UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ERINALDO MARTINS DOS SANTOS

CONHECENDO A MATEMÁTICA PARA COMUNICAR O PENSAMENTO MATEMÁTICO: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICO-FILOSÓFICA

Maceió - AL
2021

ERINALDO MARTINS DOS SANTOS

CONHECENDO A MATEMÁTICA PARA COMUNICAR O PENSAMENTO MATEMÁTICO: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICO-FILOSÓFICA

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, apresentado à banca examinadora como pré-requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Lúcia Cristina Silveira Monteiro

Maceió - AL
2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237c Santos, Erinaldo Martins dos.
Conhecendo a matemática para comunicar o pensamento matemático : uma perspectiva histórico-filosófica / Erinaldo Martins dos Santos. - 2021.
29 f. : il.

Orientadora: Lúcia Cristina Silveira Monteiro.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 28-29.

1. Matemática - Pensamento. 2. Matemática - Interpretação. 3. Comunicação. 4. Matemática - Filosofia. 5. Matemática - História. I. Título.

CDU: 510.21

ERINALDO

CONHECENDO A MATEMÁTICA PARA COMUNICAR O PENSAMENTO MATEMÁTICO: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICO-FILOSÓFICA

Trabalho de Conclusão do Curso de Graduação - Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas apresentado à banca examinadora, pré-requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Apresentado em_____de____de 2021

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra Lúcia Cristina Silveira Monteiro
Orientadora

Prof. Dr.Amauri da Silva Barros

Prof. Dr. Ediel Guerra

Dedicatória

Aos meus filhos, Yasmin Bezalel Amorim Santos e Ybrahim Bezalel Martins Amorim, que me ajudaram a perceber, todos os dias, o quanto eu ainda preciso aprender a aprender.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me sustentado e me erguido todas as vezes que cai. A Ele toda honra e glória. Agradeço a minha mãe Severina que acreditou e apoiou-me nesta jornada do saber e da vida, meus filhos, Yasmin e Ybrahim, que nos seus rosto estava a minha motivação e perseverança de um futuro melhor. Agradecimento especial à professora Lúcia Monteiro que me deu a oportunidade de concluir este trabalho, onde foi possível com a sua inteligência e sabedoria me conduziu-me a inferência histórico filosófica desse texto.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise com base no contexto histórico e filosófico no desenvolvimento do conhecimento matemático, na perspectiva da interpretação de conceitos. O metodologia da pesquisa é de cunho bibliográfico, buscando analisar questões da epistemologia da matemática sobre o que é matemática, que indicam que a evolução histórica está relacionada a utilidade da matemática, mas, especificamente, a maneira de interpretar a matemática em diferentes contextos histórico-filosófico. Pode-se verificar momentos construtivos no desenvolvimento dos conceitos da matemática relacionados às necessidade e potencializados por ferramentas disponíveis, sejam elas, próprias da própria matemática ou como artefato de culturas, nos diferentes períodos de desenvolvimento. Pode-se, pois, perceber esse movimento da matemática que se constrói e reconstrói, em diferentes interpretações, podendo ser ressignificada de acordo com as condições objetivas nas sociedades, e esse é um aspecto que determina condições para surgimento de ideias e construções, em um processo evolutivo simbólico. Nesse sentido, as análises sugerem que para fazer e comunicar matemática é necessário interpretá-la diante das condições objetivas nos diferentes contextos e assim, continuar a fazer e comunicar conhecimento matemático.

Palavras-chave: Pensamento Matemático. Interpretação. Comunicação. Filosofia da Matemática. História da Matemática.

ABSTRACT

The present work aims to carry out an analysis based on the historical and philosophical context of the development of mathematical knowledge, from the perspective of interpretation of concepts. The research methodology is bibliographical in nature, seeking to analyze questions of the epistemology of mathematics about what mathematics is, which indicate that historical evolution is related to the usefulness of mathematics, but specifically the way to interpret mathematics in different historical and philosophical contexts. Constructive moments can be seen in the development of mathematics concepts related to needs and enhanced by available tools, whether they are specific to mathematics or as an artifact of cultures, in different periods of development. It is possible, therefore, to perceive this movement of mathematics that is constructed and reconstructed, in different interpretations, which can be re-signified according to the objective conditions in societies, and this is an aspect that determines conditions for the emergence of ideas and constructions, in a symbolic evolutionary process. In this sense, the analyzes suggest that, in order to do and communicate mathematics, it is necessary to interpret it in the face of objective conditions in different contexts and thus continue to do and communicate mathematical knowledge.

Keywords: Mathematical Thinking. Interpretation. Communication. Philosophy of Mathematics. History of Mathematics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática enquanto formas de raciocínio, está presente nas mais diferentes atividades humanas desde as mais antigas civilizações. Os povos que habitavam próximo aos rios Tigre, Eufrates e Nilo, onde eram localizados a Mesopotâmia e o Egito, respectivamente, são exemplos dessas atividades matemáticas, pois, estas regiões eram produtoras de ferro, armas, além de cultivo da agricultura. Os humanos nessa época já inventaram ferramentas e interferiam na natureza, através do cultivo de agriculturas, uso da terra para sua subsistência, da utilização de técnicas para estocagem, bem como da criação de métodos lógicos que embasaram a divisão da terra e da produção. Para tudo isso, utilizavam o conhecimento matemático existente, por exemplo: geometria para as construções, contabilidade aplicada na coleta de impostos, estoque e transações comerciais (CARL, BOYER e MERZBACH, 2012).

Os gregos, por sua vez, se inspiraram no conhecimento matemático dos egípcios e mesopotâmicos, mas foi a partir de Tales de Mileto (650 a.C.-564 a.C.), que foi o primeiro matemático grego que formalizou a matemática através da influência filosófica da época (CARL, BOYER e MERZBACH, 2012). Segundo Carl, Boyer e Merzbach (2012), o conhecimento matemático se tornará realidade, no entanto, os feitos à época, no que tange à matemáticas, Tales de Mileto assumia que era preciso ser demonstrado. Assim, com a evolução dos símbolos, novas interpretações de ideias anteriores, lida-se com a estrutura cognitiva e a ideia de proporcionalidade, que conduzem às manipulações simbólicas de proposições fazendo surgir no campo da matemática, novos conceitos, tais como ângulos, triângulos, diâmetros, círculos, segmentos, etc., e conceitos intuitivos como ponto reta e plano.

Ao longo da história da matemática, conforme destacou D'Ambrosio (1996), verificou-se que a ciência matemática do modo como a conhecemos foi sendo desenvolvida pelo homem, mesmo em tempos ainda não tão favoráveis. A matemática foi evoluindo na interpretação de seus objetos com o passar dos anos, décadas, séculos, e assim, possibilitando, portanto, a compreensão dos princípios e conceitos que configuraram o entendimento do homem sobre coisas complexas. No entanto, essa compreensão da matemática como um conhecimento relacionado à atividade humana e evolução simbólica parece não ser ainda bem compreendido por muitos na atualidade. Pois, como citou

D'Ambrosio (1999, p.97). “acho que um dos maiores erros cometidos na educação, e especialmente na educação matemática, é desvincular a matemática de outras atividades humanas”. Pode-se perceber claramente que ao longo da história da matemática que a mesma evoluiu devido às necessidades estabelecidas pela dinâmica social ao longo da história da humanidade desde seus primórdios até a era moderna.

A motivação para a abordagem da referida temática no presente trabalho, que é o conhecimento da matemática para comunicar o pensamento matemático, emergiu ao compreender que a comunicação matemática e o pensamento matemático também são instrumentos de comunicação social que se apresentam. como essencial para o desenvolvimento das sociedades e para o desenvolvimento da própria matemática.

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma análise com base no contexto histórico e filosófico do desenvolvimento do conhecimento matemático relacionado às atividades humanas e que podem favorecer a comunicação e o desenvolvimento da matemática no âmbito da Didática da Matemática.

2 METODOLOGIA

Diante dos pressupostos mencionados neste estudo sobre conhecer a matemática para comunicar o pensamento matemático, buscaremos reconhecer a importância das atividades humanas em contextos atuais, por serem assumidas neste trabalho, a importância da relação entre atividade matemática e contexto, com a comunicação desse conhecimento. Assim, o objetivo da pesquisa é compor o campo teórico que aponta a possibilidade de investigação de informações e resultados em uma determinada contextualização, de acordo com essa área de conhecimento (FERREIRA, 2002) e buscar contribuir com a didática da Matemática.

Para a análise e alcance dos objetivos propostos, foi realizada uma revisão bibliográfica. Para isso, foram utilizadas as seguintes bases de dados: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e Google Scholar. Para os critérios de seleção dos artigos, foram considerados os seguintes métodos: artigos e livros apresentam na sua problemática os fatores relacionados à temática do estudo, que versa a respeito do conhecer da matemática para comunicar o pensamento matemático, e que, no entanto, abordam o contexto do estudo.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Marco Histórico na Matemática

Nos anos 586 a.C. - 500 a.C., o discípulo de Tales de Mileto, Pitágoras de Samos cria a Escola Pitagórica, no entanto, à época estas escolas se encontravam ao ensino da filosofia, ciências naturais e matemática (CARL, BOYER e MERZBACH, 2012). Estas primeiras escolas foram responsáveis por disseminar à humanidade a compreensão e o gosto pelo estudo da matemática, colocando a civilização em um caminho que nos trouxe à era científico-tecnológico atual. A contribuição da escola pitagórica, tal como o famoso teorema de Pitágoras, para esse objeto que sobre o domínio de Platão (427 a.C. - 347 a.C.) o matemático Eudóxio de Cnidos (408 a.C. - 355 a.C.) contribuindo com a solução do impasse em que se encontrava a teoria das proporções, depois da descoberta da existência dos irracionais.

No entanto, em momentos anteriores a escola pitagórica, se encontram registros dessa ideia fundamental, que viria a ser conhecida como equação pitagórica, que são os trios pitagóricos nas tábulas de Plimpton, encontradas em estudos arqueológicos sobre a civilização babilônica, já entre 2.500-2.000 a.C. (EVES, 2004), e também, posteriormente, como artefato da cultura egípcia, designado por cordão de 13 nós, ou, esquadro, para determinação dos ângulos de 90°. Esse último, é utilizado por alguns grupos de trabalhadores até nos tempos atuais.

Segundo Carl, Boyer e Merzbach (2012), nesse processo evolutivo da matemática, Euclides de Alexandria (300 a.C.), através da sua obra “Os Elementos”, coloca todo conhecimento matemático existente em conformidade com os novos rigores do saber. Sendo, dali em diante, organizado em treze livros, que ensinam a manusear os objetos matemáticos (números, formas), partindo de definições, postulados, lemas, proposições (teoremas e construção), fazendo dessas assertivas matemáticas, das proposições, um processo cognitivo de demonstração. Dessa forma, a matemática entra em um rigor sistemático. Na obra em questão, tem-se uma estrutura proposicional, que através de um processo dedutivo, conclui sobre a manipulação de conceitos primitivos (aceitos) e de pontos de partida para conclusões ou confirmações de “verdades” matemáticas. Portanto, a matemática sai do processo indutivo (experimental) e começa a ser estruturada através de um processo dedutivo. Mas, para que haja um “fechamento” desse processo sem falhas é preciso estruturar o método de dedução a partir de conceitos e premissas concebíveis.

No entanto, destacam Carl, Boyer e Merzbach (2012), que no entendimento de Euclides de Alexandria, nem todas as verdades podem ser provadas, algumas delas, as mais elementares, devem ser admitidas, ou seja, intuídas, sem demonstração. Assim, ele transforma seus cinco postulados de natureza geométrica em noções comuns, os quais sejam: coisas iguais a uma terceira são iguais entre si; se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais; se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais; coisas coincidentes são iguais entre si; o todo é maior do que suas partes. Com essas mudanças, a matemática grega se estrutura: a partir dessas noções comuns, com poucas ou muitas variações terminológicas, em adaptação com os objetos manipulados matematicamente e através do processo dedutivo.

Então, nessa evolução entre atividade humana e teorias, história e filosofia, em uma perspectiva epistemológica para organização do conhecimento há que se perguntar: Mas, afinal de contas, o que é a matemática? Como dito, quando surgem as primeiras civilizações, surge também a necessidade de controle da produção das atividades que eram exercidas pelos escribas, como a utilização de pequenos cálculos numéricos e geométricos, que evoluem também por raciocínio indutivo. Não havendo ainda a evolução simbólica, uma matemática formalizada como se conhece hoje, a inferência se dava através de processos empíricos, em uma complementaridade entre raciocínios intuitivos, indutivos e experiência.

Olhando para esses contextos é possível ver o processo evolutivo na ideia de quantidades e formas. Mas, a definição do que é a matemática, não em termos definitivos, nasce da necessidade humana. Como bem sabemos, essas necessidades são inúmeras, assim, a matemática pode ser nomeada ou definida de forma genérica, nessa predominância formalista que observamos na atualidade, como uma espécie de "controle", pela forma em que foi sendo estruturada, que predomina nos dias modernos. No entanto, essa visão unilateral, que atua como controle, em que observa-se a matemática hoje, limita alguns desenvolvimentos, como a comunicação e evolução da matemática por essa sua natureza da complementaridade entre raciocínios e experimentos.

3.2 **Evolução do Currículo Matemático:** Adaptação Acadêmica na Educação Básica e Perspectiva Filosófica e Social

Por outro lado, a evolução simbólica do conhecimento matemático permitiu que ele fosse tornado mais criativo ("ideal") e adaptativo. Essa "criação" que torna a "coisa" em algo que produz outra representação do mesmo objeto matemático e nesta segunda ou interpretante (CHARLES PEIRCE, 1839-1914). Ou seja, o símbolo do objeto também pode ser representado. A decomposição do todo, como o axioma 5, em Euclides[1], dá ao objeto um significado real, uma abstração válida e compreensível. Essa última torna a produção do conhecimento matemático, em cada civilização, como capaz de convergir para sua universalização, inspirado numa metafísica aristotélica e kantiana. Sendo essa realidade criada num processo cognitivo de transposição do abstrato para construção dedutiva inferida na lógica.

Por outro lado, a junção do conhecimento matemático, sobre o qual se fundamentaram as produções Boole, Frege, Russell, Cauchy e outros, demonstram que os novos conceitos e os símbolos são criados no relacionamento da matemática com à realidade, ou seja, em uma complementaridade entre intuição e conceitos[2]. A mesma que para Platão é o mundo das aparências físicas abstraídas das ideias, criada no seu próprio esforço (razão), nascidas nas formas aritméticas, formas geométricas e formas morais.

Os seguidores do pensamento de Pitágoras, discípulo de Platão, se reuniram na região onde atualmente conhecemos como Sicília, na ocasião argumentavam que todas as relações científicas são expressas por números naturais (1, 2, 3, ... n …), ou os denominados números racionais ½, ¾, …, n, …. Por causa desse conceito, eles acreditam que espaço, tempo e movimento são compostos de elementos discretos (EVES, 2004). Segundo Eves (2004), acredita-se que Hipaso de Metaponto, seguidor da filosofia de Pitágoras, nascido em 500 a. C, seja a ele atribuído a descoberta dos números irracionais, como por exemplo $\sqrt{2}$, que é o tamanho diagonal do quadrado do lado 1. No entanto, esse achado é considerado um problema na filosofia de Pitágoras. Segundo a história popular da época, foi jogado ao mar por seus amigos.

Por outro lado, Aristóteles contribui para a evolução do pensamento matemático idealizando as classes matemáticas da seguinte maneira: ela seria inferida a partir dos objetos físicos, numa percepção sensível. Ou seja, seria criado um sistema fechado de manipulação proposicional, reduzindo-o a forma sujeito - predicado. Dessa evolução metafísica do

[1] Euclides. Os Elementos. Traduzido por Irineu Bicudo, São Paulo, 200X.
[2] Kant, I. Crítica da Razão Pura. 200X

conhecimento inferido, Leibniz afirma que o predicado de uma proposição está inserido no sujeito, separando as verdades da razão das verdades dos fatos.

Essa racionalidade pretendida pela matemática dos axiomas, postulados e teoremas, se decompõe em proposições mais simples. Essa "materialização" das ideias matemáticas é classificada por Kant como proposições em analíticas e em empíricas, sendo as analíticas as verdades da razão e as empíricas as da percepção sensível, situadas no espaço e tempo.

No sentido das verdades matemáticas acima, podemos deduzir que há na produção desse conhecimento uma dependência entre a matemática produzida através da razão e a que é produzida através da experimentação sensível, uma metafísica. No entanto, há outro fator essencial nesse processo de construção do conhecimento que está associado às necessidades humanas de sobrevivência social. Pois, a sociedade moderna é organizada politicamente, socialmente e culturalmente, uma estruturação que traz junto uma demanda científico-tecnológica. Observando isso, percebemos que sociedade, cultura e matemática formam uma triangulação essencial na construção do conhecimento que passa a ter aplicabilidades, um positivismo. Então, nesse sentido, o conhecimento deveria ser construído, além do processo cognitivo, ou seja, de forma "mediada pela ação criativa de diversos operadores mentais, impulsionadas pela necessidade de ter, compreender e explicar a realidade inventada e validada pela sociedade humana". Como também deve ser construído e compreendido nas observações dos fenômenos sociais.

A partir do século XVI, com René Descartes (1596-1650) há uma estruturação do pensamento moderno, que unifica a álgebra e a geometria. A partir disso é criada a geometria analítica dentro de um sistema de coordenadas, dando início a revolução científica. Destacamos como principais nomes: Galileu Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1643-1727), Nicolaus Copernicus (1473-1543), Francis Bacon (1561-1626).

Descartes com a obra *Discurso sobre o método* (1637) e *Meditações* (1641) estabelece metodologias para o pensamento moderno, baseado no ceticismo metodológico. Ou seja, o "*Ego cogito ergo sum*" (penso, interpreto, logo existo) consiste em verificar as evidências reais e infalíveis do fenômeno a ser estudado. Esquematizado da seguinte forma: analisar, um processo de decomposição proposicional que infere de ideias complexas às ideias simples, estudando a "unidade" elementar dessas ideias; sintetizar, reagrupando todas essas unidades na reconstrução do todo; enumerar, tomar as conclusões e princípios empregado nesse processo metodológico a fim de verificar uma coerência racional do objeto estudado.

Nesse século ainda, houve grande demanda de mão de obra qualificada, principalmente nas construções, pois o mundo estava em expansão, levado pelo progresso científico-tecnológico. Desse modo, escolas e centros superiores de formação foram responsáveis em sistematizar o ensino de matemática de maneira didática e mais compreensível, tais como as citadas: *Royal Academy of Sciences* e *École Polytechnique*. No intuito de suprir as demandas da sociedade, essa sistematização foi liderada por matemáticos dos séculos XVIII à XX, como Henri Poincaré, Augustin Louis Cauchy, Amille Jordan e Charles Hermite, Jean-Baptiste Biot, Pierre-Simon Laplace, Jean Baptiste Fourier, Joseph Louis Lagrange, entre outros que também foram alunos da *École Polytechnique*.

Esse processo de universalização do conhecimento matemático, tem-se dado por uma eclosão de criatividade, seguida por séculos de estagnação. Nesse contexto, o Renascimento pro-renascimento do século XVI apresenta novos progressos para o conhecimento em questão, impulsionado pelas descobertas científicas crescentes e pela sistematização das novas verdades inventadas. Em virtude disso, há uma estruturação do currículo caracterizada pelo rigor (lógica), formalismo e intuicionismo, denominada de matemática moderna. Desenvolvendo mais essa base das concepções matemáticas que vieram a ser criadas, o logicismo é um instrumento utilizado ao raciocínio para as construções analíticas das proposições. Essas são inferidas através das leis gerais da lógica.

Sobre as inferências dedutivas, partimos de definições formuladas numa perspectiva tipográfica, por pressuposição, tais como notação e conversão, fundamentais no formalismo de Kant e Leibniz, em suas concepções, a priori (evidências matemáticas) e logicismo (inferências lógicas), respectivamente. No formalismo, Hilbert e Cantor sistematizam a forma de construir teorias matemáticas, fundamentando a independência e a consistência do processo metodológico teórico na criação do conhecimento matemático. Porém, entre as reações de alguns críticos em relação a essa matemática moderna, podemos citar o professor de matemática e historiador americano, Morris Kline, em seu livro *Why Johnny can't add: The failure of the new math.* Ele aponta a origem e as deformações dessa nova maneira de lidar com a pesquisa e prática da nova matemática. No entanto, ninguém foi capaz de nos tirar do paraíso que Cantor criou para nós" (HILBERT, ANO, p. 19).

3.3 A Construção do Pensamento Matemático Filosófico na Pedagogia

Até aqui foi possível entender o processo de universalização e expansão do conhecimento matemático. Podemos perceber que a partir do movimento da Matemática Moderna[3] Houve uma maior preocupação com a educação matemática. Mas, como esse processo de construção do conhecimento matemático é feito nos dias de hoje? Há um método para construí-lo? E se há, quais são? Esse conhecimento é ensinado para mais pessoas? Todas elas o recebem de forma democrática? E se recebem, como se dá essa instrução? É passada de maneira adequada? De qual forma o ensino da matemática está estruturado? Há deficiência nesse processo? Quais instituições são responsáveis por esse ensino? Quais as metodologias de ensino-aprendizado podem ser utilizadas para aperfeiçoá-lo?

Levantadas todas essas questões, partimos do pressuposto que o ensino da matemática passou a ser embasado em três pilares: definições, manipulação e aplicação. A definição é constituída por, demonstrações e correlações entre estruturas da própria matemática. A manipulação compreende o manuseio de fórmulas algébricas, de operações aritméticas, de soluções de equações por meio de algoritmos. A aplicação consiste na utilização de noções e teorias da matemática para a resolução de exercícios, para obter resultados, tirar conclusões e fazer previsões. No entanto, as avaliações sistêmicas revelam que a aprendizagem dos alunos no sistema brasleiro, não alcançam os resultados mínimos necessários, não há compreensão dos conceitos matemáticos básicos pela maioria dos alunos oriundos dos sistemas de ensino básico.

Na comunicação do conhecimento matemático, com o movimento da matemática moderna[4], dava-se ênfase a linguagem dos conjuntos, abordando as diferentes partes da matemática excessivamente formal.

No final da década de 80 do século XX, a educação matemática surge como grande área de pesquisa, o sistema de ensino se amplia, objetivando alcançar todos os brasileiros, mas, a implantação desse projeto continua uma problemática até os dias de hoje. Mesmo com surgimento de programas nacionais bem-sucedidos, tais como pós-graduações de matemática aplicada e educação matemática no Brasil alcançando excelência na qualidade de suas pesquisas e na formação de pesquisadores, e sabendo que nesses programas há a

---

[3] Roxo. E.
[4] Ibid. Movimento da matemática moderna inicia-se em meados do século XX.

presença de pesquisadores oriundos do sistema da matemática moderna, em que educação era privilégio de poucos, fica constatada uma ineficiência, como mostra os indicadores nacionais e internacionais que apontam que 71,67% dos alunos na Educação básica têm níveis insuficientes de aprendizados em matemática 1. Alencar e Viana (2012), em seu artigo, *O ensino de ciências e matemática no Brasil: Desafio para o século 21,* mostram-nos a importância do ensino da matemática na educação básica, como

> […] um instrumento disseminador da competência para o pensamento quantitativo nas sociedades modernas. Como tal, é de importância estratégica tanto para a formação de uma cidadania consciente quanto para a geração de capital humano qualificado, indispensável para a competição no mundo contemporâneo (ALENCAR e VIANA, 2012, p. 26).

3.4 Contextualizando os Avanços do Ensino da Matemática

O contraste entre o ensino do conhecimento acadêmico, rigoroso e formalístico, e o ensino do conhecimento matemático ensinado em níveis básicos, como pouco rigoroso e formalístico, aponta para a necessidade de uma nova abordagem. De posse desse diagnóstico e desses indicadores negativos o que nos preocupa é o desenvolvimento do país, pois este vincula-se ao conhecimento matemático, visto que é o conhecimento base para o desenvolvimento científico e tecnológico. Diante disso, os instrumentos propostos pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e pela Sociedade Brasileira de Estatística, através de um documento por elas elaborado, do ponto de vista de políticas públicas, perpassa a centralização dos objetivos do ensino básico de matemática, listados por Euclides Roxo através das necessidades de

> 1- Formar uma população matematicamente letrada, com domínio dos instrumentos quantitativos necessários para o cotidiano e para o mercado de trabalho. Estes instrumentos que abrangem o conhecimento do significado de números e de grandezas de domínio das operações básicas com os números e suas aplicações relevantes na vida cotidiana e do desenvolvimento de raciocínios que conectem os conceitos abstratos da linguagem matemática, que incluem as formas geométricas e a álgebra básica e de atividades mais complexas, tais como extração, interpretação e representação de dados quantitativos em gráficos e tabelas.
> 2- Fornecer bases sólidas para a educação de nível médio e superior e estimular a vocação para as profissões nas diversas áreas que são essenciais para o desenvolvimento social, científico e tecnológico do país e que requerem formação matemática especializada (ALENCAR; VIANA, 2012, p. 224, 222-226).

De fato, esses objetivos alcançados levaram a nação a ser inserida na economia globalizada, estruturada no mercado de trabalho internacional e da internet são demandas que prevê competência matemática. No entanto, para desenvolver tal competência e fluência matemática a fim de chegar a níveis competitivos no mercado internacional é preciso, primeiramente, olhar como se deu o desenvolvimento do ensino da matemática no Brasil.

Introduzida por Euclides Roxo a reforma do currículo de matemática, por ele também narrado, levou o país a estruturar seu currículo, baseado no movimento internacional da modernização do ensino de matemática, tendo como principal eminente o matemático alemão Felix Klein (1849 - 1925). Essa reformulação curricular do ensino de matemática passa a agregar métodos modernos de ensino com junções de objetos matemáticos, até então, estudados separados, os quais são: aritmética, álgebra e geometria. Passam a ser "empacotados", mas se defende o estudo deles, separado em um processo cognitivo evolutivo, respeitando os níveis estabelecidos.

Desta forma, ignorando o contexto político-social da época, ainda que o consideramos de extrema importância, pois são através das decisões políticas que são criadas as políticas públicas de ensino. É levando em consideração as demandas da sociedade que Félix reformula o currículo moderno de ensino na Europa e Estados Unidos, a partir do primeiro Congresso Internacional de Matemática, acontecido em Roma, 1908. Lá é criado o *Internationale Mathematische Unterrichts Kommission* (IMUK), *Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique* (CIEM). Desde então, essa comissão passa a estruturar o currículo, através da participação dos países membros para a elaboração e produção dos temas que devem ser ensinados. Nos congressos o ensino da matemática é considerado a partir do fundamento e entrelaçamento de três bases que movem as civilizações: o social, a cultura e a matemática. Portanto, cria-se um conjunto de diretrizes e métodos de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático de forma cognitiva evolutiva, uma universalização do ensino da matemática.

No Brasil, Euclides Roxo trabalhou sua versão compilada e organizada de maneira a suprir a demanda social do país, observando a proposta da reforma do ensino de matemática da comissão que fora criada. Assim, na perspectiva de considerar o aspecto psicológico (intuitivo), torna o ensino, não unicamente dependente dos objetos matemáticos, capaz de atender as necessidades técnicas e sociais do indivíduo, demandadas pela sociedade. Um exemplo seria a aplicabilidade dos objetos matemáticos aos conjuntos de outras áreas de ensino (multidisciplinaridade), o que tornaria o ensino mais vivo e mais produtivo. Essa reforma permitiu subordinar o ensino de matemática à escola moderna, o que decorreu da necessidade de terem em vista suas aplicações às ciências físicas, naturais e as técnicas, resultando na unificação da aritmética, da álgebra, da geometria e da trigonometria. Permitiu, também, a introdução da noção de função, o que dá uma mobilidade visual (gráficos) aos objetos matemáticos.

Com essa introdução da ideia de mobilidade de cada objeto matemático foi possível, em cada caso particular, compreender o caráter geral desses objetos. Isso desperta o indivíduo, nesse caso os estudantes, a noção intuitiva de dimensão e proporciona a eles uma experiência matemática em ambientes de aprendizados. Tais como, laboratórios de matemática, utilizando ferramentas de medição, papel milimetrado, balanças, termômetros, alavancas, polias, aparelhos de demonstração, figuras geométricas, etc. Além desse amplo laboratório, é possível inserir no cotidiano dos discentes os recursos de métodos heurísticos que permitem uma experimentação e auxiliem no "descubra você mesmo" o que está sendo ensinado.

Portanto, partindo do pressuposto acima, podemos indagar a possibilidade de resgate desse processo interativo e repensar a maneira de transmitir o conhecimento matemático, levando em consideração o processo cognitivo do indivíduo. Tendo em vista, a importância do educador matemático como o facilitador do aprendizado, ou seja, numa perspectiva da educação matemática com a presença daquele educador que se importa com os contextos e os entrelaçamentos (sociedade, cultura e matemática), os quais a disciplina "carrega", tal como dito no livro O que é Matemática*,* de Richard Courant, "A matemática, como expressão da mente humana, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa, e o desejo da perfeição estética" (COURANT e ROBBINS, 2012, p. 345).

Courant e Robbins (2012) também destacam que a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade são os elementos básicos da matemática, considerando as diferentes tradições e seus diferentes aspectos em cada cultura, tendo por forças antitéticas o seu constituinte de "vida", de utilidade e de valor da ciência matemática. No entanto, o desafio é utilizar novos métodos e novas ideias na metodologia de ensino da matemática na educação básica considerando os aspectos estruturados por Klein e Ribeiro, (1995). O primeiro passo é o diagnóstico de como está se dando o ensino de matemática nos anos iniciais e finais da educação básica. Tendo em mente, que são as condições de trabalho do educador matemático que vão lhe favorecer, se é um ambiente onde poderá aplicar ou adequar às novas realidades científico-tecnológico, levando em consideração os níveis de cognição, de cultura e sociais da escola, que se refletem na identidade intelectual do aluno.

A instituição escolar é fundamental nesse processo de construção do conhecimento, pois é nela que acontece a interação da vivência experimental da construção cognitiva do ensino-aprendizado, mediado pelo educador matemático com suas multidisciplinaridades em modelar o indivíduo intelectualmente. Então, nesta perspectiva experimental fundamentada no pensamento matemático, baseado nos métodos e conceitos, que os objetos matemáticos são caracterizados em sua ampla concepção de existência. Dessa forma, podemos inferir que o objeto matemático será entendido amplamente no ensino básico, considerando seu espectro evolutivo cognitivo e que ele será construído considerando, também, os aspectos etimológicos e epistemológicos associados à estrutura simbólica de como o conhecimento se faz através da metacognição.

Raymond Duval (2012) em sua teoria de registro de representação semiótica, parte do seguinte pressuposto: um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos para a nova formulação do pensamento moderno, na espera de que o discente descreva, raciocine e visualize o objeto matemático. Pois para Duval (2012, p.), o pensamento está ligado às operações semióticas uma vez que os objetos matemáticos fogem à percepção, podendo ser compreendidos através de suas representações. É possível ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. Como por exemplo, um registro de representação linguística (função do segundo grau) ou um registro de representação simbólica (f(x)= x^2), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função)[2].

Portanto, considerando a natureza da matemática e seu nível de realidade (educação matemática), nas perspectivas histórica, antropológica e funcional, procuramos fundamentá-la como ciência na educação básica. Considerando sua perspectiva de aplicabilidade em modelagem na realidade, a qual lhe é útil e necessária para a organização civilizatória. Esses aspectos ausentes ou rejeitados pelo professor de matemática trazem prejuízos ao ensino e a maneira como a disciplina passa a ser vista no contexto social, histórico e cultural em todos os níveis de ensino.

Desse modo, para construir o conhecimento matemático é preciso levar em consideração três elementos que formam o espaço-tempo da realidade do indivíduo: matemática cotidiana, sócio-cultural; matemática escolar, técnico-social; e matemática acadêmica, científico-formal. Caracterizados por uma didática-pedagógica não linear, seguindo o entrelaçamento numa perspectiva de ensino-aprendizagem. Com esses elementos afirmamos que o ensino da matemática poderá se desenvolver de forma dinâmica e espiralada, em outras palavras, ele conseguirá ser um diálogo horizontal e vertical capaz de se comunicar com outras áreas do saber. Com essa multidisciplinaridade amplia-se o campo de experimentação sobre o objeto matemático, levando a uma fixação de conceitos, definições, propriedades, fluência matemática e aplicabilidades do conhecimento.

Refletindo sobre esses aspectos, tendo como base a matemática, a cognição, a sociedade e a cultura, apoiados na evolução histórica da matemática, impulsionados pela necessidade humana e sua sobrevivência, verificamos como a matemática se desenvolveu e compreende o momento atual e é capaz de aperfeiçoar o aprendizado, levando em consideração os processos cognitivos, sendo usada como ferramenta de tradução da realidade da educação e da sociedade. Podemos construir o conhecimento matemático, no campo educacional, voltado para formação de cidadãos conscientes e críticos, de pesquisadores e educadores. Isso levará o país a melhorar os indicadores nacionais e internacionais como também a alcançar um sustentável desenvolvimento econômico, social e cultural.

3.5 Teorias do Conhecimento Matemático

No ensino de matemática deve-se ter em mente a existência de fatores cognitivos do indivíduo, que influenciam a produção do saber matemático, proporcionando conhecimento que ainda não nos são familiares. Nesse enfoque, percebemos a necessidade de uma educação matemática voltada para a construção dos conceitos. Mas, para alcançar esses objetivos, se faz necessário conhecer o objeto estudado, os conceitos que compõem o currículo, partindo do que já se conhece, e endosso o argumento, tomando as palavras de Kant, que afirma: “No tempo, pois, nenhum conhecimento precede a experiência, todos começam por ela” (KANT, 1980, p. 23).

Portanto, é importante apresentar situações problemas que proporcionem uma liberdade de interpretação para quem está se dando a conhecer, aluno, buscando explorar artefatos da cultura na atualidade, ampliando a possibilidade de representações para a comunicação do pensamento matemático.

Considerando a importância da experiência a priori do indivíduo, exercitando os sentidos para interpretação e produção de representação semiótica. Cruz diz que: “O signo não representa o objeto em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia (conceito) que é conscientemente reconhecido pelo sujeito cognitivo (CRUZ, (2015, p.35).

E nessa experiência subjetiva do raciocínio, tais, como abdução[5], indução e dedução, procura-se traçar meios de chegar ao conhecimento, por exemplo, o processo de atividades, que o sujeito cognoscente tem como soma suas experiências mentais que constitui seu conhecimento.

Considerando os aspectos mentais, dentro do contexto histórico-cultural do indivíduo, esses conceitos matemáticos(genericamente) que constitui o conhecimento científico-tecnológico que norteia o caminho da construção dos significados matemáticos. Como concebe OTTE,

> As coisas no mundo são essencialmente de dois tipos, a saber, objetos e símbolos, onde os objetos possuem existência bem determinada, mas não tem sentido, enquanto os símbolos (signos) têm sentidos, mas não tem existência própria (OTTE, 2012, p. 89).

Portanto, o conhecimento matemático envolve um conjunto de atividades, que considera um contexto vivencial, tanto extra escolar, escolar e estrutural, do ponto de vista, social e científico-tecnológico.

Alcançando os objetivos do ensino aprendizado que construa indivíduo matematicamente apto ao mundo científico-tecnológico em sua livre escolha de pensamento.

Nessa escolha de produzir conhecimento matemático ou criar signos com experimentos mentais, pode-se estabelecer analogias entre métodos empíricos (experimentos mentais) e analíticos (formais).

Daniel Cordeiro de Morais (2013), dá um exemplo de produção de conhecimento em que distingue os experimentos mentais e inferência analítica, assim, mostrado na

[5] A abdução é considerada por Peirce como o momento da elaboração de uma hipótese. Em uma perspectiva filosófica, ´pde ser reconhecida como um intuição mediada por signos.

demonstração do vigésimo presidente norte-americano James Abram Garfield[1] do teorema de Pitágoras.

Prosseguindo com a inferência do objeto explicitado, que fixa como proposição o referencial anunciado de um triângulo retângulo, que a área do quadrado cujo lado tem como medida a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujas medidas dos lados são iguais às medidas dos catetos.

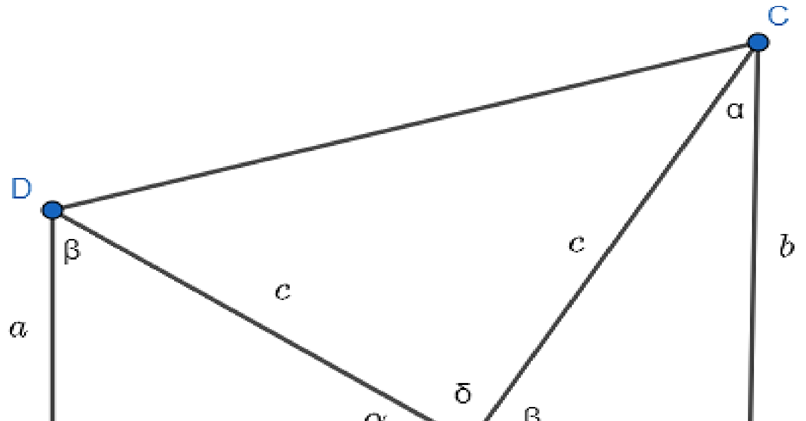
3.5.1 Demonstração

Considere um triângulo retângulo, com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b. Usando esse triângulo, construa-se um trapézio como na figura[3]. A seguir. Observe que o triângulo isóscele de lado medindo c é retângulo, uma que da hipótese conclui a igualdade $\alpha + \beta = 90°$. Daí, a altura e a base desse triângulo medem c e a sua área é $\frac{c^2}{2}$. Ainda pelo fato do triângulo de lados a,b e c ser retângulo, sua área é $\frac{ab}{2}$. Dessa forma. Igualando a área do trapézio, de base a,b e altura $a + b$, com as somas das áreas dos três triângulos da figura[3], temos $\frac{(a+b)}{(2)} * (a + b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$, e fazendo as devidas simplificações, encontra-se $c^2 = a^2 + b^2$.

Agora, segue a construção de atividades cognitivas vivenciando uma experiência mental a níveis de interpretação e representações possibilitados por tecnologias digitais, tais como o *software* Geogebra.

Continua-se, a[3] traçar uma linha AB, paralela ao horizonte e sobre o ponto B, traçar uma perpendicular BC, e no ponto A traçar uma perpendicular AD, ligando depois a inclinada DC, onde a linha DC é um plano inclinado. Depois traçar uma linha DE que é um plano inclinado, onde pode "soltar" uma bola que desce livremente pelo Plano inclinado, fazendo um movimento induzido pelo ângulo DÊB" até o ponto B (figura 1). Traçar ao final uma linha EC, que é um plano inclinado, que forma o triângulo retângulo CDE isósceles.

Figura 1-Trapézio, subdivido em três triângulos inscritos.



Fonte: Autor (2021).

Observe que, temos, três triângulos retângulo[2] inscrito no trapézio ABCD, como a área do triângulo é dado pelo produto da base a pela altura b dividido por 2, mais (+) a área do triângulo retângulo DEC, dada também pelo produto da base c pela altura c então, verifica-se que a soma das áreas dos triângulos AED, EBC e DEC respectivamente, configura a totalidade da área do trapézio ABCD, somando a área do triângulo retângulo AED mais a área do triângulo retângulo EBC mais a área do triângulo retângulo DEC, inferindo na totalidade da área do trapézio ABCD, concluindo-se no quadrado do segmento DE ou EC é igual a soma do quadrado do segmento DA ou BE mais o quadrado do segmento AE ou BC.

Uma nova evolução que busca construir o saber matemático na sua ênfase dos aspectos de abstração importante do indivíduo cognoscente que na transposição do subjetivo, o social e formação. [1]James Abram Garfield(1831-1881)James Abram Garfield foi um advogado, professor e político norte-americano que serviu como 20º Presidente dos Estados Unidos

Considerando as possibilidades dos experimentos mentais na atualidade, a ondição de existência dos triângulos internos ao trapézio apresentado anteriormente é vivenciada pelo fato de sua decomposição de área total do trapézio, tendo como postulado primeiro a inferência da área do triângulo que visualmente, nos tempos atuais podem ser experimentados através do *software* de geometria dinâmica, como o Geogebra.

Apesar de já ter ganhado seu espaço, a Matemática enfrenta sérias dificuldades para sua devida aceitação enquanto disciplina condicionada à fluidez natural das coisas. Tudo está embasado nela, mas a percepção desta disciplina, de forma adequada, precisa que a mesma seja trabalhada a partir de métodos criativos que facilitem a sua compreensão (RAMOS, 2017).

O ensino da Matemática tem sua importância para a promoção de olhares mais questionadores acerca de eventos não compreendidos. A formação do pensamento crítico ocorre nos primeiros anos letivos do indivíduo e colabora diretamente com a formação do pensamento do mesmo, daí a importância que o aprendizado seja eficaz e de grande relevo. Pois, daí, surgem os primeiros passos para a formação de matemáticos. “Ao se examinar o ensino da matemática com certa profundidade de reflexão, nota-se o quanto ela é capaz de contribuir à formação social e profissional dos alunos, proporcionando-lhes desenvolvimento”. (LOPES, 2006, p. 8)

A Matemática está presente em todos os aspectos da vida humana, daí sua importância, posto que tudo está diretamente ligado a ela. Utilizá-la é indispensável, mas para tanto, é preciso compreendê-la o que é inviável sem um ensino criterioso voltado para a mesma. Entretanto, há que se falar que o estudo da disciplina de Matemática não está separado dos demais interesses e atividades da vida escolar. Segundo esclarece Maciel (2009, p. 16), “[...] trata-se de um meio de suma importância na formação social, intelectual e ainda, no desenvolvimento da autonomia e da criticidade do educando.” Verifica-se, portanto, a grande contribuição que o ensino da Matemática pode oferecer para o indivíduo.

Para que se alcance, efetivamente, o ensino eficaz que vise obter resultados positivos, faz-se necessário que ao ensinar Matemática devem-se adotar preceitos relevantes quais sejam: observar, experimentar, construir. De modo que venha proporcionar ao estudante o conhecimento, bem como, do mundo ao seu redor, para que este entenda e venha colocar em prática os conhecimentos adquiridos (BIANCHINI, 2017). O ensino da Matemática precisa de constante inovação. A criação de métodos que busquem prender a atenção do estudante é indispensável, visto que estes estão, atualmente, numa era de virtualidade, para despertar seu, o professor deve adotar para com seus estudantes, conceitos nos quais eles irão atuar para compreender as relações com que lidam.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer do presente trabalho, pode-se perceber que o caminho a ser percorrido está fundamentado em alicerces, que podem vir a ser construídos e diante de fatos históricos, logo, nos possibilita a percepção da evolução do conhecimento e a necessidade de buscar o conhecimento matemático e o disseminar.

A abordagem sobre o tema leva a alguns questionamentos: como a sociedade se organizou ao longo desse tempo? Qual papel da matemática nesse processo civilizatório? Por que ela surge e quais as suas necessidades em diferentes momentos históricos? Até então, foi narrado o contexto do desenvolvimento do conhecimento matemático até chegar aos dias atuais, considerando fatos políticos, econômicos, sociais e culturais. No entanto, observamos que a matemática precisou de uma sistematização, pois a demanda da sociedade exigia uma nova configuração estrutural e curricular, devido isso, alguns matemáticos contribuíram em sua época para uma nova formulação do conhecimento.

Todavia, na realidade de hoje, a educação matemática tem um protagonismo ainda mais relevante, pois traz ao educador matemático a responsabilidade de resgatar e aperfeiçoar a importância da matemática na sociedade. Deve-se considerar a matemática como uma ciência que transforma e facilita a vida humana, mas também como um conhecimento interativo, pensando nos processos cognitivos de assimilação e acomodação do modo de construí-la (Jean Piaget). Ou seja, a relação de sujeito-objeto leva a uma experiência de metacognição, na qual o processo natural do aprendizado dará e produzirá o saber matemático.

A partir do conhecimento desses processos cognitivos e da motivação foi que surgiu a matemática na sociedade. Para a interação da construção do conhecimento faz-se necessário acrescentar à matemática novos elementos inspirados pela matemática hoje, que antes tratados como independentes, foram transformados em um objeto concreto (físico), fato importante para a abstração dos objetos matemáticos. Esses dispositivos auxiliares da abstração, tais como calculadoras, informática, etc., e a ciência e tecnologia servem para atender e facilitar as demandas das sociedades, auxiliam as necessidades humanas. Dessa maneira, a incorporação desses novos objetos concretos, utilizados de forma interativa entre o teórico e o “real”, vem facilitar a fixação de “novos” e “velhos” conceitos matemáticos resultando na construção do conhecimento.

Necessidades que vão se adaptando às atividades socioculturais e aos processos cognitivos especificados no indivíduo. Isso permite a evolução do conhecimento existente, através de uma produção e reprodução da matemática, de acordo com as necessidades evidenciadas nas atividades praticadas dentro dos contextos sociais (positivismo) e dos fatos históricos (industriais e tecnológicos). O que justifica a necessidade de o professor-educador matemático considerar a perspectiva histórica, social e cultural nos processos cognitivos, pois para conduzir essa matemática nos dias de hoje é preciso reconstruir e criar novos mecanismos facilitadores do aprendizado na perspectiva da universalização do conhecimento humano.

Para tanto, devemos observar a educação matemática também com um olhar antropológico, ou seja, levando em consideração como se deu a produção do conhecimento matemático e quais as necessidades cotidianas do indivíduo. Tentando compreender como se deram as representações das ideias matemáticas, tais como sugerem as expressões: "matemáticas dos índios", "matemática dos pedreiros", "matemáticas dos vendedores ambulantes", "matemáticas dos agricultores", etc. Desse modo, conseguimos caracterizar o conhecimento matemático e as necessidades humanas de comparar, medir, quantificar, entre outras habilidades e competências matemáticas. É assim que se criam códigos e uma linguagem de comunicação, onde a matemática passa a ser compreendida por todo mundo.

Portanto, para refletir sobre educação matemática, devemos ter como fundamentação o conhecimento matemático do dia a dia, suas produções intelectuais, seus limites e suas perspectivas futuras. Com isso, queremos dizer que o educador matemático deve conhecer bem os objetos matemáticos e sua abrangência para que o conhecimento seja exposto de maneira ampla, de forma que seja possível uma interação entre o sujeito e o objeto e a criação de uma experiência cognitiva organizada e sistematizada.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Hilário; Viana, Marcelo. **Ensino de Ciências e Matemática no Brasil: Desafios para o Século 21**. *Parcerias Estratégicas*. 2012, 16 (32): 221 — 226.

BIANCHINI, Renata Viani Hernandes. **A importância da matemática em nosso dia-a-dia.** Disponível em: < https://www.webartigos.com/artigos/a-importancia-da-matematica-em-nosso-dia-a-adia/137334> Acessado em: 06 de jul. 2021.

CARL, B; BOYER, MERZBACH, Uta C. **A história da matemática**, Tradução da primeira edição americana Tradução de Helena Castro prefácio de Isaac Asimov **Editora:** Blucher; 3ª edição, 1 janeiro 2012.

COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O Que é Matemática? Subtítulo Uma Abordagem Elementar de Métodos e Conceitos.** Ed. 1, Editora Ciência Moderna, p. 662, 2012.

D'AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012, p. 266-297.

EVES, H. **Introdução à história da matemática,** trad. H.H. Domingues, Ed. Unicamp, Campinas, 2004 (original em inglês: 1964).

FERREIRA, N. S. A. **As pesquisas denominadas "estado da arte"**. Educação & Sociedade. Campinas, ano 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.

GARBI, Gilberto Geraldo. **Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. Editora livraria da física, 2010 edição 1°.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura**. Trad. Valério Rohden e Baldur Moosburger. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

KLEIN, R.; RIBEIRO, S. C. **A Pedagogia da repetência ao longo das décadas. Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação. Rio de Janeiro: Fundação Cesgranrio**, v.3, n.6, p.55-62, jan./mar. 1995.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise** vol. 1 edição 14, Rio de janeiro: Associação Instituto de matemática pura e aplicada, 2016.

MACIEL, Mariana de Vargas. **A importância do ensino da matemática na formação do cidadão.** Uruguaiana 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). PUC Rio Grande do Sul. Disponível em:< file:///C:/Users/wildc/Downloads/6058-20126-1-PB.pdf> Acessado em: 10 de julho de 2021.

LOPES, Washington Lauriano. **Filosofia da educação matemática reflexão e pesquisa**

sobre a importância do ensino de matemática. Disponível em: http://www.unimesp.edu.br/arquivos/mat/tcc06/Artigo_Washington_Lauriano_Lopes. pdf. Acesso em 10 de jul. 2021.

OTTO, Michael. **O formal, o social e o subjetivo: Uma introdução à filosofia e à didática da matemática,** Editora: Editora Unesp; 1ª edição, 2002.

RAMOS, Taurino Costa. **A importância da matemática na vida cotidiana dos alunos do ensino fundamental II**. **Cairu em Revista**. Jan/fev 2017, Ano 06, n° 09, p. 201-218, ISSN 22377719. Disponível em: < https://www.cairu.br/revista/arquivos/artigos/20171/11_IMPORTANCIA_MATEMATICA. pdf> Acessado em: 05 de jul. de 2021.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia da matemática**, tradução Maria Luiza X de A. Borges Editora: Zahar; 1ª edição, 7 fevereiro 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil.** Edição 1, Ano, 2003, Volume 1, Editora SBEM.