos mostrar a seguinte igualdade:

$$f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c.$$

De fato, primeiramente, mostremos que $f^{-1}(F^c) \subset [f^{-1}(F)]^c$. Seja $x \in f^{-1}(F^c)$, pela definição de imagem inversa, temos que $f(x) \in F^c$. Pela definição de complementar, temos que $f(x) \notin F$, logo $x \notin [f^{-1}(F)]^c \subset f^{-1}(F)$. Seja $x \in [f^{-1}(F)]^c$, usando a definição de complementar, segue que $x \notin f^{-1}(F)$. Assim, $f(x) \notin F^c$, logo $x \in f^{-1}(F^c)$. Portanto, $[f^{-1}(F)]^c \subset f^{-1}(F^c)$. Assim, provamos que $f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c$.

Proposição 4.2.2. Sejam M, N espaços métricos. A função $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa de $f^{-1}(\overline{F})$ de todo conjunto fechado $\overline{F} \subset N$ seja um subconjunto fechado de X.

Demonstração. Suponha, primeiramente, que f é contínua. Provemos que a imagem inversa de todo conjunto fechado $\overline{F} \subset N$ é fechado em M. Como $\overline{F} \subset N$ é fechado, então por definição o complementar de $\overline{F}$ (denotado por $\overline{F}^c$) é aberto, pela Proposição 4.1.2 $f^{-1}(\overline{F}^c) = f^{-1}(\overline{F})^c$ é aberto, logo, $f^{-1}(\overline{F})$ é fechado. A última igualdade será verificada na observação abaixo.

Reciprocamente, suponha que a mesma inversa de todo conjunto fechado em N é fechado em M. Mostremos que f é contínua. Dado $\overline{A} \subset N$ aberto, então seu complementar é fechado. Daí $f^{-1}(\overline{A}^c) = f^{-1}(\overline{A})^c$(igualdade verificada na observação abaixo) é fechado em M e o complementar de $f^{-1}(\overline{A})^c$ é aberto, logo, $f^{-1}(\overline{A})$ é aberto. Portanto, pela Proposição 4.1.2, f é contínua. $\square$

Definição 4.2.4. Sejam M um espaço métrico e um conjunto $X \subset M$. Um ponto $a \in M$ é dito **ponto de acumulação** de X quando toda bola de centro a contém algum ponto de X diferente de a. Chamamos de **derivado do conjunto** X o conjunto de pontos de acumulação de X em M, e este é representado por X'.

Observação 4.2.2. Nem todo ponto de aderência é ponto de acumulação. Por exemplo, considere que o conjunto $X = a$ possui só um elemento. Como $a \in X$, então a é ponto aderente, mas não é de acumulação, pois não há nenhum outro elemento diferente de a em X.

5 SEQUÊNCIAS

Neste capítulo serão abordados limite de sequências e sequências de números reais. Nele serão obtidos resultados importantes para a definição de espaços de Banach e aplicação.

5.1 Limites de sequências

Definição 5.1.1. Uma **sequência** em um conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e iremos denotá-lo por n-ésimo termo da sequência.

Usaremos a notação (x_n) ou $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para representar uma sequência e $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ para indicar o conjunto dos termos da sequência.

Exemplo 5.1.1. Se definirmos $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pondo $x_n = (-1)^n$, então obteremos a sequência $(-1, 1, -1, 1, ...)$, cujo o conjunto de valores é $\{-1, 1\}$. Vemos assim que entre os termos x_n da sequência pode ocorrer repetições, isto é, pode-se ter $x_n = x_m$ com $m \neq n$. Quando a aplicação $x : \mathbb{N} \to M$ for injetiva,ou seja, $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$, diremos que (x_n) é uma sequência de termos distintos, ou sem repetições.

Definição 5.1.2. Uma **subsequência** de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \to x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_{n_k})

Exemplo 5.1.2. A sequência $(4, 16, 64, ..., 4^k, ...)$ é uma subsequência de $(2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...)$ na qual $\mathbb{N}'$ é o subconjunto dos números pares.

Definição 5.1.3. Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_n, x_m) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.1.3. Uma sequência constante ($x_n = a$ para todo n) ou, mais geralmente, uma sequência que assume apenas um número finito de valores, é evidentemente limitada.

Definição 5.1.4. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M. Diz-se que o ponto a $\in M$ é **limite da sequência** (x_n) quando para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Escreve-se, então, $a = \lim x_n$, $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ ou $a = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Diz-se também que x_n tende para a e escreve-se ainda $x_n \to a$. Quando existe $a = \lim x_n \in M$, diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M e converge para a. Se não existir $\lim x_n$ em M, dizemos que a sequência é divergente em M.

Exemplo 5.1.4. Toda sequência constante $x_n = a$ é evidentemente convergente e $\lim x_n = a$.

De fato, seja X um conjunto de números naturais. Diremos que X contém números arbitrariamente grandes quando, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ dado, pudermos encontrar $n \in X$ tal que $n > n_0$. Isto significa que X é um subconjunto ilimitado de $\mathbb{N}$ e equivalente também a dizer que X é um subconjunto infinito de números naturais.

Diremos que o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ contém todos os números naturais suficientemente grandes quando existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > \ 0 \Rightarrow n \in X$. Isto equivale a dizer que o complementar $\mathbb{N} - X$ é finito. Em particular, X é infinito.

Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Dizer que $\lim x_n = a \in M$ significa que dada qualquer bola aberta B de centro a, tem-se $x_n \in B$ para todo n suficientemente grande.

Proposição 5.1.1. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que n < $n_0 \Rightarrow x_n \in B(a;1)$. Portanto, o conjunto do valores da sequência está contido na união $\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}\} \bigcup B(a;1)$ de dois conjuntos limitados, logo é limitado. Segue da definição de sequência limitada que x_n é limitada. $\square$

Proposição 5.1.2. (Unicidade do limite). Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M e sejam $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e b = $\lim x_n$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Existem também $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > \ n_1 \Rightarrow d(x_n, b) \ < \ \varepsilon$. Tomemos agora $n \in \mathbb{N}$ maior que n_0 e do que n_1, então $d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon$. Segue que $0 \leq d(a,b) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > \ 0$. Isto acarreta $d(a,b) = 0$ e, portanto, $a = b$.

Segue-se da Proposição anterior que se em um espaço métrico M tem-se $\lim x_n = a \in M$ e $x_n \neq a$ para todo n, então a sequência (x_n) é divergente no espaço métrico $M - \{a\}$. Com efeito, se existisse $b \in M - \{a\}$ tal que $\lim x_n = b$, então $b \neq$ a e a sequência teria dois limites distintos $a, b \in M$. $\square$

Proposição 5.1.3. Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a.

Demonstração. Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n < n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Existe também $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo $k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{k \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$. □

Corolário 5.1.1. Se $\lim x_n = a$, então, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+p} = a$.

Demonstração. Com efeito, $(x_{n+p})_{n \in \mathbb{N}} = (x_{1+p}, x_{2+p}, ...)$ é uma subsequência de (x_n). □

Proposição 5.1.4. Um ponto a, em um espaço métrico M, é limite de uma subsequência de (x_n) se, e somente se, toda bola aberta de centro a contém termos de x_n com índices arbitrariamente grandes.

Demonstração. Se uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k})$ converge para a, então dado $\varepsilon < 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow x_{n_k} \in B(a; \varepsilon)$. Logo, toda bola $B(a; \varepsilon)$ contém termos de x_n com índices arbitrariamente grandes, a saber, todos os índices n_k com $k > k_0$. Reciprocamente, supondo cumprida está condição, a bola $B(a; 1)$ contém um termo x_{n_1}, a bola $B(a; \frac{1}{2})$ contém um termo x_{n_2} com índice $n_2 > n_1$ e assim por diante: para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_{n_k} \in B(a; \frac{1}{k})$ com $n_k > n_{k-1} > ... > n_1$. Isto define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ e uma subsequência (x_{n_k}) tal que $d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$. Segue-se que $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. □

5.2 Sequências de números reais

Uma sequência (x_n) de números reais diz-se **crescente** quando se tem $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando vale apenas $x_n \leq x_{n+1}$, a sequência diz-se **não-decrescente**. Analogamente se definem sequências **decrescente** e **não-crescentes**. Uma sequência de um desses quatro tipos é chamada de **monótona**.

Proposição 5.2.1. Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.

Demonstração. Seja (x_n) não-decrescente e limitada. Tomemos $a = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, o numero $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos valores de x_n. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Então, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Isto conclui a demonstração. □

Corolário 5.2.1. Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.

Demonstração. Basta provar que uma sequência monótona (x_n) é limitada quando possui uma subsequência limitada (x_{n_k}). Suponhamos que (x_n) seja não-decrescente. Seja $x_{n_k} \leq c$ para todo k. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos obter k tal que $n < n_k$ e, então, $x_n \leq x_{n_k} \leq c$. Logo, $x_1 \leq x_n \leq c$ para todo n, o que mostra que a sequência é limitada. $\square$

Exemplo 5.2.1. Se $|a| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
Aplicando diretamente a definição de limite vê-se que não há diferença alguma entre as afirmações $\lim x_n = 0$ e $\lim |x_n| = 0$. Podemos, portanto, admitir que $0 \leq a \ < 1$. Neste caso, $a^n \leq a^{n+1} \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e então $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona limitada. Pelo Corolário 5.2.1, existe $l = \lim a^n$. Sabemos que $l = \lim a^{n+1} = a \lim a^n = a \cdot l$. Logo, $(1-a)\cdot l = 0$. Como $1 - a < \ 0$, segue-se que $l = 0$.

Proposição 5.2.2. Seja (x_n) uma subsequência de números reais, com $\lim x_n = a > b$. Então, $x_n > b$ para todo n suficientemente grande.

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > \ 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = a - b$, obtemos $n > n_0 \Rightarrow b < x_n$. $\square$

Corolário 5.2.2. Se $x_n \leq b$, para valores arbitrariamente grandes de n, e existe $a = \lim x_n$, então $a \leq b$.

Demonstração. Com efeito, se fosse $a > b$, teríamos $x_n > b$ para todo n suficientemente grande, isto é, $x_n \leq b$ no máximo para um número finito de índices n. $\square$

Observação 5.2.1. Evidentemente valem resultados análogos à Proposição 5.2.2 e seu Corolário 5.2.2 com $<$ e $\geq$, respectivamente.

Exemplo 5.2.2. Se $a > 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.
Suponhamos que seja $a > 1$, então $a > a^{\frac{1}{2}} > \cdots > 1$. Pela Proposição 5.2.2, existe $l = \lim a^{\frac{1}{n}}$ e $l \leq 1$, pelo corolário anterior. Considerando a subsequência

$$a^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{-1}{(n+1)}}$$

vemos que

$$l = \lim a^{\frac{1}{(n+1)}} = \lim a^{\frac{1}{n}}.\lim a^{\frac{-1}{(n+1)}} = 1.$$

O caso em que $0 < l$ é análogo.

Teorema 5.2.3. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Vamos fazer a prova para $\mathbb{R}$. Com efeito, basta mostrar que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo x_n da sequência dada é destacado quando $x_p \leq x_n$ para todo $n < p$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então, x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_1 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. Logo, o teorema está provado para $\mathbb{R}$ e a prova é análoga para $\mathbb{R}^n$. $\square$

Definição 5.2.1. Diremos que duas normas arbitrárias $|\ |$ e $\|\ \|$ em um espaço métrico X são **equivalentes** quando existirem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tais que

$$|x| \leq a\|x\| \text{ e } \|x\| \leq b|x| \text{ para todo } x \in X.$$

Proposição 5.2.4. Duas normas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Demonstração. Seja $|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ a norma da soma. Por transitividade, basta demonstrar que uma norma arbitrária $\|x\|$ em $\mathbb{R}^n$ é equivalente a esta. Em primeiro lugar, seja $b = max\{\|e_1\|, ..., \|e_n\|\}$. Então, para qualquer $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\|x\| = \|x_1e_1 + ... + x_ne_n\| \leq |x_1|\|e_1\| + ... + |x_n|\|e_n\| \leq b.|x|.$$

Resta provar que existe $a > 0$ tal que $|x| \leq a\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Suponha, por absurdo, que não seja assim. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_k| > k \cdot \|x_k\|$. Ponhamos $u_k = \frac{x_k}{|x_k|}$. Isto nos dá $\|u_k\| = \frac{\|x_k\|}{|x_k|} < \frac{1}{k}$ e $|u_k| = 1$ para todo k. A sequência (u_k) é, portanto, limitada em relação à norma da soma. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência (u_{k_j}) que converge para um ponto $u \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, temos $|u| = \lim_{j \to \infty} |(u_{k_j})| = 1$, donde $u \neq 0$. Por outro lado, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\|u\| \leq \|u_{k_j} - u\| + \|u_{k_j}\| \leq b|u_{k_j} - u| + \frac{1}{k_j}.$$

Como as duas últimas parcelas acima tendem para zero quando $j \to \infty$, concluímos que $\|u\| = 0$, donde $u = 0$. Está contradição demonstra o teorema. $\square$

6 ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÃO

Este capítulo aborda sequências de Cauchy, espaços de Banach, Teorema do Ponto Fixo e aplicação. Tal aplicação é a demonstração do Teorema de Picard, o qual é de grande relevância devido as condições suficientes estabelecidas para a existência e unicidade de solução do problemas de valor inicial. Em diversas áreas como física e biologia, a modelagem de um sistema frequentemente resulta em um problema de valor inicial a ser solucionado.

6.1 Sequências de Cauchy

Definição 6.1.1. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M chama-se **sequência de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Exemplo 6.1.1. A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy.
Mostraremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana (Ver [3]), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \cdot \varepsilon > 2$. Daí,

$$m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m}\right| - \left|\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| - \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Mas, para $m > n_1$, temos $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n_1}$ e para $n > n_1$ temos $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_1}$. Logo,

$$m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} = \frac{2}{n_1},$$

de onde segue que

$$m,n > n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy.

Proposição 6.1.1. Toda subsequência de uma sequência de Cauchy também é de Cauchy.

Demonstração. Ver referência [3]. □

Proposição 6.1.2. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se tomarmos $m,n > n_0$ teremos

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,a) + d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Proposição 6.1.3. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > 0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ é limitado e tem diâmetro ≤ 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$$

é limitado. □

Observação 6.1.1. Perceba que a recíproca das preposições acima não são verdadeiras.

Dada uma sequência (x_n) no espaço métrico M, escrevamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Assim, temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$. Como $X_1 = \{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\} \cup X_n$, um desses conjuntos é limitado se, e somente se, todos os demais forem. Se tal é o caso, temos que $diam(X_1) \geq diam(X_2) \geq \cdots$ e, portanto, existe sempre $\lim\limits_{n\to\infty} diam(X_n)$. A fim de que (x_n) seja uma sequência de Cauchy, é necessário e suficiente que seja $\lim\limits_{n\to\infty} diam(X_n) = 0$.

Proposição 6.1.4. Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente.

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \Rightarrow d(x_m, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{p, q\}$. Para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e, então

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

Proposição 6.1.5. Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.

Demonstração. Sejam $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. A fim de provar que a sequência $(f(x_n))$ é de Cauchy, suponhamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. □

Exemplo 6.1.2. Observe que uma aplicação apenas contínua pode não transformar sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Um exemplo é a função contínua $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ que transforma a sequência de Cauchy $(\frac{1}{n})$ na sequência $(f(\frac{1}{n})) = (1, 2, 3, ...)$, que não é de Cauchy. A proposição acima mostra que funções como esta não podem ser uniformemente contínuas.

6.2 Espaços métricos completos

Definição 6.2.1. Diz-se que o espaço métrico M é **completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 6.2.1. Todo espaço métrico com a métrica zero-um é completo.
De fato, sejam M um espaço com a métrica zero-um e (x_n) um sequência de Cauchy em M. Assim, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < 1$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. Como d é a métrica zero-um, segue-se que $d(x_n, x_{n+p}) = 0$ e, portanto, $x_n = x_{n+p}$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, ou seja, a partir de um certo índice n_0 a sequência (x_n) é constante . Desse modo, existe $a \in M$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n = a$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, temos que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Diremos que um métrica d, num espaço M, é uniformemente discreta quando existir $\varepsilon > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$. Neste caso, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, existe n_0 tal que $m, n > 0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_m = x_n$. Assim, toda sequência de Cauchy num espaço uniformemente discreto é constante a partir de um certo índice n_0 e, portanto, convergente. Tais espaços são completos.

Proposição 6.2.1. A reta é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$, temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e os conjuntos X_n são limitados. Seja $a_n = \inf X_n (n = 1,2,3,...)$, então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b = \sup X_n$. Pela Proposição 5.2.1, existe o número $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Afirmamos que $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Para provar isto, basta mostrar que a é limite de um subsequência de (x_n), ou seja, que dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. (Vide Proposição 5.1.3 e Proposição 5.1.4)
Ora, sendo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n \geq m$ (e, portanto, $n > n_1$) tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. $\square$

Exemplo 6.2.2. O espaço métrico das funções contínuas em um intervalo fechado definida no exemplo 2.1.4 é completo.

De fato, seja f_n uma sequência de Cauchy, então teremos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$n,m \geq N \Rightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

Isto é

$$n,m \geq N \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Como em $\mathbb{R}$ todas sequência de Cauchy é convergente, teremos que para cada x, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Ou seja,

$$f_n(x) \to f(x).$$

Agora, para mostrar que $C[a,b]$ é completo, basta mostrar que f é uma função contínua. Seja $\varepsilon > 0$, pela convergência existem N_1 e N_2 tais que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Denotemos por $N = max\{N_1, N_2\}$. Por outro lado, pela continuidade de f_n teremos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da desigualdade triangular, segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Tomando $n > N$ e $|x - y| < \delta$ conclui-se que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Disso, segue a continuidade da f. Portanto, $f \in C[a,b]$. Logo, é um espaço métrico completo.

Proposição 6.2.2. Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.

Demonstração. Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$. Como F é fechado em M, tem-se $a \in F$. Logo, F é completo. Por outro lado, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in N$, a sequência (x_n) é de Cauchy, pela Proposição 6.1.2. Logo existe $b \in M$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Pela unicidade do limite, tem-se $a = b$ e portanto M é fechado em N. $\square$

Proposição 6.2.3. O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.

Demonstração. Suponhamos M e N completos. Dada uma sequência de Cauchy (z_n) em $M \times N$, seja $z_n = (x_n, y_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Com as projeções $p_1 : M \times N \to M$ e $p_2 : M \times N \to N$ são uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N, respectivamente. Logo, existem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in M$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in N$. Ponto $c = (a,b) \in M \times N$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$. Assim, $M \times N$ é completo. Reciprocamente, se $M \times N$ é completo então, fixando $b \in N$, vemos que a aplicação $x \mapsto (x,b)$ é uma isometria (Ver [5]) de M sobre o subespaço fechado $M \times b \subset M \times N$. Segue-se da Proposição 6.2.2 que M é completo. De modo análogo se mostra que N é completo. □

Corolário 6.2.1. $M_1 \times ... \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, M_2, ..., M_n$ são completos.

Demonstração. Aplicando $n-1$ vezes a proposição, concluímos sucessivamente que $M_1 \times M_2$, $M_1 \times M_2 \times M_3, ..., M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ são completos se cada um dos fatores M_i é completo. Reciprocamente, se o produto é completo, cada fator M_i é completo, por ser isométrico ao subespaço fechado $a_1 \times ... \times a_{i-1} \times M_i \times a_{i+1} \times ... \times a_n$ do produto. □

Exemplo 6.2.3. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.
De fato, como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo e o produto cartesiano de espaços métricos completos é completo, então $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ é completo.

6.3 Espaços de Banach

Definição 6.3.1. Um espaço normado X é chamado de **Espaço de Banach** se toda sequência de Cauchy em X converge.

Assim, um espaço normado é um espaço de Banach se é um espaço métrico completo em relação a métrica induzida por sua norma.

Proposição 6.3.1. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então, F é um espaço de Banach com a norma induzida por E se, e só se, F é fechado em E.

Demonstração. Com efeito, suponha que F é um espaço de Banach e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $x_n \to x$ em E. Então, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F e, portanto, convergente em F, pois F é completo por hipótese. Então, existe $y \in F$ tal que $x_n \to y$. Pela unicidade do limite da sequência, temos que $x = y$. Logo, F é fechado. Reciprocamente, suponha F fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e, portanto, existe $x \in F$ tal que $x_n \to x$. Como F é fechado segue que $x \in F$. Logo, F é completo. □

Lema 6.3.1. Seja $B = \{x_1, ..., x_m\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado. Então, existe uma constante $c > 0$ que depende do conjunto B tal que

$$\|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|),$$

para todo $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$

Demonstração. Vejamos que $\|.\|_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$:

1. $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \geq 0$ e $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_A = 0 \Leftrightarrow \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| = 0 \Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0 \Leftrightarrow a_j = 0, \ \forall \ j = 1, ..., n \ \Leftrightarrow (a_1, a_2, ..., a_n) = \vec{0}.$$

2. $\|\alpha(a_1, a_2, ..., a_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha(a_j x_j) \right\| = \left\| \alpha \sum_{j=1}^{n} (a_j x_j) \right\| = |\alpha| \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| = |\alpha| \cdot \|(a_1, ..., a_n)\|.$

3. $\|(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \right\| \leq$

$$\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \right\| = \|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_A + \|(b_1, b_2, ..., b_n)\|_A.$$

Como $\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_S = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ também é norma em $\mathbb{R}^n$, pela Proposição 5.2.4, existe $c > 0$ tal que

$$\|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|).$$

$\square$

Teorema 6.3.2. Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E.

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão finita e $B = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ uma base normalizada de E. Dada uma sequência de Cauchy $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ em E, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem únicos escalares $(\alpha_1^{(k)}, ..., \alpha_n^{(k)})$ tais que $x_k = \alpha_1^{(k)}\beta_1 + ... + \alpha_n^{(k)}\beta_n$. Dado $\varepsilon > 0$, pode-se tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < c \cdot \varepsilon$ para todo $k, m \geq n_0$, onde c é a constante do Lema 6.3.1 para o conjunto linearmente independente B. Segue que

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^{(k)}-\alpha_j^{(m)}|\leq\frac{1}{c}\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(k)}-\alpha_j^{(m)})\beta_j\right\|=\frac{1}{c}\|x_k-x_m\|<\varepsilon,\ \ \forall k,m\geq n_0.$$

Daí, para cada $j=1,...,n$, a sequência de escalares $(\alpha_j^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy e, portanto, convergente.

Seja $b_j=\lim\limits_{k\to\infty}a_j^{(k)}$ para $j=1,...,n$. Neste caso, temos

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|a_j^{(k)}-b_j|=0.$$

Definindo $x=b_1\beta_1+...+b_n\beta_n$, temos $x\in E$ e

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^{(k)}-b_j)\beta_j\right\|\leq\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|a_j^{(k)}-b_j|=0.$$

Assim, podemos concluir que $x_k\longrightarrow x$. Portanto, E é espaço de Banach.

Além disso, sendo E um espaço normado qualquer, todo subespaço de dimensão finita de E será Banach pelo que acabamos de provar e, em particular, será fechado em E pela Proposição 6.3.1.

□

Dado um aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ denotamos o conjunto das funções reais contínuas definidas em Ω por

$$C(\Omega):=\{u:\Omega\to\mathbb{R}:u\text{ é contínua em }\Omega\}.$$

Se $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ é um inteiro não negativo, um multi-índice α de ordem k é uma $n-upla$ $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ tal que

$$|\alpha|:=\alpha_1+...+\alpha_n=k$$

onde $\alpha_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. O número $|\alpha|$ acima é chamado ordem do multi-índice α. Se $|\alpha|\geq 1$ e $u\in C(\Omega)$, denotamos

$$D^{\alpha}u:=\frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n},$$

quando a derivada mista do lado direito acima existe. A fim de facilitar a notação escrevemos ainda $D^{\alpha}u=u$ quando $|\alpha|=0$.

Observe que $D^{\alpha}u$ é uma função definida em Ω que toma valores em $\mathbb{R}$. Quando u possui todas as derivadas mistas de ordem k escrevemos

$$D^k u(x):=\{D^{\alpha}u(x):\alpha\text{ é um multi-índice de ordem }k\}.$$

Definição 6.3.2. Dado $0 < \gamma \leq 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, dizemos que u é **Hölder contínua** com expoente γ se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^{\gamma}, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Para uma tal função definimos o quociente de Hölder por

$$H_{\gamma}[u] := \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} < \infty.$$

O fato importante é que, se denotamos

$$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C(\overline{\Omega}) : H_{\gamma}[u] < \infty\},$$

então esse conjunto é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{0,\gamma} := \|u\|_0 + H_{\gamma}[u], \forall \ u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

De maneira mais geral, temos a seguinte definição:

Definição 6.3.3. Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$. O espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é definido por

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega})\} : H_{\gamma}[D^{\alpha}u] < \infty \text{ para todo multi-índice } |\alpha| \leq k\}.$$

Definimos ainda

$$C^{k,\gamma}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega_0}) \text{ para todo aberto } \Omega_0 \subset \Omega\}.$$

Exemplo 6.3.1. O espaço $C^{k,\gamma}(\Omega)$, definido acima, é um espaço de Banach quando munido da seguinte norma

$$\|u\|_{k,\gamma} := \|u\|_k + \sum_{|\alpha|\leq k} H_{\gamma}[D^{\alpha}u], \forall \ u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Ver referência [2]. □

Exemplo 6.3.2. Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$l_p = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\}.$$

Consideremos em l_p a seguinte norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vamos mostrar que l_p é uma espaço normado e espaço de Banach com a norma anterior, mas para isto segue alguns resultados são necessários.

Proposição 6.3.3. (Desigualdade de Hölder para sequências) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$.

Demonstração. Primeiramente, demonstraremos que a desigualdade abaixo é válida para quaisquer a e b positivos:

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{6.1}$$

Para isso, consideremos para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Note que f tem máximo em $t = 1$ e portanto $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$ para todo $t > 0$. Fazendo $t = \dfrac{a}{b}$ e $\alpha = \dfrac{1}{p}$ obtém-se (6.1). De fato,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + (1 - \alpha) \Rightarrow a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq a\alpha + b(1 - \alpha). \tag{6.2}$$

Note que $1 - \alpha = \dfrac{1}{q}$. Daí temos que

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Observe que para $a = 0$ ou $b = 0$, (6.1) é válida.

Tomemos a, b da seguinte forma

$$a = \frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p} \text{ e } b = \frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q}.$$

Substituindo a e b em (6.1) obtermos

$$\left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{|a_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|b_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{|a_jb_j|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|a_j|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{|b_j|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^q}\right),$$

$\forall j = 1,2,...,n$. Somando as desigualdades para cada j, teremos

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_jb_j|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^p}{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}|b_j|^q}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Assim, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^{n}|a_jb_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Proposição 6.3.4. (Desigualdade de Minkowski para sequências) Para $p \geq 1$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$.

Demonstração. Se $p = 1$, a desigualdade segue da desigualdade triangular do valor absoluto. Suponha $p > 1$. Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p &= \sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^{p-1}\cdot|a_j+b_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}|a_j||a_j+b_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{n}|b_j||a_j+b_j|^{p-1}.\end{aligned}$$

Se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, então $(p-1)q = p$ e segue da Desigualdade de Hölder que

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j||b_j+a_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n}|b_j||b_j+a_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Logo, teremos

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Como $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$, obtemos então

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Verifiquemos que l_p é espaço normado para $1 \leq p < \infty$. Observe que l_p é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de sequências e multiplicação por escalar. Mostremos que $\|.\|_p$ é norma em l_p:

Sejam $x=(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $y=(y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p$. Daí,

1. $\|x\|_p = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right\|^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left\|\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right\|^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p \Leftrightarrow |x_j|^p = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

2. Seja $a \in \mathbb{R}$,

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|ax_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|a|^p|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a|\|x\|_p.$$

3. Temos pela desigualdade de Minkowski para sequências que

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Logo, l_p é um espaço normado com a norma $\|.\|_p$.

Mostremos agora que l_p é um espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em l_p. Seja $x_n = (x_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \forall\ m,n \geq n_0. \tag{6.3}$$

Em particular,

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon, \forall \ m,n \geq n_0 \ \text{ e } \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Seja $a_j = \lim\limits_{n\to\infty} x_j^{(n)}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e seja $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$. Provemos que $x \in l_p$ e que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.
Segue de (6.3) que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \forall \ m,n \geq n_0 \ \ e \ \ \forall \ \ j \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j^{(n)} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \forall \ n \geq n_0 \ \ e \ \ \forall \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \forall \ n \geq n_0.$$

Assim, $x_n - x \in l_p$ e $\|x_n - x\|_p \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Daí, $x = (x - x_n) + x_n \in l_p$ e $\|x_n - x\|_p \to 0$.
Portanto, podemos afirmar que l_p é espaço de Banach.

6.4 Teorema do ponto fixo

Definição 6.4.1. Dado $f : M \to M$, $x \in M$ é dito **ponto fixo** de f quando $f(x) = x$.

O teorema seguinte da condições para existência e unicidade de pontos fixos de função contínuas em espaços métricos.

Teorema 6.4.1. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração, então existe um único ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Seja $0 < c < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y)$, para todo $x,y \in M$. Provemos, inicialmente, a existência de um ponto fixo. Tome $x_0 \in M$ arbitrariamente. Defina $x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$. Temos definida a sequência $x_{n+1} = f(x_n)$ por recorrência.
Afirmação: a sequência (x_n) é de Cauchy, ou seja, temos que mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, para todo $m,n > n_0$. De fato, como f é contração, então

$$\begin{aligned}
d(x_1,x_2) = &\quad d(f(x_0), f(x_1) \leq cd(x_0,x_1) \\
d(x_2,x_3) = &\quad d(f(x_1), f(x_2) \leq cd(x_1,x_2) \leq c^2 d(x_0,x_1) \\
\vdots \\
d(x_n,x_{n+1}) \leq &\quad \ldots \leq c^n d(x_0,x_1).
\end{aligned}$$

A verificação dessa generalização é feita por indução. Portanto, para todo $n \geq 1$ vale que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1). \tag{6.4}$$

Se $m > n$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Temos de (6.4) que

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\
&\leq c^n d(x_0, x_1) + c^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + c^{n+k-1} d(x_0, x_1) \\
&\leq (c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+k-1}) d(x_0, x_1) \\
&\leq c^n (1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}) d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

Observamos que $1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}$ é soma de uma progressão geométrica. Desse modo,

$$\begin{aligned}
c^n (1 + c + c^2 + \ldots + c^{k-1}) d(x_0, x_1) &= c^n \left[\frac{1 - c^{k-1+1}}{1 - c} \right] d(x_0, x_1) \\
&= c^n (1 - c^k) \left[\frac{d(x_0, x_1)}{1 - c} \right] \\
&\leq c^n \left[\frac{d(x_0, x_1)}{1 - c} \right]
\end{aligned}$$

Isto é, se $m > n$, temos

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \left[\frac{d(x_0, x_1)}{1 - c} \right]. \tag{6.5}$$

Como $\lim_{n \to \infty} c^n = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ então $[c^n - 0] < \left[\frac{1 - c}{d(x_0, x_1)} \right] \varepsilon$. Então para todo $m, n > n_0$, se $m > n$ então por (6.5)

$$d(x_n, x_m) \leq c^n \left[\frac{d(x_0, x_1)}{1 - c} \right] < \left[\frac{1 - c}{d(x_0, x_1)} \right] \varepsilon \left[\frac{d(x_0, x_1)}{1 - c} \right] = \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. Logo, como M é completo, então existe x tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Calculemos $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ de duas formas:

(i) Como f é contínua em x, segue que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$.

(ii) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x$.

Portanto, por (i) e (ii), $f(x) = x$ dando existência a um ponto fixo. Provemos que não pode existir outro ponto fixo. Suponhamos, por absurdo, que exista $y \in M$ tal que $f(y) = y$, com $y \neq x$. Temos,

$$0 < d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y).$$

Então, $d(x, y) \leq c d(x, y)$ implica $1 \leq c$. O que é um absurdo, pois $c < 1$. Logo $x = y$. $\square$

Exemplo 6.4.1. Seja $(\mathbb{R}, d)$ um espaço métrico com a distância usual. Então, a equação $F(x) = k \cdot cos(x)$, com $0 < k < 1$, tem solução e é única.
De fato, para $x < y$, temos

$$|F(y) - F(x)| = |\int_x^y F'(t)dt| \leq \int_x^y |F'(t)dt| = \int_x^y |k \cdot sen(t)|dt.$$

Como $|sen(t)| \leq 1$, segue que

$$|F(y) - F(x)| \leq k \int_x^y dt = k(y - x).$$

Logo, $|F(y) - F(x)| \leq k|y - x|$, e, como foi provado na proposição 6.2.1., temos que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, segue, portanto, que existe um único ponto $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = x$.

6.5 Aplicação: Teorema de Picard

O estudo das equações diferenciais é de grande importância, pois possui diversas aplicações na engenharia, biologia, física e outros. No entanto, nem sempre é possível encontrar uma solução explícita para uma equação diferencial. Assim, por volta do século XIX, esse fato impulsionou a busca por métodos de resolução e por novas funções que pudessem ser soluções dessas equações. Dessa forma, surgiram os teoremas de existência e unicidade de solução. Um deles é o Teorema de Picard, o qual fala sobre a existência de solução para o problema de valor inicial $y' = f(x, y)$ e $y(x_0) = y_0$.

Teorema 6.5.1. (Existência e Unicidade - Teorema de Picard) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y). Suponhamos que a derivada parcial (Ver [4]) com relação a segunda variável, $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$, com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I)

$$y' = f(x, y) \tag{6.6}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.7}$$

O primeiro passo na demonstração deste teorema é a transformação do problema de valor inicial no problema de resolução de uma equação integral, o que se faz no lema a seguir.

Lema 6.5.1. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua num aberto Ω do plano (x, y). Então, uma função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema de valor inicial (6.6)-(6.7) se, e somente se, for uma solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_x^{x_0} f(s, y(s))d_s,\ x \in I. \tag{6.8}$$

Demonstração. Se ϕ é solução do problema de valor inicial, (6.6)-(6.7), então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é solução da equação integral (6.8). Reciprocamente, se $\phi : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que e solução da integral (6.8), então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ϕ é diferenciável e é também solução do problema de valor inicial (6.6)-(6.7). □

Concentremo-nos na resolução da equação integral (6.8). Dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, tomemos a e b positivos tais que o retângulo

$$B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \ \ e \ \ |y - y_0| \leq b\} \tag{6.9}$$

esteja contido em Ω. Como f é contínua e B é compacto (i.e, fechado e limitado), temos que f é limitada em B; seja $M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in B\}$ e sejam $0 < \overline{a} \leq \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ e $J_{\overline{a}}$ o intervalo fechado $[x_0 - \overline{a}, x_0 + \overline{a}]$.
Seja C o conjunto de todas as funções contínuas $g : J_{\overline{a}} \to \mathbb{R}$, tais que $g(x_0) = y_0$ e $|g(x) - y_0| \leq b$; graficamente, queremos em C as funções contínuas cujos gráficos passem pelo ponto (x_0, y_0) e que estejam contidos no retângulo B.

Definimos em C a seguinte métrica:

$$d(g_1, g_2) = \sup\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\overline{a}}\}; \tag{6.10}$$

Como já vimos, o espaço métrico C definido acima é completo. Voltemos à consideração da equação integral (6.8). Consideremos a função ϕ definida em C e que a cada $y \in C$ associa a função

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Observe que $g(x)$ é uma função contínua para $x \in J_{\overline{a}}$, que $g(x_0) = y_0$ e que

$$|g(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))| ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\overline{a} \leq b$$

e consequentemente $g \in C$. Logo, $\phi : C \to C$.
A equação integral (6.8) pode ser escrita na forma funcional $y = \phi(y)$. Portanto, as soluções de (6.8) são os pontos fixos de ϕ.
Agora, vamos usar o Teorema do Ponto Fixo. A fim de aplicar este teorema ao problema que estamos estudando, resta apenas verificar se ϕ é uma contração. Para tal, escrevemos

$$|\phi(g_1)(x)-\phi(g_2)(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}[f(s,g_1(s))-f(s,g_2(s))]ds\right|. \tag{6.11}$$

Para estimar o integrando no segundo membro de (6.11), usamos o seguinte resultado:

Lema 6.5.2. Seja $f:\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto Ω do plano (x,y) e tal que a derivada parcial $f_y:\Omega \to \mathbb{R}$ seja também contínua. Dado um subconjunto limitado $\Omega_0 \subset \overline{\Omega_0} \subset \Omega$, existe uma constante $K>0$ tal que

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq K|y_1-y_2| \tag{6.12}$$

para todos $(x,y_1),(x,y_2) \in \overline{\Omega_0}$.

Demonstração. Seja $\delta \leq d(\overline{\Omega_0},\partial\Omega)$, onde $\partial\Omega$ representa a fronteira de Ω, e designemos por $\Omega_\delta = \{(x,y) \in \Omega : d((x,y),\overline{\Omega_0}) < \frac{\delta}{2}\}$ uma $(\frac{\delta}{2})$-vizinhança de $\overline{\Omega_0}$. Dados $(x,y_1),(x,y_2) \in \overline{\Omega_0}$ com $|y_1-y_2|<\delta$ temos que o segmento $[x,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]$, $0 \leq \lambda \leq 1$, está contido em Ω_δ. Aplicando o Teorema do Valor Médio (Ver [4]), temos:

$$f(x,y_1)-f(x,y_2) = f_y(x,\xi)(y_1-y_2) \;\; y_1>y_2 \tag{6.13}$$

onde ξ está no segmento descrito acima. Usando

$$M_1 = \max\{|f_y(x,y)| : (x,y) \in \overline{\Omega_\delta}\},$$

obtemos de (6.13)

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq M_1|y_1-y_2|,$$

que é válida para $(x,y_1),(x,y_2) \in \overline{\Omega_0}$ com $|y_1-y_2|<\delta$. Para os pontos com $|y_1-y_2| \geq \delta$, a estimativa abaixo se verifica

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{\delta}|y_1-y_2|,$$

onde M é o max $|f(x,y)|$ para $(x,y) \in \overline{\Omega_0}$.Logo, para obter (6.12) basta tomar $K=\max\{M_1,\frac{2M}{\delta}\}$.

□

Voltemos à estimativa de (6.11). Usando o lema (6.5.2), obtemos

$$|\phi(g_1)(x)-\phi(g_2)(x)| \leq K\left|\int_{x_0}^{x}|g_1(s)-g_2(s)|ds\right| \leq K\overline{a}d(g_1,g_2).$$

e daí

$$d(\phi(g_1),\phi(g_2)) \leq K\overline{a}d(g_1,g_2).$$

Concluímos que ϕ é uma contração se $K\overline{a}<1$. Logo, basta tomar $\overline{a}<\dfrac{1}{K}$. Assim, o **Teorema de Picard** fica demonstrado com $I=(x_0-\overline{a},x_0+\overline{a})$.

REFERÊNCIAS

[1] DE FIGUEIREDO, D. G., *Equações diferenciais aplicadas*. 2a Ed.Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[2] FURTADO, M., - *Notas de EDP2 (versão 1.2)*. Universidade de Brasília, 2012.

[3] LIMA, E. L., *Análise Real: funções de uma variável*. Vol I. 12a . Ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2018.

[4] LIMA, E. L., *Curso de análise*. Vol 2. 11a ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

[5] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*. 5a Ed.Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2017.

[6] HOCKING, J. G.; YOUNG, G. S.,*Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1961.