

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CORREÇÕES RADIATIVAS NA EDQ COM EXTENSÕES
DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ E HOŘAVA-LIFSHITZ

JOB SARAIVA FURTADO NETO

Maceió

17 de maio de 2016

JOB SARAIVA FURTADO NETO

CORREÇÕES RADIATIVAS NA EDQ COM EXTENSÕES
DE VIOLAÇÃO DE LORENTZ E HOŘAVA-LIFSHITZ

Tese apresentada no Instituto
de Física da Universidade Federal de
Alagoas, como parte dos requisitos para
a obtenção do título de Doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. Tiago Homero
Mariz do Nascimento

Maceió

17 de maio de 2016

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

F992c Furtado Neto, Job Saraiva.

Correções radiativas na EDQ com extensões de violação de Lorentz e
Hořava-Lifshitz / Job Saraiva Furtado Neto. – 2016.
107 f. : il.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.

Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de
Física. Maceió.

Bibliografia: f. 90-107.

1. Correções radiativas. 2. Eletrodinâmica quântica. 3. Ação de Euler-
Heisenberg. 4. Violação de Lorentz. 5. Extensões de Hořava-Lifshitz. I. Título.

CDU: 537.8

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO**

***"Correções Radiativas na EDQ com extensões de violação de
Lorentz e Horava-Lifshitz"***

por

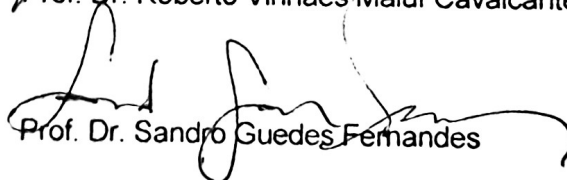
Job Saraiva Furtado Neto

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, do Departamento de Física da Universidade de Ceará, Sandro Guedes Fernandes, da Universidade Estadual de Alagoas, Marcelo Leite Lyra, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato **aprovado com grau "A"**.

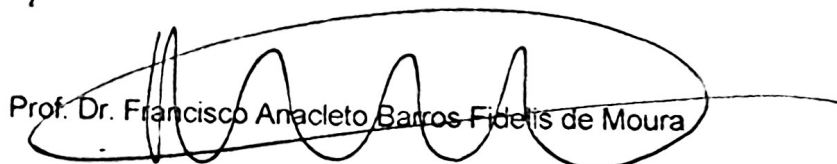
Maceió, 23 de setembro de 2015


Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento


Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante


Prof. Dr. Sandro Guedes Fernandes


Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra


Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

DEDICATÓRIA

À minha família

“A verdadeira liberdade consiste em
fazer aquilo que não se quer”

Immanuel Kant

AGRADECIMENTOS

À minha família (Ivânia, Iracy, Chica, Irismar, Yarlen, Talys, Marco, etc) que sempre me apoiou e me ajudou a conquistar meus objetivos.

Ao meu professor e orientador Tiago Mariz, pela paciência e pela excelente orientação.

Aos meus amigos Adauto e Henrique, que sempre me presentearam com boas conversas.

À minha namorada Sâneq, que me indicou sempre as mais sábias decisões.

Aos meus companheiros de grupo: Fábio, Rubens, Aléssio, Jonathas e Wellington.

Aos amigos do IF: Adhemar, Arthur, Andressa, Átila, Camylla, Cristiano, Danilo, Elaine, Fabiana, Givanildo, Jéssica, Jefersson, João Paulo, Juarez, Júlio, Michelle, Nazareno, Pedro, Tainã, Valdemir, Waléria, dentre outros.

À galera do RU: Davi, Diego e Rivo.

Aos professores do IF-UFAL que me deram aulas no mestrado e no doutorado, contribuindo com minha formação. Em especial, ao professor Eduardo Fonseca.

Aos amigos da URCA, Daniela, Polyanna, Hércules e Natanael.

Aos eternos mentores, Wilson Hugo, Augusto Nobre, Eduardo e Juscelino, que sempre me guiaram para o melhor caminho.

Aos funcionários do IF que são sempre muito simpáticos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Na primeira metade deste trabalho realizamos, inicialmente, uma revisão de literatura acerca do modelo padrão estendido, focando no setor mínimo da eletrodinâmica quântica estendida, apresentando as correções radiativas para um loop aos propagadores do fóton, do férmion e para o vértice, considerando os coeficientes de violação CPT par $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. Apresentamos também uma extensão do teorema de Furry para o modelo, e por fim, realizamos a indução radiativa da ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz, em uma aproximação de campo fraco, através de um método perturbativo em que o coeficiente $c_{\mu\nu}$ é tratado como uma inserção no propagador do férmion, além de dar origem a um novo vértice, e também através de um método não perturbativo. Já na segunda metade do trabalho, apresentamos uma extensão à eletrodinâmica quântica usual conhecida como extensão de Hořava-Lifshitz, que é caracterizada por uma anisotropia de escala entre as coordenadas espaciais e temporal. Estudamos a eletrodinâmica quântica de Lifshitz com o expoente crítico dinâmico $z = 3$ e calculamos as correções radiativas para os propagadores do férmion e do fóton, além de discutirmos a renormalização da teoria. Discutimos também o teorema de Furry para a presente modelo e por fim apresentamos um cálculo preliminar à indução da ação de Euler-Heisenberg neste contexto.

Palavras-chave: Correções radiativas; Eletrodinâmica quântica; Ação de Euler-Heisenberg; Violação de Lorentz; e Extensões de Hořava-Lifshitz.

ABSTRACT

In the first half of this work we perform, initially, a literature review about the standard model extension, focusing in the minimal sector of the quantum electrodynamics extension, presenting the one-loop radiative corrections to the photon and fermion propagators, and for the vertex, considering the CPT-even violation coefficients $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$ and $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. We also show an extension of the Furry's theorem for such model, and lastly, we study the radiative generation of the Lorentz-violating Euler-Heisenberg action, in the weak field approximation, through a perturbative approach in which the coefficient $c_{\mu\nu}$ is treated as an insertion in the fermion propagator and gives rise a new vertex, and also through a nonperturbative approach. In the second half of the work, we present an extension of the usual quantum electrodynamics known as Hořava-Lifshitz extension, which is characterized by an scale anisotropy between the space and time. We study Lifshitz quantum electrodynamics with critical dynamical exponent $z = 3$ and we calculate the radiative corrections to the photon and fermion propagators, beyond discuss the renormalization of the theory. We discuss the Furry's theorem for the present model and lastly we present a preliminar calculation for the induction of the Euler-Heisenberg action in this context.

Keywords: Radiative corrections. Euler-Heisenberg effective action. Lifshitz electrodynamics.

SUMÁRIO

1	Introdução	4
2	Eletrodinâmica quântica com violação de Lorentz	9
2.1	Introdução	9
2.2	Correções radiativas para os propagadores e vértices	13
2.3	Função de três pontos e o teorema de Furry	22
2.4	Renormalização da EDQ estendida	25
3	Ação de Euler-Heisenberg com violação de Lorentz	29
3.1	Introdução	30
3.2	Método perturbativo	33
3.2.1	Limite colinear	42
3.2.2	Ação efetiva de Euler-Heisenberg	44
3.3	Método não perturbativo	45
4	Eletrodinâmica quântica com extensão de Hořava-Lifshitz	55
4.1	Introdução	55
4.2	EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz	58
4.2.1	EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 2$	59
4.2.2	EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$	62

4.3	Correções radiativas da EDQ de Horava-Lifshitz	64
4.4	Renormalização da EDQ de Horava-Lifshitz	71
4.5	Função de três pontos e o teorema de Furry	73
5	Ação de Euler-Heisenberg com extensão de Horava-Lifshitz	77
5.1	Função de quatro pontos	77
6	Conclusões e perspectivas	85
A	Expressão $i\bar{T}_{HL14}$	88
	Referências	90

LISTA DE FIGURAS

2.1	correções radiativas para o propagador do fóton dadas por $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$	15
2.2	correções radiativas para o propagador do fóton dadas por $H_{\mu\nu}$	17
2.3	correções radiativas para o propagador do férmion dadas por $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$	18
2.4	correções radiativas para o propagador do férmion dadas por $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$	20
2.5	correções radiativas para o vértice dadas por $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$	21
2.6	correções radiativas para o vértice dadas por $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$	21
2.7	Loops de férmions com orientações distintas	23
2.8	função de 3-pontos com inserção no propagador	25
4.1	Funções de três pontos	74
4.2	Correções radiativas para o vértice	75
5.1	Correção radiativa usual para a função de 4-pontos	78
5.2	Correções radiativas não usuais para a função de 4-pontos	78

Capítulo 1

Introdução

O conceito de simetria é uma das ferramentas mais poderosas no estudo da física teórica, uma vez que tornou-se evidente que praticamente todas as leis da natureza estão relacionadas às simetrias. Muito antes de um estudo formal acerca da ideia de simetria, esta já encontrava-se presente, implicitamente, na matemática, nas artes, na arquitetura, etc. Na matemática, a generalização da ideia geométrica de simetria culminou no desenvolvimento da teoria de grupos. Na física, o conceito de simetria encontra-se manifesto explicitamente no teorema de Noether, que afirma, de maneira simplificada, que a cada simetria contínua está associada uma quantidade conservada.

Contudo, só em meados da década de 70, modelos físicos que incorporavam violação de simetrias passaram a ser efetivamente estudados. Na física de altas energias, o trabalho seminal de P. Higgs [1] apresenta o processo de quebra espontânea de simetria, em que um campo escalar adquire um valor esperado no vácuo não nulo, provendo massa para as partículas do modelo padrão. Na física da matéria

condensada, os estudos de P.W. Anderson e Landau [2, 3] mostraram que a violação de simetria é essencial para a compreensão de fenômenos, tais como a supercondutividade e cristais líquidos.

O Modelo Padrão (MP), que descreve três das quatro interações fundamentais, a saber, as interações eletromagnética, fraca e forte, em sua versão mínima, é dotado da simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Apesar de ser fenomenologicamente bem sucedido, o MP deixa algumas questões em aberto, tais como o problema da hierarquia ou a falta de uma descrição quântica para a gravitação. Portanto, acredita-se que o MP seja o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental, teoria esta que unificaria o MP e a interação gravitacional, fornecendo assim, um modelo de gravitação quântica.

A escala natural para uma teoria fundamental que incorpora a gravidade é governada pela massa de Planck $M_{planck} \approx 10^{19} GeV$, que é cerca de dezessete ordens de magnitude maior que a escala eletrofraca m_W associada ao MP. Isto sugere que, sinais experimentais observáveis emergindo a partir de uma teoria fundamental espera-se que sejam suprimidos por alguma potência de $r \approx m_W/M_{Planck} \approx 10^{-17}$.

Uma das teorias fundamentais mais promissoras ao fornecimento de uma descrição quântica da gravitação é a teoria de cordas. Contudo, devido à impossibilidade de uma verificação experimental direta da teoria, dois modelos propostos a fim de estudar efeitos mensuráveis de baixas energias serão aqui abordados.

O primeiro modelo, hoje conhecido como Modelo Padrão Estendido (MPE), foi inicialmente vislumbrado em 1989 através do trabalho de Kostelecky e Samuel [4], em que foi visto que interações em teorias de cordas poderiam levar a quebra espontânea de simetria de Lorentz. Estudos posteriores mostraram que teorias não

comutativas e modelos de brana também levavam à quebra da invariância de Lorentz. Em 1997 e 1998 dois trabalhos publicados por Kostelecký e Colladay [5, 6] finalmente deram origem ao setor mínimo do MPE em espaços-tempo planos, e em 2004 [7] foi publicada a extensão para espaços-tempo curvos. O MPE consiste, basicamente, de uma extensão do MP que inclui em sua lagrangiana todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT.

O segundo modelo, proposto em 2009 por P. Hořava [8], enxerga a teoria de cordas não como uma teoria única do universo, mas sim como uma extensão lógica e completa da teoria quântica de campos, e assim, o modelo proposto permite estudar efeitos quânticos gravitacionais em $(3 + 1)$ -dimensões de maneira autocontida. A proposta do Hořava baseia-se em uma anisotropia entre espaço e tempo, comum em sistemas de matéria condensada. Essa anisotropia causa, por conseguinte, uma violação na invariância de Lorentz. O grande interesse neste modelo reside no fato de que a gravidade em $(3 + 1)$ -dimensões passa a ser renormalizável por contagem de potência. A extensão de Hořava-Lifshitz para a eletrodinâmica quântica ainda tem sido pouco estudada na literatura, contudo, tal modelo é promissor no estudo de violação de simetria de Lorentz devido à melhora no comportamento UV da teoria devido a anisotropia nela inclusa.

Assim, nesta tese temos como objetivo estudar duas extensões da eletrodinâmica quântica que incluem violação da invariância de Lorentz, a saber, a eletrodinâmica quântica estendida e a generalização da eletrodinâmica quântica de Hořava-Lifshitz, e em cada uma destas extensões calcular as correções radiativas para as funções de dois, três e quatro pontos. Nas funções de dois e três pontos, iremos apresentar uma discussão acerca da renormalizabilidade de cada modelo. Com

relação às funções de quatro pontos, iremos calcular a ação não linear de Euler-Heisenberg.

O capítulo seguinte tratará de apresentar a eletrodinâmica quântica estendida, ou seja, com violação de simetria de Lorentz, assim como suas motivações e possíveis indícios experimentais e observacionais. Em seguida calculamos as correções radiativas para os propagadores, focando nas contribuições dos coeficientes CPT par do modelo. Discutimos também as identidades de Ward, o teorema de Furry e finalmente a renormalização do modelo.

No capítulo 3, calcularemos a indução da ação efetiva de Euler-Heisenberg através de um método perturbativo no coeficiente $c_{\mu\nu}$ do setor fermiônico da eletrodinâmica estendida [9]. Para tal, levaremos em conta todas as contribuições lineares do coeficiente $c_{\mu\nu}$, em um laço (loop) de férmions com quatro pernas externas de fótons. Este cálculo nos permite discutir as implicações da imposição do limite colinear na amplitude de espalhamento, que a depender da maneira como são feitas as permutações nos índices e momentos, as contribuições da ordem de $1/m^2$ podem ou não ser nulas. O presente cálculo também possibilita a obtenção da ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz. Finalmente, efetuaremos o cálculos considerando o método não perturbativo no coeficiente $c_{\mu\nu}$, contudo, levaremos em conta a invariância rotacional, tal que $c_{\mu\nu} = \kappa u_\mu u_\nu$, onde $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Apresentaremos no capítulo 4 a generalização da eletrodinâmica quântica de Hořava-Lifshitz. Assim como no capítulo 2, discutiremos as correções radiativas para os propagadores (com expoente crítico $z = 3$) e aspectos importantes da renormalização do modelo, assim como a questão da restauração da simetria de Lorentz [10]. Estudaremos também as correções radiativas para a função de três pontos e a

validade do teorema de Furry para o modelo.

No capítulo 5, apresentaremos o cálculo das correções radiativas para a função de quatro pontos na extensão de Hořava-Lifshitz da eletrodinâmica quântica [11]. Com este cálculo poderemos obter a ação de Euler-Heisenberg para o modelo, que é de suma importância para o entendimento de efeitos não lineares associados à teoria, além de permitir a computação de seções de choque para alguns espalhamentos específicos.

Por fim, no capítulo 6, apresentaremos nossas principais conclusões acerca do estudo realizado e proporemos algumas perspectivas de trabalhos futuros.

Durante toda esta tese, utilizaremos as unidades naturais, ou seja, consideraremos $\hbar = c = 1$, onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , c é a velocidade da luz no vácuo. Além disso, a métrica adotada apresenta os seguintes elementos diagonais $(+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

Eletrodinâmica quântica com violação de Lorentz

Neste capítulo faremos uma revisão de literatura acerca do modelo padrão estendido, mais especificamente sobre a eletrodinâmica quântica com violação de simetria de Lorentz, apresentando sua origem e motivações, correções radiativas de um loop para as funções de dois e três pontos, além de uma breve discussão acerca da renormalizabilidade do modelo.

2.1 Introdução

Como já mencionado no capítulo anterior, acredita-se que o modelo padrão seja o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Nestas teorias o processo de quebra espontânea de simetria, promove o surgimento natural do efeito

de violação da invariância de Lorentz e CPT [4, 12]. Tal processo é análogo ao mecanismo de Higgs, no qual um campo escalar ganha um valor esperado no vácuo diferente de zero e gera a massa para as partículas do modelo padrão. No caso de um campo tensorial que contém índices de Lorentz, um valor esperado não nulo seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo, quebrando assim, espontaneamente, a transformação de Lorentz de partícula, ao passo que a transformação de Lorentz de observador permanece inalterada. Foi baseado neste fato que Kostelecký e Colladay [5, 6] formularam o modelo padrão estendido (MPE), isto é, com base na quebra espontânea de simetria de Lorentz em teorias mais fundamentais, eles propuseram uma extensão do modelo padrão que inclui em sua lagrangiana uma extensão mínima de todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT.

A quebra dinâmica da invariância de Lorentz e CPT pode ser entendida como um efeito mensurável de baixas energias que emergem de teorias como cordas [4, 12, 13, 14, 15] ou teorias de campo não comutativas [16, 17, 18, 19]. O trabalho [20] foi um dos precursores no que diz respeito aos estudos acerca dos modelos que englobam violação de simetria de Lorentz, através da constatação de que o termo de Chern-Simons em $(3 + 1)$ dimensões é invariante de gauge, mas não de Lorentz, devido ao acoplamento do tensor eletromagnético dual a um quadri vetor constante. Contudo, o MPE é atualmente uma das teorias mais bem sucedidas no que se trata de violação da invariância de Lorentz. É importante notar que, apesar de o MPE conter termos responsáveis pela violação de simetria de Lorentz e de CPT, a simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ é mantida, conservando várias propriedades importantes, assim como a renormalizabilidade da teoria [21].

Alguns trabalhos recentes dividem o MPE em dois setores principais, sendo

estes setores conhecidos como MPE mínimo e não mínimo. No primeiro temos apenas termos renormalizáveis com operadores de dimensão (de massa) $d = 3$ ou $d = 4$, enquanto que o MPE não mínimo apresenta operadores de dimensão $d \geq 5$, que faz destes termos não renormalizáveis.

Dentro do setor mínimo do MPE alguns trabalhos foram realizados verificando a possibilidade de ocorrência de efeitos que, possivelmente, só ocorreriam caso houvesse de fato violação da invariância de Lorentz. Este é o caso do trabalho [22] que aborda o efeito da divisão de fótons no vácuo, visto que, na eletrodinâmica quântica (EDQ), um fóton propagando-se no vácuo tem amplitude zero para decair em múltiplos fótons em qualquer ordem de perturbação. Este resultado é visto no trabalho do Schwinger acerca do método do tempo-próprio e da ação efetiva de Euler-Heisenberg [23].

A extensão não mínima do MPE, muito embora possua somente termos não renormalizáveis, também vem recebendo atenção na literatura [24, 25, 26, 27]. Uma das motivações para o estudo de operadores com dimensão $d \geq 5$ reside no fato de que, muito embora os operadores com dimensão $d = 4$ sejam os termos dominantes, alguns processos astrofísicos relevantes impõem restrições severas (veja as tabelas em [28]) aos coeficientes associados a estes operadores, de modo que as contribuições oriundas de operadores com dimensão $d \geq 5$ passam a ser comparáveis ou mesmo dominantes. Uma outra fonte de motivação para o estudo desses operadores de dimensão de massa $d \geq 5$ está na descrição supersimétrica do MPE, onde apenas termos com operadores de dimensão de massa $d \geq 5$ são permitidos.

Neste trabalho nos deteremos ao estudo do setor mínimo da EDQ estendida, cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overbrace{(k_{AF})^\mu}^M \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{A^\nu F^{\lambda\rho}}^{M^3} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}}^{M^4} + i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (2.1)$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$ e $M = m + M_1$, sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \\ M_1 &= a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

O primeiro termo é a lagrangiana de Maxwell usual, e os outros dois termos são os que violam a simetria de Lorentz, lembrando que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e que $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

A primeira das contribuições extra é o termo de Chern-Simons quadridimensional, que é CPT ímpar e portanto viola as simetrias de Lorentz e CPT. Note que o coeficiente $(k_{AF})^\mu$ tem dimensão de massa $d = 1$, ao passo que o operador $A^\nu F^{\lambda\rho}$ (campos e derivadas) tem dimensão de massa $d = 3$, visto que a lagrangiana tem dimensão de massa $d = 4$. Esse termo foi bastante estudado na literatura devido sua importância tanto em sistemas de teoria quântica de campos como em sistemas de física da matéria condensada. Em particular, o termo de Chern-Simons ganhou muita atenção em $(2 + 1)$ dimensões, devido a sua relação com efeitos planares, tais como o efeito Hall quântico e supercondutividade. Em teoria quântica de campos, alguns estudos importantes foram realizados, como por exemplo, em efeitos de dispersão [20] e em indução radiativa [29]. O segundo dos termos extra contém um operador com dimensão de massa $d = 4$ e portanto o coeficiente $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ é adimensional, além de ter simetria de tensor de Riemann.

No setor fermiônico, os operadores contraídos com os coeficientes $a_\mu, b_\mu, e_\mu,$

f_μ e $g_{\lambda\nu\mu}$, violam as simetrias de Lorentz e CPT (CPT ímpar), enquanto que os operadores relacionados com os coeficientes $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$, violam apenas a simetria de Lorentz (CPT par). Contudo, sob uma certa redefinição espinorial, os termos relacionados com os coeficientes a_μ , e_μ e f_μ são removidos da lagrangiana, apenas os coeficientes $\bar{c}_{\mu\nu}$, $\bar{d}_{\mu\nu}$ (totalmente simétrico), $\tilde{g}_{\lambda\nu\mu}$ (totalmente antissimétrico), b_μ e $H_{\mu\nu}$ sobrevivem. Note que os coeficientes contidos em M_1 têm dimensão de massa $d = 1$, enquanto que os coeficientes contidos em Γ_1^μ são adimensionais.

Ainda no setor fermiônico, vale a pena enfatizar que apenas os coeficientes b_μ e $c_{\mu\nu}$ geram correções quânticas no setor bosônico, tal que

$$(k_{AF})_\mu \propto b_\mu \quad (2.3)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \propto g_{\mu\lambda}c_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}c_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}c_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}c_{\mu\rho}. \quad (2.4)$$

Até o presente momento, muitos limites experimentais vêm sendo atribuídos aos coeficientes do MPE, associados a dados experimentais envolvendo oscilação de neutrinos [30, 31, 32], káons [33, 34], prótons e nêutrons [35, 36, 37], elétrons [38, 39, 40, 41], múons [42, 43] e fótons [44, 45, 46, 47]. Para uma relação mais completa, veja [28].

2.2 Correções radiativas para os propagadores e vértices

Vamos aqui calcular as correções radiativas de um loop para os propagadores do fóton e do férmion, atendo-nos aos coeficientes de violação CPT par, dados

por $c^{\mu\nu}$, $d^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$, uma vez que tais termos foram menos estudados na literatura, em relação aos termos CPT ímpar, além da indução da ação de Euler-Heisenberg que será realizada no capítulo seguinte e da conexão entre o presente modelo e a extensão de Hořava-Lifshitz da EDQ. Tais coeficientes podem ser vistos como inserções nos propagadores do férmion e do fóton, além de dar origem a um novo vértice. A lagrangiana de interesse resume-se em

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_G, \quad (2.5)$$

sendo

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(iD_\mu\Gamma^\mu - M')\psi \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}, \quad (2.7)$$

com $\Gamma^\mu = c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu$ e $M' = m + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$. A partir da lagrangiana acima podemos extrair as regras de Feynman do modelo, que são os propagadores para o férmion, com e sem inserção

$$\longrightarrow = \frac{i}{\not{k} - m}, \quad (2.8a)$$

$$\longrightarrow \bullet \longrightarrow = i\Gamma^\mu k_\mu, \quad (2.8b)$$

$$\longrightarrow \times \longrightarrow = -\frac{i}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.8c)$$

bem como os vértices férmion-fóton

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \uparrow \\ \bullet \end{array} \longrightarrow = -ie\gamma^\mu, \quad (2.9a)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \uparrow \\ \bullet \end{array} \longrightarrow = -ie\Gamma^\mu. \quad (2.9b)$$

Para obter o propagador do fóton, o seguinte fixador de gauge foi usado

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{(\partial_\mu A^\mu)^2}{2\alpha}, \quad (2.10)$$

e assim obtemos que, para um fóton com momento p^μ , o propagador e inserção no propagador são:

$$\mu \text{---} \text{wavy} \text{---} \nu = -\frac{i}{p^2} \left(g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \xi \right). \quad (2.11)$$

$$\mu \text{---} \text{wavy} \times \text{wavy} \text{---} \nu = -2ip^\alpha p^\beta (k_F)_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (2.12)$$

Inicialmente, vamos calcular a correção radiativa dada pelos coeficientes $c^{\mu\nu}$ e $d^{\mu\nu}$ ao propagador do fóton. Para tal, devemos considerar os gráficos apresentados na figura (2.1). O tensor de polarização que nos dá a correção radiativa ao propagador

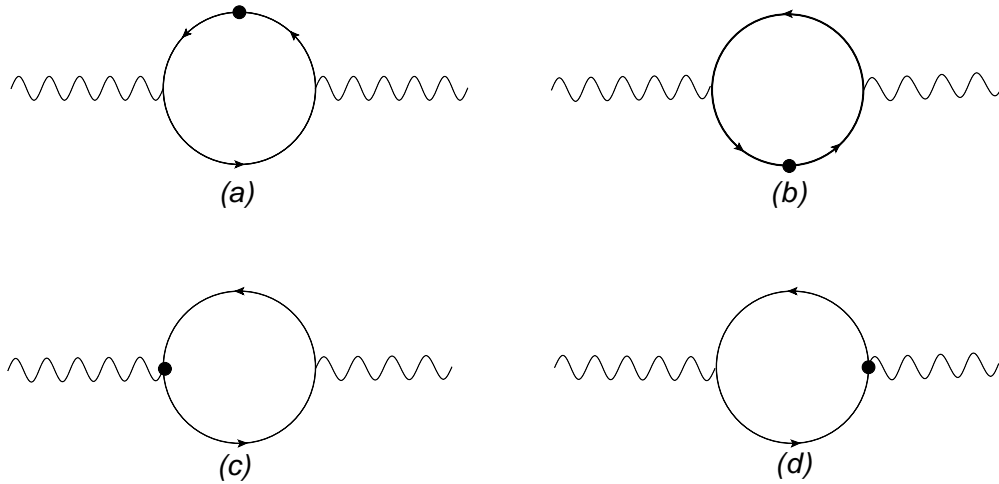


Figura 2.1: correções radiativas para o propagador do fóton dadas por $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$

do fóton é dado por

$$i\Pi_T^{\mu\nu}(p) = i\Pi_a^{\mu\nu}(p) + i\Pi_b^{\mu\nu}(p) + i\Pi_c^{\mu\nu}(p) + i\Pi_d^{\mu\nu}(p), \quad (2.13)$$

sendo

$$i\Pi_a^{\mu\nu}(p) = ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\beta [\gamma^\mu S(k-p) \gamma^\nu S(k) \Gamma^\beta S(k)], \quad (2.14a)$$

$$i\Pi_b^{\mu\nu}(p) = ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (k-p)_\beta [\gamma^\mu S(k-p) \Gamma^\beta S(k-p) \gamma^\nu S(k)], \quad (2.14b)$$

$$i\Pi_c^{\mu\nu}(p) = e^2 \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\Gamma^\mu S(k-p) \gamma^\nu S(k)], \quad (2.14c)$$

$$i\Pi_d^{\mu\nu}(p) = e^2 \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^\mu S(k-p) \Gamma^\nu S(k)], \quad (2.14d)$$

onde tr representa o traço sobre as matrizes de Dirac, com $S(k) = i/(\not{k} - m)$. A integral implícita presente em (2.13) possui divergência quadrática superficial. Os denominadores oriundos do propagador do férmion $S(k)$ podem ser combinados com o uso da parametrização de Feynman usual. Todos os deslocamentos necessários a serem feitos nas equações (2.14) devem ser os mesmos, a fim de manter os termos de superfície invariantes de gauge.

As equações (2.14) podem, após a parametrização de Feynman, ser reescritas como:

$$i\Pi_a^{\mu\nu}(p) = e^2 \text{tr} \int_0^1 dx 2(1-x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta \gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \gamma^\nu (\not{q} + m) \Gamma^\beta (\not{q} + m)}{(k^2 - M^2)^3} \quad (2.15a)$$

$$i\Pi_b^{\mu\nu}(p) = e^2 \text{tr} \int_0^1 dx 2x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q-p)_\beta \gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \Gamma^\beta (\not{q}_1 + m) \gamma^\nu (\not{q} + m)}{(k^2 - M^2)^3} \quad (2.15b)$$

$$i\Pi_c^{\mu\nu}(p) = -e^2 \text{tr} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \gamma^\nu (\not{q} + m)}{(k^2 - M^2)^2} \quad (2.15c)$$

$$i\Pi_d^{\mu\nu}(p) = -e^2 \text{tr} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{q}_1 + m) \Gamma^\nu (\not{q} + m)}{(k^2 - M^2)^2}. \quad (2.15d)$$

sendo o momento q^μ e a massa M dados por:

$$q^\mu = k^\mu + xp^\mu \quad (2.16)$$

$$M^2 = m^2 + p^2 x(x-1), \quad (2.17)$$

e $q_1^\mu = q^\mu + p^\mu$. Com o intuito de solucionar $i\Pi_T^{\mu\nu}(p)$ empregaremos regularização dimensional extendendo a dimensão do espaço-tempo de 4 para D , de modo que $\int d^4k/(2\pi)^4$ irá em $\mu^{4-D} \int d^Dk/(2\pi)^D$, sendo μ um parâmetro arbitrário que identifica a escala de massa. Desta forma, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Pi_T^{\mu\nu}(p) = & \frac{4e^2}{3} I_0 [(c^{\mu\alpha} + c^{\alpha\mu})p_\alpha p^\nu + (c^{\nu\alpha} + c^{\alpha\nu})p_\alpha p^\mu \\ & - (c^{\mu\nu} + c^{\nu\mu})p^2 - 2c_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta g^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo $I_0 = i/8\pi^2\epsilon$ e $\epsilon = 4 - D$. Note que as contribuições oriundas do coeficiente $d^{\mu\nu}$ são nulas.

A correção radiativa ao propagador do fóton dada pelo coeficiente $H_{\mu\nu}$ emerge a partir dos gráficos apresentados na figura (2.2), contudo, tais contribuições ren-

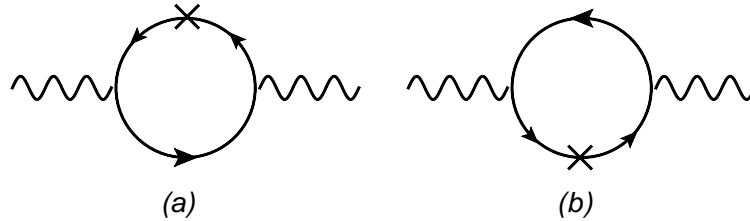


Figura 2.2: correções radiativas para o propagador do fóton dadas por $H_{\mu\nu}$

dem um resultado nulo, e portanto o resultado apresentado em (2.18) é o resultado total de todas as correções radiativas dadas pelos coeficientes CPT par ao propagador do fóton. Note que, o resultado apresentado em (2.18) é válido para

um coeficiente $c^{\mu\nu}$ genérico, porém, como já fora mencionado na introdução deste capítulo, uma redefinição espinorial deixa o coeficiente $c^{\mu\nu}$ inteiramente simétrico. Além disto, é possível ver que, independentemente da simetria do coeficiente $c^{\mu\nu}$, $\Pi^{\mu\nu}(p)$ é simétrico e invariante de gauge, visto que $p_\mu \Pi^{\mu\nu}(p) = 0$.

O resultado apresentado na equação (2.18), extraído aqui de maneira não-perturbativa no momento externo p_μ , pode também ser obtido expandindo perturbativamente o propagador fermiônico, ou seja, ao utilizarmos o método da expansão derivativa [48, 49, 50], levando em conta somente termos quadráticos no momento externo.

Já a correção de um loop dada pelos coeficientes $c^{\mu\nu}$ e $d^{\mu\nu}$ ao propagador do férmion, emerge a partir dos gráficos apresentados na figura (2.3), cujas amplitudes

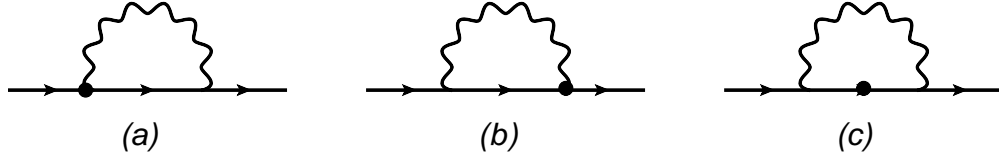


Figura 2.3: correções radiativas para o propagador do férmion dadas por $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$

associadas são as seguintes

$$i\Sigma(k)_a = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu S(k+p) \gamma^\nu D_{\mu\nu}(-p) \quad (2.19)$$

$$i\Sigma(k)_b = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(k+p) \Gamma_\nu D_{\mu\nu}(-p) \quad (2.20)$$

$$i\Sigma(k)_c = -ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(k+p) p_\beta \Gamma^\beta S(k+p) \gamma^\nu D_{\mu\nu}(-p). \quad (2.21)$$

Empregaremos aqui, assim como no caso anterior, parametrização de Feynman usual a fim de combinar os denominadores que emergem a partir dos propagadores do

férmion $S(k+p)$ e do fóton $D_{\mu\nu}(-p)$. Desta forma, obtemos

$$i\Sigma_a(k) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma^\mu(\not{q}_1 + m)\gamma^\nu g_{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} \quad (2.22)$$

$$i\Sigma_b(k) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu(\not{q}_1 + m)\Gamma^\nu g_{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^2} \quad (2.23)$$

$$i\Sigma_c(k) = e^2 \int_0^1 dx 2(1-x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\beta \gamma^\mu(\not{q}_1 + m)\Gamma^\beta(\not{q}_1 + m)\gamma^\nu g_{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (2.24)$$

com

$$q^\mu = p^\mu - (1-x)k^\mu \quad (2.25)$$

$$M^2 = m^2(1-x) + k^2x(x-1) \quad (2.26)$$

Empregando novamente o uso de regularização dimensional, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \Sigma_{T_1}(k) &= \Sigma_a(k) + \Sigma_b(k) + \Sigma_c(k) \\ &= e^2 I_0 \left\{ k^\mu \gamma^\nu \left[\frac{1}{3}(3\xi - 1)(c_{\nu\mu} - d_{\nu\mu}\gamma_5) - \frac{4}{3}(c_{\mu\nu} - d_{\mu\nu}\gamma_5) \right] + \right. \\ &\quad \left. -m[(4 - \xi) + 3\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} d_{\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para finalizar o cálculo das correções radiativas, devemos calcular mais dois gráficos, sendo estes associados as contribuições dos coeficientes $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. Devemos portanto, calcular os gráficos apresentados na figura (2.4), cujas amplitudes são:

$$\Sigma_{a1}(k) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(p+k) \left[-\frac{i}{2} H_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} \right] S(p+k) \gamma^\nu D_{\mu\nu}(-p), \quad (2.28)$$

$$\Sigma_{b1}(k) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(p+k) \gamma^\nu D_{\rho\nu}(-p) [-2ip_\alpha p_\beta (k_F)^{\alpha\lambda\beta\rho}] D_{\mu\lambda}(-p) \quad (2.29)$$

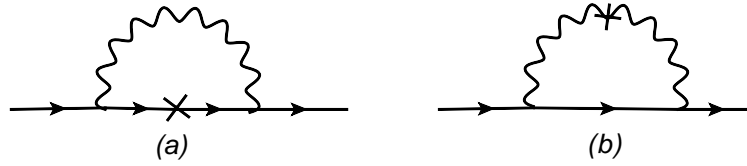


Figura 2.4: correções radiativas para o propagador do férmion dadas por $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$

que após a parametrização de Feynman, podem ser reescritas como

$$\Sigma_{a1}(k) = -ie^2 \int_0^1 dx 2(1-x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{q}_1 + m) [-(i/2)H_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}] (\not{q}_1 + m)\gamma^\nu g_{\mu\nu}}{(p^2 - M^2)^3} \quad (2.30)$$

$$\Sigma_{b1}(k) = ie^2 \int_0^1 dx 2x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{q}_1 + m)\gamma^\nu g_{\rho\nu} [-2ip_\alpha p_\beta (k_F)^{\alpha\lambda\beta\rho}] g_{\mu\lambda}}{(p^2 - M^2)^3}, \quad (2.31)$$

com q^μ e M^2 dados pelas equações (2.25) e (2.26), respectivamente. Analogamente ao que já foi feito anteriormente, o resultado pode ser obtido ao se usar regularização dimensional, o que nos dá $\Sigma_{a1}(k) = 0$ enquanto que

$$\Sigma_{b1}(k) = \frac{4e^2}{3} I_0(k_F)_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha k^\mu \gamma^\nu. \quad (2.32)$$

Já as correções radiativas para o vértice, dadas pelos coeficientes $c^{\mu\nu}$ e $d^{\mu\nu}$, podem ser obtidas através dos diagramas (2.5), enquanto que as correções dadas pelos coeficiente $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ estão representadas diagramaticamente na figura (2.6). O mesmo procedimento empregado para calcular as correções radiativas aos propagadores pode aqui ser empregado, e assim obtemos que as correções para o

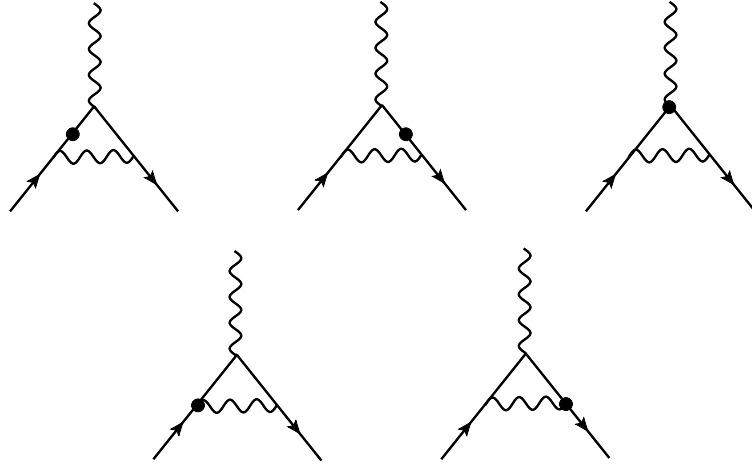


Figura 2.5: correções radiativas para o vértice dadas por $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$

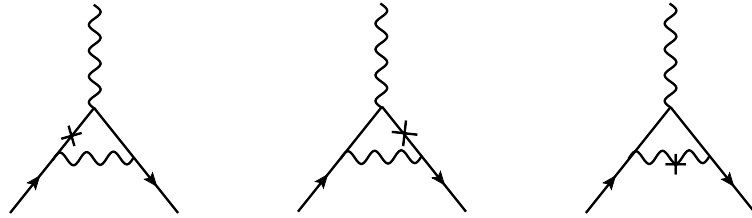


Figura 2.6: correções radiativas para o vértice dadas por $H_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$

vértice são dadas por:

$$\Lambda_H^\mu = 0, \quad (2.33)$$

$$\Lambda_c^\mu = -\frac{e^3}{3} I_0 [(3\xi - 1)c^{\alpha\mu}\gamma_\alpha - 4c^{\mu\alpha}\gamma_\alpha], \quad (2.34)$$

$$\Lambda_d^\mu = -\frac{e^3}{3} I_0 [(3\xi - 1)d^{\alpha\mu}\gamma_5\gamma_\alpha - 4d^{\mu\alpha}\gamma_5\gamma_\alpha], \quad (2.35)$$

$$\Lambda_{k_F}^\mu = -\frac{4e^3}{3} I_0 (k_F)_{\alpha\beta}^{\mu\alpha} \gamma^\beta. \quad (2.36)$$

Tais relações podem ser mais facilmente verificadas através da identidade de Ward, que relaciona as correções radiativas do vértice com as correções radiativas do pro-

pagador do férmion, através da seguinte relação

$$\Lambda_\mu = -\frac{\partial \Sigma}{\partial k^\mu}. \quad (2.37)$$

Veja que, por exemplo, $\Lambda_{k_F}^\mu$ pode ser obtida através de (2.32) e da identidade de Ward, pois

$$\begin{aligned} \Lambda_{k_F \mu} &= -\frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{4e^2}{3} I_0(k_F)_{\beta\alpha\nu}{}^\alpha k^\beta \gamma^\nu \\ &= -\frac{4e^2}{3} I_0(k_F)_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (2.38)$$

O mesmo procedimento pode ser empregado para encontrar as equações (2.33), (2.34) e (2.35).

Portanto, as equações (2.18), (2.27), (2.32), (2.33), (2.34), (2.35) e (2.36) são todas as correções radiativas associadas aos coeficientes CPT par da EDQ estendida.

2.3 Função de três pontos e o teorema de Furry

A renormalizabilidade da EDQ estendida em um loop requer que nenhuma contribuição divergente surja nas funções de três e quatro pontos, visto que elas são ausentes na teoria de gauge abeliana. Na EDQ convencional, o teorema de Furry desempenha um papel importante nesta questão, uma vez que ele afirma que *todos os diagramas contendo um loop de férmions com um número ímpar de pernas externas de fótons são nulos*. Pode-se demonstrar o teorema de Furry, na EDQ usual, da seguinte maneira. Considere dois diagramas, cada com um loop de férmions e com s pernas externas de fótons, onde as orientações dos momentos internos são diferentes, como mostra a figura (2.7). Podemos escrever a contribuição

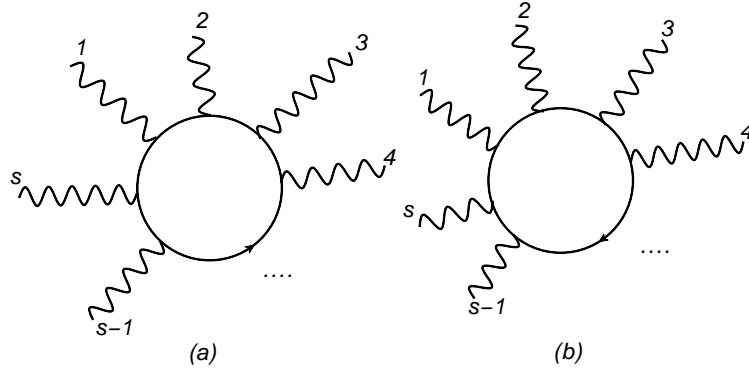


Figura 2.7: Loops de férmions com orientações distintas

correspondente orientação horária mostrada em (b), como

$$G_b = \text{tr}[\gamma_{\mu_1} S(k_1) \gamma_{\mu_2} S(k_2) \gamma_{\mu_3} \cdots \gamma_{\mu_s} S(k_s)]. \quad (2.39)$$

Existe uma representação da matrix de conjugação de carga C , tal que

$$CS(k)C^{-1} = S^T(-k) \quad (2.40)$$

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T. \quad (2.41)$$

Dessa forma, podemos inserir CC^{-1} entre os propagadores e matrizes de Dirac, de modo que G_b pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} G_b &= (-1)^s \text{tr}[\gamma_{\mu_1}^T S^T(-k_1) \gamma_{\mu_2}^T S^T(-k_2) \gamma_{\mu_3}^T \cdots \gamma_{\mu_s}^T S^T(-k_s)] \\ &= (-1)^s \text{tr}[(S(-k_s) \gamma_{\mu_s} \cdots \gamma_{\mu_3} S(-k_2) \gamma_{\mu_2} S(-k_1) \gamma_{\mu_1})^T] \\ &= (-1)^s \text{tr}[S(-k_s) \gamma_{\mu_s} \cdots \gamma_{\mu_3} S(-k_2) \gamma_{\mu_2} S(-k_1) \gamma_{\mu_1}] = (-1)^s G_a. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Acima foi utilizada a ciclicidade do traço e o fato de que o traço é invariante perante transposição. A menos do fator $(-1)^s$, o resultado acima é exatamente a contribuição para a orientação anti-horária apresentada em (a). Para um s ímpar, as duas contribuições cancelam-se, o que prova o teorema.

No contexto da EDQ estendida, o vértice de interação férmion-fóton é modificado devido aos termos extra que são adicionados à lagrangiana. O novo vértice introduzido (Eq. (2.9b)) na teoria transforma-se de maneira distinta a depender do coeficiente em foco. Para o coeficiente $c^{\mu\nu}$ é possível ver que, a presença de apenas uma matriz de Dirac fará com que a quantidade $c^{\mu\nu}\gamma_\nu$ transforme-se da mesma forma que o vértice usual da EDQ, e portanto um loop com um número ímpar de pernas externas de fótons se anulará com sua contribuição de orientação invertida. Já para o coeficiente $d^{\mu\nu}$, visto que a estrutura tensorial a este associada transforma-se como

$$C\gamma_5\gamma_\mu C^{-1} = (\gamma_5\gamma_\mu)^T, \quad (2.43)$$

as contribuições de loop de férmions com um número ímpar de pernas externas não se anulam com o loop de orientação invertida, contudo, as que contém um número par de pernas de fótons, sim.

É possível verificar também que, caso a contribuição de violação esteja como uma inserção no propagador (Eq. (2.8b) e Eq. (2.8c)) e não como um novo vértice (Eq. (2.9b)), um argumento semelhante ao anterior aplica-se. Para um loop com três pernas de fótons (Fig. (2.8)), três vértices férmion-fóton usuais compõem o loop, bem como um propagador fermiônico extra junto ao fator de momento associado a inserção. Contudo, como o propagador extra não tem efeito na mudança de sinais, e os vértices são usuais, a contribuição do coeficiente $c^{\mu\nu}$ anula-se com sua contribuição de orientação invertida, enquanto que a contribuição do coeficiente $d^{\mu\nu}$ sobrevive. Assim como o coeficiente $d^{\mu\nu}$, o coeficiente $H_{\mu\nu}$ também sobrevive, devido sua estrutura tensorial composta por duas matrizes de Dirac.

Vemos, desta forma, que a função de três pontos para a EDQ estendida com o coeficiente $c^{\mu\nu}$ anula-se, bem como todas as funções de n -pontos com n ímpar,

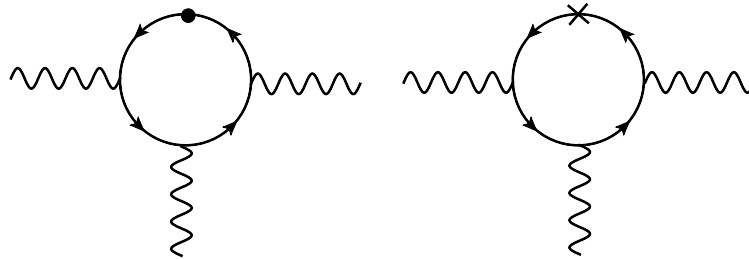


Figura 2.8: função de 3-pontos com inserção no propagador

enquanto que contribuições associadas aos coeficientes $d^{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ sobrevivem. Como já é sabido, o teorema de Furry é um caso especial da conservação por conjugação de carga, sendo, portanto, inaplicável para aqueles coeficientes que violam C , que é o caso dos coeficientes $d^{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$.

2.4 Renormalização da EDQ estendida

Calculadas as correções radiativas aos propagadores do férmion e do fóton, assim como aos correspondentes vértices, o procedimento de renormalização se dá através da redefinição dos campos e da massa do férmion, incluindo nestes, divergências que contrabalancearão as divergências oriundas das correções radiativas, tornando-as finitas. A fim de redefinir o campo de gauge A_μ , o spinor ψ e a massa m , faremos uso das correções radiativas para a EDQ usual (veja os livros-textos

[51, 52]), dadas por:

$$\Sigma(k) = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(-\not{p} + 4m) + F_1 \quad (2.44)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2) + F_2 \quad (2.45)$$

$$\Lambda_\mu = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\gamma_\mu + F_3, \quad (2.46)$$

sendo F_1 , F_2 e F_3 as contribuições finitas emergentes da EDQ usual. À lagrangiana da EDQ usual podem ser adicionados contra-termos que tornarão as correções radiativas finitas, isto é, pode-se adicionar uma lagrangiana de contra-termos

$$\mathcal{L}_{CT} = iB\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - A\bar{\psi}\psi - \frac{C}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - De\mu^{2-d/2}\bar{\psi}\not{A}\psi, \quad (2.47)$$

de modo que a lagrangiana total, isto é, a lagrangiana da EDQ usual adicionada à lagrangiana dos contra-termos nos dá que

$$\mathcal{L} = i(1+B)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi - (1+D)e\mu^{\epsilon/2}A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{(1+C)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Os contra-termos devem cancelar as divergências presentes em (2.44), (2.45) e (2.46), logo é possível ver que eles devem ser

$$A = -\frac{me^2}{2\pi^2\epsilon} \quad (2.49)$$

$$B = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \quad (2.50)$$

$$C = -\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} \quad (2.51)$$

$$D = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}. \quad (2.52)$$

Podemos, portanto, escrever a lagrangiana total como

$$\mathcal{L} = iZ_2\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (m+A)\bar{\psi}\psi - Z_1e\mu^{\epsilon/2}A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.53)$$

com

$$Z_1 = 1 + D = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \quad (2.54)$$

$$Z_2 = 1 + B = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \quad (2.55)$$

$$Z_3 = 1 + C = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}, \quad (2.56)$$

vemos então que $Z_1 = Z_2$. Podemos absorver estas divergências nos campos espinorial ψ e de gauge A^μ da seguinte maneira

$$\psi_B = \sqrt{Z_2}\psi, \quad A_B^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu, \quad (2.57)$$

de modo que, após tal redefinição, o termo massivo se tornará $m_B\bar{\psi}_B\psi_B$, sendo m_B dado por:

$$m_B = Z_2^{-1}(m + A) \quad (2.58)$$

$$= m \left(1 - \frac{e^2}{2\pi^2\epsilon}\right) \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) \quad (2.59)$$

$$= m \left(1 - \frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}\right) = Z_m m. \quad (2.60)$$

Para o termo de interação faz-se necessária a redefinição da carga elétrica, da seguinte forma

$$e_B = e\mu^{\epsilon/2} \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} = e\mu^{\epsilon/2} Z_3^{-1/2}, \quad (2.61)$$

e assim podemos escrever a lagrangiana em termos unicamente das quantidades redefinidas

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_B\gamma^\mu\partial_\mu\psi_B - m_B\bar{\psi}_B\psi_B - e_B\mu^{\epsilon/2}A_B^\mu\bar{\psi}_B\gamma_\mu\psi_B - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_B^{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

Com os campos e a massa redefinidas, torna-se possível agora a redefinição dos coeficientes de violação. Tal redefinição pode ser realizada da mesma maneira como

foi feita para a EDQ usual. Para o coeficiente $c^{\mu\nu}$, por exemplo, um contra-termo do tipo

$$K\bar{\psi}i\partial_\mu c^{\mu\nu}\gamma_\nu\psi \quad (2.63)$$

deve ser adicionado à lagrangiana. O contra-termo K deve ser tal que deve anular a divergência emergente de (2.32), o que nos dá que $K = -e^2 I_0/3$, e assim, através do mesmo procedimento encontramos que o coeficiente renormalizado é

$$c_{B\mu\nu} = (Z_c)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}, \quad (2.64)$$

com

$$(Z_c)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} = c_{\mu\nu} + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} [c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu} - (k_F)_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda]. \quad (2.65)$$

Analogamente, para os demais coeficientes, obtemos:

$$d_{B\mu\nu} = (Z_d)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} \quad (2.66)$$

$$H_{B\mu\nu} = (Z_H)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \quad (2.67)$$

$$(k_F)_{B\kappa\lambda\mu\nu} = (Z_{k_F})_{\kappa\lambda\mu\nu}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} (k_F)_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.68)$$

com

$$(Z_c)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} = c_{\mu\nu} + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} [c_{\mu\nu} + c_{\nu\mu} - (k_F)_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda]. \quad (2.69a)$$

$$(Z_d)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} = d_{\mu\nu} + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} [d_{\mu\nu} + d_{\nu\mu}] \quad (2.69b)$$

$$(Z_H)_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = H_{\mu\nu} + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} (H_{\mu\nu} - 2md^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}) \quad (2.69c)$$

$$\begin{aligned} (Z_{k_F})_{\kappa\lambda\mu\nu}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} (k_F)_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} \left[(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\kappa}(c_{\nu\lambda} + c_{\lambda\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}g_{\nu\kappa}(c_{\mu\lambda} + c_{\lambda\mu}) + \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}(c_{\nu\kappa} + c_{\kappa\nu}) - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}(c_{\mu\kappa} + c_{\kappa\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (2.69d)$$

Capítulo 3

Ação de Euler-Heisenberg com violação de Lorentz

Neste capítulo faremos uma breve revisão histórica acerca da ação de Euler-Heisenberg (EH), apresentando algumas motivações ao seu estudo. Em seguida, estudamos a geração radiativa da ação de EH no contexto de violação de simetria de Lorentz na aproximação de campo fraco. Para tal, usaremos dois métodos, um perturbativo e um não perturbativo. No método perturbativo o coeficiente $c_{\mu\nu}$ é tratado como uma inserção no propagador, além de dar origem a um novo vértice. Já no método não perturbativo, impomos invariância rotacional ao coeficiente $c^{\mu\nu}$, que passa a ser expresso como o produto de dois vetores tipo-tempo. Em ambos os casos, o limite colinear é discutido.

3.1 Introdução

Em 1928 Dirac publicara seu trabalho acerca da teoria relativística do elétron [53], que atraiu de imediato a atenção de Heisenberg para a “teoria do mar de Dirac”, um novo cenário para o vácuo quântico da EDQ. A descoberta do pósitron em 1932 e a sua associação com essa teoria, marca, praticamente, o nascimento da EDQ. Heisenberg publicara em 1934 dois trabalhos [54, 54], que formalizam o tratamento das flutuações quânticas inerentes ao cenário do mar de Dirac, e logo foi percebido que estas flutuações levariam a não linearidades.

Dentro deste contexto, foi discutida a possibilidade de ocorrência física do espalhamento fóton-fóton, mesmo quando a energia dos fótons não é suficiente para criar pares. Hans Euler foi o primeiro a estudar o espalhamento da luz pela luz através do formalismo da matriz de densidade [56], e em 1935 um breve artigo foi publicado por Kockel e Euler apresentando o resultado para o limite de baixas frequências da amplitude de espalhamento da luz pela luz [57].

O trabalho de Euler e Kockel tornava claro que o vácuo quântico poderia ser visto como um meio. Eles encontraram a correção quântica não linear dominante para a lagrangiana de Maxwell, como sendo

$$L = \frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{2} + \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \left[\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right)^2 + 7 \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

onde

$$E_0 = \frac{e}{(e^2/mc^2)^2}. \quad (3.2)$$

Euler e Kockel interpretaram a polarização do vácuo como sendo o seguinte resul-

tado:

$$\vec{D} = \vec{E} + \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \left[4 \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \vec{E} - 14 \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right) \vec{B} \right] \quad (3.3)$$

$$\vec{H} = \vec{B} + \frac{1}{90\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{E_0^2} \left[4 \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) \vec{B} - 14 \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right) \vec{E} \right]. \quad (3.4)$$

Além disto, Euler e Kockel também discutiram a similaridade formal entre o resultado por eles obtido (eq.(3.1)) com àquele obtido por Born e Infeld [58], em que uma correção não linear à teoria de Maxwell fora obtida, porém, dentro de uma perspectiva clássica.

Posteriormente, em 1936, o seminal trabalho de Euler e Heisenberg [59], apresentava uma expressão fechada para a correção não linear à lagrangiana de Maxwell, isto é, uma expressão não perturbativa incorporando todas as ordens no campo eletromagnético constante de fundo. A lagrangiana resultado é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^3} e^{-\eta} \left\{ i\eta^2 (\vec{E} \cdot \vec{B}) \left[\frac{\cos \left(\frac{\eta}{\varepsilon c} \sqrt{\vec{E}^2 - \vec{B}^2 + 2i(\vec{E} \cdot \vec{B})} \right) + c.c.}{\cos \left(\frac{\eta}{\varepsilon c} \sqrt{\vec{E}^2 - \vec{B}^2 + 2i(\vec{E} \cdot \vec{B})} \right) - c.c.} \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon_c^2 + \frac{\eta^2}{3} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O resultado completo não perturbativo apresentado na equação acima permitiu a Heisenberg ter um vislumbre precoce, através da análise das divergências logarítmicas, da renormalização da carga elétrica. A representação da equação (3.5) é conhecida hoje em dia como “forma do tempo-próprio”. Em uma linguagem mais moderna, Euler e Kockel estudaram a polarização do vácuo da EDQ em um limite de campo de fundo constante, obtendo as correções não lineares em termos de potências das intensidades dos campos.

Então, desde a sua descoberta, a ação efetiva de Euler-Heisenberg tem sido estudada em vários contextos, tais como o espalhamento da luz pela luz [60], relação

com funções beta [61, 62, 63, 64, 65], procura por axions [66], extensões não abelianas da ação de Euler-Heisenberg [67, 68, 69], método da função zeta [70, 71, 72], campos magnéticos intensos [73, 74, 75, 76], produção de pares no vácuo [59, 77, 78], divisão de fótons [79, 80, 81], birefringência no vácuo [82], ação efetiva em modelos de gravidade e teoria de cordas [83, 84, 85, 86, 87, 88, 89], dentre outros. Uma revisão mais completa acerca dos contextos em que a ação efetiva de EH foi extensivamente estudada pode ser vista em [90, 91].

Mais recentemente, estudos da lagrangiana de Euler-Heisenberg para além de um loop foram realizados novamente [92, 93], após os estudos iniciais feitos por Ritus [94]. Tais estudos foram realizados primordialmente usando o formalismo do mundo linha (worldline formalism) e análise de Borel na EDQ em $(1+1)$ -dimensões. A lagrangiana de Euler-Heisenberg também recebeu atenção na interface entre a teoria quântica de campos e a física da matéria condensada, devido aos trabalhos de Horava [8], que propuseram sistemas com uma anisotropia de escala entre espaço e tempo, tornando possível o estudo da lagrangiana de Euler-Heisenberg e a produção de pares de Schwinger em uma bi-camada de grafeno [95].

No cenário de violação de simetria de Lorentz [6, 5, 7], os estudos acerca da ação efetiva de EH só foram considerados, até então, no contexto de divisão de fótons [96, 97, 98, 99, 100, 101].

A geração radiativa da ação de Euler-Heisenberg apresentada neste capítulo é [9] de suma importância, visto que, as correções não lineares apresentadas tornam possíveis os cálculos para amplitudes de espalhamentos específicos, tais como o espalhamento de um fóton em um campo eletromagnético de um núcleo (espalhamento Delbrück) [102, 103] e o espalhamento de um fóton em um campo magnético

intenso [104, 105]. Como esses espalhamentos já foram comprovados experimentalmente, temos aqui uma oportunidade de estimar numericamente os coeficientes de violação de simetria de Lorentz. Recentemente tem sido discutido que o espalhamento fóton-fóton pode ser observado no LHC (Large Hadron Collider) [106] como uma oportunidade de discutir interações não comutativas [107], dentre outras, e consequentemente também, efeitos de violação de simetria de Lorentz.

3.2 Método perturbativo

A lagrangiana fermiônica que descreve o modelo de interesse é a mesma apresentada em (2.6), com $\Gamma^\mu = c^{\mu\nu}\gamma_\nu$ e $M' = m$, e considerando as regras de Feynman para o presente modelo, já descritas em (2.8) e (2.9), a ação efetiva torna-se:

$$S_{\text{eff}}^{(4)} = \frac{1}{4} \int d^4x \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4 e^{i(p_1+p_2+p_3+p_4)\cdot x} \times \frac{1}{6} G_c^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) A_{\mu_1}(p_1) A_{\mu_2}(p_2) A_{\mu_3}(p_3) A_{\mu_4}(p_4) + \mathcal{O}(c_{\mu\nu}^2) \quad (3.6)$$

com

$$G_c^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = 2 T_{c1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + 2 T_{c2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + 2 T_{c3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4). \quad (3.7)$$

As quantidades T_{c1} , T_{c2} e T_{c3} representam os gráficos de Feynman que devem ser computados a fim de obter a amplitude de espalhamento. A quantidade T_{c1} pode,

assim como T_{c2} e T_{c3} , ser subdividida em oito gráficos,

$$\begin{aligned}
 T_{c1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= T_{c11}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + T_{c12}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
 &\quad + T_{c13}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + T_{c14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4),
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

dados por

$$\begin{aligned}
 T_{c11}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
 &= ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) c^{\mu_1\mu} \gamma_\mu S(k_1) \gamma^{\mu_2} S(k_{12}) \gamma^{\mu_3} S(k_{123}) \gamma^{\mu_4} \\
 &\quad - ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) c_{\mu\nu} k^\mu \gamma^\nu S(k) \gamma^{\mu_1} S(k_1) \gamma^{\mu_2} S(k_{12}) \gamma^{\mu_3} S(k_{123}) \gamma^{\mu_4},
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 T_{c12}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 &= ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) \gamma^{\mu_1} S(k_1) c^{\mu_2\mu} \gamma_\mu S(k_{12}) \gamma^{\mu_3} S(k_{123}) \gamma^{\mu_4} \\
 &\quad - ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) \gamma^{\mu_1} S(k_1) c_{\mu\nu} k_1^\mu \gamma^\nu S(k_1) \gamma^{\mu_2} S(k_{12}) \gamma^{\mu_3} S(k_{123}) \gamma^{\mu_4},
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 T_{c13}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\
 &= ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) \gamma^{\mu_1} S(k_1) \gamma^{\mu_2} S(k_{12}) c^{\mu_3\mu} \gamma_\mu S(k_{123}) \gamma^{\mu_4} \\
 &\quad - ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) \gamma^{\mu_1} S(k_1) \gamma^{\mu_2} S(k_{12}) c_{\mu\nu} k_{12}^\mu \gamma^\nu S(k_{12}) \gamma^{\mu_3} S(k_{123}) \gamma^{\mu_4},
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
T_{c14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
&= ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)\gamma^{\mu_1} S(k_1)\gamma^{\mu_2} S(k_{12})\gamma^{\mu_3} S(k_{123})c^{\mu_4\mu} \gamma_\mu \\
&\quad - ie^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)\gamma^{\mu_1} S(k_1)\gamma^{\mu_2} S(k_{12})\gamma^{\mu_3} S(k_{123})c_{\mu\nu}k_{123}^\mu \gamma^\nu S(k_{123})\gamma^{\mu_4},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

sendo $k_1 = k + p_1$, $k_{12} = k + p_1 + p_2$ e $k_{123} = k + p_1 + p_2 + p_3$. É importante mencionar que o fator global 2 em (3.7) faz menção as duas orientações do loop de férmions. Podemos ver também que T_{c2} e T_{c3} podem ser obtidos a partir de T_{c1} quando trocamos μ_1 por μ_2 e p_1 por p_2 , bem como μ_1 por μ_4 e p_1 por p_4 respectivamente. É possível ver também que T_{c12} , T_{c13} , e T_{c14} podem ser obtidos a partir de T_{c11} , quando realizamos mudanças cíclicas

$$T_{c12}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_{c11}^{\mu_4\mu_1\mu_2\mu_3}(p_4, p_1, p_2, p_3), \tag{3.13a}$$

$$T_{c13}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_{c11}^{\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2}(p_3, p_4, p_1, p_2), \tag{3.13b}$$

$$T_{c14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_{c11}^{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1}(p_2, p_3, p_4, p_1). \tag{3.13c}$$

Portanto, devemos focar nossa atenção nos dois gráficos T_{c11} (Eq. (3.9)), em que, considerando primeiro a parametrização de Feynman, obtemos

$$\begin{aligned}
T_{c11}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_{12}} dx_3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{6ie^4}{(k^2 - M^2)^4} \\
&\quad \times \text{tr}[(\not{q} + m)c^{\mu_1\mu} \gamma_\mu (\not{q}_1 + m)\gamma^{\mu_2} (\not{q}_{12} + m)\gamma^{\mu_3} (\not{q}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}] \\
&\quad - \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_{12}} dx_3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24ixe^4}{(k^2 - M^2)^5} \\
&\quad \times \text{tr}[(\not{q} + m)c_{\mu\nu}q^\mu \gamma^\nu (\not{q} + m)\gamma^{\mu_1} (\not{q}_1 + m)\gamma^{\mu_2} (\not{q}_{12} + m)\gamma^{\mu_3} (\not{q}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

com

$$q^\mu = k^\mu - p_1^\mu(1 - x_1) - p_2^\mu(1 - x_{12}) - p_3^\mu(1 - x_{123}) \quad (3.15)$$

$$q_I^\mu = k_I^\mu - p_1^\mu(1 - x_1) - p_2^\mu(1 - x_{12}) - p_3^\mu(1 - x_{123}) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} M^2 &= m^2 - p_1^2(1 - x_1)x_1 - p_2^2x_{12}(1 - x_{12}) - p_3^2x_{123}(1 - x_{123}) \\ &\quad - 2(1 - x_{12})x_1p_1p_2 - 2(1 - x_{123})x_1p_1p_3 - 2(1 - x_{123})x_{12}p_2p_3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo $x_{12} = x_1 + x_2$, $x_{123} = x_1 + x_2 + x_3$ e $I = 1, 12, 123$. Seguindo o procedimento padrão, após calcular o traço sob as matrizes de Dirac e as correspondentes integrais, até a ordem de $1/m^4$, chegamos em

$$\begin{aligned} T_{c11}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= T_{c11g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^8 T_{c11gg_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{24} T_{c11gp_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^{18} T_{c11pp_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{c11g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= - \left[\frac{e^4}{12\pi^2\epsilon} - \frac{e^4}{24\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \right] (-g^{\mu_1\mu_2}c^{\mu_3\mu_4} + c^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - 4c^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} \\ &\quad + 2c^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3} + 2g^{\mu_1\mu_4}c^{\mu_2\mu_3} + c_{\mu\nu}g^{\mu\nu}g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} - c_{\mu\nu}g^{\mu\nu}g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

sendo $\epsilon = 4 - D$ e $\mu'^2 = 4\pi\mu^2e^{-\gamma-i\pi}$, e

$$\begin{aligned} T_{c11gg_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4c_{\mu\nu}}{1440m^2\pi^2}g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}[102p_1^\mu p_1^\nu + (89p_2^\mu + 115p_3^\mu)p_1^\nu + 24p_2^\mu p_2^\nu + 37p_3^\mu p_3^\nu \\ &\quad + 81p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(27p_1^2 + 17p_1 \cdot p_2 + 37p_1 \cdot p_3 + 9p_2 \cdot p_3 + 10p_3^2)], \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} T_{c11gg_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4c_{\mu\nu}}{1440m^2\pi^2}g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}[126p_1^\mu p_1^\nu + 7(19p_2^\mu + 17p_3^\mu)p_1^\nu + 48p_2^\mu p_2^\nu + 41p_3^\mu p_3^\nu \\ &\quad + 93p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(39p_1^2 + 37p_1 \cdot p_2 + 41p_1 \cdot p_3 + 24p_2^2 + 39p_2 \cdot p_3 + 26p_3^2)], \end{aligned} \quad (3.20b)$$

$$T_{c11gg3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{1440m^2\pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} [48p_1^\mu p_1^\nu + (11p_2^\mu + 85p_3^\mu)p_1^\nu + 37p_3^\mu p_3^\nu + 63p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(24p_1^2 + 11p_1 \cdot p_2 + 37p_1 \cdot p_3 + 12p_2^2 + 33p_2 \cdot p_3 + 25p_3^2)], \quad (3.20c)$$

$$T_{c11gg4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{10080m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \times [2p_1^\mu p_1^\nu (114p_1^2 + 95p_1 \cdot p_2 + 133p_1 \cdot p_3 + 66p_2^2 + 4p_2 \cdot p_3 + 85p_3^2) + p_1^\mu p_2^\nu (211p_1^2 + 224p_1 \cdot p_2 + 375p_1 \cdot p_3 + 131p_2^2 - 55p_2 \cdot p_3 + 137p_3^2) + p_1^\mu p_3^\nu (245p_1^2 + 333p_1 \cdot p_2 + 334p_1 \cdot p_3 + 291p_2^2 + 248p_2 \cdot p_3 + 222p_3^2) + p_2^\mu p_2^\nu (63p_1^2 + 72p_1 \cdot p_2 + 153p_1 \cdot p_3 + 36p_2^2 - 30p_2 \cdot p_3 + 26p_3^2) + p_3^\mu p_3^\nu (80p_1^2 + 116p_1 \cdot p_2 + 122p_1 \cdot p_3 + 95p_2^2 + 111p_2 \cdot p_3 + 79p_3^2) + p_2^\mu p_3^\nu (163p_1^2 + 243p_1 \cdot p_2 + 260p_1 \cdot p_3 + 201p_2^2 + 156p_2 \cdot p_3 + 140p_3^2)], \quad (3.20d)$$

$$T_{c11gg5}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4 c_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{10080m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} [39p_1^4 + (63p_1 \cdot p_2 + 93p_1 \cdot p_3 + 30p_2^2 + 22p_2 \cdot p_3 + 45p_3^2)p_1^2 + 31(p_1 \cdot p_2)^2 + 61(p_1 \cdot p_3)^2 + 15(p_2 \cdot p_3)^2 + 14p_3^4 + 93p_1 \cdot p_3 p_2^2 + 96p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 + 12p_2^2 p_2 \cdot p_3 + 2(33p_1 \cdot p_3 + 7p_2^2 + 15p_2 \cdot p_3)p_3^2 + p_1 \cdot p_2(127p_1 \cdot p_3 + 23p_2^2 + 11p_2 \cdot p_3 + 31p_3^2)], \quad (3.20e)$$

$$\begin{aligned}
T_{c11996}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4 c_{\mu\nu}}{10080 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} \\
&\times [2p_1^\mu p_1^\nu (132p_1^2 + 127p_1 \cdot p_2 + 137p_1 \cdot p_3 + 119p_2^2 + 77p_2 \cdot p_3 + 124p_3^2) \\
&+ p_1^\mu p_2^\nu (275p_1^2 + 360p_1 \cdot p_2 + 411p_1 \cdot p_3 + 295p_2^2 + 169p_2 \cdot p_3 + 265p_3^2) \\
&+ p_1^\mu p_3^\nu (253p_1^2 + 369p_1 \cdot p_2 + 358p_1 \cdot p_3 + 347p_2^2 + 360p_2 \cdot p_3 + 286p_3^2) \\
&+ p_2^\mu p_2^\nu (97p_1^2 + 144p_1 \cdot p_2 + 177p_1 \cdot p_3 + 108p_2^2 + 66p_2 \cdot p_3 + 84p_3^2) \\
&+ p_3^\mu p_3^\nu (86p_1^2 + 132p_1 \cdot p_2 + 134p_1 \cdot p_3 + 113p_2^2 + 145p_2 \cdot p_3 + 99p_3^2) \\
&+ p_2^\mu p_3^\nu (181p_1^2 + 291p_1 \cdot p_2 + 292p_1 \cdot p_3 + 255p_2^2 + 256p_2 \cdot p_3 + 200p_3^2)], \\
\end{aligned} \tag{3.20f}$$

$$\begin{aligned}
T_{c11997}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{10080 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} [48p_1^4 + (93p_1 \cdot p_2 + 99p_1 \cdot p_3 + 65(p_2^2 + p_2 \cdot p_3) \\
&+ 68p_3^2)p_1^2 + 61(p_1 \cdot p_2)^2 + 67(p_1 \cdot p_3)^2 + 27p_2^4 + 57(p_2 \cdot p_3)^2 + 29p_3^4 \\
&+ 113p_1 \cdot p_3 p_2^2 + 132p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 + 75p_2^2 p_2 \cdot p_3 + 2(43p_1 \cdot p_3 + 25p_2^2 \\
&+ 40p_2 \cdot p_3)p_3^2 + p_1 \cdot p_2(145p_1 \cdot p_3 + 79(p_2^2 + p_2 \cdot p_3) + 69p_3^2)], \tag{3.20g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{c11998}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{10080 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} \\
&\times [2p_1^\mu p_1^\nu (54p_1^2 + 3p_1 \cdot p_2 + 105p_1 \cdot p_3 + 27p_2^2 + 5p_2 \cdot p_3 + 78p_3^2) \\
&+ p_1^\mu p_2^\nu (55p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2 + 309p_1 \cdot p_3 + 17p_2^2 - 49p_2 \cdot p_3 + 117p_3^2) \\
&+ p_1^\mu p_3^\nu (161p_1^2 + 211p_1 \cdot p_2 + 306p_1 \cdot p_3 + 245p_2^2 + 264p_2 \cdot p_3 + 236p_3^2) \\
&+ p_2^\mu p_2^\nu (13p_1^2 + 135p_1 \cdot p_3 - 18p_2 \cdot p_3 + 24p_3^2) \\
&+ p_3^\mu p_3^\nu (66p_1^2 + 96p_1 \cdot p_2 + 122p_1 \cdot p_3 + 93p_2^2 + 127p_2 \cdot p_3 + 93p_3^2) \\
&+ p_2^\mu p_3^\nu (109p_1^2 + 165p_1 \cdot p_2 + 248p_1 \cdot p_3 + 171p_2^2 + 176p_2 \cdot p_3 + 156p_3^2)], \\
\end{aligned} \tag{3.20h}$$

$$\begin{aligned}
T_{c11g9}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4 c_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{10080 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} [27p_1^4 + (29p_1 \cdot p_2 + 79p_1 \cdot p_3 + 27p_2^2 + 35p_2 \cdot p_3 \\
&+ 52p_3^2)p_1^2 + 11(p_1 \cdot p_2)^2 + 61(p_1 \cdot p_3)^2 + 9p_2^4 + 45(p_2 \cdot p_3)^2 + 28p_3^4 \\
&+ 95p_1 \cdot p_3 p_2^2 + 116p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 + 48p_2^2 p_2 \cdot p_3 + (80p_1 \cdot p_3 + 36p_2^2 \\
&+ 71p_2 \cdot p_3)p_3^2 + p_1 \cdot p_2(111p_1 \cdot p_3 + 17p_2^2 + 29p_2 \cdot p_3 + 41p_3^2)]. \quad (3.20i)
\end{aligned}$$

Para obtermos o resultado apresentado na equação (3.18) foi utilizado regularização dimensional, com o intuito de isolar a divergência logarítmica inerente à integral em (3.9). Nos resultados acima omitimos as contribuições de T_{c11gk} e T_{c11kk} , visto que elas são muito extensas. De fato, as expressões (3.20) são extensas também, contudo, é válido considerá-las aqui, como veremos abaixo.

Finalmente, levando em conta as permutações (3.13), o primeiro gráfico T_{c1} toma a forma:

$$\begin{aligned}
T_{c1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= T_{c1g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^8 T_{c1gg_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
&+ \sum_{i=1}^{24} T_{c1gp_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^{18} T_{c1pp_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (3.21)
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
T_{c1g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= - \left[\frac{e^4}{6\pi^2 \epsilon} - \frac{e^4}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \right] \\
&\times [2g^{\mu_1\mu_4} c^{\mu_2\mu_3} + 2g^{\mu_1\mu_2} c^{\mu_3\mu_4} - 4g^{\mu_1\mu_3} c^{\mu_2\mu_4} \\
&+ 2c^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} - 4g^{\mu_2\mu_4} c^{\mu_1\mu_3} + 2g^{\mu_2\mu_3} c^{\mu_1\mu_4} \\
&- c_{\mu\nu} g^{\mu\nu} (g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} - 2g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4})], \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1gg_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{240m^2\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} [26p_1^\mu p_1^\nu + 2(9p_2^\mu + 17p_3^\mu)p_1^\nu + 8p_2^\mu p_2^\nu + 16p_3^\mu p_3^\nu \\
&\quad - 2p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(13p_1^2 + 9p_1 \cdot p_2 + 17p_1 \cdot p_3 + 4p_2^2 - p_2 \cdot p_3 + 8p_3^2)],
\end{aligned} \tag{3.23a}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1gg_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4 c_{\mu\nu}}{240m^2\pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} [34p_1^\mu p_1^\nu + 4(8p_2^\mu + 9p_3^\mu)p_1^\nu + 32p_2^\mu p_2^\nu + 34p_3^\mu p_3^\nu \\
&\quad + 32p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(17p_1^2 + 2(8p_1 \cdot p_2 + 9p_1 \cdot p_3 + 8(p_2^2 + p_2 \cdot p_3)) + 17p_3^2)],
\end{aligned} \tag{3.23b}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1gg_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{240m^2\pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} [16p_1^\mu p_1^\nu - 2(p_2^\mu - 17p_3^\mu)p_1^\mu + 8p_2^\mu p_2^\nu + 26p_3^\mu p_3^\nu \\
&\quad + 18p_2^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(8p_1^2 - p_1 \cdot p_2 + 17p_1 \cdot p_3 + 4p_2^2 + 9p_2 \cdot p_3 + 13p_3^2)],
\end{aligned} \tag{3.23c}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1gg_4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{2520m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \\
&\quad \times [p_1^\mu p_1^\nu (96p_1^2 + 79p_1 \cdot p_2 + 113p_1 \cdot p_3 + 48p_2^2 + 13p_2 \cdot p_3 + 65p_3^2) \\
&\quad + p_1^\mu p_2^\nu (79p_1^2 + 80p_1 \cdot p_2 + 159p_1 \cdot p_3 + 39p_2^2 - 24p_2 \cdot p_3 + 20p_3^2) \\
&\quad + p_1^\mu p_3^\nu (113p_1^2 + 159p_1 \cdot p_2 + 148p_1 \cdot p_3 + 156p_2^2 + 131p_2 \cdot p_3 + 92p_3^2) \\
&\quad + 3p_2^\mu p_2^\nu (16p_1^2 + 13p_1 \cdot p_2 + 52p_1 \cdot p_3 + 6p_2^2 - p_2 \cdot p_3 + 9p_3^2) \\
&\quad + p_2^\mu p_3^\nu (13p_1^2 - 24p_1 \cdot p_2 + 131p_1 \cdot p_3 - 3p_2^2 - 4p_2 \cdot p_3 + 16p_3^2) \\
&\quad + p_3^\mu p_3^\nu (65p_1^2 + 20p_1 \cdot p_2 + 92p_1 \cdot p_3 + 27p_2^2 + 16p_2 \cdot p_3 + 54p_3^2)],
\end{aligned} \tag{3.23d}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1995}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4 c_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{5040 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} [48p_1^4 + (79p_1 \cdot p_2 + 113p_1 \cdot p_3 + 48p_2^2 + 13p_2 \cdot p_3 \\
&+ 65p_3^2)p_1^2 + 40(p_1 \cdot p_2)^2 + 74(p_1 \cdot p_3)^2 + 9p_2^4 - 2(p_2 \cdot p_3)^2 + 27p_3^4 \\
&+ 156p_1 \cdot p_3 p_2^2 + 131p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 - 3p_2^2 p_2 \cdot p_3 + (92p_1 \cdot p_3 + 27p_2^2 \\
&+ 16p_2 \cdot p_3)p_3^2 + p_1 \cdot p_2(159p_1 \cdot p_3 + 39p_2^2 - 24p_2 \cdot p_3 + 20p_3^2)], \quad (3.23e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1996}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4 c_{\mu\nu}}{2520 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} \\
&\times [p_1^\mu p_1^\nu (114p_1^2 + 110p_1 \cdot p_2 + 118p_1 \cdot p_3 + 92p_2^2 + 71p_2 \cdot p_3 + 96p_3^2) \\
&+ p_1^\mu p_2^\nu (110p_1^2 + 144p_1 \cdot p_2 + 177p_1 \cdot p_3 + 108p_2^2 + 66p_2 \cdot p_3 + 71p_3^2) \\
&+ p_1^\mu p_3^\nu (118p_1^2 + 177p_1 \cdot p_2 + 160p_1 \cdot p_3 + 180p_2^2 + 177p_2 \cdot p_3 + 118p_3^2) \\
&+ 4p_2^\mu p_2^\nu (23p_1^2 + 9(3p_1 \cdot p_2 + 5p_1 \cdot p_3 + 3(p_2^2 + p_2 \cdot p_3)) + 23p_3^2) \\
&+ p_2^\mu p_3^\nu (71p_1^2 + 66p_1 \cdot p_2 + 177p_1 \cdot p_3 + 108p_2^2 + 144p_2 \cdot p_3 + 110p_3^2) \\
&+ p_3^\mu p_3^\nu (96p_1^2 + 71p_1 \cdot p_2 + 118p_1 \cdot p_3 + 92p_2^2 + 110p_2 \cdot p_3 + 114p_3^2)], \quad (3.23f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1997}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{5040 m^4 \pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (57p_1^4 + (110p_1 \cdot p_2 + 118p_1 \cdot p_3 + 92p_2^2 + 71p_2 \cdot p_3 \\
&+ 96p_3^2)p_1^2 + 72(p_1 \cdot p_2)^2 + 80(p_1 \cdot p_3)^2 + 54p_2^4 + 72(p_2 \cdot p_3)^2 + 57p_3^4 \\
&+ 180p_1 \cdot p_3 p_2^2 + 177p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 + 108p_2^2 p_2 \cdot p_3 + 2(59p_1 \cdot p_3 + 46p_2^2 \\
&+ 55p_2 \cdot p_3)p_3^2 + p_1 \cdot p_2(177p_1 \cdot p_3 + 108p_2^2 + 66p_2 \cdot p_3 + 71p_3^2)), \quad (3.23g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1gg8}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu}}{2520m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} \\
& [p_1^\mu p_1^\nu (54p_1^2 + 16p_1 \cdot p_2 + 92p_1 \cdot p_3 + 27p_2^2 + 20p_2 \cdot p_3 + 65p_3^2) \\
& + p_1^\mu p_2^\nu (16p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2 + 131p_1 \cdot p_3 - 3(p_2^2 + 8p_2 \cdot p_3) + 13p_3^2) \\
& + p_1^\mu p_3^\nu (92p_1^2 + 131p_1 \cdot p_2 + 148p_1 \cdot p_3 + 156p_2^2 + 159p_2 \cdot p_3 + 113p_3^2) \\
& + 3p_2^\mu p_2^\nu (9p_1^2 - p_1 \cdot p_2 + 52p_1 \cdot p_3 + 6p_2^2 + 13p_2 \cdot p_3 + 16p_3^2) \\
& + p_2^\mu p_3^\nu (20p_1^2 - 24p_1 \cdot p_2 + 159p_1 \cdot p_3 + 39p_2^2 + 80p_2 \cdot p_3 + 79p_3^2) \\
& + p_3^\mu p_3^\nu (65p_1^2 + 13p_1 \cdot p_2 + 113p_1 \cdot p_3 + 48p_2^2 + 79p_2 \cdot p_3 + 96p_3^2)], \\
\end{aligned} \tag{3.23h}$$

$$\begin{aligned}
T_{c1gg9}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4 c_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} [27p_1^4 + (16p_1 \cdot p_2 + 92p_1 \cdot p_3 + 27p_2^2 + 20p_2 \cdot p_3 \\
& + 65p_3^2)p_1^2 - 2(p_1 \cdot p_2)^2 + 74(p_1 \cdot p_3)^2 + 9p_2^4 + 40(p_2 \cdot p_3)^2 + 48p_3^4 \\
& + 156p_1 \cdot p_3 p_2^2 + 159p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_3 + 39p_2^2 p_2 \cdot p_3 + (113p_1 \cdot p_3 + 48p_2^2 \\
& + 79p_2 \cdot p_3)p_3^2 + p_1 \cdot p_2 (131p_1 \cdot p_3 - 3(p_2^2 + 8p_2 \cdot p_3) + 13p_3^2)]. \tag{3.23i}
\end{aligned}$$

Os resultados da Eq. (??) são uma expansão da equação (4.53), apresentada em [?], até primeira ordem em $c_{\mu\nu}$, com $c_{00} = \kappa$ e $c_{0i} = c_{ij} = 0$. A seguir, tomaremos o limite colinear e recuperaremos o resultado já obtido na literatura para a divisão de fótons no vácuo.

3.2.1 Limite colinear

A partir do resultado perturbativo em (3.21), podemos recuperar o resultado perturbativo obtido por [22] no limite colinear. Para tal, se considerarmos que o

fóton incidente tem energia E_1 e momentum \vec{p}_1 , então pela conservação dos momenta $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4$, temos, pela desigualdade triangular, a seguinte inequação:

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4| \leq |\vec{p}_2| + |\vec{p}_3| + |\vec{p}_4|. \quad (3.24)$$

Dessa forma, como $p_i^2 = E_i^2 - \vec{p}_i^2 = 0$ ou $|\vec{p}_i^2| = E_i$ (com $i = 1, 2, 3, 4$), de modo a satisfazer a condição de conservação de energia $E_1 = E_2 + E_3 + E_4$, todos os momenta \vec{p}_i devem estar alinhados. Portanto, os fótons incidentes e os fótons que decaíram devem ser colineares, tal que, os quadrimomentos de todos os fótons são mutuamente ortogonais, $p_i^\mu p_{j\mu} = 0$. Considerando que estes quadrimomentos são proporcionais a um p_0^μ , satisfazendo $p_0^2 = 0$, podemos escrever $p_i^\mu = p_i p_0^\mu$, de modo que, $p_i^\mu p_{j\mu} = p_i p_j p_0^2 = 0$, onde p_i agora são coeficientes escalares ao invés de quadrimomentos. Consideraremos a condição de transversalidade da polarização dos quadrivetores usual, ou seja, $\epsilon_{i\mu} p_i^\mu = p_i \epsilon_{i\mu} p_0^\mu = 0$. Então, de acordo com o requerimento de colinearidade, temos também que $\epsilon_{i\mu} p_j^\mu = p_j \epsilon_{i\mu} p_0^\mu = 0$. Levando em conta estas considerações, encontramos

$$\begin{aligned} G_{\text{coll}}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= -\frac{e^4 c_{\mu\nu} p_0^\mu p_0^\nu}{60\pi^2 m^2} [g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} (9p_1^2 - 8p_2^2 - p_3^2 + 2p_1 p_2 + 16p_1 p_3 - 18p_2 p_3) \\ &\quad + g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} (4p_1^2 - 8p_2^2 + 4p_3^2 - 8p_1 p_2 + 16p_1 p_3 - 8p_2 p_3) \\ &\quad - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3} (p_1^2 + 8p_2^2 - 9p_3^2 + 18p_1 p_2 + 16p_1 p_3 - 2p_2 p_3)], \quad (3.25) \end{aligned}$$

Para obtermos a equação anterior, tomamos a equação (3.21) e trocamos μ_1 por μ_2 e μ_1 por μ_4 para obtermos $T_{c2}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$ e $T_{c3}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$, respectivamente, a partir de $T_{c1}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$, no entanto, sem mudar os índices nos momentos, de acordo com a prescrição dada na referencia [22]. Note que, como esperado, o termo divergente (3.22) desaparece, e portanto, o resultado apresentado na referencia [22] é recuperado. Por simplicidade omitimos os resultados vindos de $\sum_{i=1}^{24} T_{1gp_i}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

É importante notar também que, se computarmos $G_{\text{coll}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ efetuando a troca de μ_1 por μ_2 e μ_1 por μ_4 para obtermos $T_{c2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_{c3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ mudando também os índices nos momentos, obteremos um resultado nulo para a contribuição de $1/m^2$, o que contraria o resultado apresentado na referência [22].

3.2.2 Ação efetiva de Euler-Heisenberg

Agora iremos discutir a geração da ação de Euler-Heisenberg no contexto de violação de simetria de Lorentz, na primeira ordem de correção, $\alpha^2 = e^4/16\pi^2$. O fato interessante é que, para tal, é necessário calcular $G_c^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ sem levar em consideração o limite colinear. Assim, $T_{c2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_{c3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ são obtidos a partir de $T_{c1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ quando trocamos tanto os índices quanto os momenta, ou seja, $T_{c2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_{c1}^{\mu_2\mu_1\mu_3\mu_4}(p_2, p_1, p_3, p_4)$ assim como $T_{c3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_{c1}^{\mu_4\mu_2\mu_3\mu_1}(p_4, p_2, p_3, p_1)$. Procedendo desta forma, como esperado, todas as contribuições da ordem de $1/m^2$ desaparecem completamente.

Portando, podemos facilmente deduzir a ação emergente a partir de T_{c1} (3.21) cuja expressão é, de fato, a ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz, dada por

$$S_{c\text{EH}} = -\frac{\alpha^2}{90m^4} \int d^4x (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} (5F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - 14F^{\alpha\beta} F^{\nu\lambda} F_{\lambda\rho} F^{\rho\mu}) \\ + \frac{\alpha^2}{180m^4} \int d^4x c_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} (5F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - 14F_{\mu\nu} F^{\nu\lambda} F_{\lambda\rho} F^{\rho\mu}), \quad (3.26)$$

sendo $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ definido na equação (2.4), trocando o sinal de proporcionalidade por uma igualdade.

3.3 Método não perturbativo

Nesta seção vamos estudar a geração da ação de Euler-Heisenberg a partir do termo CPT par, a saber, $i\bar{\psi}c_{\mu\nu}\gamma^\mu(\partial^\nu + ieA^\nu)\psi$, da EDQ estendida através de um método não perturbativo. Para isso, vamos assumir invariância rotacional, em que o coeficiente $c_{\mu\nu}$ é reduzido ao produto de dois vetores tipo-tempo, ou seja, $c_{\mu\nu} = \kappa u_\mu u_\nu$, sendo $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ e κ o coeficiente que determina a escala da violação de Lorentz. Desta forma, a lagrangiana fermiônica de interesse é escrita como

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\tilde{\partial}_\mu\gamma^\mu - m - e\tilde{A}_\mu\gamma^\mu)\psi, \quad (3.27)$$

onde $\tilde{\partial}_\mu = (g_{\mu\nu} + c_{\mu\nu})\partial^\nu$ e $\tilde{A}_\mu = (g_{\mu\nu} + c_{\mu\nu})A^\nu$. Portanto, as regras de Feynman são agora o propagador do férmion

$$\longrightarrow = \frac{i}{\tilde{k} - m}, \quad (3.28)$$

com $\tilde{k} = \tilde{k}_\mu\gamma^\mu$ e $\tilde{k}_\mu = ((1 + \kappa)k_0, k_i)$, e o vértice férmion-fóton usual descrito em (2.9a). Com isso, a ação efetiva toma a forma

$$\begin{aligned} S_{eff}^{(4)} &= \frac{1}{4} \int d^4x \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4 e^{i(p_1+p_2+p_3+p_4)\cdot x} \\ &\times \frac{1}{6} G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \tilde{A}_{\mu_1}(p_1) \tilde{A}_{\mu_2}(p_2) \tilde{A}_{\mu_3}(p_3) \tilde{A}_{\mu_4}(p_4), \end{aligned} \quad (3.29)$$

sendo

$$\begin{aligned} G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 2T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + 2T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ &+ 2T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4), \end{aligned} \quad (3.30)$$

com

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \mu_1 \\ \mu_4 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{array} & \begin{array}{c} \text{p} \\ \text{p}_1 \\ \text{p}_{123} \\ \text{p}_{12} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 \end{array} = iT_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4) \\
 = -e^4 \text{tr} \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} S(\tilde{k})\gamma^{\mu_1} S(\tilde{k}_1)\gamma^{\mu_2} S(\tilde{k}_{12})\gamma^{\mu_3} S(\tilde{k}_{123})\gamma^{\mu_4}, \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \mu_2 \\ \mu_4 \\ \mu_1 \\ \mu_3 \end{array} & \begin{array}{c} \text{p} \\ \text{p}_2 \\ \text{p}_{123} \\ \text{p}_{12} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 \end{array} = iT_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4) \\
 = -e^4 \text{tr} \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} S(\tilde{k})\gamma^{\mu_2} S(\tilde{k}_2)\gamma^{\mu_1} S(\tilde{k}_{12})\gamma^{\mu_3} S(\tilde{k}_{123})\gamma^{\mu_4}, \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \mu_4 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{array} & \begin{array}{c} \text{p} \\ \text{p}_4 \\ \text{p}_{234} \\ \text{p}_{24} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\
 \end{array} = T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4) \\
 = -e^4 \text{tr} \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} S(\tilde{k})\gamma^{\mu_4} S(\tilde{k}_4)\gamma^{\mu_2} S(\tilde{k}_{24})\gamma^{\mu_3} S(\tilde{k}_{234})\gamma^{\mu_1}, \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

onde $S(\tilde{k}) = (\tilde{k} - m)^{-1}$, $\tilde{A}_\mu(p) = ((1 + \kappa)A_0(p), A_i(p))$, $\tilde{k}_1 = \tilde{k} + \tilde{p}_1$, $\tilde{k}_{12} = \tilde{k} + \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$, $\tilde{k}_{123} = \tilde{k} + \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3$ e assim por diante. O fator global 2 em (3.45), assim como na seção do método perturbativo, faz menção as duas orientações do loop de férmions. Note que podemos obter $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ a partir de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, quando realizamos as mudanças $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ e $\tilde{p}_1 \leftrightarrow \tilde{p}_2$, assim como $\mu_1 \leftrightarrow \mu_4$ e $\tilde{p}_1 \leftrightarrow \tilde{p}_4$, respectivamente, de modo que

$$T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_1^{\mu_2\mu_1\mu_3\mu_4}(p_2, p_1, p_3, p_4), \quad (3.34)$$

$$T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = T_1^{\mu_4\mu_2\mu_3\mu_1}(p_4, p_2, p_3, p_1). \quad (3.35)$$

Portanto, precisamos apenas calcular a expressão para $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = ie^4 \text{tr} \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{(\tilde{k} + m)\gamma^{\mu_1}(\tilde{k}_1 + m)\gamma^{\mu_2}(\tilde{k}_{12} + m)\gamma^{\mu_3}(\tilde{k}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}}{(\tilde{k}^2 - m^2)(\tilde{k}_1^2 - m^2)(\tilde{k}_{12}^2 - m^2)(\tilde{k}_{123}^2 - m^2)}. \quad (3.36)$$

Neste ponto, resolveremos o problema em duas partes, primeiramente trataremos o denominador da expressão usando parametrização de Feynman, para então calcularmos o traço do numerador.

A parametrização de Feynman nos permite combinar os denominadores de (3.36) de modo que podemos reescrever $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ como

$$T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 6ie^4 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_{12}} dx_3 \quad (3.37)$$

$$\times \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[(\not{\tilde{q}} + m)\gamma^{\mu_1}(\not{\tilde{q}}_1 + m)\gamma^{\mu_2}(\not{\tilde{q}}_{12} + m)\gamma^{\mu_3}(\not{\tilde{q}}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}]}{(\tilde{k}^2 - M^2)^4},$$

sendo as quantidades q^μ e q_I^μ , com $I = 1, 12, 123$, descritas pelas equações (3.15) e (3.16), respectivamente, enquanto que a massa M é dada por

$$M^2 = m^2 - \tilde{p}_1^2(1-x_1)x_1 - \tilde{p}_2^2x_{12}(1-x_{12}) - \tilde{p}_3^2x_{123}(1-x_{123})$$

$$- 2(1-x_{12})x_1\tilde{p}_1\tilde{p}_2 - 2(1-x_{123})x_1\tilde{p}_1\tilde{p}_3 - 2(1-x_{123})x_{12}\tilde{p}_2\tilde{p}_3, \quad (3.38)$$

com x_1, x_2 e x_3 sendo os parâmetros de Feynman, $x_{12} = x_1 + x_2$ e $x_{123} = x_1 + x_2 + x_3$.

Para efetuarmos as integrais nos momentos, vamos levar em conta que

$$\int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}_{\nu_1}\tilde{k}_{\nu_2}\cdots\tilde{k}_{\nu_p}}{(\tilde{k}^2 - M^2)^\alpha} = (1 + \kappa)^{-1} \int \frac{d^4\tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k}_{\nu_1}\tilde{k}_{\nu_2}\cdots\tilde{k}_{\nu_p}}{(\tilde{k}^2 - M^2)^\alpha}$$

$$= (1 + \kappa)^{-1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\nu_1}k_{\nu_2}\cdots k_{\nu_p}}{(k^2 - M^2)^\alpha}, \quad (3.39)$$

sendo $d^4\tilde{k} = d\tilde{k}_0 dk_1 dk_2 dk_3$ e $d\tilde{k}_0 = (1 + \kappa)dk_0$, ou seja, o efeito de violação de Lorentz está concentrado no fator de $(1 + \kappa)^{-1}$ e dentro do parâmetro de massa M . Então,

calculando o traço sob as matrizes de Dirac bem como as integrais, obtemos, até a ordem de $1/m^4$, os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= T_{1g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^4 T_{1ggi}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
&+ \sum_{i=1}^{12} T_{1gp_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^9 T_{1ppi}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

sendo

$$\begin{aligned}
T_{1g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= - \left[\frac{e^4}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^4}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \right] (1 + \kappa)^{-1} \\
&\times (g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} - 2g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

com $\epsilon = 4 - D$ e $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma - i\pi}$, e

$$\begin{aligned}
T_{1gg_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= - \frac{e^4}{240m^2\pi^2} (1 + \kappa)^{-1} \\
&\times [g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (13\tilde{p}_1^2 + 9\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 17\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 4\tilde{p}_2^2 - \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 8\tilde{p}_3^2) \\
&+ g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (-17\tilde{p}_1^2 - 16\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 - 18\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 - 16\tilde{p}_2^2 - 16\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 - 17\tilde{p}_3^2) \\
&+ g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} (8\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 17\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 4\tilde{p}_2^2 + 9\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 13\tilde{p}_3^2)], \tag{3.42a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1gg_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= - \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [48\tilde{p}_1^4 + (79\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 113\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 48\tilde{p}_2^2 \\
&+ 13\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 65\tilde{p}_3^2)\tilde{p}_1^2 + 40(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2)^2 + 74(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3)^2 + 9\tilde{p}_2^4 - 2(\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)^2 \\
&+ 27\tilde{p}_3^4 + 156\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3\tilde{p}_2^2 + 131\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 - 3\tilde{p}_2^2\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + (92\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 \\
&+ 27\tilde{p}_2^2 + 16\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)\tilde{p}_3^2 + \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2(159\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 39\tilde{p}_2^2 - 24\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 20\tilde{p}_3^2)], \tag{3.42b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1g_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [57\tilde{p}_1^4 + (110\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 118\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 92\tilde{p}_2^2 \\
&\quad + 71\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 96\tilde{p}_3^2)\tilde{p}_1^2 + 72(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2)^2 + 80(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3)^2 + 54\tilde{p}_2^4 + 72(\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)^2 \\
&\quad + 57\tilde{p}_3^4 + 180\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3\tilde{p}_2^2 + 177\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 108\tilde{p}_2^2\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 2(59\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 \\
&\quad + 46\tilde{p}_2^2 + 55\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)\tilde{p}_3^2 + \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2(177\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 108\tilde{p}_2^2 + 66\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 71\tilde{p}_3^2)], \\
\end{aligned} \tag{3.42c}$$

$$\begin{aligned}
T_{1g_4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} (1 + \kappa)^{-1} [27\tilde{p}_1^4 + (16\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 92\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 27\tilde{p}_2^2 \\
&\quad + 20\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 65\tilde{p}_3^2)\tilde{p}_1^2 - 2(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2)^2 + 74(\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3)^2 + 9\tilde{p}_2^4 + 40(\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)^2 \\
&\quad + 48\tilde{p}_3^4 + 156\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3\tilde{p}_2^2 + 159\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 39\tilde{p}_2^2\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + (113\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 \\
&\quad + 48\tilde{p}_2^2 + 79\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)\tilde{p}_3^2 + \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2(131\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 - 3(\tilde{p}_2^2 + 8\tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3) + 13\tilde{p}_3^2)]. \\
\end{aligned} \tag{3.42d}$$

As outras contribuições da equação (3.40), T_{1gk} e T_{1kk} , foram omitidas por questão de brevidade e note que adotamos regularização dimensional. O limite colinear pode ser imposto, da mesma maneira como foi feito na seção (3.2), e desta forma obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
G_{\text{coll}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{120m^2\pi^2} \tilde{p}_0^2 (1 + \kappa)^{-1} \\
&\quad \times [g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (9p_1^2 - 8p_2^2 - p_3^2 + 2p_1p_2 + 16p_1p_3 - 18p_2p_3) \\
&\quad + g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (4p_1^2 - 8p_2^2 + 4p_3^2 - 8p_1p_2 + 16p_1p_3 - 8p_2p_3) \\
&\quad + g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} (-p_1^2 - 8p_2^2 + 9p_3^2 - 18p_1p_2 + 16p_1p_3 + 2p_2p_3)] \\
&\quad + \mathcal{O}(\tilde{p}_0^4) + \mathcal{O}(\tilde{p}_0^{\mu_i}). \\
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Quando expandimos até primeira ordem em κ , de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{p}_0^2(1 + \kappa)^{-1} &= [(p_0^0)^2(1 + \kappa)^2 - (p_0^i)^2](1 + \kappa)^{-1} \\ &= 2\kappa(p_0^0)^2 + \mathcal{O}(\kappa^2),\end{aligned}\quad (3.44)$$

recuperamos, através de um cálculo não perturbativo, o resultado perturbativo apresentado em (3.25) para o limite colinear.

Iremos agora discutir a geração da ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz, na primeira ordem de correção, $\alpha^2 = e^4/16\pi^2$. Para tal devemos calcular G (Eq. (3.30)) sem levar em conta o limite colinear. Então, como apontado no início desta secção, podemos obter T_2 e T_3 a partir de T_1 , quando trocamos tanto os índices descontraidos quanto os momentos, veja (3.34). Procedendo desta forma, obtemos,

$$\begin{aligned}G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= G_{gg}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{i=1}^6 G_{gp_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ &\quad + G_{pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4),\end{aligned}\quad (3.45)$$

sendo

$$\begin{aligned}G_{gg}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{180\pi^2 m^4}(1 + \kappa)^{-1} \\ &\quad \times [g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (7\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 7\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4 - 10\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4) \\ &\quad + g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (7\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 - 10\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4 + 7\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4) \\ &\quad + g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} (-10\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 + 7\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4 + 7\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4),\end{aligned}\quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}G_{gp_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_1\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{p}_4^{\mu_3} (10\tilde{p}_3^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 - 7(\tilde{p}_2^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + \tilde{p}_1^{\mu_4} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3)) \\ &\quad - 7\tilde{p}_3^{\mu_4} (\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 + \tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4) + 7(\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_4} + \tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_4}) \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4],\end{aligned}\quad (3.47a)$$

$$G_{gp2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_1\mu_3} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{p}_4^{\mu_2} (-7\tilde{p}_3^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 10\tilde{p}_2^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 - 7\tilde{p}_1^{\mu_4} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3) + \tilde{p}_3^{\mu_2} (7\tilde{p}_1^{\mu_4} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4 - 7\tilde{p}_2^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4) + 7\tilde{p}_1^{\mu_2} (\tilde{p}_3^{\mu_4} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4 - \tilde{p}_2^{\mu_4} \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4)], \quad (3.47b)$$

$$G_{gp3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_1\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{p}_4^{\mu_2} (7\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 - 7\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3) + \tilde{p}_3^{\mu_2} (-7\tilde{p}_4^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 10\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 - 7\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4) + 7\tilde{p}_1^{\mu_2} (\tilde{p}_4^{\mu_3} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 - \tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4)], \quad (3.47c)$$

$$G_{gp4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_2\mu_3} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{p}_4^{\mu_1} (-7\tilde{p}_3^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 - 7\tilde{p}_2^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 + 10\tilde{p}_1^{\mu_4} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3) + 7(\tilde{p}_3^{\mu_1} (\tilde{p}_2^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 - \tilde{p}_1^{\mu_4} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4) + \tilde{p}_2^{\mu_1} (\tilde{p}_3^{\mu_4} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 - \tilde{p}_1^{\mu_4} \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4))], \quad (3.47d)$$

$$G_{gp5}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_2\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [-7\tilde{p}_4^{\mu_1} (\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3 - \tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3) - \tilde{p}_3^{\mu_1} (7\tilde{p}_4^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + 7\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 - 10\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4) - 7\tilde{p}_2^{\mu_1} (\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4 - \tilde{p}_4^{\mu_3} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3)], \quad (3.47e)$$

$$G_{gp6}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_3\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [7\tilde{p}_4^{\mu_1} (\tilde{p}_3^{\mu_2} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 - \tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_3) + 7\tilde{p}_3^{\mu_1} (\tilde{p}_4^{\mu_2} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 - \tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_4) + \tilde{p}_2^{\mu_1} (-7\tilde{p}_4^{\mu_2} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_3 - 7\tilde{p}_3^{\mu_2} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_4 + 10\tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_3 \cdot \tilde{p}_4)], \quad (3.47f)$$

$$G_{pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} (1 + \kappa)^{-1} \times [\tilde{p}_2^{\mu_1} (7\tilde{p}_3^{\mu_2} \tilde{p}_4^{\mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_4} + (7\tilde{p}_4^{\mu_2} \tilde{p}_1^{\mu_3} - 10\tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_4^{\mu_3}) \tilde{p}_3^{\mu_4}) + \tilde{p}_3^{\mu_1} (7\tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_4^{\mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_4} + \tilde{p}_4^{\mu_2} (7\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_4} - 10\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_4})) + \tilde{p}_4^{\mu_1} (\tilde{p}_3^{\mu_2} (7\tilde{p}_1^{\mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_4} - 10\tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_4}) + 7\tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_2^{\mu_3} \tilde{p}_3^{\mu_4})], \quad (3.48)$$

com $\tilde{p}_4 = -\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 - \tilde{p}_3$. Observamos que todas as contribuições da ordem de $1/m^2$ desaparecem completamente, como esperado, e que portanto, não há o efeito de divisão de fótons no vácuo. De fato, as ações de Euler-Heisenberg são todas proporcionais a ordem de $1/m^4$ na primeira ordem de correção.

Portanto, considerando os resultados (3.30), a ação efetiva (3.29) toma a forma

$$S_{\text{EH}} = -\frac{\alpha^2}{180m^4}(1 + \kappa)^{-1} \int d^4x \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4 e^{i(p_1+p_2+p_3+p_4)\cdot x} G(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (3.49)$$

sendo

$$G(p_1, p_2, p_3, p_4) = G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \tilde{A}_{\mu_1}(p_1) \tilde{A}_{\mu_2}(p_2) \tilde{A}_{\mu_3}(p_3) \tilde{A}_{\mu_4}(p_4), \quad (3.50)$$

de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{5}{3} \tilde{F}_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\mu\nu}(p_2) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_3) \tilde{F}^{\lambda\rho}(p_4) + \frac{5}{3} \tilde{F}_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\mu\nu}(p_3) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_2) \tilde{F}^{\lambda\rho}(p_4) \\ &+ \frac{5}{3} \tilde{F}_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\mu\nu}(p_4) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_2) \tilde{F}^{\lambda\rho}(p_3) - \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(p_2) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_3) \tilde{F}^{\rho\mu}(p_4) \\ &- \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(p_2) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_4) \tilde{F}^{\rho\mu}(p_3) - \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(p_3) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_2) \tilde{F}^{\rho\mu}(p_4) \\ &- \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(p_3) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_4) \tilde{F}^{\rho\mu}(p_2) - \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(p_4) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_2) \tilde{F}^{\rho\mu}(p_3) \\ &- \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(p_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(p_4) \tilde{F}_{\lambda\rho}(p_3) \tilde{F}^{\rho\mu}(p_2), \end{aligned} \quad (3.51)$$

com $\tilde{F}^{\mu\nu}(p_1) = \tilde{p}_1^\mu \tilde{A}^\nu(p_1) - \tilde{p}_1^\nu \tilde{A}^\mu(p_1)$, e assim sucessivamente. Então, invertendo a transformada de Fourier na expressão (3.49), a ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz torna-se

$$S_{\text{EH}} = -\frac{\alpha^2}{180m^4}(1 + \kappa)^{-1} \int d^4x (5\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\lambda\rho} \tilde{F}^{\lambda\rho} - 14\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\lambda} \tilde{F}_{\lambda\rho} \tilde{F}^{\rho\mu}), \quad (3.52)$$

onde agora $\tilde{F}^{\mu\nu} = \tilde{\partial}^\mu \tilde{A}^\nu(x) - \tilde{\partial}^\nu \tilde{A}^\mu(x)$. A ação acima, bem como a ação encontrada em (3.26), são de certa forma não usuais, muito embora relembram a ação de Euler-Heisenberg convencional [60]. A partir das expressões (3.52) e (3.26) (ou das equações (3.40)) estamos aptos a calcular algumas amplitudes de espalhamento de interesse na presença de violação de simetria de Lorentz.

É válido mencionar aqui, a Lagrangiana da equação acima é o termo dominante da expansão da lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg na aproximação de campo fraco, que, expressa em termos do tensor dual $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho}$ e do campo crítico $E_c = m^2c^3/\hbar e = 1.3 \times 10^{16}$ V/cm, pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(2)} = \frac{\aleph}{16}(1 + \kappa)^{-1}(4\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\lambda\rho}\tilde{F}^{\lambda\rho} + 7\tilde{F}_{\mu\nu}*\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\lambda\rho}*\tilde{F}^{\lambda\rho}), \quad (3.53)$$

sendo

$$\aleph = \frac{2\alpha^2\hbar^3}{45m^4c^5} = \frac{\alpha}{90\pi E_c^2}, \quad (3.54)$$

com $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ (note que restituímos \hbar and c). Neste limite, os campos elétricos e magnéticos E e B são fracos em comparação com o campo crítico E_c . De fato, o limite $E \ll E_c$ é essencial para a validade da lagrangiana efetiva, além de impor severas restrições à produção de pares (elétron-pósitron). Uma discussão mais completa pode ser vista em [108].

Enquanto a expressão acima (3.53) é suficiente para analisar o diagrama caixa (quatro fótons), para mais pernas externas, podemos inferir a partir da lagrangiana efetiva de Euler-Heisenberg as outras expressões, como por exemplo, o diagrama hexágono (seis fótons),

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}^{(3)} = -\frac{\xi}{64}(1 + \kappa)^{-1}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}(8\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\lambda\rho}\tilde{F}^{\lambda\rho} + 13\tilde{F}_{\mu\nu}*\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\lambda\rho}*\tilde{F}^{\lambda\rho}), \quad (3.55)$$

sendo

$$\xi = \frac{32\pi\alpha^3\hbar^6}{315m^8c^{10}} = \frac{2\alpha}{315\pi E_c^4}. \quad (3.56)$$

Em particular, a lagrangiana (3.55) é a responsável pela primeira contribuição não nula para a divisão de fótons em um campo magnético externo (constante e espacialmente uniforme) \bar{B} [109, 110], em que $\bar{B} \sim B_c = m^2c^3/\hbar e = 4.42 \times 10^{13}$ G

(i.e. um campo intenso). O limite de campos magnéticos muito intensos ($B \gg B_c$) também é interessante, contudo, deve ser levado em conta a lagrangiana de Euler-Heisenberg completa. Acreditamos que a versão munida de violação de simetria de Lorentz desta lagrangiana efetiva seja semelhante à sua forma original, exceto pelo parâmetro de violação. No entanto isto será confirmado em um trabalho futuro.

Em geral, cálculos envolvendo violação de simetria de Lorentz são realizados na primeira ordem do coeficiente que controla a violação. Então, expandindo a ação (3.52) até primeira ordem em obtemos

$$\begin{aligned}
S_{\text{EH}} = & -\frac{\alpha^2}{180m^4} \int d^4x (5F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - 14F_{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F^{\rho\mu}) \\
& -\frac{\alpha^2}{90m^4} \int d^4x (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}(5F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - 14F^{\alpha\beta}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F^{\rho\mu}) \\
& +\frac{\alpha^2}{180m^4} \int d^4x c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}(5F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - 14F_{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F^{\rho\mu}) + \mathcal{O}(c_{\mu\nu}^2),
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde foi introduzido o coeficiente $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, dado pela equação (2.4) substituindo o sinal de proporcionalidade por uma igualdade.

Note que a ação acima (Eq. (3.57)), obtida através de um cálculo não perturbativo, recupera aquela encontrada perturbativamente (Eq. (3.26)), contudo, para uma determinada condição imposta no coeficiente de violação, enquanto que a ação obtida perturbativamente é válida para um coeficiente genérico.

Capítulo 4

Eletrodinâmica quântica com extensão de Hořava-Lifshitz

Neste capítulo estudaremos a possibilidade de restauração de simetria na extensão da eletrodinâmica quântica de Hořava-Lifshitz com o expoente crítico $z = 3$, em $(3 + 1)$ -dimensões através de correções radiativas de um loop. Tais correções foram obtidas usando o método da expansão derivada e o uso de regularização dimensional só foi requerido nas componentes espaciais. O procedimento de renormalização por composição foi usado, a fim de tratarmos as divergências encontradas, e uma restrição na carga elétrica renormalizada foi encontrada como condição necessária para a restauração de simetria.

4.1 Introdução

No início do século XX, dois cenários teóricos distintos emergiram. Um destes cenários, a teoria da relatividade geral de Einstein, trata de explicar a gravidade como uma consequência da estrutura do espaço-tempo. O outro cenário, a mecânica quântica, apresenta um formalismo radicalmente diferente, descrevendo efeitos em escala quântica como funções de probabilidade. Ambos os cenários provaram-se eficazes na descrição dos fenômenos dentro de seus respectivos domínios de validade.

Contudo, alguns problemas fundamentais relacionados ao universo primordial, tais como buracos negros, dentre outros, requerem uma conciliação entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade geral, isto é, uma descrição quântica da gravitação. A teoria de cordas, um dos principais candidatos a fornecer uma descrição quântica para a gravidade, foi inicialmente estudada na década de 1960 como uma teoria para a descrição da força forte, sendo abandonada após o desenvolvimento da cromodinâmica quântica (CDQ). Posteriormente foi notado que, as muitas propriedades que fizeram a teoria de cordas ser abandonada na descrição da força forte, a tornam um candidato promissor na descrição de uma gravitação quântica.

Há muitas indicações sugerindo que a teoria de cordas seja rica o suficiente para conter respostas para muitas questões, tais como o paradoxo da informação ou a interpretação estatística da entropia dos buracos negros. Dada a riqueza da teoria de cordas, é possível adotar uma perspectiva em que tal teoria não seja uma candidata a uma teoria única do universo, mas sim uma extensão lógica e completa da teoria de quântica de campos. Dentro deste ponto de vista, parece natural pensar que há um cenário em que efeitos quânticos gravitacionais em $(3+1)$ -dimensões possam ser estudados de maneira autocontida.

Com base nisto, Hořava propôs um novo modelo de gravidade [111] que inclui uma anisotropia entre espaço e tempo. Tal anisotropia é comum em sistemas de matéria condensada [112, 113, 114, 115, 116, 117], em que o grau de anisotropia é controlado por um parâmetro z chamado de “expoente crítico”. A teoria é então construída de modo a ser compatível com o escalonamento anisotrópico da forma

$$\vec{x} \rightarrow b\vec{x}, \quad t \rightarrow b^z t, \quad (4.1)$$

e assim, medimos as dimensões canônicas de todos os objetos em termos do momento espacial. Em particular, a anisotropia do espaço-tempo reflete nas dimensões de massa das coordenadas espacial e temporal, de modo que

$$[\vec{x}] = -1, \quad [t] = -z, \quad (4.2)$$

e conseqüentemente a simetria de Lorentz é recuperada no caso em que $z = 1$.

O grande obstáculo à construção de uma teoria quântica para a gravidade reside no fato de que a teoria de Einstein para a gravitação em $(3 + 1)$ -dimensões é não renormalizável, visto que a dimensão de massa da constante de acoplamento é $[G_N] = -2$ e que a cada ordem de loop a divergência da teoria aumenta. Contudo, modelos de gravidade do tipo Hořava-Lifshitz tornam-se renormalizáveis, via contagem de potência, em $z = 3$ [118], devido à uma melhoria no comportamento UV da teoria, pelo menos a curtas distâncias. O preço a ser pago é a não invariância relativística da teoria a curtas distâncias. De fato, muitos desenvolvimentos em teorias de cordas sugerem que o abandono da invariância de Lorentz como uma simetria fundamental pode ser razoável, uma vez que o espaço em si é visto como uma propriedade emergente da teoria.

Após o trabalho seminal publicado pelo Hořava, muitos estudos se iniciaram

dentro do contexto da gravidade de Horava-Lifshitz [119, 120, 121], buracos negros [122, 123, 124, 125], cosmologia [126, 127, 128, 129, 130] dentre outros.

4.2 EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz

A EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz é, assim como o modelo da gravidade de Hořava-Lifshitz, um modelo baseado em uma anisotropia entre as componentes espaciais e temporal. Muito embora tal extensão da EDQ não tenha sido extensivamente estudada, como no caso da gravidade de Hořava-Lifshitz, o modelo é promissor, visto que tal provém novas interações renormalizáveis, devido à presença de derivadas superiores que promovem uma melhoria no comportamento ultravioleta (UV) do propagador de partícula.

Recentemente vários estudos foram realizado na extensão da EDQ de Lifshitz com $z = 2$, tais como correções de um loop, onde foi verificado que a restauração dinâmica de simetria ocorre em baixas energias pelo menos para alguns casos [131]. O potencial efetivo foi também estudado em [132, 133, 134], assim como seus efeitos em temperatura finita [135] e a dependência de gauge [136]. Extensões supersimétricas do modelo de Wess-Zumino com termos aditivos tipo Hořava-Lifshitz podem ser visto em [137, 139]. Aspectos gerais acerca do grupo de renormalização [140], da renormalizabilidade de teorias escalares [141, 142], da eletrodinâmica clássica [143], da teoria de Chern-Simons [144], também foram estudados, bem como o efeito Casimir para uma teoria de campo escalar [145]. Modificações do tipo Hořava-Lifshitz nos modelos CP^{N-1} e sigma não linear foram estudadas em [146] e [147],

respectivamente, assim como EDQ com extensões de Hořava-Lifshitz em cinco dimensões [148].

4.2.1 EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 2$

A EDQ escalar e fermiônica, com extensão de Hořava-Lifshitz e expoente crítico $z = 2$, foi primeiro estudada em [131]. A sua lagrangiana possui a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}F_{0i}F_{0i} + \frac{a_1^2}{4}F_{ij}\Delta F_{ij} + D_0\phi(D_0\phi)^* - a_2^2D_iD_j\phi(D_iD_j\phi)^* - m^4\phi\phi^* + \\ & + \bar{\psi}[i\gamma^0D_0 + (ia_3\gamma^iD_i)^2 - m^2]\psi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

No presente modelo a lagrangiana possui dimensão de massa $d = 5$ e as dimensões de massa dos parâmetros da teoria são as seguintes:

$$[A_j] = \frac{1}{2}, [A_0] = [\psi] = \frac{3}{2}, [e] = \frac{1}{2}, [m] = 1, \quad (4.4)$$

e a teoria é invariante perante a simetria de gauge $U(1)$, isto é $\phi \rightarrow e^{ie\xi}\phi$, $\phi^* \rightarrow e^{-ie\xi}\phi^*$, $\psi \rightarrow e^{ie\xi}\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-ie\xi}$ e $A_{0,i} \rightarrow A_{0,i} + \partial_{0,i}\xi$.

Através do estudo das correções radiativas do setor escalar da lagrangiana acima, foi observado a recuperação da covariância de Lorentz do setor de Maxwell (no limite de baixas energias e sob algumas relações especiais entre os parâmetros da teoria), cuja ação pode ser rescrita como

$$S_{AA} = -\frac{1}{2}(1 + \alpha)(a_1Z_2)^2 \int dt d^d x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

onde α e Z_2 são os coeficientes associados às correções radiativas. Contudo, o resultado acima é válido apenas se $d = 8n + r$, onde n um inteiro não negativo e

$r \in (0, 2)$. Dessa forma, a condição exclui as dimensões $d = 2$ e $d = 3$, ou seja, as dimensões do espaço-tempo $D = 3$ e $D = 4$, respectivamente.

Foi também mostrado que a lagrangiana de Maxwell não é corrigida pelas correções radiativas advindas do setor fermiônico, para qualquer dimensão arbitrária d . Em um modelo similar à lagrangiana (4.3), esse resultado também foi encontrado em [148], dentro do estudo das correções radiativas em $D = 5$ dimensões do espaço-tempo. A razão fundamental pela qual estas contribuições são nulas é o fato de que, como acontece em uma teoria não relativística usual, a contribuição de um loop fermiônico fechado com pelo menos duas linhas, pode ser decomposta em uma soma de dois termos onde cada um deles possui polos no mesmo semi-plano da variável k_0 .

Contudo, para o setor escalar, as correções radiativas são não nulas, tal que podemos escrever

$$S_{\phi^*\phi} = \int dt d^d x \phi^* [\alpha_1 - m^4 + (-1 + \alpha_2)\partial_0^2 + \alpha_3 m^2 \Delta] \phi, \quad (4.6)$$

onde α_1 , α_2 e α_3 são as constantes associadas às correções radiativas. Após um adequado escalonamento nos campos e derivadas da lagrangiana acima, assim como na lagrangiana de Maxwell (4.5), a restauração da covariante de Lorentz, e por conseguinte, a restauração da simetria de Lorentz, pode ser obtida, contudo, quando $\frac{e^2}{m} \approx 111$. Apesar dessa expressão ser positiva, e portanto, a constante de acoplamento ser real, ela possui um valor muito grande. Para que a teoria de perturbação empregada nos cálculos das correções radiativas seja consistente, deveríamos ter $\frac{e^2}{m} < 1$. Portanto, para a EDQ escalar de Hořava-Lifshitz $z = 2$, a restauração da simetria de Lorentz torna-se inviável.

Por fim, as correções radiativas para o setor espinorial apresentam a seguinte

correção à lagrangiana de Dirac:

$$\Sigma(k) = -ie^2 \frac{d-3}{\Gamma(d/2)} m^{d-4} \csc\left(\frac{d\pi}{2}\right) \pi^{1-d/2} 2^{-3d/2} \bar{\psi} \left[\frac{d-2}{4} \gamma^0 \partial_0 + \frac{m^2}{2} + \mathcal{O}(\partial^2) \right] \psi. \quad (4.7)$$

Note que, em $d = 3$ temos que $\Sigma(k) = 0$. Portanto, não há geração da ação de Dirac e, conseqüentemente, não há possibilidade de restauração de simetria de Lorentz, para a EDQ fermiônica de Hořava-Lifshitz $z = 2$.

Um outro aspecto importante que merece ser abordado é a questão da anomalia Adler-Bell-Jackiw (ABJ), que implica na quebra de simetria quiral. No contexto da extensão de Horava-Lifshitz da EDQ, a anomalia ABJ foi estudada nos trabalhos [149, 150, 151]. Em [149] mostrou-se que no caso de um z genérico par, isto é, da forma $z = 2n$ com $n \in \mathbb{N}$, as potenciais anomalias somente são não nulas se a temperatura não for nem zero e nem infinita. Enquanto que em [150, 151] mostrou-se que no caso de uma teoria de Lifshitz quadri-dimensional para férmions sem massa, as contribuições dos campos de gauge e métricos para a anomalia axial com um z genérico são idênticas ao caso relativístico.

Outro interessante estudo da EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz $z = 2$ é a inclusão, também, na lagrangiana de termos com expoente crítico $z = 1$. Estudos desta natureza já foram realizados na literatura, por exemplo em [152], cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F_{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} (M^2 - \Delta) F_{ij} + \bar{\psi} (iD_0 \gamma_0 - iMD_k \gamma_k - D_k D_k - m^2) \psi. \quad (4.8)$$

Após adicionarmos as correções radiativas à lagrangiana de partida, e efetuarmos um adequado escalonamento nos campos e derivadas, a lagrangiana acima pode ser

seja rescrita como

$$M^{-1}\mathcal{L}_{IR} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\left[\gamma^0\partial_0 - \left(1 + \frac{\delta v}{2}\right)\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial}\right]\psi, \quad (4.9)$$

onde δv é o coeficiente que condensa todas as correções radiativas. O coeficiente δv pode ser estimado como sendo da ordem de $\delta v \approx 10^{-3}$, que faz dele fenomenologicamente não realístico. O ponto realmente interessante neste modelo é a sua conexão como o MPE, uma vez que o coeficiente δv pode ser relacionado ao coeficiente $c^{\mu\nu}$ através da seguinte relação:

$$2c_{ij} = \delta v\delta_{ij} \text{ ou } \delta v = \frac{2}{3}\text{tr}(c_{ij}). \quad (4.10)$$

Na próxima subseção, apresentaremos a extensão da EDQ de Horava-Lifshitz, com expoente crítico $z = 3$, em seguida calcularemos as correções radiativas do modelo e a sua renormalização. Finalmente, também levantaremos a questão da restauração da simetria de Lorentz para o modelo.

4.2.2 EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$

Na próxima seção, estudaremos as correções radiativas à lagrangiana da EDQ com extensão de Horava-Lifshitz $z = 3$ [10], cuja expressão é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}\Delta^2F^{ij} + \bar{\psi}\left[i\gamma^0(\partial_0 - ieA_0) + (i\gamma^i(\partial_i - ieA_i))^3 - m^3\right]\psi, \quad (4.11)$$

onde $\Delta = \partial_i\partial^i$. A ação correspondente é invariante de gauge sob as seguintes transformações:

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-ie\alpha}\bar{\psi}, \quad A_{0,i} \rightarrow A_{0,i} + \partial_{0,i}\alpha, \quad (4.12)$$

e as dimensões de massa, neste modelo, são

$$[A_i] = 0, [A_0] = 2, [m] = [e] = 1, \text{ e } [\psi] = \frac{3}{2}. \quad (4.13)$$

Para um cálculo explícito das correções de um loop precisamos obter as regras de Feynman do presente modelo. A fim de obter o propagador do fóton e mantê-lo estritamente diagonal, o seguinte fixador de gauge foi usado:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}[\Delta^{-1}\partial_0 A^0 + \Delta\partial_i A^i]^2. \quad (4.14)$$

Logo, as regras de Feynman do modelo são

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{k} \end{array} = \frac{i}{\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i k^2 - m^3} = i \frac{\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i k^2 + m^3}{k_0^2 + k^6 - m^6} \quad (4.15a)$$

$$\begin{array}{c} o \\ \text{wavy } p \\ o \end{array} = -\frac{ip^4}{p_0^2 + p^6} \quad (4.15b)$$

$$\begin{array}{c} i \\ \text{wavy } p \\ j \end{array} = -\frac{ig_{ij}}{p_0^2 + p^6} \quad (4.15c)$$

$$\begin{array}{c} o \\ \text{wavy } p \\ \swarrow k \quad \searrow q \end{array} = -i(2\pi)^4 \delta^4(p+k-q) e\gamma^0 \quad (4.15d)$$

$$\begin{array}{c} m \\ \text{wavy } p \\ \swarrow k \quad \searrow q \end{array} = -i(2\pi)^4 \delta^4(p+k-q) (e\gamma^m k_i^2 + 2e\gamma^m k_i p^i + e\gamma^m p_i^2 + e\gamma^i \gamma^m k_i \gamma^k p_k + 2e\gamma^k p^m p_k) = -iV_3^m(k, p). \quad (4.15e)$$

$$\begin{array}{c} m \quad n \\ \text{wavy } p \quad \text{wavy } t \\ \swarrow k \quad \searrow q \end{array} = -i(2\pi)^4 \delta^4(p+k+t-q) (-2e^2 g^{mn} \gamma^i (p+t)_i - 4e^2 g^{mn} \gamma^i k_i + e^2 \gamma^m \gamma^j \gamma^n t_j - e^2 \gamma^n \gamma^j \gamma^m p_j - e^2 \gamma^m \gamma^j \gamma^n k_j - e^2 \gamma^n \gamma^j \gamma^m k_j) = -iV_4^{mn}(k, p, t). \quad (4.15f)$$

$$\begin{array}{c} m \quad n \quad j \\ \text{wavy } p \quad \text{wavy } t \quad \text{wavy } r \\ \swarrow k \quad \searrow q \end{array} = -2ie^3 (2\pi)^4 \delta^4(p+k+t+r-q) (g^{jn} \gamma^m + g^{jm} \gamma^n + g^{mn} \gamma^j) = -iV_5^{mnj}(k, p, t, r) \quad (4.15g)$$

4.3 Correções radiativas da EDQ de Horava-Lifshitz

Agora, de posse das regras de Feynman (4.15), iremos calcular as correções de um loop para os propagadores do fóton e do férmion. Para o propagador do

fóton, temos os seguintes diagramas a serem calculados:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: A circle with a wavy line on the left and a wavy line on the right. The top arc is labeled } k-p \text{ and the bottom arc is labeled } k. \\
 \hline
 \text{Diagram 2: A circle with a wavy line on the bottom. The bottom arc is labeled } p.
 \end{array}
 = i\Pi_1^{00}(p) + i\Pi_2^{0i}(p) + i\Pi_3^{ij}(p) \quad (4.16)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: A circle with a wavy line on the left and a wavy line on the right. The top arc is labeled } k-p \text{ and the bottom arc is labeled } k. \\
 \hline
 \text{Diagram 2: A circle with a wavy line on the bottom. The bottom arc is labeled } p.
 \end{array}
 = i\Pi_4^{ij}(p). \quad (4.17)$$

Inicialmente, nosso interesse é obter uma correção à lagrangiana de Maxwell. O tadpole apresentado acima (4.17) não contribui para a lagrangiana de Maxwell, visto que sua construção se dá a partir do vértice $-iV_4^{mn}(k, p, t)$, que contém somente um momento externo, e portanto não é possível construir um $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

A autoenergia do fóton (Eq. (4.16)) nos dá três contribuições, uma com dois campos de gauge A_i , outro com um A_i e um A_0 e finalmente outro com dois campos de gauge A_0 . Estas contribuições são as seguintes:

$$i\Pi_1^{00}(p) = -e^2 \text{tr} \mu^{3-d} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} \gamma^0 S(k) \gamma^0 S(k-p), \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 i\Pi_2^{0i}(p) &= -\text{tr} \mu^{3-d} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} [V_3^i(k-p, p) S(k) e\gamma^0 S(k-p) \\
 &\quad + e\gamma^0 S(k) V_3^i(k, -p) S(k-p)] \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

$$i\Pi_3^{ij}(p) = -\text{tr} \mu^{3-d} \int \frac{dk_0 d^d k}{(2\pi)^{d+1}} V_3^i(k-p, p) S(k) V_3^j(k, -p) S(k-p). \quad (4.20)$$

A partir de agora, $i\Pi_1^{00}(p)$ representará a parte de (4.18) que contribuirá para $F_{0i}F^{0i}$, ou seja, $i\Pi_1^{00}(p)$ conterà somente termos com dois momentos externos espaciais. Para tal, realizaremos uma expansão derivativa no momento externo contido no propagador do férmion da seguinte forma

$$S(k-p) = S(k) + S(k)\Lambda S(k) + S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k) + \dots, \quad (4.21)$$

onde

$$\Lambda = \gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i p^2 - 2\gamma^i p_i p \cdot k + \gamma^i p_i k^2 - \gamma^i k_i p^2 + 2\gamma^i k_i p \cdot k. \quad (4.22)$$

Após o cálculo do traço, desprezando os termos com integrando ímpar e passando para o espaço Euclidiano, obtemos

$$\begin{aligned} i\Pi_1^{00}(p) = & e^2 \mu^{3-d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int \frac{dk_0 dr}{(2\pi)^{d+1}} \frac{r^{d-1}}{(k_0^2 - r^2 - m^2)^4} \left[\frac{216k_0^2 r^{10} \bar{p}^2}{d} + \frac{32k_0^4 r^4 \bar{p}^2}{d} + \right. \\ & - \frac{32m^{12} r^4 \bar{p}^2}{d} + \frac{8m^6 r^{10} \bar{p}^2}{d} + \frac{40r^{16} \bar{p}^2}{d} + 4k_0^4 r^4 \bar{p}^2 - 4m^{12} r^4 \bar{p}^2 \\ & \left. - 8m^6 r^{10} \bar{p}^2 - 4r^{16} \bar{p}^2 \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde as coordenadas esféricas em d -dimensões foram utilizadas nas componentes espaciais do momento interno k_i . Finalmente, após as integrações, encontramos

$$i\Pi_1^{00}(p) = -\frac{i e^2 \mu^{3-d} 2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \bar{p}^2 g^{00}. \quad (4.24)$$

Através de um procedimento análogo, as quantidade $i\Pi_2^{0i}(p)$ e $i\Pi_3^{ij}(p)$, que de agora em diante representarão as partes de (4.19) e (4.20) que irão contribuir para $F_{0i} F^{0i}$, são obtidas. Contudo, para $i\Pi_2^{0i}(p)$ selecionaremos termos de (4.19) que contém um momento externo espacial e um momento externo temporal, enquanto que para $i\Pi_3^{ij}(p)$ selecionaremos termos de (4.20) que contém dois momentos externos temporais. Consequentemente temos

$$i\Pi_2^{0i}(p) = \frac{i e^2 \mu^{3-d} 2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} (p^0 p^i + p^i p^0), \quad (4.25)$$

$$i\Pi_3^{ij}(p) = -\frac{i e^2 \mu^{3-d} 2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} p_0^2 g^{ij}. \quad (4.26)$$

Como podemos ver, os coeficientes associados com as quantidades acima calculadas são os mesmos, e portanto é possível simplificar a soma das correções como

$$\Pi_1^{00}(p)A_0(p)A_0(-p) + \Pi_2^{0i}(p)A_0(p)A_i(-p) + \Pi_3^{ij}(p)A_i(p)A_j(-p) = \frac{1}{2}\alpha_1 F_{0i}^2, \quad (4.27)$$

com a correção α_1 sendo dada por

$$\alpha_1 = \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}. \quad (4.28)$$

As contribuições associadas com $F_{ij}F^{ij}$ emergem unicamente a partir de $\Pi_3^{ij}(p)$. A fim de obtermos $\Pi_3^{ij}(p)$, consideraremos na equação (4.20) apenas termos com dois momentos externos espaciais, que após o cálculo do traço e desprezando os termos com integrando ímpar, obtemos

$$\Pi_3^{ij}(p) = \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d} (d-2)(d+8) \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-1} \Gamma\left(\frac{1}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+2}{6}\right)}{9d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} (p^i p^j - \bar{p}^2 g^{ij}). \quad (4.29)$$

Com as correções calculadas, a lagrangiana munida das correções de um loop pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2}(1 + \alpha_1)F_{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}\alpha_2 m^4 F_{ij}F_{ij} \quad (4.30)$$

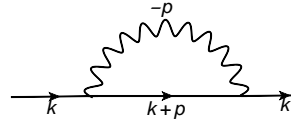
onde

$$\alpha_2 = \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d+2} (d-2)(d+8) \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma\left(\frac{1}{6} - \frac{d}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+2}{6}\right)}{9d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (4.31)$$

Note que as correções de um loop dadas pela extensão de Lifshitz da EDQ com $z = 3$ para a lagrangiana de Maxwell são ambas finitas.

O próximo passo é calcular as correções de um loop para a lagrangiana de Dirac. Temos agora mais dois gráfico a serem calculados, que são, como no caso

anterior, a autoenergia e o tadpole. Para a autoenergia do férmion temos duas contribuições, uma com dois vértices temporais e uma com dois vértices espaciais. Não há contribuições cruzadas visto que o propagador do fóton é estritamente diagonal. Estas contribuições são as seguintes:



$$= i\Sigma_1(k) + i\Sigma_2(k) \quad (4.32)$$

onde

$$i\Sigma_1(k) = -e^2 \mu^{3-d} \int \frac{dp_0 d^d p}{(2\pi)^{d+1}} \gamma^0 S(k+p) \gamma^0 D_{00}(-p), \quad (4.33)$$

$$i\Sigma_2(k) = -\mu^{3-d} \int \frac{dp_0 d^d p}{(2\pi)^{d+1}} V_3^i(k, p) S(k+p) V_3^j(k+p, -p) D_{ij}(-p). \quad (4.34)$$

De agora em diante $i\Sigma_1(k)$ será a parte de (4.33) que contribui para a correção da lagrangiana de Dirac. A fim de obtermos tal correção, devemos considerar somente termos que são lineares em k_0 e k_i . Portanto, $i\Sigma_1(k)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} i\Sigma_1(k) = & -e^2 \mu^{3-d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int \frac{dp_0 dr}{(2\pi)^{d+1}} \frac{m^3 r^{d+3}}{(p_0^2 - r^6 - m^6)(p_0^2 - r^6)} + \\ & + e^2 \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int \frac{dp_0 dr}{(2\pi)^{d+1}} \frac{r^{d-1}}{(p_0^2 - r^6 - m^6)^2 (p_0^2 - r^6)} \times \\ & \times \left(-\frac{2p_0^2 r^6}{d} k_i \gamma^i + \frac{2m^6 r^6}{d} k_i \gamma^i - \frac{4r^{12}}{d} k_i \gamma^i + \gamma^0 p_0^2 k_0 r^4 - p_0^2 k_i \gamma^i r^6 + \right. \\ & \left. + \gamma^0 m^6 k_0 r^4 + m^6 k_i \gamma^i r^6 + \gamma^0 k_0 r^{10} + k_i \gamma^i r^{12} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

tal que após a integração, obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k) = & \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d-1} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-3}}{9\Gamma(\frac{d}{2})} \left[3m^{-2} \gamma^0 k_0 \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right) \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{7}{6}\right) + \right. \\ & \left. - 3m \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right) + k_i \gamma^i \Gamma\left(\frac{d}{6} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{3}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Assim como no caso anterior, isto é, para a autoenergia do fóton, regularização dimensional e coordenadas esféricas em d -dimensões foram utilizadas nas componentes espaciais dos momentos internos k_i . Através de um procedimento similar, podemos encontrar a contribuição de $\Sigma_2(k)$ para a lagrangiana de Dirac, considerando apenas termos que são lineares em k_0 e k_i , dado por

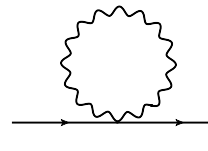
$$\begin{aligned} \Sigma_2(k) = & \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d-2} \pi^{\frac{1}{2}(-d-1)} m^{d-5}}{9\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \left[d\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right) \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{7}{6}\right) ((d+7)m^3 - 6\gamma^0 k_0) + \right. \\ & \left. + 2(d(d+6) - 38)m^2 k_i \gamma^i \Gamma\left(\frac{d}{6} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{3}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

e conseqüentemente, $\Sigma(k) = \Sigma_1(k) + \Sigma_2(k)$, tal que

$$\begin{aligned} \Sigma(k) = & \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d-2} \pi^{\frac{1}{2}(-d-1)} m^{d-5}}{9\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \times \\ & \times \left[\Gamma\left(\frac{d+4}{6}\right) \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{7}{6}\right) ((d+1)(d+7)m^3 - 6(d-1)\gamma^0 k_0) \right. \\ & \left. + 2(d(d+6) - 37)m^2 k_i \gamma^i \Gamma\left(\frac{d}{6} + 1\right) \Gamma\left(-\frac{d}{6} - \frac{3}{2}\right) \right] \\ = & \alpha_3 k_0 \gamma^0 + \alpha_4 m^2 k_i \gamma^i - \alpha_5 m^3. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como podemos ver, há uma divergência remanescente na parte espacial de $\Sigma(p)$, quando fixamos $d = 3$.

A contribuição do tadpole depende do vértice $-iV_4^{mn}(k, p, t)$ dado na equação (4.15f), pode ser escrita como



$$= -i\mu^{3-d} \int \frac{dp_0 d^d p}{(2\pi)^{d+1}} D_{ij}(p) V_4^{ij}(k, -p, p) = i\Sigma_3(k). \quad (4.39)$$

Substituindo o propagador em (4.15c) e o vértice, obtemos a seguinte integral a ser

solucionada:

$$i\Sigma_3(k) = e^2 \mu^{3-d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int \frac{dp_0 dr}{(2\pi)^{d+1}} \frac{r^{d-1}(2dk_i\gamma^i + 4k_i\gamma^i)}{p_0^2 - r^6 - M^6}. \quad (4.40)$$

Novamente aqui, regularização dimensional e coordenadas esféricas em d -dimensões foram usadas na parte espacial do momento interno k_i . Para solucionar as integrais usamos a prescrição de Feynman usual com o intuito de evitar os polos, obtendo

$$\Sigma_3(k) = \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d} (d+2) \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{d}{6}) \Gamma(\frac{d}{6}) (\frac{\mu}{M})^{3-d}}{3\Gamma(\frac{d}{2})} k_i \gamma^i = \alpha_6 m^2 k_i \gamma^i. \quad (4.41)$$

Portanto, a lagrangiana de Dirac munida das correções de um loop pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\bar{\psi}\psi} = \bar{\psi} [i\partial_0\gamma^0(1 + \alpha_3) + im^2\partial_i\gamma^i(\alpha_4 + \alpha_6) - m^3(1 + \alpha_5)] \psi \quad (4.42)$$

onde

$$\alpha_3 = -\frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d-1} (d-1) \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma(-\frac{d}{6} - \frac{7}{6}) \Gamma(\frac{d+4}{6})}{3\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (4.43a)$$

$$\alpha_4 = \frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d-1} (d(d+6) - 37) \pi^{\frac{1}{2}(-d-1)} m^{d-5} \Gamma(-\frac{d}{6} - \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{d}{6} + 1)}{9\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (4.43b)$$

$$\alpha_5 = -\frac{e^2 \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} m^{d-5} \Gamma(\frac{5}{6} - \frac{d}{6}) \Gamma(\frac{d+4}{6})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (4.43c)$$

$$\alpha_6 = \frac{e^2 2^{-d} (d+2) m^{-2} \pi^{-\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{d}{6}) \Gamma(\frac{d}{6}) (\frac{\mu}{M})^{3-d}}{3\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (4.43d)$$

Portanto, ao levarmos em conta essas correções para as lagrangianas de Maxwell e de Dirac, rescrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(1 + \alpha_1)F_{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}\alpha_2 m^4 F_{ij}F_{ij} \\ & + \bar{\psi} [i\partial_0\gamma^0(1 + \alpha_3) + im^2\partial_i\gamma^i(\alpha_4 + \alpha_6) - m^3(1 + \alpha_5)] \psi. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Realizando uma expansão em torno de $d = 3$ nos parâmetros (4.43), podemos ver claramente que há uma divergência em α_4 e α_6 , sendo estas contribuições emergentes da autoenergia e do tadpole do férmion, respectivamente. Veja as expressões resultantes abaixo:

$$\alpha_1 = \frac{2e^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{9\pi^{5/2}m^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.45a)$$

$$\alpha_2 = \frac{11e^2\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{27\pi^{5/2}m^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.45b)$$

$$\alpha_3 = -\frac{e^2\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{12\pi^{5/2}m^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.45c)$$

$$\alpha_4 = \frac{5e^2}{24\pi^2m^2\epsilon} - \frac{127e^2}{288\pi^2m^2} + A + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.45d)$$

$$\alpha_5 = -\frac{e^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{4\pi^{5/2}m^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.45e)$$

$$\alpha_6 = -\frac{5e^2}{2\pi^2m^2\epsilon} - \frac{2e^2}{m^2\pi^2} + B + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.45f)$$

onde

$$A = \frac{30e^2}{288\pi^2m^2} \ln\left(\frac{m^2e^\gamma}{2^{2/3}\pi\mu^2}\right) \quad (4.46a)$$

$$B = -\frac{5e^2}{4\pi^2m^2} \ln\left(\frac{M^2e^\gamma}{2^{2/3}\pi\mu^2}\right). \quad (4.46b)$$

4.4 Renormalização da EDQ de Horava-Lifshitz

As divergências acima obtidas serão tratadas através do método de renormalização conhecido como procedimento de composição [153, 154, 155, 156]. Para isso, inicialmente, escrevemos $\alpha_4 + \alpha_6 = \frac{1}{Z_2} + \alpha_F$, onde

$$\frac{1}{Z_2} = -\frac{55e^2}{24\pi^2m^2\epsilon} + A + B \quad (4.47)$$

e

$$\alpha_F = -\frac{703e^2}{288m^2\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.48)$$

Dessa forma, levando em conta as referências [153, 156], escrevemos $\psi = Z_2^{1/2}\psi_R$, tal que em (4.44), temos $m^2\bar{\psi}_R i\partial_i\gamma^i(1 + \alpha_F Z_2)\psi_R$. Agora, considerando $e = Z_2^{-1/2}e_R$, podemos escrever $\alpha_F Z_2 = \tilde{\alpha}_F$, onde

$$\tilde{\alpha}_F = -\frac{703e_R^2}{288m^2\pi^2} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.49)$$

Como consequência disso, $A^\mu = Z_2^{1/2}A_R^\mu$, de tal forma que podemos rescrever (4.44) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(1 + \alpha_1)Z_2 F_R^{0i} F_R^{0i} - \frac{1}{4}m^4\alpha_2 Z_2 F_R^{ij} F_R^{ij} \\ & + \bar{\psi}_R [i\partial_0\gamma^0(1 + \alpha_3)Z_2 + m^2 i\partial_i\gamma^i(1 + \alpha_F Z_2) - m^3(1 + \alpha_5)Z_2] \psi_R. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Agora, a fim de estabelecermos a covariância de Lorentz, levaremos em conta os escalonamentos

$$\partial_0 \rightarrow \frac{m^2\tilde{\alpha}_2^{1/4}}{(Z_2 + \tilde{\alpha}_1)^{1/2}}\partial_0, \quad (4.51a)$$

$$\partial_i \rightarrow \frac{1}{\tilde{\alpha}_2^{1/4}}\partial_i, \quad (4.51b)$$

$$A_R^0 \rightarrow \frac{m\tilde{\alpha}_2^{1/4}}{(Z_2 + \tilde{\alpha}_1)^{1/2}}A_R^0, \quad (4.51c)$$

$$A_R^i \rightarrow \frac{1}{m\tilde{\alpha}_2^{1/4}}A_R^i, \quad (4.51d)$$

$$\psi_R \rightarrow \frac{(Z_2 + \tilde{\alpha}_1)^{1/4}}{\tilde{\alpha}_2^{1/8}(Z_2 + \tilde{\alpha}_3)^{1/2}}\psi_R, \quad (4.51e)$$

onde $\tilde{\alpha}_i = Z_2\alpha_i$, tal que, por conseguinte, restabelecemos a dimensão de massa dos campos e derivadas de acordo com a EDQ usual. Assim, temos que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}m^2 F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + m^2\bar{\psi}_R(i\partial_0\gamma^0 + \lambda_1 i\partial_i\gamma^i - \lambda_2 m)\psi_R, \quad (4.52)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{(Z_2 + \tilde{\alpha}_1)^{1/2}}{\tilde{\alpha}_2^{1/2}(Z_2 + \tilde{\alpha}_3)} (1 + \tilde{\alpha}_F), \quad \lambda_2 = \frac{(Z_2 + \tilde{\alpha}_1)^{1/2}(Z_2 + \tilde{\alpha}_5)}{\tilde{\alpha}_2^{1/4}(Z_2 + \tilde{\alpha}_3)}. \quad (4.53)$$

Portanto, para restaurarmos a covariância de Lorentz devemos ter $\lambda_1 = 1$, tal que obtemos

$$\frac{e_R^2}{m^2} = \begin{cases} 2, 22045 \times 10^{-16} + \mathcal{O}(Z_2), \\ 4, 01808 + i0, 318381 + \mathcal{O}(Z_2), \\ 4, 01808 - i0, 318381 + \mathcal{O}(Z_2). \end{cases} \quad (4.54)$$

Note que, ao analisarmos a expressão (4.47), $Z_2 \cong -24\pi^2 m^2 \epsilon / 55e^2$, ou seja, $Z_2 = 0$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, que é na verdade a condição de composição utilizada nesta renormalização da EDQ de Hořava-Lifshitz $z = 3$. Dessa forma, temos $\frac{e_R^2}{m^2} \approx 10^{-16}$, ou seja, o valor estimado para a constante de acoplamento está de acordo com a teoria perturbação empregada para obtermos as correspondentes correções radiativas (dadas pelas Eqs. (4.45)).

4.5 Função de três pontos e o teorema de Furry

A função de três pontos é fácil de ser obtida, visto que, a extensão de Hořava-Lifshitz da EDQ é, assim como a EDQ usual, consistente com o teorema de Furry. Dentro deste contexto, o mesmo procedimento empregado na EDQ usual pode ser usado a fim de demonstrar a validade do teorema de Furry. Para um diagrama que consiste de um loop de férmions com três pernas externas de fótons, podemos ter as seguintes topologias descritas na Fig. (4.1).

É fácil ver que o propagador fermiônico dado pela equação (4.15a) obedece a

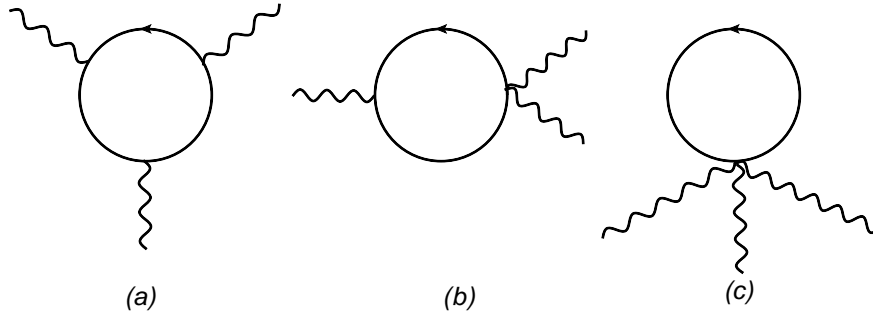


Figura 4.1: Funções de três pontos

relação (2.40), enquanto que os vértices (4.15d), (4.15e), (4.15f) e (4.15g) obedecem as seguintes relações

$$CV_3^0 C^{-1} = -(V_3^0)^T \quad (4.55a)$$

$$CV_3^m C^{-1} = -(V_3^m)^T \quad (4.55b)$$

$$CV_4^{mn} C^{-1} = (V_4^{mn})^T \quad (4.55c)$$

$$CV_5^{mnj} C^{-1} = -(V_5^{mnj})^T. \quad (4.55d)$$

Logo, é possível ver através de um procedimento análogo ao que foi feito para a EDQ usual que a contribuição dada pelo gráfico (a) da figura (4.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G_a &= (-1)^3 \text{tr}[S^T(-k_1)(V_3^{0,m})^T S^T(-k_2)(V_3^{0,n})^T S^T(-k_3)(V_3^{0,l})^T] \\ &= -\text{tr}[V_3^{0,l} S(-k_3) V_3^{0,n} S(-k_2) V_3^{0,m} S(-k_1)] = -G_a, \end{aligned} \quad (4.56)$$

que implica em $G_a = 0$. Para o gráfico (b) da figura (4.1) temos, da mesma forma, que

$$\begin{aligned} G_b &= (-1) \text{tr}[S^T(-k_1)(V_3^{0,m})^T S^T(-k_2)(V_4^{jn})^T] \\ &= -\text{tr}[V_4^{jn} S(-k_2) V_3^{0,m} S(-k_1)] = -G_b, \end{aligned} \quad (4.57)$$

o que implica também em $G_b = 0$. Por fim, o gráfico (c) da figura (4.1) nos mostra, analogamente, que

$$\begin{aligned} G_c &= (-1)\text{tr}[S^T(-k_1)(V_5^{mnj})^T] \\ &= -\text{tr}[V_5^{mnj}S(-k_1)] = -G_c, \end{aligned} \quad (4.58)$$

que nos dá $G_c = 0$.

Portanto, vemos que, os gráficos relativos às funções de 3-pontos para a extensão de Hořava-Lifshitz da EDQ com $z = 3$ anulam-se, o que é consistente com o teorema de Furry. A generalização do teorema da Furry para o presente modelo, isto é, o resultado nulo para uma função de n -pontos com n ímpar, segue de maneira direta a partir do uso das relações (4.55).

Devemos calcular também as correções radiativas para o vértice. Tais contribuições estão representadas diagramaticamente na figura (4.2). Um cálculo di-

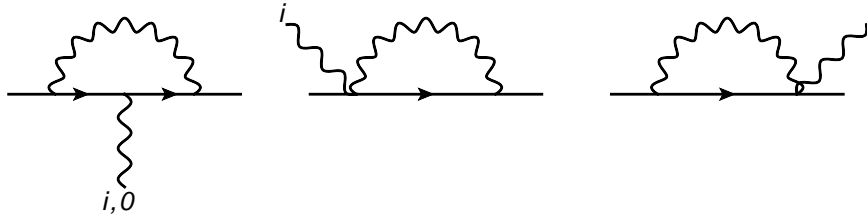


Figura 4.2: Correções radiativas para o vértice

reto através do mesmo procedimento que empregamos até então para o cálculo das correções radiativas para os propagadores pode ser feito, contudo podemos obter tais correções através da identidade de Ward-Takahashi, apresentada em (2.37). Desta

forma obtemos os seguintes resultados

$$\Lambda^0 = \alpha_3 \gamma^0 \quad (4.59)$$

$$\Lambda^i = (\alpha_4 + \alpha_6) m^2 \gamma^i, \quad (4.60)$$

com α_3 , α_4 e α_6 dados pelas equações (4.43a), (4.43b) e (4.43d).

Capítulo 5

Ação de Euler-Heisenberg com extensão de Hořava-Lifshitz

Neste capítulo apresentaremos os cálculos das correções radiativas para a função de quatro pontos, no contexto da EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$. Com esses cálculos, efetuaremos, posteriormente, a indução da ação efetiva de Euler-Heisenberg no presente contexto. Para tal, utilizaremos o método da expansão derivativa, bem como a regularização dimensional nas coordenadas espaciais do momento interno.

5.1 Função de quatro pontos

A lagrangiana que descreve o modelo de interesse é aquela apresentada em (4.11), e as regras que Feynman que usaremos para o desenvolvimento do cálculo

são aquelas descritas pelas equações (4.15).

Com o intuito de calcular as correções radiativas para a função de quatro pontos no contexto da EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$, além do diagrama de quatro pernas usual, devemos também calcular as contribuições não usuais, emergentes dos

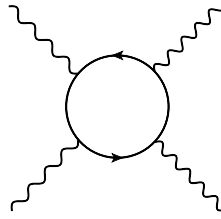


Figura 5.1: Correção radiativa usual para a função de 4-pontos

vértices modificados do modelo de Hořava-Lifshitz, apresentadas na figura (5.2).

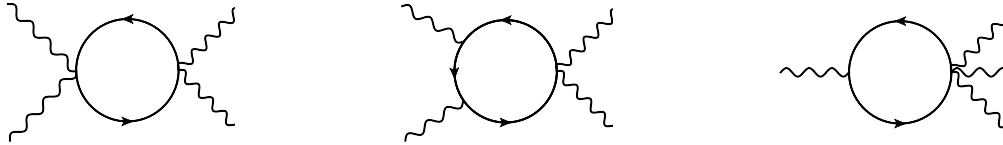


Figura 5.2: Correções radiativas não usuais para a função de 4-pontos

Podemos então escrever a ação efetiva da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{HL}}^{(4)} &= \int d^4x \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_4 e^{i(p_1+p_2+p_3+p_4)\cdot x} \\
 &\quad \times \frac{1}{6} G_{\text{HL}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) A_{\mu_1}(p_1) A_{\mu_2}(p_2) A_{\mu_3}(p_3) A_{\mu_4}(p_4)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

com

$$\begin{aligned}
 G_{\text{HL}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 2 T_{\text{HL1}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) + 2 T_{\text{HL2}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
 &\quad + 2 T_{\text{HL3}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4).
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

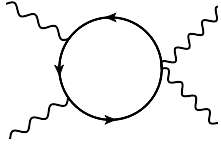
A quantidade $T_{HL1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, assim como $T_{HL2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_{HL3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, pode ser subdividida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T_{HL1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{1}{2}T_{HL11}^{mnjk}(p_1, p_2, p_3, p_4)\delta^{\mu_1m}\delta^{\mu_2n}\delta^{\mu_3j}\delta^{\mu_4k} \\
&+ \frac{1}{2}T_{HL12}^{\mu_1njk}(p_1, p_2, p_3, p_4)\delta^{\mu_2n}\delta^{\mu_3j}\delta^{\mu_4k} \\
&+ \frac{1}{3}T_{HL13}^{\mu_1\mu_2jk}(p_1, p_2, p_3, p_4)\delta^{\mu_3j}\delta^{\mu_4k} \\
&+ \frac{1}{4}T_{HL14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4). \tag{5.3}
\end{aligned}$$

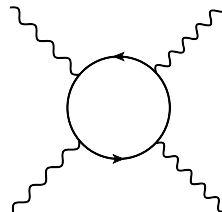
sendo

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \text{Diagram: A circle with two wavy lines on the left and two wavy lines on the right. Arrows on the circle indicate a clockwise flow.} \end{array} &= iT_{HL11}^{mnjk}(p_1, p_2, p_3, p_4), \\
&= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_4^{mn}(k, p_1, p_2)S(k_{12})V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4) \tag{5.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \text{Diagram: A circle with one wavy line on the left and three wavy lines on the right. Arrows on the circle indicate a clockwise flow.} \end{array} &= iT_{HL12}^{\mu_1njk}(p_1, p_2, p_3, p_4), \\
&= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_5^{njk}(k_1, p_2, p_3, p_4) + \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_5^{njk}(k_1, p_2, p_3, p_4) \tag{5.5}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= iT_{HL13}^{\mu_1\mu_2jk}(p_1, p_2, p_3, p_4), \\
&= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^0(k, p_1) S(k_1) V_3^0(k_1, p_2) S(k_{12}) V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4), \\
&\quad + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^0(k, p_1) S(k_1) V_3^n(k_1, p_2) S(k_{12}) V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4) \\
&\quad + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^n(k, p_1) S(k_1) V_3^0(k_1, p_2) S(k_{12}) V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4) \\
&\quad + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^m(k, p_1) S(k_1) V_3^n(k_1, p_2) S(k_{12}) V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4)
\end{aligned} \tag{5.6}$$



$$\begin{aligned}
&= iT_{HL14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^0(k, p_1) S(k_1) V_3^0(k_1, p_2) S(k_{12}) V_3^0(k_{12}, p_3) \\
&\quad \times S(k_{123}) V_3^0(k_{123}, p_4) + i\bar{T}_{HL14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, p_3, p_4),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde $S(k) = i(\gamma^0 k_0 + \gamma^i k_i k^2 - m^3)^{-1}$ e as integrais de loop em $i\bar{T}_{HL14}$ estão descritas no apêndice (A). Assim como no capítulo (3), o fator 2 presente em (5.2) faz menção às duas possíveis orientações do loop de férmions, enquanto que as contribuições T_{HL1} , T_{HL2} e T_{HL3} estão relacionadas aos canais de Mandelstam.

Vamos solucionar inicialmente a quantidade iT_{HL11} (eq.(5.4)). Para tal, usaremos o método da expansão derivativa [48, 49, 50], ou seja, expandiremos perturbativamente o propagador fermiônico no momento externo até quarta ordem em p

de acordo com

$$\begin{aligned}
S(k_I) &= S(k) + S(k)\Lambda S(k) + S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k) + \\
&\quad + S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k) + S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k)\Lambda S(k) + \dots,
\end{aligned}
\tag{5.8}$$

sendo Λ dado pela equação (4.22) e $k_I = k + p_I$, onde $I = 1, 12, 123$, com $p_{12} = p_1 + p_2$ e $p_{123} = p_1 + p_2 + p_3$. Por questão de simplicidade e sem perda de generalidade, na expansão do propagador, consideraremos termos somente com p_1 , uma vez que estamos interessados somente na forma funcional das correções radiativas.

Ao substituirmos os vértices e a expansão do propagador na eq.(5.4), consideraremos termos com quatro derivadas, uma vez que buscamos induzir a ação de Euler-Heisenberg, usaremos regularização dimensional e coordenadas esféricas em d -dimensões a fim de solucionar as integrais remanescentes. Obtemos então o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
T_{HL11}^{mnlk} &= -\frac{e^4 \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{6480\pi^{5/2}m^2} [3402 (p_3^m p_1^n p_2^j p_1^k - p_4^m p_1^n p_2^j p_1^k - p_3^m p_1^n p_1^j p_2^k + p_4^m p_1^n p_1^j p_2^k) \\
&\quad - 17490 (\vec{p}_1^2 g^{jk} p_1^n p_3^m + \vec{p}_1^2 g^{jk} p_1^n p_4^m) - 6942 (\vec{p}_1^2 g^{jk} p_3^m p_1^n + \vec{p}_1^2 g^{jk} p_4^m p_1^n)].
\end{aligned}
\tag{5.9}$$

Note que temos um resultado finito, como esperado, uma vez que o resultado das correções radiativas para a função de dois pontos apresentadas anteriormente já eram finitas.

A quantidade T_{HL12} (eq.(5.5)), pode ser escrita de maneira mais conveniente como:

$$iT_{HL12}^{\mu_1 n j k}(p_1, p_2, p_3, p_4) = i\Pi_{12}^{0njk}(p_1, p_2, p_3, p_4) + i\Pi_{12}^{mnlk}(p_1, p_2, p_3, p_4), \tag{5.10}$$

sendo

$$i\Pi_{12}^{0njk} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^0(k, p_1) S(k_1) V_5^{njk}(k_1, p_2, p_3, p_4) \quad (5.11a)$$

$$i\Pi_{12}^{mnjk} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k) V_3^m(k, p_1) S(k_1) V_5^{njk}(k_1, p_2, p_3, p_4). \quad (5.11b)$$

Primeiramente, calcularemos a contribuição $i\Pi_{12}^{0njk}$ que, assim como foi feito no capítulo (4), será, de agora em diante, a parte de (5.11a) que contribuirá para a ação de Euler-Heisenberg, isto é, contendo unicamente termos quárticos no momento externo. Tal contribuição nos dá um resultado nulo, isto é,

$$i\Pi_{12}^{0njk}(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0. \quad (5.12)$$

De maneira análoga, $i\Pi_{12}^{mnjk}$ será, de agora em diante, a parte de (5.11b) que contribuirá para a ação de Euler-Heisenberg, isto é, conterá apenas termos com quatro momentos externos. Tal contribuição nos dá o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{mnjk} = & \frac{e^4 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{1080 \pi^{5/2} m^2} \vec{p}_1^2 [1493 p_1^m (g^{jk} p_1^n + g^{nk} p_1^j + g^{nj} p_1^k) + \\ & + 187 \vec{p}_1^2 (g^{mk} g^{nj} + g^{mj} g^{nk} + g^{mn} g^{jk})], \end{aligned} \quad (5.13)$$

e portanto

$$\begin{aligned} T_{HL12}^{\mu_1 n j k} = & \frac{e^4 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{1080 \pi^{5/2} m^2} \vec{p}_1^2 [1493 p_1^m (g^{jk} p_1^n + g^{nk} p_1^j + g^{nj} p_1^k) + \\ & + 187 \vec{p}_1^2 (g^{mk} g^{nj} + g^{mj} g^{nk} + g^{mn} g^{jk})]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Fizemos uso aqui, também, de regularização dimensional e de coordenadas esféricas em d-dimensões na parte espacial do momento interno para efetuar as integrações necessárias.

A quantidade iT_{HL13} (eq.(5.6)) pode, também, ser expressa mais convenientemente como

$$\begin{aligned} iT_{HL13}^{\mu_1\mu_2jk}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= i\Pi_{13}^{00jk}(p_1, p_2, p_3, p_4) + i\Pi_{13}^{0njk}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ &\quad + i\Pi_{13}^{mnjk}(p_1, p_2, p_3, p_4), \end{aligned} \quad (5.15)$$

com

$$i\Pi_{13}^{00jk} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4), \quad (5.16a)$$

$$\begin{aligned} i\Pi_{13}^{0njk} &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^n(k_1, p_2)S(k_{12})V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4) + \\ &\quad + i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^n(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4) \end{aligned} \quad (5.16b)$$

$$i\Pi_{13}^{mnjk} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^n(k_1, p_2)S(k_{12})V_4^{jk}(k_{12}, p_3, p_4). \quad (5.16c)$$

Calcularemos aqui a quantidade $\Pi_{13}^{00jk}(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Um procedimento similar ao que foi empregado para os cálculos anteriores foi aqui utilizado, e assim obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Pi_{13}^{00jk} &= \frac{e^4}{7560\pi^2 m^6} g^{00} \vec{p}_1^2 [14262 \vec{p}_1^2 g^{jk} + 5481 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 g^{jk} + \\ &\quad - 1827 p_2^j p_1^k - p_1^j (7702 p_1^k + 1827 p_2^k)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por fim, computaremos o termo iT_{HL14}^{0000} (eq.(5.7)) correspondentes ao diagrama de quatro pernas de fótons usual. A quantidade

$$iT_{HL14}^{0000} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4), \quad (5.18)$$

contribuirá unicamente para o termo F^4 da ação de Euler-Heisenberg, uma vez que somente este admite a possibilidade de termos quatro campos externos A_0 . Obtemos

então que

$$T_{HLL14}^{0000} = \frac{e^4 119 \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{1350 \pi^{5/2} m^{10}} \vec{p}_1^4 g^{00} g^{00}. \quad (5.19)$$

Com estes resultado é possível inferir a forma funcional da ação de Euler-Heisenberg no presente contexto. Um escalonamento nos campos e derivadas a fim de restituir as dimensões de massa da EDQ usual, assim como foi feito no capítulo anterior, pode ser empregado, de modo que $\partial_0 \rightarrow m^2 \partial_0$, $\partial_i \rightarrow \partial_i$, $A_0 \rightarrow mA_0$ e $A_i \rightarrow \frac{1}{m} A_i$. Considerando somente T_{HLL14}^{0000} , podemos ver que o termo na lagrangiana associado à este é do tipo

$$\frac{e^4 \Lambda_1}{m^{10}} (\partial_i A_0) (\partial^i A^0) (\partial_j A_0) (\partial^j A^0), \quad (5.20)$$

que após o escalonamento fica

$$\frac{e^4 \Lambda_1}{m^6} (\partial_i A_0) (\partial^i A^0) (\partial_j A_0) (\partial^j A^0), \quad (5.21)$$

sendo Λ_1 uma constante associada às correções radiativas. Para todos os termos associados à T_{HLL11}^{mnnjk} , $T_{HLL12}^{\mu_1 n j k}$, $T_{HLL13}^{\mu_1 \mu_2 j k}$ e $T_{HLL14}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$ teremos, após o escalonamento, a ordem de $1/m^6$, o que nos permite inferir que a ação de Euler-Heisenberg será da forma

$$S_{EHHL} = \frac{e^4}{m^6} \int dt d^3x \left(\Lambda_1 F_{0i} F^{0i} F_{0j} F^{0j} + \Lambda_2 F_{0i} F^{0i} F_{km} F^{km} \right. \\ \left. + \Lambda_3 F_{ij} F^{ij} F_{km} F^{km} + \Lambda_4 F_{ji} F^{ik} F_{km} F^{mj} \right), \quad (5.22)$$

que sob certas imposições relativas à restauração de covariância, deve tomar a forma da equação (3.52).

O cálculo completo de todas as correções radiativas para a função de quatro pontos na extensão de Hořava-Lifshitz da EDQ e a consequente indução da ação de Euler-Heisenberg poderá ser vista com mais detalhes em um trabalho futuro [11].

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Nesta tese são tratados dois temas que vêm recebendo muita atenção nos últimos anos. O primeiro deles, a violação da invariância de Lorentz, tem sido alvo de muitos estudos, principalmente, devido ao fato de que modelos que o incorporam serem o limite de baixas energias de teorias mais fundamentais, tal como teoria de cordas. Em especial, estudamos a questão da indução da ação efetiva de Euler-Heisenberg com quebra de simetria de Lorentz. O segundo dos temas tratados aqui, a extensão de Hořava-Lifshitz da eletrodinâmica quântica com $z = 3$, tem sido pouco estudado ainda, muito embora o modelo com $z = 2$ tenha recebido muita atenção recentemente. Como já foi mencionado ao longo do trabalho, a grande motivação em se estudar tal modelo reside no fato de que, em $z = 3$, a gravidade em $(3 + 1)$ -dimensões passa a ser renormalizável por contagem de potência.

Na primeira metade deste trabalho focamos no MPE, mais especificamente na EDQ estendida, analisando as correções radiativas provenientes do setor fermiônico e do setor bosônico, estendido pelos coeficientes de violação CPT par $c^{\mu\nu}$, $d^{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$ e

$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. Apresentamos as correções radiativas para as funções de dois e três pontos, como uma revisão de literatura, para só então efetuarmos a indução da ação efetiva de Euler-Heisenberg. Tal indução foi efetuada através de dois procedimentos, um método perturbativo no coeficiente $c^{\mu\nu}$, em que este passa a ser visto como uma inserção no propagador fermiônico, além de dar origem a um novo vértice, como também através de um método não perturbativo. Antes de induzirmos a ação de Euler-Heisenberg, discutimos o efeito da divisão de fótons no vácuo, ao impormos o limite colinear, e verificamos o cancelamento de todas as contribuições da ordem de $1/m^2$ a depender de como são feitas as trocas nos índices e nos momentos. O resultado obtido para a ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz assemelha-se bastante à ação usual, sendo portanto da ordem de $1/m^4$.

Na segunda metade do presente trabalho apresentamos a EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz. Realizamos inicialmente uma breve revisão acerca dos trabalhos recentes realizados para o caso em que $z = 2$. Em seguida apresentamos a extensão de Hořava-Lifshitz com $z = 3$ e computamos as correções radiativas para as funções de dois pontos através de um método perturbativo. Para tal, usamos regularização dimensional nas componentes espaciais do momento interno. Empregamos o método de renormalização por composição e uma restrição na carga elétrica foi encontrada como condição necessária à restauração de simetria. As correções para as funções de três pontos também foram computadas. Através de uma extensão do teorema de Furry a EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz, foi possível mostrar que todos os gráficos associados as funções de três pontos eram nulos. Ainda no contexto da extensão de Hořava-Lifshitz com $z = 3$, apresentamos um cálculo preliminar à indução da ação de Euler-Heisenberg. As correções radiativas encontradas para a

função de quatro pontos mostraram-se ser finitas, como esperado, uma vez que a quebra de isotropia do modelo promove uma melhoria no comportamento UV da teoria. A indução da ação de Euler-Heisenberg para a extensão de Hořava-Lifshitz da EDQ poderá ser vista com mais detalhes em um trabalho futuro [11]

Algumas perspectivas futuras aos estudos aqui realizados podem ser propostas. No contexto de violação de simetria de Lorentz e do MPE, estimativas numéricas para o coeficiente $c^{\mu\nu}$ podem ser realizadas através da associação dos resultados da amplitude de espalhamento com o erro experimental em alguns espalhamentos específicos, tais como o espalhamento fóton-fóton ou o espalhamento Delbrück. A indução da ação efetiva de Euler-Heisenberg em modelos com operadores com dimensão de massa $d = 5$ ou $d = 6$ [24, 157] pode também ser realizada. Estudos acerca de um possível comportamento não analítico no regime de temperatura finita nas correções radiativas para a função de quatro pontos são também factíveis.

Uma perspectiva futura imediata, agora referente aos estudos da EDQ com extensão de Hořava-Lifshitz, pode o estabelecimento de uma conexão entre o MPE e a EDQ de Hořava-Lifshitz com $z = 3$, assim como foi feito em [152], através da inclusão de termos do tipo $z = 1$, e assim, boas estimativas para o $c^{\mu\nu}$ podem ser obtidas, uma vez que o modelo com $z = 3$ apresenta-se mais consistente com o tratamento perturbativo empregado. Dentro do contexto gravitacional, realizar a renormalização formal da gravidade em $(3 + 1)$ -dimensões surge como a perspectiva mais importante para o modelo, uma vez que, até então, a renormalizabilidade da gravidade em $(3 + 1)$ -dimensões só foi vista através de contagem de potência.

Apêndice A

Expressão $i\bar{T}_{HL14}$

Neste apêndice apresentamos a expressão $i\bar{T}_{HL14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ contida na equação (5.7).

$$i\bar{T}_{HL14}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = i\Pi_{14}^{mnjk} + i\Pi_{14}^{0mnj} + i\Pi_{14}^{00mn} + i\Pi_{14}^{000m} \quad (\text{A.1})$$

com

$$i\Pi_{14}^{mnjk} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^n(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^j(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^k(k_{123}, p_4) \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} i\Pi_{14}^{0mnj} = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^m(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^n(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^j(k_{123}, p_4) \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^n(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^j(k_{123}, p_4) \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^n(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^j(k_{123}, p_4) \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^n(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^j(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
i\Pi_{14}^{00mn} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^m(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^n(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^m(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^n(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^m(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^n(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^n(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^n(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^n(k_{123}, p_4),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
i\Pi_{14}^{000m} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^m(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^m(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^0(k, p_1)S(k_1)V_3^m(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4) \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} S(k)V_3^m(k, p_1)S(k_1)V_3^0(k_1, p_2)S(k_{12})V_3^0(k_{12}, p_3)S(k_{123})V_3^0(k_{123}, p_4).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Referências Bibliográficas

- [1] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964).
- [2] P.W. Anderson, “More is different” *Science*, 177, 4047, (1972)
- [3] L.D. Landau, “Broken symmetry and phase transitions” *Phys. Z. Sowjetunion*, 11, 26, 542 (1937)
- [4] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [5] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997) [hep-ph/9703464].
- [6] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998) [hep-ph/9809521].
- [7] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004) [hep-th/0312310].
- [8] P. Horava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009) [arXiv:0901.3775 [hep-th]].

- [9] J. Furtado and T. Mariz, “Lorentz-violating Euler-Heisenberg effective action,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 2, 025021 (2014) [arXiv:1401.0492 [hep-ph]].
- [10] M. Gomes, J. Furtado, T. Mariz and A. Yu. Petrov “On one-loop corrections in $z = 3$ Hořava-Lifshitz QED,” a ser submetido no *Phys. Rev. D*.
- [11] J. Furtado and T. Mariz “Euler-Heisenberg effective action in the Hořava-Lifshitz-like QED,” em fase de desenvolvimento.
- [12] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT and strings,” *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991).
- [13] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Gravitational Phenomenology in Higher Dimensional Theories and Strings,” *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989).
- [14] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher Dimensional Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989).
- [15] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string,” *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996) [hep-th/9605088].
- [16] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001) [hep-th/0105082].
- [17] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” *Phys. Lett. B* **517**, 450 (2001) [hep-th/0106044].

- [18] A. Anisimov, T. Banks, M. Dine and M. Graesser, “Comments on noncommutative phenomenology,” *Phys. Rev. D* **65**, 085032 (2002) [hep-ph/0106356].
- [19] C. E. Carlson, C. D. Carone and R. F. Lebed, “Bounding noncommutative QCD,” *Phys. Lett. B* **518**, 201 (2001) [hep-ph/0107291].
- [20] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41** (1990) 1231.
- [21] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, “One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **65**, 056006 (2002) [hep-th/0111123].
- [22] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, “Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 031801 [hep-ph/0212382].
- [23] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [24] R. C. Myers and M. Pospelov, “Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003) [hep-ph/0301124].
- [25] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **80**, 015020 (2009) [arXiv:0905.0031 [hep-ph]].
- [26] A. Kostelecky and M. Mewes, “Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension,” *Phys. Rev. D* **85**, 096005 (2012) [arXiv:1112.6395 [hep-ph]].

- [27] T. Mariz, “Radiatively induced Lorentz-violating operator of mass dimension five in QED,” *Phys. Rev. D* **83**, 045018 (2011) [arXiv:1010.5013 [hep-th]].
- [28] V. A. Kostelecky and N. Russell, “Data Tables for Lorentz and CPT Violation,” *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [29] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 3572 [hep-ph/9901358].
- [30] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 151601 (2008) [arXiv:0806.4945 [hep-ex]].
- [31] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151601 (2010) [arXiv:1007.2791 [hep-ex]].
- [32] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE Collaboration], “Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses,” arXiv:1109.3480 [hep-ex].
- [33] P. Massarotti [KLOE Collaboration], “Recent results from KLOE,” *Nuovo Cim. B* **123**, 840 (2008).
- [34] A. Di Domenico *et al.* [KLOE Collaboration], “Search for CPT violation and decoherence effects in the neutral kaon system,” *J. Phys. Conf. Ser.* **171**, 012008 (2009).
- [35] V. A. Kostelecky, C. D. Lane, “Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments” *Phys Rev. D* **60** 116010 (1999)

- [36] R. Bluhm et al, "Clock-Comparison Tests of Lorentz and CPT Symmetry in Space" *Phys. Rev. Lett.* 88 090801 (2002)
- [37] R. Bluhm et al, "Probing Lorentz and CPT violation with space-based experiments" *Phys. Rev. D* 68 125008 (2003)
- [38] H. Dehmelt et al. "Past Electron-Positron $g-2$ Experiments Yielded Sharpest Bound on CPT Violation for Point Particles" *Phys. Rev. Lett.* 83, 4694 (1999)
- [39] R. Mittleman et al. "Bound on CPT and Lorentz Symmetry with a Trapped Electron" *Phys. Rev. Lett.* 83, 2116 (1999)
- [40] G. Gabrielse et al. "Precision Mass Spectroscopy of the Antiproton and Proton Using Simultaneously Trapped Particles" *Phys. Rev. Lett.* 82, 3198 (1999)
- [41] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen" *Phys. Rev. Lett.* 82, 2254 (1999)
- [42] V.W. Hughes et al. "Test of CPT and Lorentz Invariance from Muonium Spectroscopy" *Phys. Rev. Lett.* 87, 111804 (2001)
- [43] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests with Muons" *Phys. Rev. Lett.* 84, 1098 (2000)
- [44] H. Muller, P. L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger and E. Kovalchuk *et al.*, "Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007) [arXiv:0706.2031 [physics.class-ph]].

- [45] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk and C. Novotny *et al.*, “Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities,” *Nature Phys.* **3**, 861 (2007).
- [46] S. R. Parker, M. Mewes, P. L. Stanwix and M. E. Tobar, “Cavity Bounds on Higher-Order Lorentz-Violating Coefficients,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180401 (2011) [arXiv:1102.0081 [hep-ph]].
- [47] F. Baynes, A. Luiten and M. Tobar, “Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator,” *Phys. Rev. D* **84**, 081101 (2011) [arXiv:1108.5414 [gr-qc]].
- [48] C. M. Fraser “Calculation of higher derivative terms in the one-loop effective lagrangian” *Z.Phys. C* **28**, 101-106 (1985)
- [49] J. Barcelos-Neto and A. K. Das, “Derivative expansion and large gauge invariance at finite temperature,” *Phys. Rev. D* **58**, 085022 (1998) [hep-th/9805204].
- [50] L. H. Chan, “Effective Action Expansion In Perturbation Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1222 (1985) Erratum: [*Phys. Rev. Lett.* **56**, 404 (1986)].
- [51] M. E. Peskin, D. V. Schroeder “An Introduction to Quantum Field Theory” Perseus Book, Massachusetts
- [52] L. H. Ryder “Quantum Field Theory” second edition, Cambridge University Press
- [53] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **117**, 610 (1928).

- [54] W. Heisenberg. The fluctuations of charge connected with the formation of matter from radiation - Schsiche Akad. Wissen. : 86 (1934) 317.
- [55] - Heisenberg, W., Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons, Z.Phys. 90 (1934) 209-231, Erratum: Z.Phys. 92 (1934) 692-692
- [56] H. Euler., On the scattering of light by light in Diracs theory - PhD thesis at Univ. Leipzig (1936); Annalen Phys.,26,398
- [57] H. Euler and B. Kockel, "Ueber die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie," Naturwiss. **23**, 246 (1935).
- [58] M. Born and L. Infeld, "Foundations of the new field theory," Proc. Roy. Soc. Lond. A **144**, 425 (1934).
- [59] W. Heisenberg and H. Euler, "Consequences of Dirac's theory of positrons," Z. Phys. **98**, 714 (1936) doi:10.1007/BF01343663 [physics/0605038].
- [60] R. Karplus and M. Neuman, "The scattering of light by light," Phys. Rev. **83**, 776 (1951).
- [61] V. F. Weisskopf, "On the Self-Energy and the Electromagnetic Field of the Electron," Phys. Rev. **56**, 72 (1939).
- [62] H. Pagels and E. Tomboulis, "Vacuum of the Quantum Yang-Mills Theory and Magnetostatics," Nucl. Phys. B **143**, 485 (1978).
- [63] K. Fujikawa, "A nondiagrammatic calculation of one loop beta function in QCD," Phys. Rev. D **48**, 3922 (1993).

- [64] J. Grundberg and T. H. Hansson, “The QCD trace anomaly as a vacuum effect (The vacuum is a medium is the message!),” *Annals Phys.* **242**, 413 (1995) [hep-th/9407139].
- [65] M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *Sov. J. Nucl. Phys.* **44**, 321 (1986) [*Yad. Fiz.* **44**, 498 (1986)].
- [66] H. Gies, “Strong laser fields as a probe for fundamental physics,” *Eur. Phys. J. D* **55**, 311 (2009) [arXiv:0812.0668 [hep-ph]].
- [67] M. R. Brown and M. J. Duff, “Exact Results for Effective Lagrangians,” *Phys. Rev. D* **11**, 2124 (1975).
- [68] M. J. Duff and M. Ramon-Medrano, “On the Effective Lagrangian for the Yang-Mills Field,” *Phys. Rev. D* **12**, 3357 (1975).
- [69] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “Calculations in External Fields in Quantum Chromodynamics. Technical Review,” *Fortsch. Phys.* **32**, 585 (1984).
- [70] S. W. Hawking, “Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-Time,” *Commun. Math. Phys.* **55**, 133 (1977). doi:10.1007/BF01626516
- [71] W. Dittrich, “One Loop Effective Potentials in QED,” *J. Phys. A* **9**, 1171 (1976). doi:10.1088/0305-4470/9/7/019
- [72] W. Dittrich and M. Reuter, “Effective QCD Lagrangian With Zeta Function Regularization,” *Phys. Lett. B* **128**, 321 (1983). doi:10.1016/0370-2693(83)90268-X

- [73] D. Kharzeev, “Parity violation in hot QCD: Why it can happen, and how to look for it,” *Phys. Lett. B* **633**, 260 (2006) [hep-ph/0406125].
- [74] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, “The Chiral Magnetic Effect,” *Phys. Rev. D* **78**, 074033 (2008) [arXiv:0808.3382 [hep-ph]].
- [75] B. I. Abelev *et al.* [STAR Collaboration], “Azimuthal Charged-Particle Correlations and Possible Local Strong Parity Violation,” *Phys. Rev. Lett.* **103**, 251601 (2009) [arXiv:0909.1739 [nucl-ex]].
- [76] V. P. Gusynin, V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, “Dynamical chiral symmetry breaking by a magnetic field in QED,” *Phys. Rev. D* **52**, 4747 (1995) [hep-ph/9501304].
- [77] F. Sauter, “Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs,” *Z. Phys.* **69**, 742 (1931).
- [78] L. V. Keldysh, “Ionization in the Field of a Strong Electromagnetic Wave” *Sov. Phys. JETP* 20 (1965) 1307
- [79] Bialynicka-Birula, Z. and Bialynicki-Birula, I. “Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field” *Phys. Rev. D* 10 , 2341 (1970)
- [80] S. L. Adler, “Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field,” *Annals Phys.* **67**, 599 (1971).
- [81] S. L. Adler and C. Schubert, “Photon splitting in a strong magnetic field: Recalculation and comparison with previous calculations,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1695 (1996) [hep-th/9605035].

- [82] W. y. Tsai and T. Erber, “The Propagation of Photons in Homogeneous Magnetic Fields: Index of Refraction,” *Phys. Rev. D* **12**, 1132 (1975).
- [83] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory” *Phys. Rev.* 160, 1113-1148 (1967);
- [84] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory” *Phys. Rev.* 162, 1195-1239 (1967);
- [85] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. III. Applications of the Covariant Theory” *Phys. Rev.* 162, 1239-1256 (1967)
- [86] Y. B. Zeldovich and A. A. Starobinsky, “Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field,” *Sov. Phys. JETP* **34**, 1159 (1972) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61**, 2161 (1971)].
- [87] E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, “Quantum string theory effective action” *Nucl. Phys.* B261, 1-27 (1985);
- [88] E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, “Effective action approach to superstring theory” *Phys. Lett.* B160, 69-76 (1985)
- [89] E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, “Non-linear electrodynamics from quantized strings” *Phys. Lett.* B163, 123 (1985)
- [90] G. V. Dunne, “The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 years on,” *Int. J. Mod. Phys. A* **27**, 1260004 (2012) [*Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **14**, 42 (2012)] [[arXiv:1202.1557 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1202.1557)].

- [91] G. V. Dunne, “Heisenberg-Euler effective Lagrangians: Basics and extensions,” In *Shifman, M. (ed.) et al.: From fields to strings, vol. 1* 445-522 [hep-th/0406216].
- [92] Huet, Y. Trautenberg, M.R, Schubert, C., “The Euler-Heisenberg lagrangian beyond one loop” International Journal of Modern Physics: Conference Series Vol. 14 (2012) 383-393
- [93] “Euler-Heisenberg lagrangians and asymptotic analysis in 1+1 QED. Part I: two-loop” Huet, I. McKeon, D.G.C., Schubert, C, JHEP12(2010)036
- [94] V. I. Ritus, “The Lagrange Function of an Intensive Electromagnetic Field and Quantum Electrodynamics at Small Distances,” Sov. Phys. JETP **42**, 774 (1975) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **69**, 1517 (1975)].
- [95] M. I. Katsnelson, G. E. Volovik, “Quantum electrodynamics with anisotropic scaling: Heisenberg-Euler action and Schwinger pair production in the bilayer graphene” JETP Letters (2012), Volume 95, Issue 8, pp 411-415
- [96] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, “Threshold effects and Planck scale Lorentz violation: Combined constraints from high-energy astrophysics,” Phys. Rev. D **67**, 124011 (2003) [hep-ph/0209264].
- [97] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Photon decay in a CPT violating extension of quantum electrodynamics,” Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003) [hep-th/0212028].
- [98] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, “Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **91**, 031801 (2003) [hep-ph/0212382].

- [99] G. Gelmini, S. Nussinov and C. E. Yaguna, “On photon splitting in theories with Lorentz invariance violation,” JCAP **0506**, 012 (2005) [hep-ph/0503130].
- [100] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, “Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics,” Nucl. Phys. B **734**, 1 (2006) [hep-th/0508074].
- [101] F. A. Brito, E. Passos and P. V. Santos, “On the effective action of the vacuum photon splitting in Lorentz-violating QED,” Europhys. Lett. **95**, 51001 (2011) [arXiv:1101.5390 [hep-th]].
- [102] G. Jarlskog, L. Joensson, S. Pruenster, H. D. Schulz, H. J. Willutzki, G. G. Winter, “Measurement of Delbrück Scattering and Observation of Photon Splitting at High Energies” Phys. Rev. D **8**, 3813-3823 (1973)
- [103] A. I. Milstein, M. Schumacher “Present status of Delbrück scattering” Phys. Rept. **243**, 183 (1994)
- [104] S. L. Adler “constant magnetic field of arbitrary strength” Annals Phys. **67**, 599 (1971)
- [105] S. L. Adler, C. Schubert “Photon Splitting in a Strong Magnetic Field: Recalculation and Comparison with Previous Calculations” Phys. Rev. Lett. **77**, 1695 (1996)
- [106] D. d’Enterria and G. G. da Silveira, “Observing light-by-light scattering at the Large Hadron Collider,” Phys. Rev. Lett. **111**, 080405 (2013) [arXiv:1305.7142 [hep-ph]].

- [107] J. L. Hewett, F. J. Petriello and T. G. Rizzo, “Signals for noncommutative interactions at linear colliders,” *Phys. Rev. D* **64**, 075012 (2001) [hep-ph/0010354].
- [108] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, “Quantum electrodynamics”, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [109] Z. Bialynicka-Birula and I. Bialynicki-Birula, “Nonlinear effects in Quantum Electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field,” *Phys. Rev. D* **2**, 2341 (1970).
- [110] S. L. Adler, J. N. Bahcall, C. G. Callan and M. N. Rosenbluth, “Photon splitting in a strong magnetic field,” *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1061 (1970).
- [111] P. Horava, “Membranes at Quantum Criticality,” *JHEP* **0903**, 020 (2009) [arXiv:0812.4287 [hep-th]].
- [112] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, “Theory of Dynamic Critical Phenomena,” *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).
- [113] S.-K. Ma, “Modern Theory of Critical Phenomena” (Benjamin, New York, 1976).
- [114] S. Sachdev, “Quantum Phase Transitions” (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999).
- [115] R. M. Hornreich, M. Luban and S. Shtrikman, “Critical Behavior at the Onset of k_{\perp} -Space Instability on the λ Line,” *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1678 (1975).
- [116] E. M. Lifshitz, “On the Theory of Second-Order Phase Transitions I” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **11**, 255 (1941);

- [117] E. M. Lifshitz, “On the Theory of Second-Order Phase Transitions II” Zh. Eksp. Teor. Fiz. 11, 269 (1941);
- [118] Petr Horava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point” Phys.Rev. D79 (2009) 084008
- [119] G. D’Odorico, J. W. Goossens and F. Saueressig, “Covariant computation of effective actions in Horava-Lifshitz gravity,” JHEP **1510**, 126 (2015) [arXiv:1508.00590 [hep-th]].
- [120] D. V. Lopes, A. Mamiya and A. Pinzul, “Infrared HoravaLifshitz gravity coupled to Lorentz violating matter: a spectral action approach,” Class. Quant. Grav. **33**, no. 4, 045008 (2016) [arXiv:1508.00137 [hep-th]].
- [121] J. Hartong and N. A. Obers, “Horava-Lifshitz gravity from dynamical Newton-Cartan geometry,” JHEP **1507**, 155 (2015) [arXiv:1504.07461 [hep-th]].
- [122] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “Two Dimensional Horava-Lifshitz Black Hole Solutions,” Phys. Rev. D **91**, no. 4, 044026 (2015) [arXiv:1409.0490 [hep-th]].
- [123] M. A. Anacleto, D. Bazeia, F. A. Brito and J. C. Mota-Silva, “Quantum-corrected two-dimensional Horava-Lifshitz black hole entropy,” arXiv:1512.07886 [hep-th].
- [124] I. Hussain, M. Jamil and B. Majeed, “A Slowly Rotating Black Hole in Horava-Lifshitz Gravity and a 3+1 Dimensional Topological Black Hole: Motion of Particles and BSW Mechanism,” Int. J. Theor. Phys. **54**, no. 5, 1567 (2015) [arXiv:1412.1112 [gr-qc]].

- [125] C. Eling and Y. Oz, “Horava-Lifshitz Black Hole Hydrodynamics,” JHEP **1411**, 067 (2014) [arXiv:1408.0268 [hep-th]].
- [126] J. P. M. Pitelli, “Cosmology in (1+1)-dimensional Horava-Lifshitz theory of gravity,” Phys. Rev. D **92**, no. 8, 084012 (2015) [arXiv:1509.04983 [gr-qc]].
- [127] S. Lepe and J. Saavedra, “On Horava-Lifshitz cosmology,” Astrophys. Space Sci. **350**, 839 (2014) [arXiv:1301.1728 [gr-qc]].
- [128] O. Obregon and J. A. Preciado, “Quantum cosmology in Horava-Lifshitz gravity,” Phys. Rev. D **86**, 063502 (2012) [arXiv:1305.6950 [gr-qc]].
- [129] S. K. Chakrabarti, K. Dutta and A. A. Sen, “Cosmology of Horava-Lifshitz f(R) Gravity,” Phys. Lett. B **711**, 147 (2012) [arXiv:1108.2781 [astro-ph.CO]].
- [130] Y. S. Piao, “Primordial Perturbation in Horava-Lifshitz Cosmology,” Phys. Lett. B **681**, 1 (2009) [arXiv:0904.4117 [hep-th]].
- [131] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, J. M. Queiruga and A. J. da Silva, “One-loop corrections in the Horava-Lifshitz-like QED,” Phys. Rev. D **92**, no. 6, 065028 (2015) Erratum: [Phys. Rev. D **92**, no. 12, 129902 (2015)] [arXiv:1504.04506 [hep-th]].
- [132] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories,” Phys. Rev. D **85**, 127701 (2012) [arXiv:1112.2081 [hep-th]].
- [133] C. F. Farias, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories with the arbitrary critical exponent,” Phys. Lett. B **719**, 196 (2013) [arXiv:1208.3427 [hep-th]].

- [134] J. Alexandre, K. Farakos and A. Tsapalis, “Liouville-Lifshitz theory in 3+1 dimensions,” *Phys. Rev. D* **81**, 105029 (2010) [arXiv:1004.4201 [hep-th]].
- [135] C. F. Farias, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Effective potential, Horava-Lifshitz-like theories, and finite temperature,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 2, 025014 (2014) [arXiv:1311.6313 [hep-th]].
- [136] A. M. Lima, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and R. F. Ribeiro, “Gauge dependence of the effective potential for Horava-Lifshitz-like theories,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 2, 025027 (2015) [arXiv:1412.2944 [hep-th]].
- [137]
- [138] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Horava-Lifshitz-like extensions of supersymmetric theories,” *Phys. Rev. D* **90**, no. 12, 125022 (2014) [arXiv:1408.6499 [hep-th]].
- [139] M. Gomes, J. Queiruga and A. J. da Silva, *Phys. Rev. D* **92**, no. 2, 025050 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.025050 [arXiv:1506.01331 [hep-th]].
- [140] R. Iengo, J. G. Russo and M. Serone, “Renormalization group in Lifshitz-type theories,” *JHEP* **0911**, 020 (2009) [arXiv:0906.3477 [hep-th]].
- [141] D. Anselmi, “Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. I. General properties,” *Annals Phys.* **324**, 874 (2009) [arXiv:0808.3470 [hep-th]].
- [142] D. Anselmi, “Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. II. Classification,” *Annals Phys.* **324**, 1058 (2009) [arXiv:0808.3474 [hep-th]].

- [143] J. M. Romero, J. A. Santiago, O. Gonzalez-Gaxiola and A. Zamora, “Electrodynamics a la Horava,” *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 3381 (2010) [arXiv:1006.0956 [hep-th]].
- [144] V. S. Alves, B. Charneski, M. Gomes, L. Nascimento and F. Pea, “Chern-Simons terms in Lifshitz like quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **88**, 067703 (2013) [arXiv:1303.6853 [hep-th]].
- [145] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Horava-Lifshitz modifications of the Casimir effect,” *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1350052 (2013) [arXiv:1006.1635 [hep-th]].
- [146] S. R. Das and G. Murthy, “CP**(N-1) Models at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D* **80**, 065006 (2009) [arXiv:0906.3261 [hep-th]].
- [147] P. R. S. Gomes, P. F. Bienzobaz and M. Gomes, “Competing interactions and the Lifshitz-type Nonlinear Sigma Model,” *Phys. Rev. D* **88**, 025050 (2013) [arXiv:1305.3792 [hep-th]].
- [148] R. Iengo and M. Serone, “A Simple UV-Completion of QED in 5D,” *Phys. Rev. D* **81**, 125005 (2010) [arXiv:1003.4430 [hep-th]].
- [149] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On the Adler-Bell-Jackiw anomaly in a Horava-Lifshitzlike QED,” *Europhys. Lett.* **112**, no. 6, 61002 (2015) doi:10.1209/0295-5075/112/61002 [arXiv:1505.00715 [hep-th]].
- [150] I. Bakas and D. Lust, “Axial anomalies of Lifshitz fermions,” *Fortsch. Phys.* **59**, 937 (2011) [arXiv:1103.5693 [hep-th]].

- [151] I. Bakas, “More on axial anomalies of Lifshitz fermions,” *Fortsch. Phys.* **60**, 224 (2012) [arXiv:1110.1332 [hep-th]].
- [152] J. Alexandre and J. Brister, “Fermion effective dispersion relation for $z = 2$ Lifshitz QED,” *Phys. Rev. D* **88**, no. 6, 065020 (2013) [arXiv:1307.7613 [hep-th]].
- [153] T. Eguchi, “A New Approach to Collective Phenomena in Superconductivity Models,” *Phys. Rev. D* **14**, 2755 (1976).
- [154] K. Akama and T. Hattori, “Compositeness condition for dynamically induced gauge theories,” *Phys. Lett. B* **392**, 383 (1997) [hep-ph/9607331].
- [155] K. Akama, “Compositeness condition,” In *Shizuoka 1997, Masses and mixings of quarks and leptons* 295-304 [hep-ph/9706442].
- [156] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, *Phys. Rev. D* **77**, 105002 (2008) [arXiv:0709.2904 [hep-th]].
- [157] G. Rubtsov, P. Satunin and S. Sibiryakov, “On calculation of cross sections in Lorentz violating theories,” *Phys. Rev. D* **86**, 085012 (2012) [arXiv:1204.5782 [hep-ph]].