UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS: UMA PROPOSTA DE ENSINO LÚDICO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

HELDER JUNIO BATISTA COSTA

Maceió, 02 de Fevereiro de 2021

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS A.C. SIMÕES
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Helder Junio Batista Costa

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS: UMA PROPOSTA DE ENSINO LÚDICO PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Maceió - AL
2021

HELDER JUNIO BATISTA COSTA

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS: UMA PROPOSTA DE ENSINO LÚDICO PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – Profmat, na Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como pré-requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió - AL
2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

C837t Costa, Helder Junio Batista.
As transformações de Möbius : uma proposta de ensino lúdico para alunos do ensino médio / Helder Junio Batista Costa. - 2021.
105 f. : il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Bibliografia: f. 92-94.
Apêndices: f. 95-105.

1. Transformações de Möbius. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Aprendizagem lúdica. 4. Números complexos. I. Título.

CDU: 372.851.114

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me presenteado com o dom da vida.

Aos meus pais, em especial minha mãe que nos deixou antes do previsto, por tudo que eles fizeram em minha vida, exemplos de pessoas dignas e de amor com os filhos, bem como aos meus irmãos, parte essencial da minha vida.

À minha esposa e companheira de vida, que sempre me apoiou e compreendeu meus momentos de estudos como forma de capacitação profissional e pessoal.

Ao meu orientador prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto pelo suporte e correções em geral, onde, sem dúvidas, contribuiu significativamente para a construção deste trabalho.

Aos componentes da banca examinadora prof. Dr. Dilson Cavalcanti e profª. Dra. Viviane por aceitarem o convite em avaliar este trabalho.

Aos meus amigos de juventude que sempre me incentivaram nos estudos e no reconhecimento de uma pessoa capaz de alcançar meus objetivos.

Aos companheiros de trabalho que insistiram para que eu realizasse a prova de admissão nesse mestrado.

A todos aqueles que incentivaram de maneira direta e indireta, muito obrigado.

.

RESUMO

O trabalho aqui apresentado tem como objetivo apresentar uma abordagem para o estudo dos números complexos, introduzindo o conceito das Transformações de Möbius para os alunos do Ensino Médio, por meio de atividades lúdicas. Nele, são apresentados aspectos históricos dos números complexos, sua estrutura algébrica e a representação no plano cartesiano, para posteriormente inserir o estudo de funções envolvendo os números complexos, de forma a complementar significativamente o estudo de tal conteúdo. A dissertação é justificada pelo fato de muitos alunos possuírem dificuldades com as manipulações algébricas dos números complexos, bem como o comportamento de suas operações no plano cartesiano. Almejando um caráter qualitativo, foi escolhida a metodologia lúdica como ferramenta primordial para facilitar os estudos das Transformações de Möbius. Utilizamos ainda fundamentos de alguns teóricos pedagógicos, historiadores e estudiosos da Matemática, de forma a relacionar o desenvolvimento cognitivo do estudante, contribuindo na sua formação social e, possivelmente, despertar o interesse pela disciplina.

Palavras-chave: Transformações de Möbius. Ensino Lúdico da Matemática. Números complexos.

ABSTRACT

The work presented here aims to present an approach to the study of complex numbers, introducing the concept of Möbius Transformations for high school students, through playful activities. In it, presents the historical aspects of complex numbers, their algebraic structure and representation on the Cartesian plane, to later insert the study of functions involving complex numbers, in order to significantly complement the study of such content. The dissertation is justified by the fact that many students have difficulties with the algebraic manipulations of complex numbers, as well as the behavior of their operations on the Cartesian plane. Aiming at a qualitative character, the playful methodology was chosen as the primary tool to facilitate the studies of Möbius Transformations. We also use the foundations of some pedagogical theoreticians, historians and students of Mathematics, in order to relate the student's cognitive development, contributing to their social formation and, possibly, arousing interest in the discipline.

Keywords: Möbius Transformations. Playful Teaching of Mathematics. Complex Numbers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Desenho das meias proporcionais por Wallis 19

Figura 2: Desenho das meias proporcionais por Wallis através da tangente $\overline{PB}'$ 20

Figura 3: Construção das raízes reais por Wallis 21

Figura 4: Construção das raízes complexas por Wallis 21

Figura 5: Representação geométrica moderna dos complexos 21

Figura 6: Representação geométrica das meias proporcionais para a criação do eixo imaginário 23

Figura 7: Representação geométrica dos complexos por Wessel 23

Figura 8: Representação de um número complexo no plano 24

Figura 9: Representação geométrica da soma de dois vetores complexos 25

Figura 10: Representação geométrica de z e $\overline{z}$ 26

Figura 11: Representação geométrica do módulo de z 27

Figura 12: Representação geométrica de z em sua forma polar 28

Figura 13: August Ferdinand Möbius (1790-1868) 33

Figura 14: Fita de Möbius 34

Figura 15: Representação geométrica da translação por β 35

Figura 16: Representação geométrica da Homotetia para $r > 1$ e $0 < r < 1$ 36

Figura 17: Representação geométrica da Rotação por θ radianos 37

Figura 18: Representação geométrica da Rotação por θ radianos na multiplicação por i 38

Figura 19: Representação geométrica da Rotação por θ radianos na multiplicação por i múltiplas vezes 39

Figura 20: Representação geométrica das inversões por I em relação ao círculo unitário e J em relação a z 41

Figura 21: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $|z|^2\text{-}3(z + \overline{z})\text{-}2(\overline{z}i\text{-}zi) + 12 = 0$ 45

Figura 22: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $|z|^2\text{-}3z\text{-}3\overline{z} = 0$ 46

Figura 23: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $(\text{-}2\text{-}i)z + (\text{-}2 + i)\overline{z} + 8 = 0$ 48

Figura 24: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $\left(1\text{-}\frac{3}{2}i\right)z + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)\overline{z} = 0$ 49

Figura 25: Imagem original capturada...50
Figura 26: Imagem modificada por translação 51
Figura 27: Imagem original capturada...51
Figura 28: Imagem modificada por Homotetia de fator 3 51
Figura 29: Imagem modificada por Homotetia de fator 13 52
Figura 30: Imagem exemplo do tabuleiro...60
Figura 31: Imagem exemplo de bifurcação para o tabuleiro 60
Figura 32: Imagem exemplo da Carta do Caminho N, S, L, O 61
Figura 33: Imagem exemplo da Carta do Caminho NO, NE, SO, SE 61
Figura 34: Imagem exemplo da Carta Rotação 61
Figura 35: Imagem exemplo da Carta Surpresa 62
Figura 36: Imagem exemplo de um relógio analógico de parede.............................65
Figura 37: Imagem exemplo da carta Enigma do Complexo Menor 65
Figura 38: Imagem exemplo da carta Enigma do Complexo Maior 66
Figura 39: Exemplo de construção do tapete...69
Figura 40: Imagem exemplo do tapete Twister Complexo 69
Figura 41: Imagem exemplo da Carta dos Membros 70
Figura 42: Imagem exemplo da Carta Twister 70
Figura 43: Figura gerada pelos pontos z, $J(z)$, w e $J(w)$ 74
Figura 44: Transformação geométrica por translação utilizando a Transformação de Möbius $T_{\beta}(z)$ 85
Figura 45: Transformação geométrica por homotetia utilizando a Transformação de Möbius $H_{r}(z)$ 86
Figura 46: Transformação geométrica por rotação utilizando a Transformação de Möbius $R_{i}(z)$ 86

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11
2. A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS 14
2.1 Uma Breve História 14
2.2 Aspectos geométricos 18
2.3 Estrutura algébrica e operações 29
3. AS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS 33
4. O LÚDICO COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA 53
5. PROPOSTAS DE ATIVIDADES LÚDICAS 58
5.1 A Trilha do Desconhecido 58
5.2 O Relógio Maluco 64
5.3 O Twister Complexo 67
5.4 A Geometria Maluca 71
6. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS 75
6.1 Números complexos no plano cartesiano: coordenadas, vetores, módulos e argumento. 76
6.2 Representação de operações de soma e multiplicação por escalar de vetores no plano complexo. 78
6.3 Rotação de vetores no plano. 79
6.4 Inversão de vetores no plano. 81
6.5 Transformação de figuras geométricas: translação, homotetia e rotação. 84
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 92
APÊNDICE A –Trilha do Desconhecido 95
APÊNDICE B – Relógio Maluco 99
APÊNDICE C – Twister Complexo 102

1. INTRODUÇÃO

A amplitude das discussões sobre a perspectiva do ensino da Matemática em sala de aula, atualmente, tem aumentado significativamente, instigando o profissional do ensino a buscar novos conceitos sobre a eficiência do processo de criação do saber. As mudanças políticas, sociais e econômicas, de maneira global, fazem com que a visão sobre a importância do estudar para a formação plena do ser humano busque uma maior profundidade na concepção de seus princípios fundamentais. Unir os conteúdos escolares diretamente com a vida social é um dos grandes paradigmas do processo evolutivo educacional.

O estudo dos números complexos – normalmente com alunos do Ensino Médio – pode causar bastante desconforto, tanto por parte dos discentes quanto por parte dos profissionais de ensino. De fato, os procedimentos algébricos, bem como a sua interpretação geométrica, podem gerar confusão no processo de aprendizagem, despertando a perspectiva de mais um conteúdo qualquer da Matemática, sem nexo com a realidade. Sabemos que, de maneira geral, a apresentação desses números baseia-se em sua parte algébrica e, o fato de não assimilá-lo facilmente ao cotidiano, acaba criando uma barreira entre o aluno e o conhecimento matemático.

Fazer uma retrospectiva de alguns acontecimentos históricos sobre os complexos trouxe uma reflexão de como o objeto de estudo pode ser assimilado ao conhecimento pessoal, mesmo sem seu total domínio estrutural. Devemos observar a Matemática a partir de pensamentos culturais, sociais e até mesmo filosóficos, de tempos anteriores, de forma a entender que o pensar matematicamente, sem dúvidas, é um caráter próprio e individual.

De acordo com escritos da história da matemática, “... os números imaginários são praticamente desconhecidos fora dos círculos científicos. Eles vão de encontro à intuição, são difíceis de conceber e não representam fenômenos físicos simples. [...] somos forçados a abrir mão definitivamente de pensar nos números como quantidades” (LAUNAY, 2019, p. 149), os conceitos abstratos da Matemática são de difícil assimilação por parte dos estudantes. Isso nos fez repensar sobre as dificuldades que os discentes têm sobre estudos de uma Matemática mais intuitiva.

Outro grande desafio por parte dos docentes está em lecionar os números complexo – que possui uma aplicação mais direta em estudos do nível superior – uma vez que não serão todos os alunos que irão ingressar na carreira das exatas. Mas isso não significa que o aluno não possa ter o contato com a temática. Portanto, é possível trabalhar os conteúdos, mesmo que sejam de origem mais complexa, de forma mais sucinta e compacta, somando com seu desenvolvimento como um todo.

Tomando como ênfase a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), onde uma das competências da Matemática é

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (BRASIL, 2018, p. 524).

Logo, é visível a compreensão de conceitos avançados da Matemática, em associação com outras áreas, como base para a formação do ser humano, desenvolvendo suas capacidades cognitivas e aprimorando o seu pensar matemático. Cabe então ao professor criar e buscar ferramentas que associem os conteúdos estudados com aplicações cotidianas, adaptando situações complexas em formas mais simples.

Por outro lado, a atividade lúdica é uma ferramenta que corrobora significativamente com o processo de ensino aprendizagem. Para Vygostky (1991) o brinquedo tem uma influência significativa no desenvolvimento da criança, de forma a criar uma relação entre o campo do significado e as situações reais. Por meio dos jogos, podemos criar uma ponte entre divertimento e criação de conteúdo, visando a construção do saber coletivo e também individual.

A escola enquanto ambiente social deve promover atividades que envolvam a interação entre os estudantes, visando uma das prerrogativas da formação plena do ser crítico. Inferir-se de ações que permitam a trocar de conhecimento entre os alunos, utilizando os jogos, por exemplo, traz um dinamismo maior sobre uma educação de qualidade, podendo inclusive quebrar barreiras sobre algumas dificuldades entre a linguagem do conteúdo e o conhecimento adquirido.

Portanto, buscamos no presente trabalho apresentar uma visão sobre o ensino dos complexos, através do estudo das funções com esses números, conhecidas como Transformações de Möbius, em cooperação com o lúdico matemático, de forma a promover a capacidade de criar estratégias eficientes, relacionando conhecimentos adquiridos com diversão.

Logo, para detalharmos nossa pesquisa, separamos nosso trabalho em capítulos. Após nossa primeira abordagem aqui descrita, apresentaremos a justificativa que nos motivou, bem como os objetivos gerais e específicos.

Em seguida, no segundo capítulo, inserimos características históricas relevantes que tornaram possíveis a criação dos números complexos, por meio de estudos realizados por vários antepassados importantes para a Matemática, descrevendo pensamentos e ideias transcritas para a linguagem atual.

Ainda no mesmo capítulo, buscamos mostrar algumas tentativas de relacionar os números complexos com a geometria, trazendo uma perspectiva importante para a criação futura desses números. Em continuidade, apresentamos toda a estrutura dos números complexos em sua forma algébrica, descrevendo suas propriedades e operações.

Conseguinte, no capítulo três introduzimos o estudo das Transformações de Möbius nas formas mais elementares, com o intuito de tornar a linguagem mais simples para os docentes que possivelmente não tiveram contato com tais funções, bem como para os alunos do Ensino Médio, alvo da nossa proposta.

No quarto capítulo, inserimos as correlações do lúdico com o ensino da Matemática, ferramenta de extrema importância para um dinamismo maior em sala de aula, visando uma melhor qualidade na prática pedagógica do professor.

No capítulo cinco, propomos algumas atividades envolvendo as Transformações de Möbius, aplicando alguns conceitos geométricos dos números complexos, bem como a inserção de um conteúdo novo, podendo gerar novas expectativas e visões sobre o que é estudar a disciplina.

Já no capítulo seis, apresentamos uma proposta de sequência didática para os alunos do Ensino Médio sobre as Transformações de Möbius em conjunto com as habilidades de transformações geométricas, propostas pela BNCC.

Por fim, no capítulo sete, escrevemos as considerações finais pela realização de uma pesquisa histórica sobre esses números, sua estrutura, propostas de situações didáticas e conjunto de atividades lúdicas, promovendo um espaço sociocultural entre os discentes.

2. A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

2.1 Uma Breve História

Estudar os números complexos pode ser uma tarefa um tanto quanto difícil, pois, as percepções do homem buscam associar o conhecimento que se adquire com a prática no dia a dia, tornando-se assim complicado realizar tal atividade, tendo em vista que esses números não tem uma aplicação direta em seu cotidiano. O corpo do conjunto dos números reais contempla grande parte do que o estudante necessita para uma boa formação matemática, visto que engloba a maioria dos estudos direcionados para atividades contemporâneas. Porém, uma classe peculiar de números surgiu em um contexto histórico onde a princípio não eram aceitos e considerados descartáveis, uma vez que não havia recursos de forma a realizar tal associação descrita acima.

Neste capítulo, traremos uma breve descrição de como os matemáticos lidavam com equações que continham soluções complexas, suas discussões e tentativas de assimilação com a geometria, até a brilhante ideia que proporcionou a criação de um conjunto numérico através de uma interpretação geométrica diferenciada.

Na matemática antiga, a geometria significava muito para algumas civilizações como gregos e egípcios, de acordo com Merzbach e Boyer (2011), onde, por exemplo, equações surgiam através de associações com figuras geométricas, como a área de um círculo (p. 15). Por Stillwell (2010), a geometria foi o primeiro ramo da Matemática que se tornou altamente desenvolvido, onde o conceito de teorema, e consequentemente sua prova, é de origem dessa área. A matemática grega teve uma contribuição significativa para a disciplina, uma vez que a engenharia atual utiliza grande parte dos conceitos antigos, como o Teorema de Pitágoras.

Entretanto, existia uma classe de equações quadráticas e cúbicas que despertaram o interesse de muitos matemáticos pós-Grécia, sendo então o ponto de partida para a criação dos números objetos de nosso estudo. Por volta do século XVI, Cardano[1] desenvolveu estudos sobre equações cúbicas que revolucionou a época e abriram janelas para a construção dos complexos posteriormente. Em Júnior (2010), é

---

[1] Girolamo Cardano (1501 – 1576) foi um italiano, estudante de matemática e medicina. Teve contribuições significativas em suas publicações, sendo a *Ars Magna* sua obra de maior relevância, contendo estudos algébricos de vários matemáticos da antiguidade.

dito que "[...] o trabalho de Cardano desenvolveu a consciência da importância e da inevitabilidade de soluções negativas e complexas, tendo encontrado soluções envolvendo raízes quadradas de quantidades negativas" (p. 15). Mas foi um matemático anterior a ele quem deu início ao desenvolvimento dos números complexos atuais. Tartaglia[2] foi desafiado a resolver os dois problemas algébricos a seguir:

> 1. Encontre um número cujo cubo adicionado a três vezes o seu quadrado resulta em 5; ou seja, encontre um valor para x que satisfaça a equação $x^3 + 3x^2 = 5$.
> 2. Encontre três números, o segundo dos quais excede o primeiro em 2, e o terceiro dos quais excede o segundo em 2 também, cujo produto é 1000; isto é, resolva a equação $x(x+2)(x+4) = 1000$, ou equivalentemente, $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$ (BURTON, 2011, p. 319, Tradução Nossa).

De acordo com Burton (2011), foi por esse desafio que ele anunciou resolver qualquer tipo de equação da forma tipo $x^3 + px = q$, onde seu antecessor del Ferro[3] havia resolvido equações desse tipo apenas para p e q positivos. Sendo assim, achando ser um blefe, Tartaglia foi indagado a resolver 30 problemas do tipo e o mesmo os resolveu em apenas duas horas.

Mesmo com o trabalho de Tartaglia, o matemático Cardano percebeu que as soluções apresentadas não abrangiam todas as equações, o que o motivou a realizar mais pesquisas. Em consequência, o cientista dos números publicou em sua obra *Ars Magna* um "truque" em transformar equações cúbicas escondendo o termo do segundo grau.

Ou seja, escrevendo na linguagem matemática atual, uma equação do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, poderia ser escrita da forma $y^3 + py = q$, através da substituição de variáveis. De fato, fazendo $x = y - \frac{a}{3}$, obtemos

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) = 0\ ,$$

que ao ser reduzida encontramos

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y = -\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right).$$

---

2 Nicolo Fontana (1500 – 1575) nascido em Veneza, Itália, conhecido por Tartaglia, foi um matemático que contribuiu com soluções de equações do terceiro grau.

3 Scipione del Ferro (1465 – 1526) nascido na Itália. Foi o primeiro matemático a descobrir um método para resolver a equação cúbica reduzida.

Fazendo $p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right)$ e $q = -\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$, obtemos então a equação desejada. Posteriormente, Cardano chegou à seguinte fórmula (que foi denominada como fórmula de Cardano-Tartaglia) para resolver sua nova equação ausente do termo do segundo grau, ou seja, a equação $y^3 + px = q$ teria como uma de suas soluções

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ .$$

Porém, havia algo peculiar para a equação apresentada acima: quando a expressão $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ resultava em um número negativo, visto que, para os matemáticos da época, era inconcebível a solução de um problema que apresentava uma raiz quadrada de número negativo. Isso implicou diretamente no futuro pensamento de "número imaginário".

Então, após toda a contribuição proporcionada pela equação acima, Cardano deixou o seu legado de forma a levantar a pergunta "como justificar a possibilidade de efetuarmos cálculos e admitirmos soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos?" (JÚNIOR, 2010, p.23).

Foi então que Bombelli[4] deu mais uma contribuição para o nascimento dos números complexos. Com seu questionamento sobre a contribuição das reduções de equações cúbicas anteriores e das soluções apresentadas, surgiu em seu pensamento a ideia da existência dos números considerados inexistentes.

Com efeito, ele percebeu que a equação $x^3 - 15x = 4$, aplicada à fórmula de Cardano-Tartaglia, teria como uma possível solução a equação

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} . \qquad (1)$$

Sua ideia, por Burton (2011), o levou a associação de um padrão genérico diferenciado apenas dos sinais $" + "$ e $" - "$, ou seja, por (1) poderia relacionar a solução como sendo

$$a + b\sqrt{-1} \ \text{ e } \ a - b\sqrt{-1} \ .$$

Logo, foi possível chegar à igualdade $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$, o que equivale a

---

[4] Rafael Bombelli (1526 – 1572), italiano, foi um matemático e engenheiro de hidráulica.

$$2+\sqrt{-121}=\left(a+b\sqrt{-1}\right)^3=a^3+3a^2b\sqrt{-1}+3ab^2\left(\sqrt{-1}\right)^2+b^3\left(\sqrt{-1}\right)^3$$
$$=a(a^2-3b^2)+b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}\,,$$

o que implica em $a(a^2-3b^2)=2$ e $b(3a^2-b^2)=11$. Isso nos mostra que $a=1$ e $b=2$ satisfaz a equação encontrada. Daí, foi possível escrever uma relação muito importante

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2+11\sqrt{-1}=2+\sqrt{-121}\,.$$

De forma análoga, para $\left(2-\ \sqrt{-1}\right)^3=2-\sqrt{-121}$. Daí, Bombelli concluiu que uma solução para a equação em questão era

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{-1}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{-1}\right)^3} \\ &= \left(2+\sqrt{-1}\right)+(2-\sqrt{-1}) \\ &= 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, é notória que a percepção de Bombelli sobre a relação entre o “inexistente” com um número real como resultado abriu os caminhos para que os números complexos de fato fossem posteriormente estudados, interpretados geometricamente e aceitos pela comunidade matemática.

> Ao provar a realidade das raízes da cúbica $x^3=15x+4$, ele demonstrou o fato extraordinário de que números reais podem ser gerados por números imaginários. A partir disso, os números imaginários perderam um pouco de seu caráter místico[...] (BURTON, 2011, p. 326, Tradução Nossa),

No século XVIII, o matemático Bernoulli[5] realizava estudos sobre logaritmo de um número negativo e sua possível relação com os números imaginários. A título de exemplo, em Júnior (2010) é informado que Bernoulli tentou afirmar a igualdade $\log(-1)=0$ partindo da ideia de que $\log(1)=0$, utilizando o seguinte pensamento:

---

[5] Johann Bernoulli (1667 – 1748) nascido na Suiça, matemático, físico e astrônomo. Deu contribuições significativas para a matemática aplicada, em especial ao movimento de partícula no campo gravitacional.

$$\log(1) = \log(-1)^2 = 2\log(-1) = 0,$$

o que implicaria em $\log(-1) = 0$. Porém, essa afirmação foi derrubada pela contradição

$$(-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow \log(-a)^2 = \log(a)^2 \Leftrightarrow 2\log(-a) = 2\log(a) \Leftrightarrow \log(-a) = \log(a),$$

pois não existe nenhum número real x tal que $e^x = -1$. Entretanto, foi Euler[6] quem mostrou, através de suas obras à época, escritos na linguagem atual, a seguinte equação

$$e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi$$

ou seja, $e^{i\pi} = -1$, o que implica em $ln(-1) = i\pi$, desfazendo a ideia de que os logaritmos de números negativos seriam números reais, proposta de D'Alembert[7] e Bernoulli. Esse pensamento de Euler possibilitou um destaque sobre quantidades consideráveis de resultados matemáticos da forma $a + b\sqrt{-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Mas ainda assim não havia muita aceitação sobre tais ideias, visto que a interpretação geométrica e esses números ainda não eram contemplados como existentes pelos estudiosos dos números, sendo de fato concretizada sua validez posteriormente por Gauss, com contribuição dos estudos desenvolvidos por Wessel e Argand, em continuidade aos pensamentos de Wallis, sobre a interpretação geométrica dos complexos. Destacamos a seção seguinte neste trabalho para descrever um pouco sobre a geometria dos complexos desenvolvida por Wessel e Argand.

2.2 Aspectos geométricos

Associar a aritmética com a geometria foi um ato constante para os matemáticos da antiguidade. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, de acordo com Stillwell (2010, p. 3), foi uma profunda relação entre a associação da geometria com os cálculos algébricos da época, mesmo sendo considerados dois universos distintos. Detalharemos a seguir informações sobre as tentativas de representações geométricas até sua consolidação de fato.

---

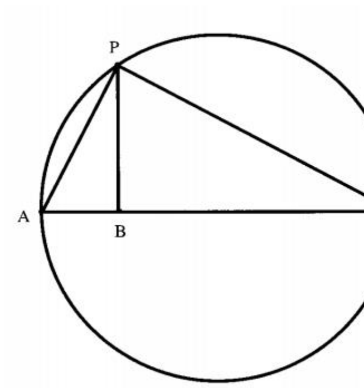
[6] Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), alemão, foi um matemático contribuinte para vários estudos matemáticos dentre eles, a análise matemática, dinâmica de fluidos, óptica e astronomia.

[7] Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) francês, foi um filósofo, matemático e físico. Teve contribuições significativas para o estudo das Equações Diferenciais.

Um dos primórdios sobre a tentativa de representação geométrica dos números complexos foi o matemático Wallis[8], que, segundo Oliveira (2010, p. 54, *apud* Domingues, 2009, p. 327) foi o primeiro a tentar representar os complexos em sua forma geométrica. De acordo com Nahin (2007), Wallis, inspirado pela obra *La Geometrie*[9] conseguiu fazer a relação das conhecidas meias proporcionais com seu desenho geométrico. Dados dois pontos A e C extremidades de um segmento em um círculo qualquer e escolhendo um ponto B arbitrário em $\overline{AC}$, traçamos uma perpendicular em B até um ponto P no círculo, o que nos dá a igualdade

$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{AB}\ .\ \overline{BC}}$$

Figura 1: Desenho das meias proporcionais por Wallis



Fonte: Nahin, 2007.

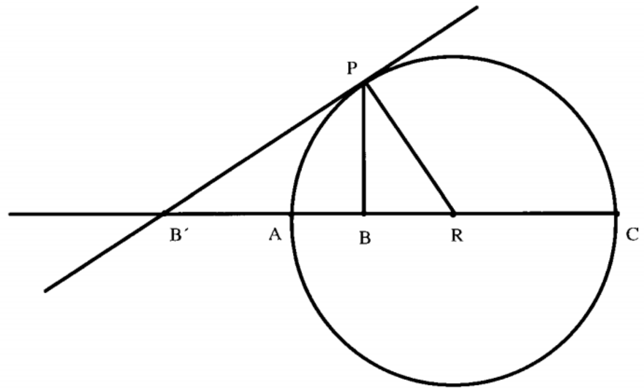
A fim de tentar representar geometricamente uma raiz negativa, Wallis considerou o A como sendo o ponto de referência zero, de forma que a sua direita representava números positivos e a sua esquerda estavam os números negativos. A partir da construção acima, Wallis traçou uma reta tangente em P até um ponto B', o qual pertencente a uma extensão de $\overline{AC}$, conforme a figura

---

[8] John Wallis (1616 – 1703) foi um matemático britânico precursor dos estudos de Cálculo Diferencial e Integral.

[9] Trecho da obra de René Descartes (1596 – 1650), *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*, contendo importantes aspectos da geometria algébrica.

Figura 2: Desenho das meias proporcionais por Wallis através da tangente $\overline{PB'}$



Fonte: Nahin, 2007.

Utilizando o mesmo procedimento da figura anterior, foi possível encontrar

$$\overline{PB'} = \sqrt{\overline{AB'}.\ \overline{B'C}}\ .$$

Logo, como o matemático usou como referência do zero o ponto A, teríamos que $\overline{B'C} > 0$ e $\overline{AB'} < 0$, portanto

$$\overline{AB'}\ .\ \overline{B'C} < 0$$

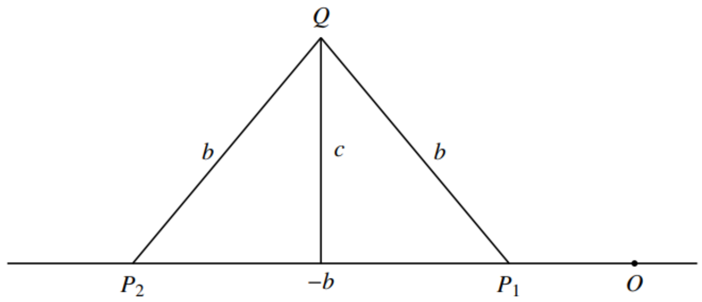
o que nos mostrava que o segmento $\overline{PB'}$ era uma possível representação de uma raiz quadrada negativa.

Em outros escritos, de acordo com Stillwell (2010), Wallis tentou representar geometricamente a equação quadrática $x^2 + 2bx + c^2 = 0$, onde b e c são números positivos. Logo, as raízes dessa equação seriam

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}.$$

De fato, para o caso em que $b \geq c$ a equação fazia sentido. Sendo assim, poderia ser desenhado tais raízes na figura abaixo

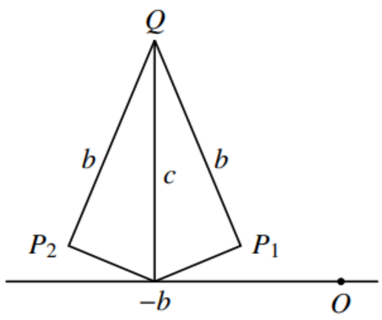
Figura 3: Construção das raízes reais por Wallis



Fonte: Stillwell, 2010.

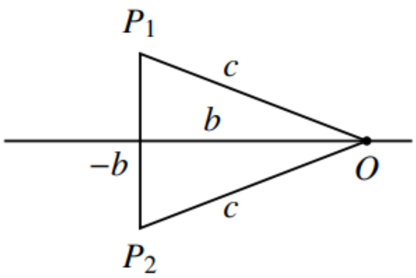
O problema estava para o caso $b < c$, pois, se fizermos $b \to 0$ (b tender a zero) teríamos P_1 e P_2 iguais. Logo, teríamos duas raízes distintas em um mesmo ponto de um segmento geométrico, uma contradição.

Figura 4: Construção das raízes complexas por Wallis



Fonte: Stillwell, 2010.

Figura 5: Representação geométrica moderna dos complexos



Fonte: Stillwell, 2010.

Embora Wallis tenha feito um trabalho “genial” ainda constava alguns pontos irregulares. Surgiram então outros matemáticos que deram continuidade a esses trabalhos: Wessel[10] e Argand[11]. Com pensamentos quase idênticos aos estudos deixados por Wallis, deram passos importantes para a representação geométrica dos números até então considerados “descartáveis”.

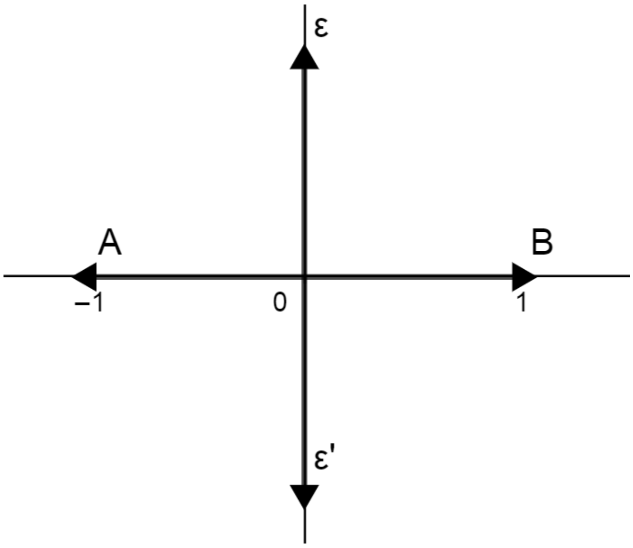
Primeiramente, em Oliveira (2010) e Pinto (2009) é explanado que Wessel e Argand tinham pensamentos muito parecidos sobre a representação geométrica, que basicamente era possível representar esses números de maneira analítica em forma de segmentos de retas, dando direcionamento e sentido a seus vetores. Para isso, era necessário adotar um plano de tal forma que representasse bem sua ideia. Com efeito, em conformidade com os pensamentos de Wessel, o destaque está na sutileza de Argand que teve a ideia de representar o produto entre números complexos, surgindo então a interpretação do número $\sqrt{-1}$. Tomando um ponto referencial em uma reta tal que, deslocando-se uma unidade para a esquerda e uma unidade para a direita desse ponto, teríamos os números -1 e 1, respectivamente, traça-se uma perpendicular sobre o referencial, de forma a encontrar um ponto ε através das meias proporcionais tal que ε esteja para 1 assim como -1 está para ε, ou seja,

$$\frac{\varepsilon}{1} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

[10] Caspar Wessel (1745 – 1818) foi um matemático nascido na Noruega, produziu um artigo com sua visão geométrica dos números complexos.

[11] Jean Robert Argand (1768 – 1822), francês, contribuiu com a visão geométrica de Wessel de maneira mais sofisticada.

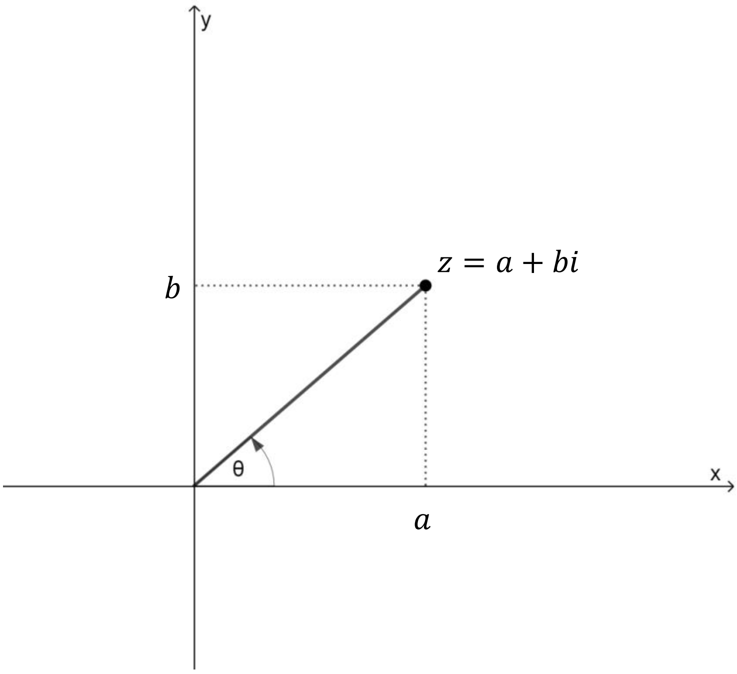
Figura 6: Representação geométrica das meias proporcionais para a criação do eixo imaginário



Fonte: Junior, 2009.

Logo, foi possível dar significado as coordenadas em um plano de tal forma que $\varepsilon = \sqrt{-1}$ estivesse ligado intrinsecamente ao mesmo. Partindo disso, foi possível montar a seguinte representação

Figura 7: Representação geométrica dos complexos por Wessel

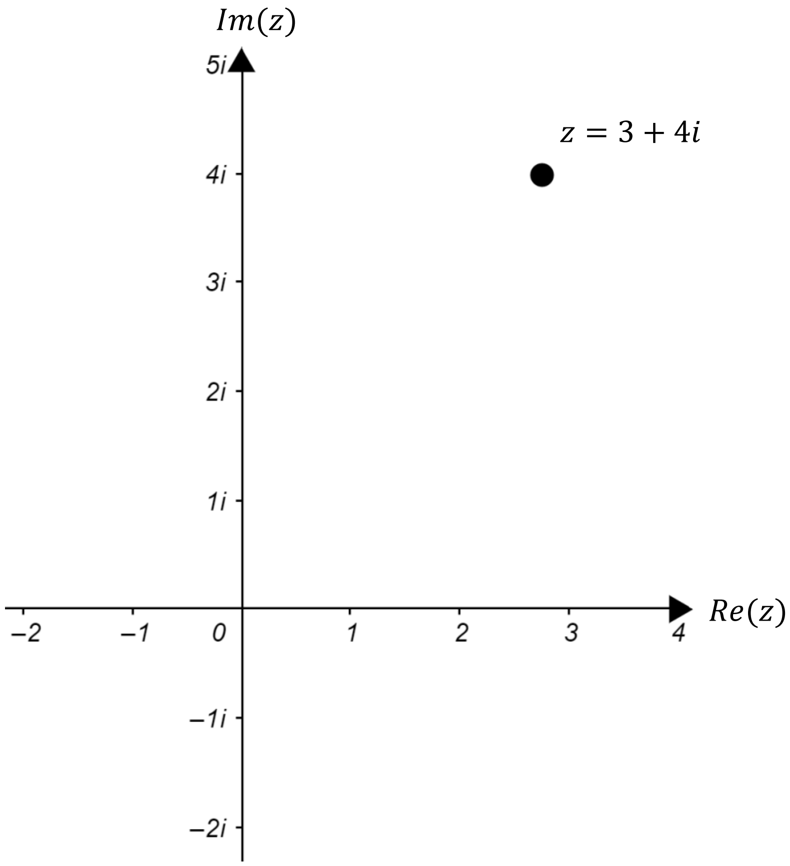


Fonte: Nahin, 2007.

De acordo com Hefez e Villela (2018), foi Euler quem definiu a notação "i" para $\sqrt{-1}$, bem como a escrita em forma polar dos números complexos. Escrevendo um complexo da forma $z = a + bi$, a representação geométrica acima nos traz um plano de forma que a reta "x" contém os números da parte real e a reta "y" contém os números da parte imaginária de um número complexo. Essa representação descreve a ideia sobre as meias proporcionais já faladas, onde o ε seria a unidade direcional do eixo vertical, o "eixo imaginário".

Atualmente, o plano complexo é facilmente interpretado no plano cartesiano. Tomando o parágrafo acima, o número z no plano complexo pode ser representado coordenada (a, b), onde a é o ponto pertencente ao eixo das abscissas, e b é o ponto pertencente ao eixo das ordenadas. A título de exemplo, o número $z = 3 + 4i$ pode ser representado por

Figura 8: Representação de um número complexo no plano



Fonte: Evans, 2006.

Em complemento às ideias do plano, as operações de soma e multiplicação de vetores no plano complexo foram bem definidas. Falaremos mais detalhadamente sobre as multiplicações na seção das Transformações de Möbius.

Dados u e v números complexos, da forma $u = a + bi$ e $v = a' + b'i$, a soma e a multiplicação entre esses números resulta em um terceiro vetor. De fato,

$$w = u + v = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i \in \mathbb{C}$$

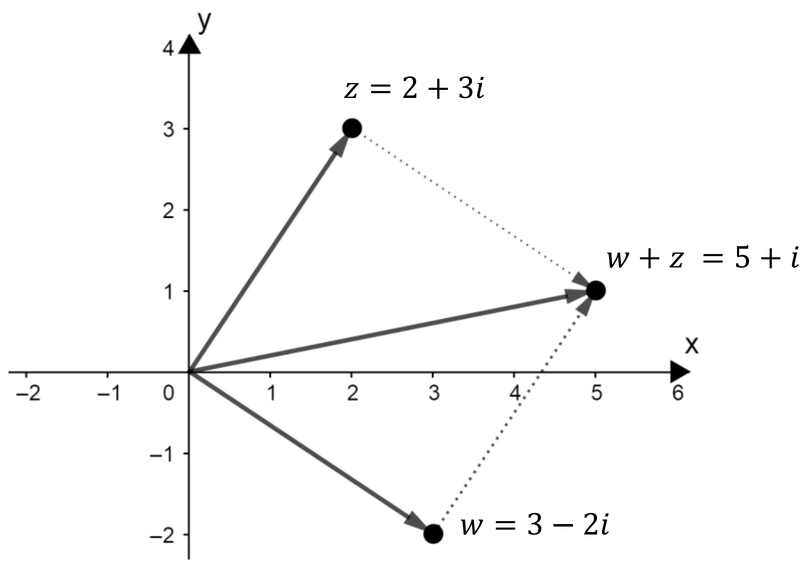
$$t = u\ .\ v = (a + bi) + (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \in \mathbb{C}.$$

Esses valores podem ser verificados facilmente no plano cartesiano de maneira idêntica à soma de vetores com números reais, ou seja, as coordenadas de w e t descritos anteriormente são, respectivamente

$$(a + a', b + b') \text{ e } (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Para exemplificarmos, tomemos $z = 2 + 3i$ e $w = 3 - 2i$.
Temos então que $w + z$ nos fornece

Figura 9: Representação geométrica da soma de dois vetores complexos



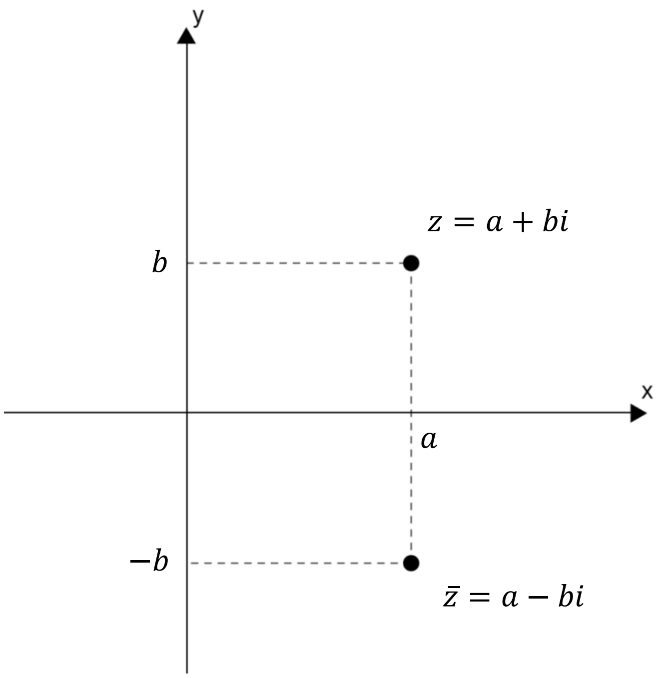
Fonte: Autor, 2021.

Por outro lado, queremos verificar a unicidade desses vetores no plano complexo. Sejam $z, z' \in \mathbb{C}$ da forma $z = a + bi$ e $z' = a' + b'i$. Temos que dois números complexos são iguais se, e somente se, suas coordenadas forem idênticas. De fato,

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a, b) = (a', b').$$

Existe ainda um ponto muito importante para a configuração dos complexos em $\mathbb{R}^2$. Definimos $\bar{z}$ como o conjugado de z, o que corresponde ao seu simétrico geometricamente falando, mudando apenas o sinal da parte imaginária do número, ou seja, $\bar{z} = a - bi$.

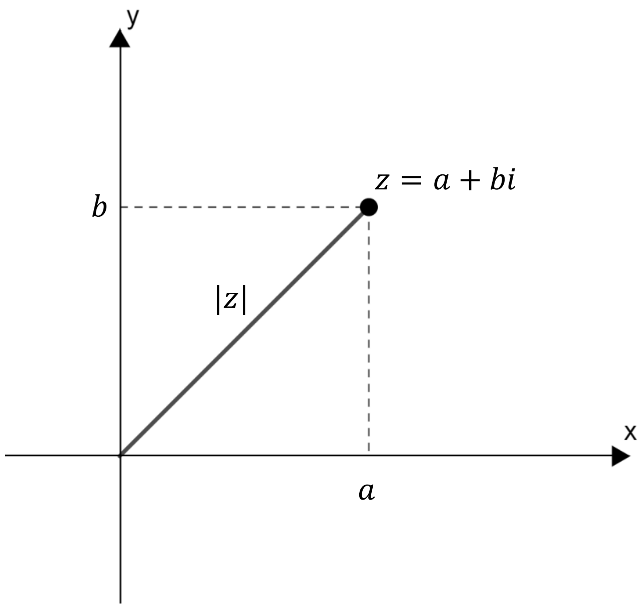
Figura 10: Representação geométrica de z e $\bar{z}$



Fonte: Autor, 2021.

Esse número tem representação significativa para determinarmos o módulo de um número complexo. Primeiramente, de maneira similar às propriedades de vetores estudados em geometria analítica, podemos dizer que o módulo de um complexo, escrito como $|z|$, é um número real não negativo da forma $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Figura 11: Representação geométrica do módulo de z



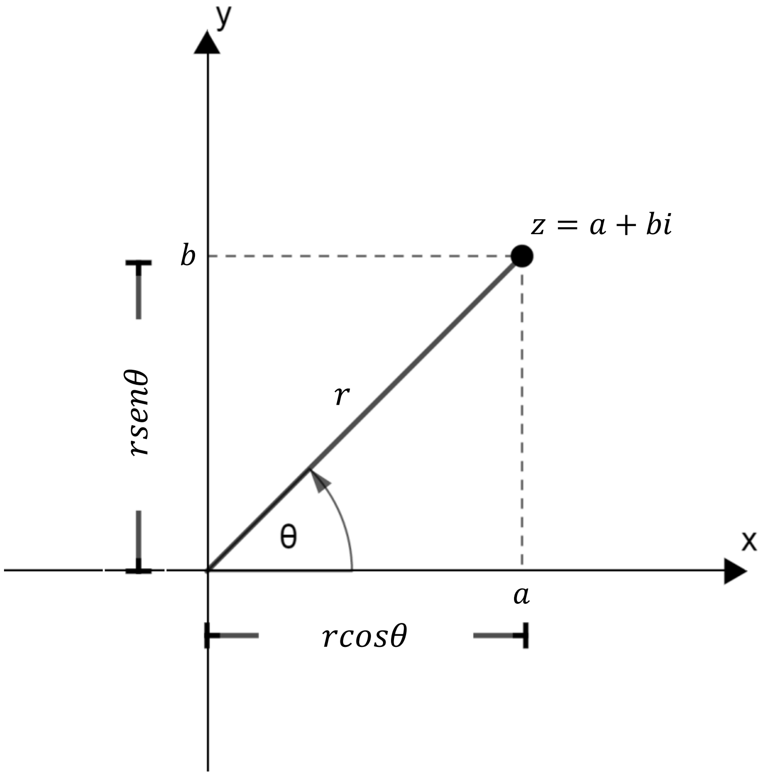
Fonte: Autor, 2021.

Perceba que, o módulo de um complexo pode ser calculado utilizando o Teorema de Pitágoras, visto que a e b configuram os catetos e $|z|$ a hipotenusa. Porém, trabalhar novos conceitos é essencial para o desenvolvimento amplo dos alunos através de outro método que é o produto de um número complexo pelo seu conjugado, ou seja,

$$z\ .\ \bar{z} = (a + bi)\ .\ (a - bi) = (a^2 - (bi)^2) = (a^2 + b^2) = |z|^2.$$

Podemos introduzir um pouco do estudo de coordenadas polares para a categoria alvo do nosso trabalho. Como dito antes, Euler quem trouxe as notações e as transformações polares para os complexos que são utilizadas até hoje. De acordo com suas ideias, tomando um $z = a + bi$ um número complexo não nulo, o segmento da origem do plano até o ponto (a, b) de comprimento $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, forma um ângulo θ com o eixo "x" conforme a figura abaixo

Figura 12: Representação geométrica de z em sua forma



Fonte: Hefez e Villela, 2018.

Definimos como argumento principal de z o ângulo θ, medido em radianos e no sentido anti-horário a partir do eixo "x", escrito da forma $Arg(z)$, através de um círculo unitário de raio 1, girando até o segmento formado entre a origem e o ponto (a, b). Logo, fazendo as relações trigonométricas, é possível fazer a substituição de variáveis para encontrarmos

$$z = r(cos\theta + isen\theta),$$

onde $a = rcos\theta$ e $b = rsen\theta$. Esse tipo de representação é de grande relevância, tendo em vista que é possível calcular com maior facilidade o produto de dois números complexos, a potência e extração de raízes de um número complexo.

Vale salientar que a forma polar de um número complexo trabalha outros conceitos mais aprofundados. Para essa categoria de discentes, acreditamos ser importante terem ao menos um contato com essa forma, o que reforçará os estudos de relações do triângulo retângulo nessa modalidade já estudados, bem como estarão adquirindo alguns conceitos mais avançados que contribuirão para seu desenvolvimento cognitivo, visto que também é competência da Matemática segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Essa nova abordagem para o estudo dos números complexos poderá ajudar o aluno a compreender melhor o significado de um número complexo e sua aplicação posterior. Dar sentido aos estudos desenvolvidos pelos discentes é um procedimento importante para a compreensão da Matemática. Logo, o uso das Transformações de Möbius, adaptado para os alunos do 3º ano do Ensino Médio, traz uma perspectiva dinâmica para o estudo das transformações geométricas por homotetia, translação e rotação, habilidades presentes na BNCC (2018), podendo despertar no aluno a curiosidade e contribuir na construção do saber matemático.

2.3 Estrutura algébrica e operações

É importante salientar que a educação é algo necessário para a formação do ser humano. De acordo com os PCN, "É preciso reconhecer o caráter disciplinar do conhecimento e, ao mesmo tempo, orientar e organizar o aprendizado, de forma que cada disciplina, na especificidade de seu ensino, possa desenvolver competências gerais" (BRASIL, 2018, p. 14). O estudo algébrico da matemática é uma das partes desse leque de construção do saber, uma vez que é competência da disciplina gerar o desenvolvimento cognitivo do aluno, visando a sua ampla formação do ser crítico.

Por outro lado, também é competência do estudo da Matemática proporcionar o reconhecimento e a utilização adequada, da forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica, tendo em vista o suporte dos PCN (p. 114). As operações dos complexos (números conhecidos pelo simbolismo da a letra "i"), também tem seus métodos algébricos, uma vez que se inicia esses estudos com a generalização de suas operações básicas. Mas, de onde surgiu a estrutura de todas as operações com esses números?

Os complexos são dotados de operações bem definidas, formando um corpo, onde representaremos pelo símbolo $\mathbb{C}$. O matemático Gauss[12], com a magnitude apresentada dos complexos em sua forma geométrica pelos seus antecessores e com a

[12] Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi um matemático, astrônomo e físico que deu contribuições matemáticas significativas para várias áreas, como a teoria dos números, geometria diferencial e análise matemática.

notação da unidade imaginária "i" adotada por Euler, desenvolveu e definiu as operações básicas que conhecemos atualmente.

Primeiramente, dizemos que um conjunto é um corpo se, e somente se, atende aos seguintes critérios:

I) As operações de adição e multiplicação são comutativas;

II) As operações de adição e multiplicação são associativas;

III) As operações de adição e multiplicação possuem elementos neutros;

IV) A multiplicação é distributiva em relação à adição;

V) Todo elemento desse conjunto possui um simétrico;

VI) Todo elemento desse conjunto possui um inverso multiplicativo.

Sendo assim, queremos mostrar, de fato, que as propriedades contidas nos números formam um corpo. Seja z um número complexo escrito da forma $z = a + bi$ com a e b números reais, nomeados por parte real, $Re(z) = a$, e parte imaginária, $Im(z) = b$. As operações de soma e multiplicação em $\mathbb{C}$ estão bem definidas. Logo, sejam z_1, z_2 complexos da forma $z_1 = a + bi$ e $z_2 = a' + b'i$. Temos então a soma e multiplicação em $\mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i = u \in \mathbb{C}$$

e

$$\begin{aligned} z_1 \,.\, z_2 &= (a + bi)\,.\,(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi - bb' \\ &= (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \\ &= v \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, a associatividade e comutatividade para ambas as operações são verificáveis. Tomando como referência os mesmos z_1 e z_2 anteriores, a comutatividade da soma e da multiplicação pode ser escrita, respectivamente

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (a' + b'i) \\ &= (a + a') + (b + b')i \\ &= (a' + a) + (b' + b)i \\ &= (a' + b'i) + (a + bi) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

$$z_1 \,.\, z_2 = (a + bi)\,.\,(a' + b'i)$$

$$
\begin{aligned}
&= (aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2) \\
&= (a'a + b'ai + ba'i + b'bi^2) \\
&= (a' + b'i)\,.\,(a + bi) = z_2\ .\ z_1\ .
\end{aligned}
$$

Por sua vez, para a associatividade, seja $z_3 = a'' + b''i$, com $a'', b'' \in \mathbb{R}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
z_1 + (z_2 + z_3) &= a + bi + (a' + b'i + a'' + b''i) \\
&= a + bi + (a' + a'' + (b' + b'')i) \\
&= a + a' + a'' + (b + b' + b'')i \\
&= (a + a') + (b + b')i + a'' + b''i \\
&= (a + bi + a' + b'i) + a'' + b''i = (z_1 + z_2) + z_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1.(z_2.z_3) &= (a + bi).[(a' + b'i)\,.\,(a'' + b''i)] \\
&= (a + bi)\,.\,(a' + b'i)\,.\,(a'' + b''i) \\
&= [(a + bi)\,.\,(a' + b'i)]\,.\,(a'' + b''i) = (z_1.z_2).z_3\ .
\end{aligned}
$$

Complementando suas operações, existem elementos neutros em $\mathbb{C}$ para cada uma das operações, ou seja, são elementos que somados ou multiplicados com z não alteram seu valor. De fato, escrevendo $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$ temos então

$$z + 0 = z + (0 + 0i) = z$$

e

$$z\,.\,1 = (1 + 0i) = z\ .$$

Outra propriedade que pode ser verificada na operação de soma, para cada $z \in \mathbb{C}$, é a existência de um z^* complexo tal que $z + z^* = 0$ e é chamado de inverso aditivo ou simétrico de z. É de fácil verificação para essa operação, bastando apenas escrever $z^* = -z$. Algo que destacamos também é o inverso multiplicativo de um complexo. Para isso, queremos achar um complexo tal que multiplicado por z resulte no número 1. Para o inverso multiplicativo, dotaremos da notação z^{-1}. Seja $z^{-1} = c + di$ com $c, d \in \mathbb{R}$. Daí,

$$z\ .\ z^{-1} = ac - bd + adi + cbi = 1\ .$$

Note que a expressão acima é verdade para $ac - bd = 1$ e $adi + cbi = 0$. Isolando as variáveis c e d em função apenas de a e b, podemos reescrever o inverso multiplicativo de z da forma

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Por fim, a propriedade da distributividade da multiplicação é válida em $\mathbb{C}$. Tomando as notações escritas anteriores de z_1, z_2, z_3 temos

$$\begin{aligned} z_1 \, . \, (z_2 + z_3) &= (a + bi) \, . \, [(a' + b'i) + (a'' + b''i)] \\ &= (a + bi) \, . \, [(a' + a'') + (b' + b'')i] \\ &= aa' + aa'' + ab'i + ab''i + a'bi + \\ &\quad + a''bi + bb'i^2 + bb''i^2 \\ &= (aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2) + \\ &\quad + (aa'' + ab''i + a''bi + bb''i^2) \\ &= z_1 \, . \, z_2 + z_1 \, . \, z_3 \, . \end{aligned}$$

Entender a origem das operações algébricas e suas contextualizações é peça importante para a aprendizagem dos alunos, visto que o conhecimento técnico da Matemática é inerente aos estudos do ser humano, como já falamos anteriormente. Isso pode ser observado tomando a BNCC (2018) que traz a ideia de utilizar a escrita matemática de modo a traduzir em outras representações semióticas, como a geométrica, por exemplo, podendo potencializar a capacidade de resolver problemas, de comunicação e de argumentação, ampliando o desenvolvimento do pensar matematicamente.

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2018, p. 530).

Em seguida, iremos abordar a aplicação dos números complexos em funções conhecidas por Transformações de Möbius contemplando algumas operações explanadas anteriormente.

3. AS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

August Ferdinand Möbius, nascido em 17 de novembro de 1790, foi um astrônomo, físico e matemático alemão, discípulo de Gauss, que teve contribuições significativas para a geometria analítica e para o estudo dos astros.

Figura 13: August Ferdinand Möbius (1790-1868)

Fonte: <https://www3.unicentro.br/petfisica/2019/09/09/august-ferdinand-mobius-1790-1868/>. Acesso em: 01 dez. 2020.

Por meio de suas publicações em astronomia e matemática, hoje é possível compreender a profundidade e a aplicação dos números complexos, bem como suas operações diversas. Isso se deu através de transformações projetivas, atualmente conhecidas por rede de Möbius.

Möbius também é famoso pela descoberta da superfície de uma única face, que ficou nomeada como Fita de Möbius. Nela, é possível percorrer toda sua extensão sem perder o contato com a superfície, o que nos dá a ideia de que a superfície possui um "único lado". Esse tipo de configuração é muito utilizado, por exemplo, na engenharia mecânica, na engenharia elétrica, no estudo da óptica, entre outros.

Figura 14: Fita de Möbius

Fonte: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-45659225>. Acesso em: 01 dez. 2020.

Em nosso trabalho, iremos apresentar as transformações desenvolvidas por Möbius no plano complexo. Estaremos observando as propriedades de determinadas funções, quais os resultados que obtemos ao fazer somas, multiplicações ou divisões de números complexos por outros complexos. Dotaremos da notação S como sendo um subconjunto dos complexos.

Uma Transformação de Möbius é uma função do tipo $f : S \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\alpha' z+\beta'}, \text{ com } \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{C} \text{ e } \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0 \qquad (1)$$

O objetivo do nosso estudo é selecionar as transformações elementares desse conteúdo, pois será o ponto principal do nosso trabalho. Logo, as funções apresentadas a seguir são obtidas por meio da função descrita em (1).

Portanto, fixado um $\beta \in \mathbb{C}$, definimos a função

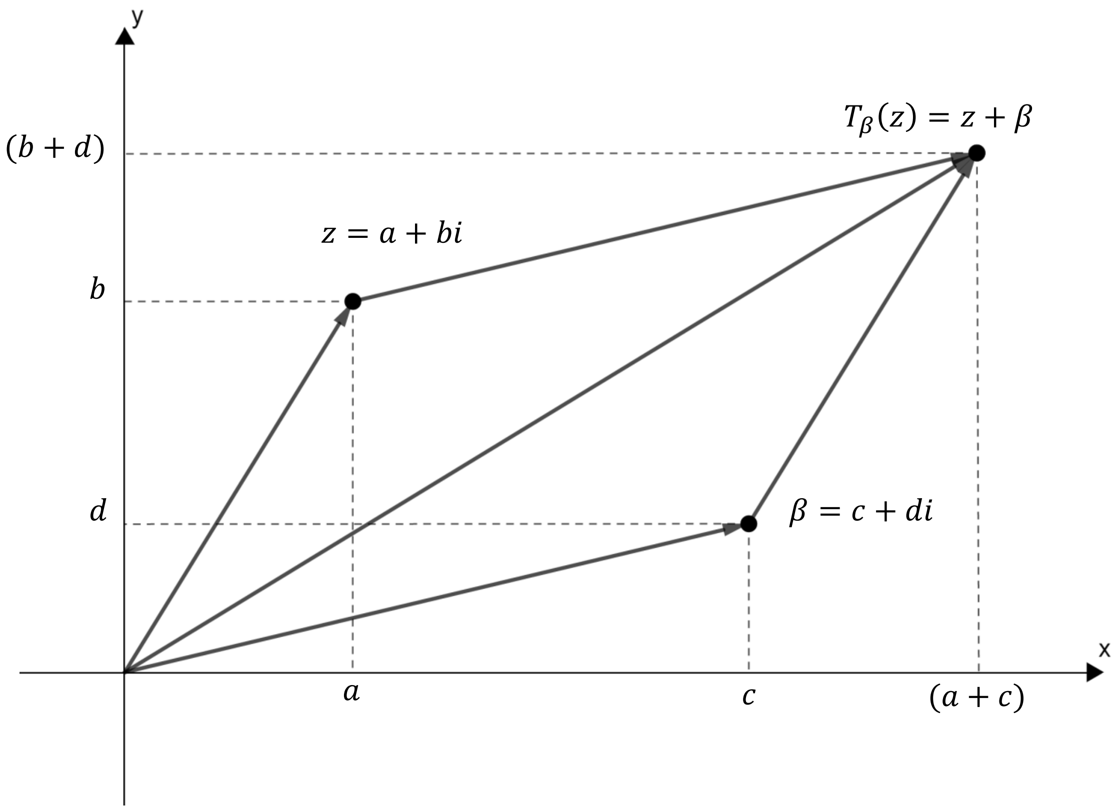
$$T_\beta(z) = z + \beta,$$

como sendo a *translação por* β, a nossa primeira transformação de Möbius. Note que podemos também chegar a essa mesma função por (1), sendo apenas necessário tomarmos $\alpha = \beta' = 1$ e $\alpha' = 0$. Pela propriedade de injetividade de funções, existe um único w complexo tal que $T_\beta = z + \beta = w$, o que nos fornece $z = w - \beta$, onde concluímos que $T_\beta(z)$ é invertível.

Para denotarmos sua representação geométrica, escrevendo $z = a + bi$ e $\beta = c + di$ e pelas propriedades de soma de complexos demonstradas na seção anterior, temos então

$$\begin{aligned} T_\beta(z) &= z + \beta \\ &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

Figura 15: Representação geométrica da translação por $\boldsymbol{\beta}$



Fonte: Hefez e Villela, 2018.

Outra transformação importante para nosso trabalho é a possibilidade de realizar dilatações ou contrações em um vetor no plano complexo. Para isso, apresentamos a *homotetia por* r escrita da forma

$$H_r(z) = rz, \text{ com } r \in \mathbb{R}\backslash(-\infty, 0].$$

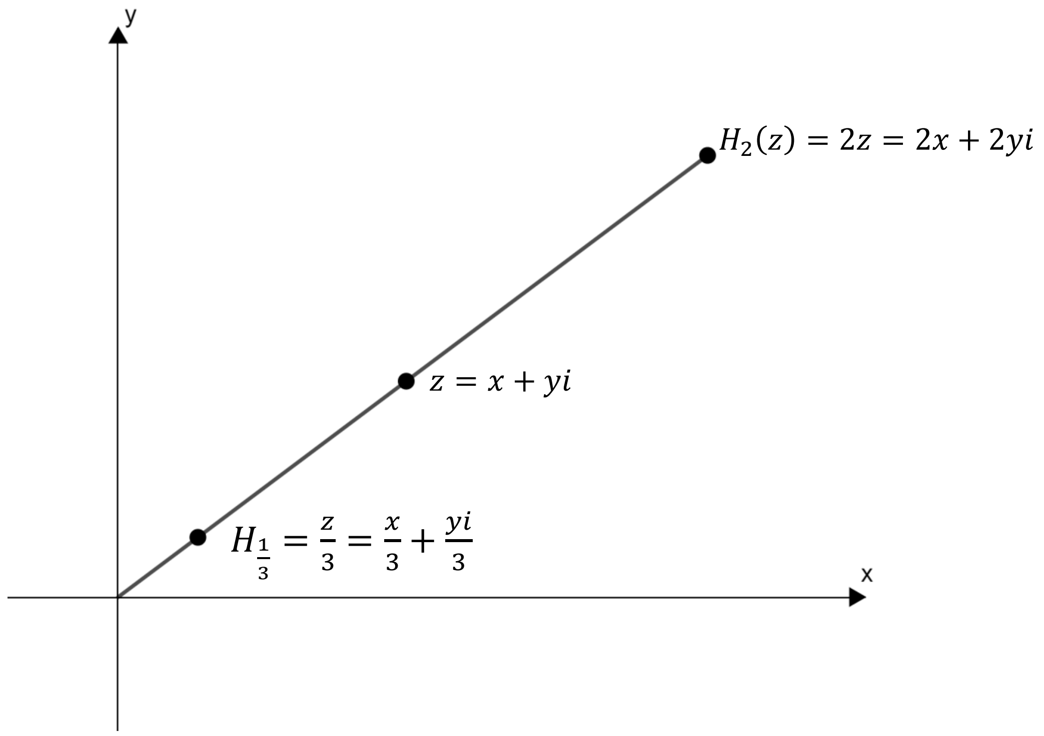
Podemos chegar a essa função tomando $\alpha' = 1$ e $\beta = \beta' = 0$ em (1), com a restrição de que r não contenha a parte imaginária, i.e., $\alpha = r + 0i$.

O primeiro caso acontece quando $r > 1$, que faz com que o vetor "estique" seu módulo, ou seja, $|z|$ sofre uma dilatação. Por outro lado, quando $0 < r < 1$, o módulo de z sofre uma contração. Observe que

$$Arg\big(H_r(z)\big) = Arg(rz) = Arg(z),$$

pois o ângulo em questão é formado com o eixo real e o módulo do vetor, o que mantém o argumento de z fixo nesse tipo de transformação. Veja o exemplo abaixo escrevendo $z = x + yi$ para $r = 2$ e $r = \frac{1}{3}$ em $H_r(z)$.

Figura 16: Representação geométrica da Homotetia para $r > 1$ e $0 < r < 1$



Fonte: Hefez e Villela, 2018.

De forma semelhante à transformação anterior, temos que $H_r(z)$ é invertível. Basta escrever $w = rz$, o que nos dá $z = \frac{w}{r}$. Logo, se H_r é uma dilatação, então H_r^{-1} é uma contração, e vice versa.

Uma terceira transformação é definida como *rotação de θ radianos*, da forma

$$R_\theta(z) = e^{i\theta}z \text{ , com } \theta \in \mathbb{R}$$

medido em radianos. Da mesma maneira que as outras transformações, R_θ é invertível, ou seja, para cada $z \in \mathbb{C}$, existe um w tal que $w = e^{i\theta}z$, o que equivale a $z = \frac{w}{e^{i\theta}}$, a inversa de R_θ. Note que

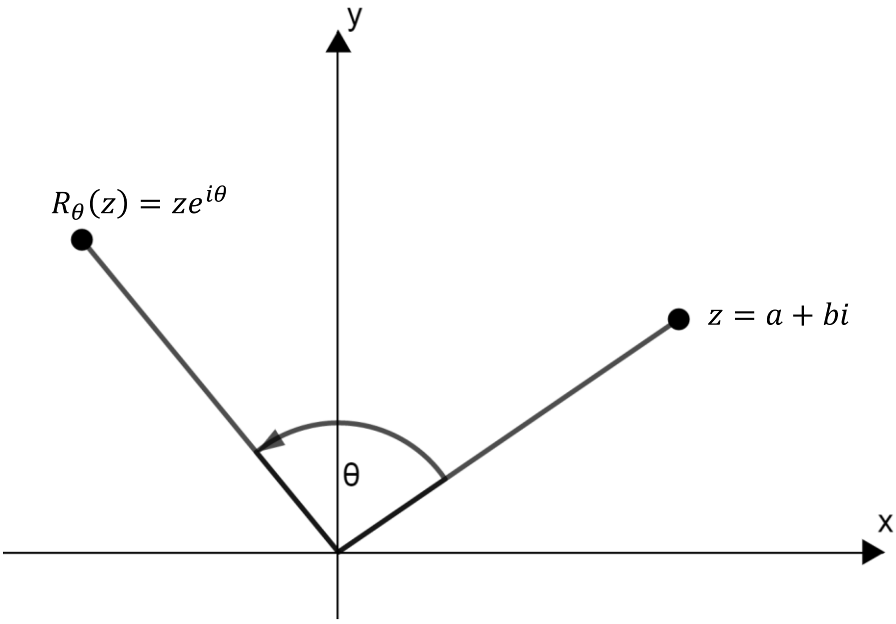
$$|R_\theta(z)| = |e^{i\theta}||z| = \sqrt{e^{i\theta} \, . \, \overline{e^{i\theta}}} \, . |z| = \sqrt{e^{i\theta} \, . \, e^{-i\theta}} . |z| = |z|$$

e

$$Arg\big(R_\theta(z)\big) \equiv \theta + Arg(z) mod 2\pi,$$

onde θ é o ângulo formado entre z e $R_\theta(z)$, o que nos mostra que efetivamente a rotação altera apenas o ângulo formado com o eixo real, conforme a figura

Figura 17: Representação geométrica da Rotação por θ radianos



Fonte: Hefez e Villela, 2018.

Entretanto, esse tipo de transformação possui cálculos de difícil compreensão para os alunos do Ensino Médio, pois não há ferramentas suficientes nesta modalidade de ensino. Logo, resumiremos a funções que tem características de rotação para a forma $R_i(z) = iz$.

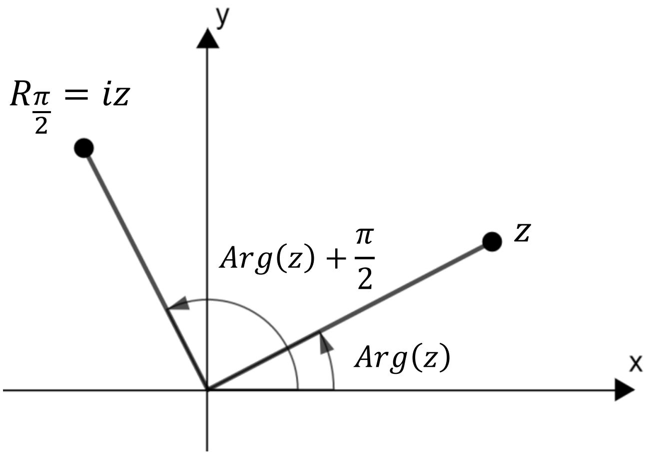
Primeiramente, vamos verificar qual efeito que causa nos números complexos ao multiplicarmos pela unidade imaginária "i". Escrevendo $z = x + yi$, observemos o cálculo abaixo.

$$iz = (x + yi)i = xi + yi^2 = -y + xi$$

Note que o produto por i transformou a parte imaginária de $|z|$ em parte real e a parte real em parte imaginária. Logo, o triângulo formado após a transformação é congruente ao triângulo inicial formado, com catetos x e y, e hipotenusa $|z|$, e que o ângulo formado após a transformação entre a hipotenusa e o eixo imaginário é côngruo ao ângulo formado entre a hipotenusa e o eixo real, nos fornecendo

$$Arg\big(R_i(z)\big) \equiv Arg(z) + \frac{\pi}{2}\ mod\ 2\pi$$

Figura 18: Representação geométrica da Rotação por θ radianos na multiplicação por i



Fonte: Hefez e Villela, 2018.

Sequencialmente, ao multiplicarmos por i, obtemos

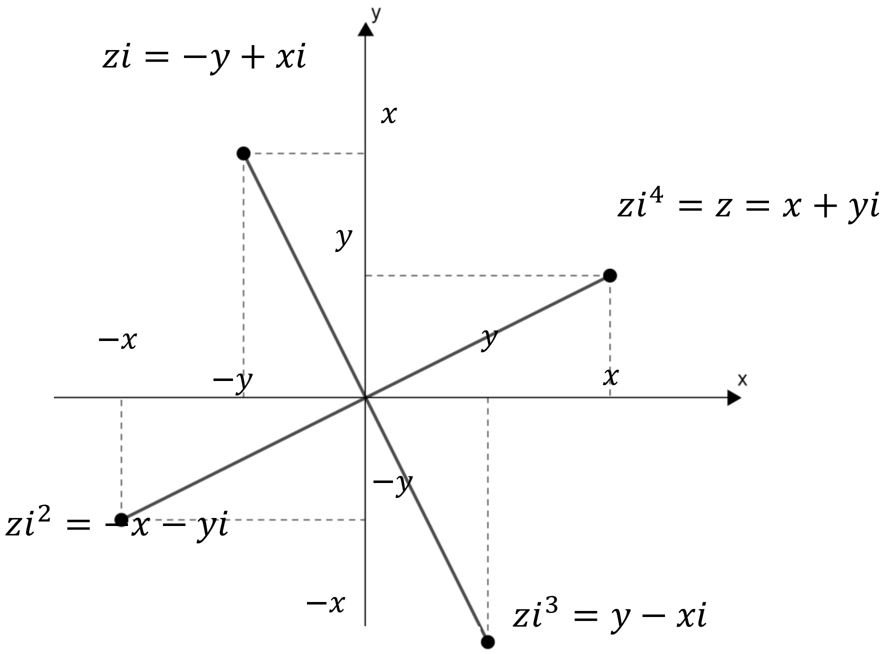
$$zi^2 = (zi)i = (-y + xi)i = -x - yi$$

$$zi^3 = (zi^2)i = (-x - yi)i = y - xi$$

$$zi^4 = (zi^3)i = (y - xi)i = x + yi$$

onde podemos representar as operações acima na figura abaixo.

Figura 19: Representação geométrica da Rotação por θ radianos na multiplicação por i múltiplas vezes



Fonte: Evans, 2006.

Podemos observar que as Transformações de Möbius resultantes do produto por i resulta em rotações de $\frac{\pi}{2}$ radianos sobre $Arg(z)$. Logo, é mais plausível abordar funções que realizam rotações no plano complexo pelo produto por i com alunos do Ensino Médio, tornando o estudo mais simples, sem perder a essência do que é a $rotação\ em\ \theta$.

Por fim, iremos ver as transformadas com características geométricas bem interessantes, chamadas $inversões$. Essas são funções $J\ :\ \mathbb{C}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ da forma $J(z) = \frac{1}{z}$. Basicamente, esse tipo de função pode causar um pouco de dúvida sobre seu entendimento. Para isso, multipliquemos o numerador de denominador de $J(z)$ pelo conjugado de $z \in \mathbb{C}$. Daí,

$$J(z) = \frac{\bar{z}}{z\,.\,\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Perceba que realizar uma inversão em um complexo z é o mesmo que transformá-lo em seu conjugado e dividir pelo módulo ao quadrado. Isso tem efeitos únicos em figuras no plano complexo. De fato, vamos inserir outra característica dessas transformações: a inversão do círculo unitário. Seja $z = |z|e^{i\theta}$. Definimos essa função como sendo

$$I(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{|z|e^{i\theta}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}e^{i\theta}$$

o que leva o número z a um ponto que possui o mesmo argumento, com módulo $\frac{1}{|z|}$. Agora, observe

$$J(z) = \frac{1}{|z|e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$$

Note que I e J possuem características complementares. Para calcularmos J basta calcularmos I, que é resultante da divisão de um complexo pelo seu módulo ao quadrado, e em seguida acharmos o seu conjugado, ou seja,

$$J(z) = \overline{I(z)}\ .$$

Isso também nos fornece que as inversões, em relação ao círculo unitário, transformam pontos fora do círculo em coordenadas dentro do círculo. Para exemplificarmos isso, seja $z = a + bi$, de forma que $|z| > 1$. Daí,

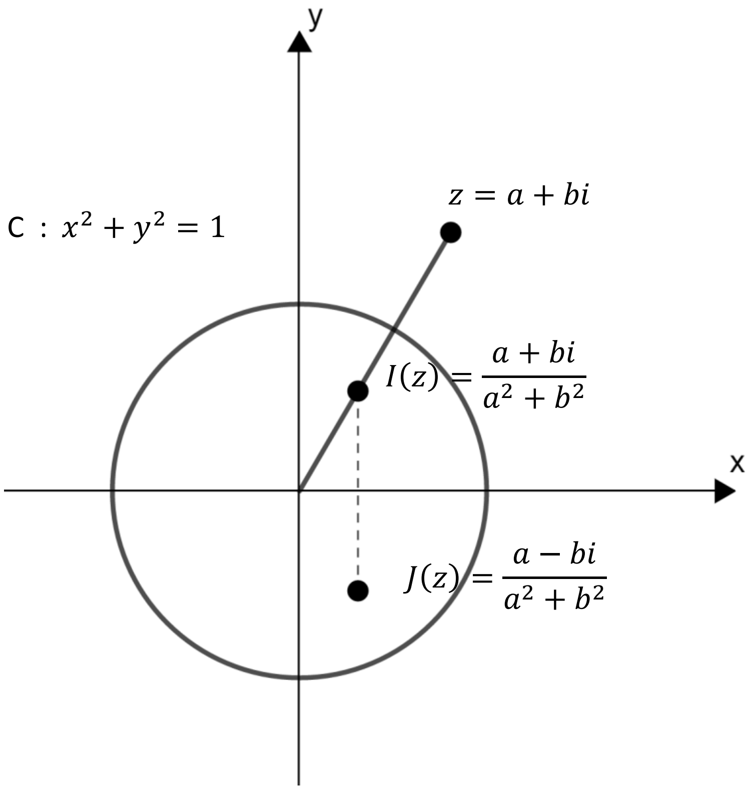
$$I(z) = \frac{a+bi}{a^2+b^2}\ .$$

Como $a^2 + b^2 > 0$, então $Arg\big(I(z)\big) = Arg(z)$, pois, como já vimos na transformação por Homotetia, $H_{|z|^2} = \frac{z}{|z|^2}$ é resultante de uma multiplicação por $\frac{1}{|z|^2}$, preservando o seu argumento. Perceba que $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$ pertence ao interior do círculo unitário. Logo, $J(z)$, que é o simétrico de $I(z)$ em relação ao eixo x, ou seja,

$$J(z) = \overline{I(z)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2},$$

também está no interior dessa circunferência.

Figura 20: Representação geométrica das inversões por I em relação ao círculo unitário e J em relação a z



Fonte: Hefez e Villela, 2018.

Por outro lado, podemos observar algumas características algébricas das inversões em retas e círculos. Em $\mathbb{R}^2$ a equação da circunferência é dada por

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{2}$$

onde $a \neq 0$, está centrada em $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right)$ e possui raio $r = \frac{\left(\sqrt{b^2+c^2-4ad}\right)}{2|a|}$.

De maneira similar à equação do círculo no plano real logo acima, também é possível obtermos uma equação nos complexos. Para isso, como x e y são números reais, escrevamos um complexo z da forma $z = x + yi$. Em seguida, expresse x e y em função de z e $\bar{z}$, obtendo

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ e } y = \frac{\bar{z}i - zi}{2}.$$

Logo, substituindo em (2) as expressões acima encontramos

$$az\bar{z} + \frac{b - ic}{2}z + \frac{b + ic}{2}\bar{z} + d = 0$$

e fazendo $A = a, D = d$ e $B = \frac{b-ic}{2}$ encontramos a proposição da circunferência no plano complexo

$$A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + D = 0, \tag{3}$$

em que A e D são números reais e $B \in \mathbb{C}$, possuindo como centro a coordenada $\left(\frac{-B+\bar{B}}{2A}, \frac{B-\bar{B}}{2iA}\right)$ e o raio $r = \frac{\sqrt{|B|^2-AD}}{|A|}$. A equação acima pode ter como solução um círculo, se $A \neq 0$, ou uma reta, se $A = 0$. Para o caso $A \neq 0$, ainda se pode obter outras três possibilidades:

(i) Um círculo real se $|B|^2 - AD > 0$

(ii) Um "círculo nulo" ou círculo degenerado se $|B|^2 - AD = 0$

(iii) Um círculo conjunto vazio se $|B|^2 - AD < 0$.

Note que o terceiro item é um conjunto vazio, pois não existem coordenadas reais que satisfaçam a desigualdade. Diante das informações apresentadas, vamos verificar o que acontece com retas e círculos quando se submetem às transformações por inversão.

De início, dividamos a equação (3) por $|z|^2$

$$\frac{A|z|^2}{|z|^2} + \frac{Bz}{|z|^2} + \frac{\bar{B}\bar{z}}{|z|^2} + \frac{D}{|z|^2} = 0$$

Daí,

$$A + \frac{Bz}{z\ .\ \bar{z}} + \frac{\bar{B}\bar{z}}{z\ .\ \bar{z}} + \frac{D}{|z|^2} = 0$$

$$A + \frac{B}{\bar{z}} + \frac{\bar{B}}{z} + \frac{D}{|z|^2} = 0$$

Substituindo $\frac{1}{z} = w, \frac{1}{\bar{z}} = \bar{w}$ e $\frac{1}{|z|^2} = |w|^2$, obtemos

$$A'|w|^2 + B'w + \bar{B}'\bar{w} + D' = 0 \tag{4}$$

onde $A = D', D = A'$ e $B' = \bar{B}$. Note que a inversão aplicada na equação (3) transformou em outra equação (4) com as mesmas características, porém podendo conter algumas transformações conforme os valores dados.

Para um entendimento mais simples por parte dos alunos, o ideal é trabalhar as equações em função da parte real e imaginária de um número complexo. Portanto, das igualdades $|z|^2 = x^2 + y^2$, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{\bar{z}i - zi}{2}$, podemos fazer o seguinte raciocínio na equação (2)

$$a(z\bar{z}) + \frac{b(z+\bar{z})}{2} + \frac{c(\bar{z}i - zi)}{2} + d = 0\ .$$

Aplicando a inversão $w = \frac{1}{z}$, obtemos

$$a\left(\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{i}{\overline{w}} - \frac{i}{w}\right) + d = 0$$

e multiplicando por $|w|^2$

$$a + \frac{b(\overline{w} + w)}{2} + \frac{c(wi - \overline{w}i)}{2} + d|w|^2 = 0\ .$$

Por fim, fazendo $w = u + vi$, tem-se

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0\ .$$

Perceba que a inversão pode ser feita em equações apenas contendo números reais, fazendo a associação das coordenadas complexas, aplicando o seguinte procedimento:

I) Aplicamos a inversão em z;

II) Multiplicamos o resultado anterior pelo seu módulo;

III) Invertemos o sinal do coeficiente c.

De maneira mais simples, basta invertermos os coeficientes a e d, e trocarmos o sinal do c. Esse esquema apresentado torna o estudo mais compacto para os alunos alvo do nosso trabalho, facilitando a absorção das técnicas de inversão caso estejam trabalhando com equações implícitas. Podemos também utilizar $w = x + yi$ ao invés de $u + vi$, pois será de mais fácil associação com o mesmo plano cartesiano.

Diante disso, analisemos os casos possíveis para valores dos coeficientes reais A e D e o complexo B:

(i) Se A e D são não nulos, a equação (3) é um círculo que não passa pela origem e J a transforma em outro círculo de mesma característica, podendo ser real, degenerado ou conjunto vazio.

Para isso, tome a equação $|z|^2 + (-3 + 2i)z + (-3 - 2i)\bar{z} + 12 = 0$, com $z = x + yi$. Reajustando, encontramos

$$|z|^2 - 3(z + \bar{z}) - 2(\bar{z}i - zi) + 12 = 0.$$

Como, $|z|^2 = x^2 + y^2$, $z + \bar{z} = 2x$ e $\bar{z}i - zi = 2y$, facilmente encontramos

$$1(x^2 + y^2) - 6x - 4y + 12 = 0, \tag{5}$$

o que nos fornece

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1^2.$$

Temos então um círculo de centro $(3\,,2)$ de raio 1, que não passa pela origem, pois a distância do centro à origem é $D = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} > 1$. Aplicando a inversão na equação (5) obtemos

$$12(x^2 + y^2) - 6x + 4y + 1 = 0$$

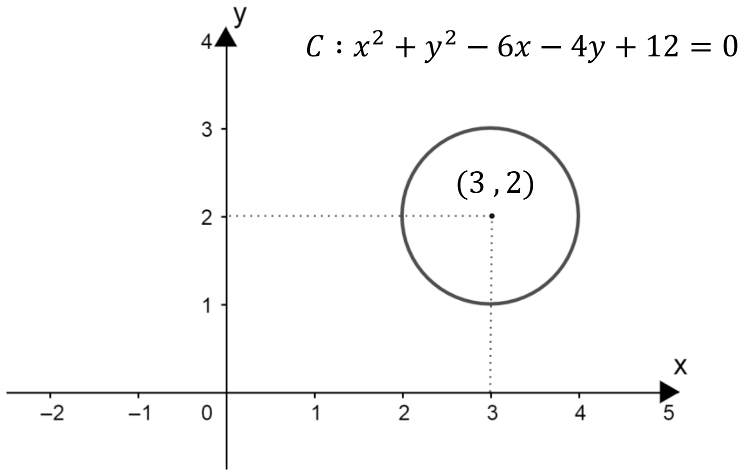
$$12\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{12}{16} + 12\left(y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}\right) - \frac{12}{36} + 1 = 0$$

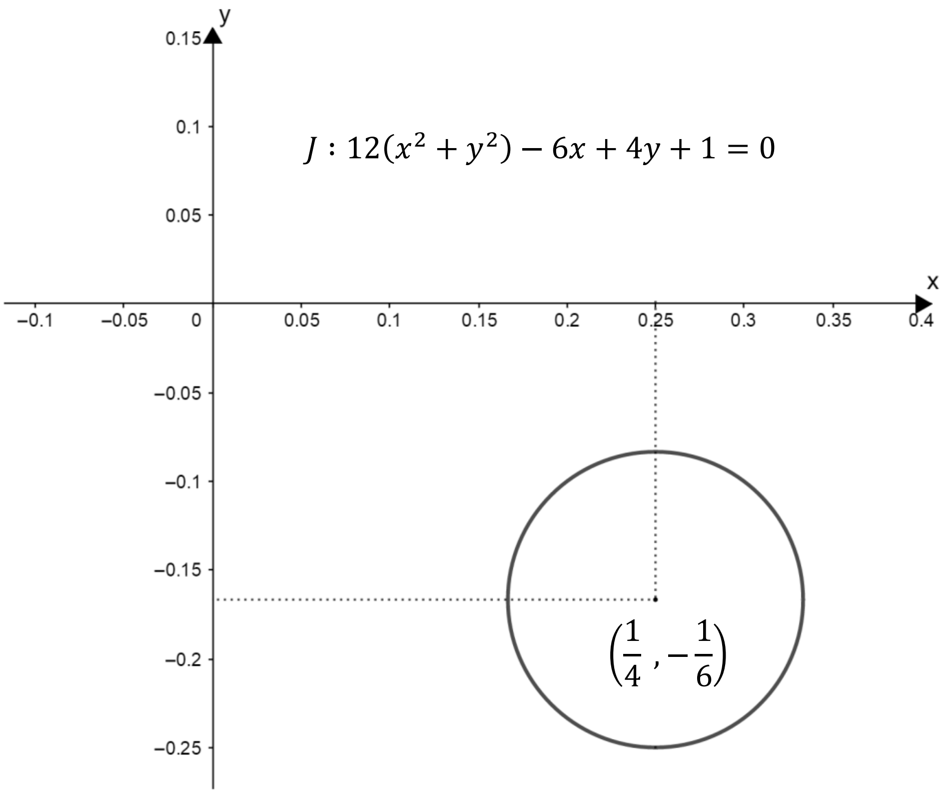
$$12\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 12\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{-9 - 4 + 12}{12} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

Logo, J transformou um círculo em outro círculo que também não passa pela origem.

Figura 21: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $|z|^2 - 3(z + \bar{z}) - 2(\bar{z}i - zi) + 12 = 0$





Fonte: Autor, 2021.

(ii) Se A e B são não nulos e $D = 0$ a equação (3) é um círculo que passa pela origem e J a transforma em uma reta que não passa pela origem.

Como exemplo, reajustando a equação do círculo $|z|^2 - 3z - 3\bar{z} = 0$, podemos encontrar

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)-3(x+yi)-3(x-yi)&=0\\ x^2+y^2-6x&=0\\ (x^2-6x+3^2)-3^2+y^2&=0\\ (x-3)^2+(y-0)^2&=3^2,\end{aligned}$$

uma circunferência centrada em $(3\,,0)$ de raio 3 que passa pela origem. Daí, aplicando a inversão na equação descrita primeiramente, obtemos

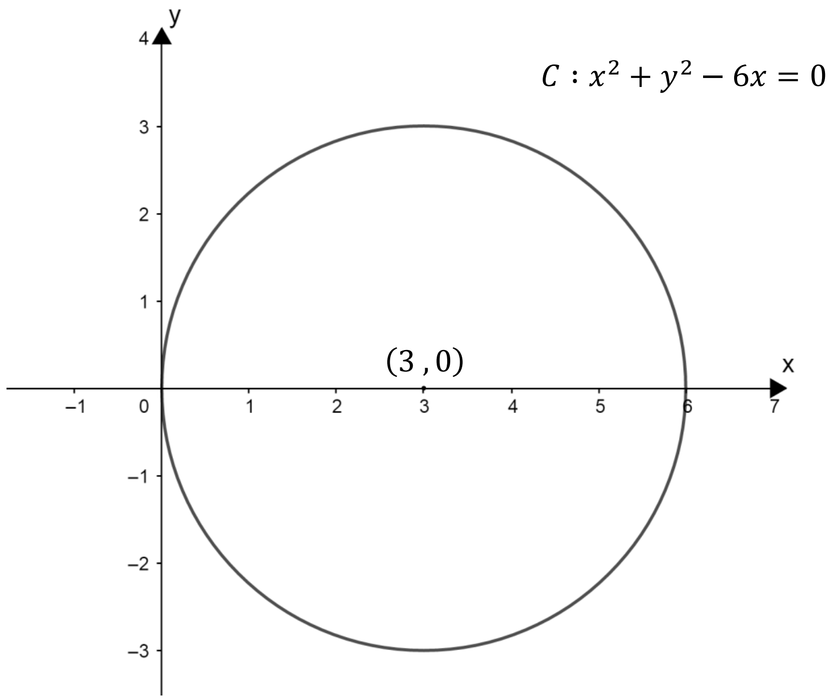
$$1-3\overline{w}-3w=0, \text{ onde } w=\frac{1}{z}.$$

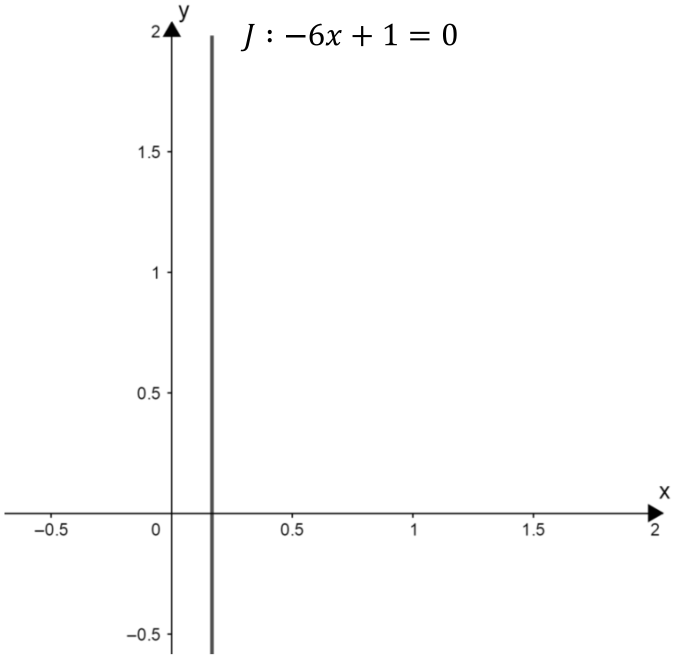
Escrevendo $w=x+yi$, temos

$$\begin{aligned}1-3(x-yi)-3(x+yi)&=0\\ 1-6x&=0\\ x&=\frac{1}{6}\,,\end{aligned}$$

ou seja, a inversão aplicada à equação do círculo em questão a transformou em uma reta conforme a figura abaixo.

Figura 22: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $|z|^2-3z-3\overline{z}=0$





Fonte: Autor, 2021.

(iii) Se $A = 0$ e B, $D \neq 0$, a equação (3) é uma reta que não passa pela origem e J a transforma em um círculo que passa pela origem.

Como exemplo, tomemos a equação $(-2 - i)z + (-2 + i)\bar{z} + 8 = 0$. Reorganizando e substituindo z em função de x e y

$$-2(z + \bar{z}) + (\bar{z}i - zi) + 8 = 0$$
$$-2 . (2x) + (2y) + 8 = 0$$
$$-4x + 2y + 8 = 0$$
$$0 . (x^2 + y^2) - 4x + 2y + 8 = 0$$

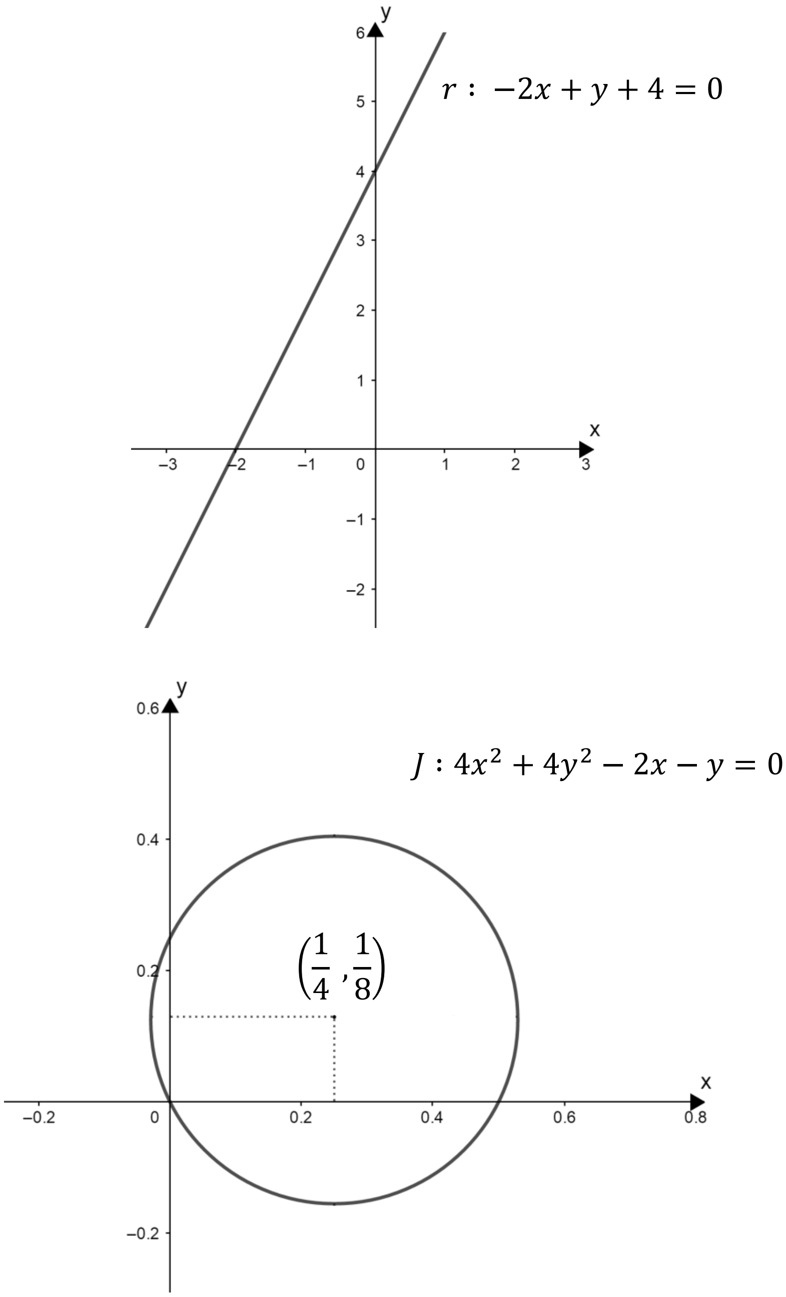
Temos uma reta que não passa pela origem. Aplicando a inversão, obtemos

$$8 . (x^2 + y^2) - 4x - 2y + 0 = 0$$
$$4x^2 + 4y^2 - 2x - y = 0$$
$$4\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) - \frac{16}{64} + 4\left(y^2 - \frac{y}{4} + \frac{1}{64}\right) - \frac{4}{64} = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{5}{64},$$

uma circunferência centrada em $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ e de raio $r = \frac{\sqrt{5}}{8}$ que passa pela origem, pois

$$D = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{8} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{4}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

Figura 23: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $(-2 - i)z + (-2 + i)\bar{z} + 8 = 0$



Fonte: Autor, 2021.

(iv) Se $A, D = 0$ e $B \neq 0$, equação (3) é uma reta que passa pela origem e J a transforma em outra reta que também passa pela origem.

A exemplo, temos a equação $\left(1 - \frac{3}{2}i\right)z + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)\bar{z} = 0$, que fazendo de maneira análoga ao item anterior, obtemos

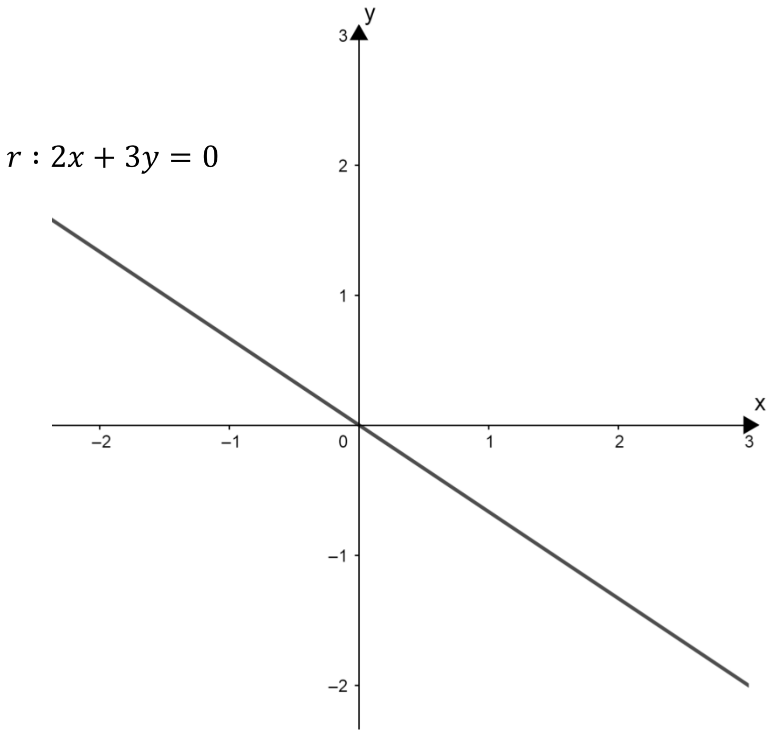
$$(z + \bar{z}) + \frac{3(\bar{z}i - zi)}{2} = 0$$
$$2x + 3y = 0$$
$$0\,.\,(x^2 + y^2) + 2x + 3y + 0 = 0$$

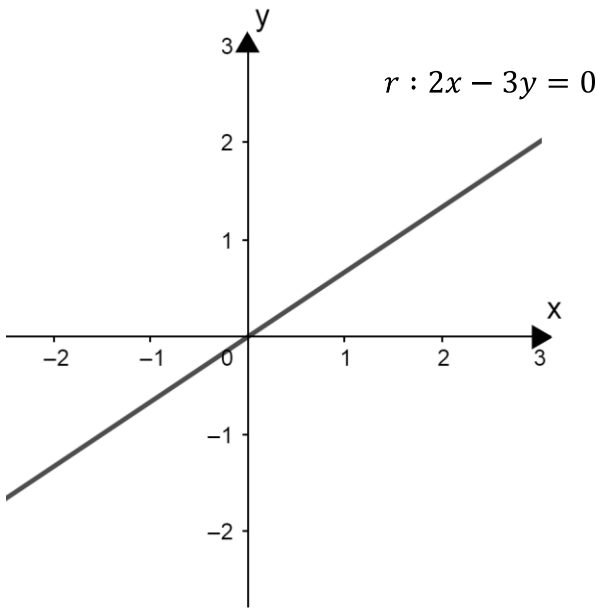
uma reta que passa pela origem. Aplicando a inversão, temos

$$0\,.\,(x^2 + y^2) + 2x - 3y + 0 = 0$$
$$2x - 3y = 0$$

uma outra reta que também passa pela origem.

Figura 24: Representação geométrica antes e após a inversão J aplicada à equação $\left(1 - \frac{3}{2}i\right)z + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)\bar{z} = 0$

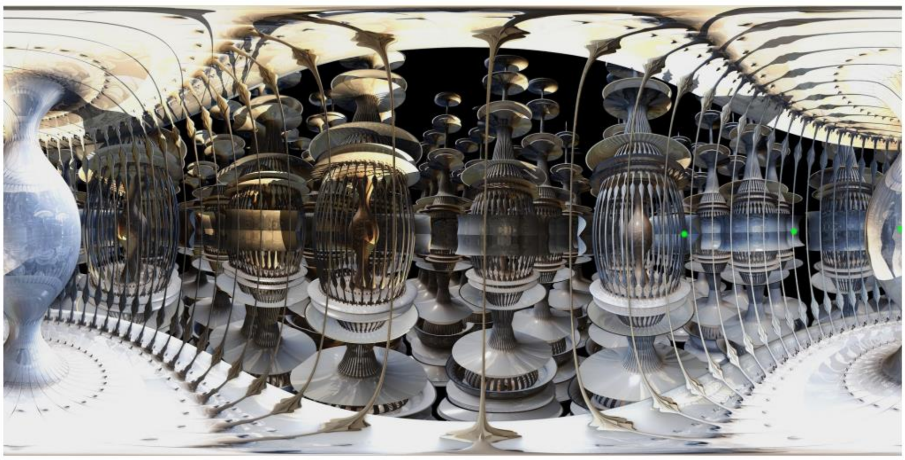




Fonte: Autor, 2021.

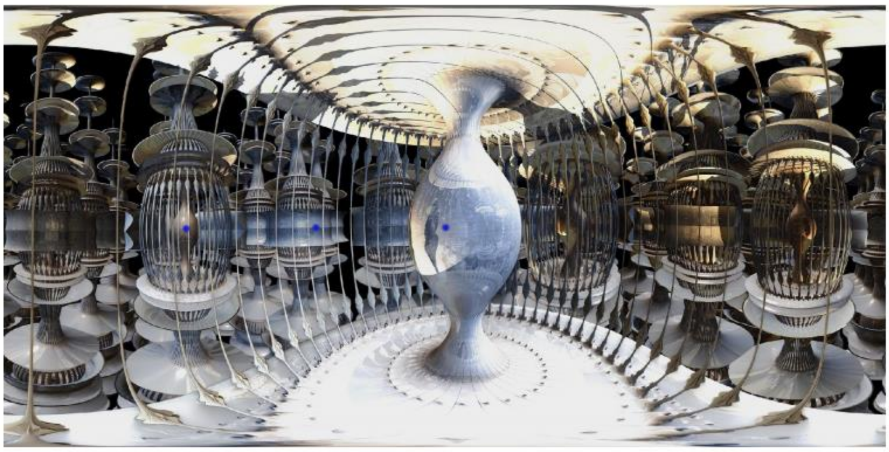
As Transformações de Möbius, em geral, causam efeitos visuais muito interessantes em figuras geométricas ou imagens fotográficas. Abaixo, exibimos imagens do trabalho de Ferreira e Sacht (2016) onde foi feito experimentos de captura de imagens utilizando modificações com números complexos.

Figura 25: Imagem original capturada



Fonte: Ferreira e Sacht, 2016.

Figura 26: Imagem modificada por translação



Fonte: Ferreira e Sacht, 2016.

Figura 27: Imagem original capturada

Fonte: Ferreira e Sacht, 2016.

Figura 28: Imagem modificada por Homotetia de fator 3

Fonte: Ferreira e Sacht, 2016.

Figura 29: Imagem modificada por Homotetia de fator $\frac{1}{3}$

Fonte: Ferreira e Sacht, 2016.

Por fim, as Transformações de Möbius podem tornar o estudo dos complexos para os discentes do Ensino Médio mais dinâmico, visto que sua aplicação possui características únicas, principalmente quando se trata das inversões. Como já citamos, o ser humano precisa compreender o mundo ao seu redor. E o entendimento de situações matemáticas complexas o permitirá amadurecer seu cognitivo, podendo obter novas ferramentas que contribuam para sua formação como um todo.

4. O LÚDICO COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Toda e qualquer atividade que proporcione um momento de descontração e diversão na vida das pessoas é primordial para uma vida mais saudável. Cartazes divertidos, comerciais engraçados, séries de TV, filmes de comédia... Tudo que engloba essa temática chama a atenção, arranca sorrisos e proporciona uma sensação de bem-estar interior. Dentro do ambiente escolar, existe uma estratégia de ensino que ajuda bastante no processo ensino-aprendizagem: a atividade lúdica.

O lúdico surge como uma ferramenta importante para o processo civilizatório e para a construção do saber. O trabalho de Sant'Anna e Nascimento (2011) traz momentos históricos sobre a inserção do lúdico como parte essencial no desenvolvimento humano, onde revela a importância desse tipo de atividade em épocas anteriores vividas pelo homem.

Esse tipo de metodologia é bastante utilizado nos dias atuais, tendo em vista que o ato de obter novos saberes de maneira divertida torna a aprendizagem muito mais prazerosa.

> [...] o lúdico se alia a uma teoria abrangente e práticas constantes que permite elucidar o relacionamento dos povos na sociedade, na cultura, ou seja, nos diversos seguimentos socioeducacionais, sem que para isso seja preciso esforço, com a capacidade de aprender com prazer e satisfação. (FIGUEREDO, 2011, p. 41)

As atividades escolares que diferem do âmbito tradicional – pleito que é majoritário no modelo escolar atual– devem ser um apetrecho na formação do ser. Almeida (2007) em sua pesquisa afirma que cada brincadeira, brinquedo ou qualquer tipo de jogo está intrínseco no desenvolvimento amplo do ser humano. Tudo que faz o homem interagir com o meio, seja de forma divertida ou não, facilita sua evolução.

Além disso, a atividade divertida proporciona uma interação maior entre os discentes, confrontando suas ideias e realizando assim a troca de saberes. Vygotsky (1991) afirma que a aprendizagem que proporciona a formação do homem, seja de maneira direta ou indireta, tem uma eficácia maior quando se tem um mediador entre o instrumento de aprendizagem e os personagens imbuídos da vontade de aprender. É nesse ponto que se encaixa o profissional de ensino, servindo de ponte entre esses objetos, unindo os pontos que formarão, em cada indivíduo, o conhecimento necessário para si.

Embora ainda se questione sobre a importância das atividades lúdicas durante o ambiente escolar, hoje com os estudos já realizados, foi comprovado o quão é essencial esse tipo de estratégia diferenciada que foge aos moldes tradicionais de ensino.

> O uso do lúdico no ensino da matemática embora tão utilizado em todas as épocas, perpassando por vários sistemas, ficou fortalecido com os estudos e pesquisas das áreas das ciências humanas que tratam do desenvolvimento cognitivo da criança. Temos a Psicologia, a Pedagogia e até mesmo a Sociologia estudando como o convívio social das crianças influencia no seu aprendizado, dando ênfase à utilização do lúdico como objeto de estudo e pesquisa para o desenvolvimento da criança. (SANT'ANNA; NASCIMENTO, 2011, p. 29)

De fato, as atividades que os seres humanos desenvolvem de maneira divertida trazem uma satisfação maior, e, consequentemente, prendem a sua atenção significativamente. Nesse sentido, o ambiente escolar deve proporcionar situações relevantes nessa temática, de maneira que o aluno consiga desenvolver seu potencial por completo.

> A escola deve planejar suas atividades de modo que o aluno possa partir de elementos cognitivos que se encontram em seu repertório, para então construir o novo. O professor precisa conhecer seus alunos para favorecer essa evolução com atividades oportunas. [...] É necessária uma interação entre as potencialidades de cada etapa e o ambiente — no qual se inclui a escola — que precisa ser rico e motivador. (NETO, 1988, p. 34).

De maneira geral, as atividades lúdicas complementam a construção do ser pensante, desenvolvendo não só sua capacidade de agir como também a de pensar. Sant'Anna e Nascimento (2011) inserem que "Qualquer atividade lúdica provoca estímulos nas pessoas, explorando seus sentidos vitais, operatórios e psicomotores, propiciando o desenvolvimento completo das suas funções cognitivas" (p. 30).

E compreender a Matemática não envolve apenas estudar as operações básicas, mas também saber conceitos, elaborar, interpretar e resolver situações-problema, bem como também a manipular expressões genéricas (álgebra), resolução de equações em geral e o conhecimento do formalismo matemático, traduzindo a sua rica simbologia escrita.

Pode-se notar que as atividades propostas pela escola mediante a interação entre os estudantes devem se enquadrar também nesse ponto, partindo majoritariamente do quanto o professor conhece seus alunos, a fim de aplicar o método mais eficaz para alcançar o desenvolvimento cognitivo no estudante. A visão de Vygotsky (1991) sobre a teoria das Zonas de Desenvolvimento Proximal (ZDP) permitia delinear o futuro próximo do estudante e analisar o estado de desenvolvimento do aluno, contribuindo não só com o conteúdo já desenvolvido pelo discente como também interagir com aquilo que ainda está no processo de maturação, e, pelo fato de tratarmos de estudantes do Ensino Médio, a interação colabora com o seu processo de desenvolvimento cognitivo.

Os participantes que interagem entre si, com atividades ou com jogos propriamente ditos, desenvolvem um ambiente que corrobora com sua aprendizagem significativa, uma vez que seres humanos são sociais e essa interação torna-se necessária. Pelos PCN temos que "A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros, o que pensa e as dificuldades que enfrenta" (p. 120). Logo, a interação entre os alunos do Ensino Médio através do lúdico promove a troca e o confronto de ideias, trazendo uma maior dinâmica ao processo de aprendizagem.

Em Suleiman (2008) é explicitado que, para Piaget, a aprendizagem pressupõe ser um processo interno de reorganização cognitiva, onde a interação social e os conflitos cognitivos são ações importantes para essa dinâmica. Em outras palavras, a colaboração e a cooperação são fatores cruciais para o desenvolvimento da aprendizagem.

Não se pode confundir o lúdico pedagógico com a simples interpretação do significado da palavra que envolve diversão. De fato, a palavra deriva do latim *ludus* que significa jogo, exercício ou imitação, brincadeiras em geral. Embora sejam associadas a essa palavra, as ações lúdicas tem como um de seus objetivos, transformar aquela atividade "monótona" em algo mais atrativo. Como qualquer outro instrumento educacional, deve somar com os processos de construção de conteúdo.

É muito comum relacionar a palavra em destaque com um assunto muito importante no cotidiano: o jogo. As atividades que envolvem esse tipo de semântica, por mais simples que sejam, ajudam o discente a compreender o mundo ao seu redor, pois desenvolve suas capacidades físicas e psicológicas como um todo.

Em conformidade, Vygotsky (1991) afirma que durante o período escolar o brinquedo não desaparece, mas está inserido na realidade do aluno, onde a essência desse instrumento é a criação de uma relação entre situações no pensamento e na vida real.

> [...] mesmo em suas formas mais simples, ao nível animal, o jogo é mais do que um fenômeno fisiológico ou um reflexo psicológico. Ultrapassa os limites da atividade puramente física ou biológica. É uma função significante, isto é, encerra um determinado sentido. No jogo existe alguma coisa "em jogo" que transcende as necessidades imediatas da vida e confere um sentido à ação. (HUIZINGA, 2000, p.04)

Entretanto, os jogos ou atividades devem ser apresentados de maneira coerente, em conformidade com os conteúdos lecionados, complementando na construção, em nosso caso, do conhecimento matemático. Sant'Anna e Nascimento (2011) reitera que o professor tem um papel fundamental para o aprendizado matemático de forma significativa, utilizando-se das atividades lúdicas para tal, "... sem que tais atividades percam as suas essências, mas que resultem no objetivo esperado." (p.30)

> Aprender Matemática requer ainda um conjunto de habilidades e competências de tal forma arranjada que possibilite o êxito e o sucesso no movimento racional dessa área do conhecimento. Esse conjunto, por sua vez, pode ser estimulado e desafiado para atuar com eficiência a partir de atividades com jogos. (SULEIMAN, 2008, p.110).

De fato, em Figueredo (2011) foi levantado estudos voltados à inserção do lúdico no ensino da Matemática. Ela exalta que essa ferramenta vem sendo estudada como uma alternativa para o ensino da matemática, dando autonomia e valorizando o fortalecimento da autoestima, ou seja, "... as atividades lúdicas através dos jogos dá a oportunidade de torná-los mais confiantes, desenvolvendo habilidades significativas para suas vidas em sala de aula e na sociedade" (p. 39). Pelo fato do professor lidar com alunos do Ensino Médio – já que são alunos que possuem mais maturidade se comparados com o Ensino Fundamental – pode-se trabalhar jogos que utilizem uma abordagem mais reflexiva com o aluno, deixando espaço para o estudante explorar, pensar e, consequentemente, gerar o seu próprio conhecimento do assunto matemático.

Estudar métodos, fórmulas, a escrita formal e ainda resolver problemas contextualizados pode ser uma tarefa um pouco complexa, caso o estudante não detenha o domínio de conteúdos mais básicos da Matemática. Os jogos matemáticos envolvendo resolução de problemas mais elementares da disciplina pode ajudar o aluno do Ensino Médio a diminuir tais dificuldades em conteúdos mais avançados. Borin (1996) afirma que o jogo desenvolve o raciocínio, a atenção e a concentração, fatores cruciais para o aprendizado da Matemática. Logo, é possível interpretar e resolver problemas de maneira mais fácil, visto que o interesse do aluno está mais aflorado nessa perspectiva.

O professor deve explorar o conhecimento matemático dos jovens estudantes em conjunto com a ludicidade, podendo ajudar no processo de ensino aprendizagem, visto que o prazer adquirido durante essas atividades podem estimular os estudos dos discentes.

Em suma, a diversão é inerente ao homem como um todo. Sempre há como buscar processos evolutivos aplicados pelo lúdico no Ensino Básico, seja no desenvolvimento do raciocínio ou dos estímulos físicos, tendo como alvo os estudantes do Ensino Médio, já que estão concluindo os estudos de uma formação mínima para a sociedade. Pelos PCN (2018) o jogo faz parte da natureza humana e ajuda no desenvolvimento dos processos psicológicos ditos essenciais, desde que controlados e direcionados de maneira correta. Para os docentes em Matemática, o lúdico se enquadra como um instrumento importante na construção de conhecimento, podendo preencher lacunas e fazer com que desperte nos estudantes o interesse na disciplina, de modo a quebrar esse paradigma de que estudar matemática não é para todos.

5. PROPOSTAS DE ATIVIDADES LÚDICAS

Diante do que apresentamos no presente trabalho, atuaremos nesta seção com o lúdico na matemática, através de jogos que envolvam os cálculos das operações com os números complexos, buscando de forma divertida, unir o conhecimento matemático com a interação entre os discentes.

Salientamos que é de suma importância que os professores que tenham interesse em aplicar os jogos em sala de aula devem conhecer as Transformações de Möbius elementares que expomos anteriormente.

Os jogos que serão apresentados são de criação do autor, com exceção de um deles que é uma adaptação de um jogo já existente. Esperamos que o nosso trabalho sirva de inspiração e incentivo na criatividade do docente em buscar outras ferramentas ou aprimorar as que explanaremos a seguir.

Para isso, o objetivo da proposta de atividade é marcado de forma a:

- Interagir de forma cooperativa o trabalho coletivo buscando as soluções para os problemas propostos;
- Aumentar o interesse e o desenvolvimento da capacidade para resolver situações-problema;
- Estimular o domínio de cálculos algébricos envolvendo os números complexos.

Sendo assim, iremos apresentar as propostas de atividades tendo como alvo os alunos do Ensino Médio, em específico, o 3º ano.

5.1 A Trilha do Desconhecido

Para nossa primeira proposta, apresentamos um jogo de tabuleiro, criado pelo autor, onde os participantes têm como objetivo percorrer o mapa até o local indicado. Esse jogo é marcado pela competitividade entre os alunos, realizando cálculos com números complexos, podendo cada jogador ser auxiliado por uma equipe, trazendo mais dinamismo à atividade.

Objetivo do jogo:

Como objetivo principal, o participante deverá percorrer pelo mapa, em turnos, até alcançar o ponto de chegada, sendo o vencedor aquele que chegar primeiro.

Materiais:

- 01 folha de papel prensado;
- Folhas de papel guache coloridas (pelo menos 03 cores diferentes);
- Folhas de papel A4 brancas;
- Cola, tesoura e estilete;
- Lápis hidrocor preto;
- Lápis hidrocor vermelho
- 01 mapa para a criação da trilha;
- 04 pinos representando os participantes;
- 01 dado comum de seis faces, numerados de 1 a 6;
- 02 tipos de cartas denominadas "Carta do Caminho", onde estarão escritas funções complexas. O verso poderá conter as iniciais $N, S, L\ e\ O$ ou $NE, NO, SE\ e\ SO$;
- 01 tipo de carta denominada "Carta Rotação", contendo a unidade imaginária para formar a Transformação de Möbius na modalidade rotação, podendo ser $i, i^2, -i$ ou $-i^2$
- 01 tipo de carta denominada "Carta Surpresa";
- Lápis e borracha;

Primeiramente, montamos um tabuleiro para os participantes se locomoverem. Deixaremos disponível no apêndice o mapa que utilizaremos, porém deixamos em aberto para o docente caso queira, juntamente com os alunos, criar um mapa a seu gosto, apenas seguindo alguns critérios de pontos de bifurcação, contendo as descrições específicas aqui apresentadas.

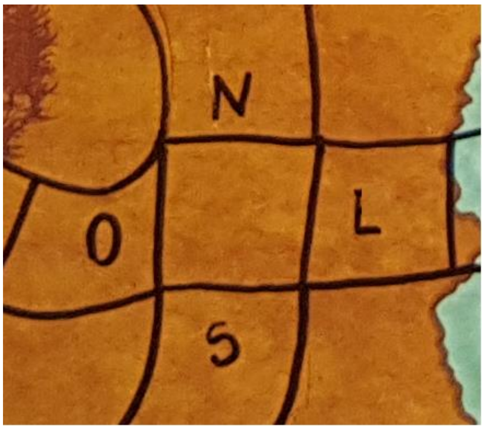
O tabuleiro que criamos, de tamanho 40cm x 52cm, foi feito com papel prensado (encontrado facilmente em livrarias), onde colamos em sua superfície um mapa previamente impresso. Em seguida, com lápis hidrocor preto, desenhamos os caminhos e dividimos em pequenos espaços, bem como alguns pontos específicos chamados de bifurcações. Como na grande maioria dos jogos de tabuleiro, cada espaço desenhado é chamado de casa. Marcamos algumas dessas casas com um "X" em vermelho, que servirá de pontos importantes no jogo.

Figura 30: Imagem exemplo do tabuleiro

Fonte: Autor, 2021.

Nas bifurcações citadas acima, deverão conter escritos os direcionais, N, S, L, O, NE, NO, SE e SO, que significam Norte, Sul, Leste, Oeste, Nordeste, Noroeste, Sudeste e Sudoeste, respectivamente. Isso servirá de parâmetro para o aluno encontrar o caminho a seguir.

Figura 31: Imagem exemplo de bifurcação para o tabuleiro



Fonte: Autor, 2021.

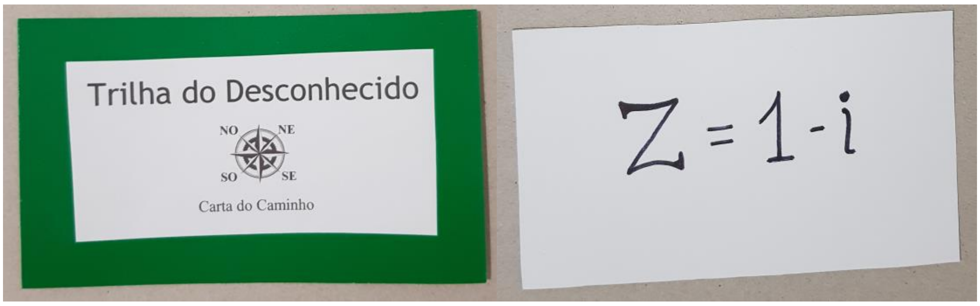
Decidimos demarcar os pontos cardeais próximos à chegada de forma a trazer uma perspectiva, por parte do participante, em estar prestes a vencer o jogo.

No jogo existem três tipos de cartas: uma direcional (Carta do Caminho N, S, L, O e Carta do Caminho NO, NE, SO, SE), uma rotacional (Carta Rotação) e uma surpresa (Carta Surpresa). Elas foram feitas com papel guache nas cores verde, vermelha e dourada. Em seguida, colamos na face colorida a descrição de cada tipo de carta e na face interior (descolorida) valores específicos, conforme os modelos abaixo. Deixaremos no Apêndice os modelos utilizados para a criação das cartas, bem como os valores que podem ser escritos em seu interior.

Figura 32: Imagem exemplo da Carta do Caminho N, S, L, O

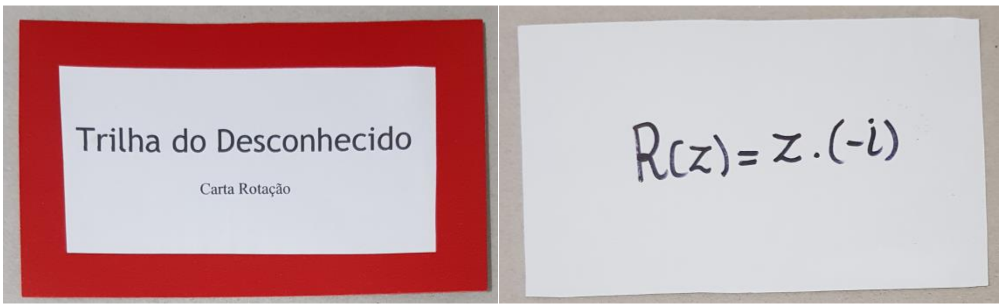
Fonte: Autor, 2021.

Figura 33: Imagem exemplo da Carta do Caminho NO, NE, SO, SE



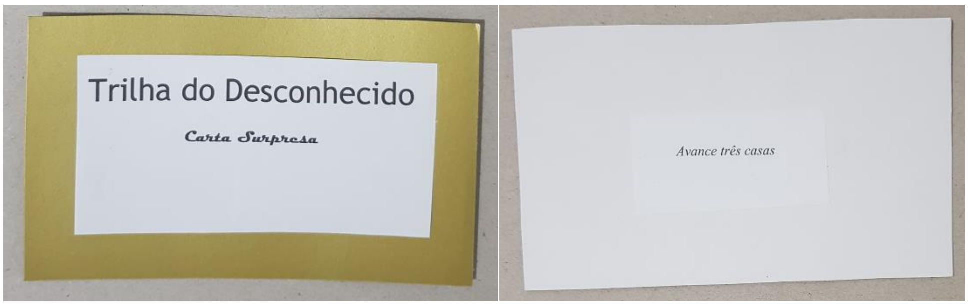
Fonte: Autor, 2021.

Figura 34: Imagem exemplo da Carta Rotação



Fonte: Autor, 2021.

Figura 35: Imagem exemplo da Carta Surpresa



Fonte: Autor, 2021.

Para os pinos, que representarão os jogadores ou as equipes, podem ser utilizados quaisquer materiais pequenos que possam ser sobrepostos sobre o tabuleiro, como por exemplo, feijões, pedrinhas de mármore, botões de camisa, etc.

Regras do jogo:

O jogo pode ser realizado individualmente ou em equipes, a critério do professor. Para isso, devemos ter no mínimo dois e no máximo quatro jogadores ou equipes.

Para movimentar-se pelo tabuleiro, cada participante atenderá ao critério de turnos, ou seja, tomando como exemplo uma partida com dois participantes A e B, o participante A, durante seu turno, irá realizar as ações possíveis determinadas pelo jogo e, após o término, será a vez do participante B, que após encerrar sua jogada, retornará para o participante A, e assim sucessivamente.

Os dados são utilizados para determinar a quantidade de casas que os participantes irão se locomover. A quantidade de casas do movimento é equivalente à quantidade que indicar na face superior do dado rolado, salvo se chegar até um ponto de bifurcação.

Ao chegar ao ponto de bifurcação, a parada é obrigatória, independente da quantidade de casas que o participante ainda tenha para percorrer em seu turno. Nesse ponto, o participante deverá puxar duas cartas: uma Carta do Caminho e uma Carta Rotação, que estarão organizadas em montes separados, onde a combinação das duas cartas irá dar a nova direção a ser trilhada.

Como existem duas Cartas do Caminho (tipo N, S, L, O e tipo NO, NE, SO, SE), a carta sacada deve ser correspondente à bifurcação que o participante parar. Por exemplo, supondo que um participante parou em uma bifurcação do tipo N, S, L, O, o participante deverá pegar uma Carta do Caminho do mesmo tipo.

Suponha agora que a carta escolhida contém o número $z = 4i$. Em seguida, o participante deverá selecionar uma Carta Rotação. Ao puxar a carta da transformação por rotação ele pegou a carta $R(z) = z\,.(-i)$. Temos então a seguinte situação: a primeira carta selecionada ($z = 4i$) aponta para a direção N, mas devemos realizar a operação da Carta Rotação em seguida, ou seja, multiplicar z por $-i$. Daí,

$$R(z) = z.(-i) = 4i\,.(-i) = -4i^2 = 4.$$

Isso significa que o participante terá que seguir na direção L, visto que $R(z) = 4$ pode ser representado por um vetor que aponta para esse sentido, i.e., uma rotação de $90°$ para a direita, tomando como parâmetro o vetor $4i$.

Caso a mudança de direção seja para o caminho contrário ao que o jogador percorreu, o jogador não irá voltar essas casas, ficando parado na casa da bifurcação. Na próxima rodada desse jogador, ele deverá escolher outra carta para calcular a direção novamente.

Em contra partida, caso o participante erre o cálculo da direção, poderá perder a sua vez, tendo que na próxima rodada escolher outras cartas para determinar seu caminho. Quem deverá fiscalizar é o participante da próxima rodada, observando os valores encontrados e verificando a possível exatidão no cálculo algébrico realizado.

Por exemplo, suponha que o cálculo que o participante deverá fazer é $R(z) = zi^2$, com $z = 2 + 2i$, e que ele fez o seguinte cálculo

$$R(z) = (2 + 2i)\,.\ i^2 = 2 + 2i,$$

o que nos mostra uma resposta errada. Logo, o participante que está fiscalizando a rodada, percebendo tal erro, deve contestar o cálculo e impedir o avanço das casas do jogador fiscalizado.

Partindo para as cartas tipo Carta Surpresa, que também estarão organizadas em monte, poderão ser retiradas em pontos específicos da trilha marcados por um “X” em vermelho, podendo ser um bônus como “avance duas casas” ou até mesmo uma punição do tipo “pare por uma rodada”. Para a retirada dessas cartas é necessário que o participante ao realizar seu movimento pare em cima da casa contendo o “X”.

Cada carta do tipo Carta do Caminho e Carta Surpresa que for utilizada durante o jogo deverá ser separada das demais ainda não utilizadas. Caso todas as cartas sejam utilizadas, deverão ser embaralhadas e reorganizadas em forma de monte para poderem ser selecionadas novamente e dar continuidade ao jogo. Já para as cartas do tipo Carta Rotação devem ser reportas ao montante após o uso e embaralhada para a próxima retirada.

Vence quem chegar até o ponto de chegada primeiro.

Habilidades necessárias:

Domínio de cálculos algébricos com complexos; Conhecimento das Transformações de Möbius; Noções de rotação de 90º aplicadas com as orientações cardinais geográficas.

5.2 O Relógio Maluco

Como segunda proposta, introduziremos um jogo, também de criação do autor, que evidencia o estudo de operações diversas em um relógio analógico simples de parede, com o objetivo de montar horas com valores específicos, podendo ser trabalhado individualmente ou em equipes.

Objetivo do jogo:

Cada equipe deverá montar as horas de acordo com as instruções dadas pelas cartas retiradas. Pontua quem montar primeiro a hora correta.

Materiais:

- 02 ou mais relógios analógicos comuns de parede;
- 01 apito comum;
- 01 tipo de carta denominada Enigma do Complexo Menor;
- 01 tipo de carta denominada Enigma no Complexo Maior;
- Folhas de papel guache coloridas (pelo menos 02 cores diferentes);
- Folhas de papel A4 brancas;
- Lápis e borracha;
- Cola, tesoura e estilete;
- Hidrocor preto.

Os relógios analógicos utilizados para o jogo devem conter um tamanho grande para facilitar a visualização entre todos os participantes. Portanto, sugerimos que sejam utilizados relógios de parede de pelo menos 20cm de diâmetro, para o caso de relógios redondos, ou 20cm de lado, para relógios quadrados.

Figura 36: Imagem exemplo de um relógio analógico de parede

Fonte: Autor, 2021.

No jogo existem dois tipos de cartas, denominadas Enigma do Complexo Menor e Enigma do Complexo Maior. De maneira semelhante ao jogo Trilha do Desconhecido, as cartas foram feitas com papel guache, só que com outras cores: prata e branca. Em seguida, colamos na face colorida a descrição de cada tipo de carta e na face interior (descolorida) frases específicas para serem decifradas. Deixaremos no Apêndice os modelos utilizados para a criação dessas cartas.

As cartas Enigma do Complexo Menor conterá um enigma, charada ou problema envolvendo o estudo dos números complexos, onde a resposta da mesma indicará o ponteiro das horas.

Figura 37: Imagem exemplo da carta Enigma do Complexo Menor

Fonte: Autor, 2021.

Já as cartas do Enigma do Complexo Maior, também são compostas por enigmas, charadas ou problemas envolvendo os números complexos, com o diferencial que suas respostas nortearão a localização do ponteiro dos minutos do relógio.

Figura 38: Imagem exemplo da carta Enigma do Complexo Maior

Fonte: Autor, 2021.

Regras do Jogo:

O jogo pode ser realizado em duplas ou equipes, de acordo com a escolha do professor, de forma simultânea. Cada dupla deve escolher um participante que ficará responsável em mover os ponteiros, enquanto que outro integrante deve tentar resolver os problemas contidos nas cartas, repassando o resultado para o participante com o relógio em mãos. Caso o jogo seja realizado com equipes contendo mais de dois jogadores, um dos participantes deve ficar com o relógio, enquanto que os outros participarão da resolução dos problemas contidos nas cartas.

Definidas as equipes, cada uma deve sortear duas cartas: uma do tipo Enigma do Complexo Menor e uma do tipo Enigma do Complexo Maior, sem olhar o interior delas. Cada carta contém um problema envolvendo os estudos dos números complexos, onde as respostas determinarão o valor das horas e dos minutos.

Em seguida, após as equipes sortearem as cartas, o professor dará o sinal de autorização, soando o apito. A partir desse momento, todas as equipes podem olhar o interior das cartas e começarem as resoluções dos problemas.

Por exemplo, uma equipe após sortear uma carta Enigma do Complexo Menor e dado início à partida, olhou em seu interior e encontrou a frase:

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $\sqrt{3} + i$.

Logo, a equipe deve fazer o seguinte cálculo:

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

Isso significa que o ponteiro das horas deverá ser posicionado no número 2. Continuando, ao olhar no interior da carta Enigma do Complexo Maior, estava escrito a seguinte problemática:

Calcule o módulo do conjugado do número $-3+4i$*. Lá está teu ponteiro.*

Isso nos dá,

$$\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Ou seja, o ponteiro dos minutos deve ser posicionado no número 5. Portanto, nesse momento, a equipe deve dizer a hora calculada pela junção dos dois problemas: ponteiro menor no número 2 e ponteiro maior no número 5, o que corresponde às 2h25min.

A equipe que terminar os cálculos primeiro deve entregar os cálculos, em folha branca de papel A4, ao professor para a verificação, e as outras equipes podem continuar os cálculos caso ainda não tenham terminado.

Após a verificação, o professor deverá dizer se está correto ou não. Caso seja a resposta correta, a partida se encerra e é dado um ponto para a equipe. Caso contrário, o jogo continua para todas as equipes até que uma delas entregue o resultado correto, incluindo a equipe que entregou a resposta errada.

As cartas utilizadas em cada partida devem ser separadas para não serem reutilizadas até o uso de todas as cartas do jogo. Caso todas sejam utilizadas, elas devem ser embaralhadas e dispostas novamente para o início das partidas seguintes.

Pontua a equipe que montar primeiro a hora correta, vencendo a que obtiver a quantidade de pontos definida pelo professor.

Habilidades necessárias:

Estudo de cálculos algébricos com complexos; Conhecimento das Transformações de Möbius; Noções de rotação de 90º no plano cartesiano; Cálculo do módulo de um número complexo.

5.3 O Twister Complexo

O terceiro jogo que será apresentado é uma adaptação de um jogo conhecido como Twister. Aqui, utilizaremos um tapete contendo círculos coloridos com valores em seus interiores em módulo, envolvidos por duas barras da forma “$|número|$”, onde deverão ser colocados os membros (mãos e pés) dos participantes sob o tapete de acordo com as instruções dadas.

Objetivo do jogo:

Cada equipe deve escolher um participante para colocar as mãos ou os pés sob o tapete mediante os valores calculados, através das cartas escolhida. Vence a partida o participante que obtiver mais pontos ou cair sob o tapete (fica a critério do docente escolher).

Materiais:

- Tecido plastificado de cor clara, com as dimensões de 1,25m x 1,55m;
- Tesoura;
- Linha de costura;
- Agulha ou máquina de costura;
- Pratos de papel;
- Tinta acrílica nas cores vermelha, amarela, azul, verde e preta;
- Pincel;
- Folhas de papel guache coloridas (pelo menos 02 cores diferentes);
- Folhas de papel A4 brancas;
- Lápis e borracha;
- Hidrocor na cor preta;
- 01 tipo de carta denominada Carta dos Membros;
- 01 tipo de carta denominada Carta Twister;

Para a construção do tapete utilizaremos um tecido do tipo plastificado nas dimensões 1,25m por 1,55m. Para fazer o acabamento, utilize linha com agulha ou máquina de costura, fazendo a barra ao redor. Coloque o tecido no chão e posicione os pratos equiespaçados sob ele, de forma que tenha 4 linhas com 6 pratos cada.

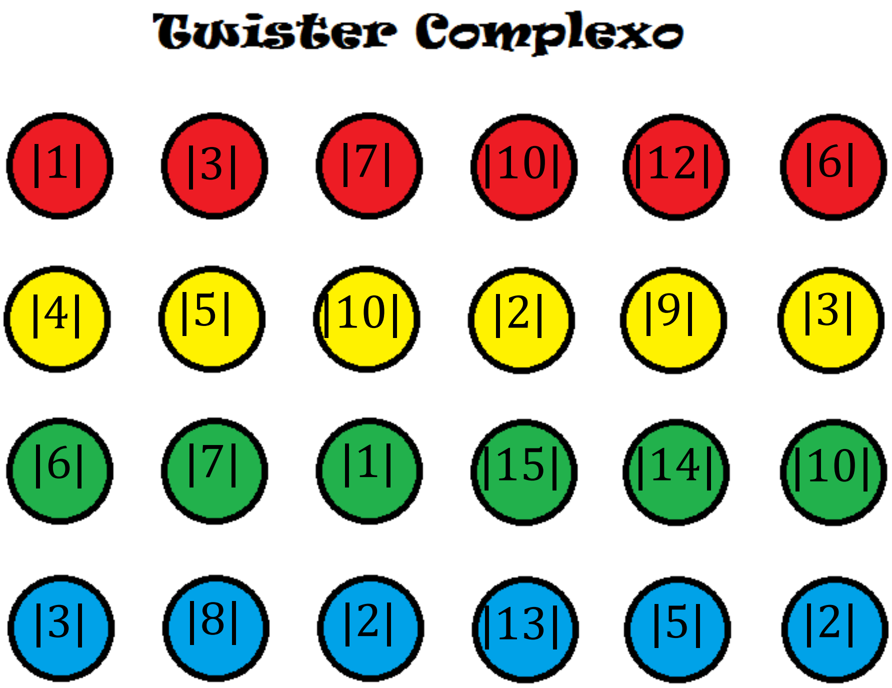
Os pratos serão moldes para os círculos, onde cada linha deverá conter a mesma cor, utilizando as cores amarela, azul, vermelha e verde. Pinte o interior de cada prato e posicione sob o tecido para fazer os círculos e espere secar.

Figura 39: Exemplo de construção do tapete

Fonte: <https://lunetas.com.br/faca-voce-mesmo-jogo-twister-caseiro/>. Acesso em: 27 abr. 2021.

Cada círculo conterá em seu interior um número em forma de módulo, ou seja, escrito da forma $|número|$. Esse número poderá ser pintado com tinta acrílica de cor preta, para dar destaque diante das cores em cada círculo, conforme a figura abaixo.

Figura 40: Imagem exemplo do tapete Twister Complexo

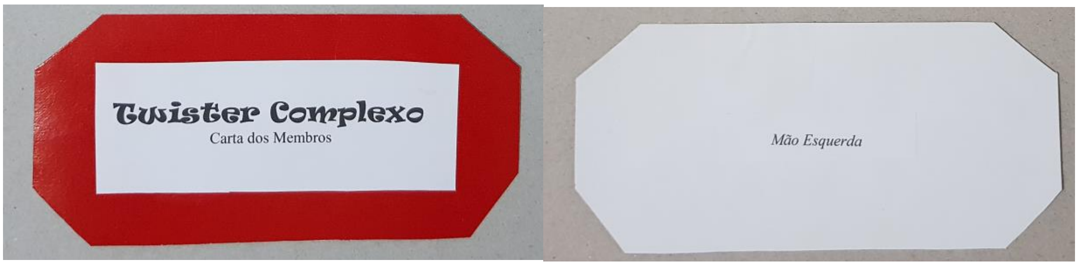


Fonte: Autor, 2021.

Outros objetos importantes para o jogo são as cartas denominadas Cartas dos Membros e as Cartas Twister. Semelhante aos jogos Trilha do Desconhecido e Relógio maluco, podemos construir essas cartas com papel acrílico, com duas cores diferentes.

As Cartas dos Membros contém a informação de um dos membros do corpo a serem posicionados sobre o tapete.

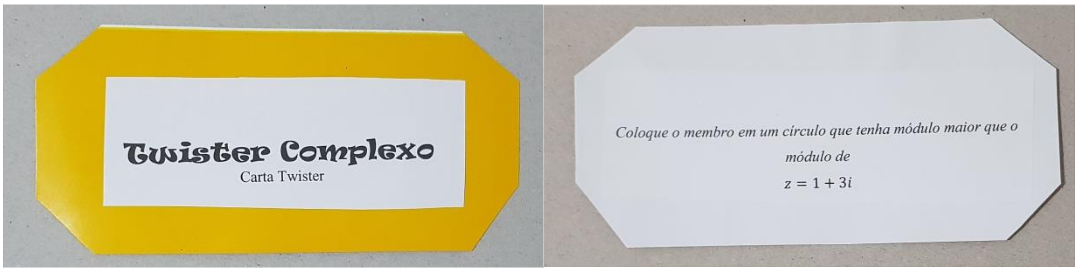
Figura 41: Imagem exemplo da Carta dos Membros



Fonte: Autor, 2021.

Já as Cartas Twister conterão cálculos específicos para o posicionamento dos membros de acordo com as Cartas dos Membros retiradas anteriormente.

Figura 42: Imagem exemplo da Carta Twister



Fonte: Autor, 2021.

Regras do jogo:

O jogo deverá ser realizado em duas duplas ou duas equipes, onde um participante de cada equipe será escolhido para estar disposto sob o tapete, recebendo as orientações.

As partidas serão organizadas por sistemas de turno, ou seja, cada dupla ou equipe irá realizar as ações possíveis determinadas pelo jogo e, após o término, será a vez da próxima equipe.

Em seu respectivo turno, a equipe sorteará uma Carta dos Membros e uma Carta Twister, de modo a resolver o problema e o participante do time adversário que está sob o tapete colocará o membro específico da Carta dos Membros em algum círculo.

Por exemplo, um participante da equipe A retirou uma Carta dos Membros contendo a informação “pé direito”. Em seguida, ele retirou uma Carta Twister com a seguinte descrição:

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de $z = 2 + 3i$.

Logo, o time que retirou a carta acima deverá fazer o cálculo

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Ou seja, o participante deve procurar um número no tapete que tenha o módulo maior que $\sqrt{13}$ e colocar o membro retirado na Carta dos Membros em cima desse número.

As Cartas Twister que forem retiradas devem ser separadas das demais. Caso todas as cartas desse tipo sejam usadas, elas deverão ser embaralhas e postas em forma de monte para novas retiradas. Já as Cartas dos Membros devem ser repostas e embaralhadas a cada fim de turno.

O adversário que tirar um dos membros do local que já estava indicado antes, salvo apenas se for para a mudança de uma nova coordenada, colocar um dos membros em local errado ou cair sob o tapete, perderá a partida.

Habilidades necessárias:

Noções de números em módulo; Estudo de cálculos algébricos com números complexos; Conhecimento do cálculo de módulo de um número complexo.

5.4 A Geometria Maluca

O quarto jogo que propomos, também de criação do autor, é a construção de figuras geométricas no plano complexo através de um ponto dado e a realização de cálculos das transformações de Möbius, em que a primeira operação sempre será a inversão.

Objetivo do jogo:

Cada equipe receberá um número complexo aleatório de forma a realizar os desenhos de figuras geométricas pedidas pelo professor, utilizando as Transformações de Möbius.

Materiais:

- Folha de papel A4 branca ou papel quadriculado;
- 01 apito comum;
- Régua;
- Lápis comum e borracha;

Utilizaremos a folha de papel A4 ou papel quadriculado para a construção de planos cartesianos e a construção das figuras geométricas solicitadas pelo professor.

Regras do jogo:

O jogo deve ser feito em equipes, o que facilitará os cálculos, bem como a agilidade da montagem de cada figura. Cada construção acontecerá simultaneamente entre as equipes (ao mesmo tempo), após a autorização do professor.

Cada equipe deverá selecionar um participante diferente em cada turno fazer os desenhos no plano cartesiano, enquanto que os outros integrantes poderão realizar os cálculos devidos juntos.

Para cada equipe, será sorteado um número complexo qualquer e entregue uma folha A4 ou quadriculada contendo o desenho de um plano cartesiano $x0y$. Em seguida, será dito qual tipo de figura geométrica as equipes devem construir no plano cartesiano.

Aqui, os alunos necessariamente tem que usar as Transformações de Möbius nas formas elementares, ou seja, translação, rotação, homotetia ou inversão.

Após a autorização mediante o sopro no apito pelo professor, as equipe podem iniciar os cálculos e transmitir as informações para o aluno que está com o plano cartesiano em mãos que deverá localizar as coordenadas complexas, por meio dos cálculos feitos pelos membros de sua equipe.

Em todas as partidas, o primeiro cálculo sempre deverá ser a Transformação de Möbius por inversão. As demais operações podem ser diversas: translação, rotação, homotetia, etc.

Após todas as etapas, a equipe que encerrar primeiro deve explicar todas as transformações utilizadas para encontrar a figura desejada. Fica a critério do professor, definir qual método ele irá exigir para a construção das figuras: pedindo Transformações de Möbius específicas ou deixar livre para os alunos escolherem.
Por exemplo, foi entregue a uma equipe o número

$$z = 2 + i$$

e foi dada a instrução de montar um quadrilátero.

A equipe terá como uma possibilidade para a construção da figura realizando os seguintes cálculos:

- Como regra da operação inicial, ou seja, o cálculo da Transformação de Möbius por inversão, a equipe deverá calcular $J(z)$.

$$J(z) = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{2^2+1^2} = \frac{2-i}{5};$$

- Como segundo cálculo, encontrar o simétrico em relação ao eixo "y", ou seja, $w = \frac{-2-i}{5}$;
- Calcular $J(w)$. Logo,

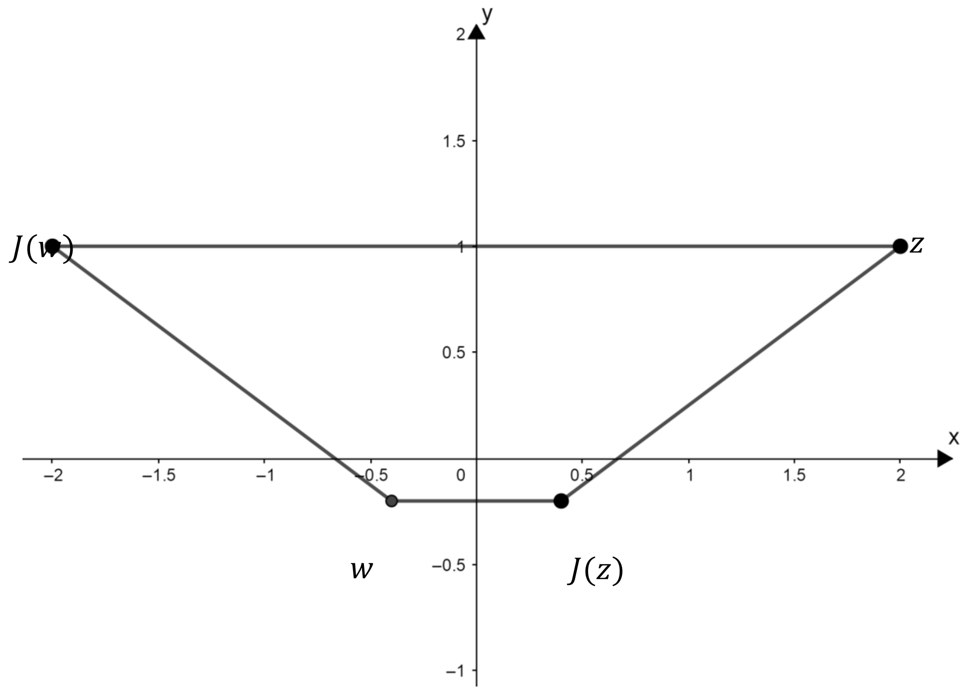
$$J(w) = \frac{-\frac{2}{5} + \frac{i}{5}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$J(w) = \frac{-\frac{2}{5} + \frac{i}{5}}{\frac{5}{25}}$$

$$J(w) = -2 + i$$

- Encontrar o simétrico em relação ao eixo "x" de $J(w)$, finalizando em $2 + i$.

Figura 43: Figura gerada pelos pontos z, $J(z)$, w e $J(w)$



Fonte: Autor, 2021.

Note que as operações aqui utilizadas foram, respectivamente: inversão, simetria em y, inversão e simetria em y.

Sugerimos então que esse jogo tenha uma evolução de dificuldade de acordo com o nível da turma, podendo também utilizar transformações de polígonos por translação, homotetia e rotação, sempre utilizando como base as Transformações de Möbius.

Habilidades necessárias:

Estudo de cálculos algébricos com números complexos; Conhecimento das transformações de Möbius; Localização de coordenadas no plano complexo; Simetria no plano cartesiano envolvendo números complexos.

6. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

O desafio do educador, atualmente, está em desenvolver o “pensar matemático” do aluno, fazendo com que o mesmo utilize a Matemática como ferramenta para compreender o mundo ao seu redor. De acordo com os PCN (2018), a educação tem o intuito de desenvolver a capacidade de pesquisas e análises de informações, utilizando diferentes tecnologias para a apropriação do conhecimento.

Conforme a BNCC (2018), uma das competências é:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (p. 524).

Logo, é possível que o estudo das Transformações de Möbius contribua como uma ferramenta que o auxilie na exploração do ambiente em que vive, alcançando um dos objetivos da educação, citado pelos PCN.

Em específico, temos como base a seguinte habilidade:

> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p. 525).

Note que essa habilidade nos remete à ampliação do conhecimento das transformações geométricas, aplicando conceitos como isometrias e homotetias. Conhecer as diversas composições geométricas, ampliando o repertório cultural, através da criação e análise de produções em diversas situações e/ou em outras áreas de estudo, traz um dinamismo maior no estudo da geometria.

Portanto, iremos propor uma sequência didática para o estudo dessa competência utilizando as transformações elementares no estudo de Função envolvendo números complexos, ou seja, as Transformações de Möbius. Diante disso, é necessário que o aluno já tenha estudado os números complexos em sua parte algébrica, dominando suas operações básicas, o que facilitará os estudos daqui em diante. A quantidade de itens dos exercícios que iremos apresentar pode variar (para mais ou para menos) de acordo com os critérios que o professor achar necessário para o desenvolvimento do estudo em sua turma.

6.1 Números complexos no plano cartesiano: coordenadas, vetores, módulos e argumento.

Objetivos:

Representar as coordenadas de um número complexo no plano; Calcular distância entre pontos no plano; Representar a forma trigonométrica (polar) dos números complexos no plano.

Conteúdos:

Escrita de pares ordenados de um número complexo no plano cartesiano; Cálculo de distância entre pontos no plano cartesiano; Módulo de um número complexo; Escrita de um número complexo em forma de coordenadas polares e vice versa.

Tempo:

Duas aulas de 50min.

Metodologia:

1º Momento: Primeiramente, devemos apresentar a escrita das coordenadas de um número complexo no plano, ou seja, dado um número complexo da forma $z = a + bi$, temos como coordenadas no plano o ponto (a, b), onde a pertence ao eixo das abscissas e b ao eixo das ordenadas. Em continuidade, devemos inserir o conceito de vetores no plano, que nada mais é do que construindo uma "seta" partindo da origem até o ponto específico (a, b) que representa o número complexo no plano. Em seguida, devemos mostrar ao aluno que um número complexo possui módulo, calculado facilmente como a distância da origem até o ponto (a, b). Podemos escrever então, para um $z = a + bi$, que

$$|z| = d(0, z) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Entretanto, como queremos inserir o conceito de conjugado de um número complexo ($\bar{z} = a - bi$, que é o ponto simétrico em relação ao eixo real), devemos mostrar que o módulo de um número complexo também pode ser calculado por

$$z\,.\,\bar{z} = (a + bi)\,.\,(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Portanto, para exercitar esses conceitos, propomos a atividade abaixo.

1. Localize as coordenadas dos números complexos abaixo no plano complexo.
a) $z = 2 + 3i$
b) $z = 5 - 3i$
c) $z = -2i$
d) $z = -4 - i$
e) $z = -5$

2. Escreva a representação no plano cartesiano os números complexos abaixo, calculando em seguida o valor de seus módulos por meio do produto pelo seu respectivo conjugado.
a) $z = 2 + 3i$
b) $z = -3 - 4i$
c) $z = 4 + 3i$
d) $z = -1 - i$
e) $z = -3i$

2º Momento: Para esse instante, é interessante que os alunos compreendam o cálculo do argumento de um número complexo. De maneira similar aos estudos de trigonometria, escrevendo $z = a + bi$, pode-se calcular o argumento de z ($Arg(z)$) utilizando,

$$Arg(z) = tg(\theta) = \frac{b}{a}\,.$$

Para isso, sugerimos a atividade a seguir.
1. Represente no plano complexo os números complexos abaixo, calculando os respectivos argumentos.
a) $z = 2 + 2i$

b) $z = \sqrt{3} + 3i$

c) $z = -1 + i$

d) $z = -2 - \sqrt{2}i$

e) $z = -3 - \sqrt{3}i$

6.2 Representação de operações de soma e multiplicação por escalar de vetores no plano complexo.

Objetivos:

Compreender operações de soma entre vetores e multiplicação por escalar, associadas às Transformações de Möbius.

Conteúdos:

Conhecendo e utilizando o conjugado de um número complexo para o cálculo de seu módulo; Estudo das Transformações de Möbius por translação e homotetia.

Tempo:

Duas aulas de 50min.

Metodologia:

1º Momento: Aqui, adentraremos nos estudos das Transformações de Möbius. Sendo assim, apresentaremos que as transformações são funções do tipo

$$f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\alpha' z+\beta'}\text{, com } \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{C} \text{ e } \alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$$

Logo, para mostramos a transformação por translação, tomamos na função acima $\alpha = \beta' = 1$ e $\alpha' = 0$, ficando apenas com $f(z) = z + \beta$, que nada mais é do que a soma de dois vetores complexos quaisquer. Portanto, selecionamos a atividade abaixo para fixarmos as translações pelas Transformações do Möbius.

1. Dado o número $\beta = 3 - 4i$, realize a Transformação de Möbius por translação, utilizando a função $f: S \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + \beta$ em cada um dos itens abaixo, desenhando a representação do vetor $f(z)$ como resultado da soma dos dois vetores z e β.

a) $z = 2 + i$

b) $z = 1 - 2i$

c) $z = 3 - 4i$

d) $z = -4 + 5i$

e) $z = 4 + 10i$

f) $z = 6i$

g) $z = -2$

h) $z = -3 + i$

i) $z = -4$

2º Momento: Nesse momento, a outra transformação apresentada será a transformação por homotetia. Para isso, na função f apresentada no 1º momento, tomamos $\alpha' = \beta = 0$ e $\beta' = 1$, obtendo

$$H_r(z) = \alpha z,$$

onde $\alpha = r + 0i$, com $r \in \mathbb{R} \backslash (-\infty, 0]$, o que nos fará "esticar" ou "encolher" um determinado vetor z, sem modificar o seu argumento. Portanto, sugerimos a atividade abaixo.

1. Em cada item abaixo, encontre a Transformação de Möbius do tipo $f: S \to \mathbb{C}$, $H_r(z) = rz$ e mostre que $Arg(z) = Arg\big(H_r(z)\big)$. Em seguida, represente a transformação $f(z)$ a partir de z no plano cartesiano.

a) $r = 2$ e $z = 2 + 3i$

b) $r = \frac{2}{3}$ e $z = -6 + 9i$

c) $r = 3$ e $z = -3 - i$

d) $r = \frac{1}{4}$ e $z = 1 + 4i$

e) $r = 0{,}2$ e $z = -8 - 4i$

f) $r = \frac{1}{2}$ e $z = 1 - 2i$

g) $r = 3$ e $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}i$

h) $r = \frac{3}{4}$ e $z = -8 - 4i$

i) $r = 10$ e $z = -1 + 2i$

j) $r = \frac{1}{10}$ e $z = 5 + 10i$

6.3 Rotação de vetores no plano.

Objetivos:

Estudar a forma polar de um número complexo; Compreender como funciona a rotação de um vetor através do produto por outro número complexo; Analisar o comportamento do produto de um número complexo pela unidade imaginária i, associando às Transformações de Möbius.

Conteúdos:

Construção de produto entre vetores no plano complexo; Estudo das Transformações de Möbius por rotação.

Tempo:

Duas aulas de 50min.

Metodologia:

1º Momento: De início, mostramos como se dá a escrita da forma polar de um número complexo. Para isso, basta utilizarmos as relações trigonométricas no triângulo retângulo formado pelo vetor z. Logo, temos que

$$a = rcos(\theta) \text{ e } b = rsen(\theta),$$

onde $r = |z|$ e $Arg(z) = \theta$, chegando na forma $z = r\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)$.

Para exemplificarmos, escrevamos o número $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ em forma de coordenadas polares. Logo, o módulo de z é

$$|z| = r = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Daí, para calcular o argumento, utilizaremos a estratégia a seguir:

$$\cos(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ e } sen(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{6}$ é o argumento de z e, portanto, a forma polar é

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Conseguinte, sugerimos a atividade a seguir.

1. Represente no plano complexo os números a seguir. Em seguida, escreva a forma polar desses números.

a) $z = 0 + 3i$

b) $z = 2 + 0i$

c) $z = -1$

d) $z = -4i$

e) $z = 1 + \sqrt{3}i$

f) $z = -1 + \sqrt{3}i$

g) $z = -\sqrt{3} + i$

h) $z = \sqrt{3} - i$

2º Momento: Agora, iremos apresentar as transformações por rotação, por meio da função f já escrita anteriormente e adotando $\alpha = i$, $\beta = \alpha' = 0$ e $\beta' = 1$, obtendo

$$R_i(z) = iz.$$

Aqui, a ideia é que os alunos entendam as rotações mais simples, multiplicando por i o número complexo, que resultará em uma rotação de 90º do número z. Propomos que o professor adote um número complexo qualquer e realize sucessivas multiplicações pela unidade i, fazendo análises de cada resultado encontrado (utilizando como base a Figura 19 anteriormente aqui apresentada).

Logo, apresentamos a atividade a seguir.

1. Em cada item abaixo, multiplique z por i, i^2 e $-i$. Em seguida, desenhe no plano cartesiano o número z e as Transformações de Möbius obtidas em cada uma das operações.

a) $z = 4 - 3i$

b) $z = 2 + i$

c) $-2 + 2i$

d) $z = -3 - 2i$

e) $z = 4i$

f) $z = -5 + 5i$

6.4 Inversão de vetores no plano.

Objetivos:

Construir a ideia de inversão de pontos por meio de operações indicadas e a construção mediante os resultados obtidos dos alunos.

Conteúdos:

Estudo das Transformações de Möbius por inversão

Tempo:

Duas aulas de 50min.

Metodologia:

1º Momento: Para este momento, iremos abordar as transformações por inversão, a partir da função $J: S \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$J(z) = \frac{1}{z},$$

que obtemos tomando $\alpha' = \beta = 1$ e $\alpha = \beta' = 0$ em f. Esse tipo de transformação tem efeitos interessantes em figuras geométricas. Observe que,

$$J(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Logo, para calcular a inversão de um número complexo basta fazer dois passos:

I) Achar o conjugado desse complexo;

II) Dividir o conjugado por $|z|^2$;

Por exemplo, calculemos a inversão de $z = 1 + 2i$. Logo,

$$J(z) = \frac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{(1 - 2i)}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Sugerimos a atividade a seguir para que o aluno se familiarize com a ideia das inversões, e que, uma inversão pode causar um efeito de duas outras transformações: uma rotação e uma homotetia (basta verificar o valor obtido após a transformação).

Para esse conteúdo, sugerimos também que o aluno tenha um conhecimento mais básico, já que as inversões causam efeitos não lineares e não proporcionais (objeto de estudo das transformações geométricas propostas pela BNCC). Propomos então a atividade abaixo.

1. Calcule as Transformações de Möbius por inversão nos itens abaixo, por meio da função $J(z) = \frac{1}{z}$. Em seguida, desenhe no plano cartesiano z e $J(z)$.

a) $z = 2 + 2i$

b) $z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

c) $z = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$

d) $z = -1 + 2i$

2º Momento: Para essa parte, o estudo se dará pelas transformações de equações de reta ou de circunferência. Aqui, o ideal é o aluno entender que uma equação com números reais, pode ser escrita em forma de números complexos e o que as inversões causam nessas equações. Para isso, o professor deve explicar que, uma equação da forma $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, pode ser escrita em função de números complexos da forma

$$A|z|^2 + B|z| + C|\bar{z}| + D = 0,$$

fazendo as substituições que explicamos no capítulo 3. Porém, para facilitar o estudo dos alunos do Ensino Médio, o professor pode utilizar o seguinte atalho para calcular a inversão da equação:

I) Escreva as equações na forma $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$;

II) Inverta os coeficientes a e d;

III) Troque o sinal do coeficiente c;

Para exemplificarmos, a circunferência $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$ tem a escrita da forma reduzida

$$(x^2 + y^2) - 4x + 2y - 4 = 0,$$

o que nos fornece $a = 1$, $b = -4$, $c = 2$ e $d = -4$, e que, aplicando a inversão, teremos

$$-4(x^2 + y^2) - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Logo, podemos aplicar os exercícios abaixo.

1. Seja z um complexo da forma $z = x + yi$. Escreva as equações abaixo em função de x e y.

a) $|z|^2 - 2z + 2\bar{z} = 0$

b) $2|z|^2 + z - 3\bar{z} - 12 = 0$

c) $|z|^2 - 6z - 2\bar{z} = 0$

d) $-iz + i\bar{z} + 4 = 0$

2. Nas equações abaixo, aplique as inversões e verifique que tipo de desenho geométrico a nova equação terá.

a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

b) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

c) $2x + 3y - 4 = 0$

d) $-4x + 2y + 8 = 0$

6.5 Transformação de figuras geométricas: translação, homotetia e rotação.

Objetivos:

Aplicar as Transformações de Möbius como forma de realizar as transformações geométricas por translação, homotetia e rotação.

Conteúdos:

Trasformações de Möbius aplicadas em figuras geométricas.

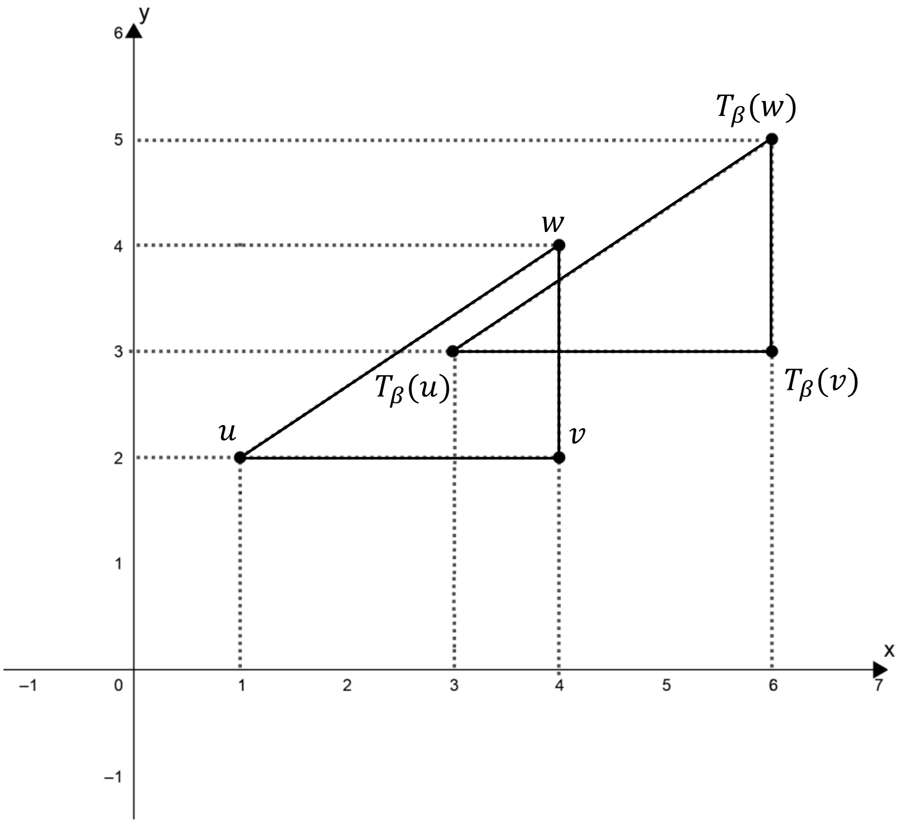
Tempo:

Duas aulas de 50min.

Metodologia:

Nesse ponto, é importante o aluno aplicar os conceitos vistos anteriormente em figuras geométricas, de forma a realizar transformações por homotetia, translação e rotação. A exemplo, vejamos a figura abaixo

Figura 44: Transformação geométrica por translação utilizando a Transformação de Möbius $T_{\beta}(z)$



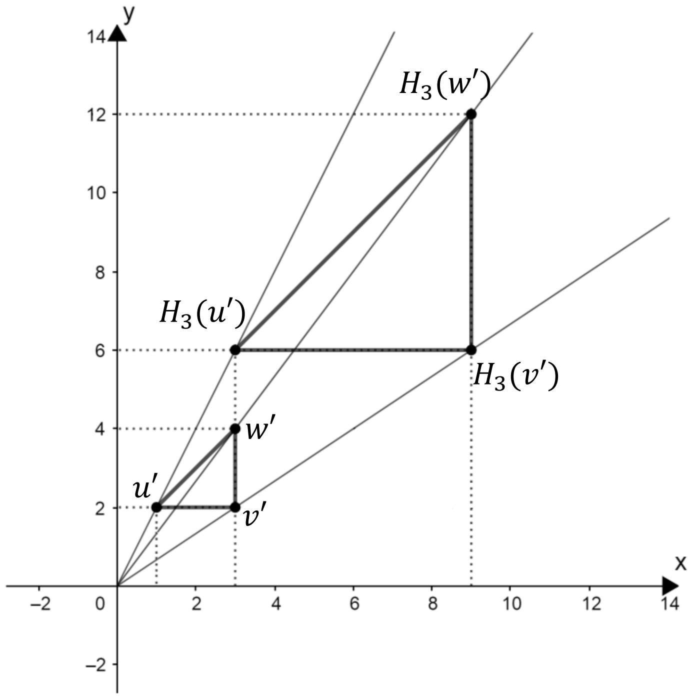
Fonte: Autor, 2021.

Note que os vértices do triângulo $u = 1 + 2i$, $v = 4 + 2i$ e $w = 4 + 4i$ foram transladados pela transformação $T_\beta(z) = z + \beta$, com $\beta = 2 + i$, para os pontos

$$T_\beta(u) = (1 + 2i) + (2 + i) = 3 + 3i$$
$$T_\beta(v) = (4 + 2i) + (2 + i) = 6 + 3i$$
$$T_\beta(w) = (4 + 4i) + (2 + i) = 6 + 5i.$$

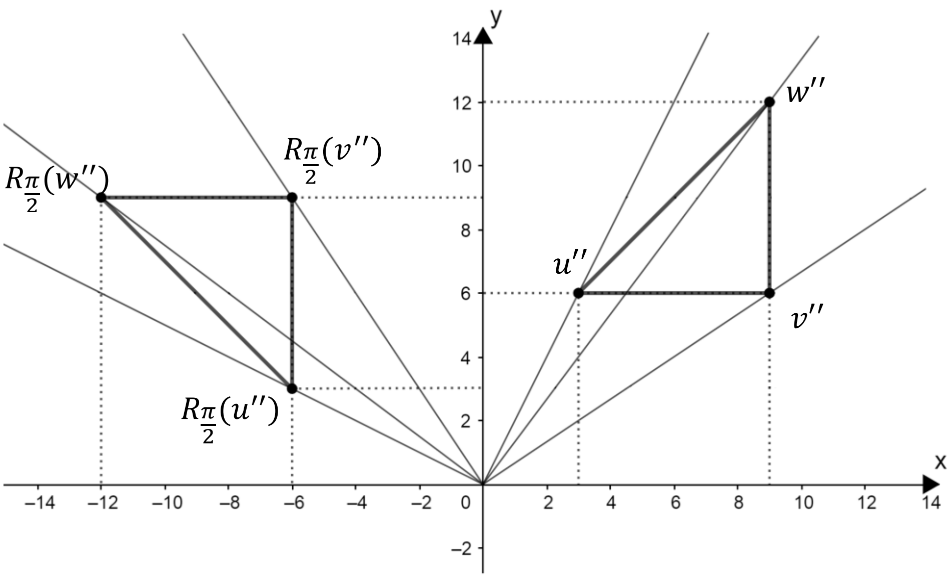
Facilmente verificamos para as transformações por rotação e homotetia, já que elas ocorrem de maneira uniforme em cada ponto contido nos segmentos que formam uma figura. Sendo assim, é possível realizar as transformações aqui citadas para qualquer polígono no plano complexo.

Figura 45: Transformação geométrica por homotetia utilizando a Transformação de Möbius $H_r(z)$



Fonte: Autor, 2021.

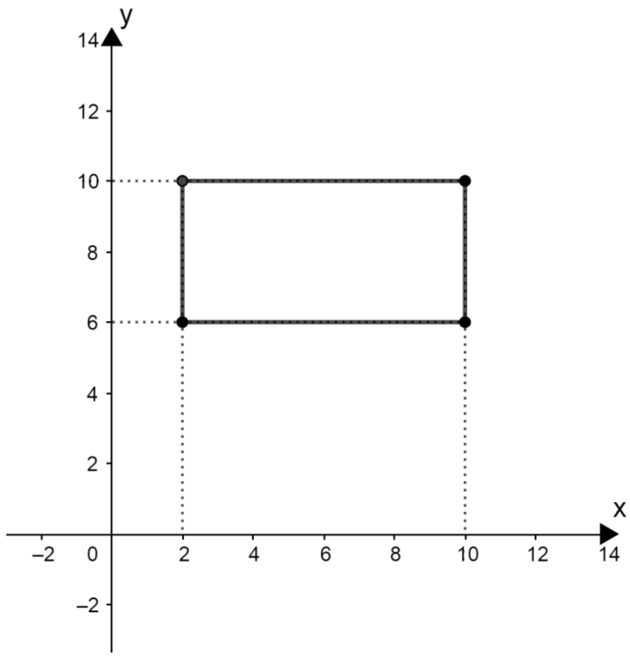
Figura 46: Transformação geométrica por rotação utilizando a Transformação de Möbius $R_i(z)$



Fonte: Autor, 2021.

Para aplicarmos os conceitos, propomos essa atividade abaixo.

1. Observe a imagem a seguir. Em seguida, em cada item abaixo, represente no plano complexo a figura resultante da transformação descrita e descreva qual o tipo de transformação.



a) Cada ponto da região será somado ao número $z = 5i$.

b) Cada ponto da região será somado ao número $z = -2 + 3i$

c) Cada ponto da região será multiplicado por i.

d) Cada ponto da região será multiplicado por i^2.

e) Cada ponto da região será multiplicado por 3.

f) Cada ponto da região será multiplicado por $\frac{1}{2}$.

g) Cada ponto da região será multiplicado por $-2i$.

2. Na figura do exercício anterior, em cada item, explique quais das Transformações de Möbius são necessárias para encontrarmos os polígonos com os seguintes vértices, esboçando um desenho no plano antes e depois da transformação.

a) $(-6,2), (-6,10), (-10,2)$ e $(-10,10)$.

b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$e $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

c) $(0,2), (8,2), (0,6)$ e $(8,6)$.

d) $(6, -2), (6, -10), (10, -2)$ e $(10, -10)$.

Os exercícios que apresentamos podem ser trabalhados com papel quadriculado, régua e lápis. Como sugestão, o professor pode extrapolar o exercício acima utilizando polígonos com maior quantidade de lados ou alternando os tipos de transformações nos itens.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conhecer parte da história da Matemática, em especial os números complexos, é algo que concebeu a construção de novas perspectivas sobre o processo de ensino aprendizagem para este pesquisador. Descobrir um pouco mais sobre a evolução do conteúdo, como códigos e símbolos, bem como propriedades algébricas, teoremas e proposições que passaram por diversas transformações em épocas bem diferentes até serem refinadas, traduzidas e amplamente divulgadas, contribuiu ainda mais sobre formação de uma concepção mais efetiva da matemática para o ser humano.

O desenvolvimento dos conceitos matemáticos que levaram à descoberta dos complexos teve uma extrema importância para a Matemática contemporânea. A atitude em descartar números da forma $\sqrt{-a}$, com $a > 0$, foi muitas vezes realizada até a chegada dos incríveis matemáticos descritos aqui, com a ideia de utilizar a unidade imaginária "i". Muitas vezes, os alunos deixam de lado os conceitos e estudos matemáticos por não aceitarem ou por não dominarem a escrita lógico-formal da disciplina, fato que é bastante comum na atualidade.

O Teorema Fundamental da Álgebra, por exemplo, de acordo com Eves (2011), foi resultado de estudos realizados por d'Alembert e Gauss, em sincronia com os pensamentos geométricos de Wessel e Argand, bem como a herança algébrica de Bombelli. Logo, a pesquisa do presente trabalho nos trouxe a perspectiva de que o aluno pode por si só moldar os pensamentos matemáticos a ele apresentados de forma a adaptá-los para a sua realidade.

O estudo dos complexos tem aplicações importantes para o desenvolvimento de estudos atuais, como a engenharia elétrica, física quântica e também a teoria do caos. Embora nem todos os discentes tenham predisposição a seguir a carreira das exatas, salientamos que conhecer as estruturas e formas desses números não só contribuirá com sua formação cognitiva pessoal, como também poderá despertar curiosidades sobre a matéria, podendo inclusive contribuir com sua escolha profissional no futuro.

Em complemento para a formação do ser crítico social, o ato de obter diversão no dia a dia do ser humano também promove uma vida mais saudável. As atividades que proporcionam a sensação de alegria e felicidade contribuem com o relaxamento do cérebro, bem como a maturação cognitiva.

> [...] a maturação per se é um fator secundário no desenvolvimento das formas típicas e mais complexas do comportamento humano. O desenvolvimento desses comportamentos caracteriza-se por transformações complexas, qualitativas, de uma forma de comportamento em outra [...] (VYGOTSKY, 1991, p. 17)

Os jogos trazem uma perspectiva de atenção e envolvimento pessoal, de forma a corroborar com as possíveis reflexões de conhecimento adquirido, proporcionando alternativas de aprendizagem, contanto que direcionadas corretamente. Logo, os discentes poderão ser capazes de desenvolver comportamentos e atitudes para uma melhor formação social, promovendo o amadurecimento cognitivo e, consequentemente, uma construção sólida da matemática em sua vida.

Aulas expositivas em quadros com apoio do livro didático, resolução de exercícios e provas escritas são alguns dos métodos utilizados para lecionar e avaliar os alunos na contemporaneidade. Alguns professores podem, provavelmente, não aderir ao lúdico com frequência por temerem lidar com situações adversas, como dispersões ou bagunças, de modo a fugir do controle da sala de aula, ou por falta de segurança em inserir um conteúdo matemático com jogos, de maneira eficiente para o desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem.

Trabalhar o lúdico requer criatividade e um planejamento adequado para os conteúdos matemáticos. Muitas vezes, os profissionais de ensino possuem uma carga horária lotada, trazendo atividades escolares para a sua própria residência. Diante desse cenário, criar jogos e adaptá-los aos conteúdos torna-se uma tarefa difícil, onde o professor acaba optando por não realizar.

Por outro lado, vale salientar que esse tipo de instrumento pedagógico pode não atingir o efeito desejado. É importante ressaltar que cada aluno tem o seu tempo de aprendizado, bem como seu conhecimento próprio da Matemática. O professor deve ter consciência de que o trabalho em conjunto deve ser construtivo e interativo, de modo a somar com a construção do saber do aluno. Caso contrário, ao invés de imbuir-se de conhecimento matemático, o aluno poderá optar por não realizar atividades lúdicas, e, possivelmente, causando desinteresse no estudo da Matemática.

Outro fator importante é que os jogos podem ajudar a quebrar o medo do estudo da Matemática por parte dos estudantes. A interação proporcionada pelo lúdico e o fato de estarem em contato direto um com o outro fazem com que os alunos interajam entre si, comunicando-se com a linguagem própria entre eles. Isso contribui para a troca de saberes, visto que a linguagem informal é de mais fácil compreensão.

O espírito de competitividade gerado por jogos é um fator estimulante para a aprendizagem. É inerente ao ser humano o interesse em atividades que envolvam disputas por prêmios ou simplesmente a obtenção do título de vencedor. Logo, a sensação da busca pela vitória causa um efeito de satisfação pessoal, o que pode contribuir ainda mais com o aprendizado da Matemática, em nosso caso, o desenvolvimento do estudo dos números complexos.

Um aspecto importante que salientamos é que as atividades lúdicas podem ajudar os educandos a minimizar as dificuldades da linguagem da Matemática, já que a interação entre os alunos gera uma comunicação da linguagem própria entre eles, contribuindo assim para um melhor entendimento dos conceitos matemáticos, para a interpretação, resolução e aplicação desses conceitos em seu cotidiano.

Ensinar matemática sem dinamismo metodológico pode limitar o aluno a desenvolver o seu próprio conceito da disciplina. O ser em construção deve se apropriar das ferramentas diversas apresentadas e adaptá-las ao seu cotidiano, inserindo uma perspectiva mais apurada do mundo ao seu redor. Valorizar somente a técnica de resolver exercícios, memorizações de fórmulas e modelos impossibilita a visão ampla do ambiente do homem. Devemos, de fato, mesclar o conhecimento técnico com a práxis do aluno em sua convivência social.

Diante de nossa exposição neste presente trabalho, sugerimos que os docentes reflitam sobre a importância dos jogos como ferramenta para o processo de ensino aprendizagem da Matemática, visando o divertimento como parte dinâmica para a formação do saber. O envolvimento direto e a interação entre os jovens com tal instrumento gera a possibilidade de vivenciar e aplicar conceitos matemáticos, fugindo da ideia do mero aspecto curricular, tornando-os úteis em seu cotidiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Paulo Nunes. **Língua Portuguesa e Ludicidade**: Ensinar brincando não é brincar de ensinar. 2007. Dissertação (Mestrado em Língua Portuguesa) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/14465/1/Paulo%20Nunes%20de%20Almeida.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. **Complex Numbers from A to Z**. Boston, MA: Birkhäuser, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais em Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>. Acesso em: 29 nov. 2020.

BORIN, Júlia. **Jogos e Resolução de Problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. 2ª Ed. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática, 1996.

BURTON, David M. **The History of Mathematics**: An Introduction. 7ª Ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2011.

EVANS, Les. **Complex Numbers and Vectors**. 1ª Ed. Camberwell, Victoria, Austrália: ACER Press, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª Ed. Campinas, SP: UNICAMP, 2011. Disponível em: <https://docero.com.br/doc/855se>. Acesso em: 01 dez. 2020.

FERREIRA, Leonardo Souto; SACHT, Leonardo Koller. Otimização de imagens panorâmicas através de Transformações de Möbius. IN: **Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul** - EREMATSUL – 2016, Curitiba, PR. Anais. Disponível em: < http://mtm.ufsc.br/~leo/EREMAT_2016.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

FIGUEREDO, Milene da Silva. **A importância do lúdico no ensino de Matemática**: Uma amostra da concepção de professores do Ensino Fundamental II na cidade de Pombal – PB. 2011. TCC (Licenciatura em Matemática à distância) – Universidade Federal da Paraíba, Pombal, PB, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/9/3/MSF08082012.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**. 2ª Ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2018.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens**. Tradução: João Paulo Monteiro. 4º Ed. São Paulo: Perspectiva, 2000.

JUNIOR, Ulício Pinto. **A história dos números complexos**: "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand". 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2009.

LAUNAY, Mickaël. **A Fascinante História da Matemática**: da pré-história aos dias de hoje. Tradução: Clóvis Marques. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

MERZBACH, Uta. C.; BOYER, Carl B. **A History of Mathematics**. 3ª Ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2011.

NAHIN, Paul J. **An Imaginary Tale**: The history of $\sqrt{-1}$. 5ª Ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2007.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática.** 2ª Ed. São Paulo: Ática, 1988.

OLIVEIRA, Francisco Erilson Freire de; VASCONCELOS, Francisco Ricardo Nogueira de. Uma proposta pedagógica para as aulas de números complexos no Ensino Médio à luz da aprendizagem significativa de Ausubel. IN: **Encontro Nacional de Educação Matemática** – ENEM – 2013, Curitiba, PR. Anais. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2540_1313_ID.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2020.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números Complexos**: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2010. Disponível em:

<https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11449/1/Carlos%20Nely%20Clementino%20de%20Oliveira.pdf> . Acesso em: 01 dez. 2020.

SANT'ANNA, Alexandre; NASCIMENTO, Paulo Roberto do. A história do lúdico na educação. **Revista Eletrônica em Educação Matemática**. Florianópolis – SC, v.6, n.2, p. 19-36, 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2011v6n2p19/21784/79926>. Acesso em: 01 dez. 2020.

STILLWELL, John. **Mathematics and Its History.** 3ª Ed. San Francisco, CA: Springer, 2010.

SULEIMAN, Amal Rahif. **O jogo e a Educação Matemática**: Um estudo sobre as crenças e concepções dos professores de Matemática quanto ao espaço do jogo no fazer pedagógico. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Araraquara, SP, 2008. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/90303/suleiman_ar_me_arafcl.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 01 dez. 2020.

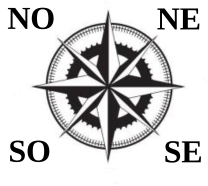
VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **A formação Social da Mente**. Tradução: José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 4ª Ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1991. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4440928/mod_resource/content/1/A%20formacao%20social%20da%20mente.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2020.

APÊNDICE A –Trilha do Desconhecido

TRILHA DO DESCONHECIDO

Carta do Caminho

TRILHA DO DESCONHECIDO



Carta do Caminho

TRILHA DO DESCONHECIDO

Carta Rotação

TRILHA DO DESCONHECIDO

Carta Surpresa

1 – Modelos para carta do caminho Norte, Sul, Leste, Oeste.

$$z = 4i$$

$$z = -2i$$

$$z = -1$$

$$z = 3$$

$$z = 2i$$

$$z = -i$$

$$z = -5$$

$$z = 4$$

$$z = 3i$$

$$z = -4i$$

$$z = -4$$

$$z = 5$$

2 – Modelos para carta do caminho Nordeste, Sudeste, Noroeste, Sudoeste.

$$z = 1 - i$$

$$z = 2 + 2i$$

$$z = -1 - i$$

$$z = -2 + 2i$$

$$z = 2 - 2i$$

$$z = 3 + 3i$$

$$z = -2 - 2i$$

$$z = -3 + 3i$$

$$z = 2 - 2i$$

$$z = 4 + 4i$$

$$z = -5 - 5i$$

$$z = -4 + 4i$$

3 – Modelos para carta rotação.

$$R(z) = z\,.\,i$$

$$R(z) = z\,.\,(-i^2)$$

$$R(z) = z\,.\,(-i)$$

$$R(z) = z\,.\,i^2$$

4 – Modelos para carta surpresa.

Volte duas casas

Avance três casas

Você não pode jogar por uma rodada

Seu adversário não jogará por uma rodada

Volte uma casa

Avance uma casa

Avance duas casas

Volte três casas

Avance quatro casas

APÊNDICE B – Relógio Maluco

Relógio Maluco

Enigma do Complexo Maior

Relógio Maluco

Enigma do Complexo Menor

1 – Modelos para carta do enigma maior.

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $\sqrt{35} + i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $4 + 3i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $6 + 8i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $2i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número i

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $-3i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $\sqrt{7} + 3i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $-7i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $8i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $10 + \sqrt{21}i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $11 + \sqrt{23}i$

Encontre uma coordenada que possui módulo igual a $\sqrt{2}$. Nela estará a direção do seu ponteiro.

Encontre uma coordenada que possui módulo igual a 3. Nela estará a direção do seu ponteiro.

Encontre o conjugado de $z = 2i$. Lá estará o seu ponteiro.

Encontre o simétrico de $z = 1 + i$ em relação ao eixo y. Lá estará o seu ponteiro.

2 – Modelos para carta enigma do complexo menor.

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $\sqrt{3} + i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $4 + 3i$

Encontre o conjugado de $z = -1 - i$. Lá estará o seu ponteiro.

Encontre uma coordenada que possui módulo igual a $\sqrt{18}$. Nela estará a direção do seu ponteiro.

Encontre uma coordenada que possui módulo igual a 3. Nela estará a direção do seu ponteiro.

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $\sqrt{35} + i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $4 + 3i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $6 + 8i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $2i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número i

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $-3i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $\sqrt{7} + 3i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $-7i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $8i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $10 + \sqrt{21}i$

O ponteiro a se encontrar está no módulo do número $11 + \sqrt{23}i$

Encontre uma coordenada que possui módulo igual a $\sqrt{2}$*. Nela estará a direção do seu ponteiro.*

Calcule o módulo do conjugado do número $-3 + 4i$*. Lá está teu ponteiro.*

APÊNDICE C – Twister Complexo

Twister Complexo
Carta dos Membros

Twister Complexo
Carta Twister

1 – Modelos para carta twister.

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 2 + 3i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 1 + 3i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 2 + i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 1 - i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 4 + i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -3 + 3i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -1 - 2i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 4i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -2i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo menor que o módulo de

$$z = 1 - 2i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 4 + 5i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -6 + i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 7 - 2i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 8 - i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -4 - 5i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -6 - 3i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = -2 - 4i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 3 - 4i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 6 - 8i$$

Coloque o membro em um círculo que tenha módulo maior que o módulo de

$$z = 10i$$

2 – Modelos de descrição para carta dos membros.

Pé Direito

Pé Esquerdo

Mão Direita

Mão Esquerda