



Dissertação de Mestrado

# **Otimização da atribuição de condutores em clínicas no Detran-AL**

Guilherme Peixoto de Souza  
gps@ic.ufal.br

Orientador:  
Rian Gabriel Santos Pinheiro

Maceió, abril de 2021

Guilherme Peixoto de Souza

## **Otimização da atribuição de condutores em clínicas no Detran-AL**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Curso de Mestrado em Modelagem Computacional de Conhecimento do Instituto de Computação da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador:

**Rian Gabriel Santos Pinheiro**

Maceió, abril de 2021

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Curso de Mestrado em Modelagem Computacional de Conhecimento do Instituto de Computação da Universidade Federal de Alagoas, aprovada pela comissão examinadora que abaixo assina.

---

Rian Gabriel Santos Pinheiro - Orientador  
Instituto de Computação  
Universidade Federal de Alagoas

---

André Luiz Lins de Aquino - Examinador  
Instituto de Computação  
Universidade Federal de Alagoas

---

Luiz Satoru Ochi - Examinador  
Instituto de Computação  
Universidade Federal Fluminense

Maceió, abril de 2021

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Livia Silva dos Santos – CRB-4 – 1670

S719o Souza, Guilherme Peixoto de.  
Otimização da atribuição de condutores em clínicas no Detran-AL / Guilherme Peixoto de Souza. – 2021.  
53 f.:il.

Orientador: Rian Gabriel Santos Pinheiro.  
Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional de Conhecimento) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Computação. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 50-53

1. Otimização linear. 2. Algoritmo – Clínicas – Detran-AL. 3. Redes neurais. 4. Detran - Otimização. I. Título.

CDU: 004.021:519.63

*Todo o empenho desta obra é dedicado aos meus pais, Teófanés José de Souza (in memoriam) e Noêmia Peixoto de Souza, por toda dedicação e esforço em minha formação, aprendi com eles os valores mais importantes da minha vida os quais irei carregar para sempre.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida;

Aos meus pais, Teófanés José de Souza (*in memoriam*) e Noêmia Peixoto de Souza por toda dedicação e amor por mim, vocês são responsáveis por mais esta conquista;

À minha noiva Carolina Barros, pelo seu amor e dedicação. Minha amiga, minha conselheira, obrigado por toda a motivação e compreensão nesta fase da minha vida e por deixá-la mais leve;

À minha família por apoiar e incentivar todos os meus projetos, especialmente para: Rodrigo, Karina, Gustavo, Elvira, Delson e Edirlene;

Aos meus sobrinhos: Ana Luiza, Arthur, Bernardo, Mariana e Heitor, por serem tão especiais para mim;

Ao Departamento Estadual de Trânsito de Alagoas (DETRAN/AL), por permitir a aplicação desta pesquisa, especialmente para: Eliane Roquette, Vitória Barbosa, Hermann Jackson, Mísias e Ewerton. Obrigado por toda disponibilidade e ajuda neste trabalho;

Ao Professor Dr. Rian Gabriel Santos Pinheiro pela sua brilhante e incansável orientação e por todo seu ensinamento. Rian, seu conhecimento, sua amizade e compreensão, foram essenciais para realização deste trabalho, muito obrigado!;

Aos Professores membros da banca examinadora, Prof. Dr. Luiz Satoru e Prof. Dr. André Luiz pelo tempo dedicado na leitura e contribuição em função de tornar essa obra melhor;

À Universidade Federal de Alagoas e a todos os professores e funcionários por toda a convivência e assistência, com certeza me fizeram uma pessoa melhor e foram peças essenciais em minha formação acadêmica.

# Resumo

Em cumprimento ao art. 3º da resolução 1636/2002 do Conselho Federal de Medicina, deve-se distribuir exames clínicos e/ou psicológicos pertencentes aos processos do Departamento Estadual de Trânsito de Alagoas, de forma equitativa e imparcial em relação às clínicas credenciadas ao órgão, gerando assim o Problema de Atribuição do Detran (PAD).

Com o objetivo de melhor alocar os candidatos para a realização de exames de forma equitativa nas clínicas, é estudada uma variante do Problema de Atribuição, um problema clássico de otimização, que tem como objetivo alocar  $n$  tarefas a  $m$  agentes, afim de minimizar o custo total das atribuições. No caso do PAD, tem-se como entrada um conjunto de clínicas  $C$  e um conjunto de condutores  $M$  e como objetivo a atribuição de cada condutor a exatamente uma clínica de forma a minimizar o custo total de deslocamento. O que diferencia o PAD do problema clássico de atribuição é a restrição criada pela divisão equitativa entre as clínicas. Seja  $k = \lfloor \frac{|M|}{|C|} \rfloor$  a razão entre a quantidade de condutores e a quantidade de clínicas, no PAD todas as clínicas devem receber exatamente  $k$  ou  $k + 1$  condutores.

A partir da base de dados do órgão de 2018, foram propostos dois modelos de otimização, o primeiro resolve o PAD alocando os condutores em clínicas minimizando a distância total. Do ponto de vista teórico, foi provado que a matriz de coeficientes do PAD é totalmente unimodular, implicando que o problema pode ser resolvido em tempo polinomial. O segundo, nomeado PAD+, tem como objetivo sugerir a localização de uma nova clínica a ser credenciada ao DETRAN. Devido a erros de digitação nos endereços dos condutores, foi proposto um modelo de classificação com base em técnicas de rede neural para inferir o bairro de cada condutor.

Foi constatado que o modelo utilizado de redes neurais conseguiu atingir uma acurácia de aproximadamente 92% na base. Com relação aos modelos de otimização, o modelo PAD reduziu em 30.07% o custo total de deslocamento dos candidatos para as clínicas. Já a sugestão de uma localidade, feita pelo modelo PAD+, diminuiu em até 67,16% o custo total em relação à alocação original. Por fim, por meio de uma análise de sensibilidade, é investigado o efeito na solução obtida do PAD em caso de variação nos parâmetros de entrada. Com isso, foi possível determinar as localidades das clínicas que mais influenciam no deslocamento dos candidatos.

**Palavras-chave:** Otimização Linear, Algoritmos, Problema de Alocação, Serviço Público.

# Abstract

In compliance with art. 3 of resolution 1636/2002 of the Federal Council of Medicine, clinical and/or psychological examinations belonging to the processes of the State Department of Traffic of Alagoas (Detran-AL) must be distributed, in an equitable and impartial way in relation to the clinics accredited to the agency, therefore generating the Detran Attribution Problem (PAD).

In order to better allocate candidates for exams in an equitable manner in clinics, in this work studied a variant of the Attribution Problem (*Assignment Problem*), a classic optimization problem, which aims to allocate  $n$  tasks to  $m$  agents, in order to minimize the total cost of assignments. In the case of PAD, a set of clinics  $C$  and a set of conductors  $M$  are entered and the objective is to assign each driver to exactly one clinic in order to minimize the total cost of travel.

What differentiates PAD from the classic attribution problem is the constraint created by the equitable division between clinics. Let  $k = \left\lfloor \frac{|M|}{|C|} \right\rfloor$  be the ratio between the number of drivers and the number of clinics, in the PAD all clinics should receive exactly  $k$  or  $k + 1$  drivers.

Two optimization models have been proposed, the first one solves the PAD by allocating drivers in clinics, minimizing the total distance. From a theoretical point of view, it was proved that the PAD coefficient matrix is totally unimodular, implying that the problem can be solved in polynomial time. The second model, named PAD+, aims to suggest the location of a new clinic to be accredited to DETRAN. Due to typing errors in the driver's addresses, a classification model was proposed based on recurrent neural network techniques to infer each driver's neighborhood.

It was found that the model used of neural networks managed to achieve an accuracy of approximately 92% on the validation basis. Regarding the optimization models, the first model proposed reduced by 30.07% the total cost of displacing candidates to the allocated clinics. The suggestion of a location, made by the second model, reduced the total cost by up to 67.16% in relation to the original allocation. Finally, through a sensitivity analysis, the effect on the solution obtained from the PAD in case of variation in the input parameters is investigated. Therefore, it was possible to determine the locations of the clinics that most influence the displacement of the candidates.

**Keywords:** Optimization, Algorithm, Assignment Problem, Public Service.



# Lista de Figuras

2.1	Processo de construção de modelos . . . . .	7
2.2	Exemplo de problema de PL . . . . .	10
2.3	Fluxo algoritmo simplex. . . . .	13
2.4	Exemplo execução do simplex. . . . .	14
2.5	Gráfico de análise de sensibilidade . . . . .	18
3.1	Representação em rede do problema de atribuição. . . . .	22
4.1	Fluxo de abertura de serviço. . . . .	27
4.2	Atual sistema de rodízio de exames. . . . .	28
4.3	Estrutura geral da rede neural recorrente LSTM bidirecional. . . . .	33
5.1	Arquitetura da rede neural usada. . . . .	37
5.2	Acurácia e valor da função de perda ao longo das 3500 épocas do treinamento .	38
5.3	<i>Stacked Bar</i> da quantidade de condutores por bairro de 2018. . . . .	39
5.4	<i>Stacked Bar</i> da quantidade de exames por bairro que tem clínica sediada de 2018.	40
5.5	<i>Boxplot</i> da alocação proposta e da alocação do Detran-AL. . . . .	42
5.6	Histograma da alocação proposta e da alocação do Detran-AL. . . . .	42
5.7	Boxplot distância condutores alocados em clínicas . . . . .	43
5.8	Boxplot shadow price por clínica ano 2018 . . . . .	44
5.9	Mapa de Maceió dividido por regiões administrativas . . . . .	47

# Lista de Tabelas

4.1	Exemplo de matriz de custo de deslocamento do condutor para clínica do PAD.	29
5.1	Custos totais dos agendamentos em cada mês de 2018. . . . .	41
5.2	Custos por condutor dos agendamentos em cada mês de 2018. . . . .	41
5.3	Custos totais dos agendamentos em cada mês de 2018 com sugestão de clínica.	45
5.4	Diferença percentual entre os custos, dada a sequência da tabela 5.3 . . . . .	45
5.5	Bairros escolhidos. . . . .	46
5.6	Bairros sugeridos e clínicas com mediana do preço-sombra negativo por RA. .	47

# Lista de Abreviaturas e Siglas

DETRAN	Departamento Estadual de Trânsito
PAD	Problema de Atribuição do DETRAN
PA	Problema de Atribuição
PL	Programação Linear
PLI	Programação Linear Inteira
TU	Totalmente Unimodular
PAG	Problema de Atribuição Generalizado
PAS	Problema de Alocação de Salas
PRT	Problema de Rodízio de Tripulação
PO	Pesquisa Operacional
PPL	Problema de Programação Linear
PLIP	Programação Linear Inteira Pura
PLIM	Programação Linear Inteira Mista
B&B	Branch and Bound
B&C	Branch and Cut
LSTM	Long Short Term Memory
RA	Regiões Administrativas
CBC	COIN Branch and Cut

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Contextualização da Pesquisa . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.2.1 Geral . . . . .	4
1.2.2 Específico . . . . .	4
1.3 Estrutura dos capítulos . . . . .	4
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Problemas de Otimização . . . . .	5
2.1.1 Classes de Complexidade . . . . .	6
2.1.2 Processo de Modelagem de Otimização . . . . .	7
2.2 Programação Linear . . . . .	8
2.2.1 Modelando Problemas com Programação Linear . . . . .	10
2.3 Método Simplex . . . . .	11
2.4 Teoria da Dualidade . . . . .	14
2.5 Análise de Sensibilidade . . . . .	17
2.6 Programação Linear Inteira . . . . .	19
2.7 Problemas Bem Resolvidos . . . . .	20
<b>3 Trabalhos relacionados</b>	<b>21</b>
3.1 Problemas de Atribuição . . . . .	21
3.2 Semi-assignment . . . . .	23
3.3 Aplicações do PA em problemas complexos . . . . .	24
<b>4 Proposta Matemática para o PAD e PAD+</b>	<b>26</b>
4.1 Otimização no Setor Público . . . . .	26
4.1.1 Problema de atribuição do Detran-AL . . . . .	26
4.1.2 Problema de normalização dos bairros . . . . .	28
4.2 Modelo matemático para o PAD . . . . .	29
4.3 Matriz totalmente unimodular . . . . .	30
4.4 Modelo matemático para o PAD+ . . . . .	32
4.5 Classificação dos Bairros . . . . .	33

---

<b>5</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>35</b>
5.1	Ferramentas . . . . .	35
5.2	Treinamento e resultados da rede neural . . . . .	36
5.3	A base do DETRAN-AL . . . . .	37
5.4	Aplicação Algoritmo Exato . . . . .	39
5.5	Análise de Sensibilidade . . . . .	43
5.6	Aplicação Algoritmo Exato com Sugestão de Novas Clínicas . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>48</b>
6.1	Conclusões . . . . .	48
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	49
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>50</b>

# 1

## Introdução

Neste capítulo, inicialmente é apresentada a motivação e contextualização da presente pesquisa. Em sequência, é demonstrado os objetivos, gerais e específicos. Por último, a estrutura do trabalho é detalhada.

### 1.1 Motivação e Contextualização da Pesquisa

Em muitos serviços no setor público, a eficiência pode ser obtida por meio de técnicas de otimização na solução de problemas como agendamento, alocação, planejamento, entre outros. Em serviços cuja demanda é muito alta, a utilização de tais técnicas é indispensável para o funcionamento do serviço. Alguns exemplos disso são: a alocação de enfermeiros em hospitais (Aickelin and White, 2004), escala de rotas de ônibus (Lourenço et al., 2001) e políticas de roteamento de semáforos (Ceylan and Bell, 2004). Como esses serviços públicos utilizam recursos financeiros frequentemente escassos, sua utilização eficiente possui vital importância. Este trabalho trata da alocação de condutores às clínicas de exames clínicos e/ou psicológicos do Departamento Estadual de Trânsito de Alagoas (DETRAN-AL), com o objetivo de reduzir o custo de deslocamento dos condutores às clínicas em que foram alocados.

Segundo o art. 140º do Código de Trânsito Brasileiro (Lei nº 9.503 de 23 de setembro de 1997) (BRASIL, 1997):

A habilitação para conduzir veículo automotor e elétrico será apurada por meio de exames que deverão ser realizados junto ao órgão ou entidade executivos do Estado ou do Distrito Federal, do domicílio ou residência do candidato, ou na sede estadual ou distrital do próprio órgão [...].

Ao analisar o método de distribuição de exames clínicos e psicológicos para as clínicas credenciadas ao Departamento Estadual de Trânsito de Alagoas (Detran-AL), notou-se a existência de

um problema. Tal problema é acarretado pelo cumprimento do art. 3º da resolução 1636/2002 (CONSELHO FEDERAL DE MEDICINA, 1997), ao qual deve-se um respeito às regras de divisão imparcial e equitativa obrigatória dos exames, nos processos de obtenção da primeira Carteira Nacional de Habilitação (CNH), adição e mudança de categoria, renovação da CNH ou substituição do documento de habilitação obtido em país estrangeiro.

As empresas médicas e psicológicas credenciadas ao departamento no mesmo município deverão receber os candidatos de forma imparcial, através de uma divisão equitativa e aleatória dentre as referidas empresas. Essa divisão soluciona a primeira restrição, que é a necessidade de realizar o rodízio equitativo dos exames. Porém, suscita em um problema geográfico e de logística. Quando, em um processo de renovação de CNH, por exemplo, o usuário é encaminhado para uma das clínicas, não necessariamente será uma clínica próxima ao seu endereço cadastrado previamente no sistema, pois a escolha da clínica dependerá da distribuição do sistema atual, chamado de rodízio. Em consequência disso, o cidadão pode ter que se deslocar em uma distância maior de forma desnecessária. Visando uma diminuição total deste deslocamento, é sugerido na presente dissertação, modelos matemáticos e algoritmos de um novo sistema de alocação de condutores em clínicas.

Diante de todo esse processo de distribuição de exames no Detran-AL, notou-se uma nova oportunidade para otimizar ainda mais o processo como um todo. Esta situação está relacionada com o momento em que uma ou mais clínicas estão se credenciando ao órgão, onde pode-se, de forma estratégica sugerir um bairro para a localização da clínica, visando diminuir ainda mais o custo total de deslocamento dos condutores, gerando assim, uma segunda proposta tratada nesta dissertação.

Portanto, a motivação deste trabalho consiste em estudar e aplicar técnicas de otimização, modelagem matemática e métodos algorítmicos para a resolução do Problema de Atribuição do Departamento Estadual de Trânsito de Alagoas (PAD) como também o problema de sugestão de bairros para novas clínicas (PAD+). Vale salientar que, como se trata de um regulamento federal, todos os departamentos de trânsito do Brasil devem implementar um sistema de distribuição equitativo e imparcial dos exames, por esse motivo, este estudo pode se estender e ser aplicado nos demais departamentos de trânsito do Brasil no processo de atribuição de exames clínicos/psicológicos, gerando uma melhor logística, conforto e satisfação para o cidadão brasileiro.

Para Prestes (2006), problemas de otimização têm chamado atenção de pesquisadores pela sua imensa dificuldade de resolução e por problemas desta natureza, estarem presentes em diversos contextos do nosso cotidiano. Com isso, existem diversos algoritmos e técnicas presentes na literatura que representam uma gama de problemas de otimização. Problemas de roteamento de veículos, programação de horários e problema de alocação são exemplos de situações onde problemas combinatórios estão presentes.

Nesta classe de problemas, o objetivo é definir um conjunto de valores para as variáveis de decisões de modo que uma determinada função seja otimizada, função essa, limitada por um

conjunto de restrições.

De uma perspectiva teórica, algumas características do PAD são representadas por um problema conhecido na literatura como Problema de Atribuição ou Alocação. Um Problema de Atribuição (PA) é caracterizado por atribuir  $n$  tarefas a  $m$  agentes ao menor custo possível, sem ultrapassar a capacidade do agente, como também que cada tarefa seja atribuída a um único agente (Pentico, 2007).

Problemas de atribuição aparecem em diversas áreas como as ciências exatas, biológicas e tecnológicas, e apresentam diversas variações. Alguns destes problemas pertencem à classe  $\mathcal{NP}$ -difícil (Burkard et al., 2009), como é o caso do Problema de Atribuição Generalizado (PAG) (Osman, 1995). Outros problemas, como o Problema de Atribuição Linear, podem ser resolvidos em tempo polinomial.

O PA ou Atribuição Linear é um problema clássico de otimização combinatória, vários algoritmos foram propostos para resolvê-lo, o mais conhecido é o método Húngaro (Kuhn, 1955). A versão clássica do problema de atribuição consiste em atribuir um conjunto de  $n$  máquinas para atender um conjunto de  $n$  tarefas a um custo mínimo, sem sobrecarregar a capacidade das máquinas. Nesse problema, cada tarefa é atribuída a exatamente uma máquina e cada máquina executa exatamente uma tarefa. Este tipo de problema aparece em um grande número de situações reais, por exemplo: designar pessoas para tarefas, designar máquinas para atividades, designar produtos para fábricas, entre outras.

No caso do problema abordado neste trabalho, o PAD, dado um conjunto de clínicas  $C$  e um conjunto de condutores  $M$ , o objetivo do PAD é atribuir cada condutor a exatamente uma clínica de forma a minimizar o custo total de deslocamento. O que diferencia o PAD do problema clássico de atribuição, é a restrição criada pela divisão equitativa entre as clínicas, em outras palavras, seja  $k = \lfloor \frac{|M|}{|C|} \rfloor$  a razão entre a quantidade de condutores e a quantidade de clínicas, no PAD todas as clínicas devem atender exatamente  $k$  condutores, ou diferir em apenas uma unidade — no caso de uma divisão fracionária. Para o caso em que a divisão é inteira, o problema é conhecido como *semi-assignment* (Volgenant, 1996).

O PAD+, se distingue do PAD pelo fato de adicionar mais uma variável de decisão ao primeiro modelo, a qual indica o bairro que é escolhido no conjunto  $C'$  de bairros disponíveis para criação de uma nova clínica de forma a otimizar o custo de deslocamento.

## 1.2 Objetivos

Nesta Seção, serão apresentados os objetivos do presente trabalho. Na subseção 1.2.1 é demonstrada uma visão geral dos objetivos a serem cumpridos. De forma a detalhar esses objetivos, tem-se a subseção 1.2.2.



### 1.2.1 Geral

O objetivo geral deste trabalho é estudar o PA, propor modelos matemáticos e algoritmos para relação do PAD e PAD+, bem como analisar tais algoritmos por meio de experimentos computacionais e análises teóricas. Por fim, implantar tais soluções no atual sistema de distribuição de exames do Detran-AL.

### 1.2.2 Específico

Para que o objetivo geral fosse alcançado, foi necessário que os seguintes objetivos específicos fossem atingidos:

- Estudo da literatura relacionada aos principais temas envolvidos no trabalho;
- Propor e implementar modelos matemáticos para a solução do PAD e PAD+;
- Apresentar um experimento dos modelos propostos;
- Realizar análise dos resultados mostrando o quanto pode ser melhorada a alocação dos condutores em clínicas em relação à solução atual utilizada pelo DETRAN-AL.

## 1.3 Estrutura dos capítulos

Com o fim de alcançar esses objetivos, a estrutura deste trabalho é dividida em seis capítulos, incluindo esta introdução. No Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica da pesquisa, são apresentados conceitos e técnicas importantes para a compreensão da temática. Junto a isso, é detalhado o método Simplex utilizado por meio de algoritmos propostos. Além disso, tal capítulo dispôr de uma sugestão de fluxo de processo para a modelagem de modelos de otimização o qual é utilizado nesta obra.

No Capítulo 3 é abordado todo o referencial bibliográfico do tema, são listados alguns trabalhos relacionados com o PA existentes na literatura no âmbito do serviço público.

No Capítulo 4, é anunciado a proposta de dois modelos matemáticos de otimização para a resolução dos problemas inerentes ao Detran-AL como também são detalhados os problemas existentes no órgão. Conjuntamente são abordadas as metodologias empregadas nos experimentos, toda a informação sobre os dados necessários para a aplicação dos modelos são detalhadas neste capítulo. Neste momento, foram identificadas dificuldades em relação à normalização dos dados, justificando a aplicação de um método de rede neural para a classificação dos textos que também é detalhado.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos através do conjunto de testes realizados por meio de experimentos. De modo a concluir esta obra, o Capítulo 6, apresenta as considerações finais, conclusões e trabalhos futuros.

# 2

## Fundamentação Teórica

Visando o entendimento de técnicas empregadas nesta pesquisa, neste capítulo são apresentados os principais conceitos envolvidos em problemas de otimização.

Na Seção 2.1, é explanado o que são Problemas de Otimização e alguns temas que fazem parte do contexto, como: Complexidade Computacional e Processo de Modelagem de Problemas. Na Seção 2.2, é definida uma técnica de programação matemática denominada Programação Linear. Na Seção 2.3, é descrito o método mais utilizado na literatura para resolução de problemas de programação linear, chamado Método Simplex, utilizado por meio de algoritmos apresentados neste trabalho para a resolução dos modelos propostos. Em seguida, na Seção 2.4 e 2.5 são explanadas Teoria da Dualidade e Análise de Sensibilidade. Na Seção 2.6 mostra-se uma generalização da Programação Linear conhecida como Programação Linear Inteira. Por fim, na Seção 2.7 é demonstrada valiosas relações entre alguns conceitos presentes neste capítulo afim de aprimorar o entendimento.

### 2.1 Problemas de Otimização

Nesta subseção, são apresentados conceitos e fundamentos base da área da ciência que esta obra está inserida, com o objetivo de propiciar um entendimento inicial da área ao leitor.

Otimização combinatória é uma área que está inserida na disciplina Pesquisa Operacional (PO) a qual agrupa diversas técnicas de modelagem e resolução de problemas de decisão. A PO originou-se a partir de necessidades estratégicas da Segunda Guerra Mundial, onde buscava-se, inicialmente, minimizar custos com transportes de alimentos, munições e medicamentos que eram demandados no campo de batalha (Hillier and Lieberman, 2013). Com o sucesso de pesquisas realizadas por cientistas e pesquisadores no contexto militar no período da Segunda Guerra e com o crescimento e aumento da concorrência empresarial em um período conhecido como *boom* econômico pós-guerra, a PO se popularizou ainda mais. Outro fator que foi determinante pela disseminação do campo, foi o crescimento dos recursos computacionais, que

permitiram aplicar técnicas e resolver problemas antes inviáveis e humanamente impossíveis pela complexidade dos cálculos e grande quantidade de dados. Com isso, pode-se conceituar PO como uma disciplina que está na interseção de diversas áreas como, engenharia, matemática, administração, computação, estatística, entre outras.

Conforme dito anteriormente, pode-se considerar a otimização como um subconjunto da disciplina de PO (Ruhul A. Sarker, 2008). Solucionar problemas de otimização é de extrema importância para computação como também para diversas áreas onde encontramos exemplos de problemas. Logística, indústria, serviço público, transporte e saúde são alguns exemplos de áreas onde existem demandas para aplicação de métodos de otimização. Um problema de otimização busca a solução mais adequada entre várias disponíveis, limitado por um conjunto de restrições, busca-se a otimização seguindo um critério de avaliação, chamado função objetivo, ou seja, o valor ótimo, que pode ser mínimo caso o problema seja de minimização, ou máximo, caso o problema seja de maximização. Ruhul A. Sarker (2008) complementa otimização como:

Problemas que buscam maximizar ou minimizar uma função matemática de várias variáveis, sujeitas a certas restrições, formam uma classe única de problemas, que podem ser chamados de problemas de otimização.

### 2.1.1 Classes de Complexidade

Problemas de otimização também podem ser classificados em conjuntos de classes de complexidade. A complexidade computacional é uma área da ciência da computação que estuda o porque alguns problemas são tão difíceis de se resolver por meios computacionais (Papadimitriou, 1994). O entendimento destas classes é de extrema importância para o desenvolvimento de soluções para problemas de natureza combinatória.

Alguns problemas de otimização podem ser bem resolvidos, ou seja, existe um algoritmo conhecido que o resolve de forma eficiente em tempo computacionalmente aceitável, encontrando sua otimalidade. Estes problemas também são conhecidos como problemas tratáveis, pertencentes à classe  $\mathcal{P}$ . Com isso, a classe de complexidade denotada por  $\mathcal{P}$ , é um conjunto de problemas computacionais que podem ser resolvidos por uma abordagem determinística em tempo polinomial (*conhecidos também como métodos exatos polinomiais*), assim, sendo efetivamente solucionados. Entretanto, a classe  $\mathcal{NP}$  consiste nos problemas computacionais que podem ser verificados em tempo polinomial, ou seja, dada uma entrada (instância) de um problema e um certificado (solução do problema), é possível verificar se de fato a solução de entrada (certificado) é válida para o problema. Já a classe  $\mathcal{NP}$ -completo representa os problemas computacionais os quais não é conhecido um método eficiente (polinomial) para encontrar a solução ótima do problema, tornando sua solução por métodos exatos inviável. Para uma leitura mais aprofundada sobre classes de complexidade, recomenda-se a consulta de Garey and Johnson (1979) e Papadimitriou (1994).

## 2.1.2 Processo de Modelagem de Otimização

Grande parte do sucesso de um problema de decisão, deve-se à aplicação de técnicas matemáticas que são descritas na Seção 2.2. Porém, somente a análise matemática, não é suficiente para se obter um bom resultado. A seguir, demonstra-se um fluxo de processos (fases) (Figura 2.1) para o estudo e construção de um modelo de otimização sugerido pelos autores [Goldbarg and Luna \(2005\)](#). Vale observar que nesta dissertação, foi seguido todas as fases descritas neste fluxograma para a criação e validação dos modelo e foram obtidos resultados ótimos.

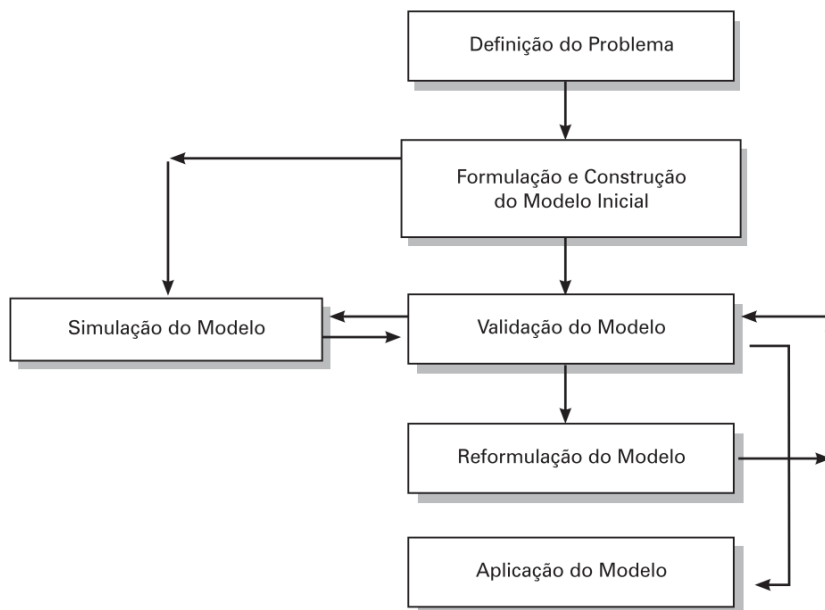


Figura 2.1: Processo de construção de modelos ([Goldbarg and Luna, 2005](#)).

**Definição do Problema:** nesta primeira fase, o problema de otimização, deverá ser descrito em forma de enunciado, no sentido de descrever de maneira clara e compreensível todos os objetivos que se deseja alcançar. Deverá ficar claro as limitações e restrições do sistema estudado.

**Formulação e Construção do Modelo Inicial:** após a formulação e o entendimento do problema, nesta segunda fase, o problema é reformulado de maneira que possa ser analisado por meio de técnicas de otimização. O método convencional em otimização é, a modelagem matemática, onde a realidade do problema é traduzida em equações e inequações matemáticas, formando um modelo matemático. Neste momento, são definidas as variáveis de decisão, função objetivo e restrições do problema.

**Validação e Simulação do Modelo:** neste momento o modelo proposto é testado, é verificado se os resultados são satisfatórios de acordo com as necessidades e, se o problema foi representado de uma forma aceitável. Esta fase está diretamente relacionada com a complexidade do problema de otimização, quanto maior a dimensão do modelo matemático, maior a

probabilidade de existir erros. Portanto, o intuito é testar e simular o modelo antes de sua implementação final para diminuir a maior quantidade de falhas possíveis.

**Reformulação do Modelo:** esta fase é independente, toda vez que o modelo não satisfazer as necessidades impostas pelo problema, o modelo poderá ser reformulado, validado e/ou simulado novamente até que chegue a um resultado aceitável.

**Aplicação do Modelo:** esta é a última fase do estudo de um problema de otimização, onde será visualizado propriamente dito os resultados do sistema desenvolvido para o modelo proposto. Entretanto, é uma fase que necessita de um contínuo acompanhamento da equipe de Pesquisa Operacional (PO) para obtenção de relatórios de como o sistema está se comportando. Nesta etapa, também é conveniente que a equipe ou pessoa que desenvolveu o trabalho, documente quais métodos foram utilizados de forma transparente para que o trabalho possa ser facilmente replicável por qualquer pessoa ou equipe que venha atuar no projeto.

Para concluir, este fluxograma é apenas uma sugestão dos autores, porém um estudo de um problema de otimização pode ser totalmente específico e conter suas particularidades, o fluxograma demonstrado não é regra ou procedimento padrão para o sucesso de todos os problemas e contextos, apenas pode ser visto como um guia para a condução de estudos para problemas de PO.

## 2.2 Programação Linear

Como argumentado na Seção 2.1, a Pesquisa Operacional (PO), é uma disciplina que reúne diversas técnicas de modelagem matemática para resolução de problemas de otimização. De acordo com [Goldberg and Luna \(2005\)](#), dentre as principais classes de problemas de Programação Matemática, destaca-se a Programação Linear (PL), devido à eficiência dos algoritmos existentes para resolução de diversos tipos de problemas.

Pode-se entender PL como uma técnica que procura a solução ótima de um problema formado por um conjunto de restrições. Em um problema de programação linear, é construído um modelo matemático que consiste na representação dos atributos deste problema em forma de um conjunto de equações lineares, ou seja, a tradução de um problema da vida real para a linguagem matemática. De modo geral, os problemas de otimização como os problemas de PL, têm como objetivo minimizar custos ou maximizar lucros.

Antes de formular matematicamente um problema de PL, vale observar que, a denominação do modelo de Programação Linear é justificada pelas características do mesmo, onde a função objetivo e todas as equações das restrições, são funções matemáticas lineares, como também o significado da palavra *programação* não se refere à programação de computadores, mas um sinônimo para *planejamento*. Hoje em dia, Otimização Linear é considerado o termo mais

adequado.

De uma perspectiva algébrica, podemos formular um problema de PL como:

$$\text{Otimizar} \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Em que,  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c_j$  são constantes do problema. As constantes  $a_{ij}$  formam a *matriz de coeficientes*  $A$ , as constantes  $b_i$  formam o *vetor de recursos*  $b$  e as constantes  $c_j$  formam o *vetor de custos*  $c$ . Os valores  $n$  e  $m$ , representam a quantidade de variáveis e a quantidade de restrições, respectivamente. A função linear (2.1), onde o termo otimizar é utilizado aqui para, genericamente, representar as possibilidades de maximizar ou minimizar, é chamada de *Função Objetivo*, *Função Econômica* ou *Função Critério*. As equações ou inequações (2.2) são chamadas de *Restrições* do problema de PL. Por fim, a inequação (2.3) assegura a restrição de não negatividade das variáveis. É interessante salientar, que podemos encontrar diversas formas de formulação matemática do PL, porém, são formulações equivalentes. Note que, o problema de PL também pode ser formulado em sua forma matricial, como o exemplo abaixo.

$$\text{Otimizar} \quad c^T x \quad (2.4)$$

$$\text{sujeito a:} \quad Ax = b \quad (2.5)$$

$$x \geq 0 \quad (2.6)$$

Problemas de PL com até duas variáveis, são conhecidos como problemas simples e podem ser resolvidos através de um método chamado de *método gráfico*. Podemos resolver qualquer problema de programação linear pelo *método simplex*, que será abordado na próxima Seção. Um problema de programação linear pode ter uma solução definida e exclusiva, um número infinito de soluções ótimas, uma solução ilimitada ou não existir solução.

A Figura 2.2 mostra a representação gráfica do seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\ \text{sujeito a:} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

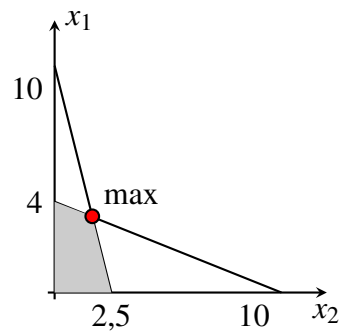


Figura 2.2: Exemplo de problema de PL

A área cinza representa a região viável, qualquer ponto nessa região corresponde a uma solução viável. O ponto em vermelho representa a solução ótima. As definições de região viável e solução ótima são apresentadas a seguir.

**Definição:** O conjunto  $C = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$  denomina-se *conjunto de soluções viáveis* ou *região viável*.

**Definição:** Dado  $x^* \in X$ ,  $x^*$  é denominado *solução ótima* do PPL se  $cx^* \geq cx$ , para todo  $x \in X$ .

### 2.2.1 Modelando Problemas com Programação Linear

Como já citado na Seção 2.1.2, uma fase de extrema importância para o sucesso da resolução de um problema de otimização é a construção do modelo. Após o entendimento do problema, é hora de traduzi-lo em linguagem matemática. Nesta subseção, será apresentado um exemplo de formulação de um modelo de Programação Linear (PL) seguindo uma sugestão de uma sequência de passos encontrada em (Goldbarg and Luna, 2005).

Podemos demonstrar um processo para o completo entendimento de um Problema de Programação Linear (PPL), nos seguintes passos:

1. **Definição das atividades:** Após a análise do problema, as atividades que o compõem são definidas. Normalmente, associada a cada atividade uma unidade de medida deve ser adotada. Neste caso, em um PPL, atividade seria as variáveis de decisão, o que se deseja otimizar em um problema de decisão.
2. **Definição dos recursos:** Considerando os insumos disponíveis dentro de cada atividade, determinam-se os recursos que estão sendo usados e produzidos em cada uma. De uma forma prática, seria as restrições do PPL, recursos estes que limitam o problema de programação linear.
3. **Cálculo dos coeficientes de insumo/produção:** É indispensável estabelecer claramente como as atividades e os recursos estão relacionados em termos de recursos necessários

por unidade de atividade produzida. Neste passo, relacionamos as variáveis de decisão com os recursos disponíveis para cada uma delas.

4. **Determinação das condições externas:** Considerando que os recursos são limitados, cumpre determinar a quantidade de cada recurso disponível para o processo modelado. Essas são as denominadas condições externas do modelo.
5. **Formalização do Modelo:** Consiste em associar quantidades  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a cada uma das atividades, escrever as equações de balanceamento e indicar o uso de cada recurso.

## 2.3 Método Simplex

Esta subseção tem o intuito de justificar a utilização do método simplex, aprimorar o entendimento do leitor sobre o algoritmo, assim como a resolução dos modelos propostos para os problemas estudados.

O método Simplex é um algoritmo para encontrar uma solução ótima em problemas de programação linear. Desenvolvido por George B. Dantzig em 1947 (Hillier and Lieberman, 2013). Pode ser considerado como um algoritmo de extrema eficiência quando aplicado em problemas complexos. Por esse motivo, o algoritmo Simplex destaca-se como uma das mais extraordinárias contribuições para a Programação Matemática. Em consequência dessa e outras contribuições, Dantzig era habitualmente chamado de pai da programação linear.

Antes de descrever o método simplex, que é o intuito dessa Seção, é interessante revisar alguns conceitos vistos na Seção 2.2 como também introduzir algumas definições matemáticas e de álgebra linear baseadas nas obras de Maculan and Fampa (2006) e da Silva (2016).

**Definição 1.** *Um problema de PL está no formato padrão se:*

1. *O critério de otimização for uma maximização;*
2. *Todas as restrições forem igualdades; e*
3. *Todas as variáveis forem não negativas.*

Note que, qualquer problema de PL pode ser convertido por um equivalente no formato padrão. Para entender o conceito de transformação para o formato padrão considere as seguintes restrições:

$$x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Passando para a forma PPL padrão, serão adicionadas duas novas variáveis não negativas  $x_3$  e  $x_4$ :

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 20$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Essas variáveis são chamadas *variáveis de folga*. Note que, para cada restrição de inequação será adicionada uma nova variável de folga não negativa.

Com esses conceitos, é possível explorar outra definição crucial para o entendimento do simplex, uma solução básica para o problema.

**Definição 2.** Uma base  $B$  de uma matriz  $A_{m \times n}$  é uma matriz quadrada de  $m$  vetores coluna linearmente independentes em  $\mathbb{R}^m$ . As variáveis associadas a essas colunas denominaremos *variáveis básicas*.

Dessa forma, a matriz  $A$  pode ser particionada em  $A = (B|N)$  de acordo com as variáveis básicas e não básicas. Da mesma forma,  $x$  pode ser particionado em  $x = (x_B|x_N)$  e  $c$  pode ser particionado em  $c = (c_B|c_N)$ .

Para melhor entendimento, podemos escrever o sistema acima da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Os vetores acima, são do  $\mathbb{R}^2$ , uma base do conjunto  $\mathbb{R}^2$ , tem dois vetores linearmente independentes, seguindo a Definição 2. Com isso, pode-se encontrar uma solução básica escolhendo  $m$  variáveis zerando as demais variáveis (não básicas):

**Exemplo:** Variáveis básicas  $x_B = \{x_3, x_4\}$  e variáveis não básicas:  $x_N = \{x_1, x_2\}$ . As variáveis básicas podem ser calculadas com a expressão:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Zerando as variáveis não básicas ( $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ ),  $x_B$  pode ser encontrado através da expressão:

$$x_B = B^{-1}b$$

Resultando em:  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 20$  e  $x_4 = 10$ .

Caso a base escolhida fosse  $x_B = \{x_2, x_3\}$ , conseqüentemente  $x_N = \{x_1, x_4\}$ . Solucionando este sistema, temos a solução básica:  $x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = -30$  e  $x_4 = 0$ . Note que, uma Solução

Básica sem componentes negativas é denominada *solução básica viável*, caso alguma componente de  $x_B$  seja negativa, a solução é denominada *solução básica inviável*, e não corresponde a uma solução para problema original. Assim, a partir da primeira base escolhida obtém-se uma solução básica viável e a partir da segunda uma solução básica inviável.

**Teorema 1.** (*Maculan and Fampa, 2006*) *O conjunto  $C$  das soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto convexo.*

Com base nesses conhecimentos, surgem algumas observações sobre a resolução de um PPL:

- Um conjunto de soluções viáveis de um PPL é um poliedro convexo;
- O valor ótimo ou a solução ótima de um PPL estará em um dos vértices deste poliedro;
- Podemos calcular e encontrar a solução ótima através das soluções básicas do sistema de equações de variáveis não-negativas;

Como visto na introdução dessa seção, o simplex é um algoritmo iterativo (um procedimento que se repete), que tem objetivo de encontrar uma solução ótima para um modelo de programação linear, como o seguinte fluxo da Figura 2.3:

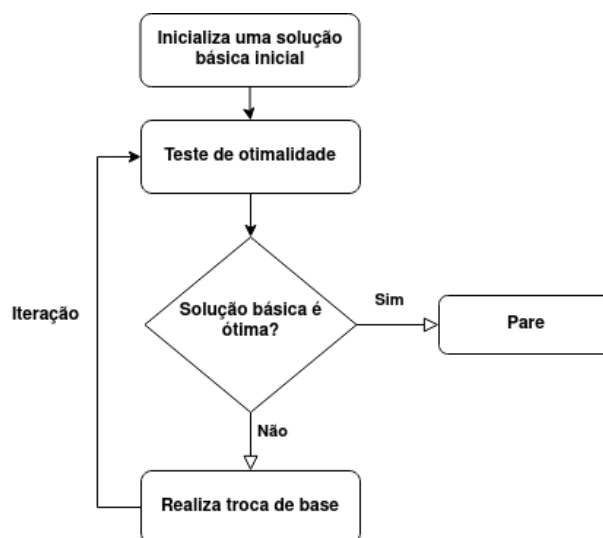


Figura 2.3: Fluxo algoritmo simplex.

A Figura 2.3, agrega valor no entendimento para definição de [Maculan and Fampa \(2006\)](#):

A ideia do método é partir de uma solução básica satisfazendo as restrições, isto é, uma solução básica primal viável, passar para outra solução básica primal viável sem que o valor da função objetivo diminua (no caso de maximização). Como o número de soluções básicas é finito, o algoritmo, sob algumas condições, convergirá.

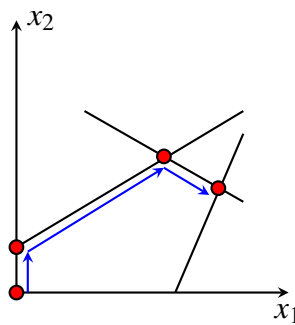


Figura 2.4: Exemplo execução do simplex.

Com isso, a partir de uma solução básica inicial, o método simplex leva em consideração alguns fatores (condições) para avaliar as soluções básicas decorrentes que são calculadas com a troca de variáveis básicas por não básicas, gerando novas soluções.

A primeira parte, é chamada teste de otimalidade para a solução, que consiste em avaliar o efeito da permuta de uma variável básica por uma não básica, gerando assim uma nova solução.

A Figura 2.4 mostra a execução do algoritmo simplex. A partir de uma solução básica viável, o algoritmo realiza mudanças de base — troca de uma variável da base por outra fora da base — com o objetivo de obter uma nova solução básica viável com melhor função objetivo. O algoritmo segue até que a condição de otimalidade seja atendida. Note que, o método simplex pode percorrer todos os vértices da região viável. Como a quantidade máxima de vértices é  $\binom{n}{m}$ , o algoritmo possui uma complexidade de pior caso exponencial. Apesar de que na prática, seu desempenho é superior a algoritmos de complexidade polinomial.

## 2.4 Teoria da Dualidade

O conceito de dualidade implica que cada problema de programação linear tem um outro problema de programação linear associado a ele baseado nos mesmos dados, denominado dual. A partir deste conhecimento, os problemas de programação linear vistos na Seção 2.2 podem ser chamados de problema primal ou problema original.

Dada a forma padrão para um problema primal de programação linear, denominado  $(P)$ :

$$\begin{aligned} (P) : \text{minimizar } z &= cx \\ \text{sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Pode-se representar o problema dual ( $D$ ) do problema ( $P$ ) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(D) : & \text{ maximizar } w = yb \\ & \text{ sujeito a: } yA \leq c \\ & y \in R\end{aligned}$$

Em que, quando o problema ( $P$ ) é de minimização o problema ( $D$ ) é de maximização, ainda o problema dual utiliza os mesmos parâmetros do problema primal mas em posições diferentes, como segue:

- Os coeficientes da função objetivo em ( $P$ ) são os lados direitos das restrições em ( $D$ );
- Os lados direitos das restrições funcionais em ( $P$ ) são os coeficientes na função objetivo em ( $D$ );
- Por fim, os coeficientes de uma variável nas restrições funcionais em ( $P$ ) são coeficientes em uma restrição funcional em ( $D$ ).

Diante destas condições, é definido como duais um par de modelos de programação linear, um primal e outro dual.

É interessante ressaltar algumas definições do relacionamento matemático do modelo primal e dual para o entendimento da essência da teoria da dualidade e de como eles são úteis em diversos contextos. A seguir, serão descritos tais relacionamentos para uma breve compreensão do motivo da existência da teoria da dualidade como também o papel de tal teoria em algumas aplicações como: análise de sensibilidade (Khan et al., 2011), método dual simplex (Koberstein and Suhl, 2007) e interpretação econômica. Para mais informações sobre teoria da dualidade e suas aplicações de forma mais ampla como também consultar as provas dos teoremas citados nesta Seção, consultar: Bertsimas and Tsitsiklis (1997, Capítulo 4) e Dantzig and Thapa (1997, Capítulo 5).

Os primeiros relacionamentos a se destacarem entre o problema ( $P$ ) e ( $D$ ) são definidos pelos dois teoremas a seguir.

**Teorema 2. (Dualidade Fraca)** Se  $x$  for uma solução viável de ( $P$ ) e  $y$ , uma solução viável de ( $D$ ), então:

$$cx \geq yb.$$

**Teorema 3. (Dualidade Forte)** se  $x^*$  é uma solução ótima para ( $P$ ) e  $y^*$ , uma solução ótima para ( $D$ ), então:

$$cx^* = y^*b.$$

É propício salientar algumas implicações dos dois teoremas descritos acima, o primeiro, descreve a relação entre qualquer par de soluções viáveis dos problemas  $(P)$  e  $(D)$ , estabelecendo que o valor da função objetivo  $z = cx$  em  $(P)$  é um limitante superior do valor da função objetivo  $w$  em  $(D)$ , e o valor obtido na função objetivo  $w = yb$  em  $(D)$  fornece um limitante inferior para o valor de  $z$  em  $(P)$ . O segundo teorema tem relação com os valores ótimos dos problemas. A diferença entre os valores de  $cx - yb$  é chamada de gap da dualidade, que, quando em um par viável das soluções esse gap for zero, então este ponto é descrito como solução ótima primal-dual, isto é, quando tanto o valor objetivo primal quanto dual atingirem seus limites.

Outro importante relacionamento em relação aos valores ótimos dos respectivos problemas, primal e dual, é o teorema das folgas complementares.

**Teorema 4. Folgas complementares** *Sejam  $x$  e  $y$  soluções viáveis dos problemas primal e dual, respectivamente, os vetores  $x$  e  $y$  são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,*

$$\begin{aligned}y(Ax - b) &= 0 \\(c - yA)x &= 0\end{aligned}$$

Isto implica que,  $x$  e  $y$  só são ótimas, se, e somente se, o valor da variável do problema dual  $y$  multiplicado pela folga  $(Ax - b)$  do primal for zero e vice-versa, este teorema permite visualizar que o valor de uma variável ótima de um problema está diretamente relacionada com a variável de folga na restrição do outro problema. O referido teorema também permite indicar uma solução ótima de um dos problemas quando a solução ótima do outro é conhecida. Com isso, a partir de um vetor  $x^*$  ótima não-degenerada no problema  $(P)$ , utilizando a propriedade das folgas complementares, pode-se chegar em uma solução ótima no problema  $(D)$  e vice-versa.

Por fim, para sintetizar essa conexão entre o problema primal e dual, a partir dos teoremas apresentados, descreve-se outro teorema clássico em programação linear: Teorema da dualidade.

**Teorema 5. Teorema da dualidade** *Dado um par de problemas (um primal e seu dual) uma e somente uma das três afirmações é verdadeira:*

- *Se um problema tiver soluções viáveis e uma função objetivo ilimitada, existindo uma solução ótima, com isso, o mesmo acontece para o outro problema, permitindo a aplicação do teorema 2 e 3.*
- *Se um problema tiver soluções viáveis e uma função objetivo ilimitada e nenhuma solução ótima, então o outro não terá soluções viáveis.*
- *Se um problema não tiver nenhuma solução viável, então o outro também não terá nenhuma solução viável ou então uma função objetivo ilimitada.*

Parente a estes teoremas, visualiza-se o forte relacionamento matemático entre o problema primal e dual como também sua aplicabilidade teórica-prática, como por exemplo, na interpretação econômica do problema primal e dual e análise de sensibilidade que é discutida na próxima seção.

## 2.5 Análise de Sensibilidade

Como visto na Seção (2.2), soluções ótimas de problemas de programação linear (PPL), podem variar de um conjunto de rotas para minimizar o gasto com combustível até um conjunto de trabalhadores atribuídos à tarefas para maximizar o lucro da produção. A solução ótima obtida a partir de um (PPL) (2.1), (2.2) e (2.3), depende dos parâmetros (dados de entrada):  $c$ ,  $A$  e  $b$  do problema em questão. Partindo de tal solução, pretende-se avaliar os efeitos na função objetivo (2.1) do PPL quando tais parâmetros são alterados sem ter que resolver o problema novamente. Portanto, a análise de sensibilidade, atua como uma ferramenta para identificar até que ponto os parâmetros podem ser alterados sem que altere o valor ótimo da solução ou não inviabilize o problema, além disso, identifica os parâmetros sensíveis do modelo, ou seja, os quais não podem ser alterados sem alterar a solução ótima (Hillier and Lieberman, 2013).

De forma sintetizada, Derhy (2010) apresenta algumas respostas que pode se obter ao realizar uma análise de sensibilidade:

- Quais são as implicações da introdução de uma restrição adicional ou de uma variável adicional? O problema deve ser resolvido de novo automaticamente?
- O que acontece se a disponibilidade de recurso ( $b_i$ ) mudar? Dentro de quais limites essa mudança pode ocorrer antes que o problema se torne inviável?

Diante destas perguntas que a análise de sensibilidade pretende responder, visualiza-se uma grande utilidade no contexto pós-otimização afim de acompanhar as possíveis mudanças que podem ocorrer no modelo e se essas mudanças irão afetar a solução atual, além disso, evita resolver o problema novamente, poupando tempo e principalmente esforço computacional para problemas de grande porte.

Para avaliar as oscilações em  $b_i$ , comumente chamado de mudanças no lado direito das restrições, tem-se os valores duais ou preços-sombra (*shadow prices*) apresentados na Seção anterior.

O preço-sombra é o efeito sobre o valor na função objetivo do PPL no aumento de uma unidade em  $b_i$  (Derhy, 2010). Esta estimativa é obtida a partir das variáveis duais do problema dual e do Método Simplex (Seção 2.3), com isso, tem-se subsídios necessários para estimar tanto o valor do efeito do incremento como também o limite que pode-se alterar a mesma, chamado faixa de viabilidade (Taha, 2008).

A Figura 2.5 ilustra a mudança na solução de um PPL que tem como solução ótima o ponto C ( $z = 128$ ). Quando é alterado o valor da restrição (1), que é representada pela restrição da reta BF, se o valor for aumentado de oito para nove, a nova solução ótima irá acontecer no ponto G ( $z = 142$ ). Conseqüentemente, tem-se uma taxa de variação que pode ser calculada de forma gráfica<sup>1</sup> como Taha (2008):

$$\text{Taxa de variação} = \frac{z_g - z_c}{(\text{Alteração na restrição (1)})} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = 14$$

O valor obtido (preço-sombra) representa a alteração no valor ótimo da função objetivo por unidade de variação positiva no valor da restrição (1). Outro cálculo indispensável é verificar a faixa de alteração da restrição (1), que pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\text{Valor mínimo restrição (1) em } [B = (0, 2,67)] = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2,67 = 2,67$$

$$\text{Valor máximo restrição (1) em } [F = (8, 0)] = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 0 = 16$$

Assim sendo, conclui-se que o preço-sombra com o valor de 14 permanecerá válido para a mudança em  $b_i$  na faixa:

$$2,67 \leq \text{Valor da restrição (1)} \leq 16$$

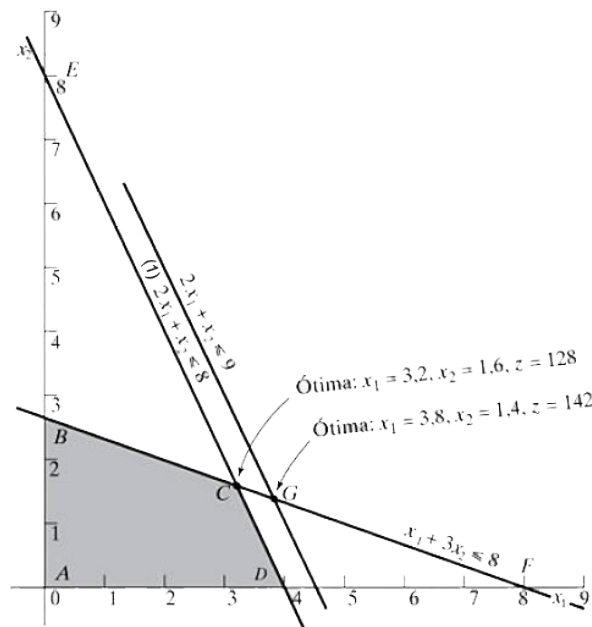


Figura 2.5: Gráfico de análise de sensibilidade da solução ótima a variações em  $b_i$  (adaptado de Taha, 2008).

Pela proposta do presente trabalho, foi apresentado a importância da realização de uma análise de sensibilidade em um PPL, além disso, em particular, de forma gráfica, como são

<sup>1</sup>Para o entendimento do cálculo de uma perspectiva algébrica (Método Simplex) consultar Seção 4.3 em Maculan and Fampa (2006).

estimadas o impacto das variações realizadas em  $b_i$ . Para uma consulta mais ampla em relação a mudanças em outros parâmetros como: quando se adiciona uma nova restrição ou em mudanças nos coeficientes da função objetivo, consultar: [Taha \(2008\)](#) ou [Derhy \(2010\)](#).

## 2.6 Programação Linear Inteira

Pode-se definir um problema de Programação Linear Inteira (PLI), como uma generalização do problema de Programação Linear, visto na Seção 2.2, em que todas ou algumas variáveis têm de assumir valores discretos. Quando todas as variáveis assumem valores inteiros, estamos diante de um problema de Programação Linear Inteira Pura (PLIP). Entretanto, quando as variáveis de decisão assumem valores contínuos e discretos, estamos diante da Programação Linear Inteira Mista (PLIM) ([Ceria et al., 1998](#)). Com isso, defini-se também, que os modelos de PLI são modelos de PL sujeitos a restrições adicionais as quais limitam os valores que as variáveis de decisão devem assumir valores discretos.

Formula-se o PLI na forma matricial como [Wolsey \(1998\)](#):

$$\max \quad cx \quad (2.7)$$

$$\text{sujeito a: } Ax \leq b \quad (2.8)$$

$$x \geq 0 \quad (2.9)$$

$$x \in \mathbb{Z}^n \quad (2.10)$$

De forma similar à PL,  $c$ , é um vetor dos coeficientes das variáveis de decisão,  $x$ , é um vetor de variáveis de decisão,  $b$ , é um vetor das restrições do problema e  $A$ , é uma matriz dos coeficientes das restrições. As restrições de domínio (2.10) indica que cada componente do vetor  $x$  é não negativa e inteiro. É válido ressaltar, que a forma apresentada acima é quase que equivalente a da Seção 2.2, com diferença que foi apresentada de forma matricial e na Restrição (2.10), onde nota-se explicitamente o domínio das variáveis de decisão englobando valores discretos.

Existem outras variações de programação matemática como Programação Binária, onde as variáveis de decisão pertencem ao conjunto binário. É utilizada quando se deseja modelar problemas onde só é possível tomar apenas duas decisões sobre as variáveis, como exemplo, o problema da mochila ou *knapsack problem* ([Dantzig, 1957](#)), onde deve-se escolher colocar ou não colocar o item na mochila sem ultrapassar um determinado limite de peso; como também no PAD descrito na Seção 4.2, onde, se deve alocar ou não uma clínica a um cidadão seguindo as restrições modeladas em (4.2). Outros problemas de otimização podem ser modelados com programação não-linear, onde, as equações e inequações são não lineares.

Com a ambição de resolver o PLI, existe na literatura métodos exatos como: *Branch-and-Bound* (B&B) ([Land and Doig, 1960](#)), *Branch-and-Cut* (B&C) ([Padberg and Rinaldi, 1987](#)) e método de Planos de Corte ([Jeroslow, 1979](#)). Conteúdo sobre Programação Inteira pode ser



encontrado em [Wolsey \(1998\)](#) e em [Maculan and Fampa \(2006, capítulo 10\)](#).

## 2.7 Problemas Bem Resolvidos

Como exposto na Seção 2.6, na Programação Linear Inteira (PLI) existe uma restrição (2.10) de integralidade das variáveis do problema. Isso significa que todas as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros, inserindo o PLI na classe de problemas  $\mathcal{NP}$ -difícil. Pode-se obter o resultado de um PLI substituindo a restrição de integralidade das variáveis  $x \in \mathbb{Z}_+^n$  por uma restrição que permita valores contínuos  $x \in \mathbb{R}_+^n$ , diminuindo assim a complexidade do problema para a classe  $P$ . Este procedimento é conhecido como *relaxação linear*, onde a solução ótima obtida para o PLI pode conter valores fracionários. Segundo [Wolsey \(1998\)](#), este valor ótimo da relaxação será, para um problema de maximização (minimização), um limitante superior (inferior) ou dual para o PLI. Por outro lado, se o resultado da relaxação somente incluir variáveis com valores inteiros, a solução será ótima para o PLI.

Os problemas em que a solução da relaxação linear é sempre valores inteiros são chamados de problemas bem resolvidos. Em particular, esses problemas possuem uma propriedade em comum em relação as suas matrizes de coeficientes, chamadas Matrizes Totalmente Unimodulares. A partir desses conceitos se faz necessário a explanação do que é uma matriz totalmente unimodular (TU) considerando sua grande utilização na programação matemática, principalmente em PLI.

Dada uma matriz  $A_{n \times m}$ , contendo apenas elementos 0, +1 ou -1,  $A$  é dita TU se toda submatriz quadrada de  $A$  tiver determinante 0, +1 ou -1. A importância de uma matriz TU pode ser entendida a partir do teorema abaixo.

**Teorema 6. ([Schrijver, 1986](#)):** *Seja  $A$  uma matriz totalmente unimodular e seja  $b$  um vetor inteiro. Então o poliedro  $P = \{x \mid Ax \leq b\}$  é inteiro.*

Pode-se extrair alguns pontos importantes da relação de uma matriz TU com PLI: Para um problema PLI que tem uma matriz  $A$  TU, resolvendo o PLI com *relaxação linear* tem-se um Problema de Programação Linear (PPL) com solução ótima inteira; Outra vantagem é que tendo um PPL a partir dessa relaxação do PLI, pode-se resolver o PLI em tempo polinomial pois o problema que está sendo investigado pertencerá à classe  $P$ .

Mais tarde na Seção 4.3, serão utilizados teoremas e algumas definições que irão servir como base para provar que a matriz  $A$  do PAD é TU, conseqüentemente, tem-se a certeza que seu resultado será inteiro.

# 3

## Trabalhos relacionados

Pela forte semelhança das características do PAD com o Problema de Atribuição (PA) ou *Assignment Problem*, este capítulo apresenta em detalhes o (PA) e uma de suas variantes, conhecida como *semi-assignment* afim de agregar o entendimento do PAD no próximo capítulo. A Seção 3.1 e Subseção 3.2, têm como objetivo apresentar as características e formulações matemáticas dos problemas. Para finalizar, tem-se a Seção 3.3 que mostra algumas aplicações do PA em diversos contextos e problemas com a intenção de demonstrar o que pode-se resolver com o modelo.

### 3.1 Problemas de Atribuição

Aparentemente, o termo problema de atribuição (*assignment problem*), apareceu pela primeira vez em 1952 no artigo de [Votaw and Orden \(1952\)](#), porém, o trabalho conhecido como precursor da área é o artigo de 1955 de [Kuhn \(1955\)](#), onde o autor descreveu o primeiro método que resolveu um problema clássico de atribuição em tempo polinomial ([Rainer Burkard, 2009](#)), desde então, vários problemas encontrados no mundo real foram facilmente resolvidos por meio de sua estrutura. Segundo [Rainer Burkard \(2009\)](#), para problemas lineares de atribuição existem métodos com soluções em tempo polinomial. Com isso, o interesse de pesquisadores sobre o problema de atribuição cresceu, gerando com o passar do tempo, variações para o problema clássico de atribuição (PA). Além de um grande número de artigos publicados na literatura, existe também, seções de livros e até mesmo livros que abordam o assunto para confirmação deste fato. São algumas obras que abordam o tema, além disso, algumas são utilizadas como referencial teórico do presente trabalho: [Rainer Burkard \(2009\)](#), [Goldberg and Luna \(2005, capítulo 7\)](#), [Hillier and Lieberman \(2013, capítulo 8\)](#) e [Wolsey \(1998, capítulo 4\)](#). Estas obras contemplam exemplos de problemas reais e métodos de como se pode solucionar problemas de atribuição.

Como citado no Capítulo 1, problemas de atribuição (que pode ser encontrado também como: Designação, alocação ou *Assignment Problem*) é um problema clássico de otimização que consiste em atribuir  $n$  tarefas a  $m$  agentes com objetivo de minimizar o custo total das atribuições (Pentico, 2007). O problema clássico de atribuição, pode ser modelado matematicamente como (Pentico, 2007):

$$\text{minimizar } \sum_{i \in A} \sum_{j \in T} c_{ij} x_{ij} \tag{3.1}$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{i \in A} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in T \tag{3.2}$$

$$\sum_{j \in T} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in A \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \tag{3.4}$$

Dado um conjunto conjunto  $T$  com  $n$  tarefas e um conjunto  $A$  com  $m$  agentes. Onde  $x_{ij}$  vale 1 se o agente  $i$  for atribuído a tarefa  $j$ , no contrário vale 0. A constante  $c_{ij}$  é o custo de atribuir o agente  $i$  à tarefa  $j$ . A primeira família de equações assegura que, para toda tarefa  $j$  só será atribuído um agente  $i$  e a segunda família de equações assegura que, para todo agente  $i$  só será designado uma tarefa  $j$ . Finalizando a modelagem, a última restrição garante que  $x_{ij}$  é uma variável binária onde valerá somente 0 ou 1.

Para agregar o entendimento, a Figura 3.1 ilustra uma representação gráfica do PA onde,  $i$  agentes ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) devem ser designados a  $j$  tarefas ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) com um custo associado  $c_{ij}$  de modo a minimizar o custo total de designações.

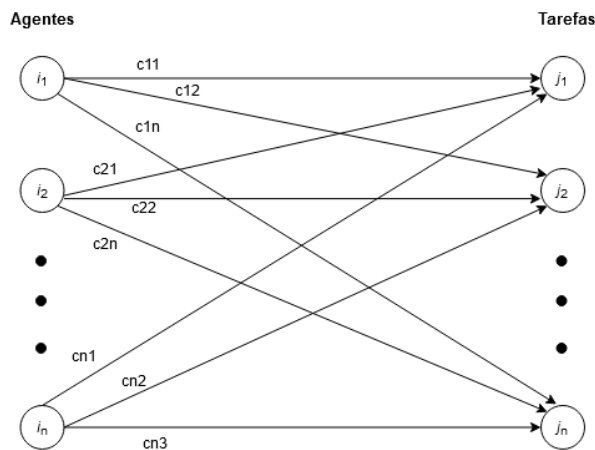


Figura 3.1: Representação em rede do problema de atribuição.

Como já citado anteriormente, existem muitas variações do PA clássico encontrado na literatura devido a sua diversa aplicabilidade em contextos reais. No trabalho de Caron et al. (1999) uma variação do modelo matemático clássico é demonstrado, onde o objetivo é atribuir pessoas à trabalhos, mas nem todas as pessoas tem o nível de qualidade técnica para executar tarefas que exigem um nível técnico sênior, este modelo foi nomeado como: Problema clássico de atribuição com reconhecimento de qualificação do agente. Também tem a variação do PA

onde existe a demanda em que um agente pode ser atribuído a mais de uma tarefa, é o caso do modelo conhecido como problema de atribuição generalizado (PAG). Existe uma importante diferença entre o PAG e o PA é que o PAG se encontra na classe de problemas NP-difícil (Fisher et al., 1986). Cattrysse and van Wassenhove (1990) identificam várias aplicações para o PAG, como também observa que o PAG pode ser utilizado para resolver sub-problemas de um problema maior. As aplicações do PAG variam como: problemas de roteamento de veículos, projetos de redes de comunicações, agendar pagamentos em contas, etc. Diante destes exemplos, observamos a importância e relevância do estudo do PA para diversas áreas.

Para mais detalhes sobre problemas de atribuição, recomenda-se o livro de Rainer Burkard (2009).

## 3.2 Semi-assignment

Dissemelhante ao PA clássico citado previamente, onde uma tarefa deve ser alocada em um único agente, esta variante, *semi-assignment*, permite que  $i$  agentes sejam atribuídos à um conjunto (grupos) de  $j$  tarefas ou vice-versa, (em que  $i < j$ ), tendo  $d_j$  tarefas no grupo  $j$ .

Formula-se o *semi-assignment* matematicamente da seguinte forma (Kennington and Wang, 1992):

$$\text{minimizar } \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} c_{ij} x_{ij} \quad (3.5)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j \in M} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in M \quad (3.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (3.8)$$

Onde,  $c_{ij}$  é o custo de atribuir o agente  $i$  ao conjunto de tarefas  $j$ ,  $x_{ij}$  valerá 1 se o agente  $i$  for atribuído ao grupo de tarefas  $j$ , caso contrário valerá 0. A Restrição (3.6), assegura que para todo agente  $i$  só será atribuído um grupo de tarefas  $j$ . Na Restrição (3.7),  $d_j$  denota o número de tarefas no grupo  $j$ . Volgenant (1996), observou que pode-se tirar vantagem da possibilidade de existir colunas ou linhas idênticas na matriz de custo, segundo o autor, esta característica abre possibilidade de reestruturar o problema de forma que o problemas possam ser resolvidos de maneira mais simples. Doravante, pode-se resolver diversos problemas através do *semi-assignment*. Kennington and Wang (1992) descrevem aplicações em áreas como: planejamento de orçamentos e planejamento de projetos.

Existe um grande número de algoritmos presente na literatura com o objetivo de resolver essas classes de problemas, como algoritmos paralelos (Storøy, 1997) e recursivos (Thompson, 1981). Outros algoritmos têm como base o método primal-dual e o método simplex (ver Seção 2.3) para resolução do *semi-assignment*. Algoritmos primal-dual funcionam com um par

de problemas (Primal e Dual). A principal ideia consiste em a partir de uma solução dual viável encontrar uma solução primal viável. Para verificar a otimalidade avaliam-se as condições das folgas complementares (ver Teorema 4 das folgas complementares). Esses algoritmos atualizam as soluções iterativamente até que a solução primal se torne viável, enquanto mantém as condições das folgas complementares. Nesse ponto, a solução primal também é ótima, de acordo com a teoria da dualidade vista na Seção 2.4. Um exemplo de algoritmo primal-dual é o clássico algoritmo Húngaro de [Kuhn \(1955\)](#). Com relação ao *semi-assignment*, [Volgenant \(1996\)](#) propõe uma adaptação do algoritmo LAPJV ([Jonker and Volgenant, 1987](#)) para problemas de *semi-assignment*. Este algoritmo denominado semi-LAPMOD obteve ótimos resultados em instâncias de grande escala.

### 3.3 Aplicações do PA em problemas complexos

De modo geral, nesta Seção, pretende-se apresentar os principais estudos e aplicações do PA e suas variações em algumas áreas, como também em um contexto específico do serviço público, afim de fornecer uma visão de como e quais problemas podem ser resolvidos com PA.

No contexto educacional, o PA se apresenta para resolver diversos problemas denominados *timetabling*, que consiste programar eventos (exames, cursos, encontros) em um limitado período de tempo satisfazendo as restrições do problema como: combinar quadro de horários, alocar professores e distribuir salas de aula considerando as demandas assim como as restrições de disponibilidade de cada curso ([Qu et al., 2009](#)). Dentre essas atividades, destaca-se o problema de alocação de salas (PAS) ou *Classroom Assignment Problem*, onde no início de cada ano/semestre letivo, a partir da oferta de disciplinas, deve-se alocar essas disciplinas em salas de aulas, levando em consideração o corpo docente e discente, respeitando também restrição de infraestrutura quando houver. [Martinez-Alfaro et al. \(1996\)](#), resolveram o PAS no Instituto Tecnológico e de Estudos Superiores de Monterrey no México (ITESM), os autores alocaram aproximadamente 2500 aulas/disciplinas em 182 salas e para isso utilizaram a metaheurística *Simulated Annealing* tendo em vista a complexidade do problema. Em [Filho \(2008\)](#), o autor propõe três algoritmos heurísticos para a resolução do PAS — resolução sucessiva de problemas de designação com gargalo e a meta-heurística busca em vizinhança variável. O trabalho apresenta a resolução do PAS na Universidade Estadual de Maringá (UEM) e alocou 200 salas para as 2500 disciplinas/turmas oferecidas pelos 34 departamentos da instituição mediante a várias restrições. O estudo tem uma característica semelhante com o PAD, porque além de realizar a alocação das disciplinas, o autor também maximiza a concentração de alunos de um mesmo curso em uma determinada área geográfica, minimizando as distâncias percorridas por esses alunos. Nas três abordagens utilizadas no trabalho, o autor salientou uma melhora expressiva nos resultados obtidos quando comparado com a realizada manualmente.

Atendimentos de saúde em domicílio (*home care*), é um sistema onde profissionais de saúde

são alocados a pacientes para a realização de atendimentos em diferentes rotas, assim sendo, um problema relevante para pessoas que necessitam de cuidados médicos (Yalçındağ et al., 2016). Neste contexto, Hertz and Lahrichi (2009), apresentam dois modelos de programação inteira mista para atribuir técnicos(as) de saúde para pacientes. A ideia do estudo é ponderar a carga de trabalho dos profissionais, minimizando o trabalho extra, além disso, os autores minimizam o custo de deslocamento levando em consideração a localização do hospital de onde sairá o enfermeiro e a rota dos atendimentos. Lanzarone and Matta (2012), demonstram alguns modelos estendidos do PA, onde levam em consideração algumas peculiaridades da área, como: as habilidades dos profissionais, as localizações dos pacientes e profissionais. O que faz o trabalho dos autores se destacarem na literatura, é que a proposta considera condições estocásticas do paciente.

A programação de veículos é uma etapa muito importante no processo de planejamento em empresas de transporte público. Isto conta tanto para o planejamento de rotas quanto para o planejamento de mão de obra (Daduna and Pinto Paixão, 1995). Isto se deve ao estreito relacionamento entre a programação das rotas e a escala da tripulação para a realização das mesmas. Neste cenário, Mayrink and Silva (2013), os autores têm como desafio resolver o Problema do Rodízio de Tripulações (PRT) do sistema de transporte público, que tem como objetivo atribuir veículos para cumprir rotas preestabelecidas pelo governo, além disso, eles definem um conjunto de jornadas diárias de trabalho das tripulações, tal que cada veículo tenha sua rota realizada. Como o modelo considera não só restrições operacionais como também trabalhistas, dentre as restrições do problema, o trabalho leva em consideração os dias de folga dos funcionários. Tal problema é resolvido com dois modelos de atribuição, onde, primeiramente aloca-se os tripulantes em suas jornadas diárias com objetivo de minimizar a quantidade de horas extras e ociosidade. A partir desta primeira solução de designação, é apresentado um segundo modelo de otimização inteira para atribuir as folgas às tripulações com objetivo de minimizar o número de dias de folgas dos funcionários.

De acordo com esse levantamento de trabalhos relacionados, percebe-se a aplicação prática de modelos de problema de atribuição em diversos contextos reais e de como pode-se resolver tais problemas, tanto no setor público quanto privado.



# Proposta Matemática para o PAD e PAD+

Neste capítulo, são apresentados os modelos matemáticos propostos para a resolução dos problemas encontrados neste trabalho. Afim de se obter uma visão mais ampla dos modelos, na Seção 4.1 os problemas encontrados no DETRAN-AL são explanados. Na Seção 4.2, é detalhado o modelo matemático para a resolução do PAD. Na Seção 4.3, é provado que a matriz de coeficientes das restrições do PAD é Totalmente Unimodular. Na Seção 4.4, é esmiuçado o modelo para resolução de problemas de alocação com sugestão de clínica (PAD+). E para finalizar, na Seção 4.5, é demonstrada a arquitetura da rede neural utilizada para o trabalho de classificação dos bairros dos condutores.

## 4.1 Otimização no Setor Público

Para um melhor entendimento dos modelos matemáticos apresentados neste capítulo, nesta Seção é demonstrado em detalhes os problemas enfrentados nesta dissertação. Na Subseção 4.1.1 é detalhado o Problema de Atribuição do Detran-AL. Logo em seguida, a Subseção 4.1.2 descreve uma dificuldade encontrada no momento da criação da matriz de custo para o PAD.

### 4.1.1 Problema de atribuição do Detran-AL

Um Departamento Estadual de Trânsito dispõe de diversos serviços para que a sociedade cumpra normas previstas em lei. Dentre estes serviços existem alguns que exigem do cidadão um laudo clínico/psicológico atestando sua aptidão para o serviço. As clínicas credenciadas ao Detran-AL podem realizar três tipos de exames, sendo eles: Exame clínico, exame psicológico e exame clínico e psicológico, de acordo com o serviço que o candidato está iniciando e algumas condições, o tipo de exame será escolhido.

Para exemplificar, podemos citar um processo de renovação da Carteira Nacional de Habilitação (CNH), no qual o candidato que está abrindo o processo não exerce atividade remunerada

ao volante (taxista, uber, etc). Neste contexto, somente é necessário um exame clínico para atestar que o mesmo está apto para a renovação da CNH. Caso o candidato exercesse atividade remunerada ao volante, seria necessário um exame psicológico. Existem vários contextos e circunstâncias para que o tipo de exame que o candidato necessitará seja escolhido, mas para finalidade desta dissertação, compreender essa dinâmica de exames é suficiente. Vale ressaltar que as instâncias utilizadas neste estudo só levam em consideração os candidatos com tipo de exame clínico, pois é o caso mais comum de ocorrer e, conseqüentemente, mais significativo em relação a tamanho para o estudo.

Assim que o candidato abrir o processo junto ao Detran-AL o mesmo será designado a uma clínica credenciada para a realização do exame requerido, como mostra a Figura 4.1. Cabe destacar, que nesse processo o candidato só será alocado em uma clínica e não ocorrerá o agendamento do exame, o agendamento do exame propriamente dito é realizado pelo próprio cidadão onde o mesmo escolhe o dia e a hora mais conveniente através dos canais de atendimento do órgão.

Atualmente a alocação do candidato à clínica é feita a partir de um algoritmo que somente leva em consideração a restrição de divisão equitativa de exames prevista na resolução do Conselho Federal de Medicina, conhecido como algoritmo de rodízio. O atual algoritmo do Detran-AL verifica, dentre as clínicas credenciadas com *status* ativa para exercer atividade, qual está com menos exames atribuídos de um determinado tipo e aloca o próximo condutor ao tipo de exame que ele irá realizar. Assim, no final do mês todas as clínicas receberão o mesmo número de condutores de forma imparcial.

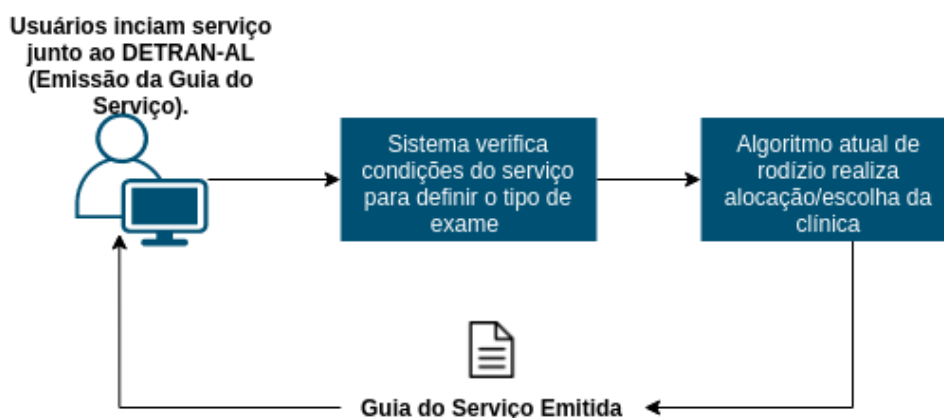


Figura 4.1: Fluxo de abertura de serviço.

A Figura 4.2 apresenta o fluxograma do atual sistema de rodízio de exames do Detran-AL. Considere CLI01, CLI02 e CLI03 como clínicas credenciadas ao Detran-AL e CLI, PSI e CLI/PSI os tipos de exames que a clínica realizou em um determinado período de tempo. A CLI01 e CLI02 tem um total de dois exames clínicos realizados, CLI03 tem um exame clínico realizado. Neste contexto, o próximo candidato que necessitar realizar um exame do



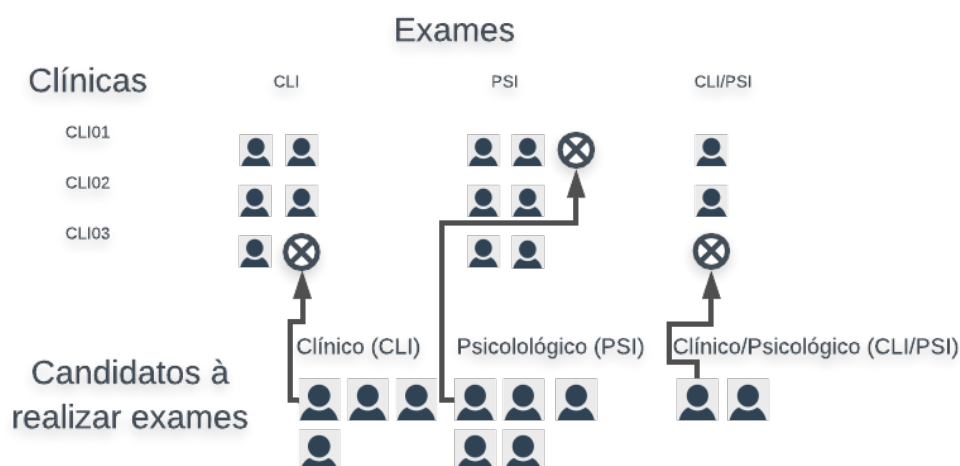


Figura 4.2: Atual sistema de rodízio de exames.

tipo clínico será designado para a CLI03 a qual possui menos exames atribuídos. Com isso, as três clínicas ficariam iguais ao total de exames clínicos realizados obedecendo à portaria do Conselho Federal de Medicina.

Por outro lado, pode-se observar que o usuário que será alocado na CLI03 para o próximo exame clínico pode morar em uma localidade muito distante em relação à clínica, pois o algoritmo não leva em consideração a localidade do condutor. Partindo do princípio que o candidato sairá do seu endereço cadastrado no sistema no dia da realização do exame, o modelo do presente trabalho tem como função objetivo minimizar o custo total de deslocamento do endereço do candidato ao endereço das clínicas. Além do endereço dos candidatos, o modelo irá manter a principal restrição da divisão equitativa de exames prevista em lei como será verificado na Seção 4.2.

Mediante a portarias e regulamentações do Detran-AL, o empresário que tem interesse de integrar o grupo de empresas aptas para realizar estes exames oriundos das necessidades de processos do órgão, pode se credenciar atendendo um conjunto de características para o credenciamento. Dado esse frequente credenciamento, com o interesse de otimizar ainda mais o deslocamento do cidadão, é sugerido um estudo de um novo modelo matemático partindo do modelo anterior (PAD+) que será detalhado na Seção 4.4.

#### 4.1.2 Problema de normalização dos bairros

Recapitulando de forma sintetizada o que foi abordado na Seção 3.1, problemas de atribuição têm como objetivo minimizar o custo total das atribuições de tarefas a agentes. Com isso, tem-se a necessidade da criação de uma matriz de custo de alocação de todas as tarefas para todos os agentes (no caso do PAD condutores a clínicas) afim de encontrar a alocação com menor custo. A Tabela 4.1 demonstra um exemplo de como seria uma matriz de custo  $c_{ij}$  para entrada do PAD.

Para criação de uma matriz como essa, foi necessário capturar os bairros de todas as clínicas

Tabela 4.1: Exemplo de matriz de custo de deslocamento do condutor para clínica do PAD.

	Bairro Condutor 1	Bairro Condutor 2	Bairro Condutor 3
Bairro Clínica 1	10	20	100
Bairro Clínica 2	50	60	90
Bairro Clínica 3	20	80	35

e condutores da instância em questão. No momento da seleção dos bairros dos condutores notou-se a falta de padronização na descrição o que acarretou problemas na hora de calcular os custos (distâncias). Para exemplificar essa falta de padronização, demonstra-se a seguinte situação: Tem-se um bairro de Maceió chamado Benedito Bentes, pelo fato da inserção dos bairros em um determinado momento ser manual por pelo usuário do sistema, foi encontrado no banco de dados diversas ocorrências (variações) para representar esse bairro, como por exemplo: B Bentes, Benedito Bentes, BB, como também ocorrências geradas por um simples erro de digitação como: Brnedito Betes ou Benedito Brentes.

Dessa maneira, surgiu a demanda de estudar formas de normalizar a descrição dos bairros afim de conseguir calcular as distâncias e conseqüentemente criar a matriz de custo para entrada do PAD. Esses estudos serão detalhados na Seção 4.5.

Com os endereços dos condutores normalizados mediante o trabalho da Seção 5.2, pode-se então calcular a distância do bairro dos condutores às clínicas que servirá como dados de entrada para os algoritmos propostos. Para isso, foi desenvolvido um *script* em Python que utilizou a API Geolocation do Google Maps. A matriz de custo é gerada a partir da distância em quilômetros do bairro do condutor para o bairro da clínica. Por limitação do número de requisições da API do Google Maps, vale ressaltar que foi passado como parâmetro para API somente os bairros e não o endereço completo como logradouro, número e ponto de referência, com esta abordagem foi observado um nível de precisão aceitável em relação ao cálculo das distâncias.

## 4.2 Modelo matemático para o PAD

Uma formulação matemática descreve, usando uma sintaxe matemática, uma forma de encontrar a solução ótima de um problema. Cada problema exige uma formulação própria, pois para tal é necessário utilizar suas características. Dada uma formulação matemática de um problema, é necessário utilizar algum *solver*<sup>1</sup> para resolvê-la.

Dados como entrada: um conjunto de condutores  $M$ , um conjunto de clínicas  $C$  e sendo  $k = \left\lfloor \frac{|M|}{|C|} \right\rfloor$  a razão de condutores por clínica. Para resolver o PAD é proposta a seguinte formulação matemática:

<sup>1</sup>Software utilizado para resolver uma formulação matemática.

$$\text{minimizar } \sum_{i \in C} \sum_{j \in M} c_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{i \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in M \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \leq k + 1 \quad \forall i \in C \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \geq k \quad \forall i \in C \quad (4.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in C, j \in M \quad (4.5)$$

Neste modelo,  $x_{ij}$  é uma variável binária que vale 1 se e somente se, na solução, o condutor  $j$  foi atribuído na clínica  $i$ . A constante  $c_{ij}$  indica o custo de deslocamento do condutor  $j$  para a clínica  $i$ . A função objetivo (4.1) contabiliza o custo da solução. A restrição (4.2) determina que cada condutor seja alocado a exatamente uma clínica. As restrições (4.3) e (4.4) determinam a quantidade máxima e mínima, respectivamente, de condutores em cada clínica  $i$ . Por fim, as restrições (4.5) determinam o domínio das variáveis.

### 4.3 Matriz totalmente unimodular

Esta seção tem como objetivo mostrar que a matriz de coeficientes do PAD é totalmente unimodular (TU). Este resultado é fundamental para o estudo da análise de sensibilidade que é apresentado na Seção 5.5 pois garante que a relaxação linear seja uma solução inteira. Antes da demonstração de total unimodularidade, alguns teoremas da literatura serão apresentados.

**Teorema 7.** (*Heller & Tompkins (Goldberg and Luna, 2005)*): *Seja  $A$  uma matriz com elementos  $0, 1, -1$  e exatamente dois elementos não nulos em cada coluna. Então  $A$  é TU se e somente se as linhas de  $A$  podem ser particionadas em dois subconjuntos  $J_1$  e  $J_2$  tais que, para cada coluna:*

1. *Se uma coluna contém dois elementos não nulos com o mesmo sinal, cada um deles está em um dos subconjuntos.*
2. *Se uma coluna contém dois elementos não nulos com sinais diferentes, ambos estão no mesmo subconjunto.*

**Teorema 8.** (*Caracterização de Seymour (Schrijver, 1986)*): *A total unimodularidade de uma matriz é preservada sob as seguintes operações:*

1. *Permutação linhas e colunas;*
2. *Obtenção da transposta;*
3. *Multiplicação de linha ou coluna por  $-1$ ;*

4. *Repetição de linhas ou colunas.*

Outros teoremas e propriedades sobre as matrizes TU podem ser encontrados em [Schrijver \(1986\)](#).

Sabendo que o PAD é modelado através das seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} x_{ij} &= 1 & \forall j \in M \\ \sum_{j \in M} x_{ij} &\leq k + 1 & \forall i \in C \\ \sum_{j \in M} x_{ij} &\geq k & \forall i \in C. \end{aligned}$$

Sejam  $A_1, A_2$  e  $A_3$  as matrizes de coeficientes de cada família restrições:  $\sum_{i \in C} x_{ij} = 1, \sum_{j \in M} x_{ij} \leq k + 1$  e  $\sum_{j \in M} x_{ij} \geq k$ , respectivamente. Pode-se observar que  $A_2 = A_3$ , já que ambas as famílias de restrições possuem os mesmos coeficientes. Seja  $A$  a matriz de coeficiente do PAD e  $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ .

**Lema 9.** *A matriz  $A'$  é TU.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $A'$  é TU.

$$A' = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^{x_{11} \dots x_{1n}} & \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^{x_{21} \dots x_{2n}} & \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^{x_{n1} \dots x_{nm}} \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 & 0 \ 1 \ \dots \ 0 & 0 \ 1 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \ddots & \dots \ \vdots \ \ddots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 1 \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 1 \ \dots \ 1 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_1 \\ \\ \\ \\ A_2 \end{array}$$

Inicialmente, note que todos os elementos de  $A'$  pertencem ao conjunto  $\{0, 1\}$ . Além disso, não mais do que dois elementos não nulos aparecem em cada coluna. Isto é, uma coluna relativa a uma variável  $x_{i,j}$  possui valor 1 exatamente uma vez nas linhas relativas a  $A_1$  e exatamente uma vez nas linhas relativas a  $A_2$ .

Por fim, particionando as linhas de  $A'$  em  $J_1$  e  $J_2$  de forma que cada conjunto possua as linhas da matriz  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente. Nota-se que cada coluna possui exatamente dois elementos não nulos com o mesmo sinal, cada um deles em um subconjunto diferente. Logo, pelo teorema de Heller & Tompkins (Teorema 7), a matriz  $A'$  é TU.  $\square$

**Teorema 10.** *A matriz de coeficientes do PAD  $A$  é TU.*

*Demonstração.* Sabendo que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \text{ e que } A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

e sabendo que  $A_2 = A_3$ , pode-se observar que  $A$  pode ser obtida através da matriz  $A'$  por sucessivas operações de repetição de linha. No caso, as linha correspondentes  $A_2$  podem ser duplicadas com intuito de formar a matriz  $A$ , já que as matrizes  $A_2$  e  $A_3$  são idênticas. Sabendo pelo Lema 9 que a submatriz  $A'$  é TU e que as operações de repetição de linha preservam a propriedade de total unimodularidade segundo a caracterização de Seymour (Teorema 4, item 4). Logo, a matriz  $A$  é Totalmente Unimodular.  $\square$

**Corolário 11.** *O PAD pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Observa-se que, mesmo que o modelo do PAD não possua todas as restrições do tipo ' $\leq$ ', pode-se obter um modelo de PL equivalente — com a total unimodularidade preservada — através das seguintes operações:

- **Restrições do tipo ' $\geq$ '**: Multiplicação por -1;
- **Restrições do tipo ' $=$ '**: Repetição de linha e multiplicação por -1.

## 4.4 Modelo matemático para o PAD+

Dada a formulação anterior, é possível determinar um novo modelo de otimização para o problema estudado. Tal modelo é descrito da seguinte forma: sugere-se a criação de uma nova clínica, para adicionar às clínicas já utilizadas, em um determinado bairro na matriz de custo de forma que minimize a solução em relação à formulação anterior. Cada bairro, então, terá uma clínica de sugestão e uma dessas clínicas será escolhida. Portanto, a nova formulação é definida como:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in CUC'} \sum_{j \in M} c_{ij} x_{ij} \quad (4.6)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i \in CUC'} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in M \quad (4.7)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \leq k + 1 \quad \forall i \in CUC' \quad (4.8)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \geq k \quad \forall i \in C \quad (4.9)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \geq ky_i \quad \forall i \in C' \quad (4.10)$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} \leq |M|y_i \quad \forall i \in C' \quad (4.11)$$

$$\sum_{i \in C'} y_i = 1 \quad (4.12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in C, j \in M \quad (4.13)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i \in C' \quad (4.14)$$

Neste modelo, as variáveis  $x_{ij}$  e  $c_{ij}$  mantém a definição, mas funcionando para as clínicas  $C'$  de sugestão, indicadas pela variável binária  $y_i$ , que é 1 se a nova clínica é adicionada ou 0 caso contrário. A função objetivo (4.6) calcula o novo custo da solução. As restrições (4.7)

determina que cada condutor seja alocado em uma clínica, sendo antiga ou nova. As restrições (4.8) e (4.9) determinam a quantidade máxima e mínima, respectivamente, de condutores em cada clínica  $i$ . As restrições (4.10) determina a validade do custo de cada clínica nova, ou seja, se a nova clínica  $y_i$  não é escolhida, então a variável binária  $x_{ij}$  não pode ser ativada também. As restrições (4.11) funciona da mesma maneira, mas tomando a quantidade de condutores como base. A restrição (4.12) determina que apenas uma clínica nova é ativada. Por fim, as restrições (4.13) e (4.14) determinam o domínio das variáveis.

## 4.5 Classificação dos Bairros

A grafia incorreta no nome de localidades (bairros dos condutores) é um dos empecilhos à resolução direta do PAD no processo de agendamento de exames. Tipicamente ocorrem abreviações e erros de digitação no preenchimento de formulários, o que impulsionou a busca por soluções para este inconveniente. Especificamente neste caso, utilizou-se uma abordagem de classificação de texto com uma rede neural recorrente, a LSTM (*Long Short Term Memory*) bidirecional (Schuster and Paliwal, 1997).

Sua escolha é justificada pelo bom desempenho em situações onde o contexto das entradas são importantes. Exemplificando, em uma palavra  $w = (l_{i-2}, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, l_{i+2})$  composta por um conjunto de letras  $l$ , o conhecimento das letras localizadas antes e depois de uma letra  $l_i$  contribui com a melhora de predições da palavra  $w$ . De maneira geral, a LSTM bidirecional segue o modelo estrutural da Figura 4.3, com  $x$  entradas,  $y$  saídas e camadas ocultas em sentidos opostos (fluxo direto e inverso). Para um instante qualquer  $t_i$ , essa organização das camadas em sentidos diferentes permite que as saídas sejam dadas em função de informações dos instantes  $t_{i-1}$  e  $t_{i+1}$ .

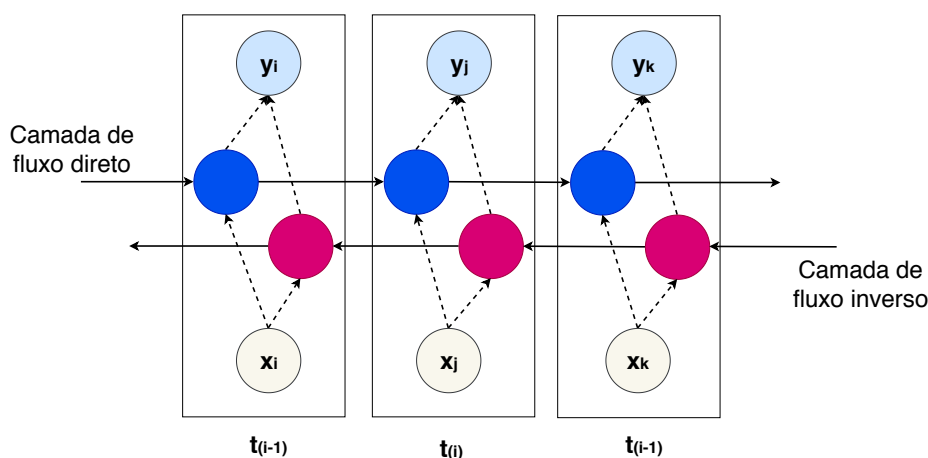


Figura 4.3: Estrutura geral da rede neural recorrente LSTM bidirecional.

Neste problema em específico, considerando os casos de entrada que são nomes de bairros, possivelmente com erros e abreviações, a LSTM treinada deve receber e gerar uma saída, que

consiste na entrada sem abreviação e com grafia correta. Como exemplo, considere as seguintes entradas (com erro) e saídas (corretas):

- *B BENTES*  $\implies$  *BENEDITO BENTES*;
- *TABLEIRO DO MATINS*  $\implies$  *TABULEIRO DO MARTINS*.

Com este processamento e padronização nos dados de entrada, o modelo de resolução do PAD para o agendamento de exames pode ser aplicado. Na Seção 5.2 será detalhado o treinamento e resultados da rede neural.

# 5

## Resultados Computacionais

Neste capítulo são apresentados e analisados os resultados obtidos a partir dos modelos matemáticos propostos como também as ferramentas e arquitetura utilizada para atingir os objetivos da presente pesquisa. Para validar os modelos propostos, foram obtidas instâncias reais do Detran-AL no período do ano de 2018. É importante salientar que essas instâncias só contemplam tipo de exame clínico por ser o dado mais significativo em relação a tamanho de instância. As instâncias obtidas contemplam condutores que residem em três municípios, a capital Maceió, Rio Largo e Marechal Deodoro por definição de processo interno do Detran-AL, totalizando 43.750 condutores no ano. Já as clínicas credenciadas ao Detran-AL, todas elas situam-se na capital Maceió.

Inicialmente, na Seção 5.1 descreve-se todas as bibliotecas relevantes como também a infraestrutura utilizada nos testes. Na Seção 5.2, analisa-se os resultados decorrente da aplicação da rede neural em relação aos ajustes na grafia dos bairros dos condutores. Concluindo o trabalho em relação aos bairros, a Seção 5.3, descreve um estudo em relação aos bairros normalizados. Na Seção 5.4 os resultados da aplicação do algoritmo para a resolução do PAD são analisados. Na Seção seguinte, analisa-se os resultados da implementação do PAD+. Por fim e não menos importante, a Seção 5.5 é realizada a análise de sensibilidade do PAD.

### 5.1 Ferramentas

Como ferramenta principal para a resolução dos modelos (PAD e PAD+) apresentados a seguir, utilizou-se a biblioteca de software de otimização CPLEX<sup>®</sup> da IBM<sup>®</sup>, com a linguagem de programação C++, assim como para obter os valores duais para a realização da análise de sensibilidade.

A linguagem Python foi utilizada para o desenvolvimento de:

- Consumo dos dados do Detran-AL através de uma integração via webservice;



- Consumo da API de geolocalização do Google Maps;
- Cálculo da matriz de custo de deslocamento;
- Aplicações de técnicas de rede neural.

O cálculo das distâncias e a aplicação dos algoritmos dos modelos (PAD e PAD+) foram executados em um computador com sistema operacional Ubuntu 18.04, com arquitetura de 64 bits, 4 GB de RAM e processador Intel Core i5-4210 1.70 GHz.

O treinamento da rede neural e a normalização dos nomes dos bairros foram executados em um computador com sistema operacional Ubuntu 16.04 de 64bits, Intel Core i7-7500U 2.7 Ghz com 16GB de memória RAM.

## 5.2 Treinamento e resultados da rede neural

Para treinar a LSTM bidirecional, foi realizado o levantamento dos nomes dos bairros utilizados nos exames pelo Detran-AL na cidade de Maceió e regiões próximas. O levantamento gerou um total de 76 bairros, que representarão as classes do treinamento. Por se tratar de uma quantidade consideravelmente alta de classes, a função de erro utilizada foi uma variação da *categorical cross-entropy*, conhecida como *sparse categorical cross-entropy*, descrita pela Equação (5.1). A saída  $\hat{y}$  é o valor fornecido pelo classificador,  $y$  é a saída esperada e  $N$  é o total de classes. A Equação (5.2) corresponde à função Sigmóide para ativação, que retorna valores  $v \in [0, 1]$  normalizados para compatibilidade com a função de erro.

$$L(\hat{Y}) = -\frac{1}{N} \sum_k^N [y_k \log(\hat{y}_k) + (1 - y_k) \log(1 - \hat{y}_k)] \quad (5.1)$$

$$A(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5.2)$$

A rede neural “aprende” modificando seus pesos para minimizar a função de erro, achando um mínimo local ou global através de retro-propagação, que por sua vez utiliza o gradiente da função de erro. Como calcular o gradiente a cada iteração pode ter considerável custo computacional, o otimizador ADAM (Kingma and Ba, 2014) foi utilizado para convergências mais rápidas para um mínimo da função de erro. Na arquitetura da rede neural (Figura 5.1), foram utilizadas quatro camadas ocultas bidirecionais LSTM, todas com 80 células, função de ativação linear e mescladas através de operações de soma. Na camada de saída foi utilizado uma camada densa com 76 unidades, que corresponde a quantidade de classes do conjunto de dados.

A taxa de aprendizado usada foi de  $10^{-4}$  para 3500 épocas, nas quais uma base de dados foi percorrida em lotes de tamanho 128. A base de treino foi criada artificialmente e contém, entre instâncias corretas, quantidades extensivas dos nomes das 76 classes com erros de grafia e abreviações. O processo de criação da base visa abranger as ocorrências mais comuns observadas

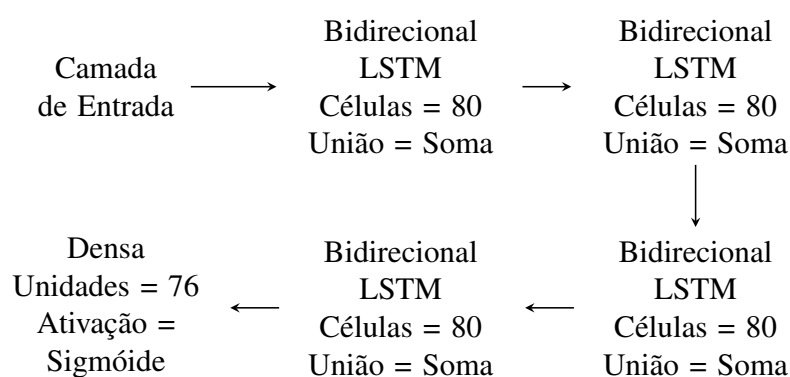


Figura 5.1: Arquitetura da rede neural usada.

na base do Detran-AL e além disso, para cada classe do problema (nome correto dos bairros), adicionar exemplos de abreviações, assim como um número considerável de exemplos de erros ortográficos.

As abreviações visam cobrir o maior número possível de casos em que apenas a primeira letra de uma palavra é escrita (por exemplo *Marechal Deodoro*  $\implies$  *M Deodoro* | *Marechal D*). Os erros são gerados através da substituição ou omissão de caracteres escolhidos de forma aleatória, considerando no máximo dois por palavra e sendo aplicados também às palavras com abreviação (exemplo *Marechal Deodoro*  $\implies$  *Msrechal Deodoro* | *Mardchwl D* | *Marechal Deodoro*).

Como resultado, uma base de treino com 1855920 instâncias foi gerada e a base de teste foi retirada de casos reais do processo de atribuição de condutores em clínicas. Para garantir a obtenção do melhor modelo resultante do treinamento dentre todas as épocas, utilizou-se a *EarlyStopping*, que é uma função utilizada ao final de cada época nos testes de validação para salvar o modelo de melhor acurácia. O treinamento da rede neural foi feito em uma máquina com uma GPU NVIDIA GTX 1080 Ti e os resultados de erro e acurácia podem ser observados na Figura 5.2. O modelo resultante conseguiu atingir uma acurácia de aproximadamente 92% na base de validação.

### 5.3 A base do DETRAN-AL

Ainda decorrente do trabalho realizado na Seção 5.2, pode-se realizar um estudo em busca de alguma relação entre os bairros dos condutores, números de exames e bairros que sediam clínicas credenciadas ao órgão. Tendo em vista o contexto de administração pública, este estudo pode revelar alguns *insights* e ajudar os administradores do órgão a tomarem algumas decisões de uma perspectiva social.

Iniciando com a Figura 5.3, a mesma mostra o número de exames realizados por bairro (incluindo o município de Rio Largo e Marechal Deodoro<sup>1</sup>), categorizados pelos meses do ano

<sup>1</sup>Por decisão administrativa do órgão o município de Rio Largo e Marechal Deodoro também pertencem à Maceió.

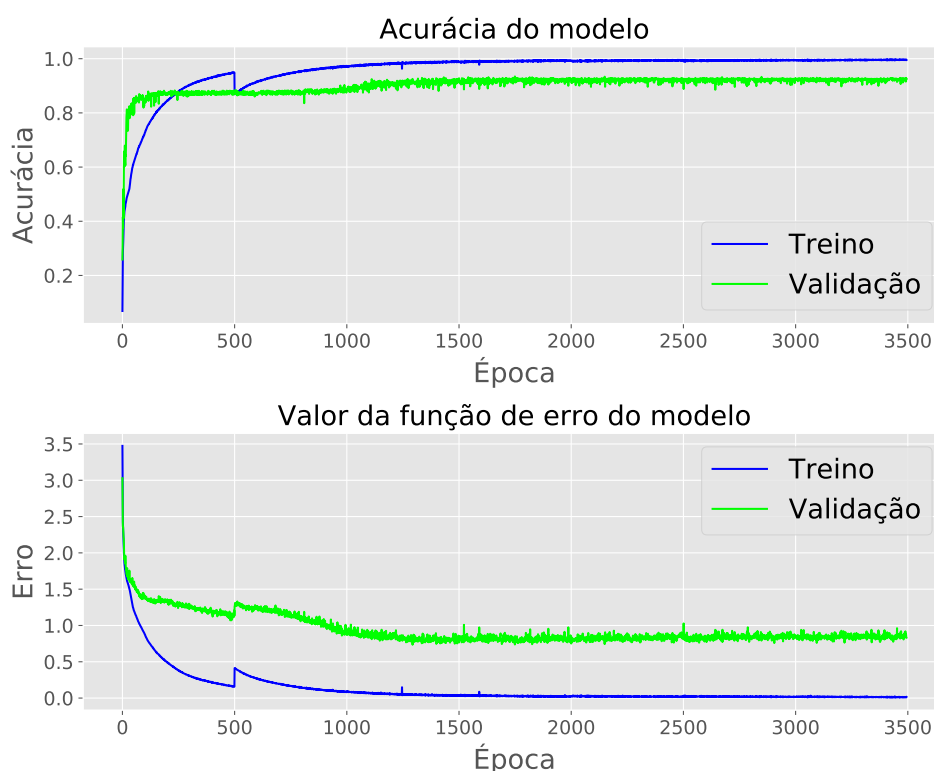


Figura 5.2: Acurácia e valor da função de perda ao longo das 3500 épocas do treinamento

de 2018. Nesta Figura, pode-se visualizar quais bairros tiveram mais condutores que realizaram exames no ano. Observa-se que os bairros: Ponta Verde, Tabuleiro dos Martins e Jatiúca se destacaram dos demais e possuíram respectivamente mais de 3 mil exames durante o ano. Nesta mesma figura pode-se observar também, que o bairro do Benedito Bentes, o mais populoso de Maceió segundo o IBGE, se mostra um bairro de pouca expressividade em números de condutores que realizaram exames no ano.

A Figura 5.4, mostra o número de exames realizados nos bairros que têm pelo menos uma ou mais clínica sediada. De forma evidente, visualiza-se que o bairro do Farol recebeu mais de 20 mil exames e se destacou em relação aos demais por conta de ter o maior número de clínicas sediada. Outros bairros como Poço, Prado e Trapiche da Barra tiveram um número elevado e realizaram mais de 4 mil exames, pelo fato de se ter uma demanda alta na parte baixa da cidade. O bairro da Jatiúca recebeu um número pequeno de condutores por conta da existência de apenas uma clínica no bairro, mesmo o *stacked bar* da Figura 5.3 demonstrando a demanda de mais de 3 mil condutores.

Com a análise destas duas figuras, conclui-se que existe uma discrepância na distribuição da quantidade de clínicas por bairro em função da demanda de exames e pode-se observar uma demanda muito alta por clínicas em alguns bairros de Maceió. O bairro da Ponta Verde por exemplo, foi o bairro de onde saiu mais condutores para realizar exames e não tem nenhuma clínica sediada no mesmo. No bairro da Jatiúca existe apenas uma clínica e por conta da restri-

ção de equitatividade de exames não pôde receber um número maior de condutores. Observa-se também, que a parte alta da cidade necessita de uma ou mais clínicas, pois o bairro Tabuleiro dos Martins foi o segundo maior bairro em números de exames e não existe nenhuma clínica na parte alta da cidade.

A partir desta análise, os gestores do órgão podem investigar algumas demandas sociais específicas e até mesmo trabalhar com políticas públicas para atender estas demandas, assim como se subsidiar de informações para realizar campanhas em locais específicos onde se concentram o maior número de condutores, atingindo um público real e diminuindo o custo.

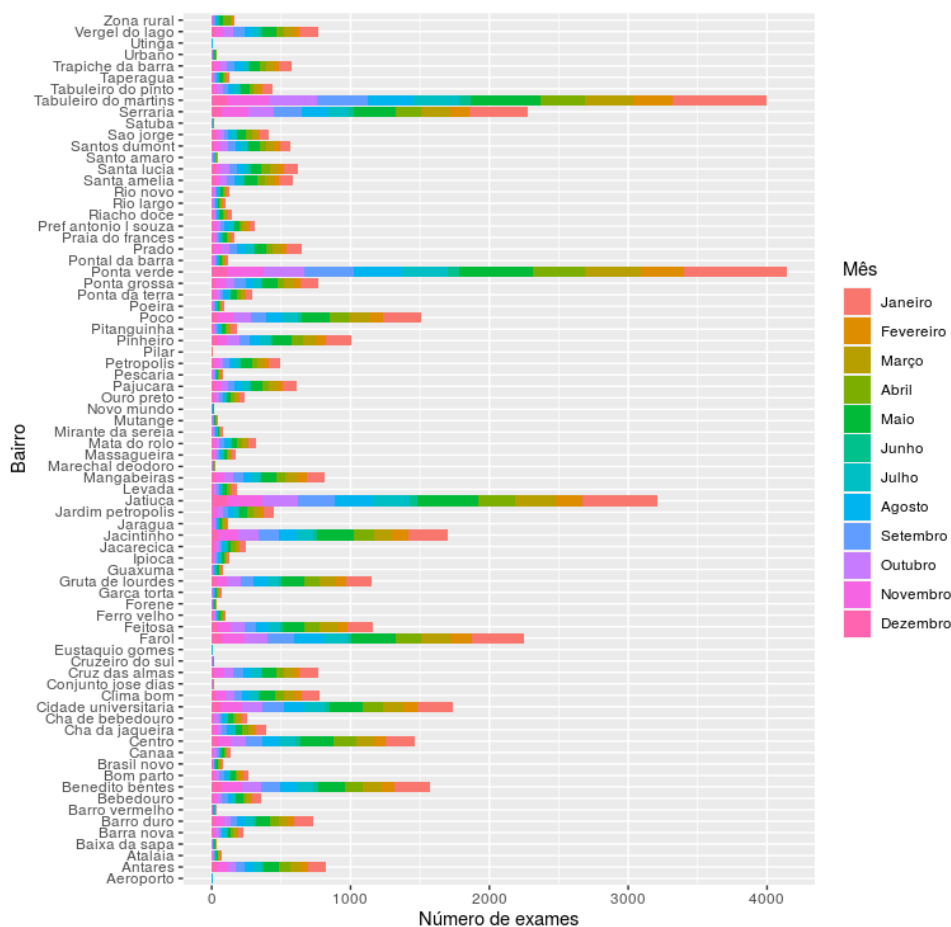


Figura 5.3: *Stacked Bar* da quantidade de condutores por bairro de 2018.

## 5.4 Aplicação Algoritmo Exato

Com os dados de um ano de agendamentos realizados pelo Detran-AL, foram obtidos dois agendamentos: (i) o agendamento realizado de fato pelo Detran-AL durante o ano e (ii) o agendamento que seria realizado pela proposta. O custo computacional gasto na solução do PAD não foi superior a 0,04 segundos para cada mês, mostrando a viabilidade do cálculo da solução.

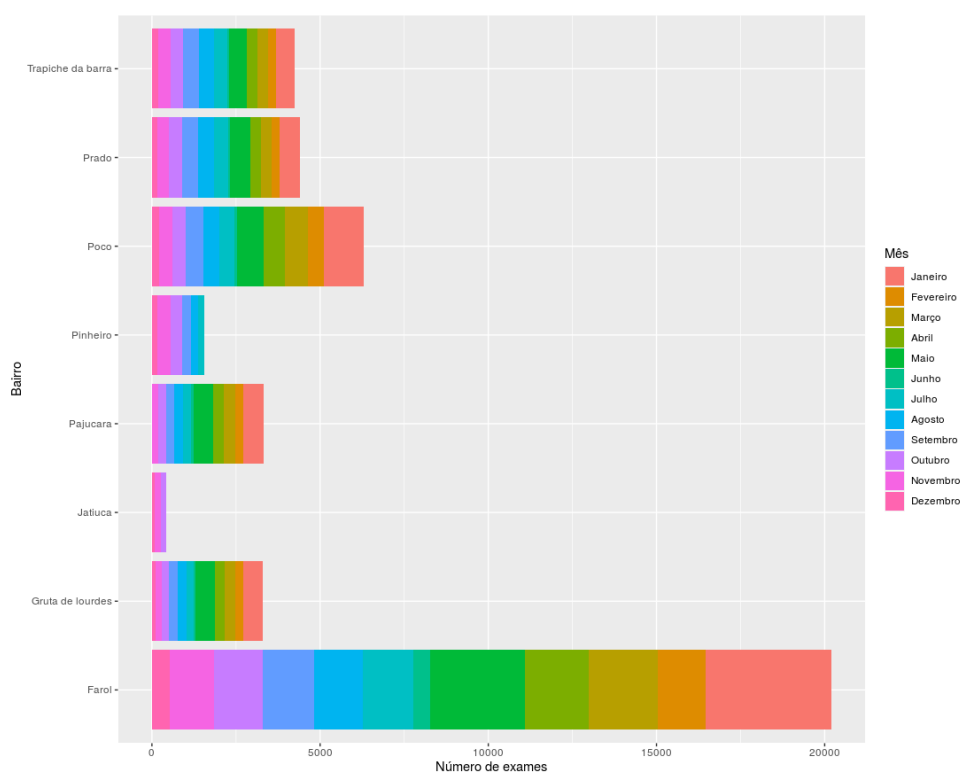


Figura 5.4: *Stacked Bar* da quantidade de exames por bairro que tem clínica sediada de 2018.

A Tabela 5.1 apresenta uma comparação entre os custos totais dos dois agendamentos em cada mês de 2018. Da esquerda para a direita as colunas indicam: o mês do agendamento, o número de condutores no mês, o número de clínicas habilitadas no mês, o custo do agendamento realizado pelo Detran-AL (em quilômetros), o custo do agendamento realizado pela proposta (em quilômetros) e a diferença relativa entre os dois custos, respectivamente.

Pode-se observar que o agendamento proposto obteve um custo bem inferior ao custo do agendamento realizado pelo Detran-AL. O custo médio dos agendamentos durante o ano foi de 30437,1 e 21276,2 km para os agendamentos do Detran-AL e o proposto, respectivamente (diferença aproximada de 30,07%). Além disso, durante os doze meses avaliados, a solução aplicada produziu uma redução de custo entre 26,67% e 34,39%, correspondentes aos meses de junho e setembro, respectivamente. Note que, a redução em setembro foi superior a um terço do custo do agendamento realizado.

A Tabela 5.2 apresenta uma comparação entre os custos por condutor dos agendamentos em cada mês de 2018. Da esquerda para a direita as colunas indicam: o mês do agendamento, o custo médio por condutor do agendamento realizado pelo Detran-AL (em quilômetros), o custo máximo de um condutor com o agendamento do Detran-AL, o custo médio por condutor do agendamento realizado pela proposta (em quilômetros) e o custo máximo de um condutor com o agendamento proposto, respectivamente.

Com o resultado do custo por condutor, pode-se observar que o agendamento proposto obteve um custo médio bem inferior ao custo do agendamento realizado pelo Detran-AL. O custo

Tabela 5.1: Custos totais dos agendamentos em cada mês de 2018.

Mês	Condutores	Clínicas	Custo real	Custo Proposta	Diferença em %
Jan.	7276	10	59699,2	42550,9	28,72
Fev.	2837	10	23152,5	16441,5	28,99
Mar.	4002	10	33250,2	23724,4	28,65
Abr.	3795	10	31374,9	22372,6	28,69
Mai.	5905	10	48487,9	34379,2	29,10
Jun.	811	11	6879,9	5044,6	26,68
Jul.	3416	10	29441,2	21001,1	28,67
Ago.	3548	10	29359,9	20550,4	30,01
Set.	3801	18	32356,5	21228,3	34,39
Out.	3547	18	30239,9	20212,1	33,16
Nov.	3396	18	28920,8	19504,5	32,56
Dez.	1416	16	12082,6	8305,9	31,26
Média			30437,1	21276,2	30,07

médio por condutor dos agendamentos realizados pelo Detran-AL variou de 8,16 a 8,52 km, e variou de 5,54 a 6,22 km, para o agendamento proposto. Além disso, no agendamento do Detran-AL, em quase todos os meses um condutor chegou a se deslocar por 55,19 km. Neste caso, ocorreu agendamento de condutores de outra cidade em um clínica no lado oposto de Maceió.

Tabela 5.2: Custos por condutor dos agendamentos em cada mês de 2018.

Mês	Detran Media	Detran Max	PAD Média	PAD Max
Jan.	8,20	55,19	5,84	26,20
Fev.	8,16	55,19	5,79	26,20
Mar.	8,30	55,19	5,92	26,20
Abr.	8,26	55,19	5,89	26,20
Mai.	8,22	55,19	5,82	26,20
Jun.	8,49	55,19	6,22	26,20
Jul.	8,62	55,19	6,14	26,20
Ago.	8,27	55,19	5,79	26,20
Set.	8,51	55,19	5,58	25,10
Out.	8,52	55,19	5,69	25,10
Nov.	8,51	55,19	5,74	25,10
Dez.	8,53	37,69	5,86	25,10

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram o *boxplot* e histograma dos deslocamentos dos condutores em cada mês, respectivamente. O *boxplot* evidencia o número reduzido de *outliers* da alocação proposta em relação à alocação do Detran-AL. Enquanto que, com o histograma, percebe-se que a alocação proposta apresenta um número maior de modas que a alocação implementada pelo Detran-AL. Além disso, em todos os meses, a principal moda do histograma da solução proposta se encontra mais a esquerda, próxima do custo 0.

Finalizando, tem-se o *boxplot* da Figura 5.7 que mostra a distância percorrida dos condutores em relação aos bairros das clínicas que foram alocados pelos algoritmos da solução atual de alocação do DETRAN e da solução do PAD respectivamente. A princípio observa-se uma



Figura 5.5: *Boxplot* da alocação proposta e da alocação do Detran-AL.

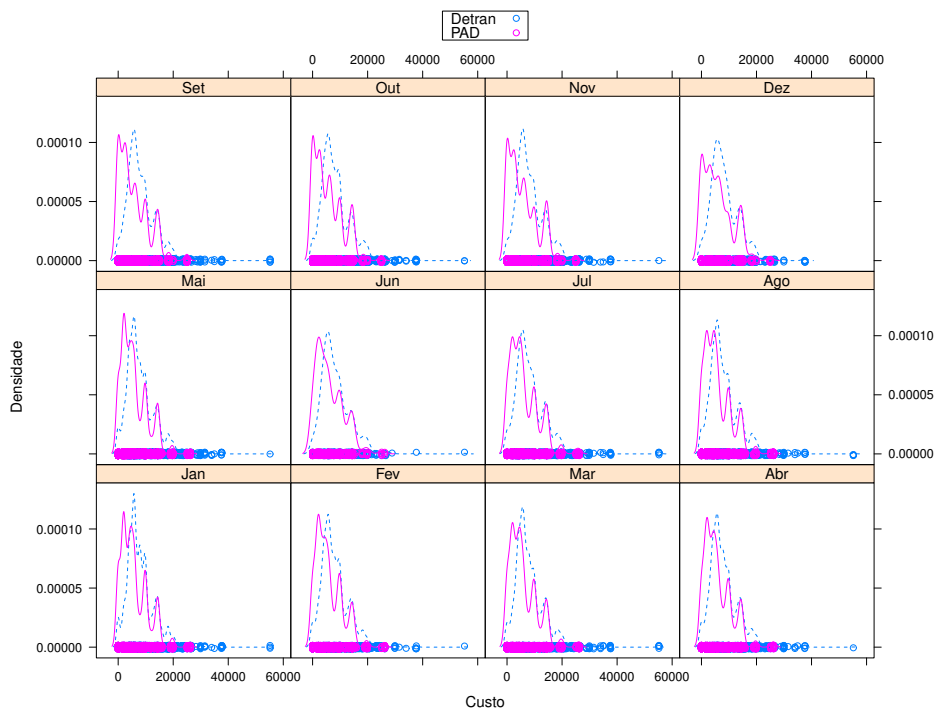


Figura 5.6: Histograma da alocação proposta e da alocação do Detran-AL.

redução da presença de *outliers* na alocação do PAD. Na alocação do PAD, o *boxplot* evidencia mediana 0 para o bairro da Jatiúca, demonstrando que todos os condutores que foram alocados na clínica do bairro saíram do mesmo, assim como o bairro da Pajuçara, com mediana quase zero. Isso evidencia a importância da existência de clínicas credenciadas ao DETRAN

em bairros com número de condutores considerável, confirmando o estudo da Seção 5.3.

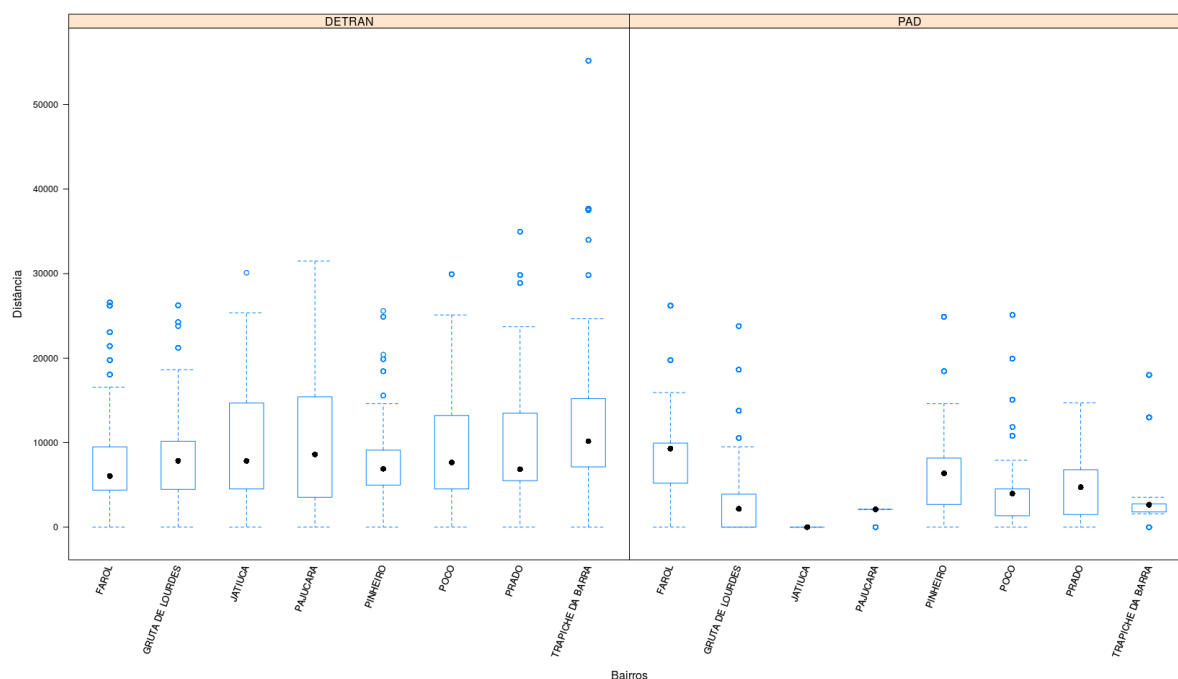


Figura 5.7: *Boxplot* da distância percorrida dos condutores que foram alocados nos bairros das clínicas de 2018.

## 5.5 Análise de Sensibilidade

Nesta Seção, é realizada uma análise de sensibilidade (ver Seção 2.5) em relação às mudanças nos valores das restrições relativas ao vetor de recursos ( $b_i$ ) do PAD. O modelo apresentado na Seção 4.2, tem como uma de suas restrições o limite mínimo e máximo de atribuição de condutores às clínicas, estas restrições (4.3) e (4.4) são limitadas por  $k$  e  $k + 1$ , em que  $k = \left\lfloor \frac{|M|}{|C|} \right\rfloor$  que é a razão de  $|M|$  condutores por  $|C|$  clínicas. Note que essa análise só é possível pela característica de total unimodularidade da matriz de coeficientes do PAD.

O intuito desta análise, é verificar quais clínicas durante o período estudado têm mais relevância na função objetivo caso fosse permitido alocar mais um condutor, ou seja, aumentando o valor de  $k$  em uma unidade. Como visto na Seção 2.5, o preço-sombra é a quantidade de melhoria no valor da função objetivo devido à mudança de uma unidade de recursos de uma restrição particular (Alkubaisi, 2017).

A Figura 5.8 mostra o *boxplot* dos preços-sombra de todas as clínicas em cada mês do ano de 2018 obtidos através do CPLEX<sup>®</sup>. Note que, ao visualizar uma clínica com o preço-sombra de -2000, pode-se inferir que caso fosse permitido alocar mais um condutor nesta clínica a função objetivo do PAD seria reduzida em exatamente 2 km. Nesta figura, pode-se observar que as clínicas PAJUÇARA\_1, Gruta\_1, PINHEIRO\_1, JATIUCA\_1, POÇO\_1 e POÇO\_2 têm custo



reduzido negativo na maioria dos meses avaliados. Dessa forma, uma ampliação do número de vagas de condutores para essas clínicas iria minimizar a distância total de deslocamento dos condutores. Pode-se observar, também, que as clínicas com preço-sombra positivo produzem um efeito negativo na função objetivo quando o valor de  $k$  é incrementado em uma unidade. O *boxplot* mostra que as clínicas FAROL\_7, PRADO\_1, PRADO\_2, TRAPICHE\_1 e TRAPICHE\_2 não contribuem com a minimização da função objetivo, já que para essas clínicas, a mediana do preço-sombra é positiva.

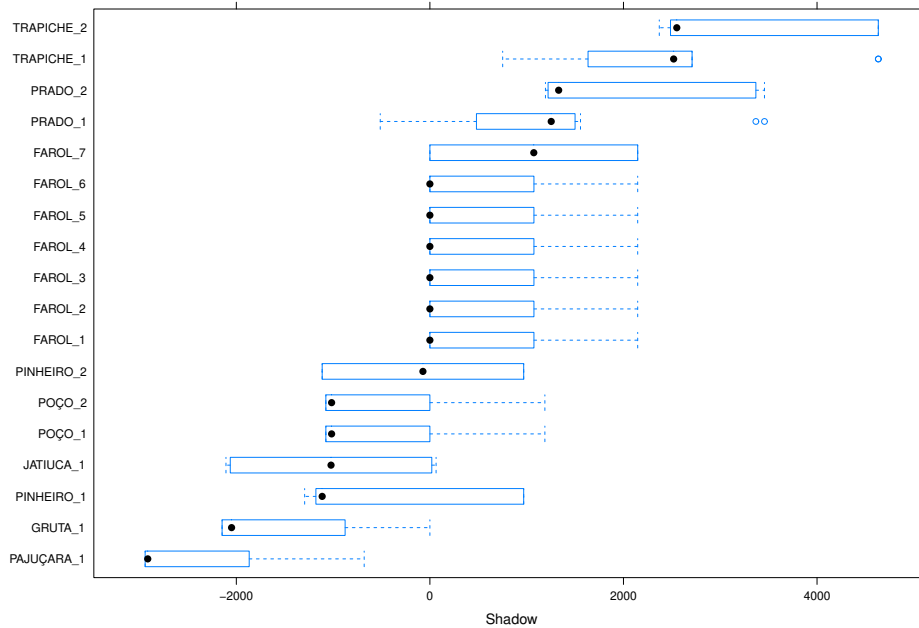


Figura 5.8: Boxplot shadow price por clínica ano 2018

## 5.6 Aplicação Algoritmo Exato com Sugestão de Novas Clínicas

Dada as condições explanadas na Seção 5.4 e a partir das instâncias obtidas do Detran-AL no período de um ano, foi determinado o custo ótimo em relação a primeira modelagem do problema. Com a nova formulação (o PAD+), foi determinado o novo custo ótimo com a possibilidade da adição de uma possível nova clínica. Posteriormente, os custos dos dois modelos serão comparados — o custo mínimo inicial e o custo dos agendamentos reais realizados pelo Detran-AL.

A Tabela 5.3 apresenta os custos totais (de todos os condutores às respectivas clínicas) dos três agendamentos em cada mês de 2018. Da esquerda para a direita, as colunas indicam: mês do agendamento, número de condutores no mês, número de clínicas habilitadas no mês, custo do agendamento pelo Detran-AL, custo ótimo do agendamento (proposta com a formulação

inicial) e o custo ótimo do agendamento com o acréscimo de uma nova clínica (proposta com a nova formulação). Todas as unidades das colunas estão em quilômetros. A Tabela 5.4 apresenta a diferença relativa entre os três custos, respectivamente.

É possível observar, pela Tabela 5.4, que a nova formulação obteve um custo ótimo muito inferior ao agendamento feito pelo Detran-AL, com redução de custo médio de 67,16%. Mostrando o impacto de uma possível adição de uma nova clínica em um bairro estratégico — note que o bairro é escolhido pelo modelo. Além disso, é notória a redução de custo em relação a proposta inicial. Em média, o PAD+ foi capaz de reduzir em 53,22% em relação ao PAD.

Essas reduções mostram a viabilidade da nova proposta e a melhoria que pode ser feita ao sistema de atribuição do Detran-AL que, caso uma nova clínica se credencie e escolha sua localização de acordo com esse modelo.

Tabela 5.3: Custos totais dos agendamentos em cada mês de 2018 com sugestão de clínica.

Mês	Condutores	Clínicas	Custo real(1)	Custo Proposta(2)	Custo com Sugestão(3)
Jan.	7276	10	59699,2	42550,9	23702,4
Fev.	2837	10	23152,5	16441,5	8055,5
Mar.	4002	10	33250,2	23724,4	11375,4
Abr.	3795	10	31374,9	22372,6	16065,8
Mai.	5905	10	48487,9	34379,2	16533,3
Jun.	811	11	6879,9	5044,6	2200,6
Jul.	3416	10	29441,2	21001,1	9864,2
Ago.	3548	10	29359,9	20550,4	9741
Set.	3801	18	32356,5	21228,3	7829,4
Out.	3547	18	30239,9	20212,1	7874,5
Nov.	3396	18	28920,8	19504,5	7120,3
Dez.	1416	16	12082,6	8305,9	3200
	Média		30437,1	21276,2	10296,8

Tabela 5.4: Diferença percentual entre os custos, dada a sequência da tabela 5.3

	Diferença entre (1) e (2)	Diferença entre (1) e (3)	Diferença entre (2) e (3)
	28,72	60,30	44,30
	28,99	65,21	51,0
	28,65	65,79	52,05
	28,69	48,79	28,19
	29,10	65,90	51,91
	26,68	68,01	56,38
	28,67	66,50	53,03
	30,01	62,82	52,60
	34,39	75,80	63,12
	33,16	73,96	61,04
	32,56	75,38	63,49
	31,26	73,52	61,47
Média	30,07	67,16	53,22

Portanto, constata-se que o modelo real de rodízio do Detran-AL necessita de uma otimização eficaz, capaz de melhorar o custo de deslocamento de cada condutor. Este modelo de

otimização pode fazer com que o sistema de alocação do Detran-AL, conserve as restrições impostas pela legislação como também valorize mais o condutor, otimizando ainda mais o seu deslocamento, conseqüentemente diminuindo custos financeiros e de tempo, melhorando assim a qualidade dos serviços do órgão prestados ao cidadão.

A Tabela 5.5 apresenta os bairros escolhidos para sediarem uma provável nova clínica e a quantidade de meses que tal bairro foi escolhido pelo modelo PAD+. Observa-se que na maioria dos meses, os bairros escolhidos pertenceram a zona central da cidade.

A Tabela 5.6, demonstra a relação entre a análise de sensibilidade realizada na Seção 5.5 com o algoritmo proposto, confirmando ainda mais a viabilidade do modelo. Para o entendimento mais completo dessa Tabela, é necessário entender que, Maceió é um município, constituído de cinquenta bairros e oito regiões administrativas (RA). Os cinquenta bairros e suas regiões estão definidos pela Lei municipal 4.952, de 2000 (Maceió, 2000). Essas regiões administrativas são elencadas de RA-1 até RA-8 e são definidas pelas proximidades dos bairros, como mostra a Figura 5.9. A partir deste entendimento, pode-se observar na tabela, onde a primeira coluna descreve as regiões administrativas que tiveram bairros sugeridos pelo PAD+, a segunda coluna mostra a quantidade de bairros sugeridos e a última coluna representa o número de clínicas que tiveram preço-sombra que mais influenciaram no estudo da análise de sensibilidade. Com isso, pode-se observar que todas as clínicas, sem exceção, que tiveram um preço-sombra negativo — ou seja, que diminuísse o custo total de deslocamento — estão na mesma região administrativa dos bairros sugeridos no PAD+. A região RA-1 teve 3 bairros sugeridos pelo PAD+ e 4 bairros com preço-sombra negativo, já a região RA-3 teve 6 bairros sugeridos pelo PAD+ e 2 bairros com preço-sombra negativo. Isso confirma a relação das duas técnicas.

Além disso, note que as clínicas GRUTA\_1 e PINHEIRO\_1 se localizam nos bairros Gruta e Pinheiro respectivamente, são bairros vizinhos e estão na mesma região administrativa que o bairro da Pintaguinha e ambos tiveram preço-sombra negativo.

Tabela 5.5: Bairros escolhidos.

<b>Bairro</b>	<b># meses que o bairro foi escolhido</b>
Pitanguinha	3
Pajuçara	3
Canaã	2
Mutange	1
Jardim Petrópolis	1
São Jorge	1
Centro	1

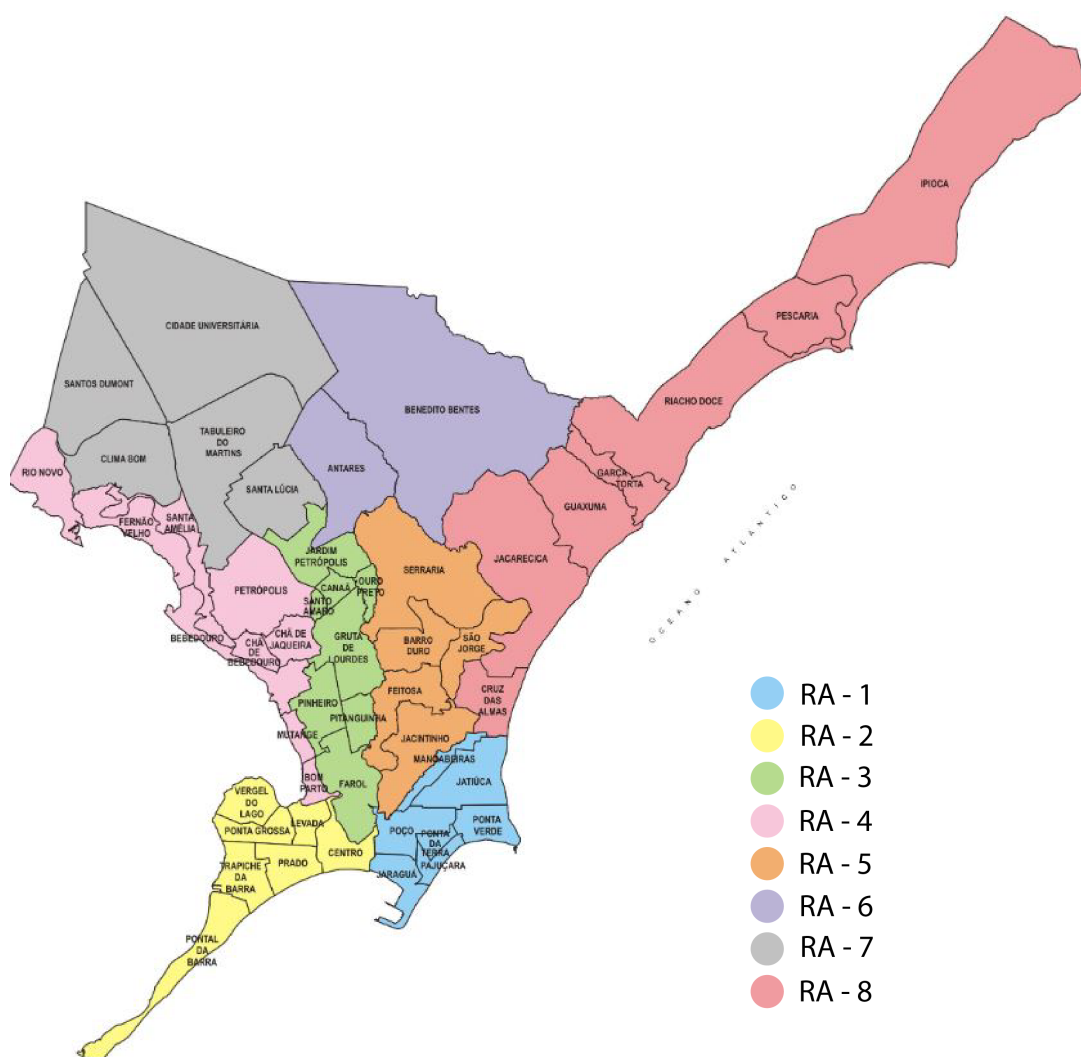


Figura 5.9: Mapa de Maceió dividido por regiões administrativas

Tabela 5.6: Bairros sugeridos e clínicas com mediana do preço-sombra negativo por RA.

Regiões Adm.	Bairros sugeridos pelo PAD+	Clínicas com preço-sombra negat.
RA-1	3	4
RA-2	1	0
RA-3	6	2
RA-4	1	0
RA-5	1	0

# 6

## Considerações Finais

### 6.1 Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma proposta de alocação de condutores em clínicas para processos que exigem laudo de exame clínico e/ou psicológico no Detran-AL. A proposta consiste em um sistema que classifica os bairros dos condutores e atribui os condutores às clínicas de forma a minimizar o custo da distância total de deslocamento. Para isso, utilizou-se uma abordagem de classificação de texto com uma rede neural recorrente, a LSTM bidirecional e dois algoritmos de otimização utilizando programação matemática.

Foram realizados testes computacionais em uma base de dados do Detran-AL para a avaliação da solução proposta. Foi constatado que o modelo utilizado na rede neural conseguiu atingir uma acurácia de aproximadamente 92% na base de validação. Quando comparado o primeiro algoritmo de otimização Seção 5.4 com a solução atual do Detran-AL, que se utiliza de algoritmo de rodízio, a solução do problema de atribuição abordado obteve cerca de 30,07% de redução de custo quando comparada com a alocação realizada pelo Detran-AL. Além disso, foi observado que na alocação realizada pelo sistema de rodízio atual, os condutores chegaram a se deslocar por 55,19 km, enquanto que na solução proposta o deslocamento máximo foi de 26,20 km. Com isso, foi visto que a solução proposta tem um desempenho superior em termos de qualidade da solução e apresentou um baixo custo em termos de tempo computacional.

O segundo algoritmo, que tem como objetivo sugerir a criação de uma nova clínica em um bairro estratégico, visando minimizar ainda mais o custo de deslocamento dos condutores, obteve um custo ótimo muito inferior ao da alocação feita pelo algoritmo atual, com redução de custo médio de 67,16%, confirmando o impacto da criação de uma nova clínica. Quando comparado ao algoritmo inicial, obteve-se uma diferença média de 53,22%.

Foi realizada uma análise de sensibilidade afim de identificar quais as clínicas influenciam de forma positiva o resultado obtido do PAD caso ocorresse alguma mudança nos parâmetros do modelo.

Por fim, foi feita uma análise em relação aos bairros com o objetivo de subsidiar informações significativas para o contexto da gestão pública e em outras aplicações como outros problemas de atribuição e facilidades.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, serão buscadas novas formas de acelerar o método proposto para obtenção de uma melhor performance. Em relação ao cálculo da distância entre condutor e clínica, será levado em consideração o logradouro do condutor, aumentando assim a precisão da matriz de custo. Além de se buscar novas restrições do problema, como por exemplo, restringir a distância que um condutor pode se deslocar como também adicionar uma restrição de prioridade de idade.

Com relação às instâncias, não foi estudado se os dados amostrais trazem evidência que apoiem ou não uma hipótese estatística formulada, isto é, se o dados seguem alguma distribuição de probabilidade. Uma sugestão de trabalhos futuros, é o estudo estatístico dos dados e a elaboração de uma versão online do problema, como por exemplo [Meyerson \(2001\)](#).

Como demonstrado nesta obra, para fins acadêmicos, foi utilizado o *solver* CPLEX® 12.9 da IBM®. Visando a aplicabilidade em um ambiente de produção nos sistemas do DETRAN-AL, pretende-se implementar os algoritmos propostos com o *solver* como o *COIN Branch and Cut* (CBC). Com isso, pretende-se otimizar os serviços do departamento com o menor custo possível em relação à softwares de otimização.

## Referências bibliográficas

- Uwe Aickelin and Paul White. Building better nurse scheduling algorithms. *Annals of Operations Research*, 128(1):159–177, Apr 2004. ISSN 1572-9338.
- M.M. Alkubaisi. Shortcut methods for simplex-based sensitivity analysis of linear programming and related software issues. *International Journal for Quality Research*, 11: 209–220, 01 2017.
- Dimitris Bertsimas and John N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, Belmont, MA, 1997.
- BRASIL. Código de trânsito brasileiro. lei nº 9.503 de 23 de setembro de 1997, 1997. [Acesso em: 04/09/2018].
- Rainer Burkard, Mauro Dell’Amico, and Silvano Martello. *Assignment Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2009. ISBN 0898716632, 9780898716634.
- Gaétan Caron, Pierre Hansen, and Brigitte Jaumard. The assignment problem with seniority and job priority constraints. *Operations Research*, 47:449–, 06 1999.
- D. G. Cattrysse and L. N. van Wassenhove. A survey of algorithms for the generalized assignment problem. Econometric Institute Archives 272389, Erasmus University Rotterdam, 1990.
- Sebastián Ceria, Robert Bixby, Cassandra Mczeal, and Martin Savelsbergh. An updated mixed integer programming library: Miplib 3.0. *Optima*, 58, 12 1998.
- Halim Ceylan and Michael G.H Bell. Traffic signal timing optimisation based on genetic algorithm approach, including drivers’ routing. *Transportation Research Part B: Methodological*, 38(4):329 – 342, 2004. ISSN 0191-2615.
- CONSELHO FEDERAL DE MEDICINA. Dispõe sobre o exame de aptidão física e mental para condutores de veículos automotores que deverá ser realizado exclusivamente por médico. (diário oficial de união; poder executivo, Brasília, df, n. 94, 17 mai. 2002. seção 1, p. 111). resolução nº 1636/2002., 1997.

- Adriana B. da Silva. O método simplex e o método gráfico na resolução de problemas de otimização. Master's thesis, Universidade Federal de Goiás, Campus Avançado de Jataí, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Jataí - GO, 2016.
- Joachim R. Daduna and José M. Pinto Paixão. Vehicle scheduling for public mass transit — an overview. In Joachim R. Daduna, Isabel Branco, and José M. Pinto Paixão, editors, *Computer-Aided Transit Scheduling*, pages 76–90, Berlin, Heidelberg, 1995. Springer Berlin Heidelberg.
- George B. Dantzig. Discrete-variable extremum problems. *Operations Research*, 5(2): 266–288, 1957.
- George B. Dantzig and Mukund N. Thapa. *Linear Programming 1: Introduction*. Springer, 1997.
- M.F. Derhy. *Linear Programming, Sensitivity Analysis & Related Topics*. Pearson Education Limited, 2010. ISBN 9780273723417.
- V.M. Filho. Desenvolvimento e aplicação de algoritmos heurísticos ao problema de alocação de espaço físico. *Universidade Estadual de Maringá, Maringá*, 2008.
- Marshall L. Fisher, R. Jaikumar, and Luk N. Van Wassenhove. A multiplier adjustment method for the generalized assignment problem. *Management Science*, 32(9):1095–1103, 1986.
- M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979. ISBN 0716710455.
- Marco Cesar Goldberg and Henrique Pacca Loureiro Luna. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. 2005. ISBN 8535215204.
- A Hertz and N Lahrichi. A patient assignment algorithm for home care services. *Journal of the Operational Research Society*, 60(4):481–495, 2009.
- Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman. *Introdução à Pesquisa Operacional*. AMGH Editora Ltda, Porto Alegre, Brasil, 2013. ISBN 978-85-8055-118-1.
- Robert Jeroslow. An introduction to the theory of cutting-planes. volume 5 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 71 – 95. Elsevier, 1979.
- R. Jonker and A. Volgenant. A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems. pages 325–340. Computing, 1987.
- J. Kennington and Z. Wang. A shortest augmenting path algorithm for the semi-assignment problem. *Operations Research*, 40(1):178–187, 1992. ISSN 0030364X, 15265463.



- Izaz Khan, Norkhairul Bajuri, and imran abbas Jadoon. Optimal production planning for ici pakistan using linear programming and sensitivity analysis. *International Journal of Business and Social Science*, 12 2011.
- Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.
- Achim Koberstein and Uwe Suhl. Progress in the dual simplex method for large scale lp problems: Practical dual phase 1 algorithms. *Computational Optimization and Applications*, 37:49–65, 03 2007.
- H. W. Kuhn. The hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2(1-2):83–97, 1955.
- A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3):497–520, 1960.
- Ettore Lanzarone and Andrea Matta. A cost assignment policy for home care patients. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 24:465–495, 2012.
- Helena R. Lourenço, José P. Paixão, and Rita Portugal. Multiobjective metaheuristics for the bus driver scheduling problem. *Transportation Science*, 35(3):331–343, 2001.
- Prefeitura Municipal Maceió. Lei nº 4.952 de 06 de janeiro de 2000, 2000.
- Nelson Maculan and Marcia H. Costa Fampa. *Otimização Linear*. Unb, 2006.
- H. Martinez-Alfaro, J. Minero, G. E. Alanis, N. A. Leal, and I. G. Avila. Using simulated annealing to solve the classroom assignment problem. In *Proceedings Mexico-USA Collaboration in Intelligent Systems Technologies.*, pages 370–377, 1996.
- Victor Teixeira de Melo Mayrink and Gustavo Peixoto Silva. OtimizaÃ§Ã£o rodÃ¡zio de tripulaÃ§Ã£o sistema de transporte pÃ¡. *Journal of Transport Literature*, 7:192 – 213, 07 2013.
- Adam Meyerson. Online facility location. pages 426– 431, 11 2001. ISBN 0-7695-1116-3.
- Ibrahim H. Osman. Heuristics for the generalised assignment problem: Simulated annealing and tabu search approaches. *OR Spectr.*, 17(4):211–225, December 1995. ISSN 0171-6468.
- M Padberg and G Rinaldi. Optimization of a 532-city symmetric traveling salesman problem by branch and cut. *Operations Research Letters*, 6(1):1–7, 1987. ISSN 0167-6377.
- Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

- David W. Pentico. Assignment problems: A golden anniversary survey. *European Journal of Operational Research*, 176(2):774–793, 2007. ISSN 03772217.
- Álvaro N. Prestes. *Uma Análise Experimental de Abordagens Heurísticas Aplicadas ao Problema do Caixeiro Viajante*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de ciências exatas e da terra - CCET, Curso de pós-graduação em sistemas e computação, Rio Grande do Norte, 2006.
- R. Qu, E. K. Burke, B. McCollum, L. T. G. Merlot, and S. Y. Lee. A survey of search methodologies and automated system development for examination timetabling. *Journal of Scheduling*, 12:115–16, 2009.
- Silvano Martello Rainer Burkard, Mauro Dell’Amico. *Assignment Problems*. Philadelphia, PA, 2009.
- Charles S. Newton Ruhul A. Sarker. *Optimization Modelling A Practical Approach*. 2008. ISBN 1420043102.
- Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley Sons, Inc., USA, 1986. ISBN 0471908541.
- Mike Schuster and Kuldip K. Paliwal. Bidirectional Recurrent Neural Networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(11):2673–2681, nov 1997.
- Sørøvik T. Storøy, S. Massively parallel augmenting path algorithms for the assignment problem. *Computing*, 40(59):1–16, 1997.
- Hamdy A. Taha. *Pesquisa Operacional. 8.ed.* Pearson, São Paulo, 2008. ISBN 9788576051503.
- Gerald L. Thompson. A recursive method for solving assignment problems. In P. Hansen, editor, *Annals of Discrete Mathematics (11)*, North-Holland Mathematics Studies, pages 319–343. North-Holland, 1981.
- A. Volgenant. Linear and semi-assignment problems: A core oriented approach. *Computers & Operations Research*, 23(10):917 – 932, 1996. ISSN 0305-0548.
- D.F. Votaw and A. Orden. The personnel assignment problem, symposium on linear inequalities and programmng. *SCOOP 10, US Air Force*, pages 115–16, 1952.
- Laurence A. Wolsey. *Integer Programming*. Wiley-Interscience, New York, NY, 1998.
- Semih Yalçındağ, Andrea Matta, Evren Şahin, and J. George Shanthikumar. The patient assignment problem in home health care: using a data-driven method to estimate the travel times of care givers. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 28:304–335, 2016.