UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELISA TAMIRES DE OLIVEIRA COSTA

INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

MACEIÓ - AL
2023

ELISA TAMIRES DE OLIVEIRA COSTA

INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao curso Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), como requisito parcial para obtenção do título licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dione Andrade Lara

MACEIÓ - AL

2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

C837i Costa, Elisa Tamires de Oliveira.
Introdução a topologia dos espaços métricos / Elisa Tamires de Oliveira Costa. – 2022.
56 f.

Orientador: Dione Andrade Lara.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 56.

1. Conjutos. 2. Funções (Matemática). 3. Espaços métricos. 4. Topologia. I. Título.

CDU: 515.124

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de fazer um estudo dos conteúdos básicos de topologia para uma melhor compreensão e aprofundamento desta área.

Palavra-chave: Espaços métricos, Topologia, Espaços Topológicos.

Abstratc

This work has the objective to make a study of the basic contents of topology for a better understanding and deepening at this area.

Key-words: Metric spaces, Topology, Topological spaces.

Sumário

Introdução

Ingressando no curso de Matemática licenciatura na Universidade Federal de Alagoas no ano de 2015, após passar por muitas dificuldades nos primeiros semestres, onde todos estão se descobrindo como estudantes de um curso superior e deixando o perfil de aluno de ensino médio de lado, ou se adaptando a um novo ambiente, aprendendo novas formas de estudar e podendo ter a certeza de que estudar matemática não é nem de perto parecido com forma da matemática do ensino básico. Ou seja, os primeiros semestres foram os mais obscuros, onde, além de aprender a estudar, temos que formar um perfil, e, buscar se identificar entre uma matemática bem abstrata ou uma licenciatura, dois caminhos bem distintos.

Nas primeiras disciplinas nos deparamos com Teoria dos Números, umas das primeiras disciplinas abstratas estudadas no curso, no qual tive muita de dificuldade, mas que despertou meu interesse em estudar de formar um pouco mais aprofundada aquele mundo, aquela parte da matemática não conhecida, tão pouco mencionada no ensino básico.

Foi então que tive a oportunidade de fazer parte do grupo de pesquisa de iniciação cientifica em topologia, onde comecei a estudar os assuntos básicos, como conjuntos e funções, mas sempre relacionados à parte abstrata. Tive a oportunidade de participar do grupo por dois anos. Até que terminei as matérias do curso e chegou a hora de fazer o trabalho de conclusão de curso. Mesmo com a oportunidade de ter participado de vários eventos também ter feito parte de grupo de pesquisa relacionado a licenciatura, não pensei duas vezes em falar sobre o tema que mais me marcou, que foi o que mais tive dificuldade, Topologia.

Com isso, o objetivo desse trabalho é mostrar todo assunto estudado no projeto de pesquisa nos dois anos que participei. Onde no primeiro capítulo falaremos sobre um pouco sobre funções, numa linguagem mais abstrata. No segundo, ja entraremos em espaços métricos, informando definições, propriedades e alguns exemplos. E no terceiro e ultimo capítulo, entraremos em topologia dos espaços métricos, também relatando algumas definições, proposições e exemplos.

Capítulo 1

Conjuntos e Funções

A noção matemática de conjuntos é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum, ou seja, um agrupamento, coleção, sistema. E pode ser considerado um dos conceitos básicos mais importantes da matemática moderna.

Exemplos de conjuntos:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

De forma geral os conjuntos são representados por letras maiúsculas, enquanto os membros são representados por letras minúsculas. Os membros de um conjuntos são chamados de *elementos* do conjunto.

- Se A é um conjunto e x um elemento de A, será indicador por:

$$x \in A, \text{ e será lido "}x\text{ pertence a }A\text{"}$$

- Se x não é um elemento de A, dizemos:

$$x \notin A, \text{ e lido "}x\text{ não pertence a }A\text{"}$$

- Dois conjuntos A e B se dizem iguais, quando todo elemento de A também é elemento de B, ou seja, se constam exatamente dos mesmos elementos:

$$A = B$$

- Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, dizemos que A está contido em B, e simbolizamos por $A \subset B$.

A relação de continência segue as seguintes propriedades:

(i) Para todo conjunto A, $A \subset A$. (reflexiva)

(ii) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$. (anti-simétrica)

(iii) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$. (transitiva)

- Se $A \subset B$ dizemos que A é um subconjunto de B.

- O conjuntos de todos os subconjuntos de um conjunto A, é chamado *conjuntos das partes* e representado por $\wp(A) = \{x | x \subset A\}$.

1.0.1 União de Conjuntos

Dados A e B subconjuntos de um conjunto U, a **união** de A e B é um subconjunto de U e representado por $A \cup B$, determinado por:

$$A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

A união de conjuntos possui as seguintes propriedades:

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ para quaisquer $A, B, C \subset U$.(associativa)

(ii) $A \cup B = B \cup A$, para quaisquer $A, B \subset U$. (comutativa)

(iii) $A \cup \emptyset = A$, para qualquer $A \subset U$ ($\emptyset$ é o elemento neutro).

(iv) $A \cup U = U$, para qualquer $A \subset U$.

(v) $A \cup B = B \leftrightarrow A \subset B$, para quaisquer $A, B \subset U$.

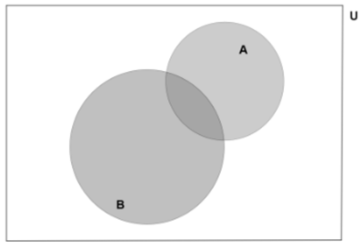


Figura 1.1: Diagrama de Euler-Venn, representando a união de conjuntos

1.0.2 Intersecção de Conjuntos

Sendo dois subconjuntos A e B de um conjunto U, a **intersecção** de A com B, indicado por $A \cap B$, será:

$$A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

A operação de intersecção possui as seguintes propriedades:

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ para quaisquer $A, B, C \subset U$.(associativa)

(ii) $A \cap B = B \cap A$, para quaisquer $A, B \subset U$. (comutativa)

(iii) $A \cap \emptyset = \emptyset$, para qualquer $A \subset U$ (U é o elemento neutro).

(iv) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subset B$, para quaisquer $A, B \subset U$.

As operações de união e intersecção estão relacionadas pelas seguintes propriedades distributivas:

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, para quaisquer $A, B, C \subset U$

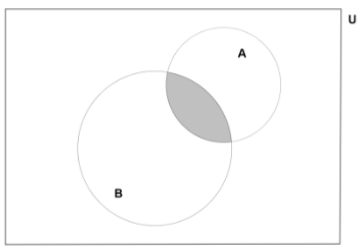


Figura 1.2: Diagrama de Euler-Venn, representando a intersecção de conjuntos:

1.0.3 Complementação de Conjuntos

Para os subconjuntos $A \subset U$, é indicado por $C_U A$ (podendo ser simplificado para A^c) o **complementar** de A em relação a U o seguinte subconjunto de U:

$$C_U A = \{x \in U | x \notin A\}.$$

$*$ Dados A e B, subconjuntos de um conjunto U, a **diferença** entre A e B, denotado por $A - B$, será definida por:

$$A - B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

- A seguir algumas propriedades envolvendo complementares e diferenças, para subconjuntos de um conjunto U:

(*i*) $\emptyset^c = U$ e $U^c = \emptyset$

(*ii*) $(A^c)^c = A$

(*iii*) $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = U$

(*iv*) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(*v*) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(*vi*) Sendo A e B subconjuntos de U, tais que $A \subset B$, então $C_B A = \{x \in B : x \notin A\}$.

Figura 1.3: Diagrama de Euler-Venn, representando a complementação de conjuntos

1.1 Produtos Cartesianos de Conjuntos

Para cada par de conjuntos A e B, é admitido a existência do conjunto $A \times B$, chamado de **produto cartesiano** de A por B, onde os elementos são os pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$.

$*$O conceito de par ordenado será tomado como primitivo, admitindo que, para quaisquer:

$$(a, b), (c, d) \in A \times B$$
$$(a, b) = (c, d) \longleftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$
$$\text{Assim, } A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

1.1.1 Relações Binárias

Uma **relação binária** do conjunto A no conjunto B, é qualquer subconjunto de $A \times B$, ou seja:

(R é relação binária de A em B)$\longleftrightarrow R \subset A \times B$

- Se A tem m elementos e B tem n elementos, então 2^{mn} é o número de relações de A em B
- Se R e uma relação de A em B e se $(x, y) \in R$, este fato é indicado por xRy, ou seja, xRy significa que $(x, y) \in R$
- Uma relação R de conjunto A, no próprio conjunto A, chama-se **relação** sobre A. Assim:

$$(R \text{ é relação sobre } A) \longleftrightarrow R \subset A \times A$$

1.2 Funções

Indicaremos por letras minúsculas, as relações de um conjunto A num conjunto B, chamados de funções. Definidas por:

$f \subset A \times B$ é uma **função** de A em B se, para cada $x \in A$, existe um único $y \in B$ de maneira que xfy.

- Indicaremos que f é uma função de A em B com a notação: $f : A \longrightarrow B$.
- Ao invés de xfy, usaremos $y = f(y)$, para significar que $(x, y) \in f$.
- Se $y = f(x)$ (lê-se "y é igual a f de x").
- Dizemos que y é a **imagem** de x por f, ou que a x está associado y.
- Para toda função $f : A \longrightarrow B$ o conjunto A é chamado de **domínio** de f, e B é o seu contradomínio.

- O conjunto das imagens é chamado de **imagem de** f, e indicado por: $Im(f) = \{f(x)|x \in A\}$.

- Uma função $f : A \longrightarrow B$ se diz **injetora** se, para quaisquer $x, y \in A$, $x \neq y$ implica que, $f(x) \neq f(y)$ ou equivalente $f(x) = f(y)$ implica $x = y$

- Uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ é **sobrejetora** se $Im(f) = B$, ou seja, se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ de maneira que $f(x) = y$.

- Se uma função $A \longrightarrow B$ for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora é chamada **bijetora**.

- Sendo X um subconjunto de um conjunto A. A função $j : X \longrightarrow A$, definida por $j(x) = x$, para todo $x \in X$, é chamada **inclusão** de X em A

- Para $X = A$, caso particular, esta função chama-se **função identidade** de A e é indicada por id_A. Assim:

$$id_A : A \longrightarrow A$$

  e $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

- Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função qualquer. Para todo $X \subset A$ fica definida a restrição de f ao conjunto A que é a função indicada por $f|X$ e assim definida:

$$f|X : X \longrightarrow B$$
$$(f|X)(x) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

- Dadas duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, a função composta de f e g é a função:

$$g \circ f : A \longrightarrow C,$$

  definida de maneira que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in A$.

- Dada uma função $f : A \longrightarrow B$, se existir $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, então g é chamada inversa de f.

- A notação usual para a inversa de f é f^{-1}.

Proposição 1.1. *Para que exista a inversa de uma função $f : A \longrightarrow B$ é necessário e suficiente que f seja bijetora.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $x, y \in A$ e $f(x) = f(y)$. Então, $g(f(x)) = g(f(y))$, isto é, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ e como $g \circ f = id_A$, então $x = y$. Logo, f é injetora. Por outro lado, dado $b \in B$, como $f \circ g = id_B$, então $(f \circ g)(b) =$ b, o que é o mesmo que $f(g(b)) = b$. Mas $g(b) \in A$ e, portanto, dado $b \in B$, existe $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$, o que prova que f é sobrejetora.
($\Longleftarrow$) Por hipótese f é bijetora então a relação $g = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in f\}$ é uma função B em A. De fato, dizer que f é bijetora significa que para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$ ou seja, $(x, y) \in f$ e daí $(y, x) \in g$. Assim,

$$f(x) = y \longleftrightarrow g(y) = x$$

e portanto, para todo $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ o que mostra que $g \circ f = id_A$. Analogamente $f \circ g = id_B$.

$\square$

Consideremos uma função $f : A \longrightarrow B$. Um subconjunto $x \in A$, é chamado de **imagem direta** de X por f, e indica-se por $f(X)$, o seguinte subconjunto de B:

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

Para imagens diretas valem as seguintes propriedades:
Para toda função $f : A \longrightarrow B$:

- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $X \subset Y \subset A \Longrightarrow f(X) \subset f(Y)$
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, para qualquer $X, Y \subset A$
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$, para quaisquer $X, Y \subset A$.
- f é injetora, então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Seja $f : A \longrightarrow B$. Para qualquer $E \subset B$, a **imagem inversa** de E por f, indicada $f^{-1}(E)$, é o conjunto

$$f^{-1}(E) = \{x \in A | f(x) \in E\}$$

Sendo destacadas as seguintes propriedades:

- $E \subset F \subset B \Longrightarrow f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$
- $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$, para quaisquer $E, F \subset B$
- $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$, para quaisquer $E, F \subset B$
- $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$, para todo $E \subset B$
- $f^{-1}(E - F) = f^{-1}(E) - f^{-1}(F)$, para quaisquer $E, F \subset B$

  Sendo $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, então $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$, para todo $E \subset C$

- Considere as projeções $p_i : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow E_i (i = 1, 2, ..., n)$

  Para cada $A_i \subset E_i$ vale a seguinte igualdade:

$$p_i^{-1}(A_i) = E_1 \times ... \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \times ... \times E_n = x_i$$

Sejam A e I conjuntos e considere uma função f que a cada elemento i de I associa um subconjunto $A(i) \in \wp(A)$(conjunto das partes de A), ou seja, $f : I \longrightarrow \wp(A)$.

Considere a imagem direta de $f(I)$ que também é chamado de **família de subconjuntos** de A. Que também podem ser representados por: $(X_i)_{i \in I}$ ou apenas (X_i), onde cada X_i é um subconjunto de A.

Exemplo:
Se um conjunto de índices é $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, então uma família de subconjuntos é uma sequência finita $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de subconjuntos de A.

- Se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de A, defini-se a união $\bigcup_{i \in I} X_i$:

$$\bigcup X_i = \{x \in A |\text{ existe } i \in I \text{ e } x \in X_i\}$$

  Então um elemento de A esta na união se, e somente, se está em algum dos conjuntos da família.

- A interseção $\bigcap_{i \in I} X_i$, com a mesma observação feita acima, é definida por:

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \in A | x \in X_i, \text{ para qualquer, } i \in I\}.$$

Logo um elemento x de A pertence a $\bigcap X_i$ se, e somente se, x pertence a todos os conjuntos X_i da familia considerada.

Propriedades envolvendo operações com famílias de subconjuntos de um dado conjunto:

- $\bigcap_{i\in I}(\bigcap_{j\in J} X_{i,j}) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} X_{i,j}$
- $(\bigcap_{i\in I} X_i)\bigcup(\bigcap_{j\in J} Y_i) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(X_i \bigcup Y_j)$
- $(\bigcap X_i)^c = \bigcup X_i^c$ e $(\bigcup X_i)^c = \bigcap X_i^c$

  Se temos uma função $f : A \longrightarrow B$ e se $(X_i)_{i\in I}$ e $(Y_j)_{j\in J}$ são famílias de subconjuntos de A e B, respectivamente, então:

- $f(\bigcap X_i) = \bigcap f(X_i)$
- $f(\bigcup X_i) \subset \bigcup f(X_i)$, se injetora, vale a igualdade entre os dois membros.
- $f^{-1}(\bigcap Y_i) = \bigcap f^{-1}(Y_i)$
- $f^{-1}(\bigcup Y_i) = \bigcup f^{-1}(Y_i)$

1.3 Conjuntos Enumeráveis

Sendo A e B conjuntos quaisquer. Se existe uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$, então dizemos que A é equipotente ao conjunto B.
Vejamos que:

- Como para todo conjunto A, a função $id_A : A \longrightarrow A$ é bijetora, então todo conjunto é equipotente a si mesmo. Logo vale a propriedade reflexiva.
- Se A é equipotente a B, isto é, se existe $f : A \longrightarrow B$ bijetora, então, como $f^{-1} : B \longrightarrow A$ também é bijetora, B também é equipotente a A. Valendo assim a propriedade simétrica.
- Se A é equipotente a B e B é equipotente a C, então existem $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ bijetoras. Então $g \circ f : A \longrightarrow C$ também é bijetora e portanto A é equipotente a C. Sendo então transitiva.

No caso de uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$ iremos nos referir a A e B simplesmente como conjuntos equipotentes. Notação: $A \approx B$.

Um conjunto A se diz **finito** se $A = \emptyset$ ou, se existe $n \in \mathbb{N}^*$,(sendo $\mathbb{N}^*$ números naturais sem o 0), de maneira que $A \approx \{1, 2, ..., n\}$. Se A não é um conjunto finito, então dizemos que A é infinito. Então se A é infinito é o mesmo que dizer que A não é equipotente a nenhum dos subconjuntos $\{1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{N}^*$.

Da definição temos os seguintes resultados:

- Se $A \subset U$ é finito e se $x \in U - A$, então $A \cup \{x\}$ também é finito.
- Se A é um conjunto infinito, então $A - \{x\}$ também é infinito, qualquer que seja $x \in A$.

  Um conjunto A se diz **enumerável** se A é equipotente a algum subconjunto de $\mathbb{N}^*$

- Então todo conjunto finito é enumerável. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros também é enumerável pois, $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}^*$, onde $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}^*$.
- " Todo subconjunto de um conjunto enumerável A também é enumerável."

Seja X um conjunto enumerável e infinito, provemos que Y um subconjunto de X também é enumerável, por X ser enumerável existe uma função $g : X \longrightarrow \mathbb{N}$, onde g é injetora e $g(x_n) = n$ para todo n pertencente aos naturais e x_n pertencente a X, porque X é enumerável. Seja $Y \subset X$ e tomando uma função $f : g|Y$, onde $f : Y \longrightarrow \mathbb{N}$, temos que f é injetora, pois g é injetora e portanto é sobrejetora a imagem de f, que é um subconjunto de $\mathbb{N}$. Então concluímos que Y é enumerável.

- "São enumeráveis os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$."

Seja $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ dado por $h(n, m) = 2^n.3^m$, como 2 e 3 são primos entre si, segue que h é injetora, assim $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto Im(h)$ é bijetora, como $Im(h) \subset \mathbb{N}$ concluímos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável . O mesmo vale para $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, pois é subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.4 Números Reais

1.4.1 O corpo $\mathbb{R}$

Consideremos a adição $(x, y) \longmapsto x + y$ e a multiplicação $(x, y) \longmapsto xy$ em $\mathbb{R}$.

Valem as seguintes propriedades para as operações:

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \epsilon \mathbb{R}$

(ii) $x + y = y + x, \forall x, y \epsilon \mathbb{R}$

(iii) $x + 0 = x$, para todo $x \epsilon \mathbb{R}$

(iv) Para cada $x \epsilon \mathbb{R}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, $-x$, de maneira que $x + (-x) = 0$

(v) $x(yz) = (xy)z, \forall x, y, z \epsilon \mathbb{R}$

(vi) $xy = yx$, $\forall x, y \epsilon \mathbb{R}$

(vii) $x1 = x$, para todo $x \epsilon \mathbb{R}$

$(viii)$ Para cada $x \epsilon \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, indicado por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$

(ix) $x(y + z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \epsilon \mathbb{R}$.

Como a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ satisfazerem as propriedades acima, permite que consideremos a $\mathbb{R}$ um corpo, conforme designação usada em álgebra.

1.4.2 O corpo Ordenado $\mathbb{R}$

Considernado a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por "$x \leq y$". As propriedades básicas dessa relação são:

(i) $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

(ii) dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$

(iii) dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leq, y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$

(iv) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se uma das seguintes alternativas: $x \leq y$ ou $y \leq x$

(v) $x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$, para todo $z \in \mathbb{R}$

(vi) dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, então $0 \leq xy$.

Para cada par de elementos $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$, chama-se intervalo aberto de origem a e extremidade b, e é indicado por $]a, b[$. E o conjunto $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ chama-se intervalo fechado de origem a e extremidade b, e é indicado por $[a, b]$.

- Seja $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Dizemos que A é **limitado superiormente** se existe $L \in \mathbb{R}$ de maneira que $x \leq L$, para todo $x \in A$. Cada elemento L nessa condições é chamado de **limite superior** de A.

- Se existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $l \leq x$, para qualquer $x \in A$, dizemos que A é **limitado inferiormente** e que cada elemento de l com essa propriedade é um **limite inferior** de A.

Dado $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$, um elemento $S \in \mathbb{R}$ se diz **supremo** de A, e é indicado por $S = sup(A)$, se:

1. S é limite superior de A;

2. Se $S' \in \mathbb{R}$ é um limite superior de A, então $S \leq S'$. Daí, S é o menor dos limites superiores de A.

Defini-se o **ínfimo** de A, notação: $inf(A)$, um elemento $s \in \mathbb{R}$, é chamado de infimo se:

1. s é limite inferior de A;

2. Se $s' \in \mathbb{R}$, se s' é um limite inferior de A, então $s' \leq s$.

Então, s é o maior dos limites inferiores de A.

Proposição 1.2. *Seja $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Um elemento $S \in \mathbb{R}$ é o supremo de A se, e somente se, S é um limite superior de A e, dado $\epsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe $a \in A$ de maneira que $S - \epsilon < a$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que dado $\epsilon > 0$ tivessemos $x \leqslant S - \epsilon$, para todo $x \in A$. Então $S - \epsilon$ seria um limite superior de A e como $S - \epsilon < S$ haveria uma contradição com a definição de supremo. Logo deve existir $a \in A$ de maneira que $S - \epsilon < a$.

($\Leftarrow$) Seja S' um limite superior de A e suponhamos $S' < S$. Sendo $\epsilon = S - S'$ então $\epsilon > 0$ e $S' = S - \epsilon$. Por hipótese decorre então que existe $a \in A$ tal que $S' < a$ o que é absurdo, uma vez que S' é um limite superior de A. $\square$

Capítulo 2

Espaços Métricos

2.1 Métricas

2.1.1 Definição de Espaço Métrico

Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ seja $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$, sendo $\mathbb{R}_+$ os reais positivos, e indicaremos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através de uma função d. Então, dizemos que d é métrica sobre M se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y. Um par (M, d), onde d é a métrica sobre M, o que é chamado de **espaço métrico**.

Seja (M, d) um espaço, métrico. Dado $S \subset M(S \neq \emptyset)$, se considerarmos a restrição $d_1 = d|S$, então d_1 é uma métrica sobre S e obtemos, de maneira natural, o espaço métrico (S, d_1) dizemos que S é um **subespaço** do espaço métrico M e que a métrica d_1 foi induzida por d sobre M. A métrica de subespaço é indicada do mesmo modo que a de M, ou seja, $d_1 = d$.

Proposição 2.1. *Se x,y, e z são pontos de um espaço métrico* (M, d), *então* $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Demonstração. De (3), decorre que:

$d(x,y) - d(x,z) + \leq d(z,y)$

Por outro lado, podemos expressar a desigualdade por:

$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$ implica, $-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z)$

Então das duas expressões teremos:

$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$ □

2.1.2 Exemplos de Espaços Métricos

1. Métrica zero-um ou Métrica discreta:

   Dado $M \neq \emptyset$ defini-se $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

   $d(x,x) = 0$ para todo $x \in M$ e $d(x,y) = 1$ sempre que $x \neq y$.

   A função d é uma métrica, pois, ao verificar por exemplo, o axioma 3, um dos casos é aquele em que $x \neq y$ e $y = z$. Quando isso ocorre teremos que $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = 1$ e $d(z,y) = 0$.

   Logo, $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$, ou seja

   $1 = 1 + 0$.

2. A reta usual:

   Considerando o conjunto dos números reais a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $d(x,y) = |x-y|$, é uma métrica sobre $\mathbb{R}$. Como a verificação de (1) e (2) é verificado de forma imediata, então para a (3), temos:

   $|x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$.

3. Espaços Vetoriais Normados:

   Um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{R}$ é um conjunto E no qual estão definidas duas leis de composição, a interna $(u,v) \longmapsto u+v$ (adição), e a externa, de $\mathbb{R} \times E$ em E, $(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$ (multiplicação por escalares), onde se verificam as condições:

   (i) $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in E$

   (ii) $u + v = v + u$, para todo $u, v \in E$

   (iii) Existe $0 \in E$ tal que $0 + u = u$, para todo $u \in E$

   (iv) Para todo $u \in E$, existe $(-u) \in E$ de maneira que $u + (-u) = 0$

   (v) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in E$.

(vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in E$.

(vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \beta v$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $u, v \in E$.

$(viii)$ $1u = u$, para todo $u \in E$.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores.

Uma **norma** sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $u \in \mathbb{R}$ um número real não negativo, indicado por $||u||$, é chamado de "norma de u", de maneira que:
(n_1) $\| u \| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$
(n_2) $\| \alpha u \| = |\alpha| ||u||$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e para todo $u \in E$
(n_3) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$.
Note que podemos definir a seguinte métrica em um espaço vetorial normado:
Dizemos que $d(u, v) = \| u - v \|$ é a métrica induzida pela norma

4. Espaço de funções reais contínuas definidas num intervalo fechado:

   Para um intervalo fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$ indiquemos $\ell[a, b]$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$. Com relação a adição de funções e a multiplicação de uma função por um escalar. $\ell[a, b]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. E a função $f \longmapsto \| f \| = \int_a^b |f(x)|dx$ é uma norma sobre esse espaço uma vez que $\| f \| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \ell[a, b]$ e,

   - $\| f \| = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b] \Longleftrightarrow f = 0$
   - $\| \alpha f \| = \int_a^b |(\alpha f)(x)|dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|dx = |\alpha| \| f \|$
   - $\| f + g \| = \int_a^b |(f + g)(x)|dx = \int_a^b |f(x) + g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = \| f \| + \| g \|$.

Assim $\ell[a, b]$ é um espaço métrico sendo sua métrica definida da seguinte forma: $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$, para quaisquer $f, g \in \ell[a, b]$.

2.1.3 Produtos de Espaço Métrico

Sejam $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. Veremos que é possível fazer o conjunto $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, se tornar um espaço métrico, através de métrica ligadas

as métrica $d_1, d_2, \cdots, d_n$.
Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ pontos de $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, e as funções D, D_1 e $D_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$, definidas do seguinte modo:

- $D(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$
- $D_1(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)$
- $D_2(x, y) = max\{d_1(x_1, y_1), \cdots, d_n(x_n, y_n)\}$

2.1.4 Distância entre ponto e conjunto

Lembrando que a distância na geometria: é a distância de um ponto p a um plano α é a medida do segmento pq contido na perpendicular a α pelo ponto p.

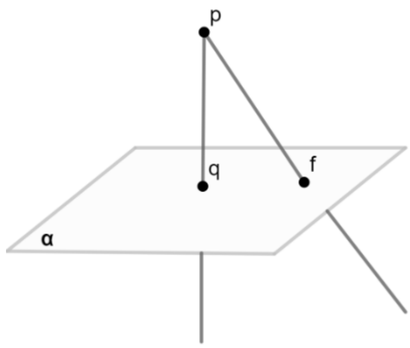


Figura 2.1: Distância entre ponto e conjunto

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Dados $p \in M$ e $A \subset M(A \neq \emptyset)$, é chamado de **distância de p ao conjunto** A, e é indicado por $d(p, A)$, o seguinte número real não negativo:
$d(p, A) = inf\{d(p, x) | x \in A\}$

Note que a existência da distância de $d(p, A)$ está garantida pois o conjunto das $\{d(p, x) | x \in A\}$, está limitado inferiormente pelo 0.

Exemplo: Considere sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. Se $p = 0$ e $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$, temos que $d(p, A) = 0$.

Como dado $\epsilon > 0$, existe um número $n \in \mathbb{N}^*$, de maneira que $d(0, \frac{1}{n}) = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$. Logo $d(0, A) = inf\{d(0, \frac{1}{t}) = \frac{1}{t} | t \in \mathbb{N}^*\} = 0$, então $d(0, A) = 0$.

Proposição 2.2. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M (A \neq \emptyset)$ e $p, q \in M$, então $|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q)$.*

Demonstração. Tomando um ponto $x \in A$. Temos $d(p, A) \leq d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x)$, então $d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, x)$. Como a desigualdade vale para todo $x \in A$, então a constante $d(p, A) - d(p, q)$ é um limite inferior do conjunto dos elementos tipo $d(q, x)$, com $x \in A$. Onde, $d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, A)$, como permutando p e q a desigualdade continua valendo, ou seja $d(q, A) - d(p, q) \leq d(p, A)$, então $|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q)$. □

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Dados dois subconjuntos A e B do conjunto M, não vazios, chama-se **distância de A a B**, e indica-se por $d(A, B)$, o número real não negativo definido por:

$$d(A, B) = inf\{d(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Como o conjunto das distâncias é limitado inferiormente pelo 0, isso garante a existência da $d(A, B)$ para qualquer subconjunto não vazio $A, B \in M$.

Definição: Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico M. Suponha que existe um $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $d(x, y) < k$, para quaisquer $x, y \in A$. Nestas condições dizemos que A é um conjunto limitado e o supremo do conjunto $\{d(x, y) | x, y \in A\}$ é o **diâmetro** do conjunto A e é denotado por:

$$d(A) = sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$$

Se o conjunto A não é limitado, então temos que $d(A) = \infty$.

2.2 Bolas Abertas

2.2.1 Definição de Bola Aberta

Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d). Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a **bola de centro p e raio ϵ**, que indicaremos por $B(p, \epsilon)$, é o seguinte subconjunto de M:

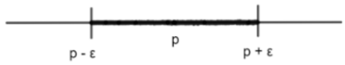
$$B(p,\epsilon)=\{x\in M|d(x,p)<\epsilon\}$$

Exemplos:

1. Bolas num espaço cuja métrica é a "zero-um". Seja (M,d) um espaço discreto e consideremos $p\in M$. Podemos considerar 2 casos:

   - $0<\epsilon\leq 1$. Nesse caso $B(p,\epsilon)=\{x\in M|d(x,p)<\epsilon\}=p$, porque o único ponto onde a distância a p é menor que 1 é o próprio p.
   - $1<\epsilon$. Quando isto acontece, $B(p,\epsilon)=\{x\in M|d(x,p)<\epsilon\}=M$, porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a um, então menor que ϵ.

2. Bolas no reta usual: na reta real a bola de centro $p\in\mathbb{R}$ e raio ϵ é o conjunto $B(p,\epsilon)=\{x\in\mathbb{R}||x-p|<\epsilon\}=\{x\in\mathbb{R}|p-\epsilon<x<p+\epsilon\}=]p-\epsilon,p+\epsilon[$.

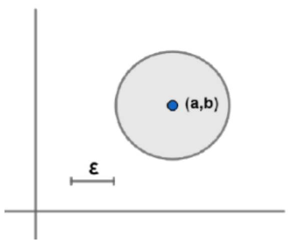


3. Bolas no espaço $\mathbb{R}^2$: como no espaço $\mathbb{R}^2$ ja foram definidas três métricas:

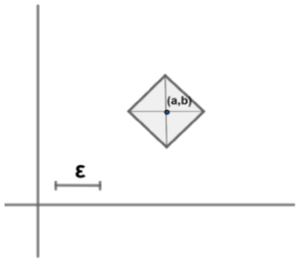
   sendo $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$

   - $D(x,y)=\sqrt{d(x,y)+d'(x,y)}$
   - $D_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$
   - $D_2(x,y)=\text{máx}\ \{x_1-y_1|;|x_2-y_2|\}$

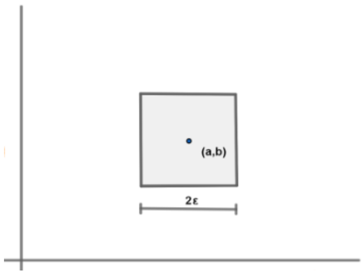
   Sendo $p=(a,b)$ um ponto fixo de $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\epsilon>0$, segundo a métrica D, é o conjunto $B(p,\epsilon)=\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2|(X-a)^2+(Y-b)^2<\epsilon^2\}$ onde temos o grafico:



Quando a métrica for D_1, uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$ é o conjunto $B(p, \epsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 | |X-a|+|Y-b| < \epsilon\}$, onde o gráfico da relação dada por: $|X-a|+|Y-b| < \epsilon$ é um quadrado aberto, ou seja sem os lados, de diagonais paralelas aos eixos coordenados com medida de 2ϵ, com centro $p = (a, b)$, como mostra o gráfico:



Por último, quando temos a métrica D_2, $B(p, \epsilon) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2|$ máx $\{|X - a|, |Y - b|\} < \epsilon\}$, onde o gráfico da relação máx $\{|X - a|, |Y - b|\} < \epsilon$, representa no plano a bola $B(p, \epsilon)$, onde o interior é o quadrado de centro $p = (a, b)$, cujos lados são paralelos aos eixos coodernados com medidas de 2ϵ, como no gráfico:



Sejam (M, d), (n, d') espaços métricos, observe que podemos definir D, D_1, D_2 em $M \times N$ da seguinte forma:
$D((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{(d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)}$
$D_1((x_1, y_1); (x_2, y_2) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$
$D_2((x_1, y_1); (x_2, y_2) =$ máx $\{d(x_1, x_2); d'(y_1, y_2)\}$

Definição: Dado um espaço métrico (M, d), um ponto $p \in M$ se diz **ponto isolado** de M se existir $\epsilon > 0$ de maneira que $B(p, \epsilon) = p$.

Exemplos:

1. Seja (M, d) um espaço onde a métrica é a zero-um. Então todo ponto $p \in M$ é isolado porque, tomando $\epsilon \in \mathbb{R}$ de maneira que $0 < \epsilon \leqslant 1$, então $B(p, \epsilon) = \{p\}$.

2. Pode ocorrer de todos os pontos de um espaço métrico serem isolados sem que a métrica seja a zero-um. Se em $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ considerarmos a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, teremos:

$$B(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{N} | |x - p| < \epsilon\}$$

e portanto, se $0 < \epsilon \leqslant 1$

$$B(p, \epsilon) = \{p\}.$$

2.2.2 Bolas Abertas e Produto Cartesiano de Espaços Métricos

Como vimos anteriormente, quando descrevemos as bolas abertas no espaço $\mathbb{R}^2$, em relação as três métricas consideradas, uma métrica usada é a D_2, definida por

$$D_2(x, y) = \text{máx } \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, se $p = (a, b)$, então $B(p, \epsilon) =]a - \epsilon, a + \epsilon[\times]b - \epsilon, b + \epsilon[$

Ou seja, $B(p, \epsilon)$ é o produto cartesiano das bolas de centro a e raio ϵ e de centro b e raio ϵ, ambas em $\mathbb{R}$ com métrica usual.
Em símbolos:

$$B(p, \epsilon) = B(a, \epsilon) \times B(b, \epsilon)$$

Proposição 2.3. *Sejam $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$ espaços métricos e consideremos sobre $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ a métrica D_2 definida por $D_2(x, y) = \text{máx } \{d_1(x_1, y_1), \cdots, d_n(x_n, y_n)\}$ para quaisquer $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ de M. Com essas condições, vale então a igualdade, para todo $a = (a_1, \cdots, a_n) \in M$:*

$$B(a, \epsilon) = B(a_1, \epsilon) \times \cdots \times B(a_n, \epsilon).$$

Demonstração. Seja $p = (p_1, \cdots, p_n)$ um ponto arbitrário de M.
Então, $p \in B(a, \epsilon) \iff max\{d_1(p_1, a_1), \cdots, d_n(p_n, a_n)\} < \epsilon \iff d_i(p_i, a_i) < \epsilon(i = 1, 2, \cdots, n) \iff p_i \in B(a_i, \epsilon)(i = 1, 2, \cdots, n) \iff p \in B(a_1, \epsilon) \times \cdots \times B(a_n, \epsilon)$. $\square$

2.2.3 Propriedades Básicas das Bolas Abertas

As propriedades a seguir se referem a bolas genéricas $B(p, \epsilon)$ de um espaço métrico arbitrário (M, d).

(P_1) Dadas $B(p, \epsilon)$ e $B(p, \delta)$, se $\epsilon \leqslant \delta$, então $B(p, \epsilon) \subset B(p, \delta)$.

- Se $x \in B(p, \epsilon)$, então $d(x, p) < \epsilon$. Como $\epsilon \leqslant \delta$, concluímos que $d(x, p) < \delta$ e portanto que $x \in B(p, \delta)$.

(P_2) Dado $q \in B(p, \epsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q, \delta) \subset B(p, \epsilon)$.

- Tomando $\delta = \epsilon - d(p, q)$, e mostremos que $B(q, \delta) \subset B(p, \epsilon)$.

Seja $x \in B(q, \delta)$, a desigualdade triangular nos garante que $d(x, p) \leqslant d(x, q) + d(q, p)$ Como $d(x, q) < \delta = \epsilon - d(p, q)$, então $d(x, p) < \epsilon - d(p, q) + d(p, q) = \epsilon$ o que garante que $x \in B(p, \epsilon)$.

(P_3) Sejam $B(p, \epsilon)$ e $B(q, \delta)$ bolas distintas. Se $t \in B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$, então existe $\lambda > 0$ tal que $B(t, \lambda) \subset B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$.

- Devido a P_2 existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que $B(t, \lambda_1) \subset B(p, \epsilon)$ e $B(t, \lambda_2) \subset B(q, \delta)$.

Se $\lambda = min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, então $B(t, \lambda)$ está contida tanto em $B(t, \lambda_1)$ como em $B(t, \lambda_2)$, então

$$B(t, \lambda) \subset B(p, \epsilon) \cap B(q, \delta)$$

(P_4) Sendo p e q dois pontos distintos de um espaço M. Se $d(p, q) = \epsilon$, então $B(p, \frac{\epsilon}{2}) \cap B(q, \frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$

- Supondo que exista $x \in B(p, \frac{\epsilon}{2}) \cap B(q, \frac{\epsilon}{2})$. Então $x \in B(p, \frac{\epsilon}{2})$ e $x \in B(q, \frac{\epsilon}{2})$ e portanto $d(x, p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x, q) < \frac{\epsilon}{2}$. Onde, pela desigualdade triangular:

$$\epsilon = d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

o que é absurdo.

(P_5) Dadas as bolas $B(p,\epsilon)$ e $B(q,\delta)$, se $\epsilon+\delta \leqslant d(p,q)$, então

$$B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta) = \emptyset$$

- Suponhamos o contrário, que existe um ponto $x \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$. Então $d(x,p) < \epsilon$ e $d(x,q) < \delta$ e portanto

$$d(p,q) \leqslant d(p,x) + d(x,q) < \epsilon + \delta \leqslant d(p,q)$$

  o que é impossível.

(P_6) O diâmetro de uma bola $B(p,\epsilon)$ é menor que ou igual a 2ϵ, isto é, $d(B(p,\epsilon)) \leqslant 2\epsilon$.

- Sendo x e y pontos arbitrários de $B(p,\epsilon)$. Então

$$d(x,y) \leqslant d(x,p) + d(p,y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

  Onde, $\sup\{d(x,y)|x,y \in B(p,\epsilon)\} \leqslant 2\epsilon$, ou seja, $d(B(p,\epsilon)) \leqslant 2\epsilon$.

2.3 Métricas e Normas Equivalentes

2.3.1 Métricas Equivalentes

Consideremos duas métrica d e d', não necessariamente iguais sobre um mesmo conjunto M. Indicaremos por $B_d(p,\epsilon)$ uma bola de centro p e raio ϵ, segundo a métrica d e por, $B_{d'}(p,\epsilon)$ a bola de centro p e raio ϵ quando se tratar da métrica d'.

Definição: Seja d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Diz-se que d e d' são métricas **equivalentes** se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p,\epsilon)$, existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p,\lambda) \subset B_d(p,\epsilon)$ e, dada uma bola qualquer $B_{d'}(p,\epsilon)$ existe $\lambda > 0$ de forma que $B_d(p,\lambda) \subset B_{d'}(p,\epsilon)$. Se d e d' são métrica equivalentes, indicaremos este fato por $d \sim d'$.

Proposição 2.4. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Se existem números reais $r, s > 0$ tais que*

$$rd(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant sd(x,y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, então $d \sim d'$.

Demonstração. Seja p um ponto de M e consideremos a bola $B_d(p,\epsilon)$. Então

$$B_{d'}(p, r\epsilon) \subset B_d(p,\epsilon)$$

De fato, dado $x \in B_{d'}(p, r\epsilon)$, então $d'(x,p) < r\epsilon$ e como $rd(x,p) \leqslant d'(x,p)$, obtemos que $rd(x,p) < r\epsilon$. Onde $d(x,p) < \epsilon$ e então $x \in B_d(p,\epsilon)$. Consideremos agora a bola $B_{d'}(p,\epsilon)$ e provemos que $B_d(p, \frac{\epsilon}{s}) \subset B_{d'}(p,\epsilon)$. Dado $x \in B_d(p, \frac{\epsilon}{s})$, então $d(x,p) < \frac{\epsilon}{s}$ e daí $sd(x,p) < \epsilon$. Porém $d'(x,p) \leqslant sd(x,p)$ e portanto $d'(x,p) < \epsilon$ o que garante que $x \in B_{d'}(p,\epsilon)$. $\square$

Usando a Prop. 2.4 podemos verificar que as métricas D, D_1, D_2 são equivalentes em $\mathbb{R}^{\not\vDash}$.

2.3.2 Normas Equivalentes

Para diferenciar as duas normas que não necessariamente serão iguais, usaremos a notação $\|\|$ para uma delas, e $\|\|'$para a outra. E as métricas induzidas sobre um espaço vertorial E, por essas normas serão indicadas por d e d'.

Definição: Duas normas sobre o mesmo espaço vetorial E dizem-se **equivalentes** se, e somente se, as métricas induzidas por essas normas sobre E são equivalentes.
Se $\|\|$ e $\|\|'$ são as normas consideradas e d e d' as métricas induzidas, respectivamente por essas normas, então a equivalência definida significa: dada uma bola $B_d(p,\epsilon)$, com $p \in E$, existe uma bola $B_{d'}(p,\lambda)$ de modo que

$$B_d(p,\lambda) \subset B_{d'}(p,\epsilon).$$

Proposição 2.5. *Duas normas $\|\|$ e $\|\|'$ sobre o mesmo espaço vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ de maneira que*

$$r \parallel u \parallel \leqslant \parallel u \parallel' \leqslant s \parallel u \parallel$$

para qualquer $u \in E$.

Demonstração. $(\Leftarrow)$ Sendo $u, v \in E$, temos por hipótese

$$r \parallel u - v \parallel \leqslant \parallel u - v \parallel' \leqslant s \parallel u - v \parallel$$

ou seja

$$rd(u,v) \leqslant d'(u,v) \leqslant sd(u,v)$$

para quaisquer $u, v \in E$. Pela proposição 9.1 temos que $d \sim d'$ o que por sua vez, significa que as normas, por definição são equivalentes.

($\Rightarrow$) Por hipótese as normas dadas são equivalentes. Logo, dada a bola $B_d(0,1)$ existe uma bola $B_{d'}(0,\lambda)$ de modo que

$$B_{d'}(0,\lambda) \subset B_d(0,1)$$

Tomando um número real r tal que $0 < r < \lambda$, o vetor $\frac{ru}{\|u\|'}$, para todo $u \in E$, $u \neq 0$, pertence a bola $B_{d'}(0,\lambda)$, pois

$$r = \frac{r\|u\|'}{\|u\|'} = \| \frac{ru}{\|u\|'} \|' < \lambda$$

logo esse vetor também pertence a bola $B_d(0,1)$ então,

$$\| \frac{ru}{\|u\|'} \|' < 1$$

ou seja

$$r \| u \| < \| u \|'$$

Por outro lado, dada a bola $B_{d'}(0,1)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(0,\lambda) \subset B_{d'}(0,1)$. Tomando um número real s tal que $0 < \frac{1}{s} < \lambda$. Então, para todo $u \in E, u \neq 0$, o vetor $\frac{u}{s\|u\|}$ pertence a $B_d(0,\lambda)$, pois

$$\| \frac{u}{s\|u\|} \| = \frac{\|u\|}{s\|u\|} = \frac{1}{s} < \lambda$$

Logo, também pertence a bola $B_{d'}(0,1)$, pois

$$\| \frac{u}{s\|u\|} \|' < \lambda < 1$$

ou seja

$$\| u \|' < s \| u \|$$

Potanto,

$$r \| u \| < \| u \|' < s \| u \|$$

para todo vetor $u \neq 0$.

Se considerar o também o vetor nulo de E teremos então que existem $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ de maneira que,

$$r \| u \| \leq \| u \|' \leq s \| u \|$$

para qualquer $u \in E$.

□

2.4 Sequências em Espaços Métricos

2.4.1 Sequências

Sendo (M, d) um espaço métrico. Uma sequência é toda função $n \mapsto x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M e a notação para determinar uma sequência é $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, ou (x_n).

- Dada uma sequência (x_n), cada imagem x_n é chamada de termo da sequência. Logo, o conjunto de termos dessa sequência é:

$$\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\} = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é **limite** de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p, \epsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B(p, \epsilon)$$

- Para indicar que p é limite da sequência (x_n) se usa a notação $lim x_n = p$, ou $x_n \longrightarrow p$.
- E para este fato, dizemos que x_n é uma **sequência convergente**, ou que (x_n) **converge** para p.

Proposição 2.6. *Uma sequência (x_n) de elementos de M converge para $p \in M$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um índice r de maneira que*

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \epsilon$$

Demonstração. Segue da definção de bola, pois

$$x_n \in B(p, \epsilon) \Longleftrightarrow d(x_n, p) < \epsilon.$$

□

Proposição 2.7. *Seja (x_n) uma sequência convergente de um espaço métrico M. Então é único o limite de sequência.*

Demonstração. Suponhamos $lim x_n = p$ e $lim x_n = q$. Se $p \neq q$, então $\epsilon = \frac{d(p,q)}{2}$ é maior que zero e portanto existem índices r, s de maneira que

$$n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \epsilon$$
$$n \geqslant s \Longrightarrow d(x_n, q) < \epsilon$$

Tomando $t = \text{máx}\ \{r, s\}$, então

$$n \geqslant t \Longrightarrow d(x_n, p) < \epsilon \text{ e } d(x_n, q) < \epsilon$$

Daí, para todo $n \geqslant t$:

$$d(p, q) \leqslant d(p, x_n) + d(x_n, q) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(p, q)$$

o que é absurdo. □

Proposição 2.8. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre um conjunto M. Então uma sequência (x_n) de pontos de M converge no espaço (M, d) para um ponto $p \in M$ se, e somente se, essa converge em (M, d') para o mesmo ponto p.*

Demonstração. Por hipótese $x_n \longrightarrow p$ no espaço (M, d).
Dado uma bola $B_{d'}(p, \epsilon)$, como $d \sim d'$, existe $\lambda > 0$ de maneira que

$$B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \epsilon)$$

Pela hipótese, temos que $r > 0$ tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B_d(p, \lambda)$$

e portanto

$$n \geqslant r \longleftrightarrow x_n \in B_{d'}(p, \epsilon)$$

o que prova que $x_n \longrightarrow p$ em (M, d'). □

Seja (x_n) uma sequência $S \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ é uma **subsequência** de x_n, se S é infinito.

Proposição 2.9. *Se uma sequência (x_n) de pontos de um espaço M converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p.*

Demonstração. Seja $(x_{r1}, x_{r2}, \cdots)$ uma subsequência da sequência dada e consideremos $\epsilon > 0$. Pela hipótese, temos que $lim x_n = p$, então existe k tal que

$$n \geqslant k \Longrightarrow d(x_n, p) < \epsilon$$

Como cada $r_i \in N$ e $r_1 < r_2 < \cdots$, então existe $r_t > k$ e portanto, para todo $r_i \geqslant r_t$ vale:

$$d(x_{ri}, p) < \epsilon$$

E portanto $lim\ x_{ri} = p$.

□

Definição: Uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico M se diz **limitada** se o conjunto $\{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$ dos termos dessa sequência é limitado, ou seja, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_s) < k$ para quaisquer termos $r, s \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 2.10. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja x_n uma sequência de pontos de um espaço M, convergente para $p \in M$. Dada a bola $B(p, 1)$, então existe um índice r tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow x_n \in B(p, 1).$$

Seja $k >$ máx $\{d(x_i, p) | i = 1, \cdots, r-1\}$ e consideremos a bola $B(p, \epsilon)$, onde $\epsilon =$ máx $\{1, k\}$. Então todos os pontos do conjunto $\{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$ pertencem a essa bola e portanto, para quaisquer termos x_i e x_j da sequência:

$$d(x_i, x_j) \leqslant d(x_i, p) + d(p, x_j) < 2\epsilon$$

o que prova que a sequência (x_n) é limitada.

□

- Nem toda sequência limitada é convergente.

Exemplo: A sequência $(1, 2, 1, 2, \cdots)$ é limitada, mas não é convergente.

2.4.2 Sequência num Espaço Produto

Sejam M e N espaços métricos arbitrários. Considerando sobre $M \times N$ uma métrica vista anteriormente no produto cartesiano. Uma sequência de pontos de $M \times N$, sendo definida por

$$((x_1, y_1); (x_2, y_2); \cdots)$$

onde cada $x_i \in M$ e cada $y_i \in N$, determina a sequência (x_n), de pontos de M, e a sequência (y_n), de pontos de N.

Com isso, estabeleceremos agora a condição de convergência de $((x_n, y_n))$ em termos da convergência das sequências $(x_n)e(y_n)$.

Proposição 2.11. *Uma sequência $((x_n, y_n))$ de pontos do produto $M \times N$ de dois espaços métricos M e N converge para $(p, q) \in M \times N$ se, e somente se,*

$$x_n \longrightarrow p \text{ em } M$$

e

$$y_n \longrightarrow q \text{ em } N$$

Demonstração. Por D_1 (soma), indicaremos por d tanto a métrica de M como a de N. $(\Rightarrow)$ Seja $\epsilon > 0$. Então existe um índice r tal que

$$n \geqslant r \Longrightarrow D_1((x_n, y_n); (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \epsilon$$

Consequentemente, para todo $n \geqslant r$, temos

$$d(x_n, p) < \epsilon \text{ e } d(y_n, q) < \epsilon$$

o que nos garante que $lim x_n = p$ e $lim y_n = q$.

$(\Leftarrow)$ Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existem índices r e s tais que

$$(n \geqslant r \Longrightarrow d(x_n, p) < \tfrac{\epsilon}{2}) \text{ e } (n \geqslant s \Longrightarrow d(y_n, q) < \tfrac{\epsilon}{2}$$

Considerando $t = \text{máx } r, s$, então

$$n \geqslant t \Longrightarrow D_1((x_n, y_n); (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Onde $(x_n, y_n) \longrightarrow (p, q)$. $\square$

Exemplo: No espaço $\mathbb{R}^2$ a sequência $((1, 2), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{3}, 2), \cdot)$ converge para $(0, 2)$, uma vez que $lim \frac{1}{n} = 0$ e $(2, 2, 2) \longrightarrow 2$.

2.4.3 Sequências em Espaços Vetoriais Normados

Sequências em $\mathbb{R}$

No espaço $\mathbb{R}$ existem as chamadas **sequências monótonas** que compreendem os seguintes tipos:

- **Crescentes** são as sequências (x_n) tais que $x_r \leqslant x_{r+1}$, para qualquer índice r. Se $x_r < x_{r+1}$, para todo $r \geqslant 1$, então x_n se diz **estritamente crescente**.

- **Decrescente** são as sequências (x_n) para quais se tem $x_{r+1} \leqslant x_r$, para todo índice r. Quando $x_{r+1} < x_r$, para qualquer $r \geqslant 1$, então a sequência se diz **estritamente decrescente**.

Proposição 2.12. *Toda sequência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo desse conjunto.*

Demonstração. Suponhamos (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < \cdots$ e seja $p = sup\{x_n | n = 1, 2, 3, \cdots\}$. Provaremos que $lim x_n = p$. Dado $\epsilon > 0$, não se pode ter $x_n \leqslant p - \epsilon$ para todo índice n pois isto significaria a existência de um limite superior do conjunto x_n menor do que p. Onde para um certo índice r tem-se $p - \epsilon < x_r \leqslant p$ e daí

$$p - \epsilon < x_n < p + \epsilon$$

para todo $n \geqslant r$, ou seja

$$n \geqslant r \Longrightarrow |x_n - p| < \epsilon$$

Garantindo a afirmação de que $lim x_n = p$. □

Proposição 2.13. *(Conservação de sinal)*

(a) *Se (x_n) é um sequência em $\mathbb{R}$ e se $lim\ x_n = p > 0$, então existem um índice r e uma constante $c > 0$ de maneira que $x_n > c$, para todo $n \geqslant r$.*

(b) *Se $lim\ x_n = p < 0$, então existe uma constante $c < 0$ e existe um índice r tal que $x_n < c$ para qualquer $n \geqslant r$.*

Demonstração. (a) Tomemos $\epsilon = \frac{p}{2}$. Então existe um índice r tal que para $n \geqslant r$ se tem $|x_n - p| < \frac{p}{2}$, ou seja, $-\frac{p}{2} < x_n - p < \frac{p}{2}$. Ou seja $\frac{p}{2} < x_n < \frac{3p}{2}$ para qualquer $n \geqslant r$. Basta tomar $c = \frac{p}{2}$.

(b) Análogo ao item (a) □

Capítulo 3

A Topologia dos Espaços Métricos

Definição: Seja (M,d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz **aberto** se, para todo $p \in A$, existe um número real $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \subset A$.

Exemplos:

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{A}$ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M,d). Então:*

(i) $\emptyset, M \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in A \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

(iii) *Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \in \mathcal{A}$, então $\cup A_i \in \mathcal{A}$.*

Demonstração.

(i) $\emptyset$ é aberto pelo fato de não conter pontos, não podendo então contrariar a definição. Quanto a M, toda bola de centro em um ponto $p \in M$ é um subconjunto de M pela definição.

(ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p,\epsilon) \subset A$ e $B(p,\lambda) \subset B$. Então, supondo $\epsilon \leqslant \lambda$ a propriedade (P_1) de bolas abertas nos garante que

$$B(p,\epsilon) \subset B(p,\lambda)$$

Onde, $B(p,\epsilon) \subset A \cap B$.

(iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\epsilon > 0$ vale a relação $B(p,\epsilon) \subset A_t$. Logo, $B(p,\epsilon) \subset \cup A_i$.

□

Proposição 3.2. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre M. Se $\mathcal{A}$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d) e $\mathcal{A}'$ é a coleção dos conjuntos abertos de $(M, d)'$, então $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{A}$ e tomemos $p \in A$. Como $A \in \mathcal{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(p, \epsilon) \subset A$. Da equivalência $d \sim d'$ decorre que existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \epsilon)$. Daí, $B_{d'}(p, \lambda) \subset A$ o que mostra que $A \in \mathcal{A}'$. E assim, provamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. □

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado **ponto interior** ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$.

• O conjunto dos pontos interiores de A é chamado **interior** de A e é indicado por $\mathring{A}$.

• $\mathring{A} \subset A$.

Exemplos: Na reta real, consideramos $A = [a, b[$ e $A' = [a, +\infty[$. Nos dois casos, apenas o ponto a não é interior, pois certamente o intervalo $]a - \epsilon, a + \epsilon[= A'(a, \epsilon)$ não esta contido em A nem em A'. Daí, $\mathring{A} =]a, b[$ e $\mathring{A}' =]a, +\infty[$.

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz **fechado** se, e somente se, F^c é **aberto**.

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

(i) $\emptyset, M \in \mathcal{F}$

(ii) $H, F \in \mathcal{F} \Longrightarrow H \cup F \in \mathcal{F}$

(iii) Se (F_i) é um família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \in \mathcal{F}$.

Definição: *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz **ponto aderente** ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$, vale a relação*

$B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

*O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se **fêcho** de A e é indicado por $\overline{A}$.*

• $A \subset \overline{A}$.

Exemplo:

Na reta real, se $A =]a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b[$, então $\overline{A} = [a, b]$. Portanto os pontos a e b são aderentes a esse intervalo pois qualquer bola que tenha centro em um deles, irá intercepta o conjunto A. Por outro lado, se $p < a$ ou $p > b$, logo $p \notin \overline{A}$, pois pelo primeiro caso, por exemplo se tomarmos $\epsilon = \frac{a-p}{2}$, a bola $B(p, \epsilon) =]p - \epsilon, p + \epsilon[$ não intercepta A

Proposição 3.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então, para todo $A \subset M$, vale a relação $(\overline{A})^c = \overline{A^c}$ (ou seja, o completar do fecho de A é igual ao fecho do complementar de A)*

Demonstração. $p \in (\overline{A}^c)$, ou seja, $p \notin \overline{A}$.
Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \cap A = \emptyset \longleftrightarrow \exists \epsilon > 0 : B(p, \epsilon) \subset A^c \longleftrightarrow p \notin \overline{A^c}$. □

Proposição 3.5. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, como $d(p, A) = inf\{d(p, x)|x \in A\} = 0$ existe então $a \in A$ de maneira que $0 \leqslant d(p, a) < \epsilon$. Caso contrário, teriamos $0 < \epsilon \leqslant d(p, x)$, para todo $x \in A$. O que não é possível, pela hipótese de que $d(p, A) = 0$. Então, $a \in B(p, \epsilon)$ e portanto $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, o que significa que $p \in \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $d(p, A) = \epsilon > 0$. Como por hipótese $B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, então existe $a \in A$ tal que $d(a, p) < \epsilon$ Como $\epsilon = d(p, A) \leqslant d(p, a) < \epsilon$ tendo aí, um absurdo. □

Proposição 3.6. *Para todo subconjunto não vazio A de um espaço métrico M vale a igualdade $d(A) = d(\overline{A})$.*

Demonstração. Como $A \subset \overline{A}$, então $d(A) \leqslant d(\overline{A})$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, para quaisquer $x, y \in \overline{A}$, existem $a, b \in A$ de modo que $d(x, a) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(y, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Daí $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \epsilon + d(A)$ e portanto $d(\overline{A}) \leqslant \epsilon + d(A)$ Ou seja, $0 \leqslant d(\overline{A}) - d(A) \leqslant \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Onde $d(\overline{A}) - d(A) = 0$ ou $d(A) = d(\overline{A})$ como queriamos provar. □

Proposição 3.7. *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, \cdots)$ de pontos de A tal que $lim\ x_n = p$.*

Demonstração. Como $p \in \overline{A}$, então cada uma das bolas abertas $B(p, \frac{1}{n})(n = 1, 2, \cdots)$, contém pontos de A. A sequência $(x_1, x_2, \cdots)$, onde $x_n \in A \cap B(p, \frac{1}{n})$, para todo $n \geqslant 1$, converge para p. Pois, de fato, toda bola $B(p,\epsilon)$ contém $B(p,\frac{1}{r})$ com $\frac{1}{r}<\epsilon$ e portanto, nessa condições, contém $x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots$. Como (x_n) é um sequência de pontos de A, então esta provada a proposição. $\square$

Definição: Dado um espaço métrico (M,d), um subconjunto $A \subset M$ se diz **denso** em M se $\overline{A} = M$.
Exemplo: $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Proposição 3.8. *Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo aberto $G \neq \emptyset$ desse espaço.*

Demonstração. Dado $p \in G$, existe $\epsilon > 0$ de maneira que $B(p,\epsilon) \subset G$. Como $\overline{A} = M$, então existe $a \in A$ tal que $d(p,a) < \epsilon$, ou seja, vale a relação $a \in B(p,\epsilon)$. Então, $a \in G$, e portanto $G \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Definição: Sejam (M,d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto $p \in M$ é **ponto de acumulação** de A se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, a interseção

$$(B(p,\epsilon) - p) \cap A$$

é um conjunto infinito. Ou seja, toda bola de centro p de conter infinitos pontos de A, distintos dos pontos de p. Dizemos que A' é o **conjunto do pontos de acumulação** de A

Proposição 3.9. *Seja M um espaço métrico. Então $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponhamos que exista $p \in F'$ tal que $p \notin F$. Então $p \in F^c$, que é aberto, e por isso existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \subset F^c$, isto é, $B(p,\epsilon) \cap F = \emptyset$. Como $p \in F'$, então $(B(p,\epsilon) - p) \cap F$ é infinito o que ocasiona que $B(p,\epsilon) \cap F$ também é infinito e portanto não vazio. O que é absurdo.

$\Leftarrow$ Seja $p \in F^c$. Como $F' \subset F$, então $F^c \subset (F')^c$ e daí $p \in (F')^c$. Onde, existe $\epsilon > 0$ de maneira que

$$(B(p,\epsilon) - p) \cap F = \emptyset.$$

Mas $p \notin F$, onde teremos a igualdade $B(p,\epsilon) \cap F = \emptyset$ que equivale a $B(p,\epsilon) \subset F^c$ o que garante que todos os pontos de F^c são interiores, ou seja, que F^c é aberto. Onde F é fechado. $\square$

3.1 Continuidade

3.1.1 Funções Contínuas

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto p se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

Definição: Sejam M e N espaço métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz **contínua** no ponto $p \in M$ se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

Então, dizer que f é contínua, significa que f é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 3.10. *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que*

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$, e seu raio ϵ, existe por hipótese, $\delta > 0$ tal que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

Sendo a bola $B(p, \delta)$, temos que a imagem direta por f está contida em $B(f(p), \epsilon)$. Pois, se $y \in f(B(p, \delta))$, então $y = f(x)$, com $x \in B(p, \delta)$, logo, $d(x, p) < \delta$, o que implica $d(f(x), p(x)) < \epsilon$, e assim, $y = f(x) \in B(f(p), \epsilon)$.

$\Leftarrow$ Seja $p \in M$ e $\epsilon > 0$ dado $d > 0$, tal que $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$. Seja $x \in M$ tal que:

$$d(x, p) < \delta$$

$$\text{Logo se, } x \in B(p, \delta) \Longrightarrow f(x) \in f(B(p, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon) \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

□

Proposição 3.11. *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua num ponto $p \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência (x_n) de pontos de M convergir para p acarretar que $(f(x_n))$ converge para $f(p)$. Isto é: se, somente se, $x_n \longrightarrow p$, implicar $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $B = B(f(p), \epsilon)$ onde $\epsilon > 0$ é arbitrário. Da continuidade de f vem que existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(B(p,\delta)) \subset B$$

Mas, como $x_n \longrightarrow p$, existe um índice r tal que, para todo índice $n \geqslant r$, se tem $x_n \in B(p,\delta)$. Daí segue que $f(x_n) \in f(B(p,\delta))$ e portanto que $f(x_n) \in B$ para qualquer índice $n \geqslant r$ o que prova que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.

($\Leftarrow$) Se f não fosse continua em p, existiria $\epsilon > 0$ tal que:

$$f(B(p,\delta)) \nsubseteq B(f(p),\epsilon), \text{ para todo } \delta > 0$$

Então,

$$\begin{aligned} f(B(p,1)) &\nsubseteq B(f(p),\epsilon) \\ f(B(p,\frac{1}{2})) &\nsubseteq B(f(p),\epsilon) \\ f(B(p,\frac{1}{3})) &\nsubseteq B(f(p),\epsilon) \end{aligned}$$

e para cada $n \geqslant 1$ existe $x_n \in B(p,\frac{1}{n})$ e $f(x_n) \notin B(f(p),\epsilon)$. Onde a sequência $(x_1, x_2, \cdots) \longrightarrow p$ e a sequência $(f(x_1), f(x_2), \cdots) \nrightarrow p$.

O que contradiz a hipótese. □

Proposição 3.12. *Dada a função $f : M \longrightarrow N$ as afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) *f é contínua*

(b) *Para todo $q \in N$ e todo $\lambda > 0$, $f^{-1}(B(q,\lambda))$ é um subconjunto aberto de M*

(c) *Para todo aberto G do espaço $N, f^{-1}(G)$ é um aberto de M*

(d) *Para todo fechado F do espaço $N, f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. (a) $(\Rightarrow)(b)$: Dado $p \in f^{-1}(B(q,\lambda))$, então $f(p) \in B(q,\lambda)$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(p),\epsilon) \subset B(q,\lambda)$. Sendo f contínua, existe $\delta > 0$ de maneira que $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$. Como, $B(p,\delta) \subset f^{-1}(f(B(p,\delta)))$, então $B(p,\delta) \subset f^{-1}(B(f(p),\epsilon)) \subset f^{-1}(B(q,\lambda))$. E assim, todo ponto $p \in f^{-1}(B(q,\lambda))$ é ponto interior e portanto $f^{-1}(B(q,\lambda))$ é aberta.

$(b) \Rightarrow (c)$ Se G é aberto em N, então $G = \cup B_i$, onde (B_i) é a família das bolas abertas contidas em G. Então, $f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$ e como cada $f^{-1}(B_i)$ é aberto, ocorre o mesmo para $f^{-1}(G)$.

$(c) \Rightarrow (d)$ F sendo fechado em N, então $G = F^c$ é aberto. Então, $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ é aberto em M por hipótese. Onde seu complementar $f^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado em M.

$(d) \Rightarrow (a)$ Seja p um ponto qualquer de M. Para um $\epsilon > 0$ qualquer seja $B = B(f(p), \epsilon)$. Então, B^c é um fechado em N que não contém $f(p)$ e portanto $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ é um fechado de M que não contém p. Logo, $f^{-1}(B)$ é aberto e $p \in f^{-1}(B)$. E tomando $\delta > 0$ de maneira que $B_1 = B(p, \delta) \subset f^{-1}(B)$ teremos que:

$$f(B_1) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$$

e então, f é continua em todo ponto de M.

$\square$

Proposição 3.13. *Sejam $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow P$ funções contínuas nos pontos $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente. Então, $g \circ f : M \longrightarrow P$ é continua no ponto p.*

Demonstração. Dada uma bola $B_2 = B((g \circ f)(p), \epsilon) = B(g(f(p)), \epsilon)$, a continuidade de g garante que existe uma bola $B_1 = B(f(p), \lambda)$ tal que $g(B_1) \subset B_2$.
Agora, a bola B_1, como f é continua em p, existe $B = B(p, \delta)$ de maneira que $f(B) \subset B_1$.
Daí decorre que $g(f(B)) = (g \circ f)(B) \subset g(B_1)$ então, $(g \circ f)(B) \subset B_2$. $\square$

Proposição 3.14. *Para que $f : M \longrightarrow M_1 \times \cdots \times M_n$ definida por $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$, para todo $x \in M$, seja contínua num ponto $p \in M$ é necessário e suficiente que cada uma das funções $f_1, \cdots, f_n$ seja continua no ponto p.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como $(p_i \circ f)(x) = p_i(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = f_i(x)$, para qualquer $x \in M$, então temos $p_i \circ f = f_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ e ainda como f e as projeções de p_i são continuas, então f_i também é contínua.

$(\Leftarrow)$ Usando a métrica D_1 sobre $M_1 \times \cdots \times M_n$. Seja $p \in M$. Dado $\epsilon > 0$ existe para cada índice $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ um número $\delta_i > 0$ tal que:

$$d(x, p) < \delta_i \Longrightarrow d(f_i(x), f_i(p)) < \tfrac{\epsilon}{n}$$

Tomando, $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$, temos que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f_i(x), f_i(p)) < \tfrac{\epsilon}{n} (i = 1, 2, \cdots, n) \Longrightarrow$$
$$d(f_1(x), f_1(p)) + \cdots + d(f_n(x), f_n(p)) < \epsilon$$

ou seja,

$$D_1(f(x), f(p)) < \epsilon$$

$\square$

Corolário 3.15. *Se* $f_1 : M_1 \longrightarrow N_1, \cdots, f_n : M_n \longrightarrow N_n$ *são funções contínuas, então:*

$$f : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow N_1 \times \cdots \times N_n$$

definida por:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n))$$

também é contínua.

Demonstração. Tomando por $p_i : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_i$ a projeção i-ésima ($i = 1, 2, \cdots, n$), temos:

$$(p_i \circ f)(x_1, \cdots, x_n) = f_i(x_i)$$

$\square$

Sejam (X, d) e (Y, d) espaços métricos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita **Lipschitz (Lipschitziana)** se existir uma constante real $L > 0$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leqslant L \cdot d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X$$

Além disso se E e F são espaços normados $T : E \longrightarrow F$ é Lipschitz se existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $\| T(u) \| \leq k \| u \|$ para todo $u \in E$.

3.1.2 Operações com Funções Contínuas

(a) Seja E um espaço vetorial normado qualquer. Dado um conjunto $X \neq 0$ quaisquer, a *soma* de duas funções $f : X \longrightarrow E$ e $g : X \longrightarrow E$ é a função, indicada por $f + g$, assim definida:

$$f + g : X \longrightarrow E \text{ e } (f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ para todo } x \in X$$

Suponhamos M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado e duas funções $f : M \longrightarrow E$ e $g : M \longrightarrow E$.

Então vale a seguinte propriedade:

(I) Se f e g são contínuas, então $f + g$ também é contínua. Considerando as funções $h : M \longrightarrow E \times E$, dada por $h(x) = (f(x), g(x))$, e $s : E \times E \longrightarrow E$, dada por $s(x, y) = x + y$, como $s \circ h = f + g$, então

$$
\begin{aligned}
M &\longrightarrow E \times E \longrightarrow E \\
x &\longmapsto (f(x), g(x)) \longmapsto f(x) + g(x)
\end{aligned}
$$

a continuidade de $f + g$ decorre da continuidade de h e da cotinuidade de s.

(b) Supondo $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções quaisquer, e M sendo um espaço métrico. O *produto* das funções f e g é a função denotada por $f \cdot g$, e sua definição:

$$f \cdot g : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ e } (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \text{ para todo } x \in M.$$

O que leva a seguinte propriedade:

(II) Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então $f \cdot g$ também é contínua. Considerando que:

$$
\begin{aligned}
M &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (f(x), g(x)) \longmapsto f(x)g(x)
\end{aligned}
$$

onde $h(x) = (f(x), g(x))$ e $m(x, y) = x \cdot y$. Como $f \cdot g = m \circ h$, h é contínua e m é contínua, então $f \cdot g$ também é contínua.

(c) Seja M um espaço métrico. Dadas $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, se $g(x) \neq 0$, para todo $x \in M$, o *quociente* de f e g é a função, indicada por $\frac{f}{g}$, e assim definida: $\frac{f}{g} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para qualquer $x \in M$.

3.1.3 Continuidade das Transformações Lineares

Sejam E e F espaços vetoriais sobre o corpo K. Uma *Transformação linear* $T : E \longrightarrow F$ é definida através das seguintes condições:

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, para quaisquer $u, v \in K$

Proposição 3.16. *: Se E e F são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$ e se $T : E \longrightarrow F$ é uma transformação linear, então são equivalentes as afirmações:*

(a) *T é contínua*

(b) *T é contínua na origem*

(c) *Existe um número real $k > 0$ tal que $||T(u)|| \leqslant k||u||$, para qualquer $u \in E$*

(d) *T é lipschitziana*

Demonstração. $(a) \Longrightarrow (b)$ Imediata

$(b) \Longrightarrow (c)$ Como T é contínua na origem e como $T(0) = 0$, tomando $\epsilon = 1$. existe $\delta > 0$ tal que:

$$||u|| < \delta \Longrightarrow ||T(u)|| < 1$$

Tomemos $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $\frac{1}{\delta} < k$. Portanto, dado um vetor u qualquer, não nulo, de E, e o vetor $\frac{u}{k||u||} = \frac{1}{k||u||}u$ tem norma $\frac{1}{k}$, e assim menor que δ,e daí

$$||T(\frac{u}{k||u||}) \; \| < 1$$

Como T é linear e pela propriedade (n_2) de normas, temos que:

$$\frac{1}{k||u||}||T(u)|| < 1$$

Onde,

$$||T(u)|| \leqslant k||u||$$

para qualquer vetor $u \neq 0$ de E. E se $u = 0$ temos a igualdade $||T(0)|| = k||0||$. E portanto, $||T(u)|| \leqslant k||u||$, para qualquer $u \in E$.

$(c) \Longrightarrow (d)$ A constante de Lipschitz de T é o próprio k: dados $u, v \in E$,

$$||T(u) - T(v)|| = ||T(u - v)|| \leqslant k||u - v||$$

$(d) \Longrightarrow (a)$ Toda aplicação lipschitziana é contínua. □

3.2 Espaços Homeomorfos

Definição 3.17. : Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \longrightarrow N$ é chamada **homeomorfismo** se, e somente se

(a) f é bijetora

(b) f e sua inversa f^{-1} são contínuas.

Se $f : M \longrightarrow N$ é um homeomorfismo dizemos que os espaços M e N são **homeomorfos**.

Consideremos num espaço vetorial normado E um ponto $p \in E$ e uma bola $B(p, \epsilon)$. A função $f : B(p, \epsilon) \longrightarrow E$, definida por $f(u) = \frac{1}{\epsilon}(u - p)$ é contínua pois é composta pela translação $u \longmapsto u - p$ e da homotetia $v \longmapsto \frac{1}{\epsilon}v$ é injetora. Como para qualquer $u \in B(p, \epsilon)$,

$$||f(u)|| = \frac{1}{\epsilon}||u - p|| < \frac{1}{\epsilon}\epsilon = 1$$

Concluindo que $Im(f) = B(0,1)$. Assim, $f : B(p,\epsilon) \longrightarrow B(0,1)$, dada por $\mathrm{F}f(u) = \frac{1}{\epsilon}(u-p)$ é bijetora e contínua. A inversa é definida por:

$$f^{-1}(u) = \epsilon u + p$$

e portanto tambem é contínua.

Proposição 3.18. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Para que d e d' sejam equivalentes é necessário e suficiente que a função $i : (M,d) \longrightarrow (M,d')$, definida por $i(x) = x$ para todo $x \in M$, se homeomorfismo.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $p \in M$. Dada uma bola $B_{d'}(i(p),\epsilon)$, por hipótese existe uma bola $B_d(p,\delta) = B_d(i(p),\delta) \subset B_{d'}(i(p),\epsilon)$. Como $B_d(p,\delta) = i(B_d(p,\delta))$, implica

$$i(B_d(p,\delta)) \subset B_{d'}(i(p),\epsilon)$$

e portanto i é contínua em p. De maneira análoga conseguimos provar que a inversa de i é contínua.

($\Longleftarrow$) Dado uma bola $B_{d'}(p,\epsilon) = B_{d'}(i(p),\epsilon)$, como i é contínua em p, então existe uma bola $B_d(p,\delta)$ de maneira que

$$i(B_d(p,\delta)) = B_d(p,\delta) \subset B_{d'}(p,\epsilon)$$

Pelo fato da invesa de i tambem ser contínua, de maneira análoga se prova que dada uma bola $B_d(p,\delta)$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$B_{d'}(p,\delta) \subset B_d(p,\epsilon)$$

$\square$

3.2.1 Homeomorfismos Uniformes

Para a função $f : X \longrightarrow Y$ definida do espaço métrico X para o espaço métrico Y, f é dita **uniformemente contínua** se dado $\epsilon > 0$ exise um $\lambda > 0$ tal que:

$$d(x,y) < \lambda \Longrightarrow d(f(x),f(y)) < \epsilon, \text{ para todo } x,y \in X.$$

Definição 3.19. Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é chamada **homeomorfismo uniforme** se f é bijetora, é uniformemente continua e sua inversa f^{-1} tambem é uniformemente continua.

Exemplo: Toda isometria $f : M \longrightarrow N$ é um homeomorfismo uniforme pois é bijetora, lipschitziana (uniformemente continua) e a inversa de uma isometria tambem é uma isometria.

Definição 3.20. Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Dizemos que d e d' são **uniformemente equivalentes** se a aplicação idêntica $i : (M, d) \longrightarrow (M, d')$ é um homeomorfismo uniforme.

Proposição 3.21. *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função uniformemente contínua. A função f não perde essa propriedade quando é substituido a métrica M ou N por outra que tambem seja uniformemente equivalente a métrica substituida.*

Demonstração. Sejam d e d_1, as métricas de M e N, respectivamento, e suponhamos que d' uniformemente equivalente a d. Dado $\epsilon > 0$, existe por hipotese $\lambda > 0$ de maneira que

$$d(x, y) < \lambda \Longrightarrow d_1(f(x), f(y)) < \epsilon$$

E, como a identidade $(M, d') \longrightarrow (M, d)$ é uniformemente continua, devido a equivalencia uniforme das métrica, então existe $\delta > 0$, em função de λ de tal forma que

$$d'(x, y) < \delta \Longrightarrow d(x, y) < \lambda$$

Onde,

$$d'(x, y) < \delta \Longrightarrow d_1(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Garantindo a continuidade uniforme de $f : (M, d') \longrightarrow (N, d_1)$. □

3.3 Conjuntos Compactos

Definição 3.22. : Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto $K \subset M$ é **compacto** se, para toda sequência (x_n) de pontos de K. existe um subsequência x_{ni} que converge para um ponto $p \in K$. Um espaço métrico (M, d) se diz compacto se M é compacto.

Proposição 3.23. *Seja M um espaço métrico. Se F e K são subconjuntos de M, onde F é fechado, K é compacto e $F \subset K$, então F tambem é compacto.*

Demonstração. Se $x_1, x_2, \cdots$ é uma sequência de pontos de F, e tambem de K, e como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots)$ de x_i tal que $lim x_{ir} = p \in K$. Para essa subsequência, existem duas possibilidades:

(i) $A = \{x_{i1}, x_{i2}, \cdots\}$ é finito.

Nesse caso, existem subsequências de (x_{ip}) que são constantes e, devendo cada uma delas convergir para p, então seus termos são todos iguais a p e portanto $p \in P$.

(ii) A é infinito. Como $p = limA_{ir}$, então para cada $\epsilon > 0$ a bola aberta $B = B(p, \epsilon)$ contém infinitos termos de (x_{ir}) e portanto é infinito a intersecção $\{B - \{p\}\} \cap A$. Onde, $p \in A'$ e daí $p \in F'$, uma vez que $A \subset F$. Porem $F' \subset F$ (F é fechado), então $p \in F$. $\square$

Proposição 3.24. *Sejam M e N espaços métricos e seja f: $M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K)$ também é compacto.*

Demonstração. Seja $(y_1, y_2, \cdots)$ uma sequência de pontos de $f(K)$. Assim, existe, para cada i, um elemento $x_i \in K$ tal que $f(x_i) = y_i$. Como (x_i) é um sequência de pontos de K, que é compacto, existe uma subsequência $(x_{i1}, x_{i2}, \cdots)$ dessa sequência tal que $limx_{ir} = p \in K$. Como f é contínua, então $limf(x_i) = f(p)$ e portanto a subsequência $f(x_{ir})$ de (y_i) converge para $f(p) \in f(K)$. $\square$

Definição 3.25. Um subconjunto A de um espaço métrico M se diz **totalmente limitado** se, para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \cdots, x_n \in A$ de maneira que :

$$A \subset B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$$

Proposição 3.26. *Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é totalmente limitado.*

Demonstração. Suponhamos K compacto e não totalmente limitado. Então existe $\epsilon > 0$ tal que:

$K \not\subset B(x_1, \epsilon)$, para todo $x_1 \in K$

$K \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$, para todo $x_2 \in K - B(x_1, \epsilon)$

$K \not\subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup B(x_3, \epsilon)$, para todo $x_3 \in K - (\cup B(x_i, \epsilon))(i = 1, 2)$

....

Formando uma sequência $(x_1, x_2, \cdots)$ de maneira que $x_1 \in K, x_2 \in K - B(x_1, \epsilon), \cdots$. Como seus termos estão em K, compacto, (x_n) admite uma subsequência $(x_{n1}, x_{n2}, \cdots) \longrightarrow p \in K$. Como os termos de (x_{ni}) são distintos entre si, a bola aberta $B(p, \frac{\epsilon}{2})$ contém infinitos desses termos. Assim, tomando

$$x_r, x_s \in B(p, \epsilon)$$

de maneira que $x_r \neq x_s$ e $r < s$, temos:

$$d(x_r, x_s) \leqslant d(x_r, p) + d(p, x_s) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Isso mostra que $x_s \in B(x_r, \epsilon)$ o que é absurdo. □

Proposição 3.27. *Qualquer intervalo fechado da reta é compacto.*

Demonstração. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de I. Note que (x_n) é limitada. Então pelo Teorema de Bolzano Weierstrass[1] existe subsequencia convergente. □

1

Proposição 3.28. *Um subconjunto A do espaço $\mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) É válido para todos os espaços métricos.

($\Leftarrow$) Sendo A limitado existe $a > 0$ tal que:

$$A \subset [-a, a] \times \cdots \times [-a, a] \text{ (n cópias)}$$

Cada $[-a, a]$ é compacto em $\mathbb{R}$, então o produto

$$[-a, a] \times \cdots \times [-a, a]$$

é compacto em $\mathbb{R}^n$ pelo Teorema de Tychonoff[2] . E assim A é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ que esta contido em um compacto desse espaço. Logo, A também é compacto devido a Proposição 3.23.

2 □

Proposição 3.29. *Seja A um subconjunto compacto de um espaço métrico M. Para toda função contínua $f : M \longrightarrow R$ existem então $a, b \in A$ de maneira que*

$$f(a) = inff(A) \ e \ f(b) = supf(A)$$

Demonstração. Sendo A compacto, então $f(A)$ também é, pois f é contínua. Portanto, como $f(A)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f(A)$ é fechada e limitado. Então:

$$u = inff(A) \text{ e } v = supf(a)$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $y_1, y_2 \in f(A)$ de maneira que:

[1]Teorema de Bolzano Weierstrass: Toda sequência limitada admite subsequência convergente.

[2]Teorema de Tychonoff: Produto cartesiano de espaços compactos é compacto.

$$u \leq y_1 < u + \epsilon \text{ e } v - \epsilon < y_2 \leq v$$

o que implica

$$]u - \epsilon, u + \epsilon[\cap f(A) \neq \emptyset \text{ e }]v - \epsilon, v + \epsilon[\cap f(A) \neq \emptyset$$

e portanto $u, v \in f(A)$, e como $f(A)$ é fechado, existem $a, b \in A$ tais que:

$$f(a) = u = inf f(A) \text{ e } f(b) = v = sup f(A)$$

□

Proposição 3.30. *Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico (M, d). Se $A \subset M$, então existe $p \in K$ tal que $d(p, A) = d(K, A)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon = d(K, A)$. Como

$$d(K, A) = inf(d(x, y)|x \in K, y \in A)$$

então existem, para cada $n \in \mathbb{N}^*, x_n \in K$ e $y_n \in A$ de maneira que $\epsilon \leq d(x_n, y_n) < \epsilon + \frac{1}{n}$. Considerando a sequência $(x_1, x_2, \cdots)$ e $B = (x_n|n \geq 1)$. Teremos duas alternativas:

(i) B é finito

Neste caso, existe $p \in K$ tal que $x_n = p$ para infinitos índices e pode-se provar que $d(K, A) = d(p, A)$.

Supondo $d(p, A) = \epsilon + \delta$, $\delta > 0$, e tomando um natural $r > 0$ tal que $x_r = p$ e $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$. Então, $\epsilon + \delta = d(p, A) = d(x_r, A) \leq d(x_r, y_r) < \epsilon + \frac{1}{r} < \epsilon + \frac{\delta}{2}$ o que é absurdo.

(ii) B é infinito

Como K é compacto, temos a subsequência (x_{nk}) de x_n tal que $lim x_{nk} = p \in K$. Mostremos que $d(K, A) = d(p, A)$.

Suponhamos que $d(p, A) = \epsilon + \delta$, com $\delta > 0$. De $x_{nk} \longrightarrow p$, temos que $B(p, \frac{\epsilon}{2})$, contém infinitos termos da sequência x_n e portanto existe $x_r \in B(p, \frac{\delta}{2})$ tal que $\frac{1}{r} < \frac{\delta}{2}$. Então,

$$d(p, y_r) \leqslant d(p, x_r) + d(x_r, y_r) < \frac{\delta}{2} + \epsilon + \frac{1}{r} < \frac{\delta}{2} + \epsilon + \frac{\delta}{2} < \epsilon + \delta = d(p, A) \leq d(p, y_r)$$

A contradição com desigualdade triangular encerra a demonstração. □

3.4 Conjuntos Conexos

Definição 3.31. Um espaço métrico (M, d) se diz **desconexo** quando existem dois conjuntos abertos G e H, não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Dizemos então que o par de abertos G e H formam uma desconexão de M e indicamos o fato por $M \simeq G|H$. Um espaço **conexo** significa dizer que não existe nenhuma desconexão de M.

Como pela definição acima de espaço desconexo, $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$ implica $G = H^c$ e $H = G^c$ e portanto G e H também são conjuntos fechados.

Proposição 3.32. *Um espaço M é desconexo se, somente se, existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0,1\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese existem abertos G e H do espaço de maneira que $M = G|H$. Consideremos $f : M \longrightarrow \{0,1\}$ definida por $f(x) = 0$, para todo $x \in G$ e $f(x) = 1$ com $x \in H$. f é sobrejetora, pois $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$. E contínua, porque considerando os abertos de $\{0,1\}$, todoa têm imagem imagem inversa por f um aberto de M.

($\Leftarrow$) Por hipótese existe uma sobrejeção contínua $f : M \longrightarrow \{0,1\}$. Logo, são abertos e não vazios $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$. Como, $G \cap H = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $G \cup H = f^{-1}(\{0,1\}) = M$, então $M = G|H$. □

Corolário 3.33. *Um espaço M é conexo se, e somente se, as únicas funções contínuas de M em $\{0,1\}$ são as constantes.*

Proposição 3.34. *Sendo $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo, então $f(M)$ é um subconjunto conexo de N.*

Demonstração. Supondo $f(M)$ desconexo. Existe então $g : f(M) \longrightarrow \{0,1\}$ contínua e sobrejetora. Então

$$f_1 : M \longrightarrow f(M)$$

definida por $f_1(x) = f(x)$, para todo $x \in M$, f_1 então é sobrejetora e contínua por f ser contínua. Logo, a função $g \circ f_1 : M \longrightarrow \{0,1\}$ é contínua e sobrejetora o que é absurdo pois M é conexo. □

Proposição 3.35. *Se A e B são subconjuntos conexos de um espaço M e $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cup B$ também é conexo.*

Demonstração. Se $A \cup B$ desconexo, existiria uma função $f : A \cup B \longrightarrow \{0,1\}$ contínua e sobrejetora. Seja $p \in A \cap B$ e suponhamos $f(p) = 0$. Então existe $q \in A \cup B$ de maneira que $f(q) = 1$. Supondo por exemplo que $q \in A$, então a função $f|A : A \longrightarrow \{0,1\}$ é contínua e sobrejetora. O que é absurdo, pois A é conexo. □

Proposição 3.36. *Seja M um espaço métrico tal que, para quaisquer $p, q \in M$, existe um subconjunto conexo $A \subset M$, de modo que $p, q \in A$. Então M é conexo.*

Demonstração. supondo que existisse $f : M \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Considerando $p, q \in M$ de modo que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$, seja $A \subset M$ um subconjunto conexo tal que $p, q \in A \subset M$. Então a função $f|A \longrightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é contrário a hipótese. □

Proposição 3.37. *Considerando a métrica usual sobre $\mathbb{R}$, então são conexos os intervalos do tipo $[a, b], [a, b[$ ou $]a, b]$.*

Demonstração. seja o intervalo $]a, b] = J$. Se J fosse desconexo existiria $f : J \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Supondo $f(b) = 1$ pois, caso contrário, tomando $g(x) = 1 - f(x)$ (contínua e sobrejetora) teríamos $g(b) = 1$. Seja $c = sup\{x \in J | f(x) = 0\}$. Como f é contínua em c, para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ de modo que $|x - c| < \delta (a < x \leq b)$ acarreta $|f(x) - f(c)| < 1$. Disto teremos que $f(x) = f(c)$, para todo $x \in J$ tal que $c - \delta < x < c + \delta$.

Então, sendo $c = sup\{x \in J | f(x) = 0\}$, existe $u \in J$ de modo que $c - \delta < u \leq c$ e $f(u) = 0$, do que resulta que $f(c) = 0$. Por outro lado, tomando $v \in J$ de maneira que se tenha $c < v < c + \delta$, entção $f(v) = 1$ e daí $f(c) = 1$ o que é absurdo. □

3.4.1 Aplicações

1. **Teorema do Valor Intermediário** Seja M um espaço conexo e seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $y_1, y_2 \in f(M)$ e $y_1 < y < y_2$, então existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$.

Demonstração. Como f é contínua, então $f(M) \subset \mathbb{R}$ é conexo. então $f(M)$ é um intervalo e portanto $y \in f(M)$. Onde existe $x \in M$ de maneira que $y = f(x)$ □

2. **Teorema do Ponto fixo de Brower**

Caso particular: Dada uma função contínua

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

existe $c \in [a, b]$ de maneira que $f(c) = c$.

Demonstração. Supondo $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$, e considerando $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$. g é contínua e $g(a) = a - f(a) < 0$ e $g(b) = b - f(b) > 0$. devido ao teorema do valor intermediario, existe $c \in [a, b]$ de maneira que $g(c) = c - f(c) = 0$ uma vez que $g(a) < 0 < g(b)$. Onde $f(c) = 0$ como queriamos provar. □

Conclusão

A Topologia é um ramo da geometria totalmente abstrato, de difícil compeensão para uma grande maioria dos alunos, mesmo que universitários. Como o ensino básico geralmente não tem tanto aprofundamento no estudo da geometria, as primeira matérias abstratas se tornam as mais complicadas do curso.

Daí a importância de um estudo em conteúdos básicos antes de aprofundar em um determinado tema. A visão, o entendimento, o espaço abstrato se torna melhor e de mais fácil compreensão.

Esse trabalho mostra um caminho de contéudos básicos iniciais para conseguir se aprofundar em espaços topológicos da melhor maneira possível e de uma forma mais resumida e de fácil aprendizado. Mostra também que mesmo os alunos do curso de licenciatura, mesmo com dificuldades relacionadas a abstração matématica, conseguem ampliar sua visão geomérica abstrata com esforço e dedicação.

Referência

Domingues, Higino Hugueros. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia.** São Paulo: Atual, 1982.

Lima, Elon Lages. **Espaços Métricos.** 6º Ed. Rio de janeiro: Impa, 2020.

Loibel, Gilberto Francisco. **Introdução à Topologia.** 1° Ed. São Paulo: Unesp, 2008.

Silva, Gentil Lopes. **Espaços métricos: com aplicação.** Brasília: Kiron, 2013.